UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE INVESTIGACIONES
Y CONSULTORÍAS - CIC

Matemáticas I
para las Ciencias Económicas

Lina María Grajales Vanegas - Camilo Ernesto Restrepo Estrada
Sergio Iván Restrepo Ochoa - Félix Ruíz De Villalba

Matemáticas I
para las Ciencias Económicas

Lina María Grajales Vanegas
Camilo Ernesto Restrepo Estrada
Sergio Iván Restrepo Ochoa
Félix Ruíz De Villalba

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE INVESTIGACIONES Y CONSULTORÍAS –CIC

AUTORES. Lina María Grajales Vanegas.
Camilo Ernesto Restrepo Estrada
Sergio Iván Restrepo Ochoa
Félix Ruíz De Villalba

Matemáticas I para las Ciencias Económicas
Colección
Centro de Investigaciones y Consultorías —CIC—
Universidad de Antioquia

ISBN: 978-958-8890-66-1

Primera edición
Corrección de texto e indización: María Luisa Valencia Duarte
Diseño de cubierta: Cristina Yepes Pérez
Diseño, diagramación, digitalización y terminación: Editorial L. Vieco S.A.S.

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia

Centro de Investigaciones y Consultorías Universidad de Antioquia —CIC—
Teléfono: (574) 219 58 40
E-mail: ciceconomicas@udea.edu.co
Página web: http://www.udea.edu.co/portal/page/portal/SedesDependencias/CienciasEconomicas/B.Institucional/D.DependenciasAdministrativas/CIC
Apartado 1226. Medellín. Colombia

Contenido

Parte 2. Números reales

Lista de figuras

Presentación

Diseñado para quienes inician las carreras de economía y ciencias afines, *Matemáticas I para las ciencias económicas* contiene los pilares de la ciencia matemática aplicada en estas disciplinas. Desde la base, los conceptos de validez lógica, pasando por las teorías de conjuntos, el álgebra, las funciones e identidades trigonométricas hasta los límites y derivadas, este texto presenta los conceptos básicos y los ilustra mediante ejemplos y ejercicios, cuyas soluciones se encuentran al final de cada capítulo para facilitar el trabajo individual.

Matemáticas I para las ciencias económicas es el resultado del trabajo de un equipo de profesores, con una amplia trayectoria en docencia e investigación en matemáticas con énfasis en las disciplinas económicas. Por esta razón, se centra en las dificultades observadas entre los estudiantes y los vacíos detectados al abordar problemas de mayor complejidad. De este modo, puede afirmarse que sin claridad en los aspectos desarrollados en el presente texto, sería inviable acometer la solución de problemas y ecuaciones de microeconomía, macroeconomía, así como comprender conceptos claves, como la teoría de juegos, y métodos matemáticos específicos.

Este libro hace parte del material de apoyo a la docencia del Departamento de Estadística y Matemáticas y está financiado por el Centro de Investigaciones y Consultorías, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Antioquia.

Parte 1.
Algunos aspectos de lógica matemática y de teoría de conjuntos

1. Lógica matemática

La lógica es, en términos generales, la ciencia que investiga, formula y establece los principios del razonamiento. La palabra proviene del término latino lógica, y este, del griego *logikè*, cuya etimología significa “ciencia del discurso” o “ciencia del pensamiento”. Como ese nombre lo indica, tal ciencia se dedica al análisis de las afirmaciones que se establecen y de las que se deducen de sus asociaciones. En su sentido más moderno, la lógica no se ocupa de establecer la veracidad del contenido de una determinada afirmación, sino que se encarga de determinar la coherencia de las afirmaciones, es decir, de la validez de las inferencias.

Comprender los principios de la lógica es básico, porque su desconocimiento limita e impide el dominio de cursos superiores en matemáticas, así como las aplicaciones de esta ciencia a otras ramas. De este modo, su manejo se considera fundamental para un estudio riguroso del cálculo.

1.1 Los elementos de la lógica

La lógica se apoya en una serie de conceptos que es necesario entender previamente. Estos conceptos permitirán no solamente abordar el tema de la lógica, sino también de la matemática en general. A continuación abordamos los básicos:

Proposición: Enunciado lingüístico que es susceptible de ser verdadero o falso. Se divide en dos tipos:

Proposición simple: Es una proposición de la forma más trivial (básica).

Proposición compuesta: Es la interacción entre un conjunto de proposiciones simples mediante enlaces llamados conectores lógicos.

Las proposiciones se denotan usualmente mediante letras minúsculas del alfabeto, donde a cada proposición se le puede asignar solo un valor de verdad.

Ejemplo 1.1

Veamos algunas proposiciones simples:

a) p: Todos los antioqueños son colombianos. Es una proposición verdadera

b) $q: 2 + 5 = 7$. Es una proposición verdadera.

c) $r: -5$ es un número par. Es una proposición falsa.

d) $x + 3 = 7$. No es una proposición ya que no se podemos afirmar si es falsa o verdadera.

e) ¿Cómo estás?, no es posible asignar un valor de verdad, es decir, no se sabe si la expresión es falsa o verdadera, de manera que no se trata de una proposición.

f) $2 + 5 = 7$ y -5 es un número par, es una proposición compuesta (veremos a continuación que es falsa).

Términos de enlace (conectores): Son aquellos símbolos o expresiones que se utilizan para entrelazar dos proposiciones lógicas y así formar proposiciones compuestas. Dentro del conjunto de conectores se destacan los enumerados en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Conectores más usados y su significado

Conector	*Se lee*
$\sim, \neg$	No, no es cierto que
$\vee$	o
$\wedge$	y
$\rightarrow$	si…entonces
$\leftrightarrow$	si y solo si

1.2 Operaciones lógicas

A partir de proposiciones simples y mediante los conectores formamos proposiciones compuestas. Su valor de verdad está determinado por el valor de verdad de las proposiciones simples y por el conectivo utilizado.

Conjunción: Cuando dos proposiciones simples se combinan mediante el conectivo "*y*", a la proposición compuesta se le llama "conjunción". Para la conjunción se utiliza el símbolo lógico " $\wedge$ ". De esta manera, se tiene la nueva proposición $p \wedge q$. Ahora, el valor de verdad para la conjunción de dos proposiciones cualquiera —"p y q"— será de la siguiente manera:
$p \wedge q$ debe ser verdadera, solamente si tanto p como q son verdaderas. De manera que, si al menos una de las proposiciones simples es falsa, entonces el valor de verdad para $p \wedge q$ será falso.

Disyunción: En matemáticas se emplea la letra "o" en el sentido inclusivo, como el término y/o. En este sentido cuando dos proposiciones simples se combinan mediante la letra "o" a la proposición compuesta se la llama disyunción. Para la conjunción se utiliza el símbolo lógico " $\vee$ ".
Así, pues, una proposición del tipo "p o q" será verdadera cuando una de ellas "p ó q o ambas" sean verdaderas, y será falsa únicamente cuando todas sus componentes sean falsas. De forma simbólica la disyunción se representará por la expresión $p \vee q$.

Negación: Si p es una proposición fundamental, de esta se puede formar otra proposición que se llama negación de p, escribiendo: "es falso que" antes de p o simplemente insertando la palabra "No" en p. Simbólicamente la negación se representará por $\sim p$ o por $\neg p$. Si p es verdadera entonces $\neg p$ es falsa y viceversa.

Condicional: En matemáticas se suele utilizar con mucha frecuencia la proposición "Si p, entonces q". Tales proposiciones se llaman condicionales y se las denota por: $p \rightarrow q$.
El condicional $p \rightarrow q$también se puede expresar de las siguientes maneras:
p implica q
p solamente si q
p es suficiente para q
q es necesario para p
El valor de verdad para la condicional será siempre verdadero, a menos que p sea verdadera y q sea falsa, es decir, una proposición verdadera no puede implicar una falsa.

Casi todos los teoremas matemáticos vienen expresados en forma condicional. Donde p es la hipótesis (condiciones iníciales) y q es la tesis (afirmación).

Bicondicional: Otro tipo de proposición que se presenta con frecuencia es de la forma "p si y solamente si q".

A este conector lógico especial se le llamará bicondicional y se denotará por el símbolo$\leftrightarrow$. De esta manera, $p \leftrightarrow q$ es lo mismo que $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ o, aplicando la definición de la conjunción quedaría: $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$.

Los valores de verdad para la bicondicional serán:

Si p y $q$son verdaderas entonces $p \leftrightarrow q$ será verdadera.

Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces $p \leftrightarrow q$ será verdadera.

Si p y q tienen diferentes valores de verdad, entonces $p \leftrightarrow q$ será falsa.

Las operaciones y su valor de verdad se resumen en la tabla 1.2

Tabla 1.2. Tabla de verdad para las proposiciones más relevantes

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Ejemplo 1.2

a)$2 + 5 = 7$ y -5 es par, es una conjunción y es falsa.

b) $2 + 5 = 7$ o -5 es par, es una disyunción y es verdadera.

c) Si $4 + 1 = 8$ entonces $5 + 2 = 9$, es un condicional y es verdadero.

d) $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ es un condicional, y es verdadero.

1.3 Tablas de Verdad

Una tabla de verdad es un arreglo que tiene por objeto mostrar el valor de verdad de una proposición compuesta en todas las asignaciones de los valores de verdad de sus componentes.

Ejemplo 1.3

Determinar una tabla de verdad para $(\sim p) \vee q$

Solución:

Formo las cuatro filas posibles y aplico la tabla 1.2

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Ejemplo 1.4

Determinar la tabla de verdad para $[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow ((\sim q) \wedge p)$.

Solución:

En esta situación debe tenerse en cuenta que se utilizan tres proposiciones p, q y r. Por esta razón la tabla de verdad deberá tener un mayor número de filas.[1] Procedamos a la construcción de la tabla.

[1] La regla para el número de filas de una tabla de verdad es 2^n, donde n es el número de proposiciones simples.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow (\sim q \wedge p)$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V

Al realizar una tabla de verdad puede suceder que la tabla contenga únicamente V (en este caso recibirá el nombre de tautología), únicamente F (en donde recibirá el nombre de contradicción), V y F (cuando sucede esto recibirá el nombre de contingencia)

1.4 Tautologías

Las tautologías son un caso especial de proposiciones, las cuales se caracterizan por tener solo el valor de verdad "V" en la última columna de sus tablas de verdad, independientemente del valor de las demás proposiciones.

Ejemplo 1.5

Determinar una tabla de verdad para $p \vee\sim p$

Solución:

p	$\sim p$	$p \vee\sim p$
V	F	V
F	V	V

Se observa que el valor de verdad de esta proposición $p \vee\sim p$ es "V", independientemente del valor de p. Por tanto se trata de una tautología. A dicha tautología se le llama *ley del tercero excluido*.

Ejemplo 1.6

Construya una tabla de verdad para la proposición: $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

Solución:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

A esta proposición se le conoce con el nombre de *ley del silogismo*, la cual es un principio fundamental del razonamiento lógico además de ser una tautología.

1.5 Contradicción

La contradicción en una proposición compuesta que se caracteriza por solo tener el valor de verdad "F" en la última columna de sus tablas de verdad, independientemente del valor que tomen las demás proposiciones.

Ejemplo 1.7

Determinar una tabla de verdad para $p \wedge \sim p$:

Solución:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

De acuerdo con la tabla los valores de la última son falsos, es decir, efectivamente tenemos una contradicción.

Ejemplo 1.8

Determinar la tabla de verdad para $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [\sim (\sim p \vee q)]$

Solución:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [\sim (\sim p \vee q)]$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

1.6 Indeterminación o contingencia

Esta se presenta cuando en una tabla de verdad las respuestas son tanto falsas como verdaderas.

Ejemplo 1.9

La tabla de verdad para $(p \leftrightarrow q) \rightarrow p$ es:

Solución:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

1.7 Equivalencia lógica

Sea un conjunto de proposiciones lógicas $P(p, q, r, \dots)$ y $Q(p, q, r, \dots)$ se dirá que son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas.

Ejemplo 1.10

Analizar las tablas de verdad para ambas proposiciones y determinar si existe equivalencia lógica $(p \to q) \wedge (q \to p)$ y $p \leftrightarrow q$

Solución:

Inicialmente se realiza la tabla de verdad para $(p \to q) \wedge (q \to p)$que es**:**

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Efectivamente las tablas de verdad son iguales, lo que implica la equivalencia lógica entre las dos expresiones.

1.8 Recíproco, contrario y contrarrecíproco

A partir de $p \to q$ se obtienen otros condicionales usados en matemáticas

Directo: $p \to q$

Recíproco: $q \to p$

Contrario: $\sim p \to \sim q$

Contrarrecíproco $\sim q \to \sim p$

Ejemplo 1.11

Dada la proposición directa: "Si te manejas bien te llevo al parque" obtenga el recíproco, el contrario, y el contrarrecíproco.

Solución:

Recíproco: Te llevo al parque si te manejaste bien.

Contrario: Si no te manejas bien entonces no te llevo al parque.

Contrarrecíproco: Si no te llevo al parque entonces te manejaste mal.

1.9 Leyes de la lógica

Son leyes que sirven para deducir que una proposición tiene el valor de verdadero. A continuación se presentan algunas de las leyes lógicas. Debe notarse que todas son tautologías. En estas leyes V y F significarán tautología y contradicción respectivamente.

1. Idempotencia:

a. $(p \vee p) \leftrightarrow p$

b. $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

2. Identidad:

a. $(p \vee V) \leftrightarrow V$

b. $(p \vee F) \leftrightarrow p$

c. $(p \wedge V) \leftrightarrow p$

d. $(p \wedge F) \leftrightarrow F$

3. Conmutativas:

a. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

b. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

4. Asociativas:

a. $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

b. $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

5. Distributivas:

a. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

6. Ley de la doble negación:

$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$

7. Ley del tercero excluido:

$(p \vee \sim p) \leftrightarrow V$

8. Ley de contradicción:

$(p \wedge \sim p) \leftrightarrow F$

9. Leyes de Morgan:

a. $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

b. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

10. Definición alterna del condicional:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

11. Ley de la absorción:

a. $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$

b. $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$

12. Definición alterna del bicondicional

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

Ejemplo 1.12

Aplicando las leyes lógicas demuestre la ley del *modus tollendo tollens.* Esto es que dada la implicación $(p \rightarrow q)$ una proposición verdadera y $(\sim q)$ también una proposición verdadera se puede concluir que $(\sim p)$ es una proposición verdadera.

Solución:

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$	$\leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$	def. alterna cond. (ley 10)
	$\leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$	distributiva (ley 5)
	$\leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim q) \vee F] \rightarrow \sim p$	contradicción (ley 8)
	$\leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$	identidad (ley 2)
	$\leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$	def. alterna cond. (ley 10)
	$\leftrightarrow [\sim(\sim p) \vee \sim(\sim q)] \vee \sim p$	Morgan (ley 9)
	$\leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim p$	doble negación (ley 6)
	$\leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q)$	conmutativa (ley 3)
	$\leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q$	asociativa (ley 4)
	$\leftrightarrow V \vee q$	tercer excluido (ley 7)
	$\leftrightarrow V$	identidad (ley 2)

1.10 Cuantificadores

Hemos visto que $x + 3 = 7$ no es una proposición (ejemplo 1.1.d). Toda función proposicional se puede convertir es proposición de dos modos:

- Sustituyendo la variable x por una constante de un conjunto referencial.
- Cuantificando esa expresión.

Cuando en el lenguaje ordinario utilizamos las expresiones *ningún, todos, algunos, cada, existe al menos*, estamos hablando de proposiciones cuantificadas. Hay dos tipos de cuantificadores:

- *Existencial* se denota por $\exists x$ se lee "algún x", "por lo menos un x", "hay un x", "existe al menos un x".
- *Universal* se denota por $\forall x$ se lee "todo x", "cualquier x", "para x", "cada x"

Tabla 1.3. Cuantificadores y su representación

Cuantificación	*Se simboliza*	
Todo A es B	$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	$(\forall x)(x \in A)(B(x))$
Todo A es no B (Ningún A es B)	$(\forall x)(A(x) \rightarrow \sim B(x))$	$(\forall x)(x \in A)(\sim B(x))$
Algún A es B	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$	$(\exists x)(x \in A)(B(x))$
Algún A es no B	$(\exists x)(A(x) \wedge \sim B(x))$	$(\exists x)(x \in A)(\sim B(x))$

A es el conjunto referencial que a veces no se escribe.

Ejemplo 1.13

Sea $D = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y sea $P(x): x < 7$ una función proposicional.

$P(2): 2 < 7$ es una proposición verdadera.

$P(9): 9 > 7$ es una proposición falsa.

Todos los elementos de D son menores que 7 es una proposición falsa.

Algunos de los elementos de D son menores que 7 es una proposición verdadera.

El conjunto solución es $\{1,2,3,4,5,6\}$

1.11 Negación de proposiciones

a)$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ Ley de Morgan.

b) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ Ley de Morgan.

c) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$ Negación del condicional

d) $\neg(\forall x)(x \in A)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(x \in A)(\neg P(x))$

e)$\neg(\exists x)(x \in A)\big(P(x)\big) \leftrightarrow (\forall x)(x \in A)\big(\neg P(x)\big)$

Ejemplo 1.14

Escriba las siguientes preposiciones en lenguaje lógico o corriente, según el caso. Después niéguelas en ambos lenguajes.

a. Todos los futbolistas son millonarios.

b. Algunos políticos son corruptos.

c. Todos los estudiantes ganaron la materia.

d. Todo número es par o primo.

e. $(\forall x \in \mathbb{R})(x < 5)$

f. $(\exists x \in \mathbb{R})(x \leq 5)$

g. $(\exists x \in \mathbb{R})(x > 2 \wedge x^2 \neq 3)$

h. $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 1 \rightarrow x = 2)$

i. Si estudio, apruebo.

j. $3 + 4 < 2 \ \wedge \ 7$ es impar.

Solución:

a. Algunos futbolistas no son millonarios.

b. Todos los políticos son no corruptos.

c. Algunos estudiantes perdieron la materia.

d. Hay números que son impares y no primos.

e. $(\exists x \in \mathbb{R})(x \geq 5)$

f. $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 5)$

g. $(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq 2 \vee x^2 = 3$

h. $(\exists x \in \mathbb{R})(x > 1 \wedge x \neq 2)$(deben aplicarse la ley alterna del condicional y la ley de Morgan).

i. Estudio y no apruebo.

j. $3 + 4 \geq 2 \ \vee 7$ es par.

2. Inferencias y métodos de demostración

2.1 Inferencias

Un **argumento válido** está compuesto de un número finito de proposiciones, donde una de ellas, llamada conclusión, **se obtiene necesariamente** de las otras, llamadas premisas, mediante reglas de inferencia válidas.

Ejemplo 2.1

Si 7 es primo entonces es impar (premisa)

7 es impar	(premisa)
Luego 7 es primo	(conclusión)

Ejemplo 2.2

Si sacas 2,4 entonces apruebas	(premisa)
Si apruebas no tienes que habilitar	(premisa)
Luego, si sacas 2,4 no tienes que habilitar	(conclusión)

En el ejemplo 2.1, las premisas y las conclusiones son verdaderas, pero el argumento no es válido porque la conclusión no se deduce de las premisas. En el ejemplo 2.2, la premisa 1 es falsa, la premisa 2 es verdadera y la conclusión es falsa. El argumento es no válido. La validez de un argumento implica que no pueden darse conclusiones falsas a partir de premisas verdaderas.

Una inferencia o argumento es válido si y solo si la conjunción de las premisas implica la conclusión, es decir, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots . \wedge P_n) \rightarrow C$es tautología.

2.2 Reglas de inferencia

Dentro de las reglas de inferencia se destacan:

Modus ponendo ponens	$p \rightarrow q$
	p
	Luego q
Modus tollendo tollens	$p \rightarrow q$
	$\sim q$
	Luego $\sim p$
Silogismo hipotético	$p \rightarrow q$
	$q \rightarrow r$
	Luego $p \rightarrow r$

Simplificación $(p \wedge q) \rightarrow p$

$(p \wedge q) \rightarrow q$

Adición $p \rightarrow (p \vee q)$

$q \rightarrow (p \vee q)$

Ejemplo 2.3

Concluya s de las cuatro premisas siguientes:

1. p
2. $p \rightarrow q$
3. $q \rightarrow r$
4. $\sim r \vee s$

Solución:

5. $p \rightarrow r$ por la regla del silogismo hipotético entre 2 y 3
6. $r \rightarrow s$ definición alterna del condicional en 4
7. $p \rightarrow s$ silogismo entre 5 y 6
8. s *modusponendo ponens* en 1 y 7

2.3 Métodos de demostración

Las matemáticas se encuentran constituidas por conceptos, proposiciones y relaciones, así como por un conjunto de postulados que se admiten sin demostración y se conocen como axiomas. Un *teorema* es una proposición que se puede demostrar utilizando axiomas, definiciones u otros teoremas ya demostrados utilizando las reglas de inferencia.

Una *demostración* de una proposición $q$es una cadena finita de transformaciones que se realizan mediante reglas de inferencia válidas a partir de proposiciones verdaderas o supuestamente verdaderas (hipótesis). En matemáticas hay dos métodos de demostración: el deductivo y el inductivo.

2.3.1 Método deductivo

En el método de razonamiento deductivo partimos de las hipótesis (axiomas, definiciones, teoremas ya demostrados); luego, con un adecuado manejo de las leyes lógicas y las reglas de inferencia encadenamos dichas hipótesis para llegar a la conclusión.

2.3.1.1 Método directo

Todo teorema matemático puede escribirse como una implicación $H \to T$, donde H representa una o varias proposiciones que se denominan premisas, y T, una o varias proposiciones llamadas conclusiones.

Pasos para demostrar un teorema por el método directo: $H \to T$

1. Empezamos con la hipótesis H.
2. Escribimos axiomas, definiciones u otros teoremas ya demostrados que se relacionen con el teorema por probar.
3. Encadenamos a H y a T mediante una lista de proposiciones aplicando reglas de inferencia.

Ejemplo 2.4

Demuestre el siguiente teorema: Si a y b son enteros impares, entonces $a + b$ es entero par.

Demostración:

1. Sean a y b enteros impares	hipótesis
2. $a = 2n + 1, b = 2m - 1;\ n, m \in Z$	definición de impar
3. $a + b = 2n + 2m$	propiedad uniforme de la igualdad
4. $a + b = 2(n + m)$	postulado de distributividad
5. $a + b$ es número par	Definición de n par

2.3.1.2 Método indirecto, contraposición o del contrarrecíproco

Para probar $H \to T$ partimos de $\neg T$, y por el método directo llegamos a$\neg H$. Los fundamentos de este método son el *modustollendo tollens* y la ley del contrarrecíproco.

Ejemplo 2.5

Demuestre el siguiente teorema: Si x^2es impar entonces x es impar.

Demostración:

Por el método indirecto, supongamos que x es par y veamos que x^2 es par.

1. Supongamos que x es par	negación de la tesis
2. $x = 2n, n \in Z$	definición de par
3. $x^2 = 4n^2$	propiedad uniforme de la igualdad
4. $x^2 = 2 \cdot 2n$	$4 = 2 \cdot 2$
5. x^2es par	definición de par

2.3.1.3 Reducción al absurdo o por contradicción

Se basa en un principio lógico fundamental: es imposible que una cadena de inferencias válidas vaya de una proposición verdadera a una falsa. Para demostrar $H \rightarrow T$ basta deducir una contradicción a partir de su negación, es decir, partimos de $H \wedge \sim T$. Si encontramos una contradicción, es debido a que esa proposición es falsa; luego, su negación, que es $H \rightarrow T$, es verdadera.

Ejemplo 2.6

Demuestre que $\sqrt{2}$es irracional

Demostración:

1. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional	negación del teorema
2. $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ irreductible	definición de n racional
3. $b\sqrt{2} = a$	multiplicación por b
4. $2b^2 = a^2$	prop. uniforme de la igualdad
5. a^2 es par	definición de par

6. a es par	teorema demostrado
7. $a = 2c, c$entero	definición de par
8. $a^2 = 4c^2$	prop. uniforme de la igualdad
9. $2b^2 = 4c^2$	de 4 y 6 transit. de la igualdad
10.$b^2 = 2c^2$	simplificando por 2
11. b^2es par	definición de par
12. $b$es par	teorema demostrado
13. $\frac{a}{b}$	es irreductible y simplificable,
	hay contradicción en 2, 6 y 12

Luego, la hipótesis inicial es falsa, por lo tanto su negación es verdadera.

2.3.1.4 Método de refutación

La refutación es un tipo de demostración que prueba la falsedad de una proposición.

El método que vamos a utilizar es el del *contraejemplo*. Para mostrar que una proposición es falsa basta mostrar un ejemplo donde la proposición no se cumpla.

Ejemplo 2.7

Refutaciones

a. Todo número primo es impar.

Solución:

El 2 es primo y no es impar.

b.$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Solución:

Si $a = 3$y $b = 4$, su raíz es$5 \neq 3 + 4$

2.3.2 Método de inducción

Los tres tipos de demostración hasta ahora vistos pertenecen al método deductivo. Veamos un método que va de lo particular a lo general: es el método de inducción, que será muy importante para probar fórmulas sobre números reales.

Pasos para demostrar una fórmula matemática P(n) por el método de inducción

1. Verificamos que la proposición se cumple para $n = 1, n = 2$.

2. Suponemos que se cumple para $n = k$.

3. Demostramos que se cumple para $n = k + 1$.

Nota: Para demostrar una propiedad que tiene que ver con números enteros por medio del método de inducción, debemos de asegurar que esta propiedad la cumplen todos los enteros positivos. Para esto se verifica para $n = 1, n = 2$; luego demostramos que si se cumple para un entero $n = k$ entonces también se verifica para el siguiente entero $k + 1$, con esto se demuestre que cumple para todos los enteros positivos.

Ejemplo 2.8

Demuestre por inducción que la suma de los n primeros impares es n^2.

Solución:

Debemos mostrar que: $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Paso 1. Si $n = 1$, tenemos que $1 = 1$. Si $n = 2$, tenemos $1 + 3 = 2^2$ lo cumple.

Paso 2. Suponemos que es cierto para $n = k$; $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$.

Paso 3. Partiendo del paso anterior demostremos que se cumple para $(k + 1)$.

Debemos demostrar que: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Por el paso 2: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

Por tanto,

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Que era lo que queríamos demostrar.

3. Teoría de conjuntos

3.1 Introducción

La palabra "conjunto" será uno de los términos básicos no definidos. En lo que sigue se tratará de aclarar y precisar la idea intuitiva de conjunto de objetos por medio de ejemplos y nociones relacionadas.

Los objetos que integran un conjunto se llaman "elementos" de ese conjunto. Para indicar que un objeto a es elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ que se lee "a pertenece a A" o "a es elemento de A". Si por el contrario, el objeto a no es elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$, que se lee "a no pertenece a a" o "a no es elemento de A".

Como se ha visto en el ejemplo anterior, las letras mayúsculas se utilizan para representar conjuntos, mientras que las minúsculas para representar elementos.

Ejemplo 3.1

El conjunto A de todos los habitantes de Medellín (cuyos elementos son todos los habitantes de Medellín y solo ellos).

El conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

El conjunto C cuyos elementos son 10, 12, y 45.

El conjunto S de todos los números naturales mayores que 54 y menores que 10000.

3.2 Algunos conjuntos importantes

Conjunto universal Es el conjunto de todos los elementos en discusión. También se le llama dominio o conjunto referencial. Se representa con U, $x \in U \leftrightarrow V$.

Conjunto vacío: Es el que carece de elementos. Se denota con $\emptyset = \{\quad\} = \{x : x \neq x\}, x \in \emptyset \leftrightarrow F$.

Conjunto unitario: Es aquel que solo contiene un elemento, por ejemplo $\{a\}$.

3.3 Inclusión y subconjuntos

En teoría de conjuntos hay dos relaciones entre conjuntos: Inclusión e igualdad.

Se dice que un conjunto A está incluido en B, o es subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A es elemento de$B$.

Como equivalentes se pueden utilizar las siguientes expresiones:

"A es parte de B"

"A está contenido en B"

"B contiene a A"

"B incluye a A"

Notación: Para expresar que el conjunto A es subconjunto del conjunto B se escribe indistintamente $A \subset B$ o $B \supset A$, que se lee "A está incluido en B" y "B incluye a A". Las negaciones de las relaciones anteriores se escriben como:

$A \not\subset B$, que se lee "A no está incluido en B", y significa que existe un elemento en A que no está en B.

Simbólicamente: $A \subset B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$$A \not\subset B \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

3.3.1 Propiedades de la inclusión

1. $\emptyset \subset A$. El vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
2. Propiedad reflexiva. $A \subset A$. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
3. Propiedad transitiva. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

3.4 Relaciones de igualdad

Dos conjuntos son iguales si y solo si todos los elementos que los conforman son iguales.

Simbólicamente:

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

3.4.1 Propiedades de la igualdad de conjuntos

Reflexiva: $A = A$

Simétrica: $A = B \Leftrightarrow B = A$

Transitiva: si $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Ejemplo 3.2

Sea $A = \{1, \{2\}, *\}$ determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $1 \in A$

b) $\{2\} \in A$

c) $\{1\} \subset A$

d) $\{2\} \subset A$

e) $\{1, \{2\}, *\} \subset A$

f) $\{1,2\} \subset A$

g) $\emptyset \in A$

h) $\emptyset \subset A$

i) $\emptyset \subset \emptyset$

j) $\emptyset \in \emptyset$

Solución:

a) $1 \in A$ V

b) $\{2\} \in A$ V

c) $\{1\} \subset A$ V

d) $\{2\} \subset A$ F

e) $\{1, \{2\}, *\} \subset A$ V

f) $\{1,2\} \subset A$ F

g) $\emptyset \in A$ F

h) $\emptyset \subset A$ V

i) $\emptyset \subset \emptyset$ V

j) $\emptyset \in \emptyset$ F

3.5 Operaciones entre conjuntos

Unión: Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos. Se llama "unión" de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ al conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto $\boldsymbol{A}$, al conjunto $\boldsymbol{B}$ o al tiempo a $\boldsymbol{A}$ y a $\boldsymbol{B}$.

Observación: La disyunción "*o*" se emplea aquí en sentido no restringido, es decir, un elemento que pertenece simultáneamente a A y a B también pertenece a la unión.

La unión de dos conjuntos A y B se designa con $A \cup B$; en forma simbólica se puede escribir:

$A \cup B = \{x: x \in A \ \vee \ x \in B\}$

Además:

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

En teoría de conjuntos se utilizan los ***Diagramas de Venn*** que son figuras sencillas que se utilizan para representar conjuntos de elementos por medio de líneas cerradas. Además con los diagramas de Venn se pueden representar las operaciones entre conjuntos.

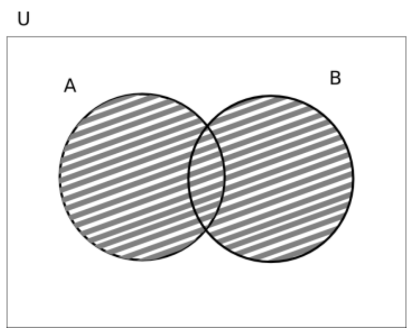


Figura 3.1 Unión entre conjuntos.

Intersección: Sean A y B dos conjuntos. Se llama "intersección" de A y B al conjunto de elementos que pertenecen a la vez a A y a B.

Observación: La intersección de los conjuntos A y B se designa con $A \cap B$; en forma simbólica se puede definir así:

$A \cap B = \{x: x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

Además:

$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \ \vee \ x \notin B$

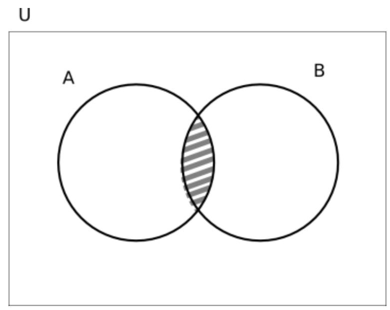


Figura 3.2. Intersección entre conjuntos.

Complemento: El complemento de un conjunto A corresponde a todos los elementos que están en el conjunto universal y no están en A.

$A' = A^C = \{x : x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$

En consecuencia para todo $x \in U$,

$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$

$x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$

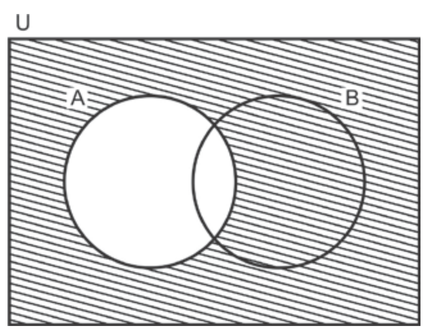


Figura 3.3. Complemento de un conjunto.

Ejemplo 3.3

Demuestre que $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Solución:

Sea $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$	Definición complemento.
$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$	Ley de Morgan.
$\Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$	Definición complemento.

$\Leftrightarrow x \in (A' \cap B')$ Definición intersección.

Por tanto $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Diferencia: Sean A y B dos conjuntos, se llama "diferencia" de A y B al conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B.

Observación: La diferencia de A y B se designa con $A - B$; en forma simbólica se puede definir así: $A - B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

Además

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$x \notin (A - B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$

Que esquemáticamente es:

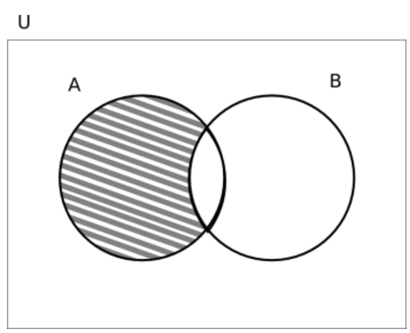


Figura 3.4 Diferencia A menos B.

De manera similar, la diferencia de B y A se designa con $B - A$; en forma abreviada se puede definir: $B - A = \{x : x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$, que de manera esquemática sería:

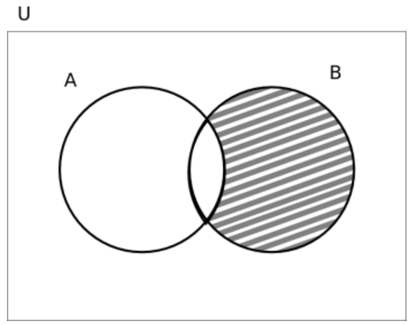


Figura 3.5. Diferencia B menos A.

Nota: Debe tenerse en cuenta el hecho de que $U - B = B$

Diferencia simétrica: Dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia simétrica de A y B al conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$. La diferencia simétrica de A y B es entonces el conjunto de puntos que pertenecen a A o B, pero no a ambos a la vez.

Observación: Se designa con $A \Delta B$ a la diferencia simétrica de A y B.

La diferencia simétrica también se puede definir como:

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

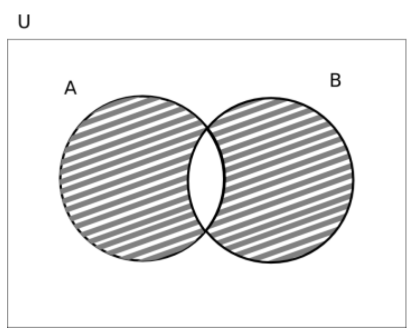


Figura 3.6. Diferencia simétrica.

Ejemplo 3.4

Sean $A = \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$; $B = \{-1,0,1,2,3,4\}$ y $U = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ realiza

a) $A - B$

b) A'

c) $A \cap B$

Solución:

a) $A - B = \{-4, -3, -2\}$

b) $A' = \{-5,2,3,4,5\}$

c) $A \cap B = \{-1,0,1\}$

3.6 Número de elementos de un conjunto

El número de elementos de un conjunto finito A se denota con $n(A)$, y se obtiene de la forma:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

A la suma de los elementos de A y de B se le deben restar los elementos comunes con el fin de no realizar una doble cuenta.

Si se trata de tres conjuntos tenemos:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Ejemplo 3.5

En el colegio se dictan clases de preparación para las pruebas Saber. 80 estudian matemáticas y 55 castellano, 25 de ellos estudian ambas materias. ¿Cuántos estudiantes se están preparando para las pruebas Saber?

Solución:

$n(M \cup C) = n(M) + n(C) - n(M \cap C) = 80 + 55 - 25$

Ejemplo 3.6

Cien estudiantes realizan los cursos de matemáticas, lenguaje y ciencias. Dos estudiantes perdieron las tres materias, seis perdieron matemáticas y lenguaje, cinco perdieron lenguaje y ciencias, ocho perdieron matemáticas y ciencias, veintinueve perdieron matemáticas, treintaidós perdieron lenguaje y treintaiséis perdieron ciencias.

a. Realice un diagrama de Venn.
b. ¿Cuántos estudiantes aprobaron las tres materias?
c. ¿Cuántos estudiantes perdieron ciencias y alguna otra materia?
d. ¿Cuántos perdieron al menos una materia?
e. ¿Cuántos perdieron matemáticas y ciencias pero no lenguaje?

Solución:

a. Diagrama de Venn

Sean M el conjunto de estudiantes que aprobaron matemáticas, L el conjunto de los estudiantes que aprobaron lenguaje, C el conjunto de los estudiantes que aprobaron ciencias y E el conjunto de todos los estudiantes.

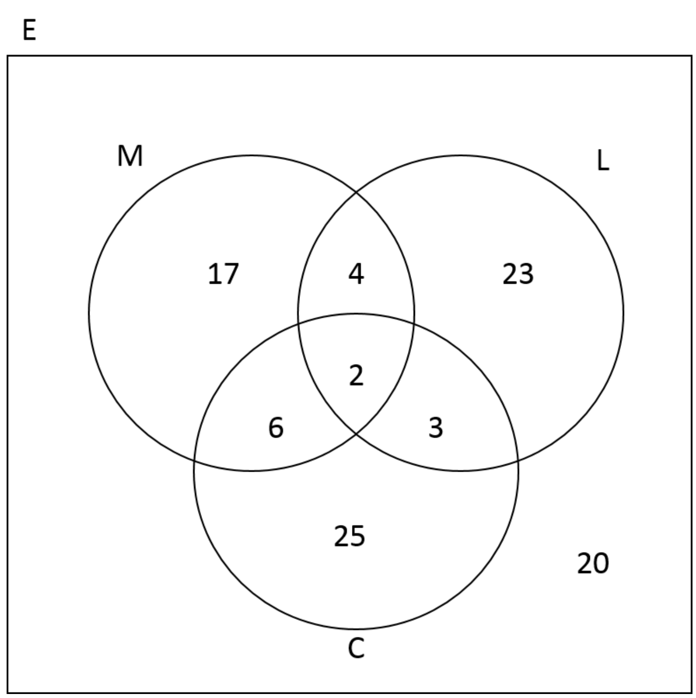


Figura 3.7. Diagrama de Venn.

b. 20 estudiantes.
c. 11 estudiantes.
d. 80 estudiantes.
e. 6 estudiantes.

Taller de lógica y conjuntos

1. Escriba en forma simbólica los siguientes enunciados:

a. Si las exportaciones disminuyen, entonces bajarán las utilidades.

b. Los precios son altos si y solo si los costos aumentan.

c. Si la producción aumenta, entonces bajarán los precios.

d. Si aumenta la demanda esto implica que aumenta la oferta y viceversa.

e. Si la contaminación aumenta, entonces existirá restricción vehicular adicional.

2. Sea $P(x) = x + 5 \leq 9, x \in \mathbb{N}$. Señale el conjunto validez de $P(x)$.

3. Dadas las proposiciones: $p =$ José es rico, $q =$ José es avaro. La proposición simbólica que expresa: "Si José es rico, entonces es avaro"

4. Sean las proposiciones:

p: La computación es fácil.

q: Los ingenieros deben saber computación.

Entonces, traduzca a lenguaje verbal las proposiciones siguientes y responda cuál(es) a su juicio representa(n) una expresión aceptable en el sentido cotidiano.

a.$p \wedge q$

b.$\sim (p \vee q)$

c.$\sim (q \vee \sim p)$

d.$\sim (p \vee \sim q)$

e.$p \rightarrow q$

5. Si se sabe que p es falsa, q verdadera y que r es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a.$(p \wedge \sim q) \rightarrow r$

b.$(\sim p \rightarrow \sim r) \wedge q$

c.$\sim (p \wedge\sim r) \wedge (\sim r \vee p)$

d.$(\sim(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r) \wedge (\sim r \vee p)$

6. Dadas las siguientes proposiciones: p: Ella es contadora pública, q: Ella es administradora de empresas, r: Ella es economista. Escriba de manera simbólica los siguientes enunciados:

a. Ella no es contadora pública ni economista, pero sí es administradora de empresas.

b. Ella no es economista y es administradora de empresas.

c. Si ella es administradora de empresas y economista, entonces es contadora pública.

d. Ella es contadora pública si y solo si es economista y no administradora de empresas.

7. Demuestre que las proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes:

$p \rightarrow (q \vee r)$ y $(p \wedge\sim q) \rightarrow r$

8. Determine el valor de verdad que deben tener las proposiciones p, q y r en cada uno de los siguientes casos, sabiendo que el valor de verdad de la proposición compuesta es el que se indica al final de cada caso.

a.$[(p \rightarrow q) \wedge (r \vee q)]: V$

b.$\{[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r)] \wedge\sim [p \rightarrow (q \wedge r)]\}: V$

c.$\{[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (q \rightarrow r)]\}: F$

9. Demuestre usando las leyes de la lógica, las siguientes expresiones:

a.$\{q \rightarrow [\sim p \rightarrow (p \vee q)]\} \leftrightarrow [\sim(p \wedge \sim p)]$

b.$[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow p$

c.$\{q \wedge\sim [(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee\sim q)]\} \leftrightarrow (p \wedge q)$

10. Concluya $\sim q$ a partir de la premisa $\sim(r \rightarrow q)$

11. Concluya $\sim r$ a partir de las siguientes premisas:

- $(r \wedge q) \rightarrow\sim s$

- s
- q

12. Halle $q \rightarrow p$ a partir de las premisas;

- $(p \vee q) \rightarrow p$
- $q \vee p$

13. Halle $r \rightarrow \sim q$ a partir de las premisas:

- $\sim(r \wedge s)$
- $q \rightarrow s$

14. Concluya t a partir de las premisas:

- $p \vee (q \wedge r)$
- $s \vee t$
- $s \rightarrow \sim (p \vee q)$

15. Concluya k a partir de las premisas:

- $p \rightarrow s$
- $q \rightarrow r$
- $(s \wedge r) \rightarrow k$
- $p \wedge q$

16. Utilice los principios *modus ponendo ponens* o *modus tollendo tollens* para resolver los siguientes razonamientos y justificar cada paso.

a. Premisas:

- $(\sim p \vee \sim t) \rightarrow s$
- $\sim(p \wedge t)$

b. Premisas:

- $(\sim p \vee \sim t) \rightarrow (s \vee r)$
- $\sim s \wedge \sim r$

c. Premisas:

- t
- $t \rightarrow \sim q$
- $\sim q \rightarrow s$

17. Demuestre por el método de inducción, para n entero positivo:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

18. Demuestre por el método de inducción:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

19. Demuestre por el método de inducción:

$$2^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

20. Refute por medio de un contraejemplo:

a. Todo número real elevado al cuadrado es positivo.

b. Ningún número par es primo.

c. Todo polígono equiángulo es regular.

d. Todo polígono equilátero es regular.

21. Escriba su valor de verdad. Si es falso, dé un contraejemplo:

a. El cuadrado de cualquier real es positivo.

b. Hay números primos pares.

c. Ningún número entero es natural.

d. Hay números que son naturales y enteros.

e. Algunos racionales no son enteros.

f. Para todo $x$perteneciente a $\mathbb{Q}$, $x + 3 > 0$.

g. Existe un x perteneciente a $\mathbb{R}$ tal que $x + 4 = 0$.

h. Existen números reales que no son racionales.

i. Todo número racional es entero.

22. Traduzca a lenguaje simbólico, luego niegue y finalmente escriba la frase que corresponda a la negación de las siguientes proposiciones:

a. Todos los números son racionales y existen números que no son enteros.

b. Algunas leyes no son legítimas, pero deben ser respetadas.

c. Algunos economistas cantan y hacen deportes.

d. Existe al menos una empresa que hace pernos, pero no tuercas.

e. Ningún hombre rico es feliz.

f. De las personas presentes en la reunión de directorio, ninguno era fumador.

g. Si todos los ingenieros civiles tuviesen una segunda fuente de ingreso podrían proyectarse profesionalmente y aumentar sus rentas.

23. Responda verdadero o falso:

a.$\emptyset = 0$

b.$\{a\} = \{a, \emptyset\}$

c.$13 \in \{13\}$

d.$\{13\} \in \{\{13\}, a\}$

e.$\{13\} \subset \{\{13\}, a\}$

f.$A - B \subset (A \cup B)$

24. Complete:

a.$\emptyset' \cap U =$

b.$A - A' =$

c.$\{\emptyset\} \cup \{0\} =$

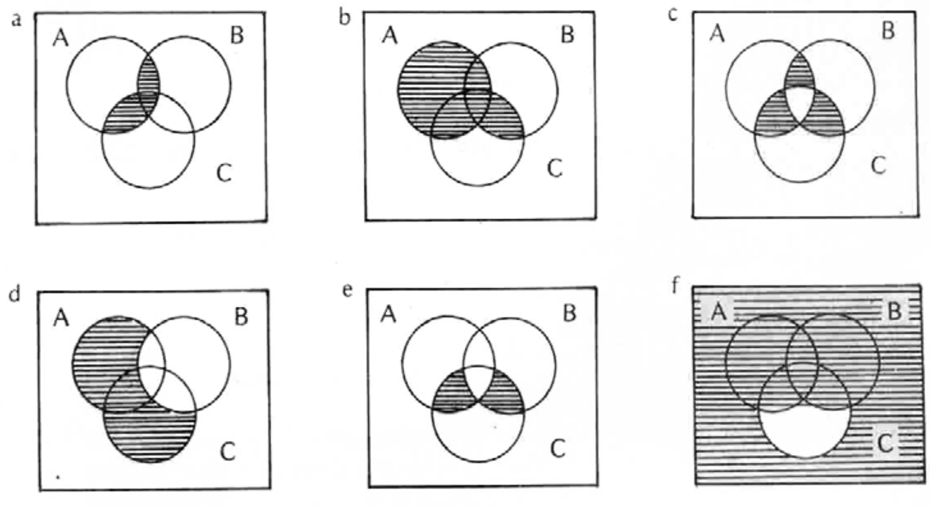
25. Grafique en un diagrama de Venn:

a.$(A \cup (A \cup B)) \cup C'$

b.$(B \cap C') - A$

c.$A - (B - C')$

26. En los siguientes diagramas, indique el conjunto que representa la parte sombreada:



27. Sean $U = \{1,2.3,4, \ldots ,13\}$ conjunto universal, $A = \{1,4,7,8\}$, $B = \{2,3,4,8,9,10\}$, $C = \{3,4,6,7,9,11,13\}$ subconjuntos de U:

a. Determine por extensión:

i. $A - (B - C')'$

ii. $(A \cup C)' - (B - C')$

iii. $(A - B) \cap (B \cup C)'$

b. Determine la(s) operación(es) por realizar con los conjuntos A, B, C para obtener:

i. $\{5,12\}$

ii. $\{4,7,8\}$

iii. $\{2,10\}$

iv. $\{3,9\}$

28. En la escuela de ingeniería comercial, se realizó una promoción de suscripción a tres importantes revistas: *Economía y Empresa*, *Estrategia* y *American Economics*. Se supo que:

- 8 estudiantes se suscribieron a *Estrategia* y a *American Economics.*
- 6 estudiantes se suscribieron a *Economía y Empresa* y a *American Economics*.
- 10 estudiantes se suscribieron a *Economía y Empresa* y a *Estrategia*.

- Solo 2 estudiantes, de los 70 encuestados, se suscribieron a las tres revistas.
- 20 estudiantes se inscribieron solo a una de las tres revistas.
- 3 estudiantes se inscribieron solo a *American Economics.*
- 40 estudiantes no se inscribieron a *Estrategia*.

a. Haga un diagrama de Venn adecuado a la situación planteada (sin dejar regiones vacías).

b. ¿Cuántos estudiantes estarán suscritos solo a *Estrategia*?

c. ¿Cuántos estudiantes de los encuestados no se suscribieron a ninguna revista?

29. En un centro comercial, se realizó una encuesta a cien personas, sobre el pago de sus compras con tarjetas de crédito: MasterCard, Visa, Diners Club, de donde se recopiló la siguiente información:

- 15 personas prefieren pagar con otras tarjetas de crédito.
- 20 personas prefieren pagar con MasterCard, pero no con Visa.
- 35 personas prefieren pagar con Visa y Diners Club.
- 60 personas prefieren no pagar con Visa.
- 30 personas prefieren pagar con Diners Club, pero no con MasterCard.
- 34 personas prefieren pagar con MasterCard y Diners Club.
- 2 personas prefieren pagar solo con Visa.

a. Haga un diagrama adecuado a la situación planteada (sin dejar regiones vacías).

b. ¿Cuántas personas encuestadas pagan solo con Visa y Master Card?

c. ¿Cuántas personas encuestadas pagan con las tres tarjetas de crédito?

30. Los postulantes a la empresa XYZ son sometidos a tres pruebas de selección: I de conocimientos contables, II de conocimientos computacionales y III una entrevista personal. Las pruebas las rindieron 150 personas, cuyos resultados fueron:

- 60 personas aprueban I.
- 70 personas aprueban II.
- 50 personas aprueban III.
- 30 personas aprueban la primera y segunda prueba de selección.

- 25 personas aprueban la primera y tercera prueba de selección.
- 15 personas aprueban la segunda y tercera prueba de selección.
- Solo 10 personas aprueban las tres pruebas de selección.

a. Represente la información en un diagrama de Venn.

b. Determine el número de postulantes que aprueban solo dos pruebas.

c. Determine el número de postulantes que aprueban por lo menos dos de las pruebas de selección.

31. En el grupo 11.3 de una institución educativa el 60% aprueba matemáticas y el 70% castellano, y el 15% pierden ambas materias. Halle el porcentaje de alumnos que aprueban ambas materias y el porcentaje de estudiantes que aprobó solamente matemáticas.

32. En la facultad de idiomas se hizo una encuesta a 500 estudiantes: 255 leen francés; 331, alemán: 285 inglés; 70 francés e inglés, 85 francés y alemán, 266 inglés y alemán, 50 las tres lenguas. Pruebe que esa encuesta está mal realizada.

33. En una encuesta realizada en un colegio de la ciudad a un total de 150 estudiantes, se hallaron los siguientes datos:

- 54 estudian álgebra.
- 89 estudian inglés.
- 80 estudian ciencias naturales.
- 60 estudian ciencias naturales e inglés.
- 10 estudian álgebra solamente.
- 20 estudian álgebra y ciencias naturales.
- 15 estudian las tres asignaturas simultáneamente.

Calcular:

a. ¿Cuántos estudian álgebra e inglés pero no ciencias naturales?

b. ¿Cuántos estudian solo una asignatura?

c. ¿Cuántos estudian a lo sumo dos asignaturas?

Algunas respuestas

1. a. Sea p: las exportaciones disminuyen y q: bajarán las utilidades $p \Rightarrow q$.

c. Sea p: la producción aumenta y q: bajarán los precios $p \Rightarrow q$.

3. $p \Rightarrow q$.

5. a. V c. V

6. a. $(\sim p \wedge \sim r) \rightarrow q$ c. $(q \wedge r) \rightarrow p$

8. a. $p: V, q: V, r: V; p: V, q: V, r: F$

21.

a. V	e. V	i. F
c. F	g. V	

23.

a. F	c. V	e. V

26.

a. $A \cap B$ e. $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$

Parte 2. Números reales

El proceso de contar nos conduce a los números naturales y las necesidades de medidas conllevan al uso de números fraccionarios. En los primeros tiempos se creía que dos medidas cualesquiera eran conmesurables, es decir, ambas eran un número natural de veces cierta unidad adecuada.
Los números reales están conformados por diferentes conjuntos de números como se definen a continuación:

4.1 Números naturales: $\mathbb{N}$

Estos números se encuentran conformados por el $1, 2, 3, 4, \ldots$ Su desarrollo parte de la necesidad de la humanidad para contar elementos y por tanto avanzan de manera unitaria. La suma y la multiplicación de dos números naturales es un número natural, mientras que la resta o la división no necesariamente dan un número natural. En el caso de las ecuaciones del tipo $x + a = b$con a y b naturales, la ecuación tendrá solución en los naturales solo para el caso donde $b > a$.
El conjunto de los números naturales se presenta así:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

4.2 Números enteros: $\mathbb{Z}$

Con el objeto de superar la limitación de la sustracción se extiende el sistema de los naturales a los números enteros. En el conjunto de los números enteros la ecuación $a + x = b$, con$a$ y b naturales siempre tiene solución. Los enteros están formados por los naturales, los negativos de cada natural y el cero.
Los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$ y se representan así:
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
No siempre la división de dos números enteros es entero, es decir, la ecuación $ax = b, a \neq 0$, solo tiene solución en $\mathbb{Z}$, cuando b es múltiplo de a.

4.3 Números racionales: $\mathbb{Q}$

Para superar la limitación de la división y poder siempre resolver la ecuación $bx = a$con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, se extienden los números enteros a los racionales. Un número es racional si se puede expresar como cociente de dos enteros con el denominador distinto de cero.

$\mathbb{Q} = \{x: x = \frac{a}{b}; a, b \ \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Nota: Cabe resaltar que los números naturales y los enteros son racionales.

Las cuatro operaciones matemáticas son posibles dentro del sistema de los números racionales (exceptuando la división entre cero).

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente; a este patrón se le llama periodo.

$7 = 7{,}000\ldots;\ \frac{14}{5} = 2{,}8 = 2{,}8000\ldots;\ \frac{14}{3} = 4{,}333\ldots;\ \frac{4}{7} = 0{,}5714285714285\ldots$

Los números racionales también pueden expresarse en forma decimal *infinita periódica*.

4.4 Números irracionales: $\mathbb{Q}^*$

Para resolver la ecuación $x^2 = 2$ necesitamos definir otro conjunto ya que esta ecuación no tiene solución en los racionales.

Los números irracionales se denotan por $\mathbb{Q}^*$y se define como el sistema de todos los números decimales con cifras periódicas no repetidas. Algunos ejemplos de números irracionales son: $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3{,}141592}\ldots;\ \boldsymbol{e} = \mathbf{2{,}717282}\ldots;\ \sqrt{\mathbf{2}}$.

4.5 Números reales: $\mathbb{R}$

Son la unión de los racionales e irracionales. El sistema de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales.

$Números\ reales = Números\ decimales$

En $\mathbb{R}$ no tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Para resolver esta ecuación necesitamos ampliar a los números complejos pero en este curso solo hablaremos de números reales.

Geométricamente los números reales pueden representarse por los puntos sobre una línea recta llamada *recta numérica*. A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta numérica. Por lo anterior muchas veces se usan indistintamente los términos *punto* y *número real*.

Se selecciona un punto de la recta para representar el cero. Este punto se llama *origen.* Después se elige una medida estándar de distancia llamada distancia unitaria y se marcan los puntos en ambas direcciones. Las posiciones a la derecha del origen se consideran positivas y las de la izquierda negativas. Los números correspondientes a cada punto se llaman *coordenadas* del punto.

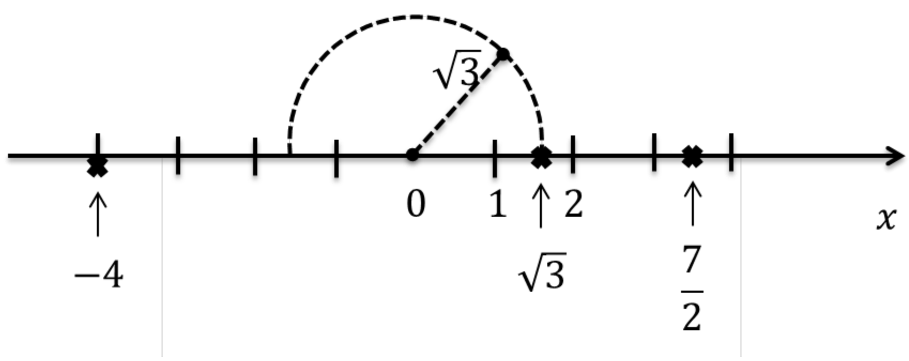


Figura 4.1. Puntos en la recta real.

En el conjunto de los números reales se definen solo dos operaciones: la suma $(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$, las cuales cumplen los axiomas de los reales que se verán a continuación.

4.6 Estructura de los números reales

Los números reales desempeñan un papel fundamental en la matemática. Consideramos los reales como términos primitivos que satisfacen un cierto número de propiedades de los axiomas.

Los axiomas son propiedades que no necesitan demostración y que ayudan a crear una estructura con la que generamos teoremas. Analicemos los axiomas de los números reales. Los reales bajo las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ tienen estructura de campo ordenado y completo.

4.6.1 Axiomas de los reales

Para todo número real a, b, c:

4.6.1.1 Propiedad clausurativa

a. $(a+b) \in \mathbb{R}$. La suma de dos reales es siempre un número real.

b. $(a \cdot b) \in \mathbb{R}$. El producto de dos reales siempre es un número real.

4.6.1.2 Propiedad asociativa

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

a. $a+(b+c)=(a+b)+c$

b. $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

4.6.1.3 Propiedad modulativa o elemento neutro

a. Existe un número real, llamado módulo de la suma, denotado por cero, tal que: $a+0=0+a=a \ \forall a \in \mathbb{R}$

b. Existe un número real, llamado módulo de la multiplicación, denotado por 1, tal que $a \cdot 1=1 \cdot a=a \ \forall a \in \mathbb{R}$

4.6.1.4 Propiedad inversa

a. Para todo real a existe un real, llamado inverso aditivo de a, o el opuesto de a, denotado $(-a)$ tal que: $a+(-a)=(-a)+a=0$.

b. Para todo real $a \neq 0$ existe un real, llamado el inverso multiplicativo de a, denotado a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1}=a^{-1} \cdot a=1$.

4.6.1.5 Propiedad conmutativa

a. $a+b=b+a$. El orden de los sumandos no altera la suma.

b. $a \cdot b=b \cdot a$. El orden de los factores no altera el producto.

4.6.1.6 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

4.6.2 Axiomas de la igualdad

Para a, b, c, d reales:

4.6.2.1 Propiedad reflexiva:

$a = a$**.** Todo número real es igual a sí mismo.

4.6.2.2 Propiedad simétrica:

Si $a = b$ entonces $b = a$.

4.6.2.3 Propiedad transitiva:

Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

4.6.2.4 Propiedad uniforme respecto a la suma:

Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$.

4.6.2.5 Propiedad uniforme respecto a la multiplicación:

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

4.6.2.6 Principio de sustitución:

Si $a = b$, entonces cualquiera de los dos puede reemplazar al otro.

4.7 Definición de resta:

$a - b = a + (-b)$.

La resta de a y b es la suma de a con el opuesto de$b$.

4.8 Definición de división:

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Ejemplo 4.1

Demuestre que: $7 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 7$

Solución:

$7 - \sqrt{3} = 7 + (-\sqrt{3})$	def. de resta
$7 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 7$	axioma conmutativa de la suma

Luego:

$7 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 7$	prop. transitiva de la igualdad

Ejemplo 4.2

Demuestre que: $(z + x) - y = z + (x - y)$

Solución:

$(z + x) - y = (z + x) + (-y)$	def. de resta
$(z + x) - y = z + (x + (-y))$	prop. asociativa de la suma
$(z + x) - y = z + (x - y)$	def. de resta

Ejemplo 4.3

Demuestre que: $3 \cdot (4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$

Solución:

$3 \cdot (4x + 2y + 8) = 3 \cdot (4x) + 3 \cdot (2y) + 3 \cdot 8$	prop. distributiva
$3 \cdot (4x + 2y + 8) = (3 \cdot 4)x + (3 \cdot 2)y + 3 \cdot 8$	prop. asociativa
$3 \cdot (4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$	prop. clausurativa

4.9 Teoremas adicionales sobre los números reales

Teorema 1. Sean a, b, c reales. Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$. Propiedad cancelativa de la suma.

Demostración:

$a + c = b + c$	hipótesis
$a + c + (-c) = b + c + (-c)$	prop. uniforme respecto a la suma
$a + \big(c + (-c)\big) = b + (c + (-c))$	prop. asociativa de la suma
$a + 0 = b + 0$	prop. inverso aditivo
$a = b$	prop. modulativa de la suma

Teorema 2. La ecuación $x + a = b$ tiene una única solución $x = b + (-a)$

Demostración:

$x + a = b$	hipótesis
$x + a + (-a) = b + (-a)$	propiedad 4, uniforme de la igualdad
$x + (a + (-a)) = b + (-a)$	axioma 2, asociativa de la suma
$x + 0 = b + (-a)$	axioma 4, inversa de la suma
$x = b + (-a)$	axioma 3, modulativa de la suma

Teorema 3. $a \cdot 0 = 0$**.** Propiedad anulativa del cero

Demostración:

$0 + 0 = 0$	axioma 3, modulativa de la suma
$(0 + 0) = 0$	axioma 2, asociativa de la suma
$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$	propiedad 5, uniforme
$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$	axioma 6, distributiva
$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	axioma 3, modulativa de la suma
$a \cdot 0 = 0$	teorema 1, prop. cancelativa

Teorema 4. – $(-a) = a$. El opuesto del opuesto de un real es el mismo número real.

Demostración:

Esta es la propiedad involutiva; demuestra que menos por menos es más.

$-(-a) + (-a) = 0$	axioma 4, prop. inversa
$-(-a) + (-a) + a = 0 + a$	prop. uniforme respecto a la suma
$-(-a) + \left((-a) + a\right) = 0 + a$	prop. asociativa
$-(-a) + 0 = 0 + a$	prop. inversa bajo la suma
$-(-a) = a$	prop. modulativa de la suma

Teorema 5. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. "Menos por más es menos".

Demostración:

$(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b.$	prop. distributiva
$(-a) \cdot b + a \cdot b = 0 \cdot b.$	prop. inversa de la suma
$(-a) \cdot b + a \cdot b = 0.$	teorema 3

Luego, $(-a)b$ es el inverso aditivo de (ab). También lo es $-(ab)$.

Luego, por la unicidad del neutro $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Teorema 6. $(-a)(-b) = ab$ "menos por menos es más".

Demostración:

$(-a)b + (-a)(-b) = (-a)(b + (-b))$	prop. distributiva
$(-a)b + (-a)(-b) = (-a)0$	prop. inversa de la suma
$(-a)b + (-a)(-b) = 0$	teorema 3
$-(ab) + (-a)(-b) = 0$	teorema 5
$-(ab) + (-a)(-b) + ab = 0 + ab$	prop. uniforme respecto a la suma
$(-a)(-b) + 0 = 0 + ab$	prop. inversa de la suma
$(-a)(-b) = ab$	prop. modulativa de la suma

Teorema 7. – $(a+b) = -a - b$. Destrucción de paréntesis precedido de menos.

Demostración:

$(a+b) + \big((-a)+(-b)\big) = a + \Big(b + \big((-a)+(-b)\big)\Big)$	prop.asociativa e inverso aditivo
$= a + \Big(b + \big((-b)+(-a)\big)\Big)$	prop. asociativa y conmutativa
$= a + ((b+(-b)) + (-a))$	prop. asociativa
$= a + \big(0 + (-a)\big)$	prop. inverso aditivo
$= a + (-a)$	prop. modulativa suma
$= 0$	prop. inverso aditivo

Luego, $(-a)+(-b)$ es el inverso aditivo de $(a+b)$.

Pero también el inverso aditivo de $(a+b)$ es $-(a+b)$.

Como el inverso aditivo es único, se tiene: $-(a+b) = (-a)+(-b) = -a-b$.

Teorema 8. Si $ab = 0$ entonces $a = 0 \vee b = 0$.

Demostración:

Sea $ab = 0$ con $a \neq 0$	hipótesis
$a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0$	prop. uniforme
$(a^{-1}a)b = a^{-1} \cdot 0$	prop. asociativa
$1 \cdot b = a^{-1} \cdot 0$	prop. inverso multiplicativo
$b = a^{-1} \cdot 0$	prop. modulativa multiplicación
$b = 0$	teorema 3

4.10 Propiedades de orden en $\mathbb{R}$

4.10.1 Desigualdades lineales

Definición: Los símbolos < ("es menor que") y > ("es mayor que") se definen como sigue:

i. $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo; es decir $b - a$ está a la derecha del cero en la recta real.
ii. $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo .

Ejemplo 4.4

1. $3 < 5$ pues $5 - 3 = 2$ que es positivo
2. $7 > 6$ pues $7 - 6 = 1$ que es positivo

Así, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ =números a la derecha del cero

Definición: Los símbolos $\leq$ ("es menor que o igual a") y $\geq$ ("es mayor que o igual a") se definen $a \leq b$ como sigue

i. $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ ó $a = b$
ii. $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ ó $a = b$

Las expresiones $a < b, a > b, a \geq b, a \leq b$ se llaman desigualdades, las dos primeras se llaman desigualdades estrictas y las otras dos desigualdades condicionales.

Observación: Geométricamente puede demostrarse que $a < b$ si y sólo si a está a la izquierda de b en la recta real.

Teorema: Propiedades de las desigualdades

En las siguientes propiedades a, b, c, d y k representan números reales cualesquiera

1. Transitiva: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Ejemplo 4.5

$2 < 5$ y $5 < 7 \Rightarrow 2 < 7$

2. Aditiva: Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

Ejemplo 4.6

$-4 < -2$ y $-\frac{1}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow -4 - \frac{1}{2} < -2 + \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < -\frac{1}{2}$

3. Si $a < b$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $a + k < b + k$

Ejemplo 4.7

$2 < 5 \Rightarrow 2 + (-2) < 5 + (-2) \Rightarrow 0 < 3$

4. Si $a < b$ y $k > 0$, (k negativo) entonces $ak < bk$ al multiplicar una desigualdad por un número positivo la desigualdad se mantiene.

Ejemplo 4.8

$$-\frac{1}{2} < 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 2 < 3 \times 2 \Rightarrow -1 < 6$$

5. Si $a < b$ y $k < 0$, (k negativo) entonces $ak > bk$ al multiplicar una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

Observación: Se obtiene propiedades válidas análogas a las anteriores si sustituimos $<$ por $\leq$ y $>$ por $\geq$.

Ejemplo 4.9

Probar la propiedad (1) del teorema anterior. Esto es, probar

Si $\underbrace{a < b \text{ y } b < c}_{P}$, entonces $\underbrace{a < c}_{Q}$

Si P es cierta entonces Q también lo es.

Prueba:

$$\begin{aligned} a < b \text{ y } b < c &\Rightarrow (b-a) > 0 \text{ y } (c-b) > 0 \\ &\Rightarrow (b-a) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } (c-b) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b-a) + (c-b) > 0 \text{ suma de } \mathbb{R}^+ \text{ es } \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (c-a) > 0 \\ &\Rightarrow c > a \end{aligned}$$

Observación: el número c está entre a y b cuando $a < c \; y \; c < b$ y escribimos $a < c < b$.

Muchos problemas involucran subconjuntos de los números reales. Los subconjuntos más frecuentes utilizados son los intervalos de la recta real. Los intervalos de la recta real se resumen en el siguiente cuadro

Clases de intervalo	**Notación de conjunto**	**Notación de intervalo**
Intervalo abierto Intervalo cerrado	$\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$	(a, b) $[a, b]$
Intervalo semiabierto	$\{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$ $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$	$(a, b]$ $[a, b)$
Intervalos no acotados abiertos	$\{x \in \mathbb{R}/x < b\}$ $\{x \in \mathbb{R}/a < x\}$	$(-\infty, b)$ $(a, +\infty)$
Intervalos no acotados cerrados	$\{x \in \mathbb{R}/x \leq b\}$ $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}$	$(-\infty, b]$ $[a, +\infty)$
Recta real	$\{x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, +\infty)$

4.10.2 Solución de desigualdades

Resolver una desigualdad consiste en encontrar el conjunto de todos los números reales que la satisfacen; dicho conjunto se llama conjunto solución de la desigualdad y la denotamos como CS Diremos que el número real a es solución de una desigualdad si al reemplazar x por a en la desigualdad esta se cumple.

Ejemplo 4.10

a. Para la desigualdad $\frac{x}{3} - 2 < \frac{x}{4} + 10$

Se tiene que $x = 0$ el número real es solución de la desigualdad puesto que

$\frac{0}{3} - 2 = -2 < \frac{0}{3} + 10 = 10$, mientras que $x = 240$ no es solución, pues

$$\frac{240}{3} - 2 = 78 > \frac{240}{4} + 10 = 70$$

$$\frac{x}{3} - 2 < \frac{x}{4} + 10$$

Para resolver la desigualdad procedemos así:

$$\frac{x}{3} - 2 < \frac{x}{4} + 10$$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 10 + 2$ inverso aditivo suma a ambos lados

$$\Leftrightarrow \frac{x}{12} < 12 \Leftrightarrow x < 144$$

Entonces, el conjunto solución de la desigualdad es:

$$CS = \{x \in \mathbb{R}/x < 144\} = (-\infty, 144)$$

Resolver las siguientes desigualdades lineales:

b. $3x - 9 < 7$

$$\begin{aligned} 3x - 9 < 7 &\Leftrightarrow 3x - 9 + 9 < 7 + 9 \\ &\Leftrightarrow 3x < 16 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto solución de la desigualdad es:

$$CS = \left\{x\,/x < \frac{16}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{16}{3}\right)$$

c. $2x + 7 < 3x + 9 < x + 20$

$$\begin{aligned} 2x + 7 < 3x + 9 < x + 20 &\Leftrightarrow 2x + 7 < 3x + 9 \ \wedge \ 3x + 9 < x + 20 \\ &\Leftrightarrow 2x + 7 < 3x + 9 \ \wedge \ 3x + 9 < x + 20 \\ &\Leftrightarrow 7 - 9 < 3x - 2x \ \wedge \ 3x - x < 20 - 9 \\ &\Leftrightarrow -2 < x \ \wedge \ 2x < 11 \\ &\Leftrightarrow -2 < x \ \wedge \ x < \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es:

$$CS = \left\{x \in \mathbb{R}/-2 < x \ \wedge x < \frac{11}{2}\right\} = (-2, 11/2)$$

Las desigualdades anteriores son lineales, esto es, solo involucran polinomios de primer grado que tiene la forma $(ax + b)$.

El cero o raíz de esta clase de polinomios es $x = -\frac{b}{a}$ se puede mostrar que el signo de este tipo de polinomio solo cambia en $x = -\frac{b}{a}$.

4.10.3 Desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que involucran polinomios de grado superior usaremos el hecho de que un polinomio solo cambia de signo en sus ceros o raíces y también utilizaremos la ley de signos.

Definición: Un polinomio de grado n en la variable x es una expresión de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son coeficientes numéricos y $a_n \neq 0$.

Diremos que $x = b$ es un cero o raíz de $P(x)$ si $P(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$

Para resolver desigualdades en las que intervienen polinomios de grado n se procede de la siguiente forma

i. Transforma la desigualdad hasta comparar con cero
ii. Obtenemos los ceros o raíces reales del polinomio y lo factorizamos
iii. Ordenamos los ceros del polinomio en la recta real
iv. Buscamos los signos del polinomio en cada uno de los intervalos determinados por los ceros
v. Usamos la ley de signos para obtener el conjunto solución de la desigualdad

Ley de signos

Sean a y b expresiones algebraicas entonces

i. $a \times b > 0 \; si \; y \; solo \; si \; (a > 0 \; \wedge \; b > 0) \vee (a < 0 \; \wedge b < 0)$

es decir $''+'' \cdot '' +''=''+''$

$''-'' \cdot '' -''=''+''$

ii. $a \times b < 0 \; si \; y \; solo \; si \; (a < 0 \; \wedge \; b > 0) \vee (a > 0 \; \wedge b < 0)$

es decir $''-'' \cdot '' +''=''-''$

$''+'' \cdot '' -''=''-''$

Estas leyes también se cumplen para cocientes

Nota: También hay que tener en cuenta que $a \times b = 0$ si y solo si $a = 0 \lor b = 0$

Ejemplo 4.11

Resolver para x las siguientes desigualdades. Exprese la solución en forma de intervalo y represéntela sobre la recta real:

a) $\frac{x}{x+5} \leq \frac{1}{x-3}$

Solución:

Para resolver la desigualdad procedemos de la siguiente forma:

$$\frac{x}{x+5} \leq \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+5} - \frac{1}{x-3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-3)-(x+5)}{(x+5)(x-3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{(x+5)(x-3)} \leq 0$$

factorizando el numerador obtenemos:

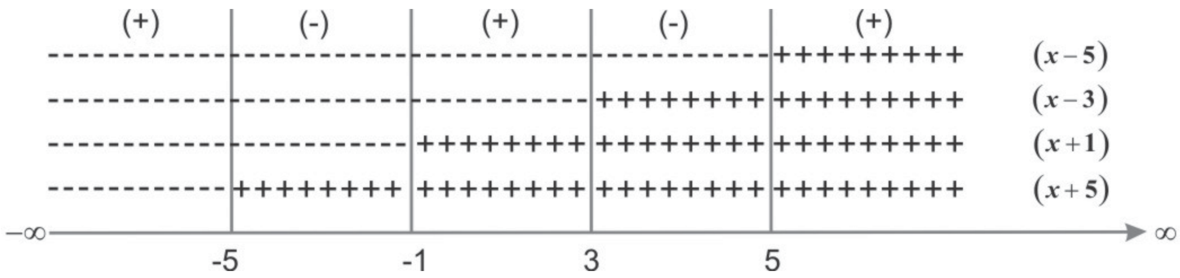
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{(x+5)(x-3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{(x+5)(x-3)} \leq 0$$

Esta fracción será menor o igual a cero cuando el numerador y denominador tengan signos contrarios. Para encontrar la solución buscamos los signos de cada uno de los factores que aparecen en la última expresión. Todos los factores son lineales; por lo tanto, sólo tienen un cero. El cambio de signo de cada uno de los factores se produce en el cero del factor.

- Signos de $x-5$: $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$, en otro caso el signo será positivo.
- Signos de $x+1$: $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$, en otro caso el signo será positivo
- Signos de $x+5$: $x+5<0 \Leftrightarrow x<-5$, en otro caso el signo será positivo
- Signos de $x-3$: $x-3<0 \Leftrightarrow x<3$, en otro caso el signo será positivo

Los ceros de esos factores se producen en 5, -1, -5 y 3. A continuación ubicamos los ceros en la recta real y realizamos el producto de signos, los signos de la fracción están en la parte superior del diagrama:



Como la desigualdad es de menor o igual entonces, la solución se obtiene de la figura anterior cuando el producto de signos sea negativo. Además, en el conjunto solución se incluyen los ceros del numerador, pues la desigualdad es menor o igual a cero y no se incluyen los ceros del denominador. Entonces, el conjunto solución es

$$CS = \{x \in \mathbb{R}/-5 < x \leq -1 \ \vee \ 3 < x \leq 5\} = (-5,-1] \cup (3,5]$$

b) $-1 \leq \frac{x+4}{2x-6}$

Solución:

Para resolver esta desigualdad procedemos de la siguiente forma:

$$-1 \leq \frac{x+4}{2x-6} \Leftrightarrow \frac{x+4}{2x-6} + 1 \geq 0$$

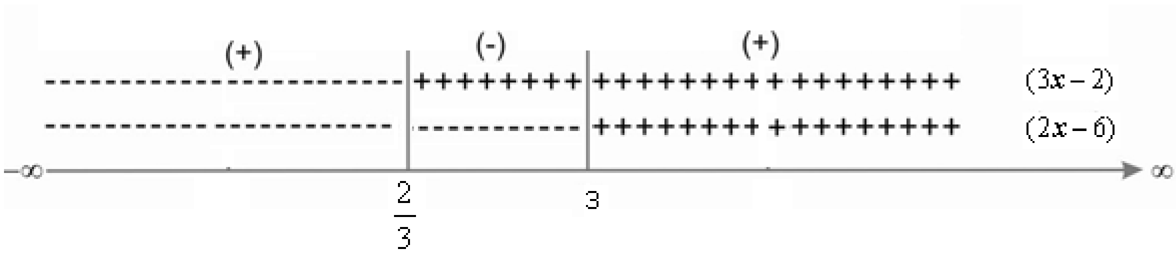
Al efectuar la suma indicada, la desigualdad anterior se transforma en:

$$\frac{3x-2}{2x-6} \geq 0$$

.Para encontrar la solución de esta última desigualdad utilizamos el método de los signos, así:

- Signos de $3x-2$: $3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2/3$, en otro caso el signo es negativo.
- Signos de $2x-6$: $2x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 3$, en otro caso el signo será negativo.

Los ceros de esos factores se producen en $\frac{2}{3}$ y 3. A continuación ubicamos los ceros en la recta real y realizamos el producto de signos. Debido a que la desigualdad es condicional, los ceros del numerador harán parte del conjunto solución.



Como la desigualdad es mayor o igual entonces, la solución se obtiene de la figura anterior cuando el producto de signos sea positivo incluyendo los ceros del numerador en la solución; así, el conjunto solución es:

$$CS = \left\{x \in \mathbb{R}/x \leq \frac{2}{3} \vee 3 < x\right\} = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup (3, +\infty)$$

c)

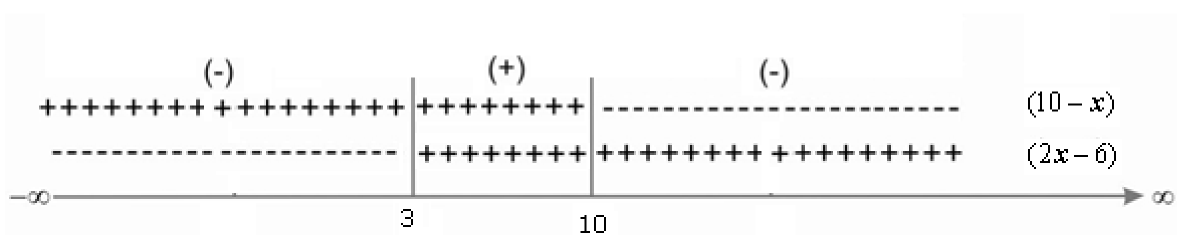
$$\frac{x+4}{2x-6} \leq 1$$

Solución:

Para resolver esta desigualdad procedemos de la siguiente forma:

$$\frac{x+4}{2x-6} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-(2x-6)}{2x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{10-x}{2x-6} \leq 0$$

Los ceros de los factores de la expresión anterior son $x = 10$ y $x = 3$. Estos ceros o raíces dividen la recta real en tres intervalos, y se realiza la ley de signos como se muestra en la siguiente figura.



Como la desigualdad es menor o igual entonces, la solución se obtiene de la figura anterior cuando el producto de signos sea negativo incluyendo los ceros del numerador en la solución; así, el conjunto solución es:

$CS = (-\infty, 3) \cup [10, \infty)$

4.11 El plano cartesiano

Un par ordenado (x, y) de números reales tiene a x como primera componente o abscisa y a y como segunda componente u ordenada. El modelo usado para representar pares ordenados se llama sistema rectangular de coordenadas o plano cartesiano. El plano cartesiano se forma mediante la intersección de una línea horizontal llamada eje x y una línea vertical llamada eje y. El punto de intersección de los ejes x e y, se llama origen y se denota por $(0,0)$. Una forma alternativa de definirlo es tomar la representación gráfica de los números reales (recta real), una en posición vertical y otra en posición horizontal, de tal forma que se corten en el cero y la parte positiva de la recta horizontal quede a la derecha y la parte positiva de la vertical quede hacia arriba.

A la derecha del origen están los x positivos y a la izquierda los negativos. En la parte superior están los valores positivos de y, y en la parte inferior están los negativos. El conjunto de pares ordenados o plano cartesiano también se conoce como $\mathbb{R}^2$ y se define como:

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/\ x \in \mathbb{R}\ \wedge y \in \mathbb{R}\}$

A cada punto P en el plano le corresponde un par ordenado (x, y) y a toda pareja (x, y) le corresponde un único punto en $\mathbb{R}^2$.

Nota: la abscisa del punto P indica la distancia dirigida de P al eje y, y la ordenada del punto P indica la distancia dirigida de P al eje x.

Los ejes dividen el plano cartesiano en cuatro regiones o cuadrantes como se muestra en la figura 4.2:

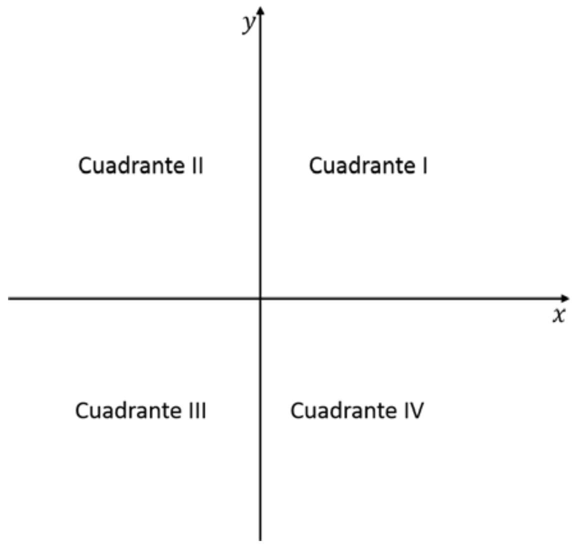


Figura 4.2. Cuadrantes del plano cartesiano

Ejemplo 4.12

Ubique los puntos $(2, 3)$; $(-4, -2)$; $(3, -2)$ y $(-5, 6)$ en el plano.

Solución:

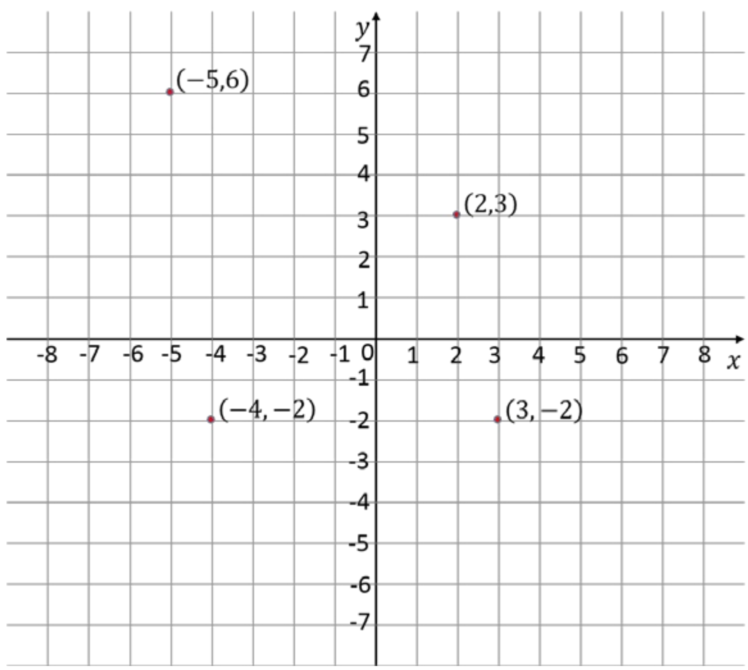


Figura 4.3. Ubicación de varios puntos en el plano cartesiano.

4.11.1 Distancia entre dos puntos y punto medio

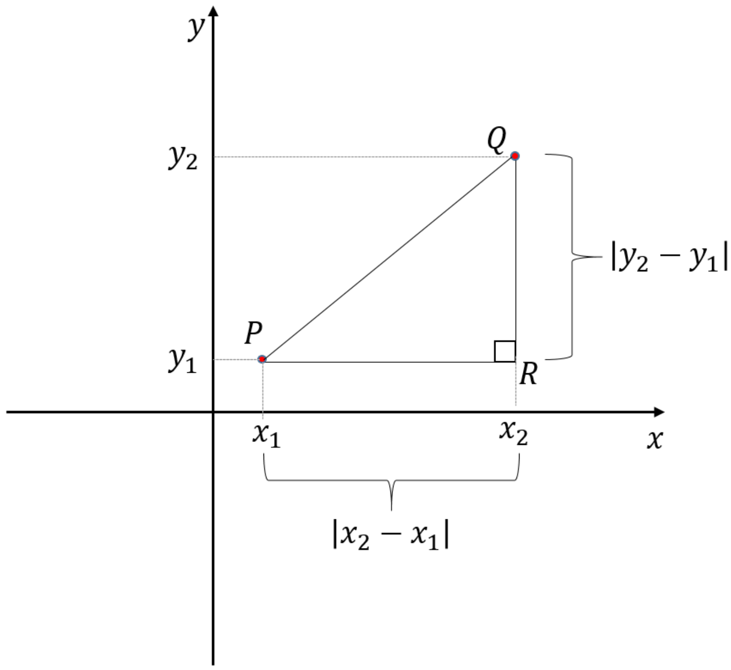


Figura 4.4. Distancia entre dos puntos.

Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ puntos cualesquiera en el plano, los puntos P, Q con $R = (x_2, y_1)$ forman un triángulo rectángulo como se observa en la figura 4.5, donde los catetos son $\overline{PR}$ y $\overline{RQ}$ tienen longitudes $(x_2 - x_1)$ y $(y_2 - y_1)$ respectivamente, para hallar la distancia entre los puntos P y Q que es la hipotenusa del triángulo PQR se utiliza el teorema de Pitágoras que dice que en un triangulo rectángulo la suma de sus catetos al cuadrados es igual a la hipotenusa al cuadrado, es decir, $a^2 + b^2 = c^2$ donde a, b son los catetos y c es la hipotenusa.

Al aplicar el teorema de Pitágoras para el triángulo con vértices en P, Q y R se obtiene

$d(P, Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Sacando raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación anterior se sigue que

$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$

Ejemplo 4.13

Halle la distancia entre los puntos $P = \left(3, -\frac{1}{4}\right)$ y $Q = (5,6)$

Solución:

$$d(P,Q) = \sqrt{(5-3)^2 + \left(6 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{625}{16}} = \sqrt{\frac{689}{16}} = \frac{\sqrt{689}}{4}$$

Punto medio:

$x_{medio} = \frac{x_2+x_1}{2}$ $\qquad\qquad$ $y_{medio} = \frac{y_2+y_1}{2}$

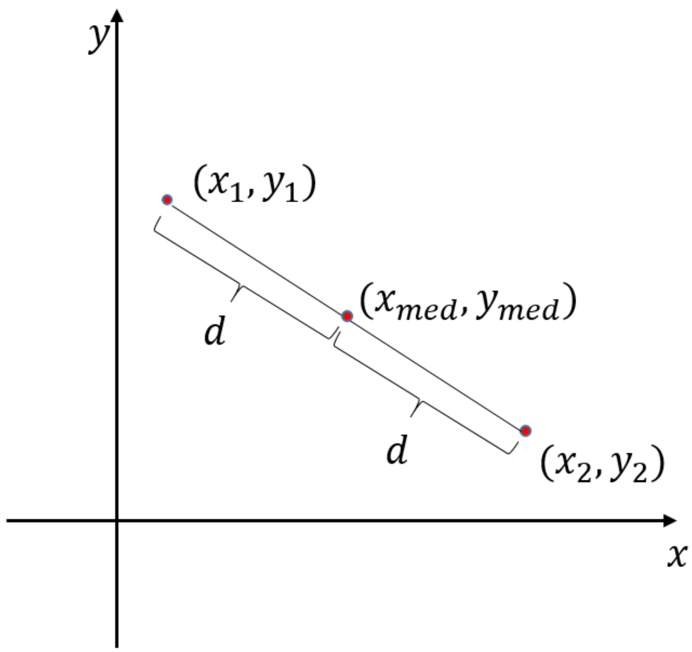


Figura 4.5. Punto medio de un segmento en el plano cartesiano.

5. La circunferencia

La fórmula de la distancia es útil a menudo para hallar la ecuación de una curva cuya definición geométrica depende de una o más distancias.

Una de las curvas más sencillas de esta clase es una circunferencia, que puede definirse como el conjunto de todos los puntos a una distancia dada (el radio) de un punto dado (el centro). Si el centro es el punto (h, k) y el radio es el número positivo r y si (x, y) es un punto arbitrario de la circunferencia, entonces la distancia del punto (h, k) al punto(x, y) está dada por:

$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

Es conveniente eliminar el signo de la raíz cuadrada elevando al cuadrado, lo que da:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (1)

Esta es, por tanto, la ecuación de la circunferencia con centro (h,k) y radio r. En particular, si el centro resulta ser el origen, de modo que $h=k=0$, entonces la ecuación de la circunferencia es:

$x^2+y^2=r^2$

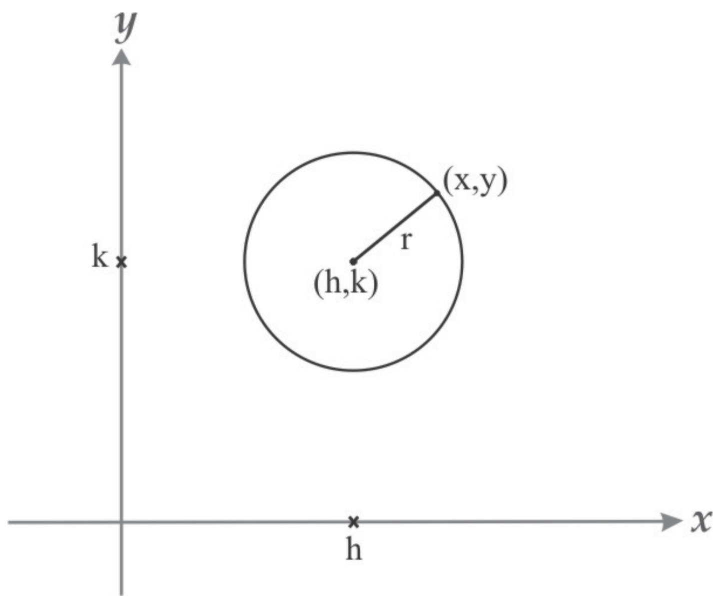


Figura 5.1. Circunferencia con centro en (h,k) y radio r.

Es claro que cualquier ecuación de la forma (1) es fácil de interpretar geométricamente. Por ejemplo:

$(x-5)^2+(y+2)^2=16$ (2)

Se reconoce inmediatamente como la ecuación de la circunferencia con centro $(5,-2)$ y radio 4, y esta información nos permite esbozar la gráfica sin dificultad.

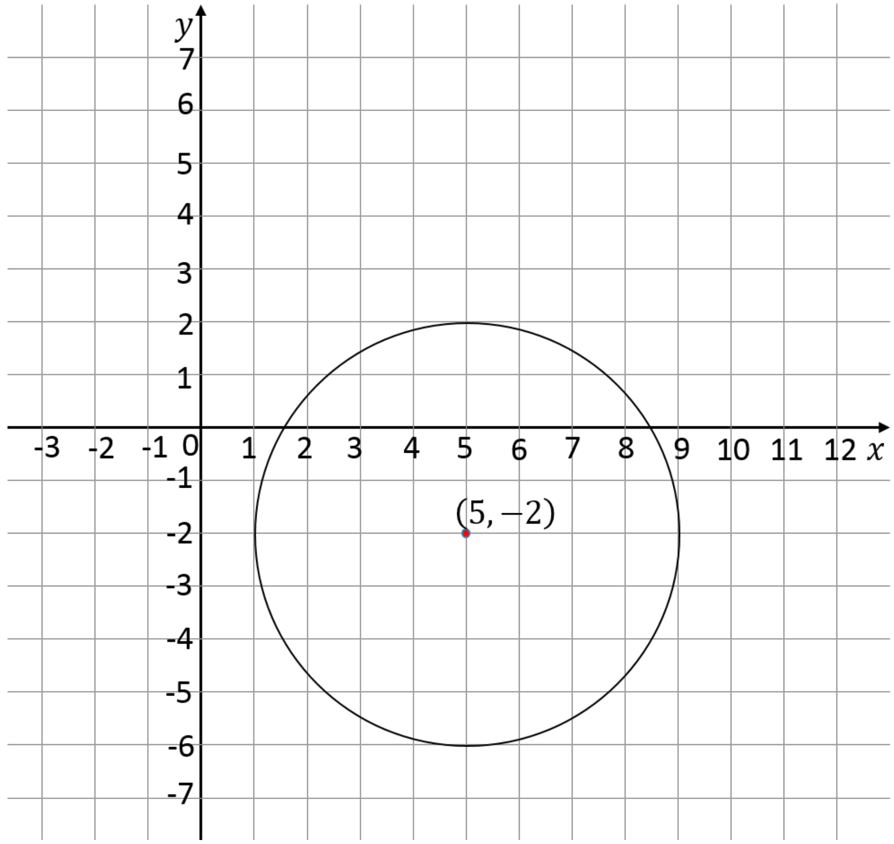


Figura 5.2. Circunferencia con centro en $(5, -2)$ y radio 4.

Sin embargo, si la ecuación ha sido tratada por alguien a quien le gusta simplificar las cosas algebraicamente, entonces podría tener la forma:

$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$ (3)

Esta es una versión de (2) equivalente, pero resuelta, y sus constantes no nos dicen nada directamente acerca de la naturaleza de la gráfica. Para descubrir cuál es la gráfica de la circunferencia, debemos descifrarla completando cuadrados. Para hacer esto, comenzamos reescribiendo la ecuación (3) como:

$(x^2 - 10x + \ ) + (y^2 + 4y + \ ) = -13$

Con el término constante llevado al segundo miembro y con espacios en blanco para insertar las constantes adecuadas. Cuando se añade en el primer espacio en blanco el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, y en el segundo espacio en blanco el cuadrado de la mitad del coeficiente de y, y se suman las mismas constantes al segundo miembro para mantener la igualdad, obtenemos:

$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 4y + 4) = -13 + 25 + 4$

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$ (4)

El mismo proceso puede aplicarse a la ecuación general de la forma (3), es decir,

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ (5)

Pero hay poco que ganar escribiendo los detalles en este caso general. Sin embargo, es importante darse cuenta de que si el término constante 13 en (3) se sustituye por 29, entonces (4) se convierte en:

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$

Cuya gráfica se reduce al punto $(5, -2)$

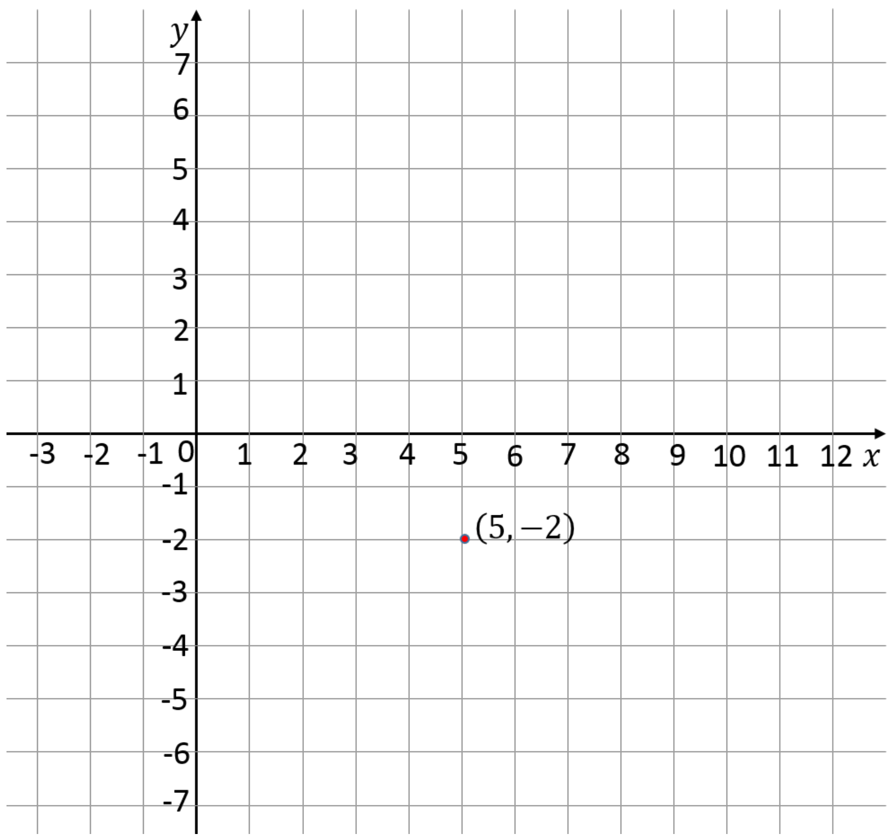


Figura 5.3. Circunferencia con centro en $(5, -2)$ y radio $r = 0$.

Del mismo modo, si este término constante se sustituye por cualquier número mayor que 29, entonces el segundo miembro de (4) se hace negativo y la gráfica sería vacía, en el sentido de que no hay puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas verifiquen la ecuación.

Vemos por tanto que la gráfica de (5) es a veces una circunferencia, a veces es un único punto y a veces vacío, dependiendo totalmente de las constantes $A, B\ y\ C$.

Ejemplo 5.1

Si el radio de una circunferencia es $\sqrt{10}$ y su centro es $(-3, 4)$, entonces su ecuación es:

Solución:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$

Obsérvese que las coordenadas del centro son los números que se restan de x y de y en los paréntesis.

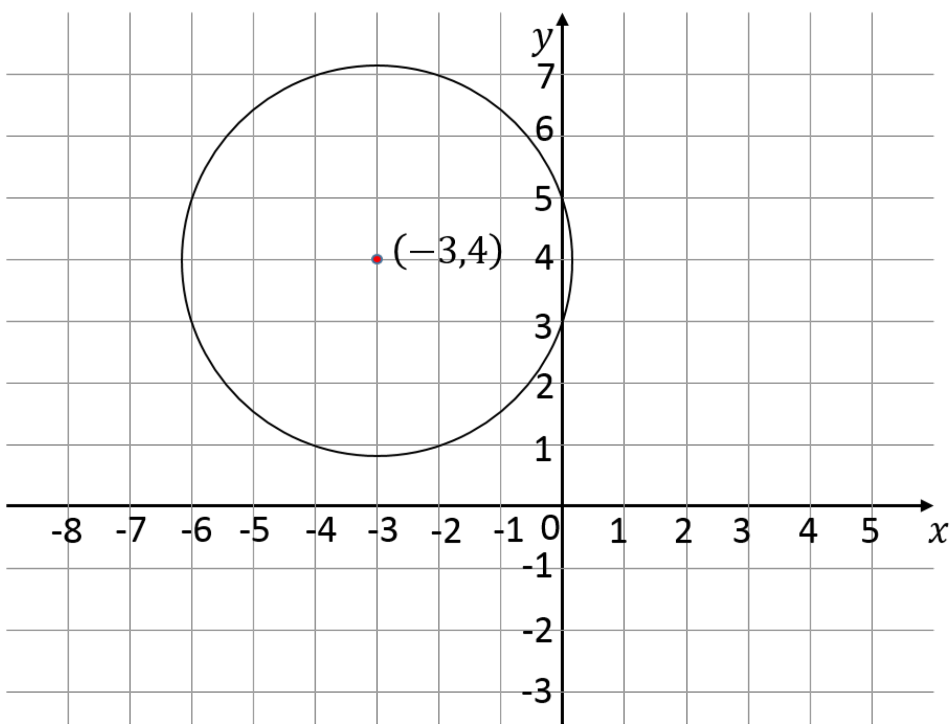


Figura 5.4. Circunferencia con centro en $(-3,4)$ y radio $r = \sqrt{10}$.

Ejemplo 5.2

Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es necesariamente un ángulo recto. Para probar esto algebraicamente supongamos que la semicircunferencia tiene radio r y centro en el origen, de modo que su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$ con $y \geq 0$. El ángulo inscrito es un ángulo recto si y solo si el producto de las pendientes de sus lados es -1, es decir, las rectas que contienen estos segmentos de recta son perpendiculares (más adelante se definirá esto) esto es equivalente a la siguiente condición.

$\frac{y}{x-r} \cdot \frac{y}{x+r} = -1$

Se ve fácilmente que esto es equivalente a $x^2 + y^2 = r^2$ que es ciertamente verdadero para cualquier punto (x, y) sobre la circunferencia, de modo que la ecuación anterior es verdadera y el ángulo es recto (figura 5.5).

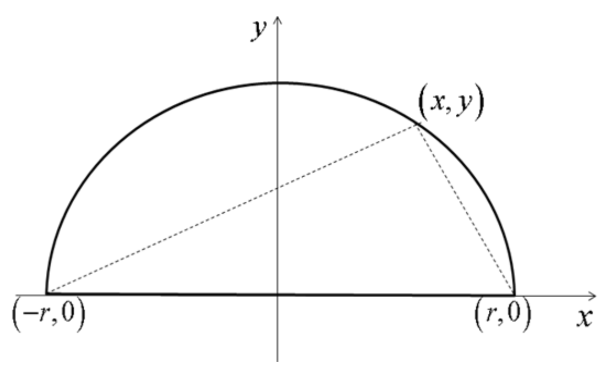


Figura 5.5. Ángulo inscrito en circunferencia.

6. La línea recta

La gráfica de una ecuación de la forma:

$$y = mx + b$$

Se llama línea recta y tiene la forma (Figura 6.1):

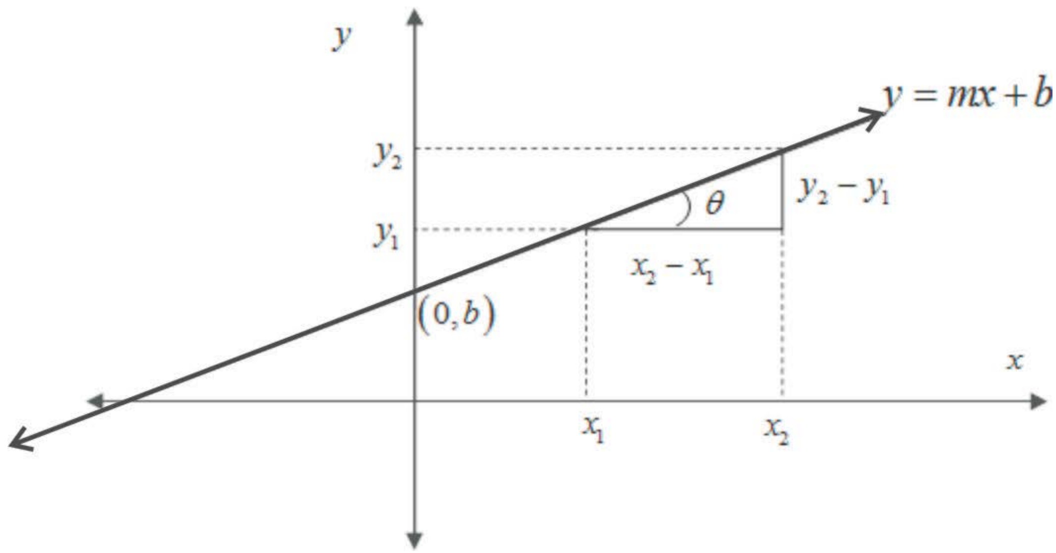


Figura 6.1. Representación de la línea recta $y = mx + b$.

El número m se llama pendiente de la recta. Las intersecciones de la recta con los ejes son los puntos $(0, b)$ y $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$.

6.1 Pendiente de la recta

La pendiente m de la línea recta $y = mx + b$ representa el cambio que se produce en y cuando x se incrementa en una unidad. En efecto, si $x$aumenta una unidad, el valor de y es:

$y_1 = m(x + 1) + b$

$y_1 = mx + m + b$

$y_1 = \underbrace{mx + b}_{y} + m$

$y_1 = y + m$

$y_1 - y = m$

Sean (x_1, y_1)y (x_2, y_2)dos puntos sobre la recta, entonces:

$y_2 = mx_2 + b$

$y_1 = mx_1 + b$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

Por lo tanto, la pendiente m de una recta representa la razón de cambio de y con respecto a x.

En la gráfica anterior se observa que la pendiente m es la inclinación de la recta con respecto al eje horizontal.

Cuando $m > 0$, al aumentar x aumenta y y si $m < 0$ al aumentar x disminuye y

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}$$

Nota: Una recta tiene siempre la misma pendiente en cualquier punto.

6.2 Ecuaciones de líneas rectas

6.2.1 Punto pendiente

Consideremos una recta l con pendiente m, un punto fijo (x_1, y_1)sobre la recta y un punto variable (x, y)entonces la pendiente de la recta l está dada por:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Luego

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Ecuación punto-pendiente

Ejemplo 6.1

Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = 2$ y pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución:

Conocemos un punto $(1, 1)$ sobre la recta y la pendiente $m = 2$ entonces la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es $y - 1 = 2(x - 1)$.

Para trazar la gráfica de esta recta ubicamos las intersecciones con los ejes en el plano cartesiano y los unimos mediante una línea continua. Sabemos que las intersecciones con los ejes x e y son $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$ y $(0, b)$, respectivamente. En este caso, las intersecciones son:

$$\left(\frac{-b}{m}, 0\right) = \left(\frac{-(-1)}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right); (0, b) = (0, -1)$$

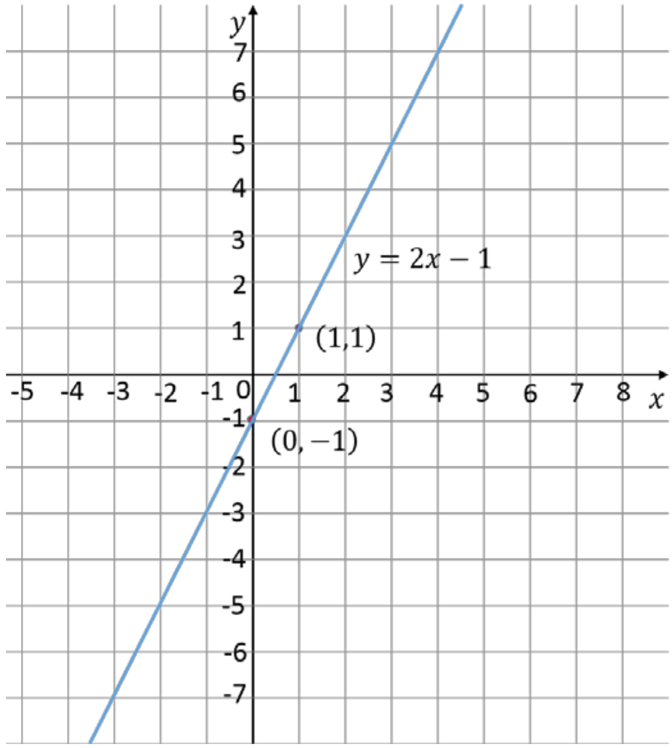


Figura 6.2. Recta ejemplo 6.1.

6.2.2 Ecuación de una recta que pasa por dos puntos

Consideremos una línea recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$. Para encontrar la ecuación de la recta procedemos así:

i. Encontramos la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

ii. Usamos la ecuación de la línea recta en la forma punto pendiente con el punto (x_1, y_1) entonces la ecuación es $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Esto significa que para usar punto pendiente podemos usar cualquier punto sobre la recta.

Ejemplo 6.2

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ y $(0, 2)$.

Solución:

La pendiente de la recta está dada por $m = \frac{2-1}{0—(-1/2)} = \frac{1}{1/2} = 2$, tomando el punto $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ la ecuación de la línea recta es $y - 1 = 2\left(x—\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow y - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

6.2.3 Rectas verticales

Una recta vertical no tiene pendiente las ecuaciones de estas rectas tiene la forma $mx = k$ con k constante. Es decir $x = c$, c constante.

6.2.4 Rectas horizontales

Una recta horizontal se caracteriza por tener $m = 0$, y por lo tanto su ecuación es de la forma $y = b$.

Nota: No tener pendiente NO significa tener una pendiente igual a cero.

Ejemplo 6.3

Sea $3x - 7y = 8$ halle:

a) La pendiente

b) Intercepto con eje y

c) Intercepto con eje x

d) Grafique la recta

Solución:

a) Se escribe la ecuación de la recta en la forma pendiente e intercepto:

$3x - 8 = 7y \Rightarrow y = \frac{3x-8}{7} = \frac{3}{7}x - \frac{8}{7}$ por tanto $m = \frac{3}{7}$.

b) La ecuación de la recta $y = \frac{3}{7}x - \frac{8}{7}$ está en la forma pendiente e intercepto, donde el intercepto: con el eje y es $-8/7$.

c) Para hallar el intercepto con el eje x se hace $y = 0$, reemplazando en la ecuación se tiene $3x - 8 = 0 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$, así el intercepto con el eje x es $8/3$.

d) Gráfica de la ecuación:

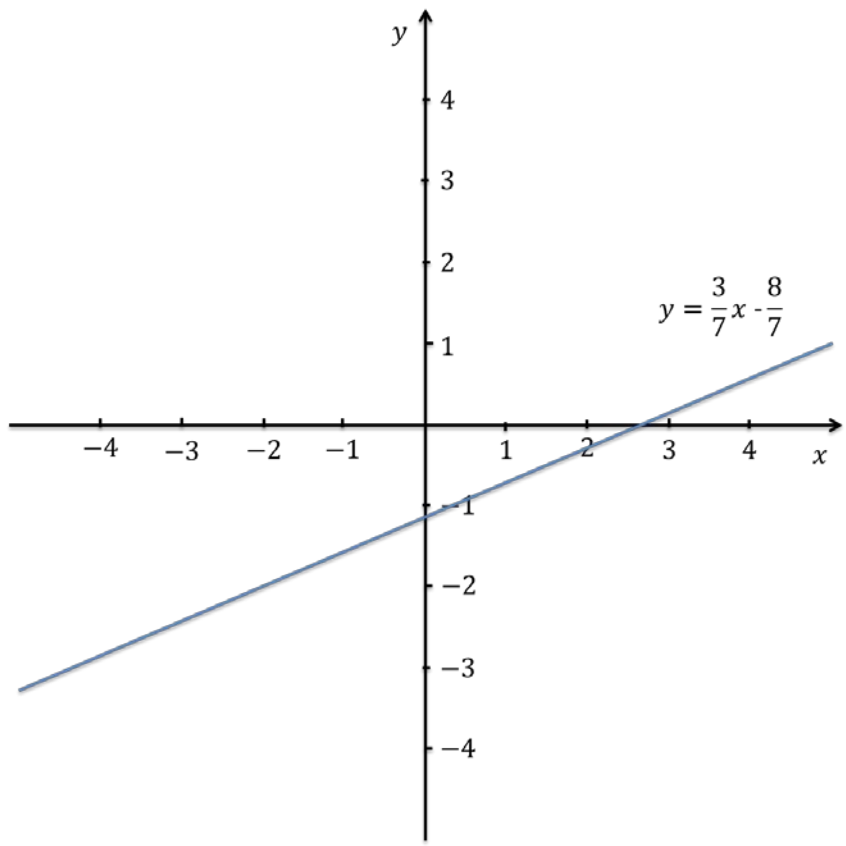


Figura 6.3. Recta $y = \frac{3}{7}x - \frac{8}{7}$.

Ejemplo 6.4

Un doctor compró un automóvil nuevo en 1991 por \$32.000. En 1994, él lo vendió a un amigo en \$26.000. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio de venta del automóvil y el año en el que se vendió. Determine e interprete la pendiente.

Solución:

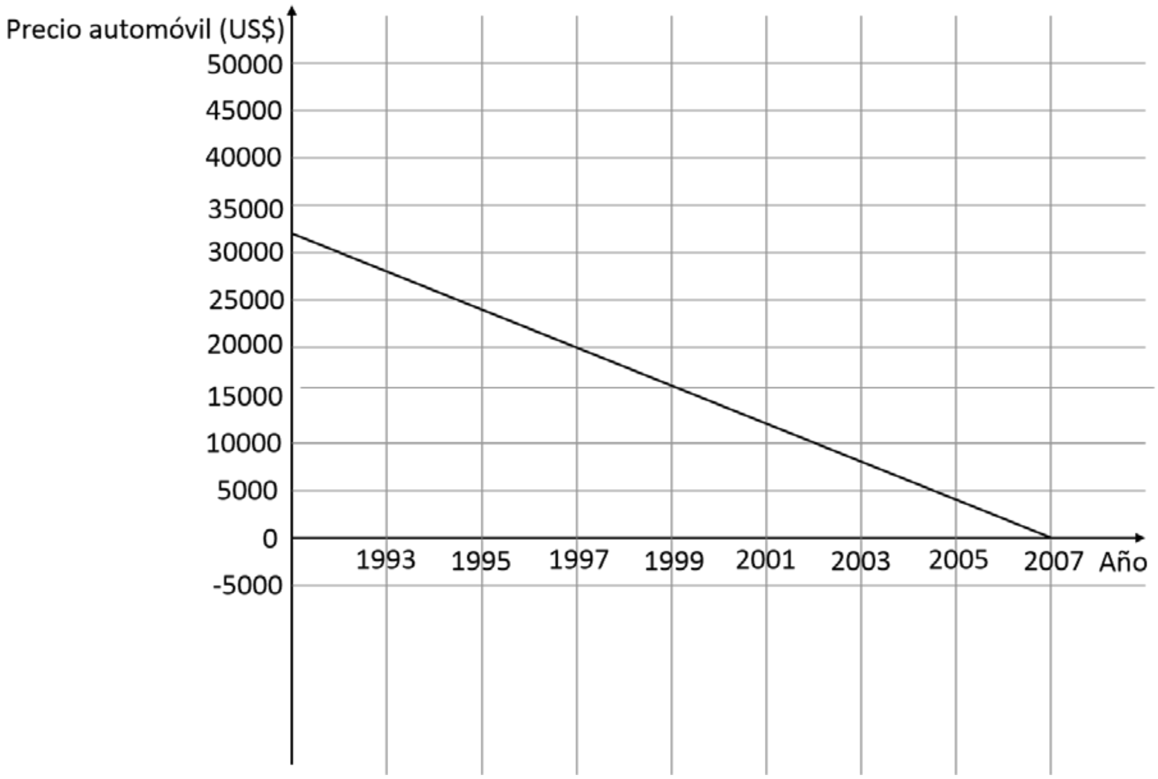


Figura 6.4. Recta ejemplo 6.4.

$$m = \frac{26.000 - 32.000}{1994 - 1991} = \frac{-6.000}{3} = -2.000$$

Como la pendiente es negativa, significa que por cada año que transcurra el precio del automóvil disminuye en \$2.000.

Ejemplo 6.5

Un nuevo programa de matemáticas aplicadas en una universidad ha aumentado su matrícula en catorce estudiantes por año, durante los últimos cinco años. Si el programa tenía matriculados cincuenta estudiantes en su tercer año, ¿Cuál es una ecuación para el número de estudiantes S en el programa como una función del número de años T desde su inicio?

Solución:

Sea S_1 el número de estudiantes del primer año, como la universidad aumenta la matricula en 14 estudiantes por año entonces en el segundo año la cantidad de estudiantes es

$S_2 = S_1 + 14$, y en el tercer año habrán $S_3 = S_2 + 14 = S_1 + 2 \cdot 14 = S_1 + 28$ y como en el tercer año hay matriculados 50 estudiantes se sigue que $S_3 = S_1 + 28 = 50$, por tanto $S_1 = 22$, así la ecuación para el número de estudiantes por año está dada por:

$S(T) = 22 + (T - 1) \cdot 14$

donde T es el número de años desde el inicio.

	Formas
Forma punto pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente intercepto	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

6.3 Rectas paralelas y perpendiculares

Las rectas son ecuaciones simples que son muy usadas en desarrollos teóricos y prácticos en muchas ramas, incluidas las de las ciencias económicas. Algunos conceptos que provienen de la geometría como el paralelismo o la perpendicularidad se pueden abordar desde los sistemas de ecuaciones, pero además podemos integrar estas ecuaciones lineales con las circunferencias.

6.3.1 Rectas paralelas

Dos rectas $L_1 : y = m_1 x + b_1$ y $L_2 : y = m_2\, x + b_2$ son paralelas, lo que denotamos como $L_1 // L_2$. En este caso se cumple que $m_1 = m_2$, y así, las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Dos rectas no verticales son paralelas si tienen la misma pendiente, es decir,

$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

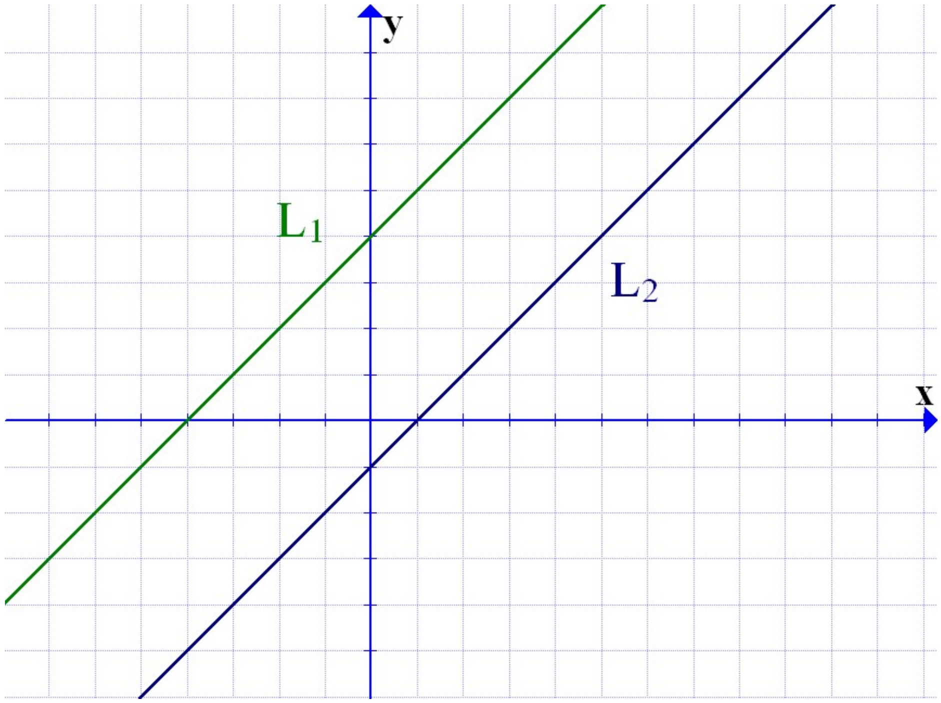


Figura 6.5. Representación de rectas paralelas.

Por ejemplo, las rectas $y = 2x - 4$ y $y = 2x + 4$ son paralelas.

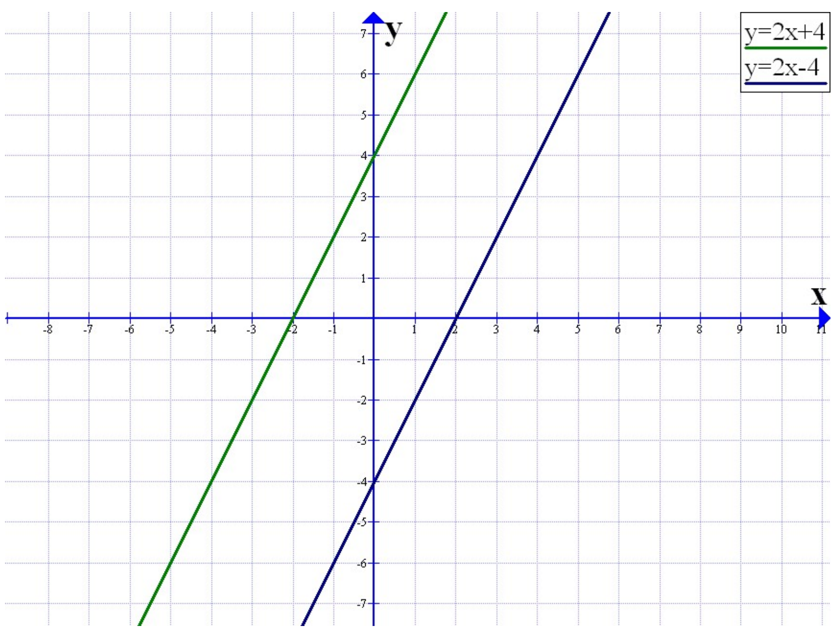


Figura 6.6. Rectas paralelas.

6.3.2 Rectas perpendiculares

Dos rectas no verticales $L_1: y = m_1 x + b_1$ y $L_2: y = m_2\, x + b_2$ son perpendiculares, lo que denotamos como $L_1 \perp L_2$ si estas se cortan formando un ángulo recto. En este caso se cumple que $m_1 * m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

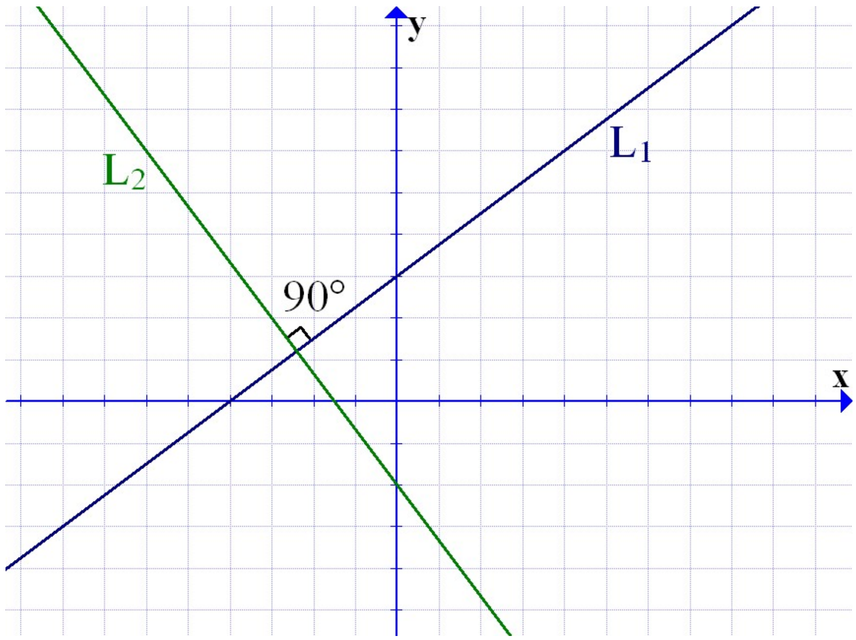


Figura 6.7. Representación de rectas perpendiculares.

Por ejemplo, las rectas $y = 2x + 3$ y $y = -\frac{x}{2} - 2$ son perpendiculares.

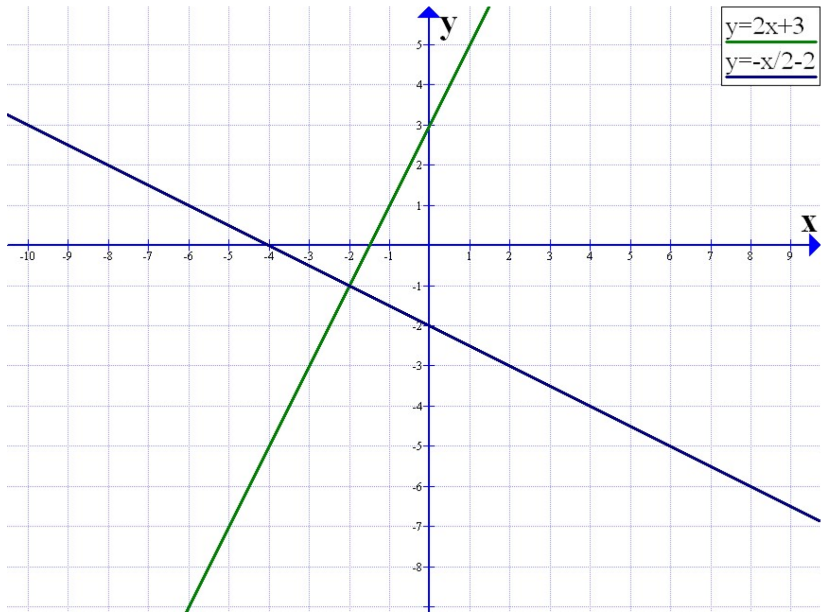


Figura 6.8. Rectas perpendiculares.

Finalmente la ecuación general de una recta es $Ax + By + C = 0$.
Para obtener la pendiente despejamos x en términos de y.

Ejemplo 6.6

Un fabricante de bienes deportivos asigna 1000 unidades de tiempo por un día para fabricar esquís y botas para esquís. Si toma 8 unidades de tiempo fabricar un esquí y 14 unidades de tiempo fabricar una bota, determine una ecuación que describa todos los posibles niveles de producción de los dos productos.

Solución:

$8E + 14B = 1000$

Curvas de oferta y demanda lineales

Se define la ***demanda*** como la cantidad de bienes o servicios que puede adquirir un consumidor que depende del precio del mercado y la ***oferta*** es la cantidad de bienes o servicios que los productores ofrecen en el mercado a distintos precios.

De acuerdo a esto se tienen las curvas de oferta y demanda donde p denota el precio en el mercado y q la cantidad de bienes o servicios.

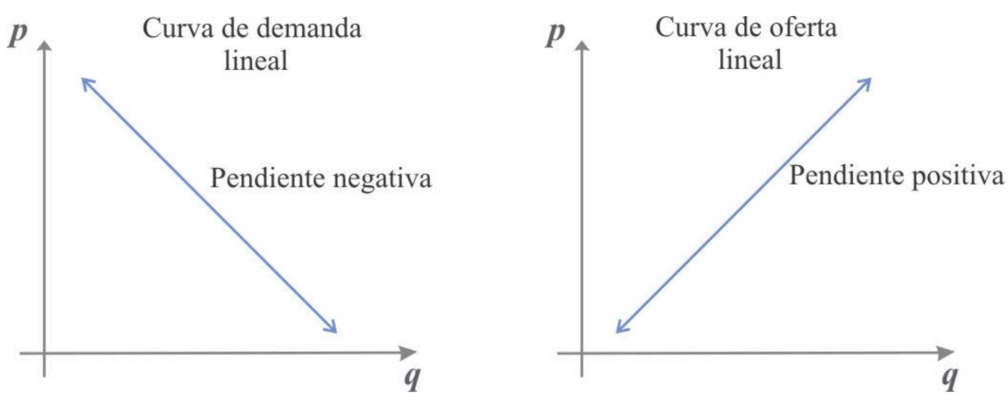


Figura 6.9. Niveles de producción.

Ejemplo 6.7

La demanda semanal de balones de fútbol es 1000 unidades cuando el precio es de $225 cada uno, y 600 unidades cuando el precio es de $325 cada uno. Determine la ecuación de demanda para los balones suponiendo un comportamiento lineal.

Solución:

La pendiente de la recta que pasa por (1000,225) y (600,325) es:

$$m = \frac{325 - 225}{600 - 1000} = \frac{100}{-400} = -\frac{1}{4}$$

Entonces, una ecuación de la recta en la forma punto pendiente está dada por:

$$p - p_1 = m(q - q_1)$$

$$p - 225 = -\frac{1}{4}(q - 1000)$$

Simplificando, se obtiene que la ecuación de demanda es:

$$p = -\frac{1}{4}q + 475$$

Ejemplo 6.8

Encuentre las ecuaciones de las líneas rectas que pasan por el punto $(4,-2)$ y que tienen las siguientes propiedades:

a. Pasan por el punto $(-1,3)$

Con los puntos $(4,-2)\ \wedge\ (-1,3)$, encontramos la pendiente:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-5}{5}=-1$$

Con $m=-1 \wedge (4,-2)$, encontramos la ecuación:

$y-(-2)=-1(x-4)$

$y+2=-x+4 \Rightarrow y=-x+4-2$

$y=-x+2$

b. Paralela a la recta $2x+3y=5$.

Como dos rectas son paralelas si y solo si tienen pendientes iguales, entonces hallamos la ecuación pendiente – intersección, así:

$3y=-2x+5;\ y=\dfrac{-2}{3}x+\dfrac{5}{3}$

La cual es la forma $y=mx+b \Rightarrow m=\frac{-2}{3}$

$y-(-2)=-\dfrac{2}{3}(x-4);\ y+2=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$

$y+2=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}-2;\ y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

c. Perpendicular a la recta $2y+3x=1$.

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Entonces:

$2y + 3x = 1$

$2y = -3x + 1$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$$

Como $m \cdot m_1 = -1 \Rightarrow m \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

La recta $y - (-2) = \frac{2}{3}(x - 4)$

$$y + 2 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$y + 2 = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} - 2$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}$$

d. Paralela al eje y.

Si es paralela al eje y tenemos una recta vertical, en las rectas verticales la pendiente es no definida, es decir, es de la forma $m = \frac{a}{0}, a \neq 0$, y la ecuación es:

$x = 4$

e. Paralela al eje x.

Si es paralela al eje x; se presenta una recta horizontal y por lo tanto $m = 0$

$y - 2 = 0(x - 4) \Rightarrow y + 2 = 0$

$y = -2$

Ejemplo 6.9

Dada la recta $cx + 4y = -2$, encontrar el valor de c que cumpla:

a. Pasa por el punto $(3,1)$.

Si pasa por el punto $(3,1)$ entonces, basta sustituir $x = 3$ y $y = 1$ en la ecuación, así:

$c(3) + 4(1) = -2$

$$3c = -4 - 2 \Rightarrow 3c = -6 \Rightarrow c = \frac{-6}{3} = -2$$

Luego $c = -2$

b. Que sea paralela a la recta $4y - 3x = 2$.

Para encontrar las pendientes de las rectas debemos escribir ambas ecuaciones en la forma $y = mx + b$

$$4y = -cx - 2, y = -\frac{c}{4}x - \frac{2}{4} \Rightarrow m = -\frac{c}{4}$$

$$4y = 3x + 2, y = -\frac{3}{4}x + \frac{2}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto $-\frac{c}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow -c = 3;\ c = -3$

c. Que sea perpendicular a la recta $3x - 1 = 5y$

$$3x - 1 = 5y \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{5}$$

$$y = -\frac{c}{4}x - \frac{2}{4} \Rightarrow m = -\frac{c}{4}$$

Para que sean perpendiculares $m \cdot m_1 = -1$

$$\left(-\frac{c}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3c}{20} = 1 \Rightarrow c = \frac{20}{3}$$

7. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Al graficar dos rectas pueden suceder tres casos:

1. Se intersecan en un solo punto.
2. Se cortan o intersecan en infinitos puntos.
3. No se cortan o no se intersecan.

El o los puntos de encuentro son la solución de ese sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto de valores (x, y) que convierte a las dos ecuaciones en proposiciones verdaderas, es decir, satisface ambas ecuaciones.
En esta sección desarrollaremos algunos temas concernientes a la solución de sistemas de ecuaciones lineales centrándonos especialmente en cuatro métodos: gráfico, sustitución, igualación y reducción.

En un sistema de ecuaciones lineales siempre tenemos solo uno de los tres casos siguientes: el sistema tiene una única solución, el sistema no tiene solución, el sistema tiene más de una solución (infinitas soluciones).

Nota 1: Existen muchos métodos para solucionar sistemas lineales; sin embargo todos ellos deben llegar al mismo resultado.

Nota 2: Cuando multiplicamos o dividimos una ecuación o las dos por un número real, la solución del sistema no cambia; es decir, se produce otro sistema de ecuaciones equivalentes.

7.1 Método de sustitución

1. De una de las ecuaciones se despeja una variable (cualquiera).
2. Esta variable se reemplaza en las otras ecuaciones generando un sistema de una ecuación menos y con una variable menos.
3. Se repite el proceso presentado en el paso 2 hasta que el número de ecuaciones sea uno con una única incógnita; y se procede a despejarla.
4. Finalmente se reemplaza el valor encontrado en el paso anterior para encontrar otro valor de las variables, y así sucesivamente, hasta encontrar todos los valores de las variables.

Ejemplo 7.1

Resuelva el sistema usando el método de sustitución.

$x + y = 1 \ (1)$

$x - y = 1 \ (2)$

Solución:

De la ecuación (1), despejamos x:

$x = 1 - y$ (3)

A esta ecuación la llamaremos la ecuación (3).

(3) en (2); reemplazamos (3) en (2)

$1 - y - y = 1$

$-2y = 0$

$y = 0$ (4)

(4) en (3)

$x = 1$

Ejemplo 7.2

Resuelva el sistema:

$x + y + z = 3$ (1)

$2x + 3y + 5z = 10$ (2)

$3x - 4y + z = 0$ (3)

Solución:

De (1) $x = 3 - y - z$ (4)

(4) en (2)

$2(3 - y - z) + 3y + 5z = 10$

$6 - 2y - 2z + 3y + 5z = 10$

$y + 3z = 4$ (5)

(4) en (3)

$3(3 - y - z) - 4y + z = 0$

$9 - 3y - 3z - 4y + z = 0$

$-7y - 2z = -9$

$7y + 2z = 9$ (6)

De (5) $y = 4 - 3z$ (7)

(7) en (6)

$7(4-3z)+2z=9$

$28-21z+2z=9$

$-19z=-19$

$z=1$ (8)

(8) en (7)

$y=4-3=1$

$y=1$ (9)

(8) y (9) en (4)

$x=3-1-1$

$x=1$

Ejemplo 7.3

Resuelva el sistema:

$2x+y=10$ (1)

$4x+3y=5$ (2)

Solución:

Despejamos una de las incógnitas en una ecuación y la sustituimos en la otra, así: en (1), $x=\frac{10-y}{2}$ y sustituimos en (2):

$$4\left(\frac{10-y}{2}\right)+3y=5$$

$2(10-y)+3y=5$

$20-2y+3y=5 \Rightarrow y=5-20 \Rightarrow y=-15$

Reemplazamos $y=-15$ en $x=\frac{10-y}{2}$ así:

$$x=\frac{10-(-15)}{2} \Rightarrow x=\frac{10+15}{2}=\frac{25}{2}$$

7.2 Método de igualación

El método de igualación funciona de la siguiente manera:

1. Se despeja en todas las ecuaciones una misma variable.

2. Se igualan las ecuaciones con otras hasta conseguir reducir el número de ecuaciones y de incógnitas en uno.

3. El proceso se repite hasta llegar a una única ecuación y a una sola incógnita.

4. Se encuentran las otras incógnitas reemplazando el valor encontrado en el paso anterior, y así sucesivamente hasta encontrar todos los valores restantes.

Ejemplo 7.4

Resolver el sistema usando el método de igualación.

$2x + y = 3$ (1)

$3x + 2y = 2$ (2)

Solución:

De (1) $2x = 3 - y$

$x = \frac{3 - y}{2}$ (3)

De (2) $3x = \frac{2-2y}{3}$ (4)

(3) = (4)

$\frac{3 - y}{2} = \frac{2 - 2y}{3}$

$9 - 3y = 4 - 4y$

$-3y + 4y = 4 - 9$

$y = -5$ (5)

(5) en (3)

$x = \frac{3 - (-5)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$x = 4$ (6)

Ejemplo 7.5

Resuelva el sistema:

$x - y + z = 2$ (1)

$2x + 3y + z = 13$ (2)

$2x - 3y + 8z = 8$ (3)

Solución:

De (1) $x = 2 + y - z$

De (2) $x = \frac{13-3y-z}{2}$ (5)

De (3) $x = \frac{8+3y-8z}{2}$ (6)

(4) en (5) $2 + y - z = \frac{13-3y-z}{2}$

$4 + 2y - 2z = 13 - 3y - z$

$5y - z = 9$ (7)

(4) = (6) $2 + y + z = \frac{2+3y-2z}{2}$

$4 + 2y - 2z = 2 + 3y - 2z$

$-y + 6z = 4$ (8)

De (7) $y = \frac{9+z}{5}$ (9)

De (8) $y = -4 + 6z$ (10)

(9) = (10)

$$\frac{9+z}{5} = -4 + 6z$$

$9 + z = -20 + 30z$

$-29z = -29$

$z = 1$ (11)

(11) en (10)

$y = -4 + 6 = 2$

$y = 2$ (12)

(11) y (12) en (4)

$x = 2 + 2 - 1 = 3$

$x = 3$

Ejemplo 7.6

Resuelva el sistema:

$2x + y = 10\ (1)$

$4x + 3y = 5\ (2)$

Solución:

En cada una de las ecuaciones anteriores, despejamos una de las dos incógnitas:

$$2x = 10 - y \Rightarrow x = \frac{10 - y}{2}\ (a)$$

$$4x = 5 - 3y \Rightarrow x = \frac{5 - 3y}{4}\ (b)$$

Luego se iguala: $\frac{10-y}{2} = \frac{5-3y}{4}$

$4(10 - y) = 2(5 - 3y)$ podemos cancelar un 2.

$2(10 - y) = 5 - 3y$

$20 - 2y = 5 - 20 \Rightarrow y = -15$

Sustituimos en (a) o en (b) para hallar el valor de x en (a) $x = \frac{10-(-15)}{2} = \frac{25}{2}$, o en (b)

$$x = \frac{5 - 3(-15)}{4} = \frac{5 + 45}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

7.3 Método de eliminación

1. Buscamos un número real tal que al multiplicar una ecuación por ese número obtengamos los mismos coeficientes en dos ecuaciones para una misma variable pero con signo contrario.

2. Posteriormente sumamos estas dos ecuaciones para eliminar la variable que tiene el mismo coeficiente con signos contrarios.

3. Repetimos el proceso hasta eliminar la misma variable de las demás ecuaciones formando un nuevo sistema, con una ecuación menos. Repetimos el proceso hasta que quede una variable, la despejamos y usamos la respuesta para encontrar el valor de las demás incógnitas.

Ejemplo 7.7

Resuelva el sistema:

$2x + 3y = 13\ (1)$

$3x + 2y = 12\ (2)$

Solución:

$$\begin{array}{rr} (1)\cdot(-3) \Rightarrow & -6x - 9y = -39 \\ (2).(2) \Rightarrow & 6x + 4y = 24 \\ \hline & -5y = -15 \end{array}$$

$y = 3\ (3)$

En (1) $2x + 9 = 13$

$2x = 4$

$x = 2\ (4)$

Ejemplo 7.8

Resuelva el sistema

$2x + 3y = 8\ (1)$

$6x + 9y = 10\ (2)$

Solución:

$$\begin{array}{rr} (1) * (-3) \Rightarrow & -6x - 9y = -24 \\ (2) \quad \Rightarrow & 6x + 9y = \quad 10 \\ \hline & 0 = -14 \end{array}$$

Por tanto el sistema no tiene solución.

Ejemplo 7.9

Resuelva el sistema:

$4x + 5y = 20$ (1)

$20x + 25y = 100$ (2)

Solución:

$$\begin{array}{lcr} (1) * (-5) & \Rightarrow & -20x - 25y = -100 \\ (2) & \Rightarrow & 20x + 25y = 100 \\ \hline & & 0 = 0 \end{array}$$

Por tanto tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 7.10

Resuelva el sistema:

$2x + y = 10$ (1)

$4x + 3y = 5$ (2)

Solución:

Se trata de eliminar una (cualquiera) de las incógnitas. Para hacer lo anterior, se puede multiplicar una de las ecuaciones por una cantidad real, tal que al sumar las dos ecuaciones quede en términos de una sola incógnita.

Obsérvese que si (1) se multiplica por -3 puede eliminarse y, o si (1) se multiplica por -2 se elimina x.

$(1) \cdot (-3) \Rightarrow -3(2x + y) = -3(10)$

$$\begin{array}{rcr} -6x - 3y & = & -30 \\ 4x + 3y & = & 5 \\ \hline -2x + 0 & = & -25 \end{array}$$

$x = \dfrac{25}{2}$

$(1) \cdot (-2) \Rightarrow -2(2x + y) = -2(10)$

$$\begin{array}{l} -4x - 2y = -20 \\ \underline{\;\;4x + 3y = \;\;\;5\;} \\ \;\;0 \;+\;\; y \;= -15 \end{array}$$

Ejemplo 7.11

Un sistema con ecuaciones no lineales. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5, 3) \wedge (6, 2)$ y radio $r = 5$.

Solución:

La ecuación canónica de la circunferencia es:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Con los puntos $(5, 3) \wedge (6, 2)$podemos hallar dos ecuaciones:

$(x, y) = (5,3) \Rightarrow (5 - h)^2 + (3 - k)^2 = 5^2 \; (1)$

$(x, y) = (6,2) \Rightarrow (6 - h)^2 + (2 - k)^2 = 5^2 \; (2)$

Se hace $(1) = (2)$ para hallar los valores de h y k.

$25 - 10h + h^2 + 9 - 6k + k^2 = 36 - 12h + h^2 + 4 - 4k + k^2$

$34 - 40 - 10h + 12h - 6k + 4k = 0$

$-6 + 2h - 2k = 0 \rightarrow h = k + 3$

Se sustituye h en (1) o en (2)

En: (1) $(5 - k - 3)^2 + (3 - k)^2 = 25$

$(2 - k)^2 + (3 - k)^2 = 25$

$4 - 4k + k^2 + 9 - 6k + k^2 - 25 = 0$

$2k^2 - 10k - 12 = 0$

$2(k^2 - 5k - 6) = 0$

$k^2 - 5k - 6 = 0$

$(k-6)(k+1) = 0$

$k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

Si $k = 6 \Rightarrow h = 6 + 3 = 9 (h, k) = (9, 6)$

$(x-9)^2 + (y-6)^2 = 25$ solución (1)

Si: $k = -1 \Rightarrow h = -1 + 3 = 2; (h, k) = (2, -1)$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ solución (2)

La ecuación canónica de la circunferencia queda definida si conocemos $(h, k) \wedge r$ (centro y radio). Cuando no conocemos ninguno de estos valores, es necesario conocer tres puntos de la circunferencia para determinar las tres ecuaciones.

Ejemplo 7.12

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(3, 6), (-1, 4), (5, 2)$.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Solución:

Con: $(3, 6) \Rightarrow (3-h)^2 + (6-k)^2 = r^2$ (1)

$9 - 6h + h^2 + 36 - 12k + k^2 = r^2$

Con: $(-1, 4) \Rightarrow (-1-h)^2 + (4-k)^2 = r^2$ (2)

$1 + 2h + h^2 + 16 - 8k + k^2 = r^2$

Con: $(5, 2) \Rightarrow (5-h)^2 + (2-k)^2 = r^2$ (3)

$25 - 10h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = r^2$

Todas las ecuaciones son iguales a r^2; por tanto podemos hacer (1) = (2)

$9 - 6h + h^2 + 36 - 12k + k^2 = 1 + 2h + h^2 + 16 - 8k + k^2$

$45 - 17 - 8h - 4k = 0$

$28 - 8h - 4k = 0$

$4(7 - 2h - k) = 0$

$k = 7 - 2h \ (4)$

Igualando (2) y (3):

$1 + 2h + h^2 + 16 - 8k + k^2 = 25 - 10h + h^2 + 4 - 4k + k^2$

$17 - 29 + 12h - 4k = 0$

$-12 + 12h - 4k = 0$

$4(-3 + 3h - k) = 0$

$k = 3h - 3 \ (5)$

Igualando (4) y (5):

$3h - 3 = 7 - 2h$

$3h + 2h = 7 + 3$

$5h = 10 \Rightarrow h = 2$

Reemplazando en (5):

$k = 3(2) - 3 = 3$

$\Rightarrow (h, k) = (2, 3)$

Para hallar r sustituimos $(h, k) = (2, 3)$ en (1) o (2) o (3) en (1).

$(3 - 2)^2 + (6 - 3)^2 = r^2$

$1^2 + 3^2 = r^2$

$10 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{10}$

Ecuación canónica: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{10})^2$

8. Gráficas de ecuaciones y parábolas

A la hora de presentar o verificar resultados, o quizá a la hora de hacer un análisis del comportamiento de algunos fenómenos de estudio como el comportamiento de la curva de oferta o demanda siempre va a ser muy esclarecedor poder tener una gráfica que nos muestre como las variables se comportan o si los resultados que tenemos presentan patrones, es por esto que hacemos un primer acercamiento a las gráficas de una manera básica, con elementos sencillos del plano cartesiano, geometría y conceptos de la aritmética.

8.1 Gráfica de una ecuación

Consideremos la ecuación $4x^2 + 4y = 8$. El punto $(1, 1)$ es un punto solución de la ecuación, ya que $4 \times 1^2 + 4 \times 1 = 8$.

El punto $(0, 2)$ también es solución de la ecuación, puesto que $4 \times 0^2 + 4 \times 2 = 8$.
El conjunto de todos los puntos (x, y) que son solución de la ecuación constituyen la *gráfica de la ecuación*.
Para obtener todas las soluciones de una ecuación despejamos y en términos de x, y obtenemos.

$$y = \frac{8 - 4x^2}{4} = 2 - x^2$$

Al darle valores a x obtenemos valores para y. En la ecuación anterior tenemos expresado a y en términos de x. Además se observa que el mayor valor que toma y, es $y = 2$ y se obtiene cuando $x = 0$.
Para dibujar la gráfica de una ecuación construimos inicialmente, una tabla de valores como se muestra a continuación.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2 - x^2$	-2	1	2	1	-2	-7

Si $x = -2 \Rightarrow y = 2 - (-2)^2 = 2 - 4 = -2$

A continuación se representan los puntos en el plano cartesiano y los unimos mediante una curva suave.

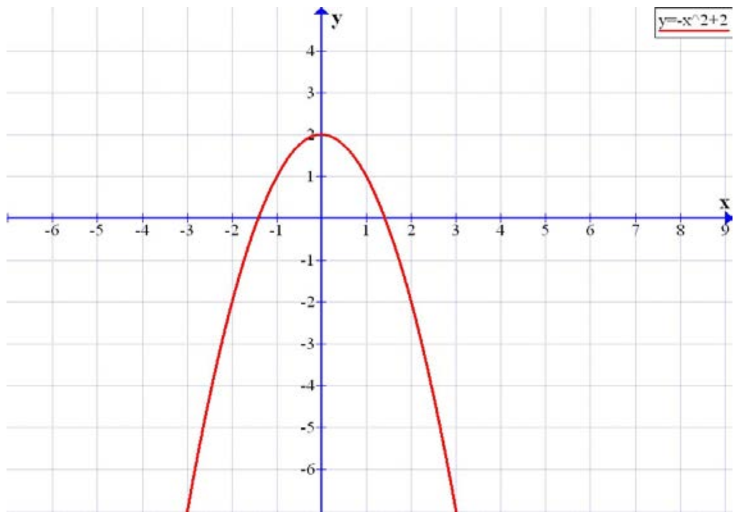


Figura 8.1. Parábola abierta hacia abajo.

La figura 8.1 anterior se conoce como parábola vertical, donde el punto $(0, 2)$ es el vértice de la parábola. Se observa que el vértice es el punto máximo en la gráfica de la ecuación.
Las parábolas pueden ser verticales u horizontales

Parábolas verticales

La ecuación general de una parábola vertical tiene la forma $y - k = A(x - h)^2$.
El punto (h, k) se conoce como vértice de la parábola. Ahora, si $A > 0$ la parábola se abre hacia arriba a partir del vértice; por lo tanto, el vértice es el punto de la gráfica donde el valor que toma y es el más pequeño, es decir, el punto (h, k)es el punto mínimo de la gráfica.

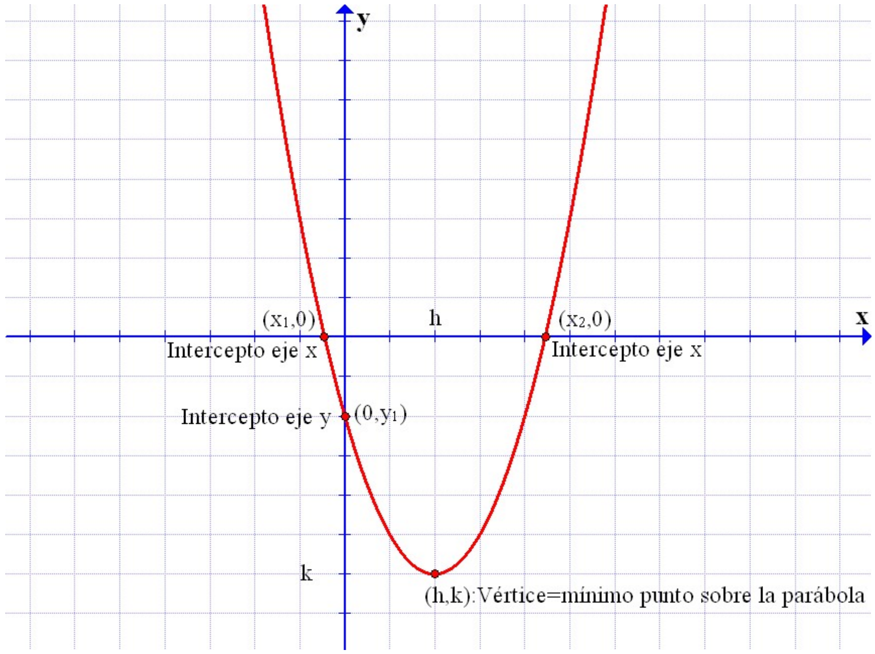


Figura 8.2. Representación de una parábola abierta hacia arriba.

Si $A < 0$,la parábola se abre hacia abajo a partir del vértice; por lo tanto el vértice es el punto de la gráfica donde y alcanza su valor máximo.

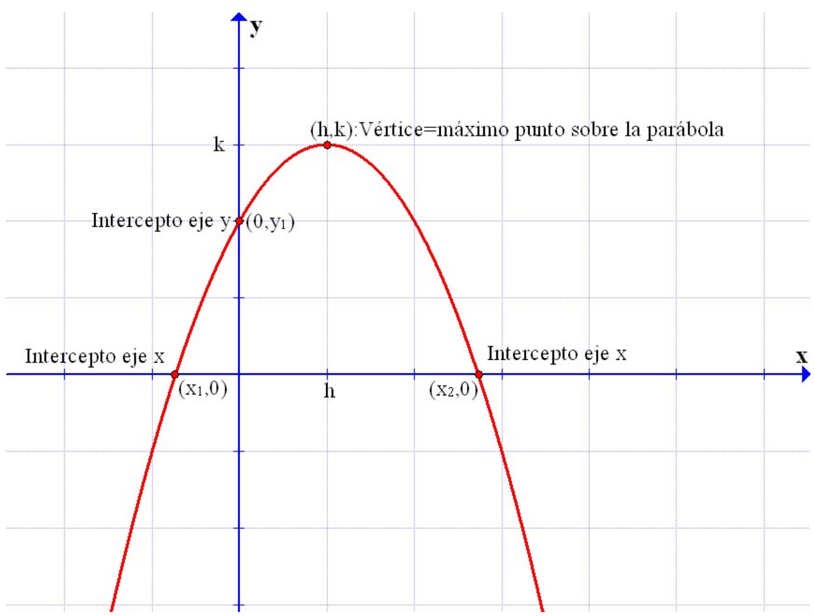


Figura 8.3. Representación de una parábola abierta hacia abajo.

Parábola horizontal

La ecuación general de una parábola horizontal tiene la forma $(x - h) = A(y - k)^2$.

El punto (h, k) es el vértice.

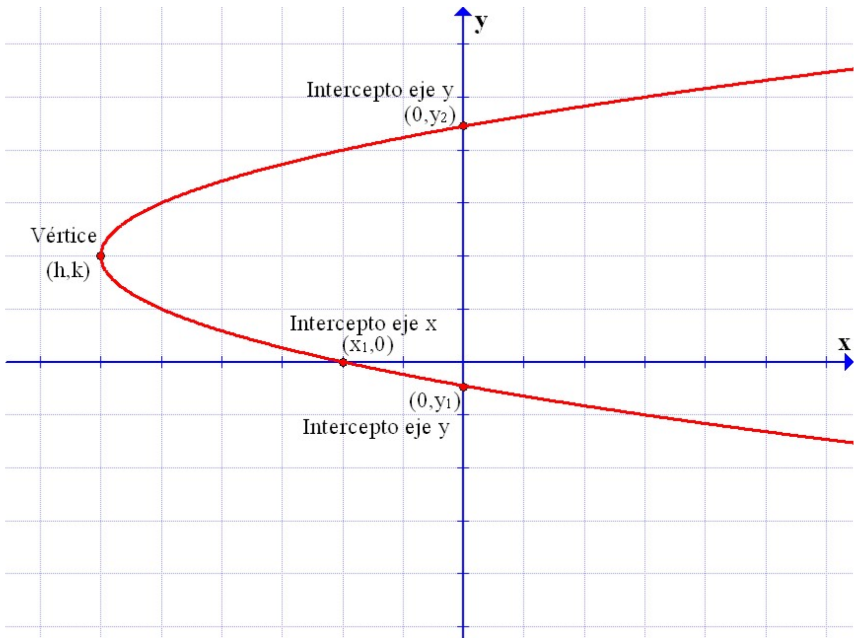


Figura 8.4. Representación de una parábola abierta hacia la derecha.

- Si $A > 0$ la curva se abre hacia la derecha.
- Si $A < 0$ la curva se abre hacia la izquierda.

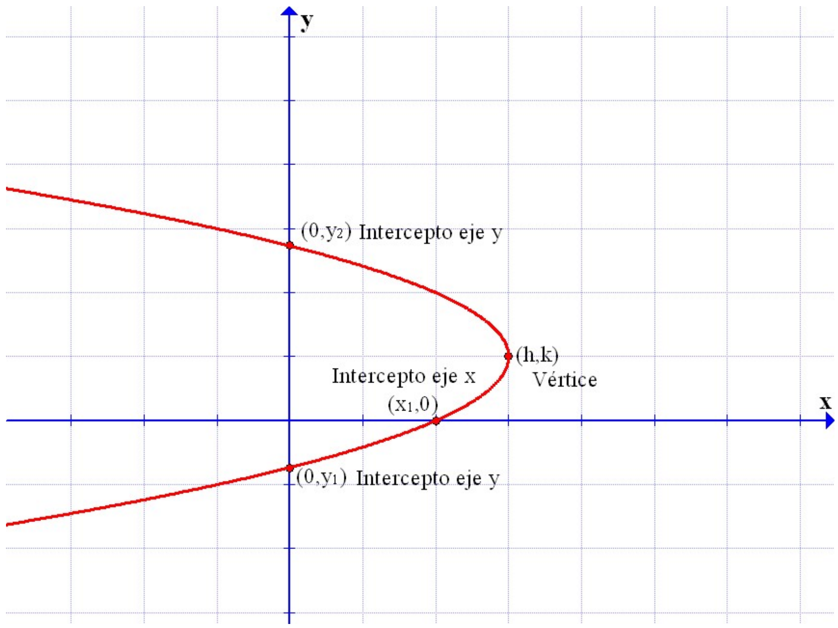


Figura 8.5. Representación de una parábola abierta hacia la izquierda.

Ejemplo 8.1

Grafique la parábola $y = x^2$.

Solución:

La ecuación $y = x^2$ tiene el punto (0,0) como intersección en x e intersección en y y es simétrica respecto al eje y (este concepto se explicará más adelante), pues:

$y = 0^2 \Rightarrow y = 0$

$0 = x^2 \Rightarrow x = 0$

Y además como $y = (-x)^2 = x^2$ entonces es simétrica con respecto al eje y

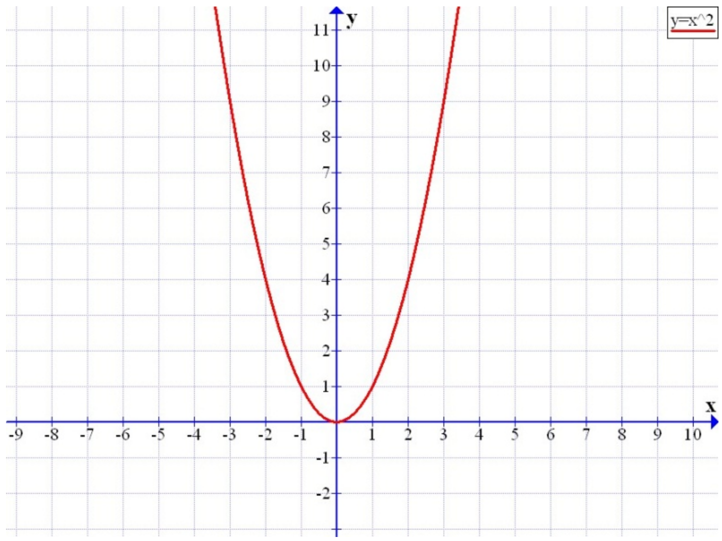


Figura 8.6. Parábola ejemplo 8.1.

Intersección con los ejes. Son puntos de una ecuación especialmente útiles para hacernos una idea de la gráfica y se localizan donde esta corta los ejes.

Las intersecciones con el eje $\boldsymbol{x}$ se obtienen reemplazando $y$por 0 en la ecuación.

Las intersecciones con el eje $\boldsymbol{y}$ se obtienen reemplazando $x$por 0 en la ecuación.

Simetrías de una gráfica: Las simetrías son comportamientos similares de la gráfica en torno a los ejes o puntos de simetría.

Simetrías respecto al eje $\boldsymbol{y}$: La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje y si al cambiar x por $-x$ en la ecuación esta no cambia. En este caso se dice que la ecuación es par.

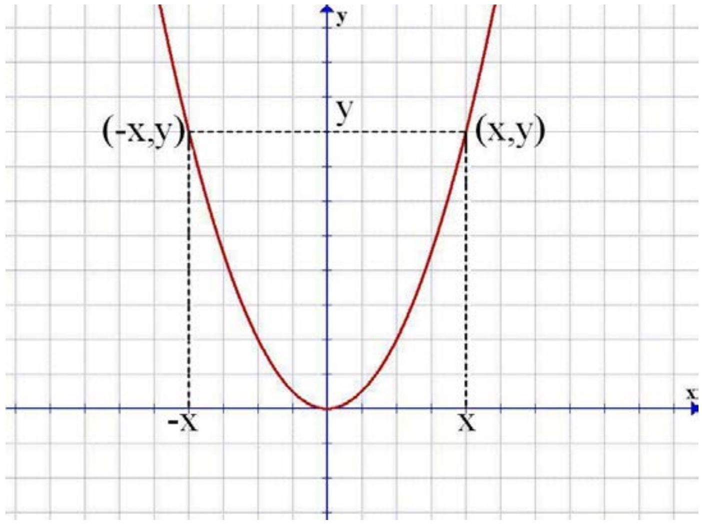


Figura 8.7. Simetría respecto al eje y.

Decir que una gráfica es simétrica con respecto al eje $y$significa que el eje $y$refleja la imagen de la ecuación.Es decir, si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica.

Simetría respecto al eje x: La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si al reemplazar y por $-y$ en la ecuación esta no cambia. La simetría con respecto al eje y implica que los puntos (x, y) y $(x, -y)$ están sobre la gráfica y esto significa que la gráfica se refleja alrededor del eje x.

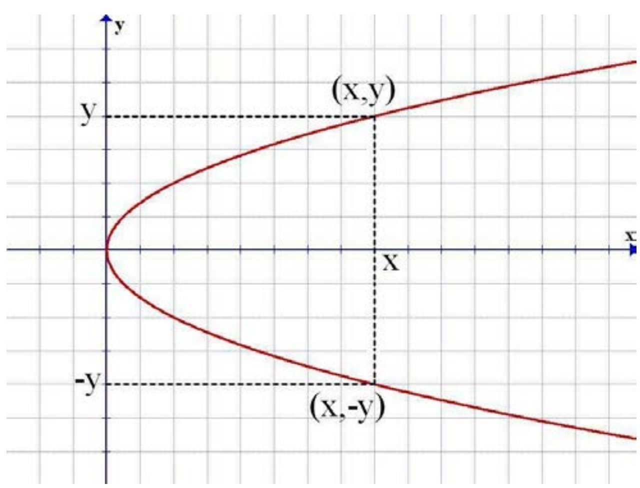


Figura 8.8. Simetría respecto al eje x.

Simetría respecto al origen: La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen cuando tanto el punto (x, y) como el punto $(-x, y)$ están sobre la gráfica de la ecuación. Esto se verifica si al cambiar x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación obtenemos la misma ecuación.

Ejemplo 8.2

Grafique la ecuación $y = x^3 - x$.

Solución:

Primero se buscan los interceptos con los ejes. Para encontrar los del eje x hacemos $y = 0$ y miramos qué valores satisfacen la ecuación.

$x^3 - x = 0$; por factor común se tiene $x(x^2 - 1) = 0$, y por diferencia de cuadrados, $x(x - 1)(x + 1) = 0$.

Entonces, existen tres valores que hacen cero la ecuación $x = 0, x = 1$ y $x = -1$; por tanto, los interceptos con el eje x son $(0{,}0)$; $(1{,}0)$ y $(-1, 0)$.

Para encontrar los interceptos con el eje y hacemos $x = 0$; entonces en nuestro caso daría $y = 0$. Intercepto: $(0{,}0)$.

Observamos la simetría con respecto al eje y cambiando x por $-x$, así:

$y = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$, que es diferente del original, por lo tanto no es simétrica con respecto al eje y.

Simetría con respecto al eje x: cambiamos y por $-y$ y tenemos $-y = x^3 - x$, y al multiplicar por (-1) a ambos lados de la ecuacióntenemos $y = -x^3 + x$; por tanto no es simétrica con respecto al eje x.

Simetría respecto al origen: se cambia x por $-x$ y y por $-y$, y se obtiene:

$$-y = (-x^3) - (-x) = -x^3 + x$$

Y al multiplicar todo por (-1), se tiene $y = x^3 - x$, que es la ecuación original. Por tanto, es simétrica con respecto al origen.

Puede ser de ayuda una tabla de valores.

x	-3	-2	-0.5	-0.5	2	3
y	-2.4	-6	0.375	-0.375	6	24

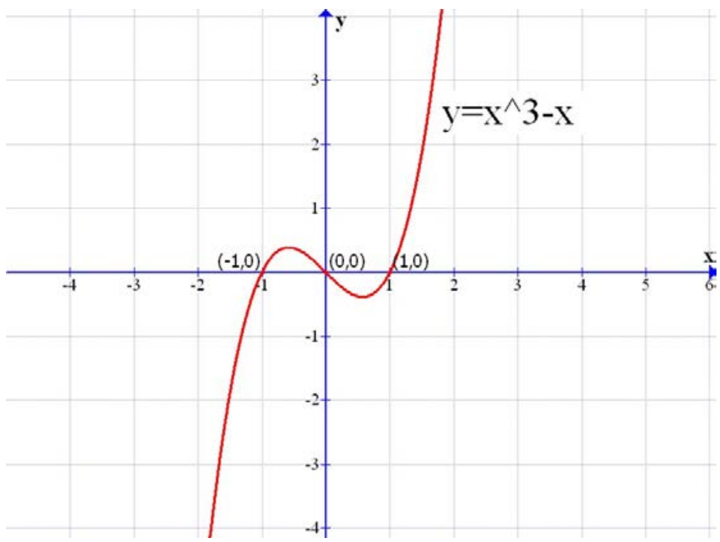


Figura 8.9. Parábola cúbica.

Taller de números reales y plano cartesiano

1. Diga si cada una de las desigualdades es verdadera o falsa.

a) $-3 < -15$

b) $\sqrt{2} > 1{,}41$

c) $\frac{11}{12} < \frac{13}{14}$

d) $e < 3$

e) $\frac{-1}{2} \leq 0{,}4$

f) $\pi \geq 4$

2. Escriba cada uno de los enunciados en términos de desigualdades.

a) x es positivo

b) y es mayor que 6

c) z es mayor que $\frac{3}{2}$ y menor que 1

d) La distancia máxima de r a 5 es 4

e) m es a lo más 10

3. Obtenga el conjunto indicado si:

$A = \{x/x > -3\}$ $\quad B = \{x/x < 5\}$ $\quad C = \{x/-2 < x < 8\}$

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cup C$

d) $B \cap C$

4. Exprese el intervalo en términos de desigualdad y grafíquelo.

a) $(-2; 3)$

b) $(2; 8]$

c) $\left[-6; \frac{3}{2}\right]$

d) $\left(2; \frac{5}{2}\right]$

5. Determine la distancia entre los números dados.

a) 3 y 12

b) $-0{,}5$ y 8

c) -36 y -54

d) $\frac{5}{2}$ y $\frac{8}{3}$

6. Halle x de manera que la distancia entre los dos puntos sea 5.

a) $(0; 0)$, $(x; -4)$

b) $(2; 0)$, $(x; 2)$

7. Determine y de modo tal que la distancia entre los dos puntos sea 8.

a) $(0; 0)$, $(3; y)$

b) $(5; 1)$, $(5; y)$

8. Para los siguientes puntos: grafique los puntos en el plano coordenado, determine la distancia entre ellos y el punto medio del segmento de recta que los une.

a) $(2; 1)$ y $(4; 5)$

b) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}; y\right)$

c) $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{6}; 1\right)$

d) $(5; y)$ y $(0; \sqrt{2})$

9. Muestre que los puntos dados son vértices del polígono indicado.

Vértices	Figura
a) $(4; 0), (2; 1), (-1; -5)$	Triángulo rectángulo.
b) $(1; -3), (3; 2), (-2; 4)$	Triángulo isósceles.
c) $(0; 1), (3; 7), (4; 4), (1; -2)$	Paralelogramo.

10. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1; 2)$ y:

a) Es paralela a la recta $6x - 3y = 9$.

b) Es perpendicular a la recta $5x - 10y = 20$.

c) Pasa por el punto $(1,5)$.

d) Es horizontal.

e) Es vertical.

11. Determine el valor de c, tal que la recta $cx - 5y = 3$,

a) Es paralela al eje x.

b) Es paralela a la recta $2x + y = 3$.

c) Tiene intersecciones iguales con el eje x y con el eje y.

d) Es perpendicular a la recta $y - 2 = 5(x - 6)$.

12. Trace las rectas que pasan por el punto dado y tienen las pendientes indicadas, trace estas rectas en un mismo conjunto de ejes coordenados.

Punto	Pendientes
a) $(2; 1)$	$m = 1$; $m = -\frac{3}{2}$; m no definida
b) $(-4; 1)$	$m = 3$; $m = \frac{1}{3}$; $m = 0$

13. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados y trace la recta:

a) $(2; 1)$ y $(0; -3)$

b) $(-3; -4)$ y $(1; 4)$

c) $\left(\frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ y $\left(0; \frac{3}{4}\right)$

14. Determine la pendiente y la intercepción con el eje y de cada recta y grafique:

a) $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$

b) $y - 1 = 3(x + 4)$

c) $2x - 3y = 0$

d) $x + 2y + 6 = 0$

15. Escriba las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto dado y son paralelas a la recta dada, y perpendiculares a la misma recta.

Punto	Recta
a) $\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right)$	$5x - 3y = 0$
b) $(-6; 4)$	$3x + 4y = 7$
c) $(2; 5)$	$x = 4$
d) $(-1; 0)$	$y = -3$

16. Calcule la distancia entre el punto y la recta dada, usando la fórmula para la distancia de un punto $(x_1; y_1)$a una recta $Ax + Bx + C = 0$ dada por:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

a) $(0;0); 4x + 3y = 10$

b) $(6;2); x + y = -1$

17. Determine las ecuaciones de las circunferencias que satisfacen las condiciones dadas.

a) Centro: $(0;0)$; radio: 3

b) Centro: $(0;0)$; radio: 5

c) Centro: $(2;-1)$; radio: 4

d) Centro:$(-4{,}3)$; radio:$\frac{5}{8}$

e) Centro: $(-1;2)$; y pasa: $(0;0)$

f) Centro: $(3;-2)$; y pasa:$(-1;1)$

g) Centro: $(2;5)$; y es tangente al eje$y$

h) Centro: $(6;-3)$; y es tangente al eje$x$

i) Diámetro AB con A $= (2;5)$ y B $= (4;-1)$

j) Diámetro AB con A $= (1;1)$ y B $= (-1,-1)$

k) Que pasa por los puntos $(1{,}2), (-1{,}2)$ y $(2{,}1)$

l) Que pasa por los puntos $(4{,}3), (-2,-5)$ y $(5{,}2)$

m) Que pasa por los puntos $(4{,}1), (6{,}3)$ y tiene radio $\sqrt{10}$

18. Calcule la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto de intersección de las rectas $4x - y - 11 = 0$ y $2x + y - 1 = 0$ y cuyo radio es igual a 7.

19. Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ en el punto $(4,-3)$.

20. Escriba cada ecuación en forma canónica y esboce la gráfica.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y = 16$

d) $4x^2 + 16x + 15 + 4y^2 + 6y = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

f) $x^2 + 16x + \frac{105}{16} + 4y^2 + 3y = 0$

21. Cada uno de los siguientes datos es la pendiente de una recta que representa los ingresos diarios y, en términos del tiempo x en días. Utilice la pendiente para interpretar cualquier variación de los ingresos diarios correspondientes a un incremento de un día en el tiempo.

a) $m = 400$ b) $m = 100$ c) $m = 0$

22. Se da el valor en dólares de un producto en 2004 y la tasa a la cual se espera que el valor del producto varíe en los próximos cinco años. Escriba la ecuación lineal que expresa el valor V en dólares del producto en términos del año t (con $t = 0$ representando 2000).

Valor en 2004	Razón
a) \$2.540	Incremento anual de \$125
b) \$245.000	Decremento anual de \$5.600

23. Una pequeña empresa compra una pieza de un equipo en \$875. Después de cinco años, el equipo será obsoleto y no tendrá ningún valor:

a) Escriba una ecuación lineal que exprese el valor de y del equipo en términos del tiempo x en años $0 \leq x \leq 5$.

b) Halle el valor del equipo para $x = 2$.

c) Estime (a dos posiciones decimales) el momento en que el valor del equipo será \$200.

24. Una agencia inmobiliaria maneja un complejo de 50 departamentos. Cuando el alquiler es \$580 por mes, se ocupan las 50 unidades. Sin embargo cuando el alquiler es \$625, el número promedio de unidades ocupadas baja a 47. Suponga que la relación entre el alquiler mensual p y la demanda x es lineal. (*Nota:* el término demanda se refiere al número de unidades ocupadas). Escriba una ecuación lineal que expresa la demanda x en términos de alquiler p.

25. Resuelva algebraicamente los sistemas:

a) $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y \\ x + 5y - 2 = y + 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6 \\ \frac{21}{2}x + \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{8}{3}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2p + q = 16 \\ 3p - 3q = 33 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3 \\ x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - y - z = 12 \\ 3x + y + 4z = 4 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2y + z = 4 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - z = 10 \end{cases}$

26. Bosqueje la gráfica de cada ecuación, identifique las intersecciones con el eje x y con el eje y, y busque las posibles simetrías.

a) $y = 1\,x^2$

b) $x = 9y^2 - 1$

c) $y = 2x^4$

d) $y = \frac{1}{x}$

e) $y = \sqrt{9 - x^2}$

f) $8x^2 + 5y = 0$

g) $y = -x^2 - 2x + 2$

h) $y = x^3 + 2$

i) $y = -\frac{1}{2}x - 4$

j) $y = \frac{x}{x^2+1}$

k) $y = x^4 - x^2 + 3$

l) $y = 2x^4$

m) $xy = 4$

n) $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

ñ) $y = |x + 1|$

27. Determine si los puntos dados están en la gráfica de la ecuación.

Ecuación

a) $2x - y - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $x^2y - x^2 + 4y = 0$

d) $x^2y - xy + 4y = 0$

Puntos

$(1; 2), (1; -1), (4; 5)$

$(1; -\sqrt{3})$; $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$; $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$

$\left(1; \frac{1}{5}\right)$; $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; $(-1; -2)$

$(0; 2)$; $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$; $(3; -6)$

Algunas respuestas

1.

a) F

b) V

c) V

d) V

e) V

f) F

2.

a) $x > 0$

b) $y > 6$

c) $z > \frac{3}{2} \wedge z < 1$

d) $|r - 5| \leq 4$

e) $m < 0$

f) $w \leq 10$

3.

a) $A \cup B = \{x/-\infty < x < \infty\}$

b) $A \cap B = \{x/-3 < x < 5\}$

c) $A \cup C = \{x/-3 < x < \infty\}$

d) $B \cap C = \{x/-2 < x < 5\}$

4.

a) $-4 < x < 2$

b) $2 < x \leq 8$

c) $-6 \leq x \leq \frac{3}{2}$

d) $-\infty < x \leq \frac{5}{2}$

5.

a) 9

b) 8,5

c) 18

d) $1/6$.

6.

a) $x = 3 \vee x = -3$

b) $x = 6 \vee x = -2$

7.

a) $y = \sqrt{55} \vee y = -\sqrt{55}$

b) $y = \sqrt{48} + 5 \vee y = -\sqrt{48} + 5$

8.

a) $d = 2\sqrt{5}$; $(3{,}3)$

b) $d = 2\sqrt{10}$; $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

c) $d = \frac{\sqrt{65}}{6}$; $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$

d) $d = \sqrt{6}$; $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

10.

a) $y = 2x + 4$

b) $y = -2x7$

c) $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

d) $y = 2$

e) $x = -1$

11.

a) $c = 0$

b) $c = -10$

c) $c = -5$

d) $c = -1$

13.

a) $y = 3x - 3$

b) $y = 2x + 2$

c) $y = -\frac{8}{3}x + \frac{37}{12}$

d) $y = \frac{11}{2}x + \frac{3}{4}$

14.

a) $m = \frac{3}{2}; b = \frac{1}{4}$

b) $m = 3; b = 13$

c) $m = \frac{2}{3}; b = 0$

d) $m = -\frac{1}{2}; b = -3$

15.

a) paralela: $y = \frac{5}{3}x - \frac{3}{8}$; perpendicular: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{53}{40}$

b) paralela: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$; perpendicular: $y = \frac{4}{3}x + 12$

c) paralela: $x = 2$; perpendicular: $y = 5$

d) paralela: $y = 0$; perpendicular: $x = -1$

16.

a) $d = 2$

b) $d = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

17.

a)$x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 25$

c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

d) $(x+4)^2 + (y+3)^2 = \frac{25}{64}$

e) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

f) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

g) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

h) $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 9$

i) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 20$

j) $x^2 + y^2 = 8$

k) $x^2 + y^2 = 5$

l) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$

m) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 10 \lor (x-7)^2 + y^2 = 10$

18. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$

20.

a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

c) $x^2 + (y-3)^2 = 25$

e) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$

25.

a) $x = -1, y = 1$

c) $u = 6, v = -1$

e) $x = 4/9, y = 0$

g) $p = 9, q = -2$

i) $x = 2, y = -1, z = 4$

k) $x = 1, y = 1, z = 2$

m) $x = 2, y = -1, z = 4$

Parte 3. Repaso del álgebra

Para comprender qué es el álgebra empecemos con el siguiente acertijo:

- Piense en un número
- Súmele 10
- Multiplique el resultado por 2
- Réstele 6 al resultado anterior
- Divida entre dos el resultado anterior
- Reste el número que pensó inicialmente
- La respuesta que obtiene siempre es siete (7)

Si ensayamos con muchos ejemplos concretos podremos observar que el resultado siempre será 7. Por ejemplo:

- si el número en el que se pensó fue 29,
- al sumar 10 se obtiene39,
- al multiplicar por 2 se obtiene78,
- al restar 6 se obtiene 72,
- al dividir entre 2 se obtiene 36,
- al restarle 29 que es el número inicial se tiene que el resultado es 7.

El problema es que el cálculo en muchos ejemplos específicos no da ninguna idea de porqué la respuesta es siempre siete, sin importar el número que se elija. Si los ejemplos concretos no ayudan a entender el problema, entonces ¿qué puede hacerse?

Puede tratar de pensarse con cierto nivel de generalidad. Tan simple como sea posible, pero no demasiado simple.

Los matemáticos-maestros del antiguo Egipto tenían una forma simple y general de pensar estas cuestiones. Llamaban al número desconocido “montón”, que significa “cierto número fijo aunque

es desconocido" (la incógnita) y los números los representaban con asteriscos. Veamos el cálculo de la situación anterior con montones, así:
Piense en un número como un montón:

- Súmele diez:

 **********

- multiplique el resultado por 2,

 **********

 **********

- al restar seis (6) se obtiene:

 *******

 *******

- al dividir por dos se obtiene:

 *******

- Al restar el montón que se pensó inicialmente, se obtiene:

****

- Entonces, la respuesta es 7.

¡Fácil!, ¿no?

Creámoslo o no, acabamos de hacer dos cosas que por lo general se considera que son difíciles: la primera es álgebra y la otra es una demostración.
El *álgebra* es una clase de razonamiento simbólico que trata con números sin conocer sus valores reales. Las demostraciones proporcionan una garantía inapelable de que las líneas de razonamiento funcionan siempre. En lugar de comprobar con muchos ejemplos concretos, se utiliza un argumento para demostrar que el método siempre funciona, lo que en este caso significa que la respuesta siempre es siete, independientemente del valor del montón inicial.

De todas formas, es necesario observar que esta demostración, con los dibujos de montones y asterisco, no se parece mucho al álgebra, pero esto es tan solo una cuestión de notación. Para que se parezca al álgebra vamos a reemplazar "montón" por una letra del alfabeto (usualmente utilizamos la x para la incógnita) y los asteriscos por números. De esta forma, la demostración es ahora la siguiente:

- Piense en un número y llámelo x
- súmele diez y obtendrá $x + 10$
- multiplique el resultado por dos y obtendrá $2x + 20$
- reste seis al resultado anterior y se obtendrá $2x + 14$
- divida entre dos el resultado anterior y tendrá $x + 7$
- reste el número que pensó y el resultado será 7
- Entonces, independientemente del número que pensó inicialmente, el resultado será 7.

9. Operaciones con expresiones algebraicas

Si se combinan números, representados por símbolos, mediante una o más operaciones de suma, resta, multiplicación, división, exponenciación o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llamará *expresión algebraica.*

Ejemplo 9.1

Expresiones algebraicas

a. $\sqrt[3]{\frac{x^3-5x-2}{10-x}}$ es una expresión algebraica

b. $10 - 3\sqrt{y} + \frac{5}{7+y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y

c. $\frac{(x+y)^3-xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y

La expresión algebraica $5ax^3 - 2bx + 3$ consta de tres términos:$+5ax^3$, $-2bx$, $+3$. Algunos de los *factores* del primer término, $5ax^3$son $5, a, x, x^2, x^3, 5ax, ax^2$.

También $5a$ es el coeficiente de x^3 y 5 es el *coeficiente numérico* de ax^3. Si a lo largo del análisis de un problema a y b representan números fijos, entonces a y b se denominan *constantes.*

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente un término se denominan *monomios*. Aquellas que tienen exactamente dos términos son *binomios,* y las que tienen exactamente tres términos son *trinomios*. Las expresiones algebraicas con más de un término se denominan *multinomios*. Así, el multinomio $2x - 5$ es un binomio; el multinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un polinomio en x es una expresión algebraica de la forma

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_n$ son constantes con $c_n \neq 0$ se llama a n el grado del polinomio. Por lo tanto, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3, y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante distinta de cero es un polinomio de grado cero. La constante 0 se considera un polinomio; sin embargo, no se le asigna ningún grado. En los ejemplos siguientes se ilustra operaciones con expresiones algebraicas.

Ejemplo 9.2

Suma de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$

Solución:

Primero deben eliminarse los paréntesis. Después, con el uso de la propiedad conmutativa de la suma, se reúnen todos los términos semejantes. Los términos semejantes son aquellos que solo difieren por sus coeficientes numéricos. En este ejemplo, $3x^2y$ y $4x^2y$son semejantes, así como los pares $-2x$ y $6x$ y 1 y -3; por lo tanto:

$(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3$

$= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3$

Por la propiedad distributiva:

$3x^2y + 4x^2y = (3 + 4)x^2y = 7x^2y$

$-2x + 6x = (-2 + 6)x = 4x$

Por ende, $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2$

Ejemplo 9.3

Resta de expresiones algebraicas

Simplifique: $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$

Solución:

Aquí se aplica la definición de la resta y la propiedad distributiva:

$(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3) = (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3)$

$= (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3)$

$= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3$

$= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3$

$= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + (1 + 3)$

$= -x^2y - 8x + 4$

Ejemplo 9.4

Elimine los símbolos de agrupación y simplifique:

$3\{2x(2x + 3) + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$

Solución:

Primero deben eliminarse los símbolos de agrupación más internos (los paréntesis). Después, se repite el proceso hasta eliminar todos los símbolos de agrupación y se combinan los términos semejantes siempre que sea posible. Se tiene:

$3\{2x(2x + 3) + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\} = 3\{2x(2x + 3) + 5[4x^2 - 3 + 4x]\}$

$= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\}$

$= 3\{24x^2 + 26x - 15\}$

$= 72x^2 + 78x - 45$

La propiedad distributiva es la herramienta clave al multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$ puede considerarse $ax + c$ como un solo número y después utilizar la propiedad distributiva:

$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d$

Nuevamente se usa la propiedad distributiva; así se tiene:

$(ax + c)bx + (ax + c)d = abx^2 + cbx + adx + cd$

$= abx^2 + (cb + ad)x + cd$

Por lo que $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (cb + ad)x + cd$. En particular, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = -2$, entonces

$(2x + 3)(x - 2) = 2x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(2)$

$= 2x^2 - x - 6$

Ejemplo 9.5

Encuentre el producto $(2t - 3)(5t^2 + t - 1)$

Solución:

Se trata a $(2t - 3)$ como un solo número y se aplica la propiedad distributiva dos veces:

$(2t - 3)(5t^2 + t - 1) = (2t - 3)5t^2 + (2t - 3)t - (2t - 3)1$

$= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3$

$= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3$

Como $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. De manera similar $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$. Con el uso de estos resultados, es posible dividir un multinomio entre un monomio, si se divide cada término del multinomio entre el monomio.

Ejemplo 9.6

Realice la división del multinomio entre el monomio

a. $\frac{x^3+3x}{x}$

b. $\frac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z}$

Solución:

a.

$$\frac{x^3+3x}{x}=\frac{x^3}{x}+\frac{3x}{x}=x^2+3$$

b.

$$\frac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z}=\frac{4z^3}{2z}-\frac{8z^2}{2z}+\frac{3z}{2z}-\frac{6}{2z}$$

$$=2z^2-4z+\frac{3}{2}-\frac{3}{z}$$

10. Exponentes y radicales

10.1 Potencias

Se sabe que el producto $2\times 2\times 2\times 2\times 2$se escribe $2^5=32$; así mismo, $\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)$ se escribe $(1/3)^4=1/81$. En general, si $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{Z}^+$ entonces a^n se define como $a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ veces}}$, es decir, se multiplica a por sí mismo n veces.

La expresión a^n se llama la n-ésima potencia de a, siendo a la base y n el exponente.

Por ejemplo:

$a^1=a$, $a^2=a\times a$, $\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^4}{b^4}$

Observación: En matemáticas es habitual no escribir el signo multiplicación si no hay ambigüedad en la expresión; por ejemplo, se escribe abc en lugar de $a\times b\times c$.

Se define $a^0 = 1, \forall a \neq 0$.

También se requiere definir las potencias de exponentes negativos. Esto se hace de la siguiente forma:

Definición: Sean $a \in \mathbb{R}, a \neq 0\ y\ n \in \mathbb{Z}^+$ se define:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Ejemplo 10.1

Exprese con exponente positivo y simplifique:

a.8^{-3}

b. $(a^2 + 7)^{-5}$

Solución:

a.$8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$

b.$(a^2 + 7)^{-5} = \frac{1}{(a^2+7)^5}$

10.2 Propiedades de los exponentes

Las siguientes propiedades de los exponentes son muy importantes y deben memorizarse.

a. $a^n a^m = a^{n+m}$, es decir, para multiplicar potencias que tienen la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

b. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para dividir potencias que tienen la misma base, se restan los exponentes.

c. $(a^n)^m = a^{n \times m}$ Potencia de potencia: se deja la base y se multiplican los exponentes.

d. $(ab)^n = a^n b^n$

e. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Observación: En las propiedades anteriores n y m pueden ser negativos o positivos.

Ejemplo 10.2

Simplifique y exprese con exponente positivo:

a. $a^{-5}a^7$

b. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$

Solución:

a. $a^{-5}a^7 = a^{-5+7} = a^2$

b. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \frac{x^{-3}}{y^{-3}} = \frac{1/x^3}{1/y^3} = \frac{y^3}{x^3}$

En general, si $n \epsilon \mathbb{Z}^+$ y $a, b \in \mathbb{R}$, con $a, b \neq 0$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$.

10.3 Radicación

10.3.1 Raíces cuadradas

Se sabe que x^nestá definida para exponentes enteros. Ahora, cuando $x > 0$ para $n = \frac{1}{2}$ se tienen $x^{1/2}$ que se escribe como $x^{1/2} = \sqrt{x}$, y se lee como la raíz cuadrada de x. Esta cantidad se define como el número no negativo que multiplicado por sí mismo da x. Esta definición se verifica, ya que:

$x^{1/2}x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$

Observación: Note que un número real que se multiplica por sí mismo debe dar un resultado siempre mayor o igual que cero; por lo tanto, no están definidas las raíces cuadradas de los números negativos.

Ejemplo 10.3

Simplifique y exprese con exponente positivo:

a.$\sqrt{25}$

b. $\sqrt{\frac{1}{9}}$

Solución:

a. $\sqrt{25} = (25)^{1/2} = 5$ ya que $5 \times 5 = 25$

b. $\sqrt{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} = \frac{1}{3}$, pues $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

Las propiedades d) y e) anteriores son válidas para las raíces cuadradas. Esto es, si a y b son números no negativos; entonces,

a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

b) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, con $b > 0$

10.3.2 Racionalización de denominadores

Se sabe que $\sqrt{2} = 1{,}41421356 \ldots$ por lo que dividir entre $\sqrt{2}$ se hace bastante tedioso. Resulta más fácil si se racionaliza el denominador, esto es, se multiplican el numerador y el denominador por el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Ejemplo 10.4

Racionalizar los siguientes denominadores:

a. $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{8}}$

b. $\frac{(a+1)\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}$

c. $\frac{4}{\sqrt{4y}}$

Solución:

a. $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{2}{\sqrt{4\times 6}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

b. $\frac{(a+1)\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\sqrt{a(a+1)}}{(a+1)} = \sqrt{a(a+1)}$

c. $\frac{4}{\sqrt{4y}} = \frac{4}{\sqrt{4y}} \times \frac{\sqrt{4y}}{\sqrt{4y}} = \frac{4\sqrt{4y}}{4y} = \frac{2\sqrt{y}}{y}$

10.3.3 Raíces n–ésimas

Sean x, r números reales y n un entero positivo tales que $r^n = x$. Entonces, se dice que r es una raíz *n*-ésima de x y se escribe $r = \sqrt[n]{x}$.

La expresión $r = \sqrt[n]{x}$. se conoce como la raíz *n*-ésima principal de x y se define como la raíz *n*-ésima de x que es positiva si x es positivo o es la raíz *n*-ésima negativa si x es negativo y en este último caso n debe ser impar.

Por ejemplo,

$\sqrt[4]{625} = 5$, pues $5^4 = 625$

$\sqrt[5]{-32} = -2$, ya que $(-2)^5 = -32$

Propiedades de las raíces n–ésimas

a. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ siempre que $\sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{y}$ existan

b. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ siempre que $\sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{y}$ existan y $\sqrt[n]{y} \neq 0$

c. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

A partir de las definiciones de x^n y $\sqrt[n]{x}$ se definen las potencias de exponentes racionales como sigue:

Definición: Sea $x \geq 0$ un número real y sean $p$entero y $q$entero positivo. La expresión $x^{p/q}$ se define de la siguiente forma.

$$x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p}$$

Ejemplo 10.5

Simplifique:

a. $32^{2/5}$

b. $8^{4/3}$

c. $\left(\sqrt{8}\right)^{2/3}$

Solución:

a.$32^{2/5} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$

b. $8^{4/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$

c. $\left(\sqrt{8}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Para realizar divisiones por $\sqrt[n]{x^p}$ con $p < n$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{x^{n-p}}$ ya que $\sqrt[n]{x^p} \times \sqrt[n]{x^{n-p}} = \sqrt[n]{x^{p+n-p}} = \sqrt[n]{x^n} = x$. De esta forma desaparece el radical en el denominador de la fracción. El factor $\sqrt[n]{x^{n-p}}$ es el factor racionalizante para $\sqrt[n]{x^p}$.

Ejemplo 10.6

Racionalizar los siguientes denominadores.

a. $\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$

b. $\frac{5x}{3\sqrt[3]{5x^2}}$

Solución:

a. $\frac{1}{\sqrt[3]{3x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}} = \frac{\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$

b. $\frac{5x}{3\sqrt[3]{5x^2}} = \frac{5x}{3\sqrt[3]{5x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2x}}{\sqrt[3]{5^2x}} = \frac{5x\sqrt[3]{25x}}{3\sqrt[3]{5^3x^3}} = \frac{5x\sqrt[3]{25x}}{3\times 5x} = \frac{\sqrt[3]{25x}}{3}$

11. Productos notables

Un polinomio en la variable real[2] x es una expresión de la forma:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

donde $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 son constantes reales llamadas coeficientes y $a_n \neq 0$. El entero n se conoce como grado del polinomio.

Observación: Una constante es un polinomio de grado cero.

Ejemplo 11.1

Determine el grado de los polinomios:

$P(x) = 7x^3 - 3x + 9$ y $h(x) = x^4 - x^3 + 4x - 16$

Solución:

$P(x) = 7x^3 - 3x + 9$ es un polinomio de grado 3 y $h(x) = x^4 - x^3 + 4x - 16$ es un polinomio de grado 4.

11.1 Suma de polinomios

Para sumar polinomios en la variable x se identifican las potencias iguales y a continuación se suman los coeficientes numéricos. Por ejemplo:

$h(x) + P(x) = (x^4 - x^3 + 4x - 16) + (7x^3 - 3x + 9)$

$= x^4 + (7x^3 - x^3) + (4x - 3x) - 16 + 9$

$= x^4 + 6x^3 + x - 7$

[2]Variable real significa que x toma valores en el conjunto de los números reales.

En general, para agregar expresiones algebraicas se identifican potencias iguales de la misma base y a continuación se suman los coeficientes numéricos, como se observa en el siguiente ejemplo:

$[x^3 - x^2y^3 + 9x^2y^2 + 5x^2y] + [y^3 + 4x^2y^3 - 7x^2y^2 + 4x^2y]$

$= x^3 + y^3 + (4x^2y^3 - x^2y^3) + (9x^2y^2 - 7x^2y^2) + (5x^2y + 4x^2y)$

$= x^3 + y^3 + 3x^2y^3 + 2x^2y^2 + 9x^2y$

Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede escribirse por simple inspección, es decir, sin realizar la multiplicación, y son muy útiles al multiplicar expresiones algebraicas.

El primer producto notable es la ley distributiva del producto. Esta ley establece que:

$A(B + C) = AB + AC$

11.2 El cuadrado de un binomio

Elevemos al cuadrado los binomios $(a + b)$ y $(a - b)$.

Una suma al cuadrado $(a + b)^2$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Una diferencia al cuadrado $(a - b)^2$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$= a(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

11.3 Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

Efectuemos el producto entre los binomios $(a+b)$ y $(a-b)$. El resultado de este producto es el siguiente:

$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ba + b^2$

$= a^2 - b^2$

De esta forma, el producto entre la suma y la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el cuadrado de la segunda.

11.4 Cubo de un binomio

Elevemos al cubo los binomios $(a+b)$ y$(a-b)$.

Una suma al cubo $(a+b)^3$

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$

$= (a^3+2a^2b+ab^2) + (a^2b+2ab^2+b^3)$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Una diferencia al cubo $(a-b)^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Dejamos al lector el desarrollo usando la misma lógica de una suma al cubo.

Ejemplo 11.2

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

a. $(2a-3b)^2 = 4a^2-12ab+9b^2$

b. $(8x^2y+3x^3)^2$

c. $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$

d. $(x+y+z)(x+y-z)$

e. $(2a+3b)^3$

f. $(x-3y)^3$

g. $(2n-m)(4n^2-4nm+m^2)$

Solución:

a. $(2a-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

b. $(8x^2y + 3x^3)^2 = (8x^2y)^2 + 2(8x^2y)(3x^3) + (3x^3)^2$

$= 64x^4y^2 + 48x^5y + 9x^6$

$= x^4(64y^2 + 48xy + 9x^2)$

c. $(x^2+a^2)(x^2-a^2) = (x^2)^2 - (a^2)^2$

$= x^4 - a^4$

d. $(x+y+z)(x+y-z) = [(x+y)+z][(x+y)-z]$

$= x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$

$= (x+y)^2 - z^2$

e. $(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

f. $(x-3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

g. $(2n-m)(4n^2-4nm+m^2) = (2n-m)(2n-m)^2$

$= 8n^3 - 12n^2m + 6nm^2 - m^3$

$= (2n-m)^3$

11.5 Producto de dos binomios

Producto de dos binomios de la forma$(x+a)$ y $(x+b)$.

El resultado de este producto es el siguiente:

$(x+a)(x+b)$= $x^2 + (a+b)x + ab$.

Luego, el primer término del producto es el cuadrado del primer término de los binomios; el coeficiente del segundo término en el producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios, y el tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.

Producto de dos binomios de la forma$(mx + a)$ y $(nx + b)$.

El resultado de este producto es el siguiente:

$(mx + a)(nx + b) = mnx^2 + (mb + na)x + ab$.

Ejemplo 11.3

Escribir, usando productos notables, el resultado de:

a. $(x - 3)(x + 9)$

b. $(a^6 + 7)(a^6 - 9)$

c. $(4y + 3)(2y - 5)$

Solución:

a. $(x - 3)(x + 9) = x^2 + (-3 + 9)x + (-3) \times 9$

$= x^2 + 6x - 27$

b. $(a^6 + 7)(a^6 - 9) = (a^6)^2 + (7 - 9)a^6 + 7(-9)$

$= a^{12} - 2a^6 - 63$

c. $(4y + 3)(2y - 5) = 8y^2 + (4(-5) + 3 \times 2)y + 3(-5)$

$= 8y^2 - 14y - 15$

12. Factorización

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como resultado la primera expresión. Por ejemplo, a y $(a + b)$ son factores de $a^2 + ab$ pues $a(a + b) = a^2 + ab$. La cantidad a es el factor común para las expresiones a^2 y ab.

Factorizar una expresión algebraica en un conjunto numérico es obtener factores del polinomio que pertenecen al mismo conjunto numérico, de forma que el producto de los últimos de como resultado la expresión algebraica dada.

Polinomios irreducibles sobre $\mathbb{R}$: Un polinomio sobre $\mathbb{R}$ se dice irreducible si no lo podemos factorizar como el producto de dos o más polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor que el polinomio dado. En caso contrario diremos que el polinomio es reducible. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$; por el contrario, el polinomio $3x^2 + 9x$ es reducible sobre $\mathbb{R}$ ya que $3x^2 + 9x = 3x(x + 3)$.

12.1 Casos de factorización

12.1.1 Factor común

El factor común en una expresión algebraica es el divisor común mayor de los términos de la expresión. *La factorización por factor común* consiste en escribir la expresión algebraica dada como un producto entre el factor común y el resultado de dividir cada término por el factor común.

Para esta factorización tendremos en cuenta que:

a) $AB + AC \equiv A(B + C)$

b) $AB + BC + AD + DC \equiv B(A + C) + D(A + C) \equiv (A + C)(B + D)$.

Este último caso se conoce como factor común por agrupación de términos.

Ejemplo 12.1

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $12x^2y^3 - 4x^3y^2$

b. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

c. $(2x + 2)(x + 1)^2 - 2(x^2 + 2x)(x + 1)$

Solución:

a. $12x^2y^3 - 4x^3y^2 = 4x^2y^2(3y - x)$

b. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay = 3x(2x + y) - a(2x + y) = (2x + y)(3x - a)$

c. $(2x + 2)(x + 1)^2 - 2(x^2 + 2x)(x + 1) = 2(x + 1)^3 - 2x(x + 2)(x + 1)$

$= 2(x + 1)[(x + 1)^2 - x(x + 2)]$

$= 2(x + 1)(x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x)$

$= 2(x + 1)$

12.1.2 Diferencia de cuadrados

Sabemos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; por lo tanto, $a^2 - b^2$ tiene la siguiente factorización:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Luego, la diferencia de los cuadrados de dos cantidades se factoriza como el producto de la suma por la diferencia de sus raíces.

Ejemplo 12.2

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $9x^2 - 49y^2$

b. $16x^2 - 5$

c. $x^3y^4 - 16xy^2$

Solución:

a. $9x^2 - 49y^2 = (3x + 7y)(3x - 7y)$

b. $16x^2 - 5 = \left(4x + \sqrt{5}\right)\left(4x - \sqrt{5}\right)$

c. $x^3y^4 - 16xy^2 = xy^2(x^2y^2 - 16) = xy^2(xy + 4)(xy - 4)$

12.1.3 Suma y diferencia de cubos

La suma y la diferencia de los cubos de dos cantidades se factoriza de la siguiente forma:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

12.1.4 Trinomio cuadrado perfecto

Sabemos que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Por lo tanto, los trinomios de la forma $a^2 + 2ab + b^2$ y $a^2 - 2ab + b^2$, que se conocen como trinomios cuadrados perfectos, tienen la siguiente factorización

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Nota: Algunos trinomios no son cuadrados perfectos debido a que el tercer término no es el doble producto. El doble producto puede completarse por adición y sustracción. Completaremos el trinomio cuando la cantidad que se suma y se resta para completar el doble producto sea un cuadrado perfecto; entonces, después de completar el trinomio cuadrado perfecto el resultado será una diferencia de cuadrados, a estos se llaman trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción.

Ejemplo 12.3

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $64x^6 - y^6$

b. $16x^4 - x^2 + 6xy - 9y^2$

c. $x^2 - a^2 - 6xy + 2ab + 9y^2 - b^2$

Solución:

a. $64x^6 - y^6 = (8x^3 - y^3)(8x^3 + y^3)$

$= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

b. $16x^4 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 16x^4 - (x^2 - 6xy + 9y^2)$

$= 16x^4 - (x - 3y)^2$

$= (4x^2 - x + 3y)(4x^2 + x - 3y)$

c. $x^2 - a^2 - 6xy + 2ab + 9y^2 - b^2 = x^2 - 6xy + 9y^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= (x - 3y)^2 - (a - b)^2$

$$= (x - 3y - a + b)(x - 3y + a - b)$$

12.1.5 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Las características de los trinomios de esta forma son:

a. El primer término es un cuadrado perfecto (tienen raíz cuadrada exacta) con coeficiente uno.

b. El segundo término es un múltiplo constante de la raíz del primer término.

c. El tercer término es independiente de los anteriores.

El trinomio tiene la siguiente factorización:

a. Se descompone en dos factores en los que el primer término es la raíz del primer término del trinomio.

b. A continuación, en el primer factor se escribe el signo del segundo término del trinomio; el signo en el segundo factor es el producto de los signos del segundo y tercer términos del trinomio.

c. A continuación se buscan dos números cuyo producto sea c y su suma algebraica, es decir, teniendo en cuenta los signos, sea b.

Esto es,

$x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$con $c = mn$ y $b = m + n$

En la descomposición anterior es necesario tener en cuenta que en $c = mn$ y en $b = m + n$ se deben considerar los signos de $n\ y\ m$, los cuales dependen de los signos que tengan b y c.

Ejemplo 12.4

Factorizar los siguientes trinomios:

a. $x^2 - x - 2$

b. $x^2 - 26x + 165$

c. $65 - 8xy - x^2y^2$

Solución:

a. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, se observa que $-2 + 1 = -1$y $(-2) \cdot 1 = -2$

b. $x^2 - 26x + 165 = (x - 15)(x - 11)$.

Aquí $-26 = -15 - 11$ y $(-15)(-11) = 165$

c. $65 - 8xy - x^2y^2 = -(x^2y^2 + 8xy - 65) = -(xy + 13)(xy - 5)$

12.1.6 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Para factorizar los trinomios de esta forma se buscan cuatro númerosn, m, ry s , tales que:

$ax^2 + bx + c = (nx + r)(mx + s)$

con $mn = a$

$rs = c$

$ns + mr = b$

Ejemplo 12.5

Factorizar el siguiente trinomio:

a. $6x^2 - 31x + 35$

b. $20 - 9x - 20x^2$

c. $2x^2 + 3x + 1$

Solución:

a. $6x^2 - 31x + 35 = (3x - 5)(2x - 7)$, pues $3 \times 2 = 6, (-7)(-5) = 35$ y

$3(-7) + 2(-5) = -31$

b. $20 - 9x - 20x^2 = -(20x^2 + 9x - 20) = -(5x - 4)(4x + 5)$. Observe que $5 \times 4 = 20, (-4)(5) = -20$ y $5 \times 5 + 4(-4) = 25 - 16 = 9$

c. $2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$, pues $2 \times 1 = 2, \quad 1 \times 1 = 1$ y

$(2 \times 1) + (1 \times 1) = 3$

Otra forma para factorizar los trinomios de la forma$x^2 + bx + c$y $ax^2 + bx + c$es mediante la *fórmula cuadrática.*

Dado el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$se dice que $x = r_1$ es un cero o una raíz del polinomio si $P(r_1) = ar_1^2 + br_1 + c = 0$.

Las dos raíces de la ecuación cuadrática vienen dadas por:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dadas las raíces r_1 y r_2 del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ se tiene que:

$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

Ejemplo 12.6

Para el ejercicio (a) del ejemplo 12.5 se tiene que las raíces de la ecuación

$6x^2 - 31x + 35$ son:

$$r_{1,2} = \frac{-(-31) \pm \sqrt{31^2 - 4 \times 6 \times 35}}{2 \times 6} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 840}}{12} = \frac{31 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{31 \pm 11}{12}$$

Luego, las dos raíces son:

$r_1 = \frac{31 + 11}{12} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$ y $r_2 = \frac{31 - 11}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

Por lo tanto, la ecuación cuadrática en cuestión tiene la siguiente factorización:

$$6x^2 - 31x + 35 = 6\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2x - 7}{2}\right)\left(\frac{3x - 5}{3}\right)$$

$$= (2x - 7)(3x - 5)$$

Ejemplo 12.7

Factorizar el trinomio $20 - 9x - 20x^2 = -20x^2 - 9x + 20$.

Solución:

Las raíces de esta ecuación son:

$$r_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times (-20) \times 20}}{2 \times (-20)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1600}}{-40} = \frac{9 \pm \sqrt{1681}}{-40} = \frac{9 \pm 41}{-40}$$

Luego,

$$r_1 = \frac{9 + 41}{-40} = -\frac{50}{40} = -\frac{5}{4} \text{ y } r_2 = \frac{9 - 41}{-40} = \frac{-32}{-40} = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto,

$$-20x^2 - 9x + 20 = -20\left(x + \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = -(4x + 5)(5x - 4)$$

Ejemplo 12.8

Factorizar el trinomio $4y^2 - 8y + 3$.

Solución:

Las raíces de esta ecuación son $r_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 4 \times 3}}{2 \times 4} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8}$, entonces:

$$r_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2};\ r_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación se factoriza como:

$$4y^2 - 8y + 3 = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = (2y - 3)(2y - 1)$$

Otra forma:

Se escribe la ecuación dada como:

$$4y^2 - 8y + 3 = (2y)^2 - 4(2y) + 3$$

De esta forma, estamos en el caso anterior. Por lo tanto, buscamos dos números cuyo producto sea 3 y su suma sea -4; estos números son -3 y -1. Entonces, la factorización es:

$$4y^2 - 8y + 3 = (2y)^2 - 4(2y) + 3 = (2y - 3)(2y - 1)$$

13. División de polinomios y división sintética

A continuación se estudiarán los métodos que permitan encontrar las raíces racionales de un polinomio de grado mayor que dos, con el fin de factorizar dichos polinomios. Para ello es necesario analizar la división de polinomios.

13.1 División larga de polinomios

El siguiente proceso de cuatro pasos, que se ilustrará con un ejemplo, se llama división larga de polinomios.

Comencemos con la división:

$$\frac{5x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{x + 1}$$

El proceso de división larga es similar a la división de números, y se realiza de la siguiente forma:

1) Primero, se divide $5x^3$ entre $x = \frac{5x^3}{x} = 5x^2$. Esta cantidad es el primer término del cociente.

2) Se multiplica el divisor $x + 1$ por $5x^2$ y se obtiene $(x + 1)5x^2 = 5x^3 + 5x^2$. Esta cantidad se resta del dividendo, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 2x^2 - 9x - 3 & x + 1 \\ \cline{2-2} -(5x^3 + 5x^2) \quad\quad\; & 5x^2 \\ \hline -3x^2 - 9x - 3 & \end{array}$$

El residuo de esta primera etapa es $-3x^2 - 9x - 3$

3) Se repiten los pasos 1) y 2) usando como dividendo el residuo del paso anterior hasta que el residuo sea cero o de grado menor que el grado del divisor.

En el paso anterior, el proceso continúa dividiendo $-3x^2 - 9x - 3$ por $x + 1$. Para ello se divide $-3x^2$ entre x y se obtiene $-3x$ que es el segundo término del cociente. A continuación se multiplica $x + 1$ por $-3x$ y el resultado se resta de nuevo dividiendo, y se continúa de esta forma, como se observa a continuación:

$$
\begin{array}{r|l}
5x^3 + 2x^2 - 9x - 3 & \quad x+1 \\ \cline{2-2}
-(5x^3 + 5x^2) & 5x^2 - 3x - 6 \\ \cline{1-1}
-3x^2 - 9x - 3 & \\
-(-3x^2 - 3x) & \\ \cline{1-1}
-6x - 3 & \\
-(-6x - 6) & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

De esta forma, al dividir $5x^3 + 2x^2 - 9x - 3$ por $x + 1$ el cociente es $5x^2 - 3x - 6$y el residuo es 3. Entonces, puede escribirse el resultado de la división de dos formas alternativas, ya sea como

$$\frac{5x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{x + 1} = 5x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x + 1}$$

Lo anterior significa que el resultado de la división es igual al cociente más el residuo sobre el divisor.

La otra forma consiste en multiplicar la ecuación anterior por el divisor $x + 1$ para obtener:

$$\underbrace{5x^3 + 2x^2 - 9x - 3}_{Dividendo} = \underbrace{(5x^2 - 3x - 6)}_{Cociente}\underbrace{(x + 1)}_{Divisor} + \underbrace{3}_{Residuo}$$

Nota: Esta es la forma como se verifica que la operación, es a manera de prueba que se utiliza.

A continuación, se ilustra de nuevo el proceso en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 13.1

Efectué la división:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 6}{x - 2}$$

Solución:

Usando el algoritmo anterior se obtiene que el primer término del cociente es $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$, y continuando el proceso se llega a:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 4x^2 + 3x - 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-(2x^3 - 4x^2) & 2x^2 + 3 \\ \cline{1-1}
3x - 6 & \\
-(3x - 6) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

El hecho de que el residuo sea nulo significa que la división es exacta y que $x - 2$ es un factor de $2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$. Por lo tanto, se tiene que:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = (x - 2)(2x^2 + 3)$$

El resultado del proceso de división de polinomios puede resumirse en el siguiente teorema, llamado *algoritmo de la división*.

13.2 Teorema *“Algoritmo de la división”*

Sean $p(x)$ y $d(x)$ dos polinomios, con $d(x) \neq 0$ y con grado menor o igual que el grado de $p(x)$. Entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$\underbrace{p(x)}_{Dividendo} = \underbrace{d(x)}_{Divisor} \times \underbrace{q(x)}_{Cociente} + \underbrace{r(x)}_{Residuo}$$

Donde $r(x) = 0$ o tiene grado menor al grado de $d(x)$.

Observación: Cuando $r(x) = 0$ se obtiene que $d(x)$ es un factor de $p(x)$ con cociente $q(x)$.

13.3 División sintética

La división sintética es un procedimiento abreviado para dividir un polinomio $p(x)$ entre un divisor de la forma $x - b$, donde b se llama el divisor sintético.

Veamos ilustrado el proceso de división sintética:

$$\frac{5x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{x + 1}$$

1. Como el divisor es $x + 1$, el cual se puede escribir como $x - (-1)$, representamos el divisor sintético como $b = -1$. Este valor lo escribimos a la derecha de los coeficientes del polinomio $p(x) = 5x^3 + 2x^2 - 9x - 3$, y cuando no aparezca alguna potencia de x se incluye un coeficiente cero. Lo anterior, se ilustra a continuación:

$$5 \quad 2 \quad -9 \quad -3 \ \underline{|-1}$$

Observación: Los coeficientes del dividendo $p(x)$ se escriben en orden decreciente de potencias de x.

2. Bajar el 5 a la tercera línea; esto es,

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & -9 & -3 & \underline{-1} \\ \hline 5 & & & & \end{array}$$

3. Multiplique 5 por $b = -1$; escriba -5 en la segunda fila y la segunda columna y súmelo a 2 para obtener -3. A continuación, multiplique -3 por -1, escriba 3 en la tercera columna y la segunda fila y súmelo a -9 para obtener -6. Continúe de esta forma como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & -9 & -3 & \underline{-1} \\ & -5 & 3 & 6 & \\ \hline 5 & -3 & -6 & 3 & \end{array}$$

4. El último número de la tercera fila es el residuo de la división y los tres primeros números son los coeficientes del polinomio cociente. Este polinomio es un grado menor que el dividendo; por lo tanto, para este ejemplo el polinomio cociente es $q(x) = 5x^2 - 3x - 6$ y el resultado es 3.

Ejemplo 13.2

Dividir:

$$\frac{3x^3 + 5x - 8}{x - 1}$$

Solución:

Observe que en el dividendo $p(x) = 3x^3 + 5x - 8$ falta la potencia x^2; por lo tanto, al escribir los coeficientes de este polinomio para el proceso de división sintética se escribe cero como coeficiente de esta potencia. Además, para este ejemplo se tiene que $b = 1$. Entonces, mediante el proceso de división sintética se obtiene el siguiente resultado para la división:

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 5 & 0 & -8 & \underline{1} \\ & 3 & 8 & 8 & \\ \hline 3 & 8 & 8 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces la división es exacta y el cociente de la división es el polinomio $q(x) = 3x^2 + 8x + 8$.

Por lo tanto,

$$\frac{3x^3 + 5x - 8}{x - 1} = 3x^2 + 8x + 8 \Rightarrow 3x^3 + 5x - 8 = (x - 1)(3x^2 + 8x + 8)$$

14. Teoremas del residuo y del factor

Para el polinomio $h(x) = x^4 - x^3 + 4x - 16$ se cumple que:
$h(2) = 2^4 - 2^3 + 4 \times 2 - 16 = 0$. En este caso se dice que $x = 2$ es una raíz del polinomio y que $(x - 2)$ es un factor.

En general, $x = b$ es una raíz del polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; por consiguiente $(x - b)$ es un factor cuando $p(b) = a_n b^n + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = 0$ y en este caso el polinomio se puede factorizar como $p(x) = q(x)(x - b)$donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$.

Además, se puede verificar que el residuo de la división de $p(x)$ entre $(x - b)$ es $p(b)$. Este resultado se conoce como teorema del residuo.

Para encontrar los ceros o raíces racionales para un polinomio $p(x)$ que tiene coeficientes enteros se procede de la siguiente forma:

Las posibles raíces racionales irreducibles son de la forma $\frac{r}{s}$, para el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde r es un factor de a_0 y s es un factor de a_n.

Ejemplo 14.1

Factorizar en $\mathbb{R}$ el polinomio $p(x) = 8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 12x - 2$.

Solución:

Las posibles raíces racionales para el polinomio son números de la forma $\frac{r}{s}$ donde $r$es un divisor de 2 y s es un factor de 8. Entonces, las posibles raíces racionales son: $\pm 1 \pm 2 \pm 1/2 \pm 1/4 \pm 1/8$. A continuación, se evalúa el polinomio en estos valores y se obtiene:

$$P(1) = 8 + 6 - 15 - 12 - 2 = -15 \neq 0$$

Entonces $x = 1$ no es raíz y por lo tanto, $(x - 1)$ no es factor. Sin embargo, se observa que:

$$P\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$$

Por lo tanto, $x = -1/2$ es raíz y así, $\big(x - (-1/2)\big) = (x + 1/2)$ es factor. Para realizar la división se tiene en cuenta que $x$en $8x^4$ está $8x^3$ veces y así sucesivamente. Además, al multiplicar $x + \frac{1}{2}$ por $8x^3$ el resultado pasa a restar el polinomio inicial. Entonces, al realizar la división entre $P(x)$ y $(x + 1/2)$ se obtiene:

$$
\begin{array}{r|l}
8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 12x - 2 & x + 1/2 \\ \cline{2-2}
-8x^4 - 4x^3 \qquad\qquad\qquad & 8x^3 + 2x^2 - 16x - 4 \\ \cline{1-1}
2x^3 - 15x^2 - 12x - 2 & \\
-2x^3 - \quad x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-16x^2 - 12x - 2 & \\
16x^2 + \ 8x \qquad & \\ \cline{1-1}
-4x - 2 & \\
4x + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, obtenemos que:

$p(x) = (x + 1/2)(8x^3 + 2x^2 - 16x - 4)$

Ahora, como también se obtiene que $p(-1/4) = 0$ entonces, $(x + 1/4)$ es factor. Al realizar la división entre $q(x)$ y $(x + 1/4)$ se obtiene que:

$$p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)(8x^2 - 16)$$

$$= 8(x + 1/2)(x + 1/4)(x^2 - 2)$$

$$= 8(x + 1/2)(x + 1/4)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

Entonces, las raíces del polinomio $p(x) = 8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 12x - 2$ son

$$x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{4}, x = \sqrt{2} \ y \ x = -\sqrt{2}$$

15. Operaciones con fracciones

15.1 Principio fundamental de las fracciones: Simplificación de fracciones

Al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por una cantidad diferente de cero se obtiene como resultado una fracción equivalente. Esto es,

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{AC}{BC} \text{y} \frac{A}{B} \equiv \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{C}} \text{siempre } C \neq 0$$

El resultado anterior nos permite simplificar los factores comunes al numerador y al denominador de una fracción; esto es lo que se conoce como *simplificación de fracciones*.

Para simplificar una fracción procedemos así:

a. Inicialmente factorizamos completamente el numerador y el denominador de la fracción.
b. A continuación se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

Ejemplo 15.1

Efectuar operaciones y simplificar.

$$\frac{x^2-4}{x^2-2x}$$

Solución:

Para simplificar, se factoriza el numerador y el denominador, y se obtiene:

$$\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\frac{x+2}{x}$$

Ejemplo 15.2

Efectuar operaciones y simplificar la expresión:

$$\frac{3x^2-27x+24}{2x^3-16x^2+14x}$$

Solución:

$$\frac{3x^2-27x+24}{2x^3-16x^2+14x}=\frac{3(x^2-9x+8)}{2x(x^2-8x+7x)}=\frac{3(x-8)(x-1)}{2x(x-7)(x-1)}=\frac{3(x-8)}{2x(x-7)}$$

15.2 Multiplicación de fracciones

La regla para multiplicar fracciones es la siguiente:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, y a continuación se simplifica la fracción resultante.

Ejemplo 15.3

Multiplicar las fracciones $\frac{z^2-4}{z+2z}$, $\frac{z^2}{z^2-4z+4}$ y simplificar.

Solución:

$$\frac{z^2-4}{z+2z} \cdot \frac{z^2}{z^2-4z+4} = \frac{z^2(z^2-4)}{(z^2+2z)(z^2-4z+4)} = \frac{z^2(z-2)(z+2)}{z(z+2)(z-2)^2} = \frac{z}{(z-2)}$$

15.3 División de fracciones

La regla para dividir fracciones es la siguiente:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Lo anterior también se indica como:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{AD}{BC}$$

Es decir, el resultado de una división de fracciones es igual al producto de los extremos sobre el producto de los medios.

Ejemplo 15.4

Realizar las operaciones y simplificar.

a.

$$\frac{x^2+2x}{3x^2-18x+24} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-4x+4} = \frac{(x^2+2x)(x^2-4x+4)}{(x^2-x-6)(3x^2-18x+24)}$$

$$= \frac{x(x+2)(x-2)(x-2)}{(x-3)(x+2)(3x-12)(x-2)} = \frac{x(x-2)}{3(x-3)(x-4)}$$

b.

$$\frac{\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-8}}{\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}} = \frac{(x^2-7x+10)(x^2-3x-4)}{(x^2-2x-8)(x^2+6x+5)} = \frac{(x-5)(x-2)(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)(x+5)(x+1)} = \frac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x+5)}$$

Racionalización de denominadores: Algunas fracciones tienen denominadores que contienen radicales de la forma $5+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}$, etc. En estos casos, el denominador puede racionalizarse al multiplicarlo por una expresión que lo transforme en diferencias de cuadrados o suma o diferencia de cubos. La expresión por la que se multiplica el numerador y el denominador de la fracción se conoce como factor racionalizante. Algunos de los factores racionalizantes más comunes son los siguientes:

a. Para racionalizar un denominador de forma $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, el factor racionalizante es:
$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$ pues $\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B$.

b. Para racionalizar denominadores de la forma $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$, el factor racionalizante es: $(\sqrt[3]{A})^2 \mp \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + (\sqrt[3]{B})^2$, ya que

- $\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\left[\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 - \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right] = (\sqrt[3]{A})^3 + (\sqrt[3]{B})^3 = A + B$
- $\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left[\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right] = (\sqrt[3]{A})^3 - (\sqrt[3]{B})^3 = A - B$

Ejemplo 15.5

Racionalizar el denominador de las siguientes expresiones.

a. $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

b. $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$

c. $\frac{4}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}}$

d. $\frac{4}{2+\sqrt[3]{2}}$

Solución:

a. $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

b.

$\frac{2}{1-\sqrt{3}}=\frac{2}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3}$

$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{-2}=-(1+\sqrt{3})$

c.

$\frac{4}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}=\frac{4[(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2]}{(\sqrt[3]{6})^3+(\sqrt[3]{2})^3}$

$=\frac{4[(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2]}{8}=\frac{(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{2}$

d.

$\frac{4}{2+\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{2+\sqrt[3]{2}}\times\frac{2^2-2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{2^2-2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}=\frac{4[2^2-2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2]}{2^3+(\sqrt[3]{2})^3}$

$=\frac{4[2^2-2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2]}{10}=\frac{2[2^2-2\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2]}{5}$

15.4 Suma y resta de fracciones

Para sumar y restar fracciones se procede de la siguiente forma:

a. Inicialmente se factoriza completamente el numerador y el denominador de cada fracción de forma de los factores que aparezcan sean irreducibles.

b. Se simplifica completamente cada fracción.

c. A continuación se busca el mínimo común denominador (MCD), que es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores, y es igual al producto de los factores comunes y no comunes de los distintos denominadores, cada uno elevado a la potencia más grande con la que aparezca.

d. El resultado de la suma o resta es una fracción en la que el denominador es el MCD y el numerador se obtiene al multiplicar cada numerador por lo que le falta al denominador de la fracción para ser igual al MCD; después se suman o restan estos productos.

Esto es,

$$\frac{A}{B^3} \pm \frac{D}{BC^2} \pm \frac{E}{B^2C^3} = \frac{A \times C^2 \pm D \times B^2 \times C \pm E \times B}{B^3C^3}$$

Observación: Si las fracciones tienen el mismo denominador entonces la suma o resta se realiza así:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$$

Ejemplo 15.6

Realice la suma y simplifique.

$$\frac{x^2}{x+3} + \frac{5x+6}{x+3}$$

Solución:

$$\frac{x^2}{x+3} + \frac{5x+6}{x+3} = \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \frac{(x+3)(x+2)}{x+3} = x+2$$

Ejemplo 15.7

Realice las siguientes operaciones y simplifique.

$$\frac{2x-3}{2x^2+11x-6}-\frac{3x+1}{3x^2+16x-12}+\frac{1}{3x-2}$$

Solución:

$$\frac{2x-3}{2x^2+11x-6}-\frac{3x+1}{3x^2+16x-12}+\frac{1}{3x-2}$$

$$=\frac{2x-3}{(x+6)(2x-1)}-\frac{3x+1}{(3x-2)(x+6)}+\frac{1}{3x-2}$$

$$=\frac{(2x-3)(3x-2)-(3x+1)(2x-1)+(x+6)(2x-1)}{(x+6)(2x-1)(3x-2)}$$

$$=\frac{6x^2-13x+6-6x^2+x+1+2x^2+11x-6}{(x+6)(2x-1)(3x-2)}$$

$$=\frac{2x^2-x+1}{(x+6)(2x-1)(3x-2)}$$

15.5 Fracciones compuestas

Una fracción compuesta es aquella en la que numerador o el denominador, o ambos son fracciones. Para reducir una fracción compleja a una simple, se realizan las operaciones indicadas en el numerador y el denominador de la fracción. A continuación, se realiza el producto de internos y externos, se coloca en el numerador el producto de los externos y en el denominador el de los internos.

Nota: Si el numerador o el denominador es un entero y no un fraccionario, este se debe convertir a un fraccionario dividiéndolo por la unidad.

Ejemplo 15.8

Efectúe operaciones y simplifique la siguiente fracción compuesta

$$\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$$

Solución:

Para simplificar esta fracción compuesta se realizan las operaciones indicadas en el numerador y el denominador, como se muestra a continuación.

$$\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{y^2-x^2}{y^2}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}=\frac{\frac{(y+x)(y-x)}{y^2}}{\frac{(x+y)(x-y)}{xy}}$$

A continuación, se efectúa el producto de los extremos sobre el producto de los medios y, simplificando, se obtiene:

$$\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{xy(y+x)(y-x)}{y^2(x+y)(x-y)}=-\frac{x}{y}$$

15.6 Fracciones racionales

Una fracción racional es una expresión de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grados n y m, respectivamente, en la variable x. Algunos ejemplos de fracciones racionales son los siguientes:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{x^3+5x^2+7x-1}{x^2+5x+6}$$

En el primer ejemplo, el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador. Por esta razón se dice que la fracción es propia, mientras que en el segundo, el grado del numerador es mayor que el del denominador, razón por la cual se dice que dicha fracción es impropia.

En general,

- Una fracción racional en la cual el grado del numerador sea menor que el grado del denominador se llama *fracción propia*.
- Una fracción racional en la cual el grado del numerador sea mayor o igual que el grado del denominador se llama *fracción impropia*.

Fracción parcial: Si una fracción propia puede escribirse como la suma de fracciones propias cuyos denominadores tienen grado menor que el grado del denominador de la fracción inicial, cada una de estas fracciones sumandos se llama *fracción parcial* de la fracción dada.

Por ejemplo, las fracciones $2/(x+3)$ y $(5x+7)/(x^2+3)$ son fracciones parciales para la fracción propia $(7x^2+22x+27)/(x^3+3x^2+3x+9)$, pues:

$$\frac{7x^2+22x+27}{x^3+3x^2+3x+9}=\frac{7x^2+22x+27}{(x+3)(x^2+3)}=\frac{2}{x+3}+\frac{5x+7}{x^2+3}$$

El propósito de esta sección es mostrar las técnicas para descomponer una fracción en fracciones parciales. Lo anterior se enuncia en el siguiente teorema:

15.6.1 Teorema fundamental

Cualquier fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$puede descomponerse en una suma de fracciones parciales, como sigue:

a. Si $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos, es decir, si $Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)$ sin que se repita un factor, entonces la descomposición en fracciones parciales tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son constantes por determinar.

b. Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces, de la forma $(ax + b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contiene términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son constantes por determinar.

c. Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$ no repetido, que no puede seguirse factorizando, entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A, B son constantes por determinar.

d. Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces, de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$ y $ax^2 + bx + c$no se puede factorizar, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tendrá los términos:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k$ son constantes por determinar.

Ejemplo 15.9

Descomponga en fracciones parciales

$$\frac{7x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

Solución:

Primero se factoriza el denominador como sigue:

$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$

El denominador tiene tres factores lineales distintos y por tanto la descomposición en fracciones parciales tiene la forma:

$$\frac{7x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$$

Para encontrar las constantes A, B y C, se procede de la siguiente forma:

$$\frac{7x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3)}{x(x + 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax - 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 3Cx}{x(x + 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{(A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A}{x(x + 3)(x - 1)}$$

Para que la igualdad planteada en la ecuación anterior sea válida se utiliza las siguiente propiedad de polinomios que dice que dos polinomios

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

Son iguales si los coeficientes de los monomios de igual grado son iguales, es decir, si $a_i = b_i$ para $i = 0,1, \dots, n$.

Por tanto

$A + B + C = 0$ (1)

$2A - B + 3C = 7$ (2)

$-3A = -3$ (3)

Para resolver este sistema de ecuaciones, se procede así:

De (1) se obtiene:

$B = -A - C$ (4)

De (2) se obtiene:

$B = 2A + 3C - 7$ (5)

Igualando (4) y (5) se sigue:

$-A - C = 2A + 3C - 7$

$\Rightarrow 4C = -3A + 7$

$\Rightarrow C = \frac{-3A+7}{4}$(6)

De (3) se obtiene:

$A = 1$

Reemplazando $A = 1$en (6) se obtiene que $C = 1$y reemplazando $A = 1$ y $C = 1$en (5) se tiene que $B = -2$.

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{7x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x - 1}$$

Ejemplo 15.10

Obtenga la descomposición en fracciones parciales para la fracción.

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2}$$

Solución:

El denominador se factoriza como$x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$ y el factor x se repite dos veces en el denominador, entonces la descomposición en fracciones parciales tiene la forma:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Para encontrar las constantes A, B y C, se procede de la siguiente forma:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$$

Para que la igualdad planteada en la ecuación anterior sea válida se requiere que:

$$A+C=1 \qquad (1)$$

$$A+B=0 \qquad (2)$$

$$B=1 \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) se tiene que $A=-1$; reemplazando este valor en (1) se sigue que $C=2$.

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x+1}$$

Ejemplo 15.11

Obtenga la descomposición en fracciones parciales para la fracción.

$$\frac{7x^2+22x+27}{x^3+3x^2+3x+9}$$

Solución:

El primer paso es factorizar completamente el denominador de la fracción inicial. La factorización del denominador es:

$$x^3+3x^2+3x+9=x^2(x+3)+3(x+3)=(x+3)(x^2+3)$$

Por lo tanto, la fracción propia dada se puede reescribir como:

$$\frac{7x^2+22x+27}{x^3+3x^2+3x+9}=\frac{7x^2+22x+27}{(x+3)(x^2+3)}$$

Uno de los factores del denominador es lineal y el otro es cuadrático irreducible; por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{7x^2+22x+27}{(x+3)(x^2+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Para encontrar las constantes A, B y C, se procede de la siguiente forma:

$$\frac{7x^2+22x+27}{(x+3)(x^2+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+3}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+3)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(3B+C)x+(3A+3C)}{(x+3)(x^2+3)}$$

Para que la igualdad planteada en la ecuación anterior sea válida se requiere que:

$A+B=7$ (1)

$3B+C=22$ (2)

$3A+3C=27$ (3)

Para resolver el anterior sistema de ecuaciones, se procede así:

De (1) se obtiene:

$B=7-A$ (4)

De (3) se obtiene:

$C=9-A$ (5)

Reemplazado (4) y (5) en (2), se obtiene:

$3(7-A)+(9-A)=22$

$\Rightarrow 30-4A=22$

$\Rightarrow A = 2$

Reemplazando $A = 2$ en (4) y (5) se obtiene que:

$B = 7 - 2 = 5$

$C = 9 - 2 = 7$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{7x^2 + 22x + 27}{(x+3)(x^2+3)} = \frac{2}{x+3} + \frac{5x+7}{x^2+3}$$

Ejemplo 15.12

Si una fracción propia se puede descomponer como:

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Entonces, verifique que:

$$A = \frac{f(a)}{a-b} \quad B = \frac{f(b)}{b-a}$$

Solución:

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow f(x) = A(x-b) + B(x-a)$$

Si $x = a, f(a) = A(a-b) \Rightarrow A = \frac{f(a)}{a-b}$

Si $x = b, f(b) = B(b-a) \Rightarrow B = \frac{f(b)}{b-a}$

Taller de álgebra

1. Responda V (verdadero) o F (falso). Si la respuesta es falso, escriba un contraejemplo o la proposición verdadera.

a) La raíz cubica de un numero negativo no es un número real.

b) La raíz de índice par de un número negativo no es un número real.

c) La raíz de índice impar de un número negativo no es un número real.

d) Si $a = \sqrt[n]{x}$, entonces $a^n = x$.

e) Un radical de índice par de un número negativo tiene una solución real.

f) La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores.

g) La raíz de una suma no es igual a la suma de las raíces de los sumandos.

h) La raíz de una potencia se obtiene dividiendo el exponente del radicando por el índice del radical.

i) La raíz de una fracción es igual a la raíz del numerador dividida por el denominador.

j) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

k) $\sqrt{(a + b)^2} = a + b$.

l) $\sqrt{(a + b)^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{(a+b)}}$.

m) $\sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

o) $\sqrt{21} = \sqrt{7} * \sqrt{3}$.

p) $\sqrt{a^2} = a$ para todo a real.

q) $a^m * a^n = a^{mn}$.

r) $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$.

2. Responda V o F. Si la respuesta es falso (F), escriba un contraejemplo o la proposición verdadera.

a) La expresión $3x^4 - 7x^{-2} + 1$ es un polinomio de grado 4.

b) $\sqrt{x} + 7x^2 + 2$ es un polinomio de grado 2, con término independiente 2.

c) $5x^3 - \sqrt{7x} + 8$ es un polinomio.

d) $-7xy^3$ y $-7xy^2$ son términos semejantes.

e) Todo real elevado al cero equivale a 1.

f) $(7a-2b)^{-2}$ está definido $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

g) La división $\frac{x^4+y^4}{x+y}$ es exacta.

h) Los polinomios ax^3-7x+5 y $-7x+c$ con $a,c \in \mathbb{R}$ no pueden ser iguales.

i) $(x^m)^n = x^{m+n}$.

j) El grado del producto de dos polinomios es igual al producto de sus grados.

k) $a^m b^m = (ab)^{2m}$ Para a,b números positivos $n,m \in \mathbb{Z}$.

l) $(a+b)^n = \frac{1}{(a+b)^n}$Para a,b números positivos $n,m \in \mathbb{Z}$.

m) $(a+b)^m = a^m + b^m$ Para a,b números positivos $n,m \in \mathbb{Z}$

n) $a^n b^m = (ab)^{n+m}$ Para a,b números positivos $n,m \in \mathbb{Z}$

3. Complete:

a) Al introducir los tres últimos términos de $7x-4y+5y-1$ en un paréntesis precedido del signo $-$, se obtiene: _______________.

b) El cubo de x menos tres veces y se escribe algebraicamente: _________.

c) El polinomio que debe disminuirse en $3x^2-y+5$ para obtener x^3+7x^2-8y+3 es: __________________.

d) La expresión que debe sumarse a x^4-7x^2+x-3 para obtener $x^5-7x^3+x^2-3x$ es ____________________________________.

e) Una división entre polinomios finaliza cuando: ________________.

f) Si $xy=3$ entonces $x^3y^3 =$____________________.

g) Si $x^{-1}y^{-1}=3$ entonces $x^3y^3 =$________________.

h) Si $x^7=2$ entonces $(x^{-3})^6(x^2)^2 =$______________.

i) Si $(\frac{xy}{z})^{-2}=3$ entonces $(\frac{z}{xy})^6 =$_________________.

j) Si $P(x)=3x^5-x^4+2x^3-7x+1$ entonces $P(-2) =$____________.

k) Si $25^2=5^x$ entonces $x=$ ________________.

l) Si $2^{10}-2^2 * 2^x = 0$ entonces $x=$ ________________.

m) El séptimo término de $(x^2-3y)^{10}$ es _____________.

n) Escriba un polinomio de grado 5 ordenado sin término independiente.

4. En los siguientes problemas, simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos:

a) $(2^3)(2^2)$

b) x^6x^9

c) $\frac{x^2x^6}{y^7y^{10}}$

d) $(x^{12})^4$

e) $\frac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$

f) $(2x^2y^3)^3$

g) $\left(\frac{w^2s^3}{y^2}\right)^3$

h) $\frac{(x^4)^6}{x(x^3)}$

i) $\frac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$

j) $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$

k) $\left(\frac{1}{3}x^3y^4\right)^{-2}$

l)$\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)(\frac{5a^2b}{10b^4}$

5. Evalúe las siguientes expresiones sin usar calculadora.

a) $\sqrt{36}+\sqrt[3]{64}-\sqrt[5]{-32}$

b) $(32)^{-2/5}+\sqrt{0.04}$

c) $(0.09)^{-1/2}$

d) $\left(\frac{1}{32}\right)^{4/5}$

e) $\left(\frac{27}{64}\right)^{2/3}$

f) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

g) $2\sqrt{75}-4\sqrt{27}+\sqrt[3]{128}$

h) $(16y^8)^{3/4}$

i) $\left(\frac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$

j) $\sqrt[3]{2x^3}$

k) $\sqrt[4]{\frac{x}{16}}$

l) $\left(\frac{625}{a^8}\right)^{-3/4}$

m) $\left(\frac{a^{-3}+a^{-2}b^{-2}}{a^{-3}-a^{-2}b^{-2}}\right)^{-1}$

n) $\left(\frac{x^{m^2}}{x^{2m-1}}\right)^{\frac{1}{m-1}}$

6. Escriba las expresiones solo en términos de exponentes positivos.

a) $\frac{x^3y^{-2}}{z^2}$

b) $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$

c) $5m^{-2}m^{-7}$

d) $(3-z)^{-4}$

e) $\frac{u^{-2}u^{-6}w^3}{vw^{-5}}$

f) $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$

g) $\left(\sqrt[5]{xy^{-3}}\right)x^{-1}y^{-2}$

7. Simplifique y racionalice el denominador de las siguientes expresiones. No use calculadora.

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{8}{5\sqrt[4]{3x^3}}$

c) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6}}$

d) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4}}$

e) $\frac{4x}{\sqrt{8x^3}}$

f) $\frac{5x}{8\sqrt[5]{2x^4}}$

g) $\frac{\sqrt{3xy}}{\sqrt[4]{x^2y^3}}$

h) $\frac{8\sqrt{2}-4\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$

i) $\frac{\sqrt{54}-\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

j) $\frac{\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$

k) $\frac{12(x^4-y^4)}{4\sqrt[5]{x^2-y^2}}$

8. Realice las operaciones indicadas y simplifique:

a) $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$

b) $(t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$

c) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}y\right) + (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$

d) $-3\{4x(x + 2) - 2[\mathrm{x}^2 - (3 - \mathrm{x})]\}$

e) $(u + 2)(u - 3)$

f) $(2u + 5)(6u1)$

g) $\frac{6x^5+4x^3-1}{2x^2}$

h) $[(a + b) - (a - b)]^2$

i) $\frac{z^2-18z}{z}$

j) $(a^x - a^{x+1} + a^{x+2})(a + 1)$

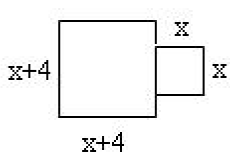
k) $\left(\frac{2}{5}x^6 + \frac{1}{3}x^4y^2 + \frac{3}{5}x^2y^4 - \frac{y^6}{10}\right)\left(-\frac{5}{7}a^3x^4y^3\right)$

l) $-2x - \{3x - 5y + [-7x + 8y + (-9x + 2y) - (6x - 10y)]\}$

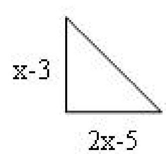
m) $\left(x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x\right) + \left(3x^5 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x}{10}\right) + \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\right)$

o) Reste $-4x^3y^3 - \frac{xy}{10} + \frac{2}{3}x^2y^2 - 9$ de $-\frac{3}{5}xy + \frac{x^2y^2}{6} - 8$

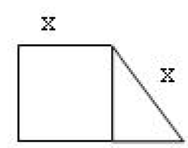
9. Exprese el área de las siguientes figuras mediante un polinomio reducido. Utilice productos notables si es posible:



a)

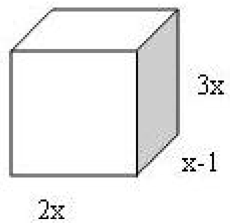


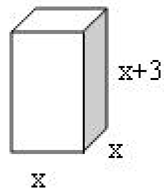
b)



c)

10. Exprese el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos mediante un polinomio:

a) 

b) 

11. Utilice productos notables:

a) $(x-2)^2$

b) $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

c) $(\sqrt{2y}+3)^2$

d) $(m+n)^2$

e) $(4ab^2+5a^2b)^2$

f) $(10x^3-9xy^5)^2$

g) $(a^3-b^2)(a^3+b^2)$

h) $(2a-b+c)(2a-b-c)$

i) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$

j) $(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)$

k) $(a+1)(a+2)$

l) $(x-5)(x+4)$

m) $(a+1)(a-1)(a-2)(a+2)$

n) $(5x^2+3y^2)(2x-3y)(2x+3y)$

ñ) $(2x-y+3)(2x+y-3)$

o) $(3x-y)(9x^2+y^2)(3x+y)$

p) $(1+3x^2)^2$

q) $(q^7-p^7)^2$

r) $(1-3ax)(3ax+1)$

s) $(m-n-1)(m-n+1)$

t) $(x^3-x^2-x)(x^3+x^2+x)$

u) $(a+b+c)^2$

v) $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

w) $(x^2-1)(x^2-7)$

x) $(x+1)(x-1)(x^2-2)$

y) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

12. Desarrolle los binomios:

a) $(m+n)^3$

b) $(2x-5y)^4$

c) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3$

d) $(3a+4b)^5$

13. Simplifique y racionalice el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}$

b) $\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

c) $\frac{6}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{5}}$

d) $\frac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$

e) $\frac{81x^2-16y^2}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

f) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}}$

h) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

i) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

14. Factorice el polinomio:

a) $rs + 4st$

b) $9x^2y^2 - 36z^6$

c) $12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2$

d) $a^3 + 27b^3 + a + 3b$

e) $m^9 - 27n^{12}$

f) $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2$

g) $x^2y^2 - 26xy + 165$

h) $x^3 + 12x^2y - 45xy^2$

i) $65 - 8xy - x^2y^2$

j) $x^4 + x^2 - 2$

k) $16z^2 - 56z + 49$

l) $z^4 - 64w^2$

m) $64x^3 - y^6$

n) $343x^3 + y^9$

ñ) $x^5 + y^5$

o) $2ax - 6bx + ay - 3by$

p) $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$

q) $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$

r) $x^4 + 2x^3 - x - 2$

s) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

t) $x^{16} - 1$

u) $10x^2 + 21x - 10$

v) $x^8 - 16y^8$

w) $x^3 - y^3 - (x^2 - y^2) + y(x - y)^2$

x) $5x^2 - 17x + 6$

y) $6x^3y + 4x^2y - 10xy$

z) $p^2 - pq - 20q^2$

15. En los siguientes ejercicios efectúe, simplifique y racionalice si es necesario.

a) $2x^2y^{-3}x^4$

b) $\frac{3}{\sqrt{u^{5/2}v^{1/2}}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}$

d) $\frac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$

e) $\sqrt[3]{x^2yz^3}\sqrt[3]{xy^2}$

f) $3^{-2}\sqrt{x^2+1}-x)^{-1}$

g) $\frac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\frac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$

h) $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}x^{-2}}{\sqrt{16}x^3}\right)^2}$

i) $\frac{1}{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}}$

j) $\frac{3}{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{x}}$

k) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}}$

16. Efectúe las operaciones y simplifique:

a) $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\left[1+\frac{ab}{(a-b)^2}\right] \div \left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]$

b) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$

c) $\frac{x^2+x-6}{x^3-8}$

d) $\frac{t^3-27}{t^3-9t}\cdot\frac{t^2+3t}{t+3}$

e) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

f) $\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15} \div \frac{x^2+6x+5}{2x^2+7x+3}$

g) $\frac{4x^2-9}{2x^2+9x-18} \div \frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$

h) $\frac{1}{x+5}-\frac{2}{x-3}$

i) $\frac{x-\frac{1}{x}}{(x+1)^2}-\frac{2}{x^2+x}$

j) $\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}+\frac{4}{b^2}$

k) $\frac{x-2}{x^2-x-2}+\frac{x+6}{x^2+5x-6}$

l) $\frac{1}{x^2+x-2}+\frac{1}{2x^2-5x+2}-\frac{1}{2x^2+5x-3}$

m) $\frac{2a^3+54b^3}{2a^2+5ab-3b^2}+\frac{8ab-19b^2}{2a-b}-a-b$

17. Simplifique las siguientes fracciones compuestas:

a) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$

b) $\frac{\frac{5}{x-1}-\frac{2}{x+1}}{\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}}$

c) $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

d) $\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

e) $\frac{\frac{4}{x^2-4}-\frac{2}{x(x-2)}}{\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}}$

f) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

g) $\frac{x-\frac{1}{x}}{(x+1)^2}-\frac{2}{x^2+x}$

h) $\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

i) $\frac{2-4x}{4x-2-\frac{4x}{1+\frac{\frac{1}{2x-1}}{1+\frac{1}{4x-1}}}}$

18. Utilice la división larga para dividir $f(x)$por $g(x)$. Escriba la respuesta en la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ donde $q(x)$es el cociente y $r(x)$ es el residuo.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 7;\ g(x) = x + 8$

b) $f(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{2}{3}x^2 + 5x - 3;\ g(x) = x - \frac{2}{3}$

c) $f(x) = x^5 + y^5;\ g(x) = x + y$

d) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1;\ g(x) = x^2 + x - 1$

e) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5;\ g(x) = (x - 2)^2$

f) $f(x) = 5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4;\ g(x) = x - 1$

g) $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + x - 8;\ g(x) = x - 3$

h) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 4;\ g(x) = x^2 + x + 1$

i) $f(x) = 6x^5 + 10x^3 - 7x^2 + x + 1;\ g(x) = 2x^2 + 3x + 1$

j) $f(x) = x^8 - x^5 + x^4 + x^2 - x + 1;\ g(x) = x^3 - x^2 - x - 3$

k) $f(x) = x^3 + 8;\ g(x) = x^2 - x - 1$

l) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5;\ g(x) = x - \frac{3}{2}$

m) $f(x) = x^4 + 30x + 12;\ g(x) = 2x + 6$

19. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $18x^2 - 9x + 4 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^6 - 4x^3 + 4 = 0$

d) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

e) $x^2 - 2\sqrt{3x} + 2 = 0$

f) $-5x^2 + x + 6 = 0$

g) $ax^4 + bx^2 + c = 0$

20. Halle, sin hacer división, el residuo de dividir $f(x)$ por el polinomio lineal dado.

a) $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{3}x + 5;\ x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5;\ x - 3$

c) $f(x) = 4x^2 - 9x + 7;\ x - \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5;\ x - 1$

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6;\ x + \frac{2}{3}$

f) $f(x) = 4x^2 - 2x + 9;\ x + \frac{5}{2}$

g) $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x + 1;\ x - 4$

21. Determine si el polinomio lineal dado es un factor de $f(x)$.

a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 25;\ x - 5$

b) $f(x) = 10x^2 - 27x + 11;\ x + 1$

c) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 6x - 8;\ x + \frac{3}{5}$

d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8;\ x - 1$

22. Usando la división sintética, halle el cociente y el residuo de dividir:

a) $5x^4 + 3x^2 - 5$ entre $x - \frac{1}{2}$

b) $x^5 + 10x^2 + 5x + 2$ entre $x + 5$

c) $3x^3 - x^2 + x + 2$ entre $x - 3$

d) $x^3 + 9x - 1$ entre $x + 1$

e) $9x^5 + 54x^2 + 4$ entre $x + 4$

f) $12x^3 + 4x^2 - 15x - 5$ entre $x + \frac{1}{3}$

g) $6x^3 - 3x^2 - 8x + 4$ entre $x - \frac{1}{2}$

h) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ entre $x - 3$

23. Utilice el teorema del residuo, del factor y de los ceros racionales para factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{R}$.

a) $p(x) = x^6 + 5x^5 + x^4 - 25x^3 - 26x^2 + 20x + 24$

b) $q(x) = 2x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 15x + 9$

c) $p(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$

d) $f(x) = 3x^4 - 13x^3 + 3x^2 + 37x - 30$

e) $f(x) = 6x^3 - 35x^2 + 34x + 40$

f) $f(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 2$

g) $r(x) = x^3 - 8x^2 + x + 42$

h) $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

i) $f(x) = (3x^3 + 2x^2)(2x - 5)^3$

24. Verifique las siguientes identidades.

a) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \equiv 1$

b) $\left(p - \frac{p}{2}\right)\left(p - \frac{p}{3}\right)\left(p - \frac{p}{4}\right)\left(p - \frac{p}{5}\right)\left(p - \frac{p}{6}\right) \equiv \frac{p^5}{6}$

c) $\left[\frac{B+\frac{A-B}{1+AB}}{1-\frac{AB-B^2}{1+AB}} - \frac{A-\frac{A-B}{1-AB}}{1-\frac{A^2-AB}{1-AB}}\right] \div \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right) \equiv \frac{AB}{A+B}$

d) $\frac{(m+n+p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{p}{mn}\right)}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{p^2}{m^2n^2}\frac{2}{mn}} \equiv mn$

25. Encuentre la descomposición en fracciones parciales.

a) $\frac{8x-1}{(x-2)(x+3)}$

b) $\frac{x+34}{x^2-4x-12}$

c) $\frac{5x-12}{x^2-4x}$

d) $\frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}$

e) $\frac{37-11x}{(x-1)(x^2-5x+6)}$

f) $\frac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}$

g) $\frac{2x^3+2x^2+4x-3}{x^4+x^2}$

h) $\frac{x^5-5x^4+7x^3-x^2-4x+12}{x^3-3x^2}$

i) $\frac{2x^2+7x}{x^2+6x+9}$

j) $\frac{3x^3+13x-1}{(x^2+4)^2}$

Algunas respuestas

1.

a) F

c) V

e) F

g) V

i) F

k) V

n) V

o) F

q) V

2.

a) F

c) V

e) V

g) F

i) F

k) F

m) F

4.

a) 2^5

c) $\frac{x^8}{y^{17}}$

e) $\frac{a^{21}}{b^{20}}$

g) $\frac{w^6 s^9}{y^6}$

i) 1

k) $\frac{3^2}{x^6 y^8}$

5.

a) 12

c) 10/3

e) 9/16

g) $-2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2}$

i) $\frac{9t^2}{4}$

k) $\frac{\sqrt[4]{x}}{2}$

m) $\frac{b^2-a}{b^2+a}$

6.

a) $\frac{x^3}{y^2 z^2}$

c) $\frac{5}{m^9}$

e) $\frac{w^8}{u^8 v}$

g) $\frac{1}{x^{4/5} y^{13/5}}$

7.

a) $3(\sqrt[3]{2})^2$

c) $2\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{2x}}{x}$

g) $\frac{\sqrt{3xy}\sqrt[4]{x^2y}}{xy}$

i) 1

k) $3(x^2+y^2)(\sqrt[5]{x^2-y^2})^4$

8.

a) $11x-2y-3$

c) $2\sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z}$

e) u^2-u-6

g) $3x^3+2x-\frac{1}{2x^2}$

i) $z-18$

11.

a) x^2-4x+4

e) $16a^2b^4+40a^3b^3+25a^4b^2$

h) $4a^2+b^2-c^2-4ab$

j) x^4-16y^4

l) x^2-x-20

ñ) $4x^2-y^2+6y-9$

r) $1-9a^2x^2$

v) $8x^3-25y^3$

y) x^3+8y^3

12.

a) $16x^4-160x^3y+600x^2y^2-1000xy^3+625y^4$

d) $243a^5+1620a^4b+4320a^3b^2+5760a^2b^3+3840ab^4+1024b^5$

13.

a) $\sqrt{x+4}-2$

c) $2(4+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})$

e) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$

g) $\frac{x^{2/3}-\sqrt[3]{xy}+y^{2/3}}{x+y}$

i) $\left(3\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)(9x+4y)$

14.

a) $s(r+4t)$

c) $(3a-b)(4a-x^2)$

e) $(m^3 - 3n^4)(m^6 + 3m^3n^4 + 9n^8)$

g) $(xy - 15)(xy - 11)$

i) $(-x + 5)(x + 13)$

l) $(z^2 - 8w)(z^2 + 8w)$

n) $(7x + y^3)(49x^2 - 7xy^3 + y^6)$

p) $5(x + 2)^2(x - 2)$

s) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

t) $(2x + 5)(5x - 2)$

z) $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

15.

a) $\frac{2x^6}{y^3}$

e) xyz

g) x^8

i) $\frac{(\sqrt[3]{y})^2 - \sqrt[3]{xy} + (\sqrt[3]{x})^2}{x+y}$

16.

a) $\frac{a^2b^2}{a-b}$

c) $\frac{x+3}{x^2+2x+4}$

e) $\frac{2x+y}{x-2y}$

g) 1

i) $\frac{x-3}{x(x+1)}$

k) $\frac{2x}{x^2-1}$

m) $\frac{ab}{2a-b}$

17.

a) $\frac{2x+3}{x+2}$

c) $-\frac{x-y}{xy}$

e) $\frac{2x-4}{x^3+x^2+2x}$

g) $\frac{x-3}{x(x+1)}$

i) $8x^2 - 1$

18.

a) $(x + 8)(x - 4) + 25$

c) $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

f) $(x - 1)(5x^5 + 4x^4 + 14x^3 + 14x^2 + 17x + 15) + 19$

h) $(x^2 + x + 1)(2x^2 - x - 4) + 8$

j) $(x^3 - x^2 - x - 3)(x^5 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 11x + 22) + 49x^2 + 54x + 67$

n) $(2x + 6)\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{2} + \frac{3}{2}\right) + 3$

19.

a) No tiene raíces reales

c) $x = \sqrt[3]{2}$

e) $x = \sqrt{3} \pm 1$

20.

a) $\frac{55}{3}$

c) $\frac{7}{2}$

e) $\frac{82}{27}$

g) 5369

21.

a) No es factor

c) No es factor

22.

a) Cociente $5x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{17}{4}x + \frac{17}{8}$, Residuo $-\frac{63}{16}$

c) Cociente $3x^2 + +8x + 25$, Residuo 72

e) Cociente $9x^4 - 36x^3 + 144x^2 - 522x + 2088$, Residuo -8348

g) Cociente $6x^3 - 8x$, Residuo 0

23.

a) Ceros $x = -3, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}$

c) Ceros $x = -\frac{5}{3}, 1, 2, 3$

e) Ceros $x = -\frac{1}{2}, 1, \pm\sqrt{2}$

g) Ceros $x = -\frac{3}{2}, 0$

i) Ceros $x = -3, \pm 2, \pm 1$

24.

a) $\frac{8x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-2}$

c) $\frac{5x-12}{x^2-4x} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-4}$

e) $\frac{37-11x}{(x-1)(x^2-5x+6)} = \frac{4}{x+1} + \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x-2}$

g) $\frac{2x^3+2x^2+4x-3}{x^4+x^2} = \frac{5-2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}$

i) $\frac{2x^2+7x}{x^2+6x+9} = 2 - \frac{5}{x+3} - \frac{3}{(x^2+4)^2}$

Parte 4. Funciones y sus gráficas

Introducción

Prácticamente en todos los fenómenos económicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso, la demanda de un bien depende de su precio. Todos estos son ejemplos de funciones. El concepto más importante en todas las matemáticas es el de función.

Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, una relación entre estos dos subconjuntos es un conjunto de pares ordenados de la forma (x, y) con $x \in X \wedge y \in Y$. El conjunto X es dominio de la relación y el conjunto Y es el recorrido (rango).

Ejemplo 16.1

Sean

$x = \{2,4,6,8,10\}$

$y = \{1,2,3,4,5\}$

Una relación entre x y y puede ser:

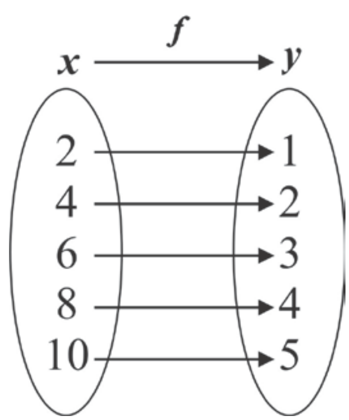


Figura 16.1. Diagrama de flechas.

La relación f está formada por los pares ordenados:

$\{(2,1); (4,2); (6,3); (8,4); (10,5)\}$

En este ejemplo la relación se puede definir como:

$y = f(x) = \frac{x}{2}$, con $x = 2, 4, 6, 8, 10$

Y se observa que a cada $x \in X$ le corresponde un único $y \in Y$. En este caso se dice que la relación es una función, de modo que se escribe $y = f(x)$. La variable x se denomina variable independiente y la variable y se conoce como la variable dependiente. En términos sencillos, una función es un tipo especial de relación que expresa cómo una cantidad —la salida (y)— depende de otra cantidad —la entrada (x)—.

Esquemáticamente una función se entiende de la siguiente forma. La función es una máquina que a cualquier $x \in \mathbb{R}$ le hace el proceso f.

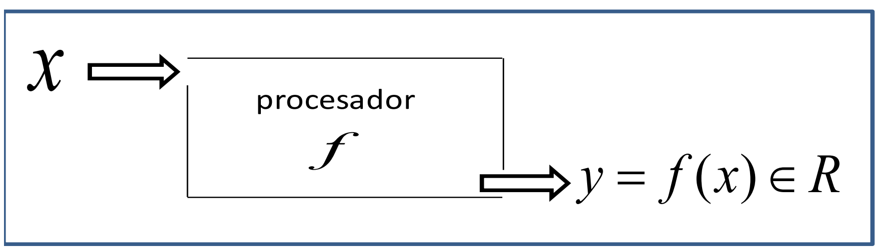


Figura 16.2. Diagrama de caja negra.

Para expresar la dependencia de y con respecto a x, se especifica una fórmula que muestra lo que debe hacerse con la entrada para obtener la salida, y se denota así:

$y = f(x)$.

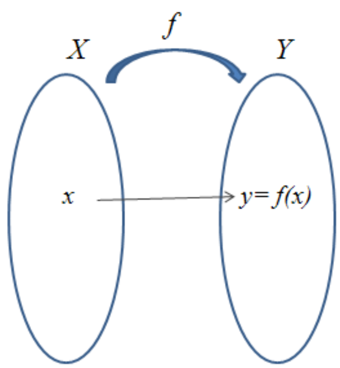
Ejemplo 16.2

Si una cantidad de dinero $A = 1000$ se deposita al 5% de interés anual durante t años, entonces la cantidad después de los t años completos será $K = 1000\left[1 + \frac{5}{100}\right]^{t}$. Así, para cada valor de t hay uno de K, por lo que se dice que K es una función de t y se escribe: $K = f(t)$.

16. “Función real de variable real”

Sean Xe Y dos conjuntos de números reales. Una *función real f de una variable real$x$* es una regla o correspondencia que asigna a cada número x de X un único número real y de Y, que se denota como $y = f(x)$.

En forma esquemática tenemos:



$$f: X \to Y$$
$$x \to y = f(x)$$

Figura 16.3. Forma esquemática de una función.

En la ecuación que define una función, el papel de la variable x es simplemente un hueco por llenar. Por ejemplo, la función definida por la fórmula:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} + 4x^3 - 100$

Puede describirse como:

$$f(\square) = \sqrt{\square^2 - 3\square} + 4\square^3 - 100$$

Para evaluar $f(3)$, basta colocar 3 en $\square$ y operar. Entonces,

$f(3) = \sqrt{3^2 - 3(3)} + 4(3)^3 - 100 = 8$

En general las letras f, g, h, w, etc., se utilizan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación $y = 2x + 1$ define a y como una función de $x$en este caso, la regla es multiplicar cada x por 2 y luego sumar uno. Lo anterior se suele indicar como:
$y = f(x) = 2x + 1$.

Una función puede expresarse de manera verbal, sagital, por parejas, gráficamente o por una formula o ecuación, las dos últimas son las que más se utilizan.

Observación: Cuando se hace referencia a la función f también nos estamos refiriendo a la ecuación que describe la función o a la gráfica de ella. Por lo tanto, se hará referencia indistintamente a la función f, la ecuación $y = f(x)$ o a la gráfica de ella.

Ejemplo 16.3

Sea$g(y) = \frac{4}{y^2 - y}$. Obtener $g(2), g(-2), g(-1)$.

Solución:

$$g(2) = \frac{4}{2^2 - 2} = \frac{4}{4 - 2} = 2$$

$$g(-2) = \frac{4}{(2)^2 - (-2)} = \frac{4}{4 + 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$g(-1) = \frac{4}{(-1)^2 - (-1)} = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

Ejemplo 16.4

Sea $f(x) = x^{4/3}$. Obtenga $f(0)$, $f(64)$,$f(1/8)$

Solución:

$f(0) = 0^{4/3} = 0$

$f(64) = 64^{4/3} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{4^3}\right)^4 = 4^4 = 256$

$f(1/8) = (1/8)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{1/8}\right)^4 = (1/2)^4 = 1/16$

Ejemplo 16.5

Sea $f(x) = x^2 - 2x$, determine $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y simplifique.

Solución:

Dada $f(x) = x^2 - 2x$ se tiene que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^2 - 2(x+h)] - [x^2 - 2x]}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h - x^2 + 2x}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2 - 2h}{h} = \frac{h(2x + h - 2)}{h} = 2x + h - 2$$

Ejemplo 16.6

Sea $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$, determine $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$

Solución:

Como $x = 1$ entonces $f(x) = x \to f(1) = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ pues $\frac{1}{2} < 1$

$f(2) = 2^2 = 4$ pues $2 > 1$

Ejemplo 16.7

Un negocio con un capital original de \$20000 tiene ingresos y gastos semanales de \$4000 y \$3200 respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio, exprese el valor V del negocio al final de t semanas como una función de t.

Solución:

El valor V del negocio se puede expresar como la suma del valor inicial más las utilidades semanales. Como los ingresos semanales son \$4000 y los gastos son \$3200, entonces las utilidades semanales son $4000 - 3200 = 800$. Por lo tanto, el valor del negocio después de t semanas es

$V = \text{Valor inicial} + \text{Utilidad semanal} \times \text{Número de semanas}$

Esto es,

$V(t) = 20000 + 800t$

16.1. Dominio y rango de una función

El conjunto X se llama dominio de f. El número y de Y se denomina imagen de x bajo f y se denota como $y = f(x)$. El recorrido de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X.

Observación: El dominio de una función lo entendemos como el conjunto de valores que puede tomar x para que la expresión $y = f(x)$ tenga sentido.

El dominio de f denotado como D_f es el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que hacen que $y = f(x)$ sea un número real. Esto es,

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/ y = f(x) \in \mathbb{R}\}$

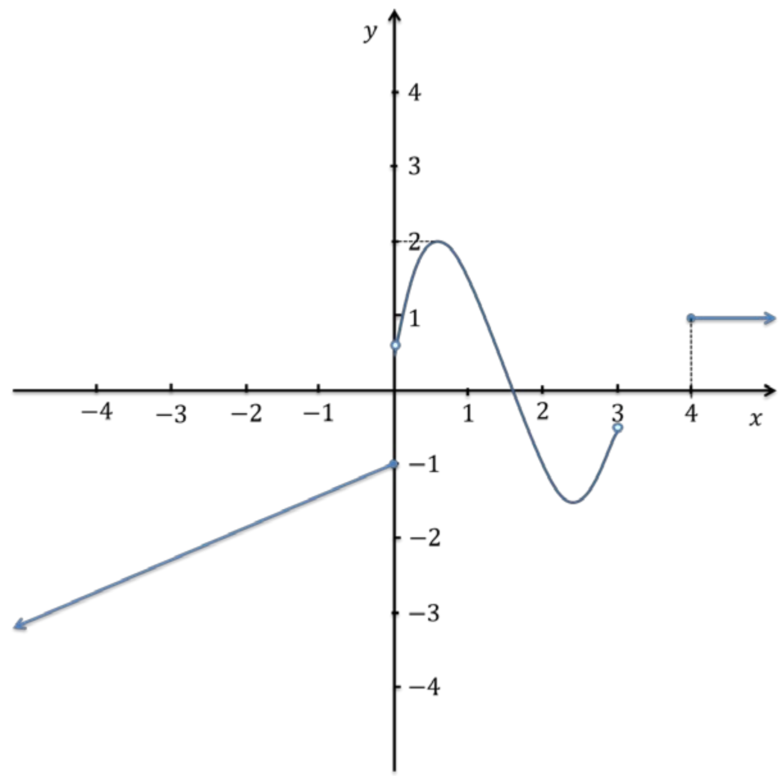
La expresión $y = f(x)$ se conoce como la imagen de x bajo f. El conjunto de todas las imágenes en el recorrido de f lo denotamos como R_f. Esto es,

$R_f = \{y \in \mathrm{Y} / \; y = f(x)\}$

Nota: Para hallar el dominio de una función f se deben excluir del dominio los números reales que causen división por cero o raíces de índice par de un número negativo.

Ejemplo 16.8

Hallar dominio y rango de una grafica:



El dominio de la función sería: $(-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$

El rango de la función sería $(-\infty; 2)$

Ejemplo 16.9

Determine el dominio para las siguientes funciones:

a. $\mathrm{h}(x) = \frac{x+2}{2x-3}$

b. $g(x) = \sqrt{5x+1}$

c. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2-25}}$

Solución:

a. Como $x = 3/2$ causa una división por cero, se debe excluir del dominio de la función por tanto $D_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 3/2\}$

b. Para evitar una raíz cuadrada de un número negativo se debe cumplir que

$$5x + 1 \geq 0 \rightarrow 5x \geq -1 \rightarrow x \geq -1/5$$

Así el dominio de $g(x)$ está dado por $D_g = \{x \in R/x \geq -1/5\}$ o en notación intervalo $D_g = [-1/5\,,\infty]$

c. Para que $f(x)$ tenga sentido en el conjunto de los números reales se requiere que la cantidad subradical sea no negativa. Esto es, se requiere que $\frac{1-x}{x^2-25} \geq 0$. Por lo tanto,

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{1-x}{x^2-25} \geq 0\right\}$$

Entonces, para encontrar el dominio de la función f hay que resolver la desigualdad $\frac{1-x}{x^2-25} = \frac{1-x}{(x+5)(x-5)} \geq 0$; para ello procedemos así;

Signos de $1 - x$

$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Signos de $x + 5$

$x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5 \wedge x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$

Signos de $x - 5$

$x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5 \wedge x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$

El diagrama de signos es el siguiente:

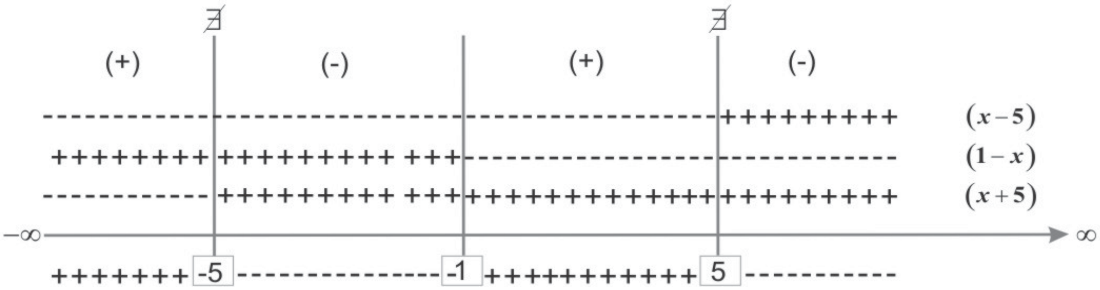


Figura 16.4. Método del cementerio.

Como el dominio es el conjunto de valores de x para los que el producto es no negativo, entonces:

$$D_f = (-\infty; -5) \cup [1; 5)$$

En la determinación del dominio de una función también es necesario tener en cuenta las restricciones sobre la variable independiente x.

Ejemplo 16.10

Hay que construir una caja abierta con un trozo rectangular de cartulina con 16 pulgadas de largo y 10 de ancho, cortando cuadrados idénticos de x pulgadas de lado en cada esquina y doblando las solapas resultantes. Encuentre el volumen de la caja en función de x. ¿Cuál es el dominio de la función?

Solución:

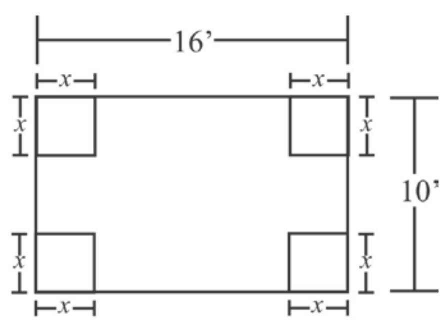


Figura 16.5. Esquema de caja ejemplo 16.10.

Si el largo de la pieza rectangular es de 16 pulgadas y cortamos x pulgadas a cada lado, entonces el largo de la base de la caja es $l = 16 - 2x$; así mismo, como el ancho es 10 pulgadas, entonces al cortar x pulgadas a cada lado se obtiene que el ancho de la base de la caja es $a = 10 - 2x$. Además, al doblar las solapas, el alto de la caja es de x pulgadas. Por lo tanto, el volumen de la caja es:

$V = V(x) = \text{largo}\times\text{ancho}\times\text{alto} = (16 - 2x)(10 - 2x)x$

Como la longitud de cada lado de la caja debe ser mayor que cero, entonces se requiere que:

$x > 0 \wedge 16 - 2x > 0 \wedge 10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 8 \wedge x < 5$

Las tres condiciones anteriores se satisfacen de manera simultánea siempre que $0 < x < 5$. Por lo tanto, el dominio de la función es el intervalo $(0; 5)$.

Ejemplo 16.11

Sea $y = \sqrt{2x - 1}$

a. Encuentre: $f(1), f(0), f(3), f(-2), f(5), f(2a), f(x^2)$.

b. Encuentre: D_f y R_f.

c. Trace la gráfica de f.

Solución:

a.

$f(1) = \sqrt{2(1) - 1} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$

$f(0) = \sqrt{2(0) - 1} = \sqrt{-1}$. Valor que no pertenece a los números reales $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$f(3) = \sqrt{2(3) - 1} = \sqrt{6 - 1} = \sqrt{5}$

$f(-2) = \sqrt{2(-2) - 1} = \sqrt{-4 - 1} = \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$

$f(5) = \sqrt{2(5) - 1} = \sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3$

$f(2a) = \sqrt{2(2a) - 1} = \sqrt{4a - 1}$

$f(x^2) = \sqrt{2(x^2) - 1}$

b. Para encontrar el dominio de la función debemos saber que solo puede sacarse una raíz para números positivos y al cero, por tanto:

$2x - 1 \geq 0$ resolviendo esta desigualdad lineal, se tiene:

$$2x \geq 11$$

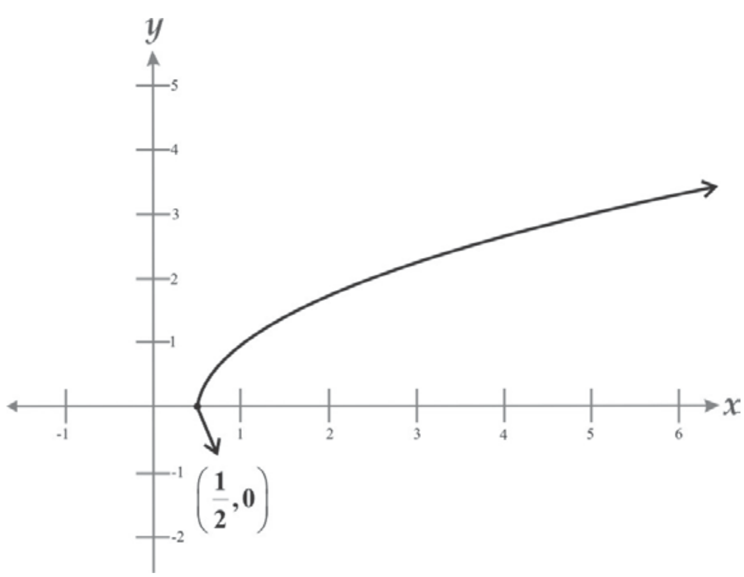
$x \geq \frac{1}{2} \rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Por tanto $D_f = x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Para el rango de la función debe considerarse que el resultado de la raíz será positivo o cero por lo que su recorrido será:

$R_f = y \in [0; +\infty)$

c.



x	y
½	0
1	1
5	3
13	5

Figura 16.6. Gráfica de la función del ejemplo 16.11.

Ejemplo 16.12

Sea $y = f(x) = 2x^2 - 1$.

a. Encuentre:$f(0), f(1), f(-1), f(2), f(-2), f(2a), f(\sqrt{x})$

b. Encuentre: D_f yR_f

c. Trace la gráfica de f

Solución:

a.

$f(0) = 2(0)^2 - 1 = -1$

$f(1) = 2(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(2) = 2(2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$

$f(2a) = 2(2a)^2 - 1 = 2(4a^2) - 1 = 8a^2 - 1$

$f(\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x})^2 - 1 = 2x - 1$

b. Por ser una función polinómica cuadrática, el dominio son todos los reales $D_f: x \in \mathbb{R}$. Para encontrar el recorrido (rango) hay que considerar dos cosas, la primera es su vértice que ocurre en $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ entonces $f\left(\frac{-0}{2(2)}\right) = f(0) = 2(0) - 1 = f(0) = -1$; la segunda es que como $a = 2 > 0$ la parábola abre hacia arriba y por tanto el recorrido es:

$R_f: y \in [-1; +\infty)$

c.

x	y
0	-1
1	1
-1	1
2	7
-2	7

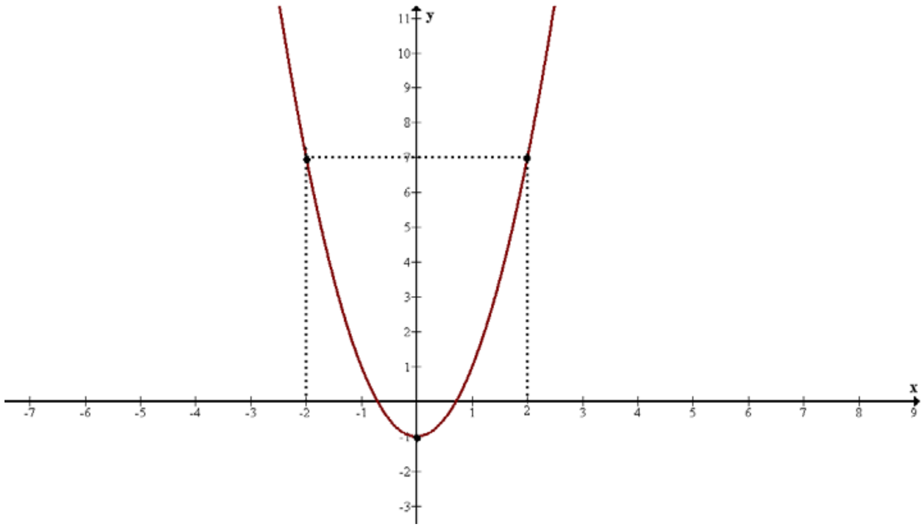


Figura 16.7. Gráfica de la función ejemplo 16.12.

Interceptos eje $x \rightarrow y = 0$:

$2x^2 - 1 = 0$

$\left(\sqrt{2}x + 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right) = 0$

$\Longrightarrow \sqrt{2}x - 1 = 0$ ó $\sqrt{2}x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ó $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Racionalizando se tiene que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ó$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Así, los interceptos con el eje x son los puntos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ y $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Interceptos eje $y \rightarrow x = 0$

$y = -1$ y el intercepto es $(0; 1)$.

Se observa que para el ejemplo 10 $f(2) = f(-2)\ \forall x \in \mathbb{R}$, por tanto, la gráfica de $f(x)$ es simétrica con respecto al eje y. Las funciones que son simétricas con respecto al eje y se conocen como funciones pares.

Definición

La función $f(x)$ es par si y solo si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f$. En este caso la gráfica de f es simétrica con el eje y.

La función $f(x)$ es impar si y solo si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D_f$. En este caso la gráfica de f es simétrica con el origen.

Ejemplo 16.13

Sea $f(x) = |1 - x^2| + 3$

a. Exprese f sin valor absoluto.

b. Obtenga $f(-1), f(-2), f(2), f(\sqrt{x})$.

c. Obtenga D_f, R_f y determine si f es par o impar.

d. Trace la gráfica de f.

Solución:

a. $f(x) = |1 - x^2| + 3$

Debemos determinar donde $1 - x^2 \geq 0$, con el objetivo de reformular $f(x)$. Factorizando tenemos que:

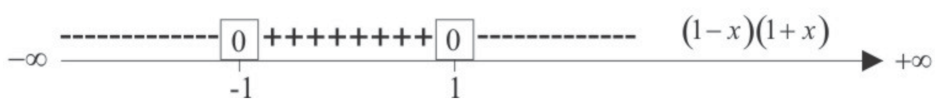


Figura 16.8. Método de los signos.

Con $\quad x = -2 \rightarrow\ +\bullet- = -$

$\quad x = 0 \rightarrow\ +\bullet+ = +$

$\quad x = 2 \rightarrow\ +\bullet+ = -$

Y por definición del valor absoluto se sigue que $|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -(1 - x^2) si x > 1 \vee x < -1 \end{cases}$

Usando esta información, tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + 3 \quad si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -(1 - x^2) + 3 \quad six > 1 \vee x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 \quad si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2 \quad six > 1 \vee x < -1 \end{cases}$$

b. $f(-1) = |1 - (-1)^2| + 3 \rightarrow f(-1) = 3$

$f(-2) = |1 - (-2)^2| + 3 \rightarrow f(-2) = |-3| + 3 = 3 + 3 = 6 \rightarrow \quad f(-2) = 6$

$f(2) = 2^2 + 2 = 6$

$f(\sqrt{x}) = \left|1 - (\sqrt{x})^2\right| + 3 \quad x \geq 0$

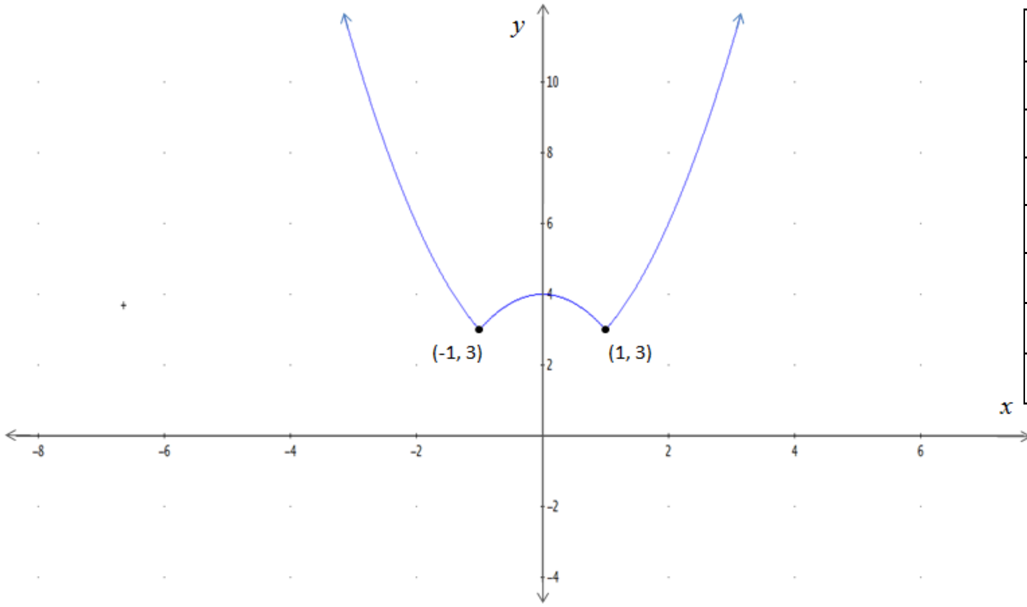
$f(\sqrt{x}) = |1 - x| + 3 \quad x \geq 0$

c. El dominio de la función son todos los reales:

$D_f: x \in \mathbb{R}$, $\quad R_f: y \in [3;+\infty)$

$f(\sqrt{x}) = |1 - (-x)^2| + 3 = |1 - x^2| + 3$ por tanto es par.

$f(-x) = |1 - (-x)^2| + 3 = |1 - x^2| + 3 = f(x)$ por tanto es par.



x	y
-3	11
-2	6
-1	3
0	4
1	3
2	6
3	11

Figura 16.9. Gráfica de la función del ejemplo 16.13.

Ejemplo 16.14

Sea $f(x) = \frac{|2-x|}{x-2}$

a. Evalúe $f(-3), f(-2), f(0), f(3), f(4)$.

b. Exprese f sin valor absoluto.

c. Obtenga D_f y R_f y determine si f es par o impar.

d. Trace la gráfica de f.

Solución:

a. $f(x) = \frac{|2-x|}{x-2}$

$$f(-3) = \frac{|2-(-3)|}{-3-2} = \frac{|5|}{-5} = -1$$

$$f(-2) = \frac{|2-(-2)|}{-2-2} = \frac{|4|}{-4} = -1$$

$$f(0) = \frac{|2-(0)|}{0-2} = \frac{|2|}{-2} = -1$$

$$f(3) = \frac{|2-3|}{3-2} = \frac{|-1|}{1} = 1$$

$$f(4) = \frac{|2-4|}{4-2} = \frac{|-2|}{2} = 1$$

b. $f(x) = \frac{|2-x|}{x-2}$ $\quad 2-x \geq 0 \rightarrow \quad -x \geq -2 \rightarrow \quad x \leq 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x-2} six < 2 \\ \frac{-(2-x)}{x-2} six > 2 \end{cases}$$

Nota: Para $f(x)$ esté definida $x \neq 2$ para evitar división por cero.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-2)}{x-2} six < 2 \\ \frac{-(-(x-2))}{x-2} six > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \quad six < 2 \\ 1 \quad six > 2 \end{cases}$$

c. $D_f: x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$R_f: y \in \{-1,1\}$

$f(-x) = \frac{|2-(-x)|}{-x-2} = \frac{|2+x|}{-x-2}$ entonces no es par ni impar.

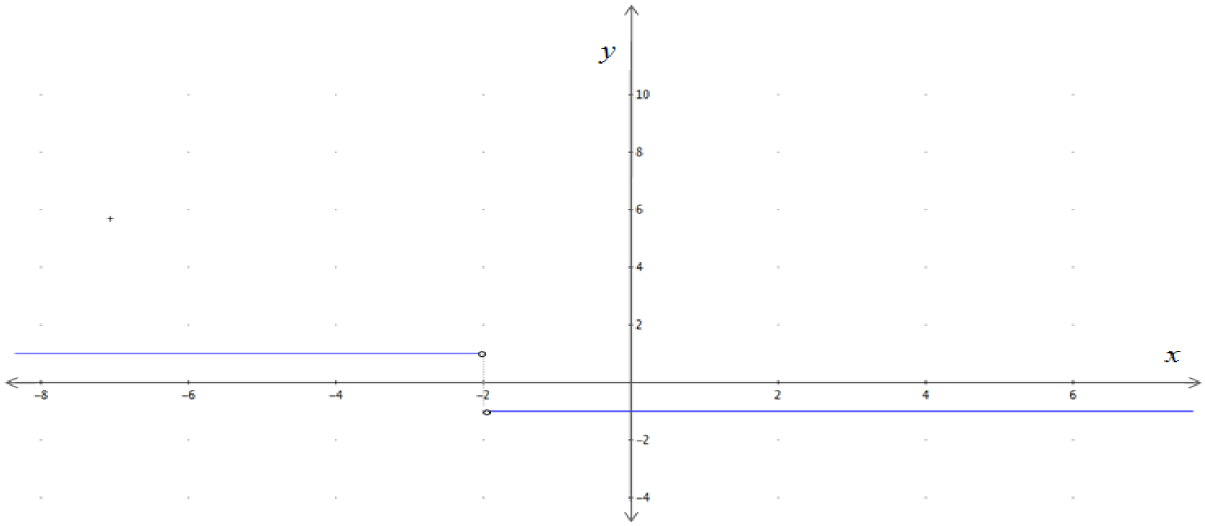


Figura 16.10. Gráfica de la función del ejemplo 16.14.

Una función $f(x)$ es uno a uno o inyectiva cuando a cada $y \in Y$ le corresponde un único x en X, es decir, $f(x)$ es uno a uno o inyectiva si dado $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

Por ejemplo, $y = f(x) = x^2$ no es uno a uno, ya que 4 es la imagen de 2 y de -2. Para determinar si una función es uno a uno podemos usar el criterio de la recta horizontal. Este criterio nos dice que una función es uno a uno si toda recta horizontal corta a la gráfica de f en un punto a lo sumo.

a. b.

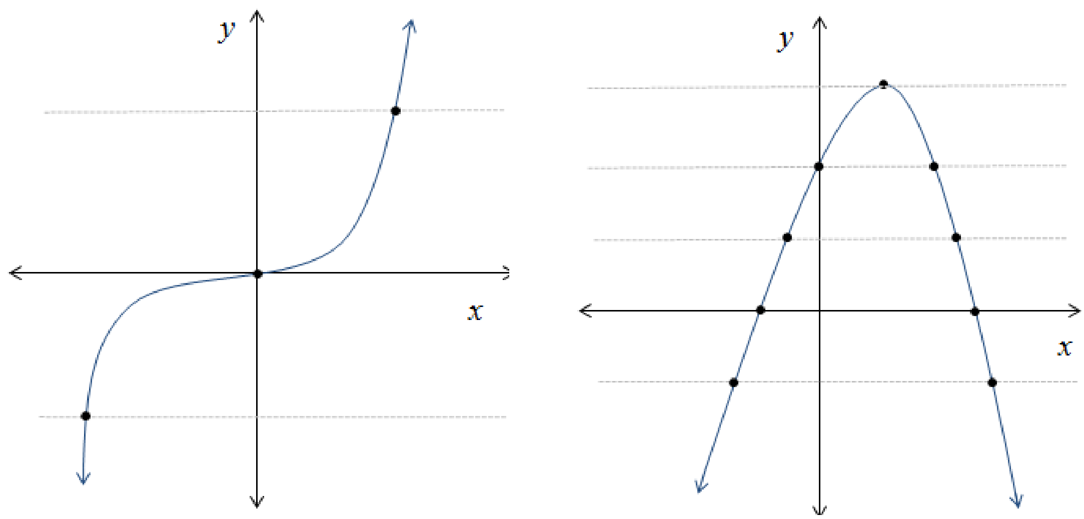


Figura 16.11 a. Función uno a uno; b. Función que no es uno a uno

Una función que es uno a uno y sobreyectiva se dice biyectiva.

16.2 Algunas funciones especiales

Introducción

En matemáticas es común que algunas funciones que poseen ciertas estructuras se utilicen con mayor frecuencia que otras; estas estructuras particulares ayudan a determinar de manera sencilla dominios e incluso nos dan una idea de cómo son sus gráficas. Es por eso que es costumbre nombrar este tipo de funciones con nombres que ayudan a distinguirlas de las demás y además nos ayudan a que otras personas con las que nos comunicamos se hagan una idea mental del tipo de función. Veamos algunas de ellas.

16.2.1 Función constante

Una función de la forma $f(x) = k$, donde k es una constante (número real).

16.2.2 Función identidad

Es una función de la forma $f(x) = x$.

16.2.3 Funciones algebraicas

Una función algebraica es aquella que se puede expresar como un número finito de sumas, productos, cocientes y raíces de potencias de x. Por ejemplo,

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$h(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 50} + \dfrac{1}{x}$

$r(x) = \dfrac{5x^2 + 7x - 9}{x^3 + x}$ $\longrightarrow$ Función racional

$g(x) = 5x^4 + 3x^2 + 100x - 50 \longrightarrow$ Función polinómica

16.2.3.1 Función polinómica

El tipo más común de función algebraica es la función polinómica.

Una *función polinómica de grado* n es una función de la forma

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}$

El dominio de una función polinómica son todos los números reales.

$f(x) = 5x^2 + 7x + 2$

$g(x) = 7x + 2$

$g(x) = 2$

16.2.3.2 Funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones polinómicas de grados n y m, respectivamente. Una función racional es una función de la forma

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$

El $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$

Ejemplo 16.15

Encuentre el dominio de la función

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 7}{2x^6 + 5x - 3x^4} = \frac{2x^3 + 5x^2 + 7}{x^4(2x-1)(x+3)}$$

Solución:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 7}{x^4(2x-1)(x+3)}$$

$$D_f = x \in \mathbb{R} - \left\{0; \frac{1}{2}; -3\right\}$$

16.2.4 Función compuesta o por tramos

En muchas situaciones es necesaria más de una expresión para definir una función. Este tipo de funciones se conocen como funciones por tramos.

Ejemplo 16.16

Grafique las siguientes funciones:

a. $y = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ si } x < 1 \\ 2x + 3 \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \\ 8 \qquad \text{ si } x > 3 \end{cases}$

b. $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x < 10 \\ -2 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$

Solución:

a. $y = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ si } x < 1 \\ 2x + 3 \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \\ 8 \qquad \text{ si } x > 3 \end{cases}$

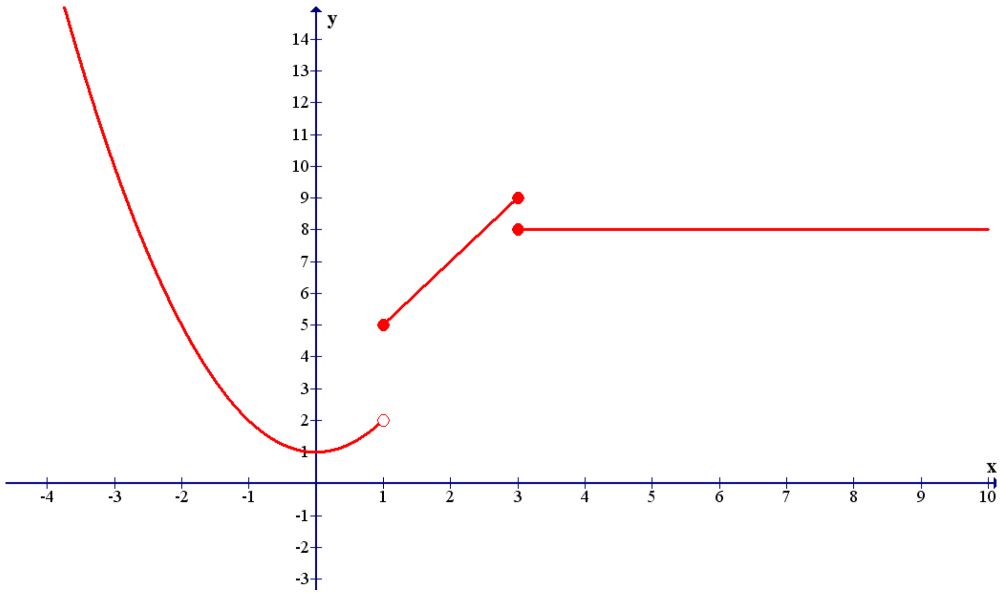


Figura 16.12 Gráfica de la función a. del ejemplo 16.16.

b. $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x < 10 \\ -2 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$

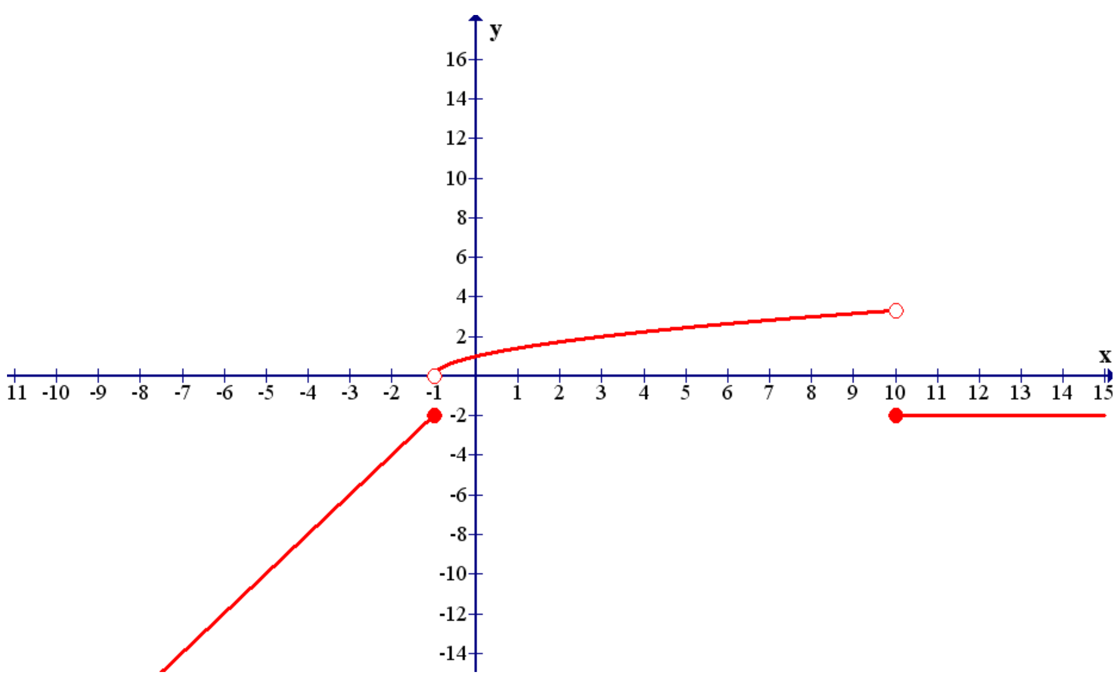


Figura 16.13 Gráfica de la función b. del ejemplo 16.16.

16.3 Aplicaciones en economía

Introducción

Con el uso de funciones es posible ir entendiendo y utilizando algunos conceptos propios de las ciencias económicas, a continuación veremos ejemplos sencillos en los cuales se usa el concepto de función

Algunos términos básicos en economía son los siguientes:

Términos básicos	Fórmulas básicas.
x: Es el número de unidades producidas (o vendidas)	
p: Precio por unidad	
I: Ingresos totales por la venta de x unidades.	$I = xp$
C: Costo total de producción de x unidades.	
B: Es el beneficio total de vender x unidades	$B = I - C$

El punto de equilibrio es el valor de x para el que $I = C$. Además, el precio unitario p también se conoce comofunción de demanda.

Ejemplo 16.17

Un restaurante de comidas rápidas calcula que la demanda mensual de hamburguesas es:

$$P = \frac{60000 - x}{20000}$$

También sabe que el costo total de producción es:

$$C = 2000 + 0.56x$$

Obtenga una expresión para los ingresos totales y para el beneficio total, y el punto de equilibrio.

Solución:

$$I(x) = Precio \cdot Cantidad$$

$$I(x) = \left(\frac{60.000 - x}{20.000}\right) \cdot x = 3x - \frac{x^2}{20.000}$$

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

$$B(x) = \left(\frac{60.000x - x^2}{20.000}\right) - (5.000 + 0{,}56x)$$

$$B(x) = \left(\frac{60.000x - x^2}{20.000}\right) - (5.000 + 0{,}56x) = 3x - \frac{x^2}{20.000} - 5.000 - 0{,}56x$$

$$B(x) = 2.44x - \frac{x^2}{20.000} - 5.000$$

Para obtener el punto de equilibrio se hace $B(x) = 0$.

Al resolver esta ecuación cuadrática se tiene que $x \approx 2143{,}32$ y $x \approx 46656{,}7$.

Ejemplo 16.18

Una compañía reembolsa a su representante de ventas US$ 150 diarios por alojamiento y comidas más 30 centavos por milla recorrida. Escriba una función lineal que exprese el costo diario c para la compañía en términos de x, el número de millas recorridas.

Solución:

Sea $c =$ Costo de la compañía y $x =$ millas recorridas, como la compañía remunera con 150 diarios independientemente de las millas recorridas, entonces el intercepto del modelo es $b = 150$ y como da $0{,}3$ por milla recorrida, entonces la pendiente es $m = 0{,}3$; por lo tanto, el modelo lineal para el costo es:

$$c = f(x) = mx + b = 0{,}3x + 150$$

Ejemplo 16.19

Un empleado dispone de dos opciones a puesto en una gran corporación. En un puesto le pagan $US 12.5 por hora más un suplemento de US$ $0{,}75$ por unidad producida. En el otro, le pagan US$ $9{,}2$ por hora más un suplemento de US$ $1{,}3$ por unidad producida.

Encuentre funciones lineales que expresen los salarios por hora W en términos de x, el número de unidades producidas por hora, para cada una de las opciones.

Represente gráficamente las funciones de los salarios y encuentre el punto de intersección de las dos funciones de salarios.
Interprete el significado del punto de intersección de las gráficas. ¿Cómo usaría esta información para seleccionar la opción correcta si su objetivo fuera obtener el mayor sueldo por hora?

Solución:
Sea $W =$ salario por hora y $x =$ unidades producidas por hora
Para encontrar funciones lineales que expresen el salario por hora en cada puesto, se procede así:

Puesto 1: Como la remuneración fija por hora es $12{,}5$ y por unidad adicional el salario se incrementa en $0{,}75$ dólares, entonces el intercepto es $b = 12{,}5$, y la pendientes es $m = 0{,}75$; por lo tanto, el salario en este puesto viene dado como:

$$w_1 = f(x) = mx + b = 0{,}75x + 12{,}5$$

Puesto 2: Como en este puesto, la remuneración fija por hora es $9{,}2$y se incrementa en $1{,}3$ dólares por unidad adicional, entonces el intercepto es $b = 9{,}2$ y la pendiente es$m = 1{,}3$; por lo tanto, el salario en este puesto viene dado como:

$$w_2 = f(x) = mx + b = 1{,}3x + 9{,}2$$

Para encontrar el punto de intersección de los salarios igualamos el salario en los dos puestos. Esto se hace así:

$$w_1 = w_2 \Leftrightarrow 0{,}75x + 12{,}5 = 1{,}3x + 9{,}2$$

$$12{,}5 - 9{,}2 = 1{,}3x - 0{,}75x$$

$$3{,}3 = 0{,}55x$$

$$x = \frac{3{,}3}{0{,}55} = 6$$

Este valor quiere decir que si se producen $x = 6$ entonces el salario será el mismo en las dos opciones de trabajo, y es:

$$w = f(6) = 1{,}3 \times 6 + 9{,}2 = 0{,}75 \times 6 + 12{,}5 = 17$$

Para la representación gráfica de estas rectas, se tiene en cuenta que las dos pasan por el punto $(6; 17)$; la primera $(0{,}12; 5)$y la segunda pasa por el punto$(0{,}9; 2)$. La gráfica de estas dos funciones está en la siguiente figura:

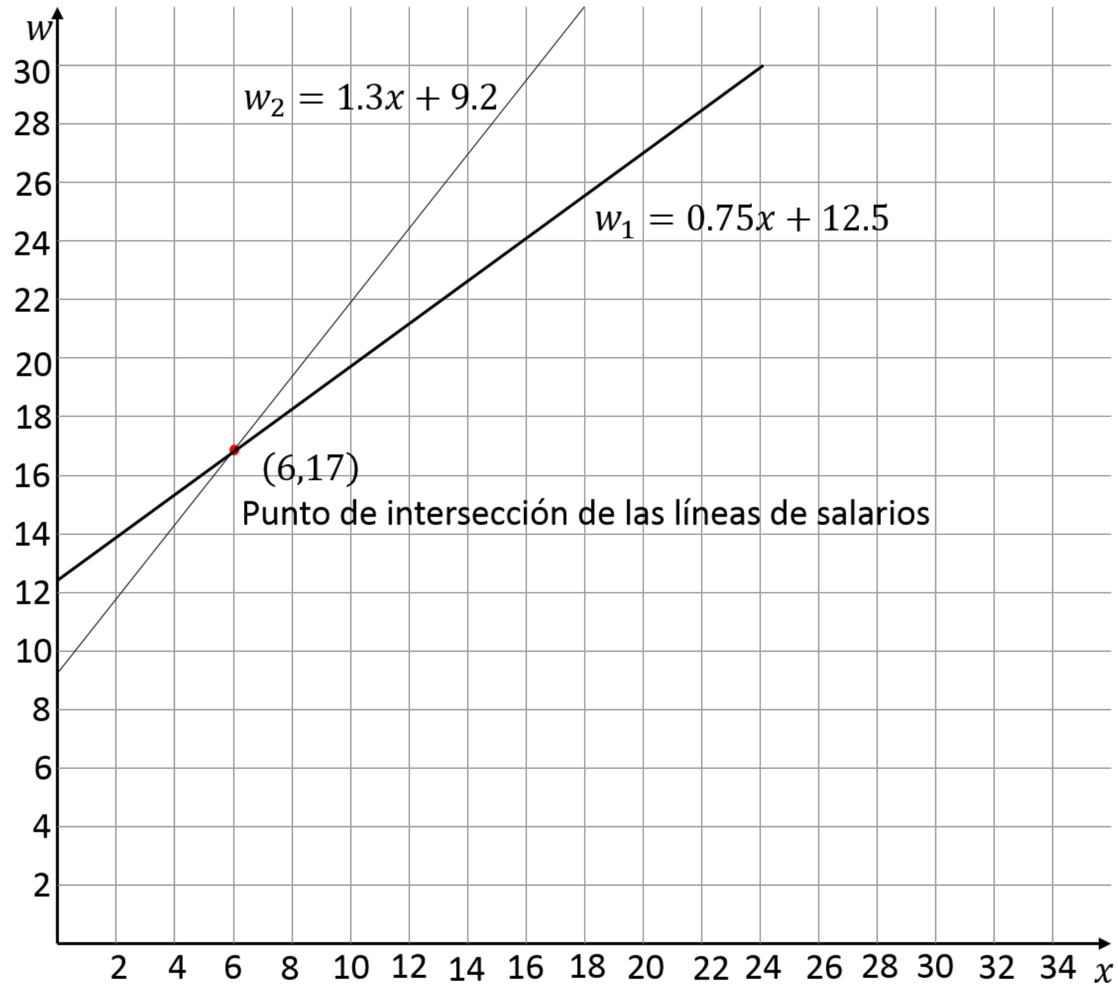


Figura 16.14. Gráfica de las funciones de los salarios.

Interpretación: El punto de intersección de los salarios es $x = 6$y $w = 17$. Esto significa que si se producen 6 unidades la hora, entonces es indiferente el puesto que se elija. Ahora, la figura anterior nos muestra que si se producen menos de 6unidades por hora, entonces es más alto el salario de la primera opción, y si se producen más de $x = 6$ unidades por hora, entonces es más conveniente la opción de trabajo2.

Ejemplo 16.20

Un fabricante puede producir grabadoras a un costo de US\$ 40 la unidad. Se estima que si las grabadores se venden a un precio de x dólares cada una, los consumidores comprarán $120 - x$ de estas al mes. Exprese el beneficio de la compañía como una función del precio unitario, dibuje la gráfica de esta función y utilícela para estimar el precio óptimo de venta, el beneficio óptimo, y determine el dominio y recorrido de esta función.

Solución:

$Beneficio = y = Ingresos - Costostotales$

Sea $x = \text{precio de venta}$, a este precio la demanda es $120 - x$. Por lo tanto los ingresos de la compañía son:

$\text{Ingresos} = x(120 - x)$

Además, como el costo unitario es de US\$ 40 dólares y las unidades fabricadas son $120 - x$, entonces el costo total de producción es:

$\text{Costos} = 40(120 - x)$

Por lo tanto, el beneficio es:

$y = x(120 - x) - 40(120 - x) = (x - 40)(120 - x) = 160x - x^2 - 4800$

La ecuación anterior corresponde a una parábola vertical que se abre hacia abajo a partir de su vértice. Para encontrar el vértice, se procede así:

$y = 160x - x^2 - 4800 \Leftrightarrow y + 4800 = -(x^2 - 160x)$

A continuación completamos el cuadrado del lado derecho. Para ello tenemos en cuenta que 160 es el doble producto, y por tanto al interior del paréntesis se suma y resta $\frac{160}{2} = 80$ al cuadrado, como se observa a continuación:

$y + 4800 = -(x^2 - 160x + 80^2 - 80^2)$

$\Leftrightarrow y + 4800 = -(x^2 - 160x + 80^2) + 80^2$

$\Leftrightarrow y + 4800 - 6400 = -(x - 80)^2$

$\Leftrightarrow y - 1600 = -(x - 80)^2$

Entonces, el vértice es $(80, 1600)$. Como la parábola se abre hacia abajo a partir del vértice, entonces podemos afirmar que en el precio $x = 80$ se produce la máxima demanda, que es 1600 unidades.

Para la representación gráfica se buscan las intersecciones con el eje x. Para ello se hace $y = 0$ en la ecuación y se obtiene:

$$0 = (x - 40)(120 - x) \Rightarrow x = 40 \ \vee \ x = 120$$

Por lo tanto las intersecciones con el eje x son: $(40, 0)$ y $(120, 0)$. La gráfica de esta ecuación es la siguiente:

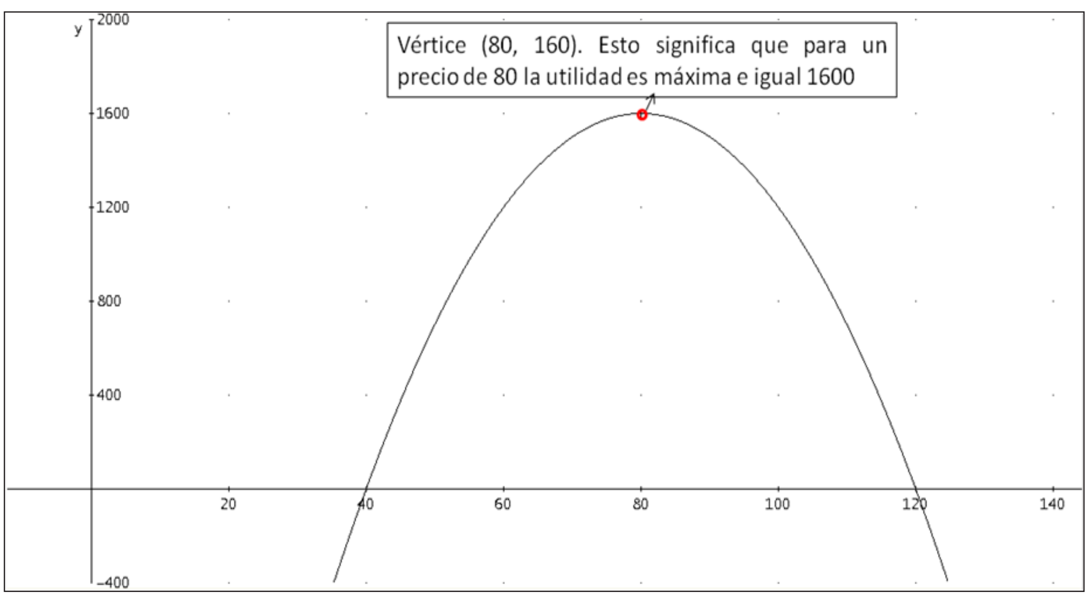


Figura 16.15. Gráfica beneficio del ejemplo 16.20.

Ejemplo 16.21

Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. Por cada máquina que un agente venda la comisión es $\$40$, y esta se incrementa en $\$0,04$ por cada máquina vendida por arriba de 600 unidades. Exprese la comisión como una función del número de unidades vendidas.

Solución:

Sea$x$ el número de unidades vendidas por un agente de ventas. Entonces,

Si vende de 600 unidades o menos, la comisión será $40x$.

Si vende más de 600 unidades, la comisión se incrementa en $0,04$por cada máquina vendida por encima de 600; entonces, en este caso la comisión será:

$40 + 0,04(x - 600)$.

Por lo tanto, la función $f(x)$ para determinar la comisión de un trabajador en término del número de unidades vendidas es:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } x \leq 600 \\ 40 + 0.04(x - 600) & \text{si } x > 600 \end{cases}$$

17. Transformaciones de funciones ($c > 0$)

Gráfica original: $y = f(x)$

Traslación horizontal c unidades a la derecha: $y = f(x - c)$

Traslación horizontal c unidades a la izquierda: $y = f(x + c)$

Traslación vertical c unidades hacia abajo: $y = f(x) - c$

Traslación vertical c unidades hacia arriba: $y = f(x) + c$

Reflexión (respecto al eje x): $y = -f(x)$

Reflexión (respecto al eje y): $y = f(-x)$

Reflexión (respecto al origen): $y = -f(-x)$

Ejemplo 17.1

Use la gráfica de la función $y = f(x) = -x^2$ para obtener la gráfica de las funciones $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = (x+1)^2$ y $l(x) = -x^2$.

Solución:

La gráfica de la función $y = f(x) = x^2$ es una parábola abierta hacia arriba, cuyo vértice es el punto $(0, 0)$ y la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ con un desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba, como se muestra en la figura 17.1.

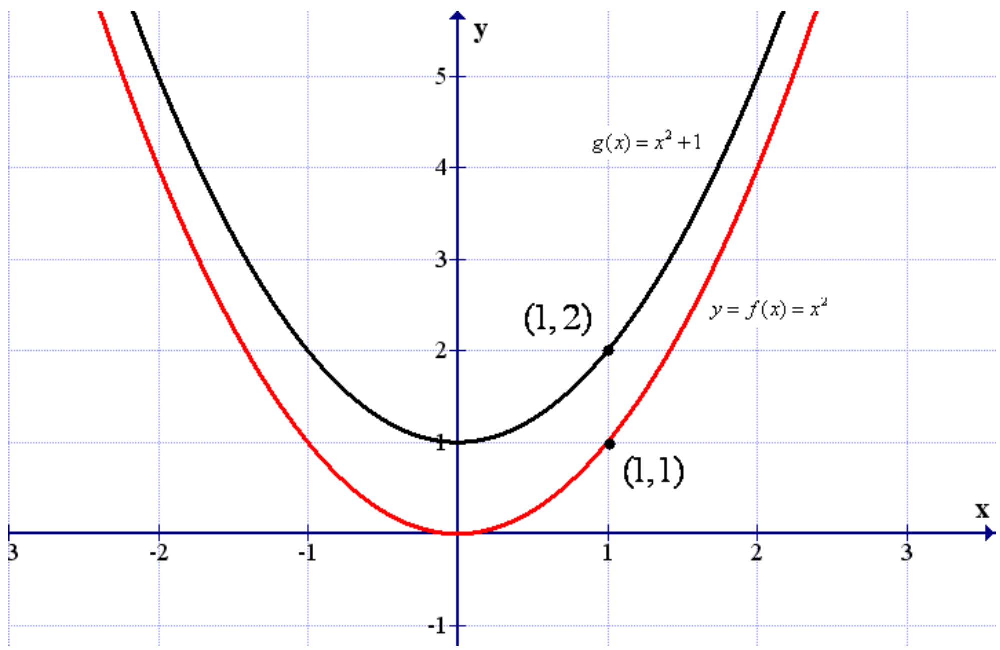


Figura 17.1. Desplazamiento vertical parábola $y = f(x) = x^2$.

Y la gráfica de $h(x)$ es la gráfica de $f(x)$ con un desplazamiento horizontal a la izquierda de una unidad, como se muestra en la figura 17.2.

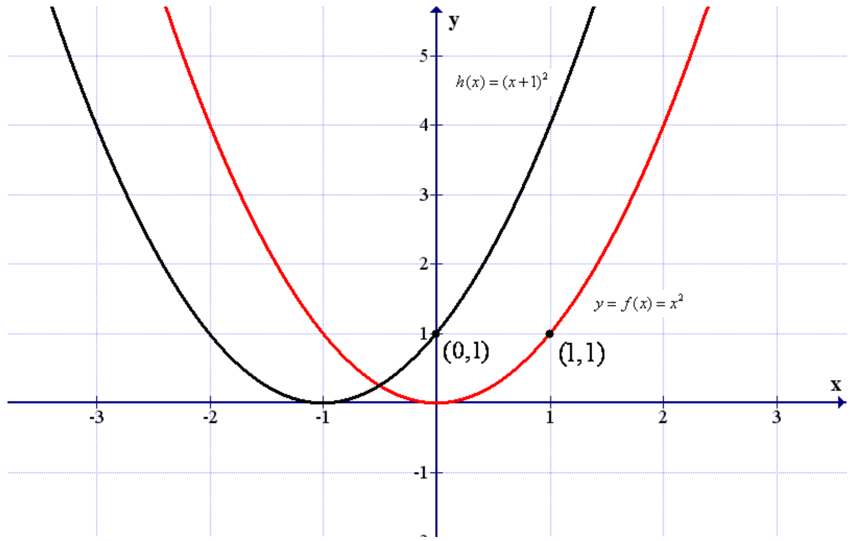


Figura 17.2. Desplazamiento horizontal parábola $y = f(x) = x^2$

La gráfica de $l(x) = -x^2$ es la reflexión con respecto al eje x de la gráfica de $y = f(x) = x^2$ (Figura 17.3).

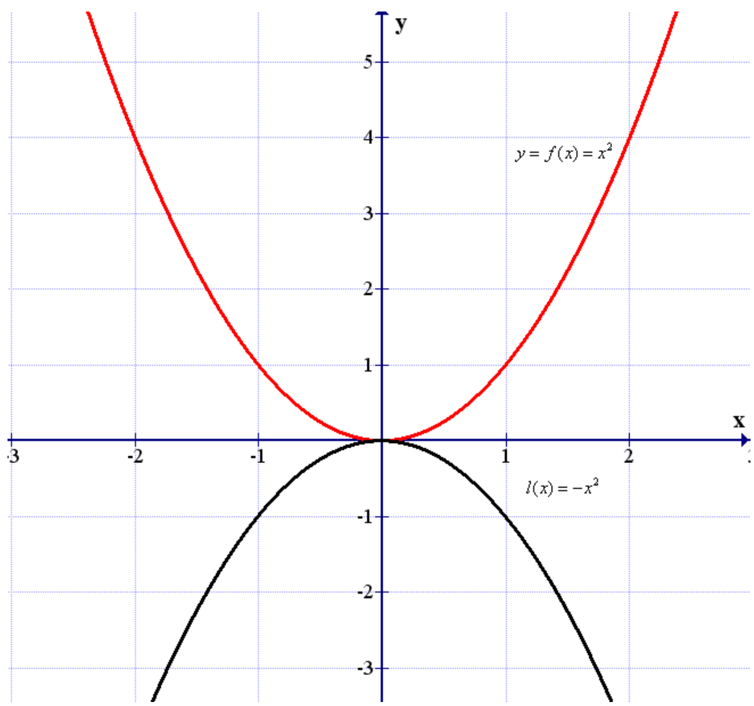


Figura 17.2 Reflexión parábola $y = f(x) = x^2$

18. Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones reales. Se definen las funciones:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{con} g(x) \neq 0$

Nota:

El $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

El $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x/g(x) = 0\}$

Ejemplo 18.1

Sean $f(x) = \sqrt{9-x^2},\ g(x) = \sqrt{x^2-1}$, detemine:

a. $(f+g)(x)$

b. $(f-g)(x)$

c. $(f \cdot g)(x)$

d. $(f/g)(x)$

y sus respectivos dominios.

Solución:

a.$(f+g)(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{x^2-1}$

b. $(f-g)(x) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{x^2-1}$

c. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{9-x^2} \cdot \sqrt{x^2-1}$

d. $(f/g)(x) = \sqrt{9-x^2} \,/\, \sqrt{x^2-1}$

El dominio de la función f es $[-3;3]$y el dominio de g es $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$.Así, el dominio de las funciones resultantes en los incisos a), b) y c) es y; para el inciso d) el denominador es cero para $x=1$ y $x=-1$; por tanto, el dominio es

$D_{\frac{f}{g}}=[-3;-1)\cup(1;3]$

19. La función compuesta

Sean f y g dos funciones. La función $(f\circ g)(x)$ se conoce como la función compuesta de f con g y se define por:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

Que es la función de f evaluada en $g(x)$; el dominio de esta función es:

$$D(f\circ g)=\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\}$$

Ejemplo 19.1
Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=2x-7$. Obtenga:

a. El dominio de estas funciones.
b. $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y f/g y sus dominios.
c. $f\circ g, g\circ f$y sus dominios.
d. Evaluar lo siguiente: $(f\circ g)(9)$, $(g\circ f)(4)$

Solución:
a. <u>El dominio de f</u>: Para que $f(x)=\sqrt{x}$ exista se requiere que $x\geq 0$; por lo tanto el dominio de esta función está formado por los reales positivos unidos con el cero; esto es, $D_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}=[0;+\infty)$

El dominio de g: Como $g(x) = 2x - 7$ es una función polinómica, entonces su dominio es el conjunto de los números reales.

b. Las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g se obtienen así:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 2x - 7$ El dominio de esta función vienen dado por $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (2x - 7) = \sqrt{x} - 2x + 7$ El dominio de esta función vienen dado por $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot (2x - 7) = 2x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = 2x^{3/2} - 7\sqrt{x}$ El dominio de esta función vienen dado por $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$

$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-7}$ El dominio de esta función vienen dado por

$D_{f/g} = \left(D_f \cap D_g\right) - \{x/g(x) = 0\} = \{[0, +\infty) \cap \mathbb{R}\} - \left\{\frac{7}{2}\right\} = [0, +\infty) - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

c. Para encontrar las funciones compuestas y sus dominios procedemos así:

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2x - 7}$ Para el dominio de esta función procedemos así:

$D_{gof} = \left\{x \in D_g / g(x) \in D_f\right\} = \{x \in \mathbb{R}/2x - 7 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 7/2\} = [7/2, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2f(x) - 7 = 2\sqrt{x} - 7$ Para el dominio de esta función procedemos así:

$D_{gof} = \left\{x \in D_f / f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \geq 0/\sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \geq 0\} = [0, +\infty)$

d. $(f \circ g)(9) = \sqrt{2 \cdot 9 - 7} = \sqrt{11}$

$(g \circ f)(4) = 2\sqrt{4} - 7 = 2 \cdot 2 - 7 = 3$

20. Funciones trigonométricas

Son funciones trascendentes, cuyo estudio requiere tener conocimientos acerca de la forma de medir ángulos y del manejo entre otros del teorema de Pitágoras.

Ángulos y sus medidas

Un ángulo consta de tres partes como se muestra en la figura 20.1

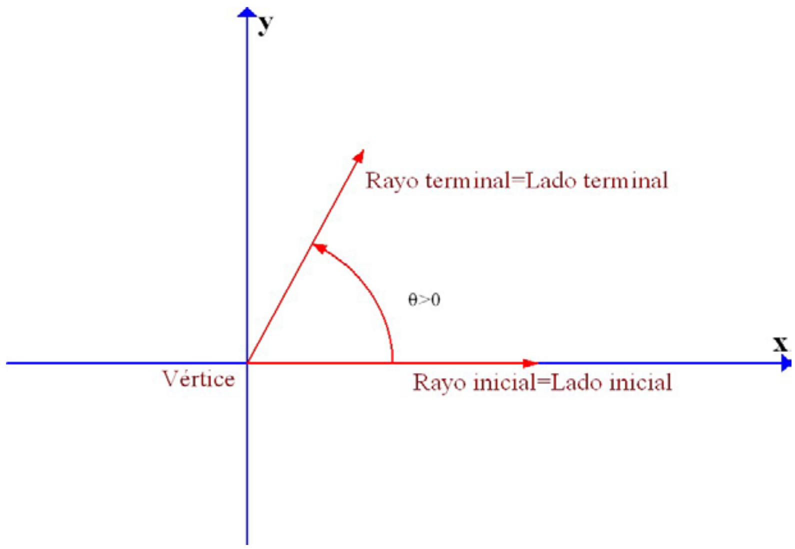


Figura 20.1. Partes de un ángulo positivo.

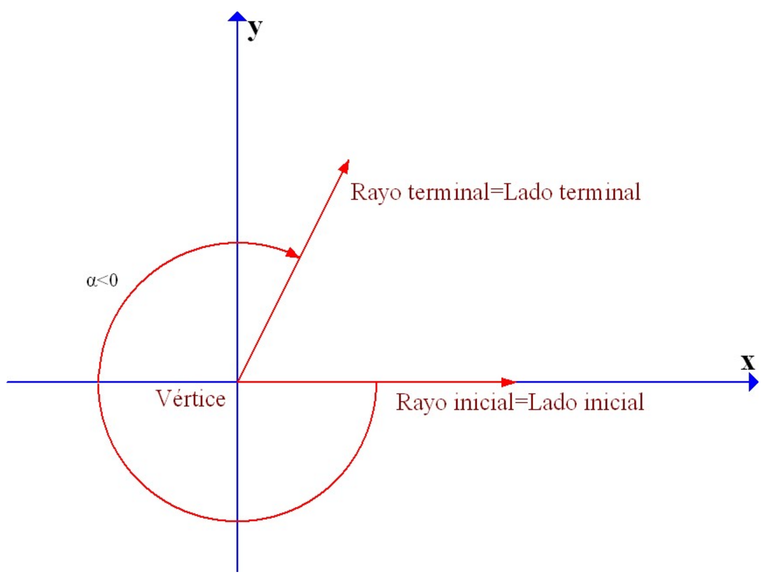


Figura 20.2. Partes de un ángulo negativo.

Un ángulo está en posición normal cuando su lado inicial coincide con el eje positivo x y su vértice con el origen. Si la orientación del ángulo es en sentido contrario a las agujas del reloj, el ángulo es *positivo;* en caso contrario es *negativo.*

De acuerdo a su medida en grados, los ángulos se clasifican como:
Agudo: Si un ángulo θ está entre $0°$ y $90°$.
Obtuso: Si un ángulo β está entre $90°$ y $180°$.
Llano: Si un ángulo es exactamente de $180°$.
Recto: Si un ángulo es exactamente de $90°$

Un giro completo corresponde a $360°$.

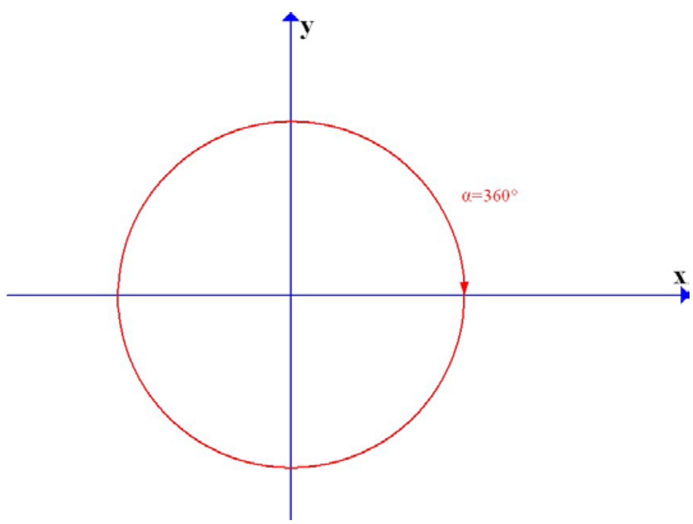


Figura 20.3 Ángulo $360°$.

Los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = -330°$ son coterminales.

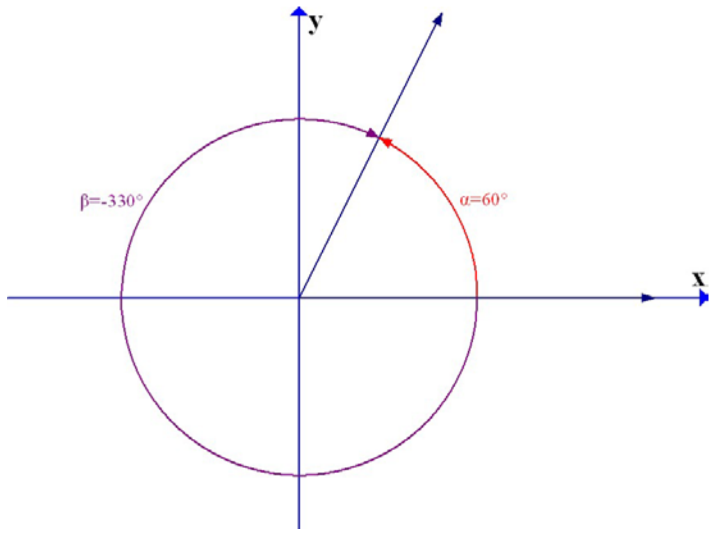


Figura 20.4 Ángulos coterminales.

Un ángulo mayor de 360° grados es aquel cuyo lado terminal ha girado más de una vuelta en el sentido de las agujas del reloj.

Medidas en radianes

Los grados, minutos y segundos sirven para medir ángulos, aunque esta es una medida arbitraria inventada por los babilonios.

La unidad de medida natural de un ángulo es el RADIAN.

Se puede observar en la figura que a medida que el ángulo θ crece, el arco α también crece, lo que significa que hay una relación directa entre la medida del ángulo en radianes y en grados.

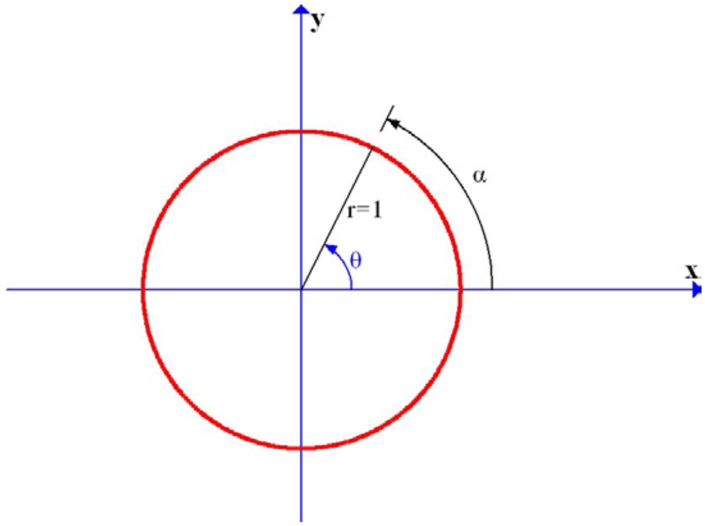


Figura 20.5 Ángulos en radianes y grados.

La medida del ángulo en radianes se define como la longitud del que subtiende sobre la circunferencia es α de radio r, entonces la medida del ángulo θ en radianes es $\theta = \frac{\alpha}{r}$. Ahora, como la longitud de la circunferencia completa es $2\pi r$ y el ángulo es 360°, si hacemos $r = 1$ tenemos que $360^{\circ} = \frac{2\pi 1}{1}, entonces$:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180°}{\pi}$$

Las dos igualdades anteriores permiten convertir ángulos que están en radianes en grados y viceversa.

Ejemplo 20.1

Pase los siguientes ángulos de grados a radianes o viceversa

a. $\theta = 45°$

b. $\theta = 30°$

c. $\theta = 120°$

d. $\theta = \frac{\pi}{3}$radianes

Solución:

a.$\theta = 45° = 45 \times \frac{\pi}{180}$ radianes $= \frac{\pi}{4}$radianes

b. $\theta = 30° = 30 \times \frac{\pi}{180}$ radianes $= \frac{\pi}{6}$radian

c. $\theta = 120° = 120 \times \frac{\pi}{180}$ radianes $= \frac{2\pi}{3}$radianes

d. $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianes $= \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60°$

20.1 Definición de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas las podemos definir como el cociente de los lados de un triángulo rectángulo para ángulos agudos o en términos de un punto (x, y)de su lado terminal. Esta última forma es su definición como funciones circulares.

20.2 Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Consideremos un triángulo rectángulo

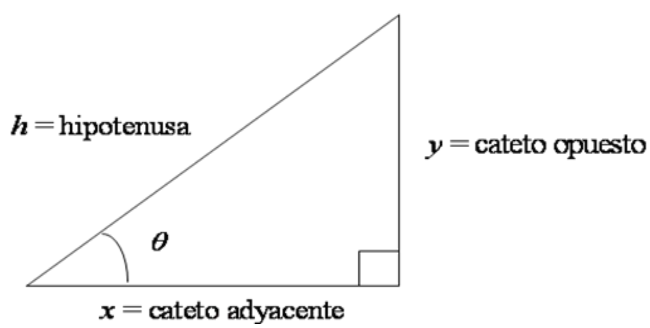


Figura 20.6. Triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras se tiene que $h = \sqrt{x^2 + y^2}$

El ángulo θ es un ángulo agudo. Las funciones trigonométricas para este ángulo se definen como:

$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{h}$ $\qquad$ $csc(\theta) = \frac{h}{y}$

$\cos(\theta) = \frac{x}{h}$ $\qquad$ $\sec(\theta) = \frac{h}{x}$

$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $\cot(\theta) = \frac{x}{y}$

20.3 Funciones trigonométricas como funciones circulares

Consideremos un ángulo θ en posición normal. Para definir las funciones trigonométricas del ángulo θ usamos un punto(x, y) de su lado terminal, así:

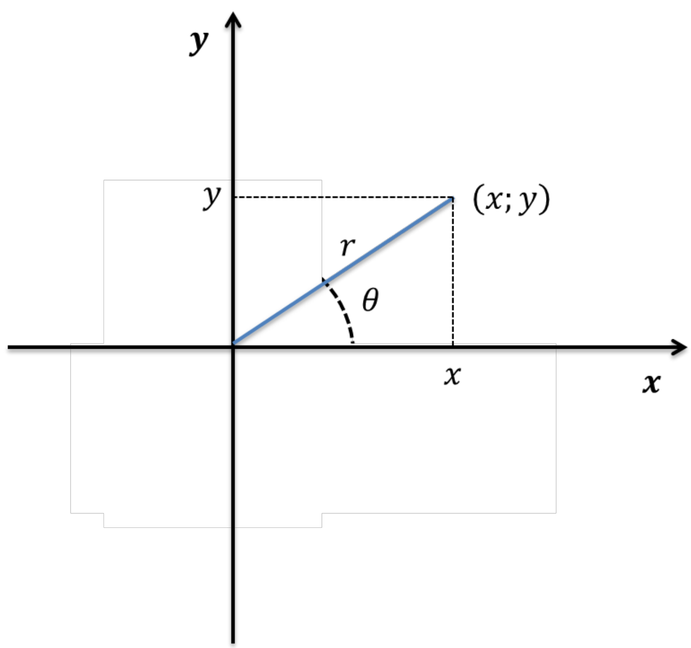


Figura 20.7. Ángulo en posición normal.

Se observa que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Las funciones trigonométricas se definen como:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{r}{y}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$

En estas definiciones se debe tener en cuenta el signo que tienen x e y. Por lo tanto, en el primer cuadrante todas las funciones son positivas; en el segundo cuadrante seno y cosecante son positivos; en el tercero, tangente y cotangente son positivos, y en el cuarto son positivos el coseno y la secante.

Ejemplo 20.2

Si $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ y α tiene un lado terminal en el tercer cuadrante, encuentre las restantes funciones trigonométricas.

Solución:

Como $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, se tiene que $x = -3$ y $r = 4$, además por el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = r^2 \to y = \pm\sqrt{7}$. Como el lado terminal está en el tercer cuadrante entonces $y = -\sqrt{7}$, por tanto

$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{-3}{-\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ $\qquad$ $\csc\alpha = -\frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\qquad$ $\sec\alpha = -\frac{4}{3}$

20.4 Evaluación de las funciones trigonométricas

20.4.1 Funciones trigonométricas de 30° y 60°

Consideremos un triángulo equilátero de lado x y con ángulos de 60° cada uno.

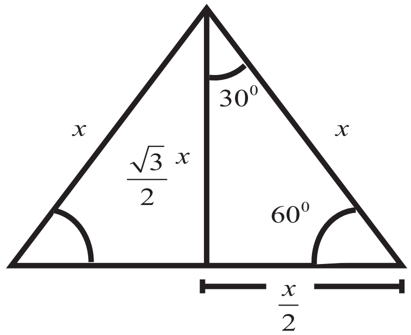


Figura 20.8. Triángulo equilátero.

Y así se forma el triángulo rectángulo:

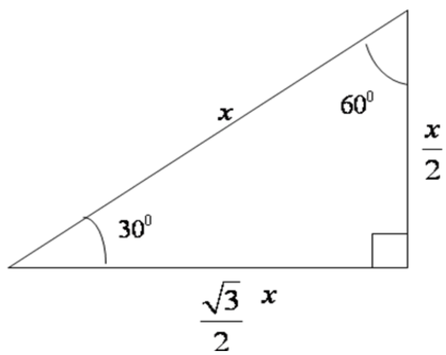


Figura 20.9 Triángulo rectángulo con ángulos de 30° y 60°**.**

Luego:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

20.4.2 Funciones trigonométricas del ángulo de 45°

Consideremos un triángulo rectángulo con un ángulo de45°. Por ser rectángulo se obtiene que el otro ángulo agudo mide también 45°, de modo que el triángulo es isósceles, que significa que los catetos tienen igual medida. Esto es,

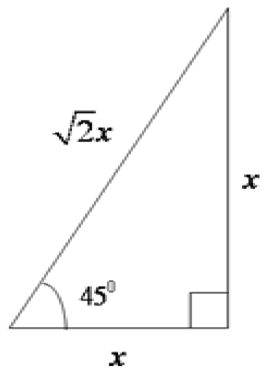


Figura 20.10 Triángulo rectángulo con ángulos de 45°.

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

20.4.3 Funciones de $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$

Consideremos un círculo unidad

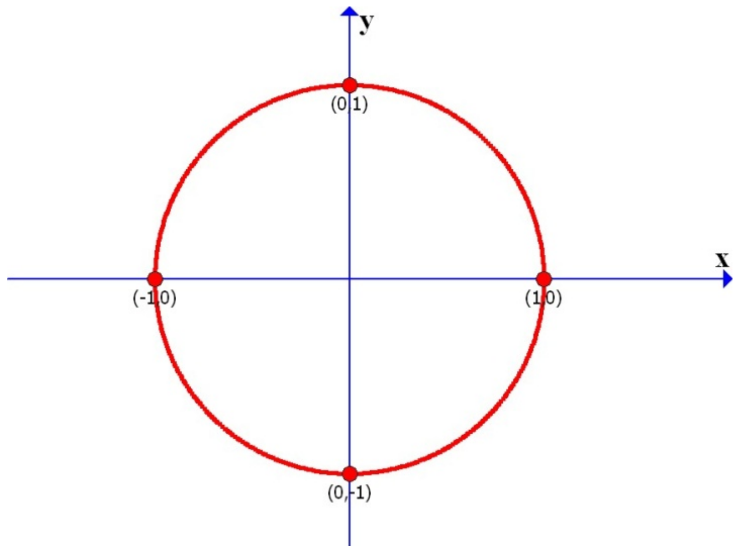


Figura 20.11 Círculo unitario.

Para todos los puntos en la circunferencia unitaria $r = 1$. Entonces:

$\operatorname{sen}(0) = 0 \quad \csc(0) = \neg\exists$

$\cos(0) = 1 \quad \sec(0) = 1$

$\tan(0) = 0 \quad \cot(0) = \neg\exists$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \csc\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \sec\left(\frac{\pi}{2}\right) = \neg\exists$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \neg\exists \; \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\operatorname{sen}(\pi) = 0 \quad \csc(\pi) = \neg\exists$

$\cos(\pi) = -1 \; \sec(\pi) = 1$

$\tan(\pi) = 0 \quad \cot(\pi) = \neg\exists$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \qquad \csc\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \sec\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \neg\exists$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \neg\exists \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Para evaluar funciones trigonométricas en otros cuadrantes usamos los ángulos de referencia. Los valores de las funciones trigonométricas en otros cuadrantes son los valores de estas funciones evaluadas en el ángulo de referencia teniendo en cuenta el signo de la función en el cuadrante. Un ángulo de referencia depende del cuadrante y en general se construye observando el ángulo que forma el lado terminal con el eje x.

Los ángulos de referencia en los diferentes cuadrantes son los siguientes:

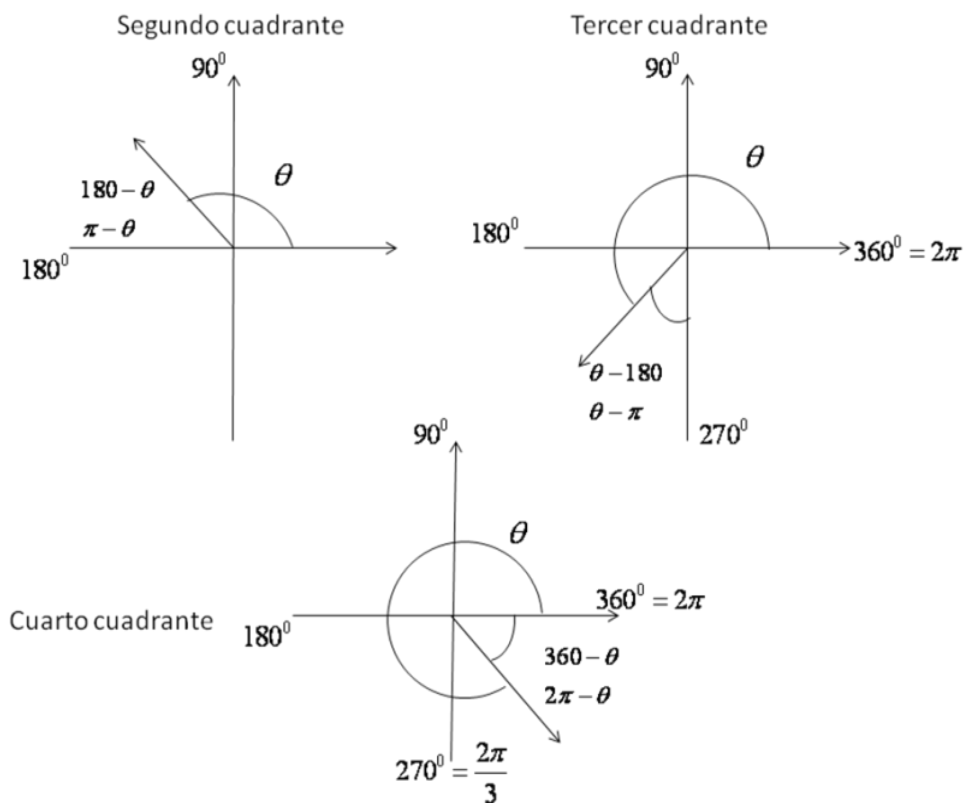


Figura 20.12. Ángulos de referencia.

Ejemplo 20.3

Evalúe:

a. $\operatorname{sen}(135°)$

b. $\cos(225°)$

c. $\tan(315°)$

Solución:

a. Como $135°$ está en el segundo cuadrante, entonces el ángulo de referencia está dado por $\theta_R = 180° - 135° = 45°$, así $\operatorname{sen}(135°) = \operatorname{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. El ángulo de $225°$ está en el tercer cuadrante, entonces el ángulo de referencia $\theta_R = 225° - 180° = 45°$. Pero el coseno es negativo en éste cuadrante, entonces $\cos(225°) = -\cos(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $315°$ está en el cuarto cuadrante, entonces $\theta_R = 360° - 315° = 45°$ y tangente es negativa en el cuarto cuadrante, así, $\tan(315°) = -\tan(45°) = -1$.

Otra forma de evaluar las funciones trigonométricas es usando la calculadora en modo grados (deg) o radianes (rad).

20.5 Gráficas de las funciones trigonométricas

Todas las funciones trigonométricas son periódicas. Esto significa que $f(x+p) = f(x)$ con $p \neq 0$, para todo valor de x en el dominio de la función. P debe ser el valor más pequeño que cumple esta propiedad. Se debe tener presente que para realizar la gráfica de las funciones trigonométricas se toman los ángulos medidos en radianes para formar parejas ordenadas de números reales.

El seno, el coseno, la secante y la cosecante tienen periodo 2π, esto es: $f(x+2\pi) = f(x)$
Para estas funciones trigonométricas, entonces:

$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\sec(x+2\pi) = \sec x$

$\csc(x+2\pi) = \csc x$

La tangente y la cotangente tienen periodo π, esto es:

$f(x + \pi) = f(x)$

Para estas dos funciones, se tiene:

$\tan(x + \pi) = \tan x$

$\cot(x + \pi) = \cot x$

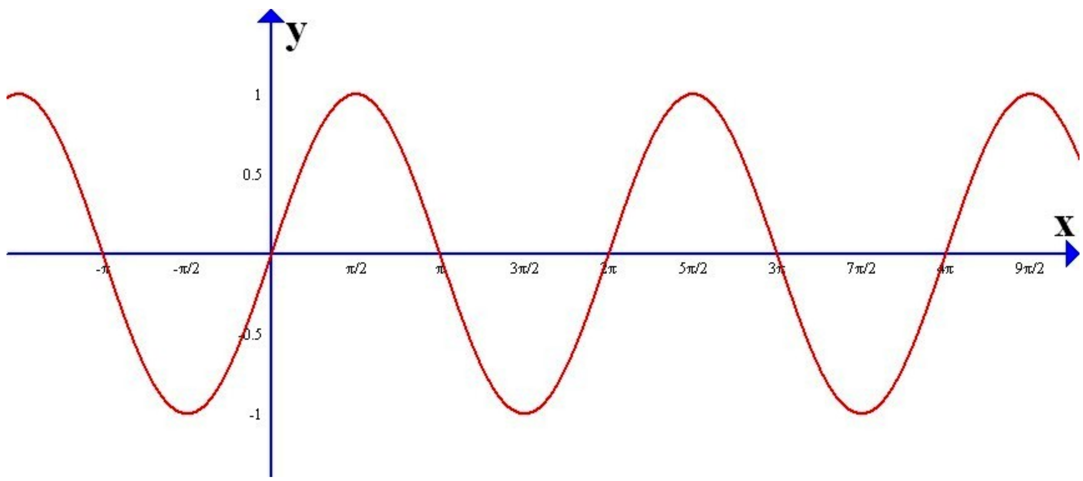


Figura 20.13 Función seno.

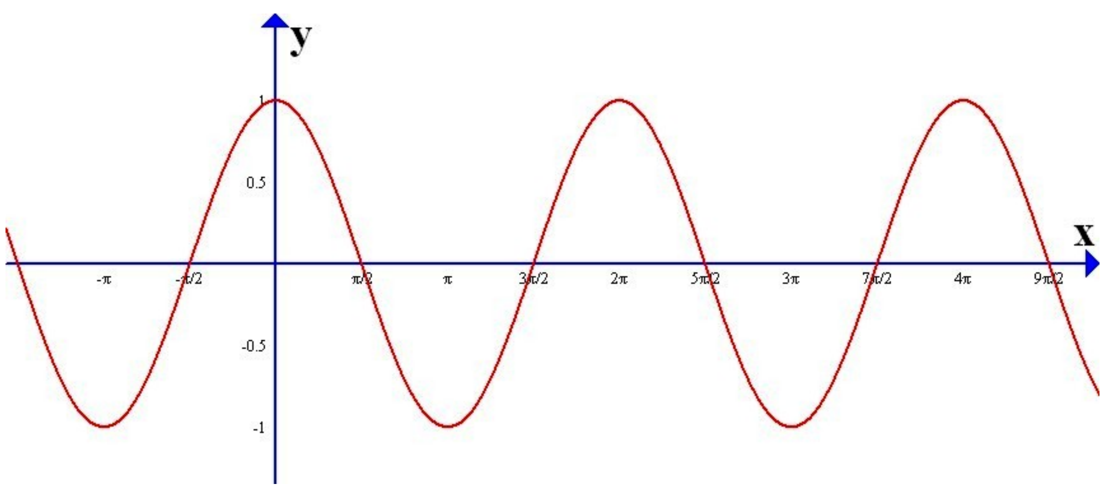


Figura 20.14 Función coseno.

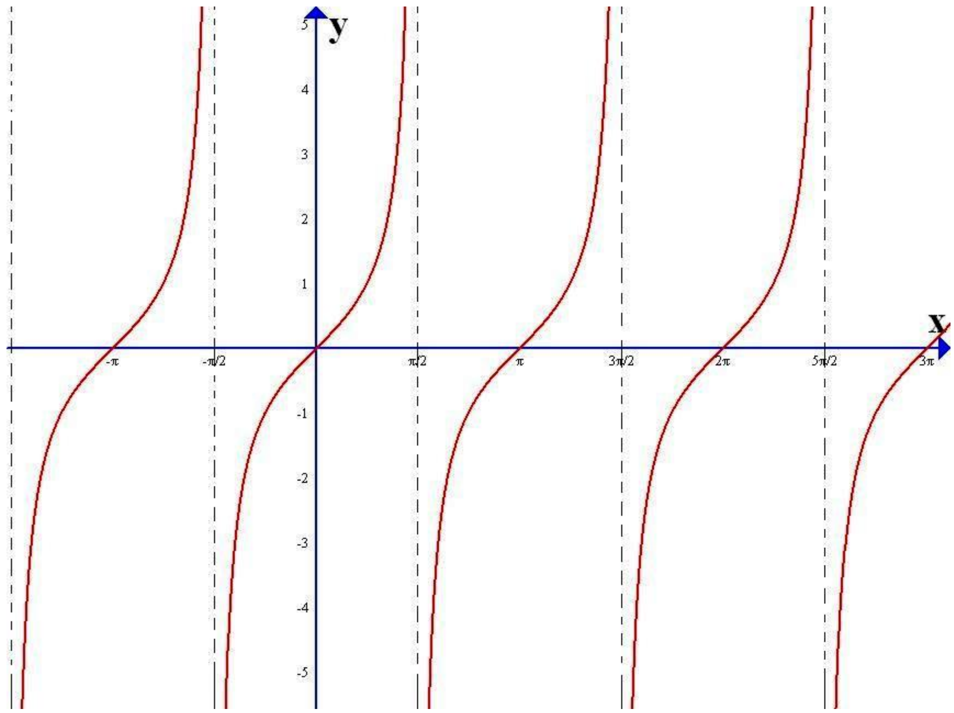


Figura 20.15 Función tangente.

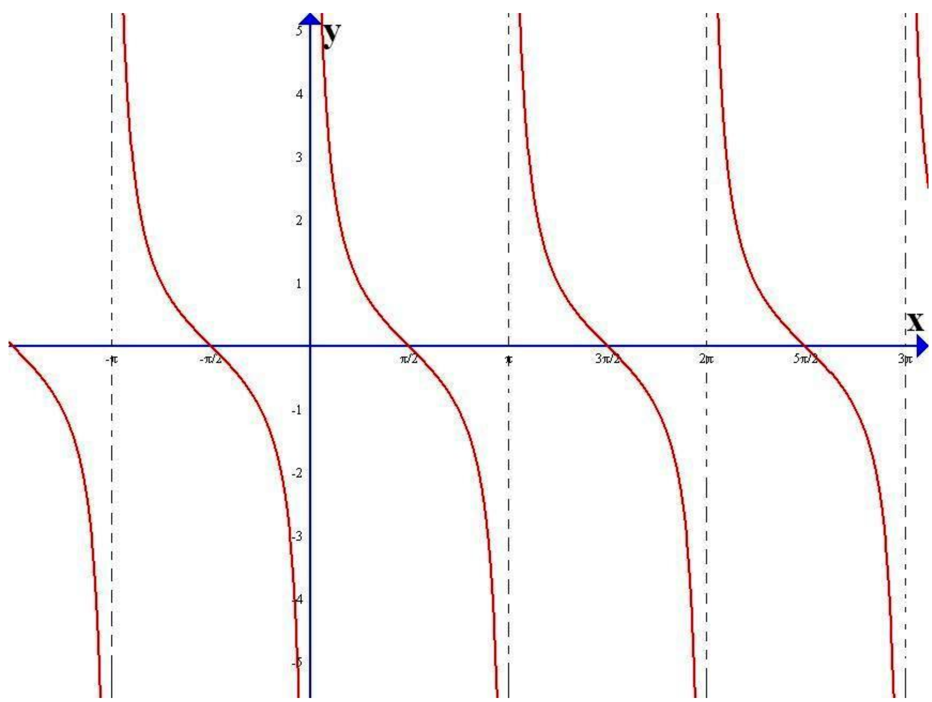


Figura 20.16 Función cotangente.

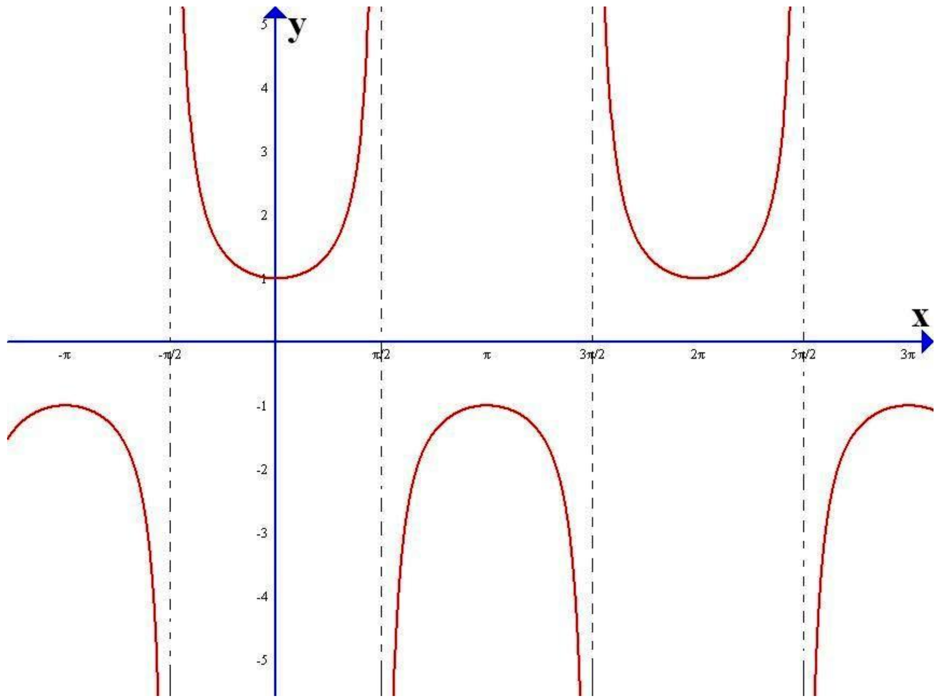


Figura 20.17 Función secante.

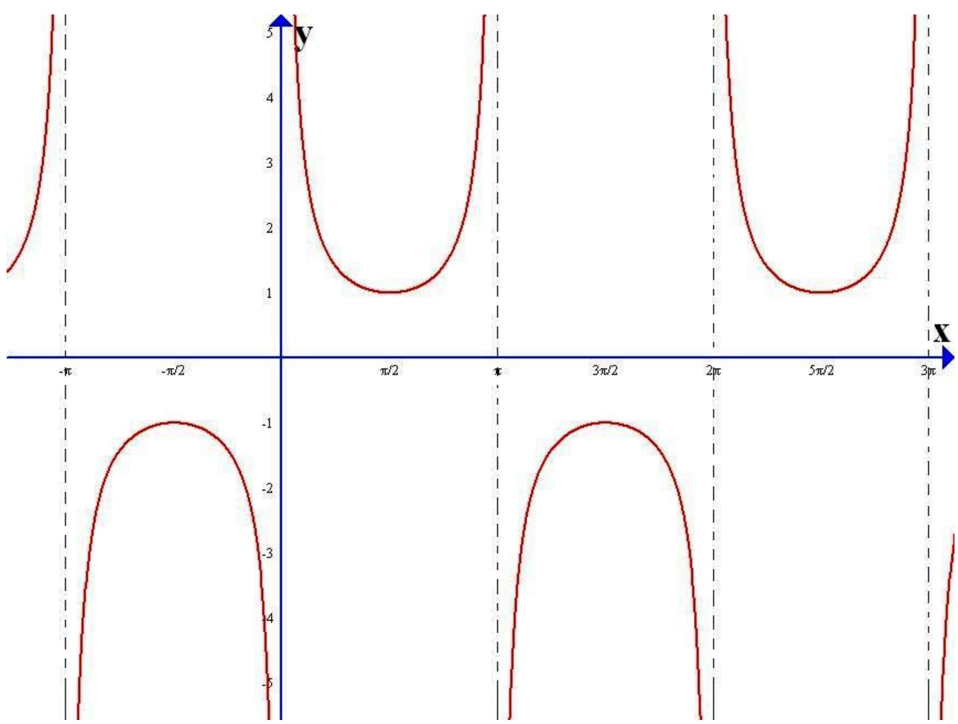


Figura 20.18 Función cosecante.

21. Identidades trigonométricas

Las relaciones de igualdad entre funciones trigonométricas que se cumplen para todo θ se llaman identidades trigonométricas. Las identidades más frecuentes son las siguientes:
De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas se tiene que:

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

21.1 Identidades pitagóricas

Sabemos que en un triángulo rectángulo que tiene hipotenusa $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ donde x y y son los catetos y θ es uno de los ángulos agudos del triángulo. Por lo tanto,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

21.2 Identidades de suma y diferencia de ángulos

$$\text{sen}(\alpha \pm \theta) = \text{sen}\,\alpha\cos\theta \pm \cos\alpha\;\,\text{sen}\,\theta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\;\text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha\;\pm\tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

21.3 Identidades de ángulo doble

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Las identidades anteriores se obtienen haciendo $\alpha = \beta$ en las identidades de suma de ángulos.

21.4 Identidades de función par-impar

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

21.5 Otras identidades

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\; sen^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Ejemplo 21.1

Verificar la identidad $\text{sen}x(\csc x - \text{sen}x) = \cos^2 x$

Solución:

Para verificar esta identidad vamos a transformar el miembro del lado izquierdo en el del lado derecho, para esto se utilizan las identidades fundamentales.

$\text{sen}x\left(\dfrac{1}{\text{sen}x} - \text{sen}x\right) = \cos^2 x$

$\text{sen}\,x\left(\dfrac{1 - sen^2 x}{\text{sen}\,x}\right) = \cos^2 x$

$1 - \text{sen}^2 x = cos^2 x$

$1 - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x$

$1 - 1 + \cos^2 x = \cos^2 x$

$\cos^2 x = \cos^2 x$

22. Ecuaciones trigonométricas

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todos los valores de θ que satisfagan la ecuación. En la solución de las ecuaciones trigonométricas se tendrá en cuenta que las funciones trigonométricas son periódicas. Además es importante resaltar el uso de las identidades trigonométricas y las técnicas de factorización para la solución de dicha ecuaciones, así como el uso de los ángulos de referencia para hallar dichas soluciones.

Una función $f(x)$ es periódica de periodo $p > 0$ si $f(x+p) = f(x) \ \forall\, x \in D_f$.

Las funciones seno, coseno, secante y cosecante son periódicas de periodo 2π y tangente y cotangente son periódicas de periodo π.

Ejemplo 22.1

Resolver para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ la ecuación $2\text{sen}^2\theta = 1$.

Solución:

$$2\text{sen}^2\theta = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ significa que $\theta \in$ I y II cuadrante, en el primero $\theta = \frac{\pi}{4}$ y en el segundo $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$,ahora,$\text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$entonces $\theta \in$ III y IV, para el tercer cuadrante tenemos que: $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ en el cuarto cuadrante $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Entonces $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Ejemplo 22.2

Resuelva la ecuación $\text{sen}^2 x + \cos x = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Solución:

Usando la identidad pitagórica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se sigue que:

$(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1$

$1 - \cos^2 x + \cos x = 1$

$1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$-\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(-\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$-\cos x + 1 = 0$

$-\cos x = -1$

$\cos x = 1$

$x = 0$

$CS = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$

23. Funciones inversas

Una función $f(x)$ de A en B puede representarse por medio de un conjunto de pares ordenados (x, y) con $x \in A \wedge y \in B$ tal que $y = f(x)$.

Por ejemplo, se tiene:

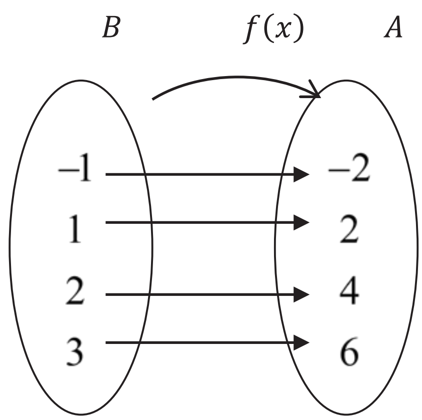


Figura 23.1. Diagrama de flechas para $y = f(x)$.

De forma que puede escribirse $f(x)$ como:

$f(x) = \{(-1, -2); (1,2); (2,4); (3,6)\}$

La función que "deshace" lo que hizo $f(x)$ es una función que va de B hacia A, y se obtiene intercambiando coordenadas.

Entonces, podemos escribir:

$B \qquad g(x) \qquad A$

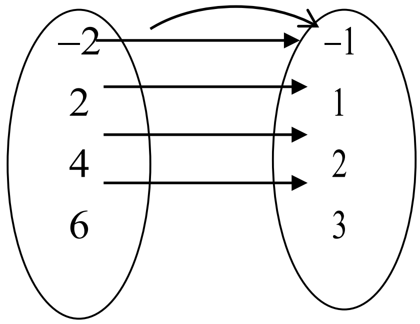


Figura 23.2. Diagrama de flechas para $y = f^{-1}(x)$.

Esta función se llama la inversa de $f(x)$ y la denotamos como $g = f^{-1}(x)$

Nota:

a. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

$b.\ D_f = R_{f^{-1}} \wedge R_f = D_{f^{-1}}$

Además como $f^{-1}(x)$ deshace lo que hizo $f(x)$ y $f(x)$ deshace lo que hizo $f^{-1}(x)$ entonces

$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D_f$

$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in D_f$

Esta es la prueba para saber si dos funciones son inversas la una de la otra.

Si una función tiene inversa esta es única.

Si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g.

Ejemplo 23.1

Sea $f(x) = 2x + 1$, muestre que$g(x) = \frac{x-1}{2}$ es la inversa de f y muestre gráficamente las dos funciones.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) + 1 = 2\frac{x-1}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{f(x) - 1}{2} = \frac{2x + 1 - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

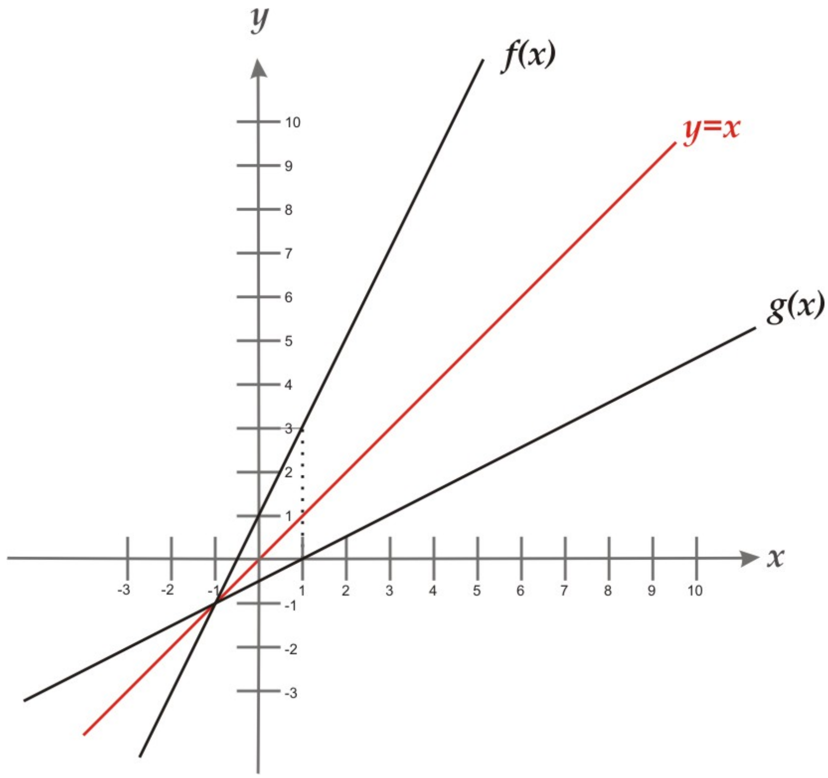


Figura 23.3. Gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$ y su inversa.

Nota: Se observa que $f(x)$ y $g(x)$ se reflejan en torno a la recta $y = x$. Además, si (a, b) está sobre la gráfica de f entonces (b, a) está sobre la gráfica de g. Esta propiedad se conoce como la propiedad reflexiva de la inversa.

Ejemplo 23.2

Sean $f(x) = 1 - x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$, pruebe que f y g son funciones inversas, y la propiedad reflexiva de la inversa, y trace sus gráficos.

Solución:

Para $f(x) = 1 - x^3$ se tiene $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$

Para $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$ se tiene $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 = 1 - \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3 = 1 - (1-x) = 1 - 1 + x = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{1 - f(x)} = \sqrt[3]{1 - 1 + x^3} = \sqrt[3]{x^3} = x$

x	$f(x)$
-2	9
-1	2
0	1
1	0
2	-7

x	g (x)
-7	2
0	1
1	0
2	-1
9	-2

Así, si $(a; b)$ está en la gráfica de f, entonces, $(b; a)$ está en la gráfica de g.

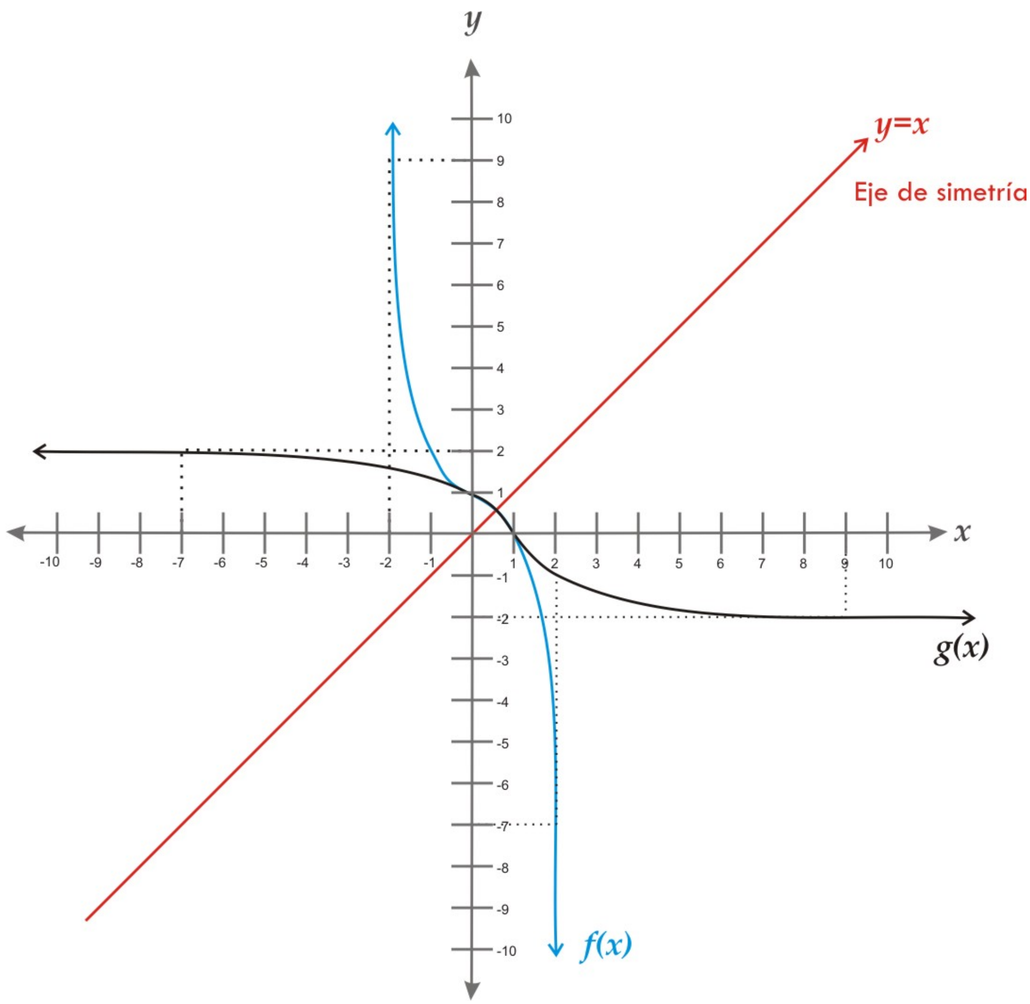


Figura 23.4. Gráfica de la función$f(x) = 1 - x^3$ y su inversa.

Nota: Una función es inyectiva cuando para cada valor de x hay un único valor de y, y para cada valor de y hay un único valor de x, es decir $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$. En otras palabras, es inyectiva cuando a lo sumo toda recta horizontal corta a la gráfica en un punto.

23.1 Existencia de la función inversa

No toda función tiene función inversa.

Una función tiene inversa si y solo si es inyectiva.

Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces es inyectiva y por lo tanto tiene inversa.

Nota: A pesar de que una función sea inyectiva y por lo tanto posea inversa, en algunas ocasiones es imposible determinar una ecuación para su inversa.

23.2 Procedimiento para encontrar la inversa de una función

1. Determinar la existencia de la función inversa.
2. Despejar x en términos de y, esto es, obtener $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y en la ecuación anterior. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. El dominio de f^{-1} es igual al recorrido de f.
5. Verificar que $(f \circ f^{-1}) = x \quad \forall x \in D_{f^{-1}}$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D_f$.

Ejemplo 23.3

Sea $f(x) = \sqrt{x-3},\ x \geq 3$, encuentre la inversa de f.

Solución:

Lo primero es realizar la gráfica de $f(x)$.

x	3	4	7	12	19
$f(x)$	0	1	2	3	4

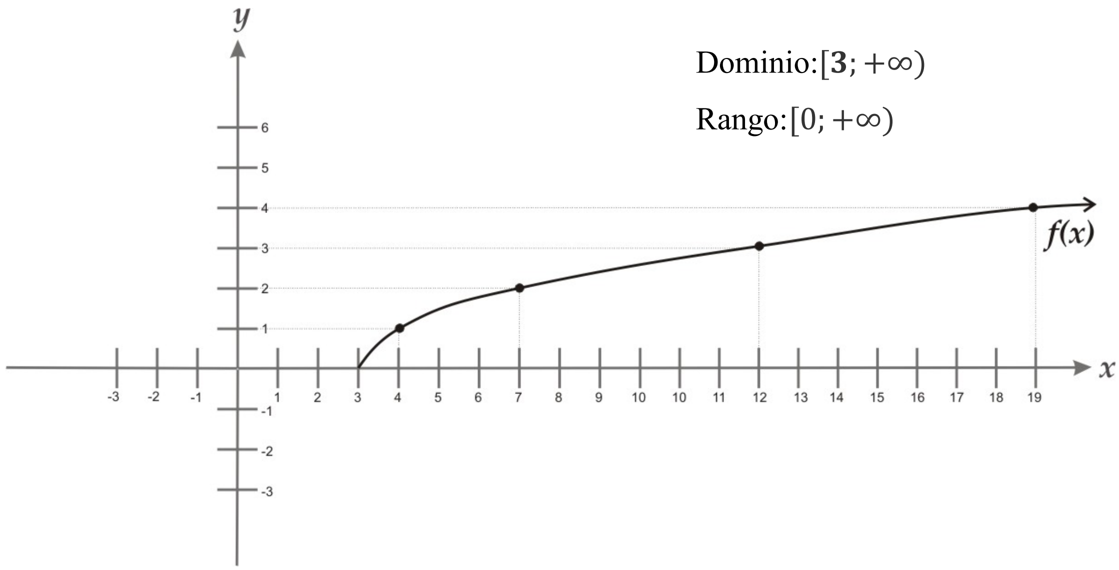


Figura 23.5. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-3}$.

La función es inyectiva por la prueba de la recta horizontal.

Analíticamente se puede ver que la función es inyectiva de la siguiente manera:

$$f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow \sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{x_2 - 3} \leftrightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \leftrightarrow x_1 = x_2$$

Se despeja x en términos de y.

$y = \sqrt{x-3}$

Se eleva al cuadrado a ambos lados:

$y^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2$

$y^2 = x - 3$

Despejando x:

$x = y^2 + 3 = f(y)$

Intercambiamos x e y:

$f^{-1}(x) = y = x$

$f^{-1}(x) = y = x^2 + 3D_{f^{-1}}: [0; +\infty)$

$R_{f^{-1}}: [3; +\infty)$

Trazamos la gráfica de las funciones $f(x)$, $f^{-1}(x)$ e $y = x$.

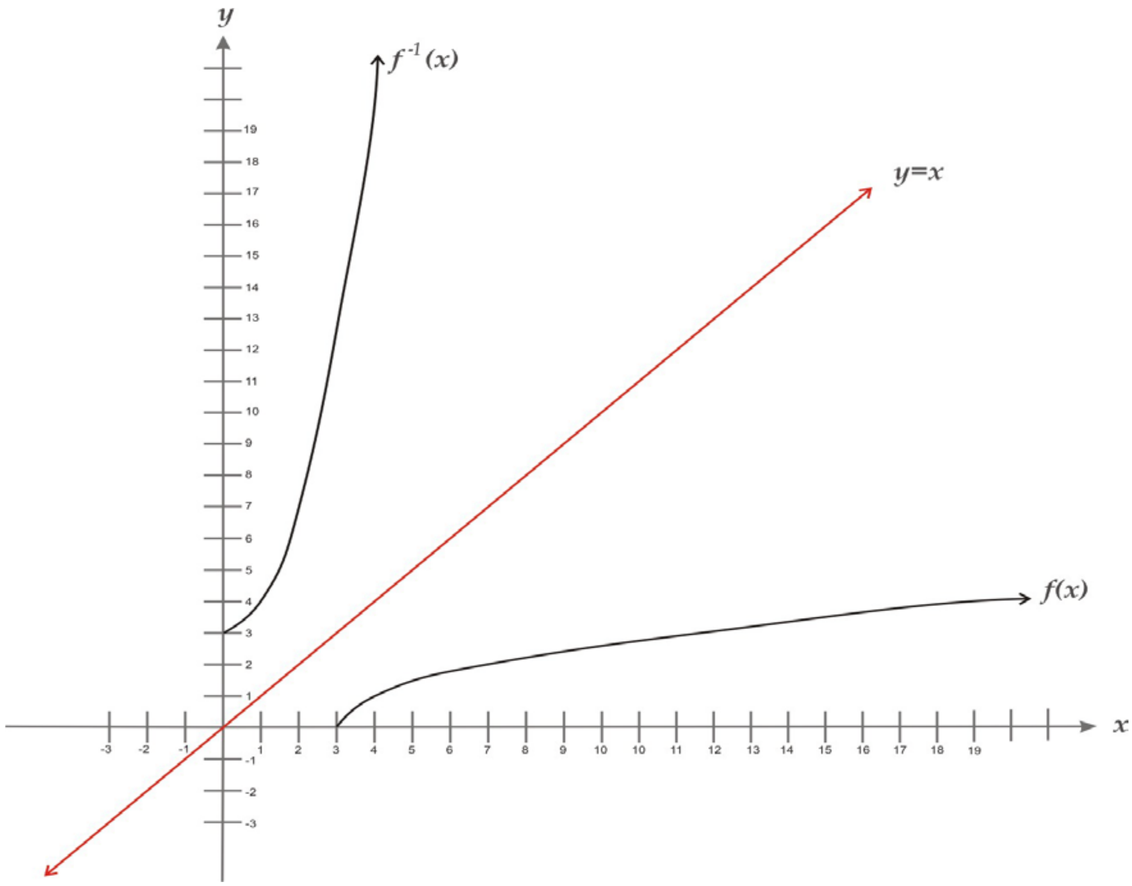


Figura 23.6. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-3}$ y su inversa.

Verificamos que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ sean inversas.

$(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{f^{-1}(x) - 3} = \sqrt{x^2 + 3 - 3}$

$= \sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall x \in D_{f^{-1}}$

$= x \qquad \forall x \in x \geq 0$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = [f(x)]^2 + 3 = \left[\sqrt{x-3}\right]^2 + 3$

$= x - 3 + 3$

$= x$

Ejemplo 23.4

Sea $f(x) = x^3 + 1$, encuentre la inversa de f.

Solución:

$D_f(x) = \mathbb{R}$

Veamos que la función f es inyectiva de manera analítica

Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ luego $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \leftrightarrow x_1 = x_2$ por tanto f es inyectiva.

Ahora veamos que f es inyectiva de manera gráfica.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	-26	-7	0	2	9	28

Es inyectiva.

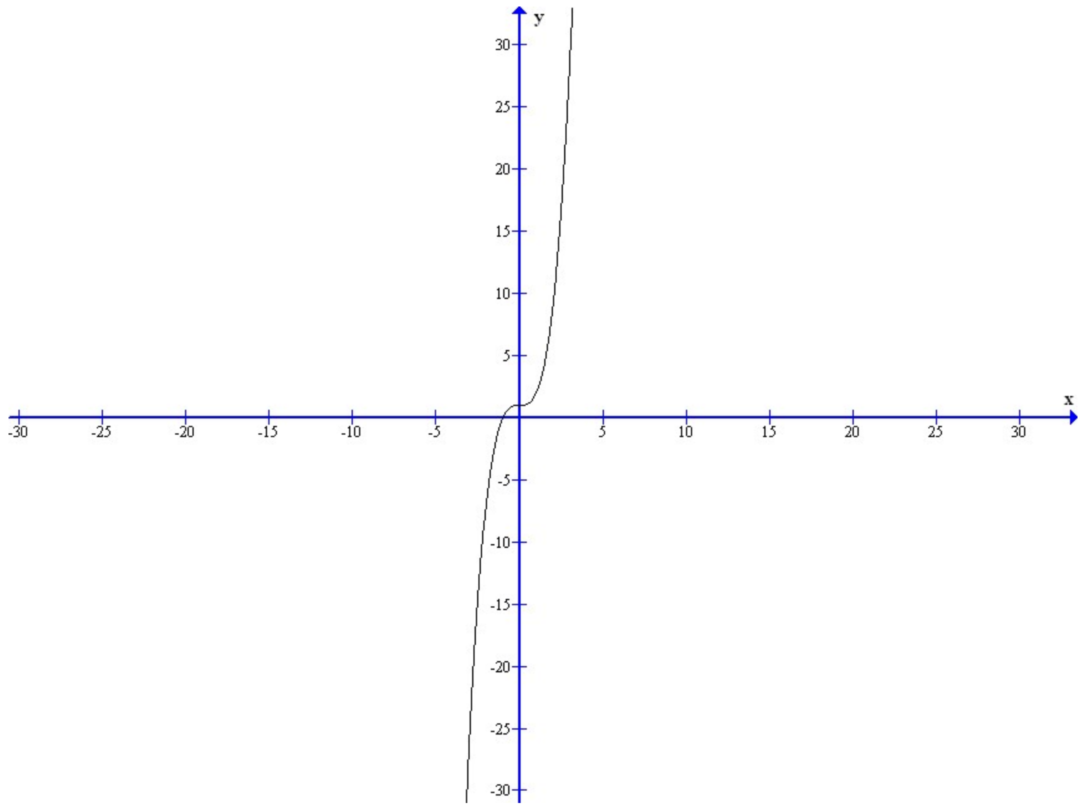


Figura 23.7. Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 1$.

Despejamos x en términos de y.

$y = x^3 + 1$

$x^3 = y - 1$

$x = \sqrt[3]{y-1} = f(y)$

Intercambiamos x e y.

$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x-1}$

Reemplazamos:

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{f(x) - 1} = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1}$

$= \sqrt[3]{x^3}$

$= x$

$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f[f^{-1}(x)]^3 + 1\left[\sqrt[3]{x-1}\right]^3 + 1$

$= x - 1 + 1$

$= x$

Son mutuamente inversas

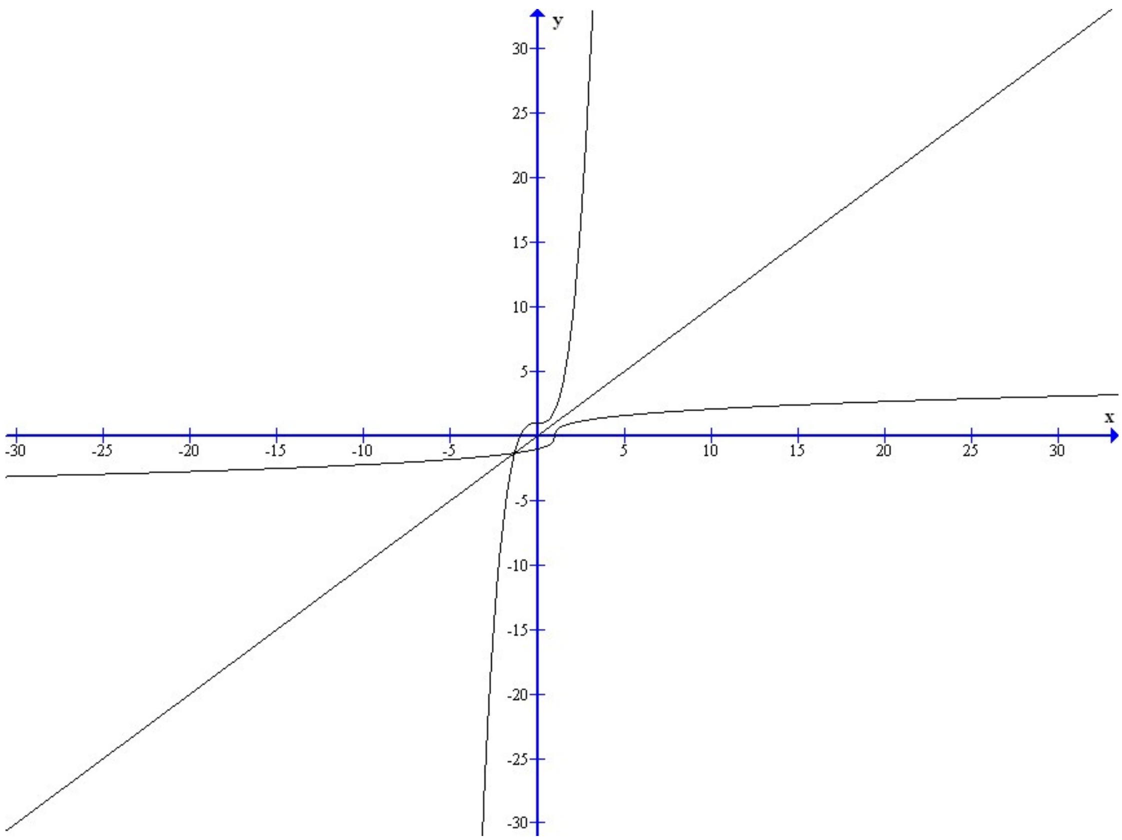


Figura 23.8 Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 1$ y su inversa.

24. Funciones exponencial y logarítmica

24.1 Función exponencial

Una función exponencial es una constante real positiva y diferente de uno, elevada a una potencia.

$f(x) = a^x a \in \mathbb{R}^+; a \neq 1$

Propiedades

Sean a y b números reales positivos y sean x e y dos números reales.

1. $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
7. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Ejemplo 24.1

Trace las gráficas de las funciones:

a. $f(x) = 3^x$

b. $g(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c. $h(x) = 4^x$

Solución:

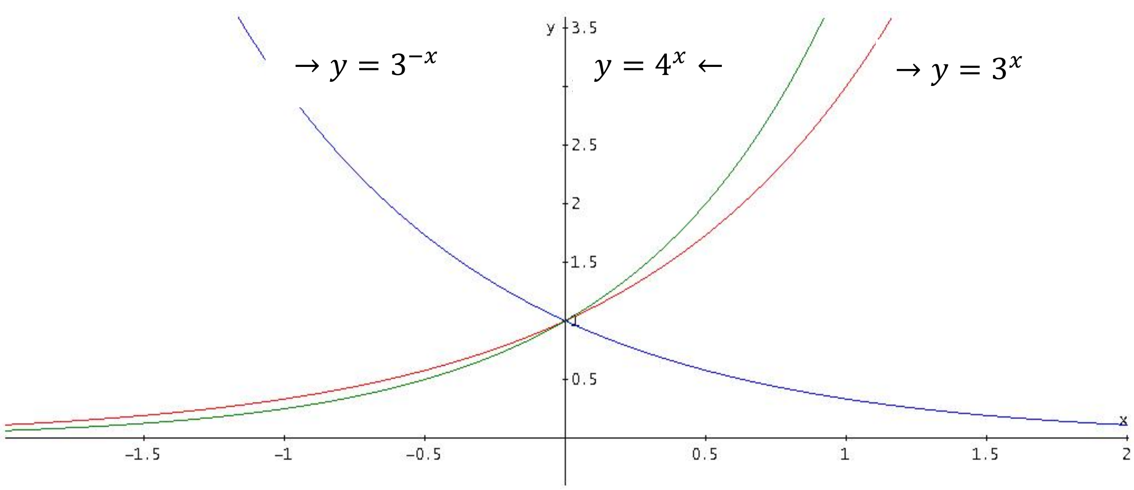


Figura 24.1. Gráfica de funciones exponenciales.

En general:

x	$f(x) = 3^x$
-3	0,037
-2	0,111
-1	0,333
0	1
1	3
2	9
3	27

x	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	27
-2	9
-1	3
0	1
1	0,333
2	0,111
3	0,037

x	$h(x) = 4^x$
-3	0,016
-2	0,0625
-1	0,25
0	1
1	4
2	16
3	64

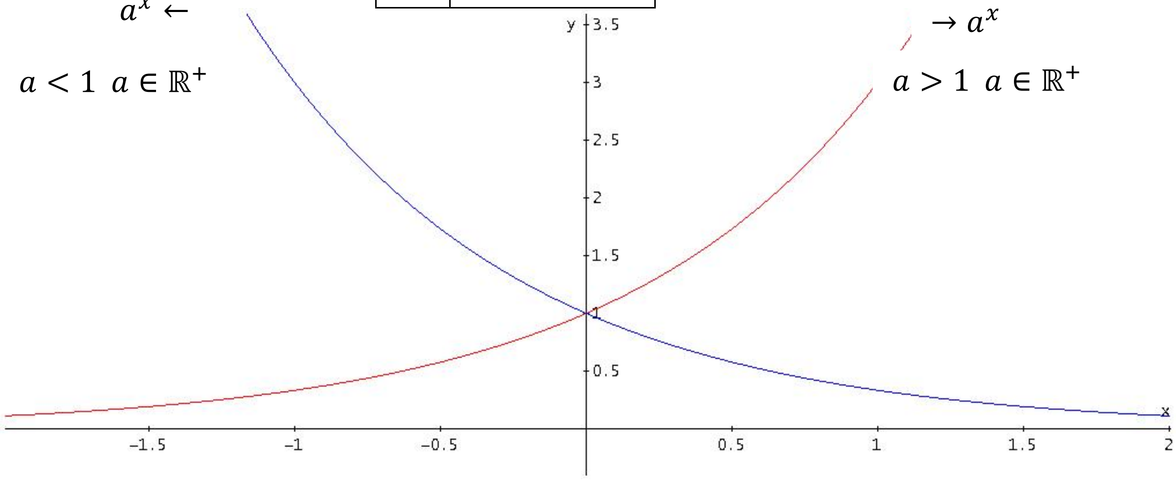


Figura 24.2. Gráfica de la función exponencial $y = a^x$.

24.1.1 Propiedades de las funciones exponenciales

Sea a un número real mayor a 1.

El dominio de $f(x) = a^x$ y de $g(x)$=a^{-x} es $(-\infty; +\infty)$.

El rango $f(x) = a^x$ y de$g(x)$=a^{-x} es$(0; +\infty)$.

La intersección y de$f(x) = a^x$ y de $g(x)$=a^{-x} es $(0; 1)$.

Las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x)$=a^{-x} son inyectivas.

Número $\boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{e}$ = 2.7182181 ... Número de Euler

x	0,1	0,01	0,001	−0,1	−0,01	−0,001
$(1+x)^{1/x}$	2,5937	2,7048	2,7169	2,8679	2,7319	2,7196

Exponencial natural

$y = e^x$

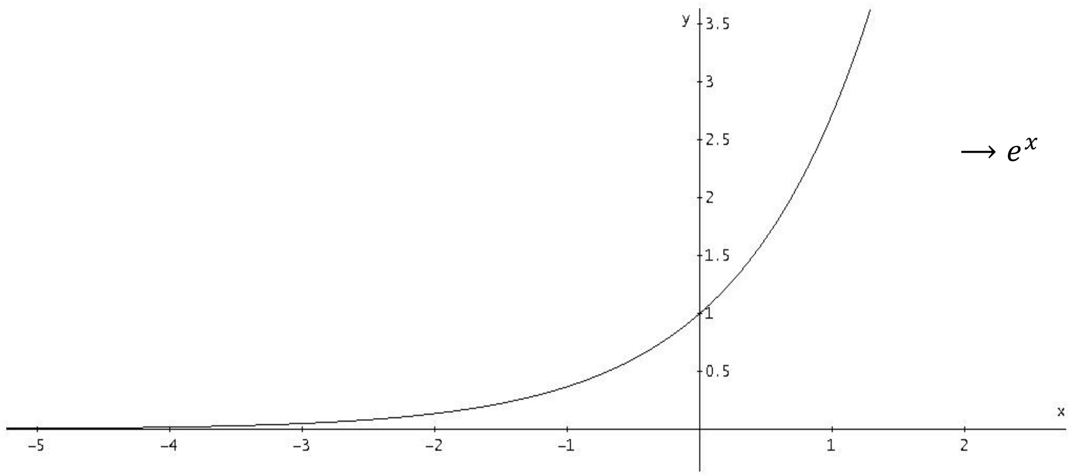


Figura 24.3. Gráfica de la función exponencial natural.

Ejemplo 24.2

Aplicación de funciones exponenciales:

$36^{-3x} = 6^{x^2+5}$

Solución:

$(6^2)^{-3x} = 6^{x^2+5} \Rightarrow 6^{-6x} = 6^{x^2+5}$

Aplicando la propiedad $(\mathrm{a})^x = (\mathrm{a})^y \leftrightarrow\ x = y$ tenemos que:

$\Rightarrow -6x = x^2 + 5$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$

$\Rightarrow (x+5)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x + 5 = 0$ ó $x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -5$ ó $x = -1$

24.2 Función logaritmo

Para $b > 0$ y $b \neq 1$ entonces se define el logaritmo en base b de x como

$y = \log_b x$ si y solo si $b^y = x$.

El dominio de esta función es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$

Ejemplo 24.3

a.$\log_{10} 10000 = 4$ porque $10^4 = 10000$

b. $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

c. $\log_3 1 = 0$ porque $3^0 = 1$

d. $\log_{10} 0{,}01 = -2$porque $10^{-2} = 0{,}01$

Nota:

1. Solo los números positivos tienen logaritmo.
2. El logaritmo puede ser cualquier número real.

24.2.1 Propiedades generales de la función logaritmo

1. $\log_b b = 1$
2. $\log_b 1 = 0$
3. $b^{\log_b x} = x$
4. $\log_b b^x = x$

De las propiedades 3 y 4 se sigue que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas.

24.2.2 Leyes de los logaritmos

Para $b > 0$ y $b \neq 0$ sean x, y, n números reales tales que $x > 0$ y $y > 0$

1. $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
2. $\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y$
3. $\log_b x^n = n \log_b x$

Ejemplo 24.4

Escriba $5\log_3 x + 4\log_3(x+3) - 2\log_3(x^3-2)$ como un solo logaritmo.

Solución:

$5\log_3 x + 4\log_3(x+3) - 2\log_3(x^3-2) = \log_3 x^5 + \log_3(x+3)^4 - \log_3(x^3-2)^2$

$= \log_3 x^5.(x+3)^4 - \log_3(x^3-2)^2$

$= \log_3\left(\dfrac{x^5.(x+3)^4}{(x^3-2)^2}\right)$

24.2.3 Fórmula cambio de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Las bases más conocidas son la base 10 y la base e que se denotan de la siguiente forma:

$\log_{10} x = \log x$ se llama logaritmo común

$\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$ se llama logaritmo natural

Por tanto:

y= $\ln x$ si y sólo si las $e^y = x$

24.2.4 Propiedades de la función logaritmo

1. El dominio de $g(x)$= $\log_b x$ es $(0,+\infty)$
2. El rango de $g(x)$= $\log_b x$es $(-\infty,+\infty)$
3. La intersección eje x de $g(x)$= $\log_b x$es $(1,0)$
4. La función es inyectiva

24.2.5 Propiedades como inversas

1. $\ln e^{x} = x$

2. $e^{\ln x} = x$

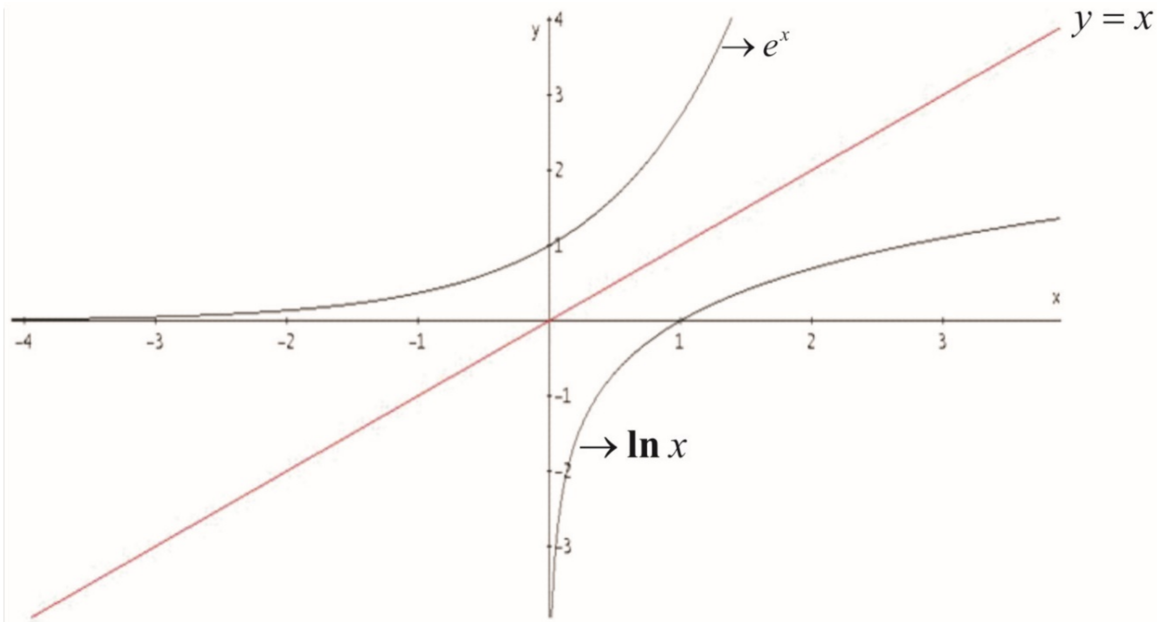


Figura 24.4 Gráfica de la función exponencial natural y logaritmo natural.

Ejemplo 24.5

Usar las propiedades de los logaritmos para escribir la expresión como suma, diferencia y/o multiplicación de los logaritmos.

a. $\ln \frac{2}{3}$ b. $\ln \frac{1}{5}$ c. $\ln \sqrt{a-1}$

Solución:

a. $\ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$

b. $\ln \frac{1}{5} = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$

c. $\ln \sqrt{a-1} = \ln (a-1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (a-1)$

Ejemplo 24.6

Escribir la expresión $\frac{2}{3}[\ln(x^2+1)-\ln(x-1)-\ln(x-1)]$ como un solo logaritmo.

Solución:

$$\frac{2}{3}[\ln(x^2+1)-\ln(x-1)]=\frac{2}{3}[\ln(x^2+1)-[\ln(x+1)+\ln(x-1)]]$$

$$=\frac{2}{3}[\ln(x^2+1)-\ln(x+1)(x-1)]$$

$$=\frac{2}{3}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]$$

$$=\frac{2}{3}\left[\ln\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}\right]$$

$$=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2/3}$$

$$=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}$$

25. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una ecuación en la cual la incógnita se presenta como exponente se denomina Ecuación exponencial, y si la incógnita se presenta en la base o en el argumento de un logaritmo se llama ecuación logarítmica.

Ejemplo 25.1

Resuelva la siguiente ecuación exponencial: $e^{2x}+2e^x-8=0$

Solución:

$e^{2x}+2e^x-8=0$

$(e^x-2)(e^x+4)=0$

$e^x-2=0\ o e^x+4=0$

$e^x = 2\ o e^x = -4$

De la ecuación $\boldsymbol{e^x} = 2$ se sigue que $\boldsymbol{x} = \ln 2$ pero $\boldsymbol{e^x} = -4$ no tiene solución ya que $\boldsymbol{e^x} > 0$ para toda x.

Ejemplo 25.2

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a. $\log 2x - \log(x-1) = 0$

b. $\log_{x-2}(3x+4) = 2$

Solución:

a.

$\log 2x - \log(x-1) = 0 \Rightarrow \log 2x = \log(x-1)$

$\Rightarrow 2x = x - 1$

$\Rightarrow 2x - x = -1$

$\Rightarrow x = -1$

Se verifica la respuesta, y se tiene que esta ecuación no tiene solución ya que:

$\log 2(-1) - \log(-1-1)$ no está definido.

$\log_{x-2}(3x+4) = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 3x+4$

$x^2 - 4x + 4 = 3x + 4$

$x^2 - 4x - 3x + 4 - 4 = 0$

$x^2 - 7x = 0$

$(x-7) = 0$

$x = 0\ ó x = 7$

$x = 0$ no es solución de la ecuación, ya que la base $x - 2 > 0$ por la definición de logaritmo. Así la única solución es $x = 7$.

Taller de funciones

1. Defina con sus propias palabras:

a) $f: A \to B$

b) Dominio y rango o recorrido

c) Gráfica de $f: A \to B$

d) Criterio de la vertical para determinar si una gráfica es funcional, es decir, si representa una función.

2. Responda Falso o Verdadero para las siguientes afirmaciones; si es verdadero justifique y en caso de ser falso, dé un contraejemplo.

a) Es posible que en una función un mismo elemento del conjunto de partida tenga dos imágenes distintas.

b) En toda función, el rango es igual al conjunto de llegada.

c) Es lo mismo $f(x) = x + 1$ que $y = x + 1$.

d) En una función, cada elemento del conjunto de partida tiene una imagen.

e) Si $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es una relación cuya regla es $y = \frac{3}{x-2}$ entonces f es una función.

f) En toda función, cada elemento del conjunto de partida tiene como máximo una imagen.

g) El dominio de la relación $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por la regla $y = \frac{5}{3-x}$ es el conjunto de partida.

h) Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

i) Una recta vertical puede intersectar la gráfica de una función a lo más una vez.

j) Si $f(x) = f(-x)$ para toda x en el dominio de f, entonces la gráfica de f es simétrica respecto al eje y.

k) Si f es una función, entonces $f(ax) = af(x)$.

l) Para cualquier función f, $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

m) La gráfica de una función puede cortar al eje x en un punto y solo uno.

n) La gráfica de una función puede cortar al eje y en un solo punto.

ñ) Si una recta vertical corta a una gráfica en un punto, la gráfica es funcional.

o) Si f es una función par, entonces existe f^{-1}.

p) Si existe la función inversa de f, entonces la intersección y de f es una intersección x de f^{-1}.

q) La composición de dos funciones impares es una función par.

r) Si f y g tienen el mismo dominio, entonces f/g también tiene ese dominio.

3. Evalúe la función en los valores indicados.

a) $g(x) = 3 - x^2; g(0), g(\sqrt{2}), g(1+h), g\left(\frac{1}{4}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}; f(-2), f(1), f(1+h) - f(1), f\left(\frac{13}{4}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}};\quad f(\pi), f(2), f(5+h), f\left(\frac{1}{4}\right)$

d) $F(x) = \frac{\sqrt{x^2+16}}{x+4};\quad F(x+h), F(\sqrt{5}), F(-4), F(-2)$

e) $g(x) = \frac{|x|}{x};\quad g(-2), g\left(\frac{1}{h}\right), g(x^2), g(5)$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases};\quad f(-2), f(1), f\left(\frac{3}{2}\right)$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si -1} < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases};\quad f(-4), f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1), f(0), f(25)$

4. ¿Cuáles de las siguientes relaciones determinan una función f con fórmula $y = f(x)$? Para aquellas que lo sean, determine $f(x)$. *Sugerencia:* despeje y en términos de x y observe que la definición requiere un solo valor de y para cada x.

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $xy + y + x = 1$ con $x \neq 1$

c) $x = \sqrt{2y+1}$

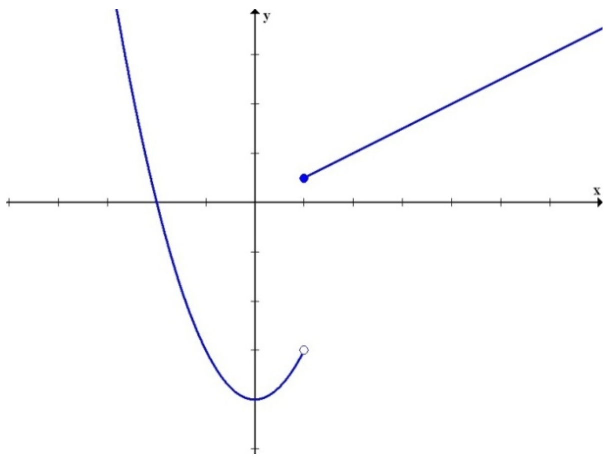
d) $x = \frac{y}{y+1}$

e) $y^2 = x^2 - 1$

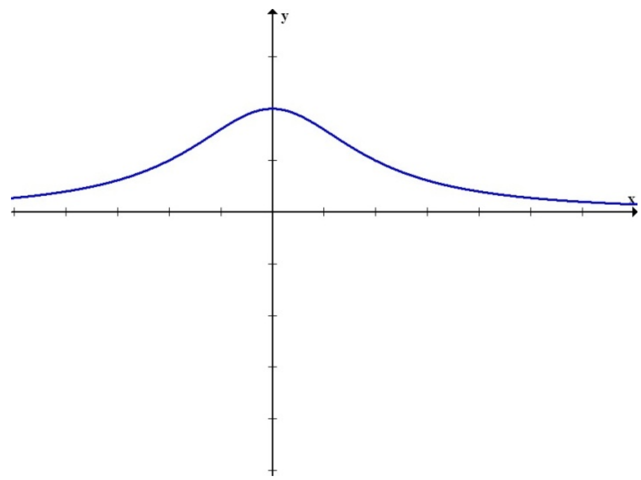
f) $x^2y - x^2 + 4y = 0$

5. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son gráficas de funciones?

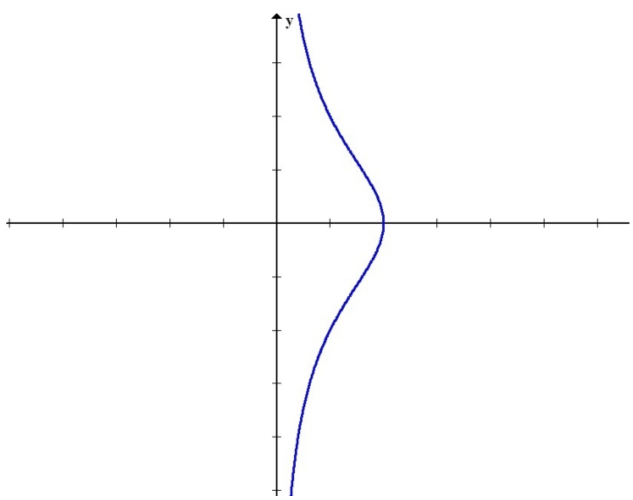
a)



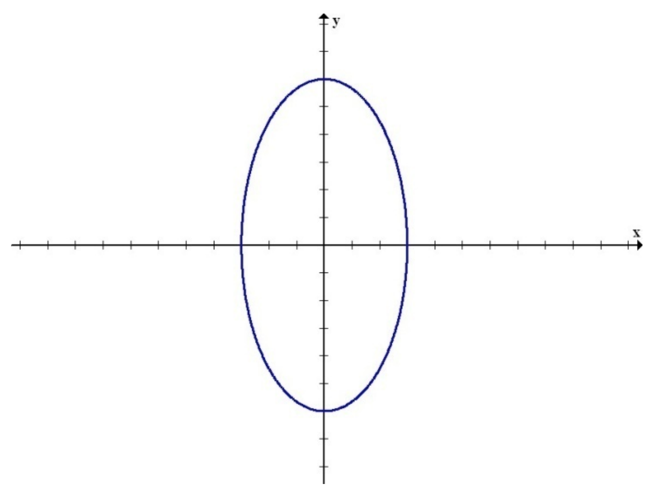
b)



c)

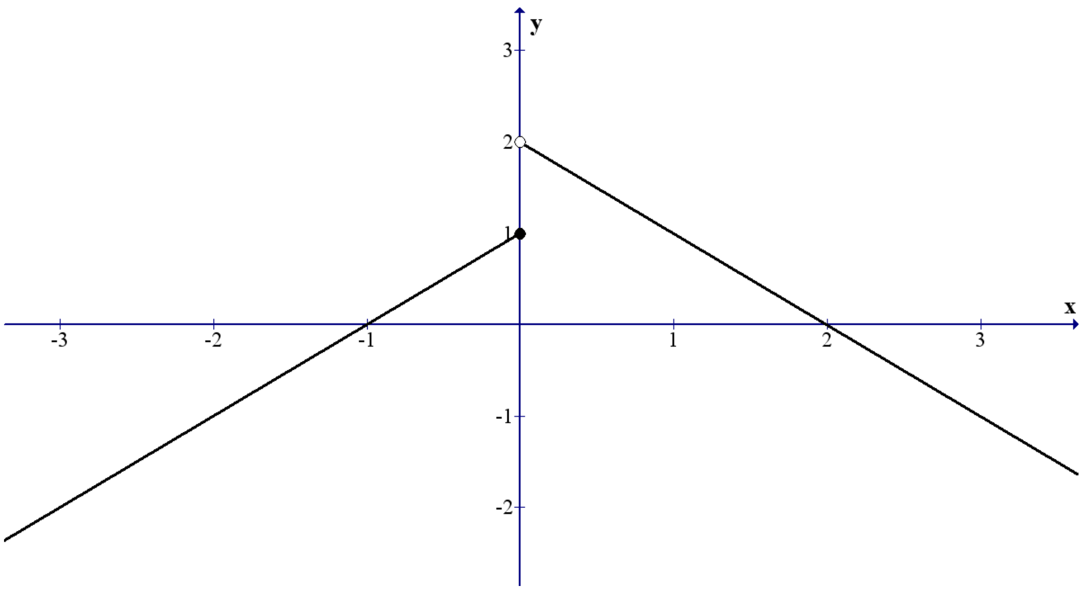


d)

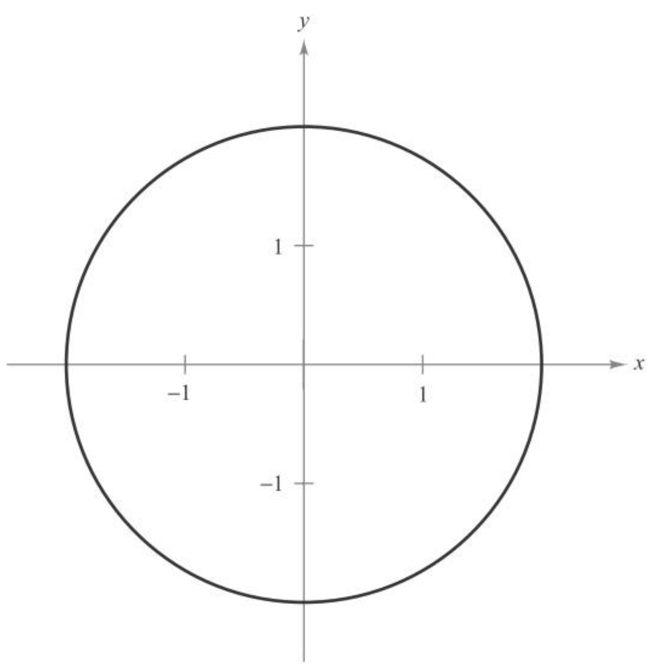


6. Utilice el criterio de la recta vertical para determinar si y es función de x.

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & si x \leq 0 \\ -x+2 & si x > 0 \end{cases}$



b) $x^2 + y^2 = 4$

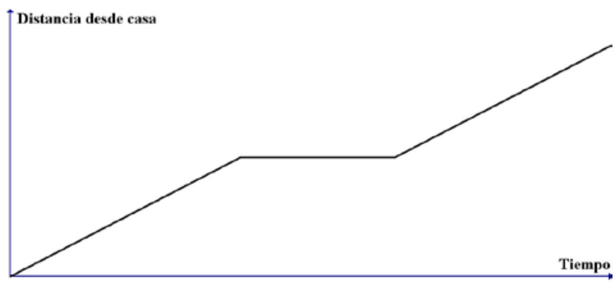


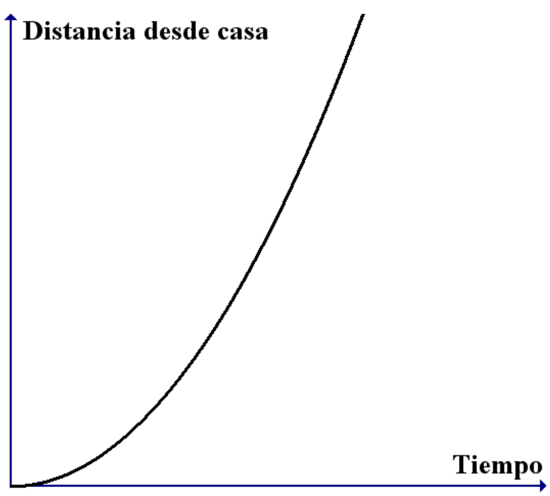
7. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor los tres enunciados siguientes? Escriba un enunciado para la gráfica restante.

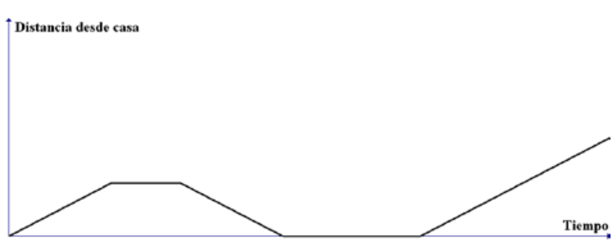
a) Acababa de salir de la casa cuando me percaté de que había olvidado mis libros, así que regresé para recogerlos.

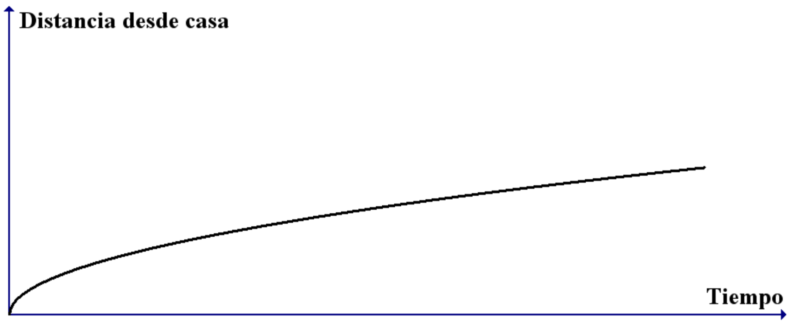
b) Las cosas marchaban bien hasta que se ponchó una llanta.

c) Arranqué con calma pero aceleré cuando me di cuenta de que llegaría tarde.

a) 

b) 

c) 

d) 

8. Encuentre el dominio de las funciones.

a) $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$

b) $F(x) = \sqrt{3x + 4}$

c) $g(x) = \frac{1}{5x+2}$

d) $H(x) = -\sqrt{625 - x^4}$

e) $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-x-6}$

f) $F(x) = |2x + 3|$

g) $F(x) = x^{2/3} - 1$

h) $H(x) = \sqrt{(x + 1)^{-1}}$

i) $f(x) = x^2 + 1$

j) $h(x) = \frac{x}{2x-5}$

k) $g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

l) $F(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

m) $h(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{2+x}$

n) $H(x) = \frac{5}{\sqrt{x-2}}$

ñ) $g(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

o) $H(x) = \sqrt[4]{4x^2 - 2x}$

p) $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}+7}{x^2+1}$

q) $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x-5}\sqrt{7-x}}$

r) $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}-3}$

9. Encuentre el dominio y el rango de las funciones.

a) $F(x) = -\sqrt{x + 4}$

b) $g(x) = x^2 - 5$

c) $H(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

e) $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & si x < 1 \\ -x + 1, & si x \geq 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4}, & si x \leq 4 \\ (x - 5)^2, & si x \geq 5 \end{cases}$

10. Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 2x - 4$

c) $h(x) = x^2 - 5$

d) $g(x) = \frac{x-2}{3},\ 0 \leq x \leq 5$

e) $f(x) = \sqrt{x+5}$

f) $g(x) = x^3 - 3$

g) $h(x) = \frac{1}{x}$

h) $H(x) = |3x|$

i) $h(x) = \sqrt{-x}$

j) $g(x) = \frac{2}{x+4}$

k) $F(x) = |x| - x$

l) $f(x) = \begin{cases} 0, & six < 2 \\ 1, & six \geq 2 \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \leq 1 \\ x+1, & si\ x > 1 \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \leq 0 \\ x+1, & si\ x > 0 \end{cases}$

ñ) $f(x) = \begin{cases} 3, & si\ x < -1 \\ x^2+1, & si\ x \geq -1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} -x, & si\ x \leq 0 \\ 9 - x^2, & si\ 0 < x \leq 3 \\ x - 3, & si\ x > 3 \end{cases}$

11. Especifique si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = -5$

b) $f(x) = 2x^{-3}$

c) $g(x) = 3x^3 - 2x$

d) $h(x) = 5x - \sqrt{3}$

e) $h(x) = 3x^2 + 2x + 1$

f) $g(z) = \frac{3z+2}{z-2}$

g) $h(w) = \sqrt{w^2+3}$

h) $g(t) = |t^3 + 2t|$

i) $G(t) = -|t+5|$

j) $h(x) = -3|t| - 2$

k) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4, & six \leq 1 \\ 3x, & six > 1 \end{cases}$

12. Encuentre $f+g, f-g, f\cdot g, f/g, f\circ g, g\circ f$, y sus dominios para:

a) $f(x) = x - 3;\ \ g(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2 + x;\ \ g(x) = \frac{2}{x+3}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1};\ \ g(x) = \frac{2}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{9-x^2};\ \ g(x) = \sqrt{x^2-4}$

e) $f(x) = |x|;\ \ g(x) = x^2 - 4x$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x};\ \ g(x) = \sqrt[4]{x+1}$

13. Observe las gráficas de las funciones más usuales; indique:

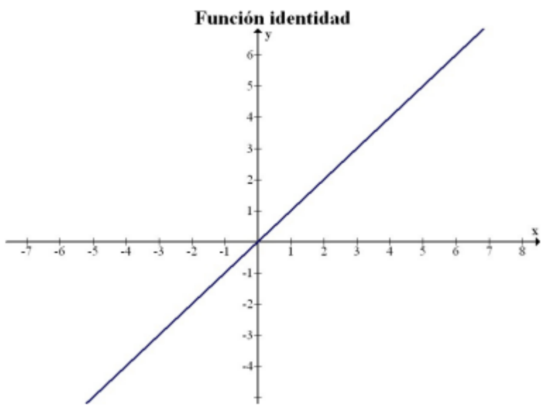
a) Dominio

b) Rango

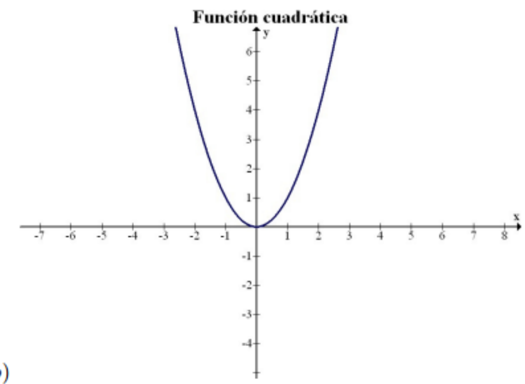
c) Es uno a uno

d) Si tiene inversa, escríbala

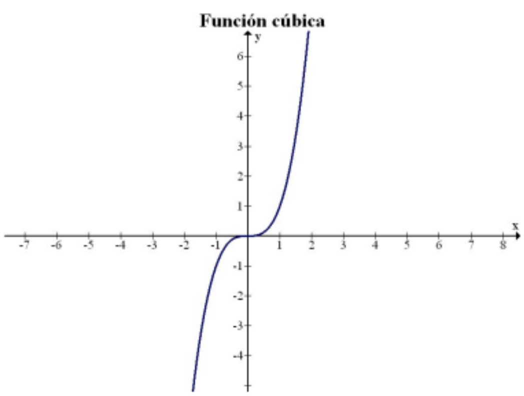
f) Si es par o impar



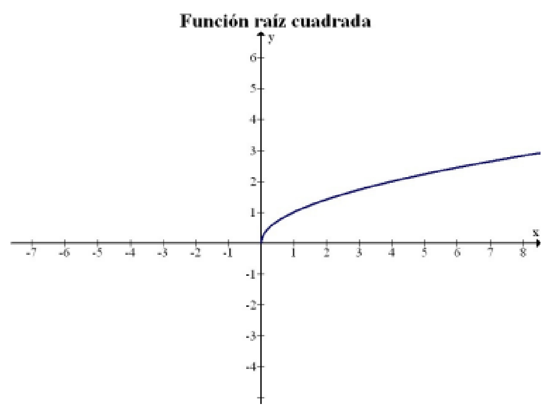
a)



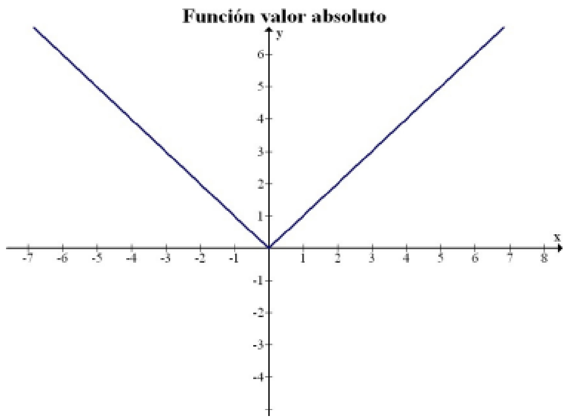
b)



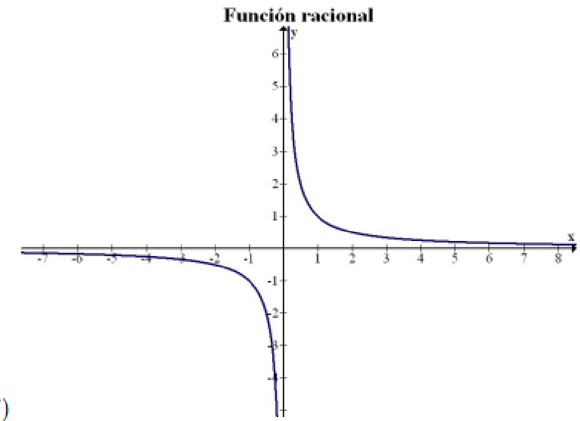
c)



d)



e)



f)

14.

a) Cómo se relacionan las gráficas de $f(x)$ y $f(|x|)$

b) Grafique $y = sen|x|$

c) Grafique $y = \sqrt{|x|}$

d) Grafique $y = |senx|$

15. Exprese la función en la forma $f \circ g$.

a) $F(x) = (x-9)^5$

b) $F(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $G(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

d) $H(x) = \frac{3}{x^3+2}$

e) $G(x) = |2x^3 - 4|$

f) $H(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

16. Encuentre $f \circ g \circ h$.

a) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x^3,\ h(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{x}{x-1},\ h(x) = \sqrt[3]{x}$

17. Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

a) $H(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

b) $G(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

18. Demuestre en forma analítica y en forma gráfica que f y g son funciones inversas.

a) $f(x) = 5x + 1,\ g(x) = \frac{x-1}{5}$

b) $f(x) = 3 - 4x,\ g(x) = \frac{3-x}{4}$

c) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = 1 - x^3,\ g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

e) $f(x) = \sqrt{x-4}, g(x) = x^2 + 4,\ x \geq 0$

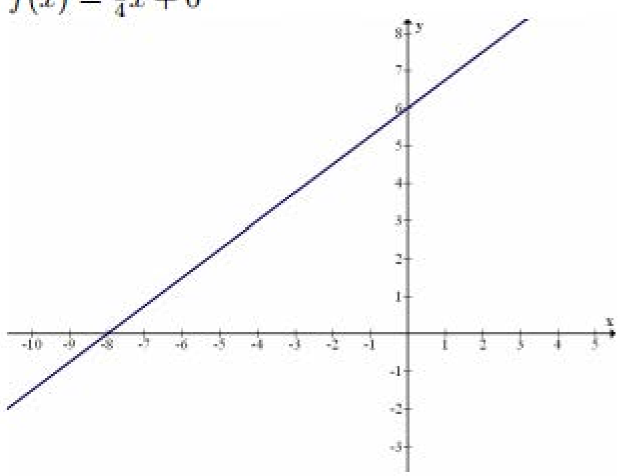
f) $f(x) = 16 - x^2, x \geq 0, g(x) = \sqrt{16-x}$

g) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x}$

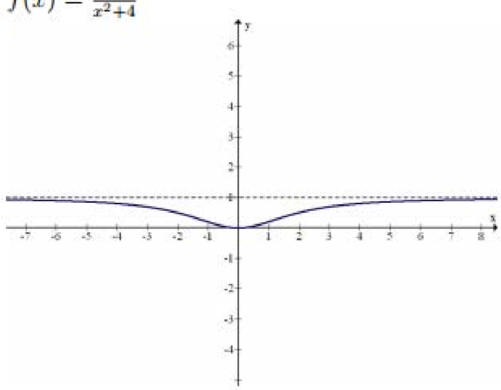
h) $f(x) = \frac{1}{1+x}, x \geq 0, g(x) = \frac{1-x}{x}, 0 < x \leq 1$

19. Utilice el criterio de la recta horizontal para determinar si una función es inyectiva en todo su dominio y, por lo tanto tiene inversa.

$a)\ \ f(x) = \frac{3}{4}x + 6$



$b)\ \ f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$



20. Obtenga la función inversa de f a mano, represente gráficamente f y f^{-1}, describa la relación entre las gráficas.

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, x \geq 2$

21. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f, como se indica.

a) Desplácela 2 unidades hacia arriba.

b) Desplácela 2 unidades hacia abajo.

c) Desplácela 2 unidades hacia la derecha.

d) Desplácela 2 unidades hacia la izquierda.

e) Alárguela verticalmente un factor de 2.

f) Contráigala verticalmente un factor de 2.

22. Por medio de translaciones, bosqueje la gráfica de:

a) $f(x) = \sqrt{x - 2} - 3$

b) $f(x) = |x + 4| - 2$

c) $f(x) = (x - 3)^2 + 4$

d) $f(x) = (x + 1)^3 - 3$

e) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

f) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2$

23. Responda verdadero o falso:

a) Existe un θ tal que sen$\theta = -\frac{1}{3}$

b) Existe un θ tal que $\cos\theta = -\frac{5}{3}$

c) El dominio de la tangente es $\mathbb{R}$

d) Existe θ tal que secθ no existe

e) Si $\tan\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$ entonces sen$\theta > 0$

f) Si el lado terminal de θ en posición estándar pasa por $(-2{,}5), \theta$ es obtuso

g) El período del seno y de la tangente es 2π

h) Si sen$\theta = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, entonces $\tan\theta \cong 0{,}577$

24. Convierta las siguientes medidas en grados a radianes (Deje su respuesta en π).

a) 30°

b) 45°

c) -60°

d) 240°

e) -370°

f) 10°

g) 150°

h) 315°

i) 144°

25. Convierta las siguientes medidas en radianes a grados.

a) $\frac{7}{6}\pi$

b) $\frac{3}{4}\pi$

c) $-\frac{1}{3}\pi$

d) $\frac{4}{3}\pi$

e) $-\frac{35}{18}\pi$

f) $\frac{3}{2}\pi$

g) $\frac{7}{3}\pi$

h) $\frac{11}{6}\pi$

26. Sin utilizar calculadora evalúe:

a) $\tan\frac{\pi}{6}$

b) $sec\pi$

c) $\sec\frac{3\pi}{4}$

d) $\csc\frac{\pi}{2}$

e) $\cot\frac{\pi}{4}$

f) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

g) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

27. Encuentre el cuadrante en el que se encuentra el ángulo θ.

a) sen $\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

b) $\sec\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

c) sen $\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

d) $\csc\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

28. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas para θ si:

a) sen$\theta = \frac{3}{4}$ y $\cos\theta > 0$

b) $\cot\theta = -3$ y $\tan\theta > 0$

c) $\sec\theta = 4{,}8$ y sen$\theta < 0$

d) $\csc\theta = -16$ y $\tan\theta > 0$

e) $\sec\theta = 2$ y $\tan\theta > 0$

f) $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ y sen$\theta < 0$

29. Verifique que las siguientes sean identidades.

a) $(1 + \text{sen}z)(1 - \text{sen}z) = \frac{1}{\sec^2 z}$

b) $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

c) $\sec x - \text{sen}x \tan x = \cos x$

d) $\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \text{sen}^2 x$

e) $\text{sen}^2 v + \frac{1}{\sec^2 v} = 1$

f) $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ Sugerencia: utilice dos veces una identidad del ángulo doble.

g) $\text{sen } 4x = 8\text{sen } x\cos^2 x - 4\text{sen } x\cos x$ Sugerencia: utilice dos veces una identidad del ángulo doble.

h) $(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta) = \text{sen}^2\theta$

i) $\frac{\text{sen}u}{\csc u} + \frac{\cos u}{\sec u} = 1$

j) $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

k) $\text{sen}x(\csc x - \text{sen}x) = \cos^2 x$

l) $\frac{1 - \csc^2 x}{\csc^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x}$

30. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen }(2x)$

b) $y = 2\text{sen}t$

c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = \sec t$

e) $y = \csc t$

f) $y = 2\cos t$

g) $y = \cos 3t$

h) $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$

i) $y = 2\cos(2x)$

31. Determine el periodo, la amplitud y el corrimiento (tanto horizontal como vertical), y dibuje una gráfica en el intervalo $-5 \leq x \leq 5$ para las siguientes funciones.

a) $y = -\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}$

b) $y = \tan(2x)$

c) $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$

d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

e) $y = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y = 21 + 7\operatorname{sen}(2x + 3)$

32. Resuelva la ecuación para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) $2\operatorname{sen}^2\theta = 1$

b) $2\cos^2 x - 3\cos(2x) = 1$

c) $\tan^2\theta = 3$

d) $\tan^2\theta - \tan\theta = 0$

e) $\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta = 1$

f) $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}x + 1 = 0$

g) $2\cos^2\theta - \cos\theta = 1$

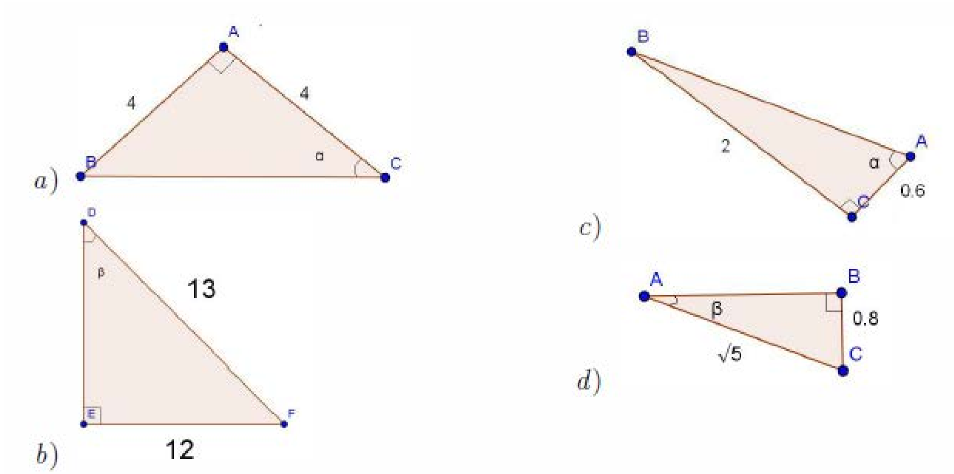
h) $\sec\theta\csc\theta = 2\csc\theta$

i) $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

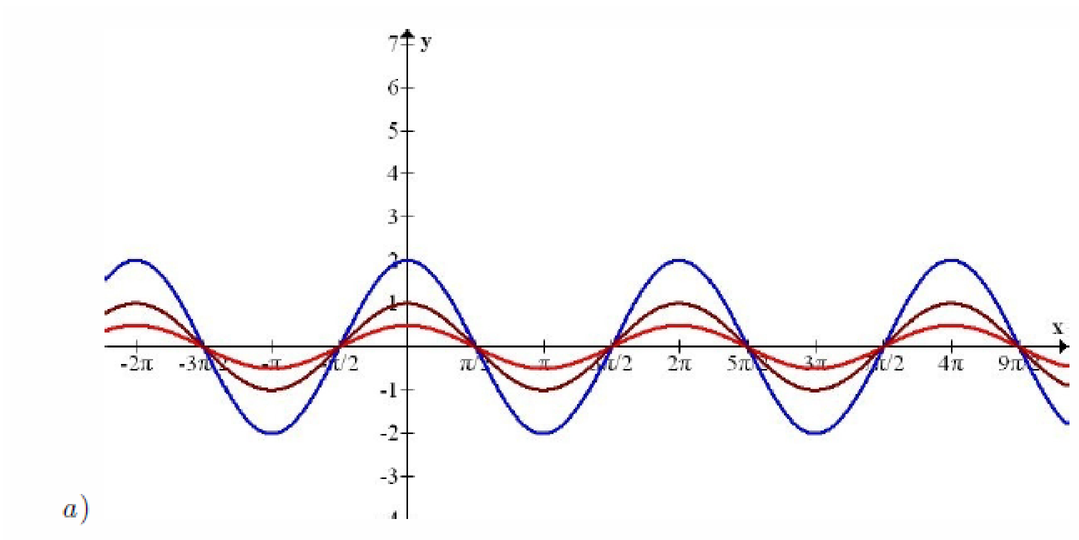
j) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 1$

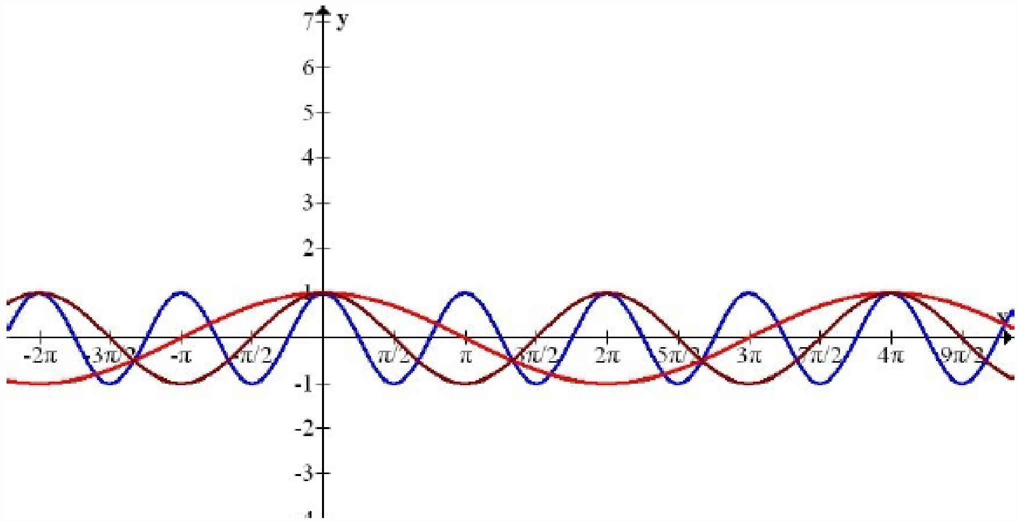
k)$3\sec^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 2 = 0$

33. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo señalado en cada triángulo.



34. Identifique la amplitud y el período de cada una





$b)$

35. Complete la tabla con la forma exponencial o la forma logarítmica apropiada de la ecuación.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_5 5 = 1$	
$\log_9 81 = 2$	
	$27^{2/3} = 9$
	$8^3 = 512$
$\log_7\left(\frac{1}{7}\right) = -1$	
	$6^{-2} = \frac{1}{36}$

36. Exprese la ecuación en forma exponencial.

a) $\log_5 25 = 2$

b) $\log_{10} 0{,}1 = -1$

c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

d) $\log_3 81 = 4$

e) $\ln 5 = x$

f) $\ln(x + 1) = 2$

g) $\ln(x - 1) = 4$

h) $\ln y = 5$

i) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

37. Exprese la ecuación en forma logarítmica.

a) $5^3 = 125$

b) $10^{-4} = 0{,}0001$

c) $10^3 = 1000$

d) $81^{\frac{1}{2}} = 9$

e) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

f) $4^{-\frac{3}{2}} = 0{,}125$

g) $e^x = 2$

h) $e^3 = y$

38. Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_5 x = 4$

c) $\log_2 16 = x$

d) $\log_{10} 0{,}1 = x$

e) $\log_x 1000 = 3$

f) $\log_x 16 = 4$

g) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$

h) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

i) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

39. Encuentre la solución de la ecuación exponencial, con cuatro decimales:

a) $10^x = 25$

b) $e^{-2x} = 7$

c) $2^{1-x} = 3$

d)$5^x = 4^{x+1}$

40. Resuelva la ecuación:

a) $x^2 2^x - 2^x = 0$

b) $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$

c) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

d) $x^2 10^x - x10^x = 2 \cdot 10^x$

e) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$

41. Resolver la ecuación logarítmica para x:

a) $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

b) $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

c) $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

d) $(\log x)^2 = \log x^2$

e) $-\log \frac{x}{2x-3} = \log \frac{5}{2x+3}$

Algunas respuestas

2.

a) F

c) V

e)

g) V

i) V

k) F

m) F

ñ) V

p) V

r) F

3.

a) $g(0) = 3, g(\sqrt{2}) = 1, g(1+,) = 2, h + h^2, g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{47}{16}$

c) $f(\pi) = \frac{1}{\sqrt{\pi-3}},\ f(2) = \nexists,\ f(5+h) = \frac{1}{\sqrt{2+h}},\ f\left(\frac{1}{4}\right) = \nexists$

e) $g(-2) = -1,\ g\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{h}{|h|},\ g(x^2) = 1,\ g(5) = 1$

g) $f(-4) = 8,\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}, f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(25) = -1$

4.

a) No es función

b) $y = \frac{x^2-1}{2}$

c) No es función

5.

a) No es función

c) No es función

6.

a) Es función

8.

a) $D_g = \mathbb{R}$

c) $D_g = \mathbb{R} - \{2/5\}$

e) $D_f = \mathbb{R} - \{-2,3\}$

g) $D_F = \mathbb{R}$

i) $D_f = \mathbb{R}$

ñ) $D_g = (-3, 3)$

k) $D_g = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

p) $D_f = [-4,4]$

m) $D_h = (-\infty, -2) \cup (-2, 3]$

r) $D_h = [-2, 7) \cup (7, \infty)$

9.

a) $D_F = [-4, \infty),\ R_F = (-\infty,\ 0]$

e) $D_f = \mathbb{R},\ R_F = (-\infty,\ 0] \cup [1, \infty)$

c) $D_H = \mathbb{R} - \{0\},\ R_F = \mathbb{R} - \{0\}$

11.

a) par

e) ninguna

i) ninguna

c) impar

g) par

12.

a) $(f+g)(x) = x^2 + x - 3\ \ D_{f+g} = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = -x^2 + x - 3\ \ D_{f-g} = \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = x^3 - 3x^2 D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$

$(f/g)(x) = \dfrac{x-3}{x^2} D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0\}$

$(f \circ g)(x) = x^2 - 3\ \ D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = (x-3)^2 D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

c) $(f+g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{2}{x} D_{f+g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$(f-g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x} D_{f-g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{2}{x}\sqrt{x^2 - 1} D_{f \cdot g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$(f/g)(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} D_{f/g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1} D_{f \circ g} = [-2, 2]$

$(g \circ f)(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} D_{g \circ f} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

e) $(f + g)(x) = |x| + x^2 - 4x D_{f+g} = \mathbb{R}$

$(f - g)(x) = |x| - x^2 + 4x D_{f-g} = \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = |x|(x^2 - 4x) D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$

$(f/g)(x) = \frac{|x|}{x^2 - 4x} D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

$(f \circ g)(x) = |x^2 - 4x| \qquad D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = x^2 - 4|x| \qquad D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

15.

a) $f(x) = x^5, \ g(x) = x - 9$

c) $f(x) = \frac{x}{x+4}, \ g(x) = x^2$

e) $f(x) = |x|, \ g(x) = 2x^3 - 4$

16.

a) $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{(x^2+2)^3}$

17.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \ g(x) = x - 1, \ h(x) = \sqrt{x}$

19.

a) Es inyectiva

20.

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

c) $f^{-1}(x) = x^2$

21.

a) $y = f(x) + 2$

c) $y = f(x-2)$

e) $y = f(2x)$

23.

c) F

g) F

a) V

e) F

24.

a) $\frac{\pi}{6}$

e) $-\frac{3\pi}{2}$

i) $\frac{4\pi}{5}$

c) $-\frac{\pi}{3}$

g) $\frac{5\pi}{6}$

25.

c) $-60°$

g) $420°$

a) $210°$

e) $-350°$

26.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) 1

c) $-\sqrt{2}$

g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

27.

a) III cuadrante

c) II cuadrante

28.

a) sen $\theta = \frac{3}{4}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$\tan\theta = -\dfrac{4.7}{1}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4.7}{4.8}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{4.8}$

e) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

32.

a) $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

g) $x = 0,\ 2\pi,\ \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

c) $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

i) $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

e) $x = \pi, \frac{2\pi}{3}$

36.

a) $5^2 = 25$

e) $e^x = 5$

i) $8^{2/3} = 4$

c) $8^{1/3} = 2$

g) $e^4 = x - 1$

37.

a) $\log_3 125 = 5$

e) $\log_2 1/8 = -3$

c) $\log 1000 = 3$

f) $\ln 2 = x$

38.

a) $x = 2^5$

g) $x^{1/2} = 6$

c) $2^x = 16$

i) $x^{3/2} = 8$

e) $x^3 = 1000$

39.

a) $x \approx 1{,}3979$

c) $x \approx -0{,}5849$

40.

a) $x = \pm 1$

c) $x = \ln 2,\ x = 0$

e) $x = \frac{\ln 3}{2}$

41.

a) $x = 3, x = -2$

c) $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13})$

e) $x = -1,\ x = 9/4$

Parte 5. Límites y continuidad

26. Introducción a los límites

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

Veamos cómo se comporta $f(x)$ en las cercanías de $x = 2$.

x	1,5	1,75	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$	9,25	10,5625	11,41	11,94	11,994	?	12,006	12,06	12,61

$\longrightarrow 12 \quad 12 \longleftarrow$

Se ve que cuando x se aproxima a 2 por la izquierda o por la derecha, la función $f(x)$ se aproxima cada vez más a 12. Observe que para $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4 \;\Rightarrow\; y = (x^2+2x+1)+3$$

$$\Rightarrow\; y-3 = (x+1)^2$$

Y gráficamente:

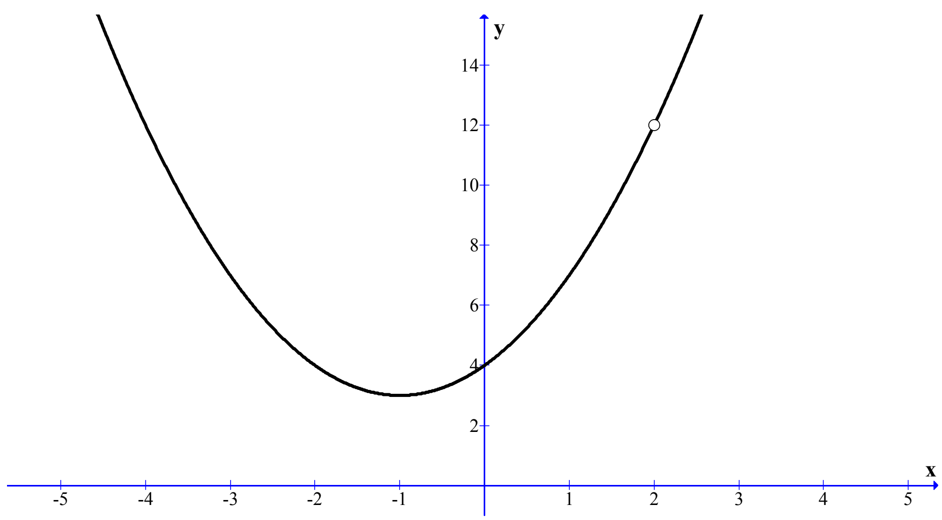


Figura 26.1. Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$.

En este caso, decimos que 12 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 y escribimos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12$$

26.1 Definición intuitiva del "Límite de una función"

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto c, excepto quizás en c, diremos que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c lo que escribimos como:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Esto significa que L es un número real y que podemos hacer que $f(x)$ se aproxime todo cuanto queramos (tanto como queramos) al número L haciendo que x se aproxime lo suficientemente a c, por la derecha y por la izquierda, sin tomar $x = c$.

Se dice que $f(x)$ se aproxima cada vez más a L a medida que x se aproxima a c por izquierda o por derecha, como se ilustra en la gráfica 26.2.

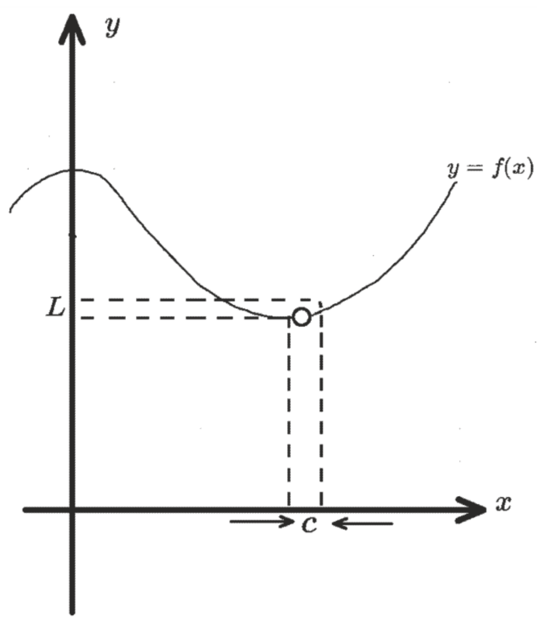


Figura 26.2. Gráfica de la existencia del límite.

Mientras que en la figura 26.3 se muestra que el límite de $f(x)$ no existe cuando $x \to c$, porque la función $f(x)$ se acerca a valores diferentes cuando x se aproxima a c por la derecha y por la izquierda.

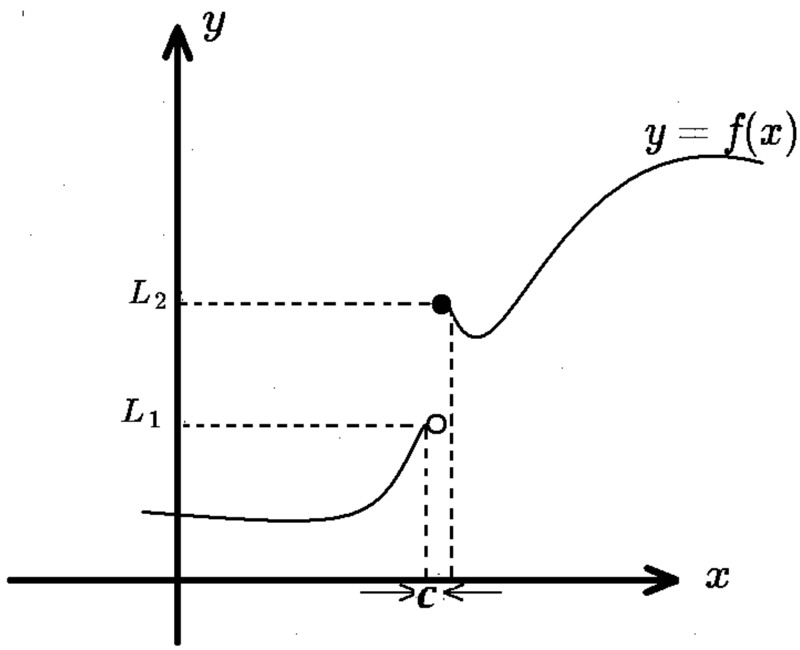


Figura 26.3. Gráfica de la no existencia del límite en c.

Ejemplo 26.1

Sea $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ con x medido en radianes, complete la siguiente tabla y use el resultado para estimar $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,9983	0,999983	0,99999983	?	0,99999983	0,999983	0,9983

$\longrightarrow$ 1 $\longleftarrow$

Se observa que a medida que$x$ se aproxima a cero por la izquierda (valores menores que cero) o por la derecha (valores mayores que cero) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está cada vez más próxima a 1; por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Ejemplo 26.2

Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $D_f = [-5; \infty) - \{4\}$, estime $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

Solución:

x	3,5	3,9	3,99	4	4,01	4,1	4,5
$f(x)$	0,169	0,167	0,1667	?	0,1666	0,1662	0,1644

$\longrightarrow$ 0,1666 $\longleftarrow$

Entonces, $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = 0{,}1666 \approx \frac{1}{6}$

Ejemplo 26.3

Use la siguiente gráfica para hallar el límite de $f(x)$ en el punto que se indica si es que este límite existe.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

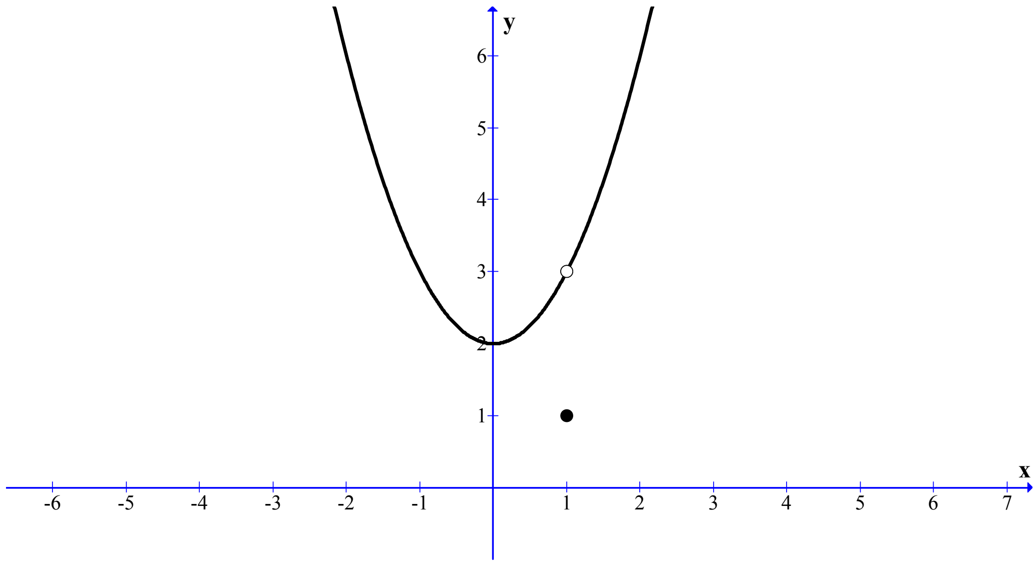


Figura 26.4. Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

Solución:

De la gráfica se observa que cuando x se aproxima a 1 por la derecha y por la izquierda la función $f(x)$ se aproxima a 3; este valor es diferente al valor que toma la función cuando $x = 1$ que es $f(1) = 1$. De esta manera:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \neq f(1) = 1$$

26.2 Límites laterales

26.2.1 Límite por la derecha

Decir que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$significa que cuando x está cerca, pero a la derecha de a, entonces $f(x)$ está cerca de L.

26.2.2 Límite por la izquierda

Decir que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca, pero a la izquierda de a, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Observación

Decir que $x \to a^-$ es diferente a decir que $x \to -a$.

El siguiente teorema establece la relación que existe entre el límite de una función en un punto y los límites laterales.

26.2.3 Teorema: relación entre límite y límites laterales

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

Nota resumen:

1. Al hallar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no nos interesa para nada lo que sucede en $x = a$.
2. Nos interesa lo que sucede a $f(x)$ cuando x toma valores alrededor de a.

Observaciones

1. Otra forma equivalente de enunciar el teorema es la siguiente: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe si y solo si no existe alguno de los límites laterales o, si existen, son diferentes.
2. Las dos formas del teorema se utilizan para determinar la existencia o no del límite de una función.

Ejemplo 26.4

Encuentre el valor del siguiente límite o establezca que no existe: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}; x \neq 1$.

Solución:

De acuerdo con la definición del valor absoluto, se tiene que:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & si\, x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & si\, x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1 & si\, x \geq 1 \\ -(x-1) & si\, x < 1 \end{cases}$$

De esta forma:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1, \qquad si\ x > 1$$

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1, \qquad si\ x < 1$$

La función $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, $x \neq 1$, puede escribirse entonces como una función a tramos, así:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & si\ x > 1 \\ -1 & si\ x < 1 \end{cases}$$

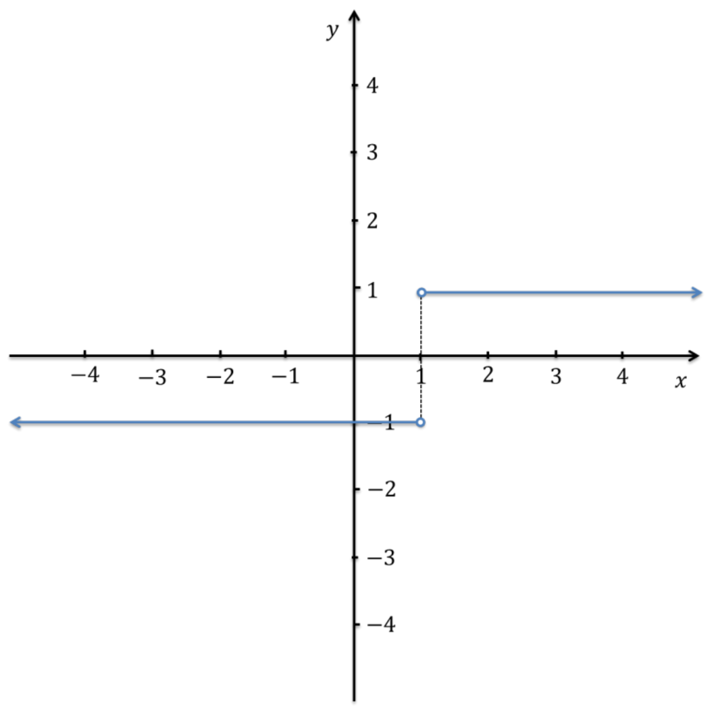


Figura 26.5 Gráfica de la función $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

Ahora,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x)\ no\ existe$$

26.3 Evaluación analítica de límites

26.3.1 Teorema: álgebra de límites

Sea n un entero positivo, Kuna constante real y f y g funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Entonces:

1.$\lim_{x\to a} K = K$ (el límite de una constante es la constante)

2.$\lim_{x\to a} x = a$ (límite de la función identidad)

3. $\lim_{x\to a} K \cdot f(x) = K \cdot \lim_{x\to a} f(x)$.

(toda constante que multiplica o divide puede salir del límite)

4. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

(el límite de una suma de funciones es la suma de los límites)

5. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

(el límite de la diferencia de funciones es la diferencia de los límites)

6. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

(el límite del producto es el producto de los límites)

7. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

(el límite de un cociente es el cociente de los límites)

8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ (el límite de una función potencial es la potencia del límite).

9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, con $\lim_{x\to a} f(x) > 0$cuando n par

(el límite de una función radical es la raíz del límite)

Ejemplo 26.5

Encuentre el $\lim_{x\to -2} 8x^2 - 7x + 2$

Solución:

$\lim_{x\to -2} 8x^2 - 7x + 2$

$= \lim_{x\to -2} 8x^2 - \lim_{x\to -2} 7x + \lim_{x\to -2} 2$ Propiedades4 y 5

$= 8\lim_{x\to -2} x^2 - 7\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 2$ Propiedad 3

$= 8\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2 - 7\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 2$ Propiedad 8

$= 8(-2)^2 - 7(-2) + 2$ Propiedades 1 y 2.

$= 32 + 14 + 2 = 48$

Ejemplo 26.6

Encuentre:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{5x^3 + 9}{x^2 + 1}}$$

Solución:

$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{5x^3+9}{x^2+1}} = \frac{\lim_{x\to 2} \sqrt{5x^3+9}}{\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+1}}$ propiedad 7

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 2}(5x^3+9)}}{\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+1)}}$$ propiedad 9

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 2} 5x^3+\lim_{x\to 2} 9}}{\sqrt{\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} 1}}$$ propiedad 4

$$= \frac{\sqrt{5\,(\lim_{x\to 2} x)^3+\lim_{x\to 2} 9}}{\sqrt{(\lim_{x\to 2} x)^2+\lim_{x\to 2} 1}}$$ propiedades 3 y 8

$$= \frac{\sqrt{5(2)^3+9}}{\sqrt{(2)^2+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$ propiedades 1 y 2

26.3.2 Teorema: Límite de una función polinómica y de una función racional

Si $f(x)$ es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$..

Si $g(x)$ es una función racional de la forma $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y a es un número real tal que $q(a) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Ejemplo 26.7

Encuentre $\lim_{x\to 2} \frac{3x^4-2x^2+7}{x^2-7x+1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^4 - 2x^2 + 7}{x^2 - 7x + 1} = \frac{3(2)^4 - 2(2)^2 + 7}{(2)^2 - 7 \cdot 2 + 1} = \frac{48 - 8 + 7}{4 - 14 + 1} = \frac{47}{-9} = -\frac{47}{9}$$

26.3.3 Teorema: Límite de funciones iguales

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en un intervalo I que contiene al punto a y tales que:

1. $f(x) = g(x)$ para todo $x \epsilon I$, excepto posiblemente en a.
2. $\lim_{x\to a} g(x)$ existe y es L

Entonces, $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Ejemplo 26.8

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$$

Determine el $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Solución:

Si evaluamos directamente $\lim_{x \to 2} f(x)$,tendríamos que: $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = \frac{3(2)^2-5(2)-2}{2-2} = \frac{0}{0}$

El cociente $0/0$ no es un número real y se conoce en el cálculo como una *forma indeterminada* (no puede determinarse a primera vista el valor exacto del límite). Sin embargo, usando manipulaciones algebraicas puede transformarse la función en una función equivalente que tiene límite y que de acuerdo con el último teorema coincide con el límite de $f(x)$.

Al efectuar el proceso algebraico y simplificar se conoce en el lenguaje del cálculo como "eliminar la indeterminación".

Así

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = \frac{(3x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3x + 1$$

Por tanto las funciones $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$ y $g(x) = 3x + 1$ son iguales en todos los puntos del eje real, excepto en el punto $x = 2$.

Además $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$, y de acuerdo al teorema anterior se tiene que $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

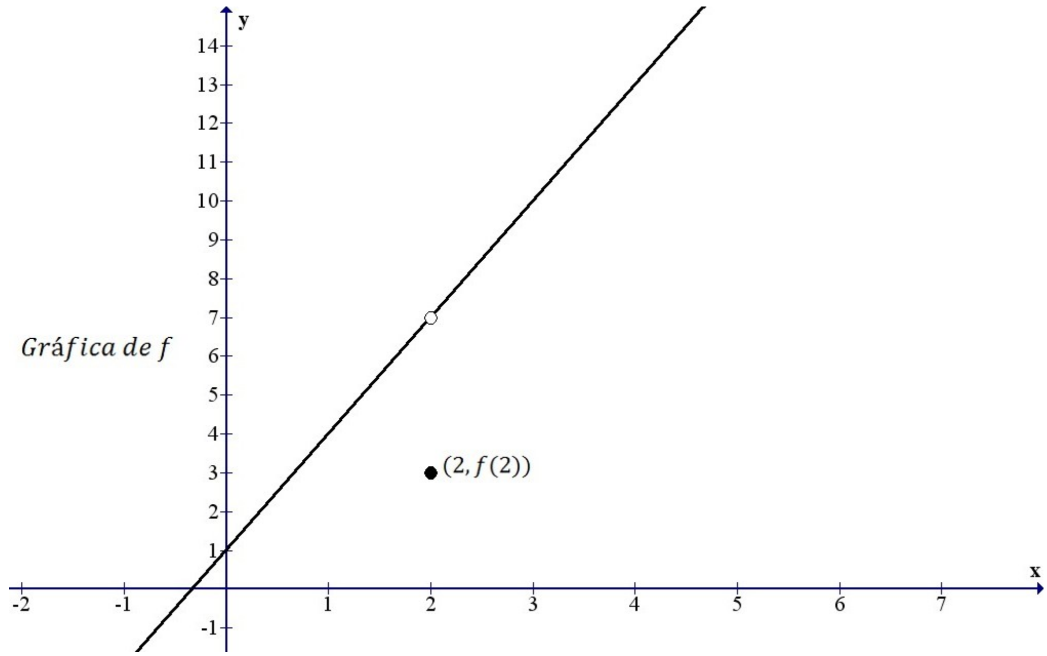


Figura 26.6. Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$.

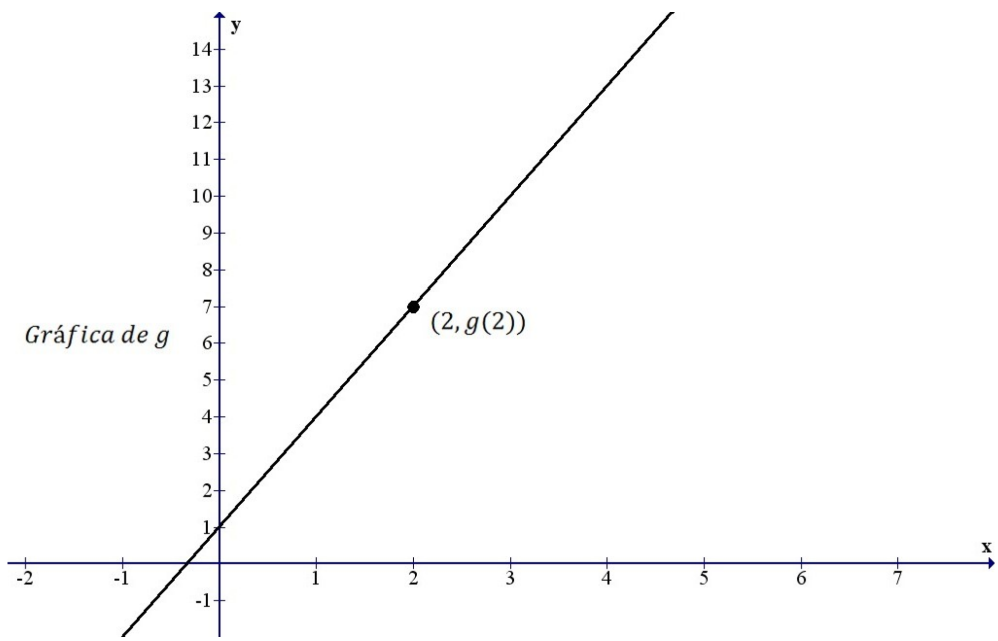


Figura 26.7. Gráfica de $g(x) = 3x + 1$.

Procedimiento para eliminar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

1. Si la función f es racional, factoriza, simplifica y evalúa.

2. Si la función f es irracional, multiplica y divide por el conjugado de donde esté la raíz, simplifica y evalúa.

Ejemplo 26.9

Evalúa los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{2x^2-7x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{2x^2-7x+3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(2x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{2x-1} = \frac{3^2+3\cdot 3+9}{2\cdot 3-1} = \frac{27}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = \lim\limits_{x\to 64} \frac{(\sqrt[3]{x}-4)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-8)(\sqrt{x}+8)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)} = \lim\limits_{x\to 64} \frac{(x-64)(\sqrt{x}+8)}{(x-64)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)}$

$$\lim_{x\to 64} \frac{(x-64)(\sqrt{x}+8)}{(x-64)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)} = \lim_{x\to 64} \frac{(\sqrt{x}+8)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

26.3.4 Teorema del sánduche

Sean $f(x), g(x)$ y $h(x)$ tres funciones definidas en un intervalo I, excepto posiblemente en el punto $a \in I$ y tales que:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L.$

Entonces, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

Gráficamente tenemos que:

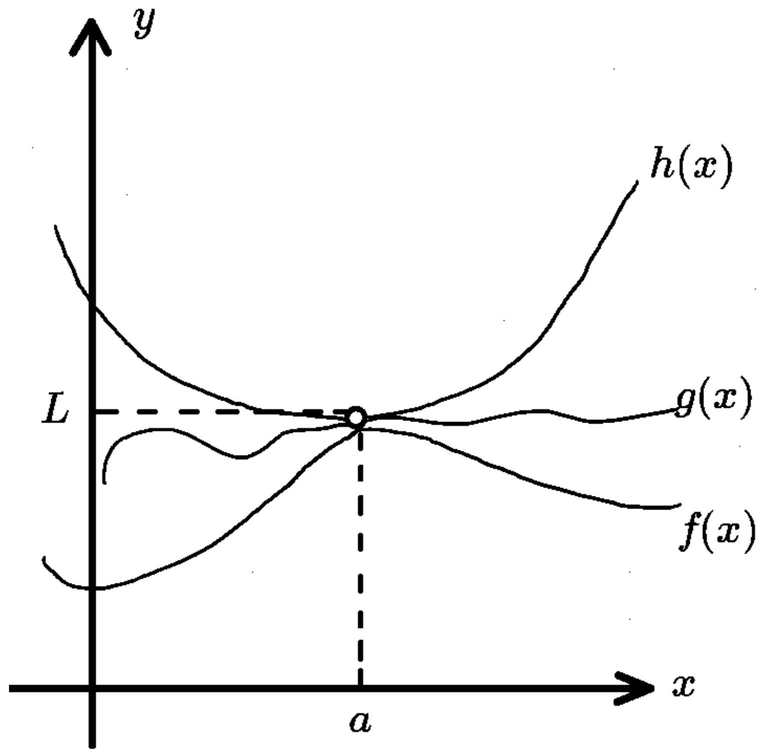


Figura 26.8 Ilustración de teorema del sánduche.

Ejemplo 26.10

Demuestra que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x * \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0 * \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

La respuesta es correcta pero el ejercicio está mal resuelto ¿por qué?

b) La manera correcta de resolverlo es usando el Teorema del emparedado así:

Como el rango de la función seno está entre -1 y 1 entonces $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando esta desigualdad por x, con $x > 0$ se tiene que $-x \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x$, además

$\lim\limits_{x \to 0^+} -x = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$, entonces por el teorema del sanduche se puede concluir que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

27. Límites de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

27.1 Teorema: Límites de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

Para todo número real c en el dominio de la función

1. $\lim\limits_{x \to c} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(c)$
2. $\lim\limits_{x \to c} \cos(x) = \cos(c)$
3. $\lim\limits_{x \to c} \tan(x) = \tan(c)$
4. $\lim\limits_{x \to c} \cot(x) = \cot(c)$
5. $\lim\limits_{x \to c} \sec(x) = \sec(c)$
6. $\lim\limits_{x \to c} \csc(x) = \csc(c)$
7. $\lim\limits_{x \to c} a^x = a^c, a > 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} \log_a x = \log_a c, a > 0$

Ejemplo 27.1

Encuentre $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x^2-1)\tan x}{x^2+1}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2-1)\tan x}{x^2+1} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \tan x = -1 \cdot 0 = 0$$

Ejemplo 27.2

Encuentre los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to 2} (2 + \ln x)$

b. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 e^{3x})$

c. $\lim_{x \to 2} \log_3 (x^2 - 1)^2$

Solución:

a. $\lim_{x \to 2} (2 + \ln x) = 2 + \ln 2$

b. $\lim_{x \to 3} (x^2 e^{3x}) = 3^2 e^9 = 9e^9$

c. $\lim_{x \to 2} \log_3 (x^2 - 1)^3 = \log_3 (2^2 - 1)^3 = \log_3 27 = 3$

27.2 Teorema: Límites trigonométricos especiales

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

Demostración:

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\ x \cdot \operatorname{sen} x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \dfrac{\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)} = 1 \cdot \dfrac{0}{1 + 1}$

$= 0$

Ejemplo 27.3

Encuentre cada límite:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Solución:

a. Al evaluar este límite directamente se obtiene división por cero. Para resolver este problema, se reescribe el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}$$

Haciendo un cambio de variable $y = 5x$ y teniendo en cuenta que cuando $x \to 0$entonces $y \to 0$ puede escribirse:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{sen5x}{5x}$$

$$= 5\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{5x} = 5\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

$$= 5\cdot 1 = 5$$

b.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= 1\cdot 1 = 1$$

c.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

28. Límites infinitos. Asíntotas verticales

Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$y así f es discontinua en $x = 2$. Estudiemos $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$\frac{1}{x-2}$	-10	-100	-1000	-10000	?	10000	1000	100	10

$\longrightarrow -\infty \qquad \infty \longleftarrow$

Se observa que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ no existe, ya que cuando $x \to 2^-$, $f(x)$ decrece sin límite y cuando $x \to 2^+$, $f(x)$ crece sin límite y escribimos:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

Gráficamente, tenemos:

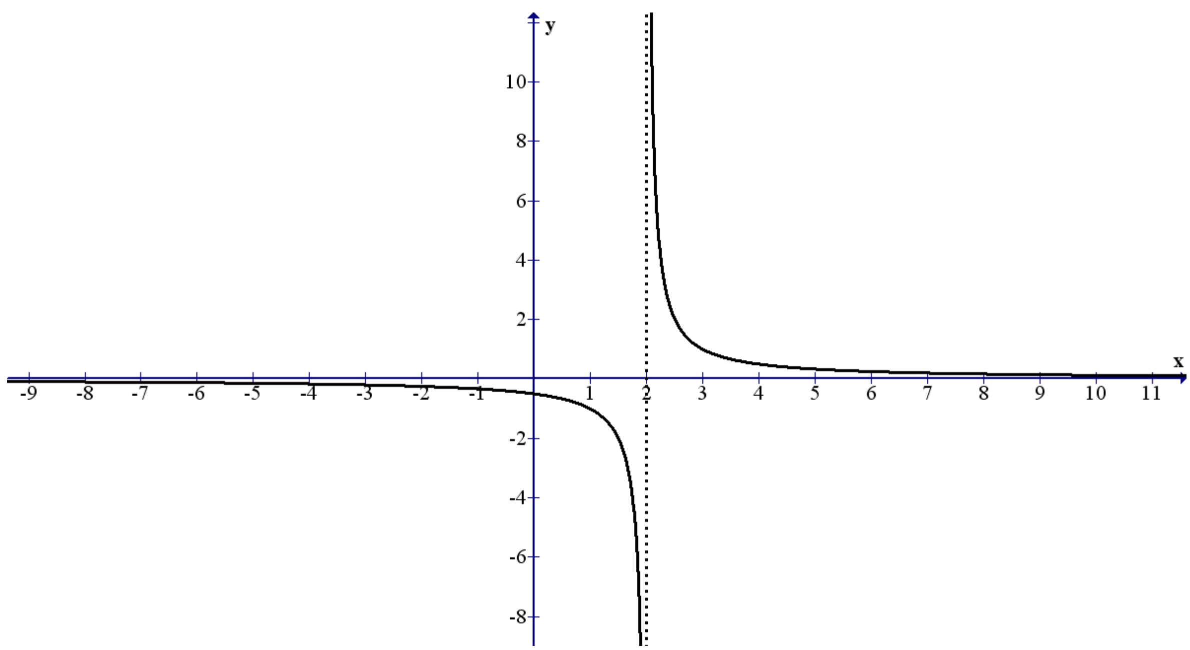


Figura 28.1. Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Definición

Sea f una función definida en un intervalo I, excepto posiblemente en el punto $a \in I$. Entonces:

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan grandes o tan pequeños como deseemos, tomando a x lo suficientemente cerca de a (pero no igual aa), es decir, los límites infinitos de una función se dan cuando el valor de la función crece o decrece sin límite a medida que la variable x se aproxima al valor dado.

Pueden darse definiciones similares para:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

28.1 Algunos límites infinitos

1. $\lim_{x \to c^+} \frac{k}{x-c} = \begin{cases} +\infty, & si\ k > 0 \\ -\infty, & si\ k < 0 \end{cases}$

En este caso, el denominador tiende a cero a través de valores positivos

2. $\lim_{x \to c^-} \frac{k}{x-c} = \begin{cases} -\infty, & si\ k > 0 \\ +\infty, & si\ k < 0 \end{cases}$

En este caso el denominador tiende a cero a través de valores negativos.

Lo anterior, se indica así:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{k}{x-c} = \frac{k}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & si\ k > 0 \\ -\infty, & si\ k < 0 \end{cases}$$

Y

$$\lim_{x \to c^-} \frac{k}{x-c} = \frac{k}{0^-} = \begin{cases} +\infty, & si\ k > 0 \\ -\infty, & si\ k < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 28.1

Determine:

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x+1}{(x-4)^2} \quad y \quad \lim_{x \to 4^+} \frac{x+1}{(x-4)^2}$$

Solución:

Cuando $x \to 4^+$ y $x \to 4^-$, entonces el numerador $x + 1 \to 5$ y el denominador $(x-4)^2$ es un número que se aproxima a cero, pero positivo y por tanto $\frac{x+1}{(x-4)^2}$ es un número positivo grande, así $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{x+1}{(x-4)^2} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x+1}{(x-4)^2} = \infty$.

28.2 Asíntota vertical

La recta $x = c$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si se cumple una de las siguientes condiciones

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Las asíntotas verticales ocurren en las funciones racionales, en los ceros del denominador que no son ceros del numerador.

Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ cuando x tiende a c por la izquierda o por la derecha decimos que la recta $x = c$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita en $x = c$.

Para determinar si una función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = c$, tenemos en cuenta lo siguiente:

Si f y g son funciones continuas en un intervalo abierto que contiene al punto $x = c$ y si $f(c) \neq 0$ y $g(c) = 0$ entonces la gráfica de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene en $x = c$ una asíntota vertical, es decir, las asíntotas verticales ocurren en los ceros del denominador que no son ceros del numerador.

Ejemplo 28.2

La función $f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$tiene asíntotas verticales en $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ y su gráfica tiene la forma

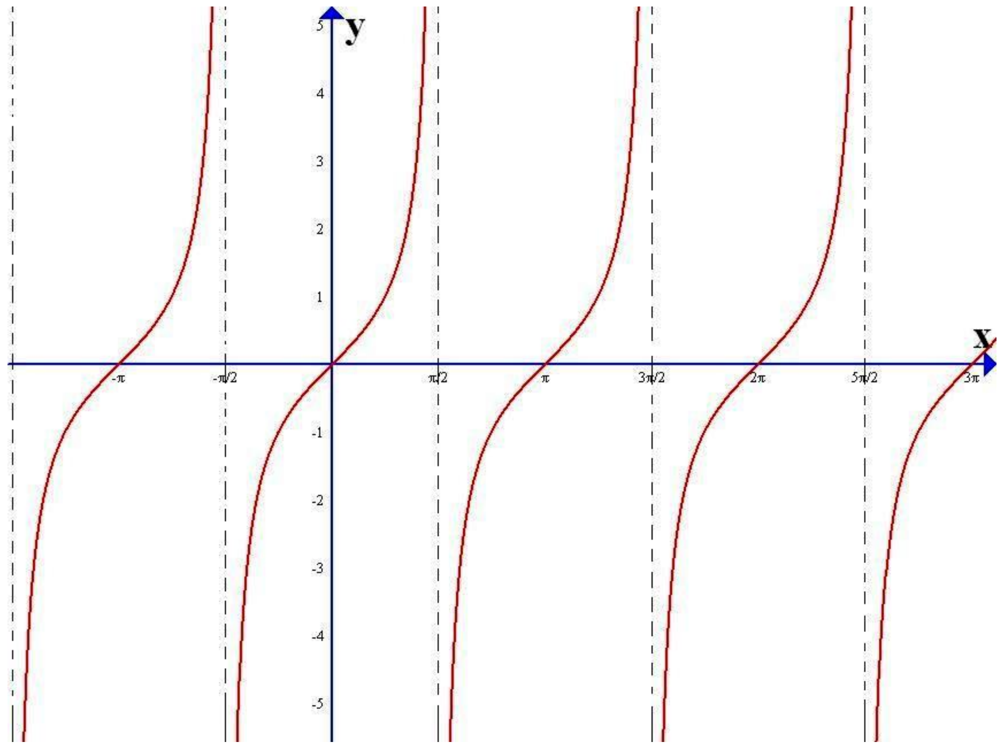


Figura 28.2 Gráfica función tangente.

28.3 Propiedades de los límites infinitos

Sean $c, L \in \mathbb{R}$ y f y g funciones tales que $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = L$. Entonces,

$$\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$$

$$\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \infty, \qquad L \neq 0$$

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Las propiedades anteriores también son válidas, si $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ y para límites por izquierda y por derecha.

Ejemplo 28.3

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ complete la siguiente tabla para determinar $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x^2-9}$ y $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2-9}$

x	-3,5	-3,1	-3,01	-3,001	-3	-2,999	-2,99	-2,9
$f(x)$	0,307	1,639	16,63	166,63	?	-166,694	-16,694	-1,694

$$\longrightarrow \infty \qquad -\infty \longleftarrow$$

Observamos que $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$

Analíticamente, tenemos:

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{(x+3)} \cdot \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{(x-3)}$$

$$= \frac{1}{0^-} \cdot \frac{-1}{6} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{(x+3)} \cdot \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{(x-3)}$$

$$= \frac{1}{0^+} \cdot \frac{-1}{6} = -\infty$$

Y podemos concluir que en $x = -3$ hay una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$. De manera análoga, se demuestra que $x = 3$ también es una asíntota vertical para esta gráfica.

Ejemplo 28.4

Halle las asíntotas verticales para las siguientes funciones si estas existen:

a. $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$

b. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

Solución:

a. Para $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$ el $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, y en $x = 1$ el numerador es 3 y el denominador es cero; por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{1-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{1-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

entonces en $x = 1$ hay una asíntota vertical.

b. Para $f(X) = \frac{x+1}{x^2-1}$ el $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

Para $x = 1$ el numerador es 2 y el denominador es cero; por consiguiente en $x = 1$ hay una asíntota vertical y se cumple que:

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

En $x = -1$ tanto el numerador como el denominador son cero y por lo tanto en $x = -1$ no hay asíntota vertical, ya que en $x = -1$se tiene que:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x^2-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

29. Límites al infinito. Asíntotas horizontales

Consideremos la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y no existe la función en $x = 0$, por tanto tiene una asíntota vertical, pues $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ así, en $x = 0$ la discontinuidad es inevitable.

Veamos cómo se comporta $f(x)$ cuando x crece sin límite $(x \to +\infty)$ y cuando x decrece sin límite $(x \to -\infty)$

x	-1	-10	-100	-1000	$\to -\infty$
$f(x)$	-1,4142	-1,004987	-1,00005	-1,000005	-1

Así, a medida que x decrece sin límite se observa que $f(x)$ se aproxima cada vez más a -1, entonces escribimos $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1$.

x	1	10	100	1000	$\to +\infty$
$f(x)$	1,4142	1,004987	1,00005	1,000005	1

Observamos que a medida que x crece sin límite, la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ se aproxima cada vez más a 1, y escribimos $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$.

En general, si $f(x)$ se aproxima cada vez más a L a medida que x crece sin límite, decimos que L es el límite en el infinito de $f(x)$ y escribimos:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

De manera similar, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$significa que $f(x)$ se aproxima cada vez más a L a medida que x decrece sin límite.

29.1 Asíntotas horizontales

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Para la gráfica de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ se tiene que $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1$ y $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$.

Por lo tanto, las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son asíntotas horizontales para la gráfica de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Para esta función también sabemos que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical. El conocimiento de las asíntotas nos permite aproximar mejor la gráfica de la función. También sabemos que es positiva si x es positivo, y es negativa cuando x es negativa y que es simétrica con el origen.

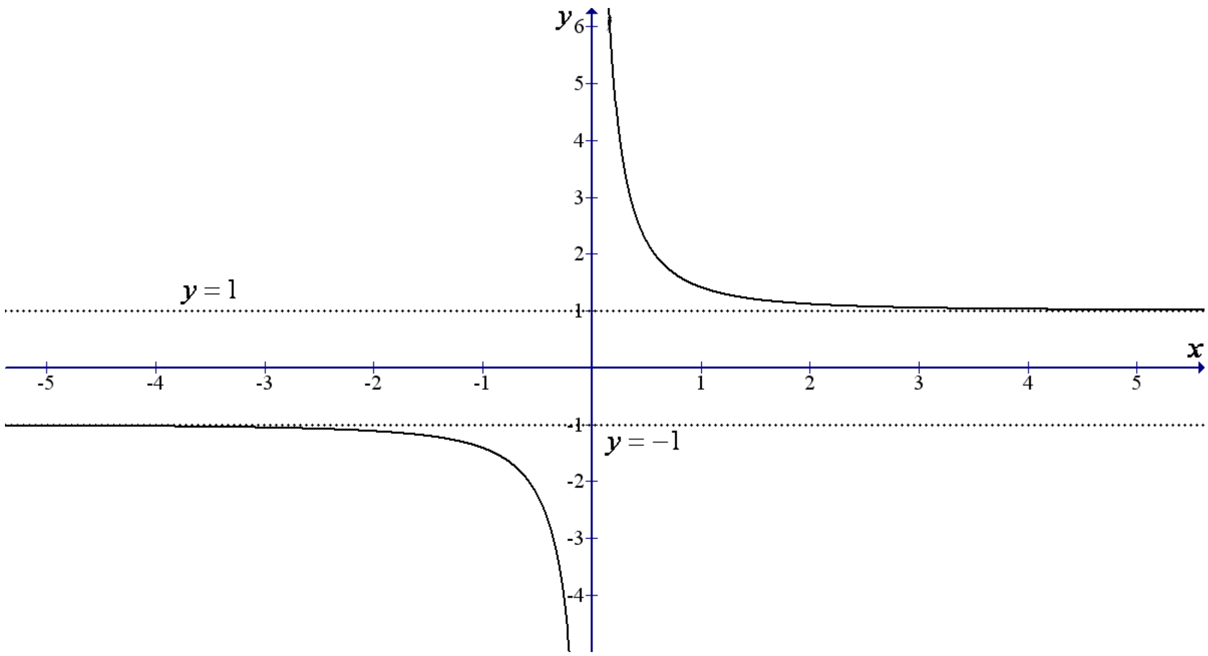


Figura 29.1. Gráfica de una función con asíntotas horizontales.

El siguiente teorema nos permite encontrar límites en el infinito**.**

Teorema: Sea $r \in \mathbb{R}^+$y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0$
2. Si x^r está definido para $x < 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} x^r = \infty$ sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para buscar $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x, y a continuación utilizamos las propiedades del teorema anterior.

Ejemplo 29.1

Calcule los siguientes límites en el infinito:

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + 1}{10x^3 - 9}$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{x+3}$

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}}$

d. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{x^2+x}}$

e. $\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+1})$

f. $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

Solución:

a.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x^2+1}{10x^3-9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{10x^3}{x^3}-\frac{9}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{10-\frac{9}{x^3}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

b.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\frac{5}{0^+}=\infty$$

c.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=2$$

d.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{x^2+x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-3x}{|x|}+\frac{1}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-3x}{(-x)}+\frac{1}{(-x)}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 2$$

Nota: Para límites cuando $x \to -\infty$ para funciones con radicales con índice par, dividimos $|x|$

e.

$\lim_{x\to\infty}(2x - \sqrt{4x^2+1}) = (\infty - \infty)$ se multiplica y divide por el conjugado

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2x-\sqrt{4x^2+1})(2x+\sqrt{4x^2+1})}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-(4x^2+1)}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{2+2} = 0$$

f. $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ por el teorema del emparedado se sabe que $-1 \leq \operatorname{sen} 2x \leq 1$; dividiendo todo por x tenemos qué $\frac{-1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \leq \frac{1}{x}$ y como $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x} = 0$. Entonces $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 0$

30. Función continua

Intuitivamente se puede decir que una función es continua cuando en su gráfica no aparecen saltos o cuando el trazo de la gráfica no tiene “huecos”. En las siguientes figuras aparece la gráfica de tres funciones: dos de ellas *no continuas (discontinuas)* en el punto $x = a$ de su dominio (figura a y b) y la otra *continua* en todo su dominio (figura c).

a)

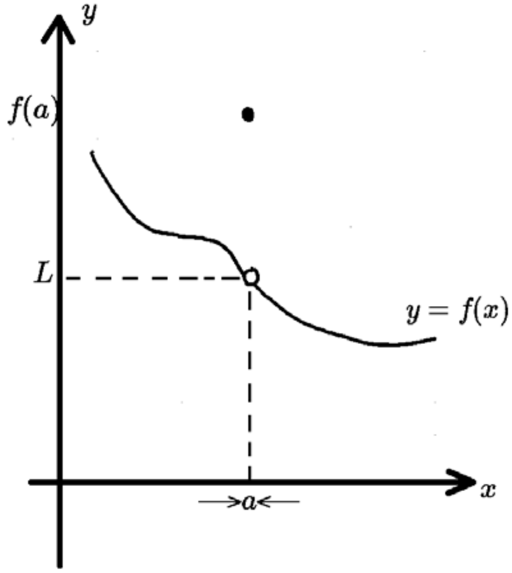


Figura 30.1. Gráfica de función discontinua en $x = a$, donde el límite existe.

b)

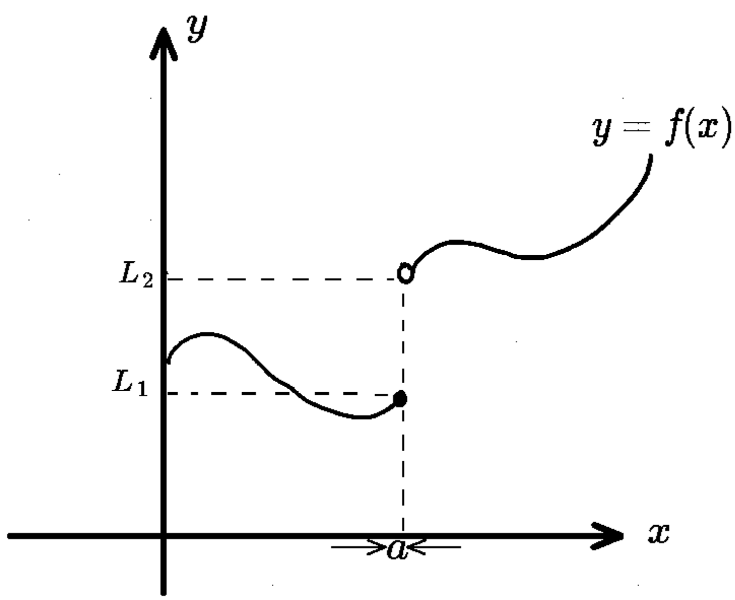


Figura 30.2. Gráfica de una función discontinua en $x = a$, donde el límite no existe.

c)

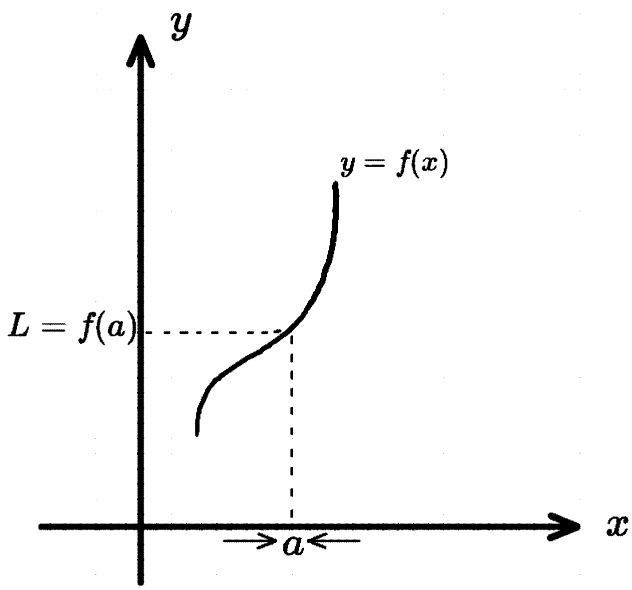


Figura 30.3. Gráfica de una función continua en $x = a$.

Al mirar con cuidado las gráficas anteriores podemos deducir intuitivamente resultados que permitirán comprender con mayor claridad la definición precisa de lo que significa ser una función continua en un punto dado de su dominio.

- En la gráfica de la figura a) tenemos que:
  i. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$ (existe).
  ii. $f(a)$ (existe).

Pero $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$ (por esta razón f es discontinua).

- Para la gráfica de la figura b) tenemos que:
  i. $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ (no existe).
     (por esta razón f es discontinua).
  ii. $f(a)$ (existe).
- Finalmente, para la gráfica de la figura c) tenemos que:
  i. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \text{L} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$ (existe).

ii. $f(a)$ (existe).

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Estas tres condiciones son las que en última instancia permiten deducir intuitivamente que la función cuya gráfica aparece en la figura c) es continua en el punto a.

Lo anterior nos permite establecer la siguiente definición:

30.1 Definición: función continua en un punto

Una función f es *continua* en $x = a$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f(a)$existe.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es *continua en un intervalo abierto*$(a; b)$ si es continua en cada uno de los puntos del intervalo. Una función que es continua en toda la recta real $(-\infty; \infty)$es *continua en todas partes.*

Observaciones

1. Si en la definición anterior sustituimos $\lim_{x \to a} f(x)$ por $\lim_{x \to a^+} f(x)$ o por $\lim_{x \to a^-} f(x)$, decimos entonces que f es *continua a la derecha o a la izquierda*, respectivamente, del punto $x = a$.
2. Algunos autores adoptan como definición de continuidad en un punto la condición 3 de la definición anterior, esto es, f *es continua* en $x = a$si y solo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
3. Si en la definición de continuidad se hace $x = a + h$, con a y $(a + h)$ en el dominio de$f$, se dice entonces que f es continua en a si y solo si $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

30.2 Discontinuidad y clasificación de las discontinuidades

Si al menos una de las tres condiciones establecidas para la función continua deja de cumplirse, se dice que f es *discontinua (no continua)* en $x = a$.

Si f es discontinua en $x = a$, y $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero es diferente de $f(a)$, se dice que la discontinuidad es *removible o evitable*. En caso contrario, se dice que la discontinuidad es *esencial.*

Así, por ejemplo, la gráfica de la figura a) corresponde a la gráfica de una función con discontinuidad *removible o evitable* en$x = a$, mientras que la gráfica de la figura b) corresponde a una discontinuidad *esencial* en $x = a$.

Cuando una función tiene discontinuidad removible en un punto se usa la frase "remover la discontinuidad" para indicar que se puede redefinir la función haciendo que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, y de esta manera obtener una nueva función continua en$x = a$.

Ejemplo 30.1

Considere la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ 3 & si\ x = 0 \\ 2x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ cuya gráfica es:

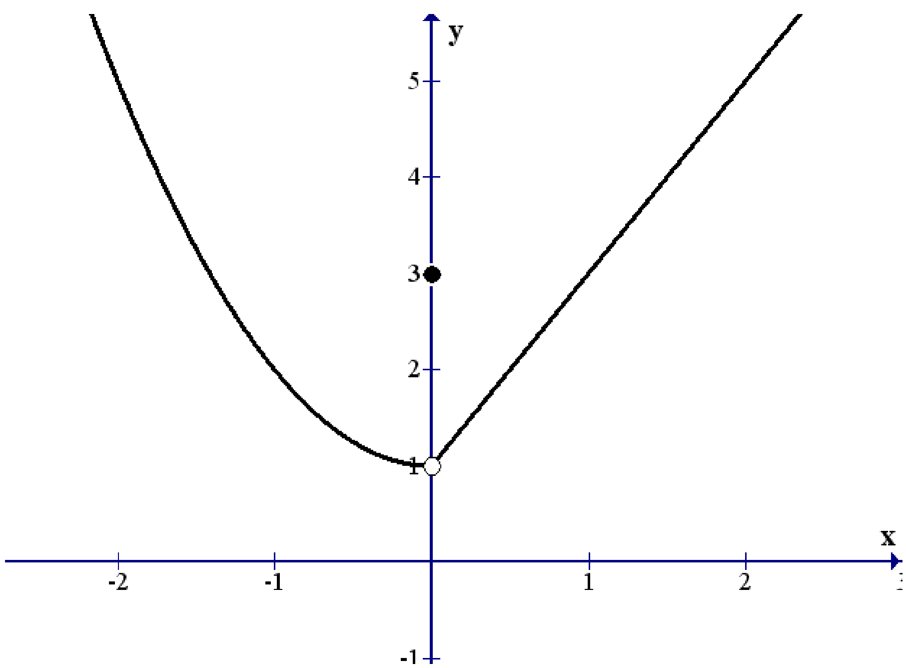


Figura 30.4. Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ 3 & si\ x = 0 \\ 2x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Si se analiza la continuidad de f en el punto $x = 0$, se tiene que:

1. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1 \end{array}\right\}$ (existe)
2. $f(0) = 3$ (existe)

Pero $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 3$, lo que indica que f es discontinua en $x = 0$. Ahora, como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, la discontinuidad es evitable.

Puede entonces "removerse" o "evitarse" la discontinuidad redefiniendo la función de tal forma que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, esto es, redefiniendo f; así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ 2x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Esta nueva función es continua en $x = 0$.

30.3 Teorema 1: Álgebra de funciones continuas

Sean f y g dos funciones continuas en el punto $x = a$, y k una constante. Entonces:

1. kf es continua en $x = a$. (Una constante por una función continua es continua.)
2. $(f + g)$ es continua en $x = a$. (La suma de funciones continuas es una función continua.)
3. $(f - g)$ es continua en $x = a$. (La diferencia de funciones continuas es una función continua.)
4. $(f \cdot g)$ es continua en $x = a$. (El producto de funciones continuas es una función continua.)
5. $\left(\frac{f}{g}\right)$ es continua en $x = a$, si $g(a) \neq 0$. (El cociente de dos funciones continuas es una función continua.)

30.3.1 Consecuencias

1. La función polinómica es continua en todo punto del eje real.
2. Una función racional es continua en los puntos que no anulen el denominador de la función.

Ejemplo 30.2

¿Si $(f+g)(x)$es continua en $x=a$, entonces $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x=a$?

Solución

La implicación formulada es falsa. En efecto, sean:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ x-1 & si\ x>0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ 1 & si\ x>0 \end{cases}$$

Cuyas gráficas aparecen a continuación:

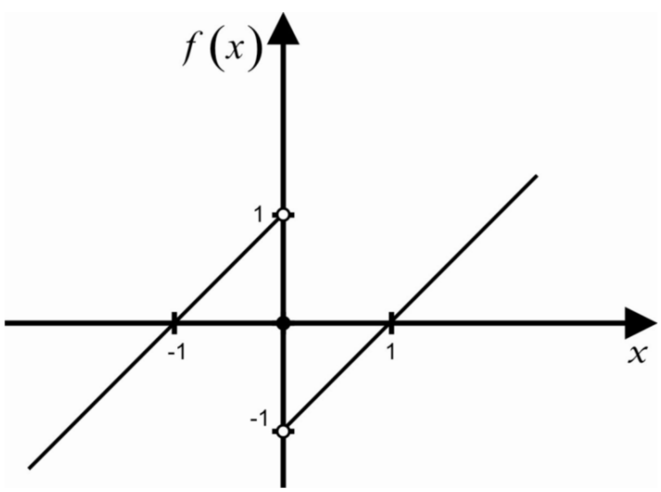


Figura 30.5. Gráfica de la función $f(x)$.

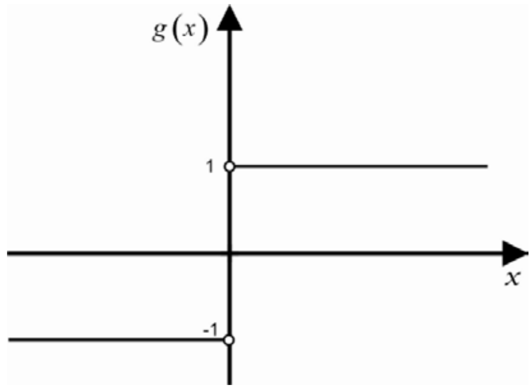


Figura 30.6. Gráfica de la función $g(x)$.

Puede demostrar fácilmente que $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas en $x = 0$ (verifíquelo). Sin embargo,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} (x+1)-1 & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ (x-1)+1 & si\ x>0 \end{cases}$$

Esto es,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ x & si\ x>0 \end{cases}$$

o simplemente $(f+g)(x) = x$es la función identidad, cuya gráfica es continua en $x = 0$.

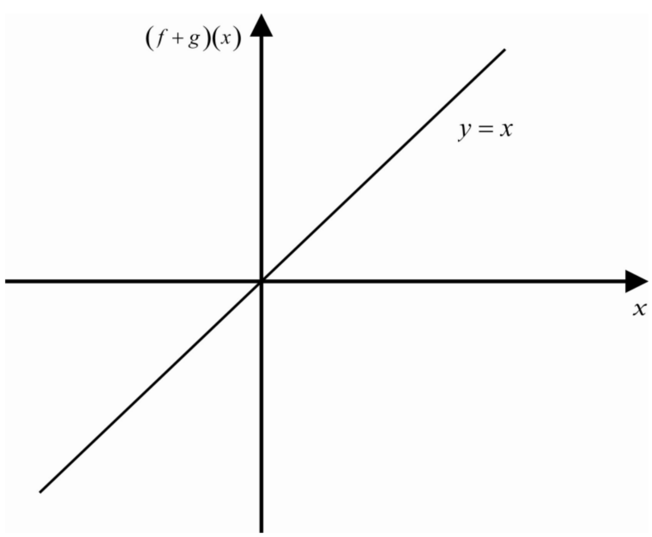


Figura 30.7. Gráfica de la función $(f+g)(x)$.

30.4 Teorema 2: Límite de la función compuesta

Sean f y g dos funciones tales que f es continua en b y $\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces,

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$$

Como consecuencia se sigue que: si g es continua en$a$, y f es continua en $g(a)$, entonces $(f\ \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en$a$.

30.5 Teorema 3: Continuidad de la función valor absoluto y raíz n-ésima

La función valor absoluto es continua para todo número real a. Si n es par, la función raíz n-ésima es continua para todo número real positivo y es continua para todo número real$a$, si n es impar.

30.6 Teorema 4: Continuidad de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

Las funciones seno, coseno y exponencial son continuas en todo número real, y las funciones tangente, cotangente, secante, cosecante y logarítmicas son continuas en todo número real en sus dominios.

Ejemplo 30.3

Determine en qué puntos la función $f(x) = \cos\left(\frac{x^5-6x^3+1}{2x^2+5x-3}\right)$ es continua.

Solución:

Sea $g(x) = \frac{x^5-6x^3+1}{2x^2+5x-3}$ una función racional continua en todos los reales, excepto en $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$ y por el teorema 4 la función cosenoes continua para todos los reales, luego por el teorema 2 $f(x) = h(g(x))$ con $h(x) = \cos x$ es continua para todos los reales, excepto en $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

30.7 Definición: continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a; b]$ si y solo si f es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Es decir, $f$es continua por la derecha de a y continua por la izquierda de$b$.

Ejemplo 30.4

Analice la continuidad de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el intervalo$[-3; 3]$.

Solución

La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en $(-3; 3)$ por el teorema 3; por otro lado,

$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0 = f(-3) \quad \text{continua por la derecha}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0 = f(3) \quad \text{continua por la izquierda}$$

Por tanto se puede concluir que f es continua en el intervalo cerrado $[-3; 3]$, como se muestra en la siguiente gráfica.

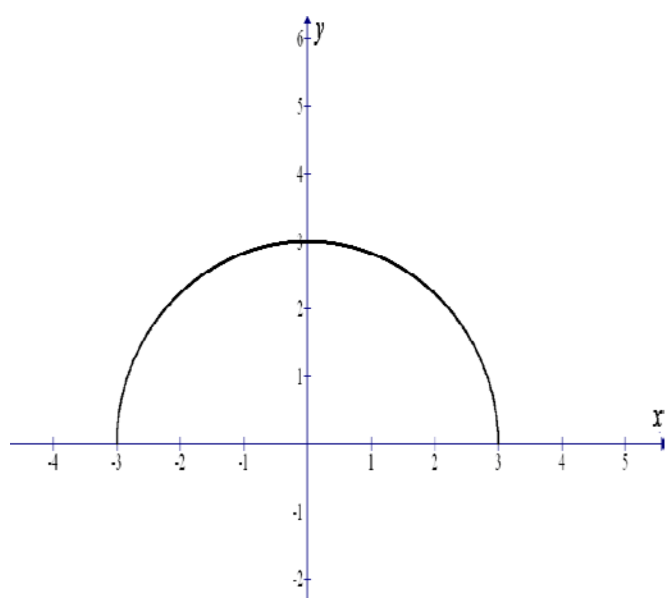


Figura 30.8. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Taller de límites

1. Responda falso o verdadero a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Si $g(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$, entonces $\lim_{x \to -3} g(x) = g(-3)$.

b) Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

c) Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

d) Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales distintos de cero y $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x) = L$.

e) Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c.

f) Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq c$ y $f(c) \neq g(c)$, entonces $f \circ g$ no es continua en c.

g) Si $f(x)$ es un polinomio, entonces la gráfica de la función dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

2. Evalúe los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 3} \frac{5x^2-45}{x-3}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{3-\sqrt{10-x}}{x-1}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

d) $\lim_{x \to -3} (2x^4 - 3x)$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-x^5}{x-1}$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

g) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^3-27}}{x+3}$

h) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

i) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

j) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}}$

k) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

l) $\lim_{x \to 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}$

m) $\lim_{t \to 9} \frac{\sqrt{t}-3}{t-9}$

3. Encuentre el valor de cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}$

c) $\lim_{x \to -3} (x+2)\frac{|x+3|}{x+3}$

4. Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones y encuentre luego los límites dados o establezca que no existen.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x \quad si & 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} f(x); \ \lim_{x \to 1} f(x)$$

b) $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1 \\ x-1, & 1 < x < 2 \\ 5 - x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1} g(x); \ \lim_{x \to 2} g(x)$$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < -2 \\ 5, & x = -2 \\ -4x, & x > -2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -2} h(x)$$

5. Evalúe los límites trigonométricos.

a) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{2\theta}$

b) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^2}{\operatorname{sen} \theta}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{sen\pi x}$

d) $\lim_{x \to -1} \frac{sen^2(x+1)}{(x^2+2x+1)}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - senx}{x^2}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{sen^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$

g) $\lim_{x\to 0} x^{2^{csc^2}} \alpha x$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{4x}$

i) $\lim_{x\to \pi} \frac{senx}{\pi - x}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{x+x\cos x}{senx\cos x}$

l) $\lim_{t\to 2} \frac{sen(t^2-4)}{t-2}$

m) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos x - senx}{1-\tan x}$

6. En los ejercicios siguientes establezca la continuidad o no de las funciones en los puntos a dados. Si es discontinua y dicha discontinuidad es removible, remueva la discontinuidad. Dibuje las gráficas de las funciones.

a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 12, \;\; a = 3$

b) $f(x) = \frac{8}{x-2}, \;\; a = 2$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}, \;\; a = -2$

d) $h(x) = \begin{cases} \frac{4x-8}{x-2} si x \neq 2 \\ 2 \qquad si x = 2 \end{cases}, \;\; a = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 si x \leq 2 \\ 3x + 2 \quad si x > 2 \end{cases}, \;\; a = 2$

f) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} si x \neq 3 \\ 5 \qquad si x = 3 \end{cases}, \;\; a = 3$

g) $g(x) = \begin{cases} x - 1 \quad si x < 1 \\ 1 \qquad si x = 1 \\ 1 - x si x > 1 \end{cases}, \;\; a = 1$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} 7x + k si x < 3 \\ -2x + 5 \quad si x \geq 3 \end{cases}$

Determine el valor de k para que $\lim_{x\to 3} f(x)$ exista.

8. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq -2 \\ ax + b & si - 2 < x < 2 \\ 2x - 5 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

Determine los valores de las constantes a y b para que el $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ existan.

9. Determine los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-3)(5-x)}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x^2}{\pi x^3-5x^2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3}}$

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$

f) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2}$

g) $\lim_{x\to 5^-} \frac{2x^2}{25-x^2}$

h) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\theta^2}{sen\theta}$

i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x+8}{x^2-4}$

j) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

10. Encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones indicadas. Después dibuje sus gráficas:

a) $f(x) = \frac{3}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

c) $f(x) = \frac{14}{2x^2+7}$

d) $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

e) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

11. La recta $y = ax + b$ se denomina *asíntota oblicua* la gráfica de $f(x)$ si $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ ó $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ encuentre la asíntota oblicua para:

$$f(x) = \frac{2x^4+3x^3-2x-4}{x^3-1}$$

Sugerencia: Comience por dividir el numerador entre el denominador.

Algunas respuestas

2.

a) 30

c) $1/2$

e) – 1

g) 0

i) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

k) $2/3$

m) $1/6$

3.

a) No existe

c) No existe

5.

a) 2

c) $2/\pi$

e) 0

g) $1/\alpha^2$

i) 1

k) 2

m) $1/\sqrt{2}$

6.

a) Continua

c) Discontinua, discontinuidad no removible.

e) Discontinua, discontinuidad no removible.

g) Discontinua, discontinuidad removible. $g(x) = \begin{cases} x-1 & si x \leq 1 \\ 1-x si x > 1 \end{cases}$

7. $k = -22$

8. $a = -5/4\ y b = 3/2$

9.

a) -1

c) 2

e) 0

g) ∞

i) $-\infty$

10.

a) Asíntota horizontal $y = 0$, asíntota vertical $x = -1$

c) Asíntota horizontal $y = 0$.

e) Asíntota horizontal $y = 2$ y $y = -2$.

11.

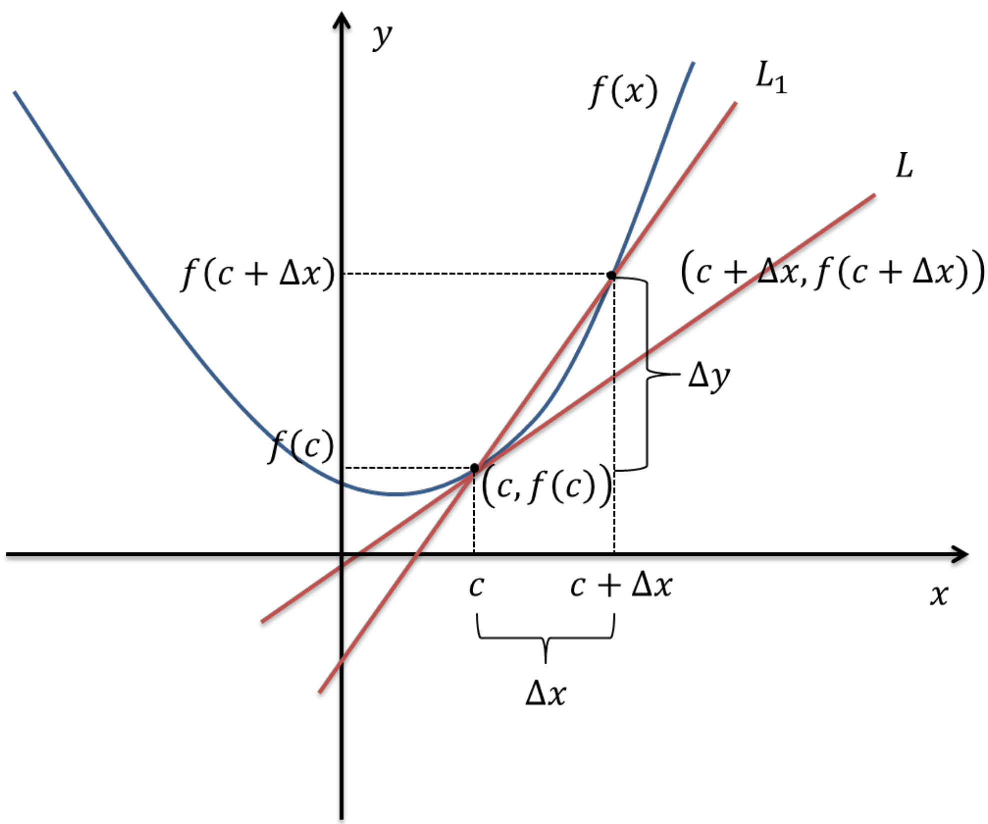
$y = 2x + 3$

Parte 6. La derivada

31. La derivada y la recta tangente

Problema: Queremos hallar la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $(c, f(c))$el problema está en que solo conocemos un punto y para la pendiente necesitamos dos.

Consideremos una función $f(x)$ cuya gráfica se muestra en la gráfica 31.1.



Gráfica 31.1 Gráfica de la recta secante y tangente de una función.

Incrementamos c un Δx obtemos: $c + \Delta x$ y su imagen es $f(c + \Delta x)$.

La recta L_1que pasa por los puntos $(c; f(c))$ y $(c + \Delta x;\ f(c + \Delta x))$se llama recta secante, ya que corta la gráfica de $f(x)$ en dos puntos. La pendiente de L_1 es

$$m_{L_1} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

La recta L es tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(c; f(c))$ pues alrededor de c,este es el único punto en común que tiene la recta L con $f(x)$.

Se observa que a medida que $\Delta x \to 0$ la recta L_1 se aproxima cada vez más a la recta Lque es tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(c; f(c))$.
De esta forma, la pendiente de la recta tangente en el punto $(c; f(c))$ es el límite cuando $\Delta x \to 0$ de la pendiente de la recta secante, esto es,

$$m_L = m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Siempre que este límite exista. A este límite se le conoce como la derivada de $f(x)$ en el punto $(c; f(c))$ y se denota como $f'(c)$, esto es,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica f en el punto $(c; f(c))$.
Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $\big(c; f(c)\big)$ es $y - f(c) = f'(c)(x-c)$ donde $f'(c) = m_{tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$

31.1 Definición “derivada de f en x”

La derivada de $f(x)$ en el punto x viene dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Siempre que tal límite exista.

Por simplicidad también podemos usar una letra diferente para calcular este límite por ejemplo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Notación: Si $y = f(x)$, la derivada $f'(x)$ también la denotamos como $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ y representa la razón de cambio de y con respecto a x, o como $D_x f(x)$.

De esta forma, $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x, f(x))$ y la interpretamos como la razón de cambio de $y = f(x)$, con respecto a x.

Ejemplo 31.1

Encuentre la derivada de:

a. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Solución:

a. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 + 2(x+h) + 1 - x^3 - 2x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2x + 2h + 1 - x^3 - 2x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3hx + h^2 + 2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 + 2$$

$$= 3x^2 + 2$$

b. $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x}\right)}{\Delta x\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - (\sqrt{x + \Delta x})^2}{\Delta x \sqrt{x} \sqrt{x + \Delta x}(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - (x + \Delta x)}{\Delta x \sqrt{x} \sqrt{x + \Delta x}(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x} \sqrt{x + \Delta x}(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})}$$

$$= \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x^{3/2}}$$

Ejemplo 31.2

Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ y paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$.

Solución:

Para encontrar el punto de tangencia igualamos las pendientes de las rectas, ya que estas son paralelas. Luego, $f'(x) = m_{tan}$ es igual a $m_L = 3$.

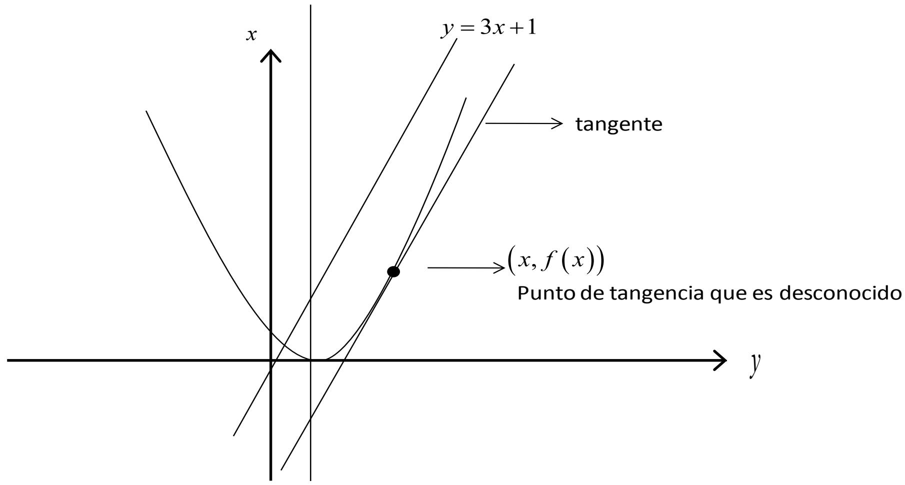
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x$$

Entonces, $2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ y así, el punto de tangencia es $\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ y $m = 3$ por lo que la ecuación de la recta tangente en el punto es: $y - \frac{9}{4} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3x - \frac{9}{4}$.



Gráfica 31.2 Gráfica del ejemplo 31.2.

31.2 Definiciones alternativas de la derivada en un punto

a. Sabemos que $f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$, si en la gráfica 31.1 hacemos $x = c + \Delta x$, de donde $\Delta x = x - c$ entonces se tiene que $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Para que este límite exista se requiere que:

$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ y $f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ coincidan.

El primer límite es la derivada por la izquierda de c, y el segundo es la derivada por la derecha.

b. Al incrementar x un Δx la y normalmente cambia un $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ luego $f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ si existe, es decir, la derivada es el límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

31.3 Teorema: "derivabilidad implica continuidad"

Si f es derivable en $x = c$ entonces f es continua en c.

Observación: el recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, una función continua no siempre es derivable.

Ejemplo 31.3

Sea $f(x) = |x - 5|$veamos que $f(x)$ es continua en $x = 5$, y sin embargo, f no es derivable en $x = 5$.

Solución:

$f(x) = |x - 5|$se expresa sin valor absoluto de la siguiente forma:

$$f(x) = |x - 5| = \begin{cases} x - 5 \; si \; x \geq 5 \\ 5 - x \; si \; x < 5 \end{cases}$$

Veamos que $f(x)$ es continua en $x = 5$.

1. $f(5) = 0$
2. $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (5 - x) = 0$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (5 - x) = 0$$

Luego, $\lim_{x \to 5} f(x) = 0 = f(5)$ por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x = 5$.

Ahora veamos que $f(x)$ no es derivable en $x = 5$. En efecto,

$$f'(5) = \lim_{x \to 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = -\lim_{x \to 5^-} \frac{5 - x}{x - 5} = -1$$

$$f'(5) = \lim_{x \to 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{5 - x}{x - 5} = 1$$

Luego $f'(5)$ no existe.

32. Reglas de derivación

Aquí presentamos una serie de resultados que nos van a permitir obtener la derivada de una función sin usar la definición.

32.1 Teorema 1: Regla para la función constante

Si $y = f(x) = c$ con c constante entonces $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$. Es decir, la derivada de una función constante es 0.

Demostración:

Como $f(x) = c$ por la definición de la derivada empleando el límite, se tiene que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[c]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0$$
$$= 0$$

32.2 Teorema 2: Regla del múltiplo constante

Si $f(x)$ es derivable y $k$es una constante entonces $\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$. Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[kf(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x}$$
$$= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= kf'(x)$$

32.3 Teorema 3: Regla para la potencia

Si $n \in \mathbb{R}$ entonces para $f(x) = x^n$ se tiene que $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$.

Demostración:

Primero recordemos el binomio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}b^2 + \cdots nab^{n-1} + b^n$$

Supongamos que si $n \in \mathbb{Q}^+$ entonces:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

$$= \ nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0$$

$$= nx^{n-1}$$

Ejemplo 32.1

Utilice las reglas de derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = x$
2. $y = f(x) = \frac{1}{3x^3}$
3. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$
4. $y = \frac{4}{3x^{-3}}$

Solución:

1. $y = x \Rightarrow y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$
2. $y = f(x) = \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3}x^{-3} \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{3}(-3x^{-3-1}) = \frac{-1}{x^4}$
3. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^3} = x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2x^{\frac{7}{2}}}$
4. $y = \frac{4}{3x^{-3}} = \frac{4x^3}{3} \Rightarrow y' = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 = 4x^2$

32.4 Teorema 4: Reglas de la suma y la diferencia

Sean f y g dos funciones derivables, entonces las funciones $f+g$ y $f-g$ son derivables y sus derivadas son:

$$\frac{d}{dx}[(f+g)(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[(f-g)(x)] = f'(x) - g'(x)$$

Esto es, la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la derivada de una resta es la resta de las derivadas.

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[(f+g)(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Ejemplo 32.2

Encuentre la derivada de $f(x) = 5x^6 - \frac{3}{2}x^4 + 9x - 1$

Solución:

$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[5x^6] - \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}x^4\right] + \frac{d}{dx}[9x] - \frac{d}{dx}[1]$ (Teorema 4)

$= 5\frac{d}{dx}[x^6] - \frac{3}{2}\frac{d}{dx}[x^4] + 9\frac{d}{dx}[x] - \frac{d}{dx}[1]$ (Teorema 2)

$= 5 \cdot 6x^{6-1} - \frac{3}{2} \cdot 4x^{4-1} + 9 \cdot 1x^{1-1} - 0$ (Teoremas 3 y 1)

$= 30x^5 - 6x^3 + 9$

33. Razones de cambio

Se ha visto cómo usar la derivada para determinar la pendiente. Pero la derivada es la razón de cambio de una variable con respecto a otra. La razón de cambio se emplea en una gran variedad de campos. Algunos ejemplos son tasas de crecimiento poblacional, tasas de producción, flujo de agua, velocidad y aceleración.

Un uso común de la razón de cambio se observa en la descripción del movimiento en línea recta de un objeto. En tales problemas, para representar la recta del movimiento se acostumbra utilizar una recta horizontal o vertical en la que se marca un origen. En tales rectas, el movimiento a la derecha (o hacia arriba) se considera un movimiento en dirección positiva y el movimiento a la izquierda (o hacia abajo) se considera un movimiento en dirección negativa.

La función $s = s(t)$ se llama *función de posición,* donde s es el desplazamiento del objeto respecto al origen, en el instante t. Si, en un periodo Δt, el cambio en la posición es $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces, la *velocidad promedio* es:

$$\text{velocidad}=\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Es decir, la velocidad promedio se puede definir como:

$$\frac{\text{Cambio de posición}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Ejemplo 33.1

Si una bola de billar se deja caer desde una altura de 100 metros, su altura s en el tiempo t está dada por la función de posición:

$$s = -16t^2 + 100$$

Donde s está dada en metros y t está dada en segundos. Encuentre la velocidad promedio en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo.

1. $[1; 2]$ 2. $[1; 1{,}5]$ 3. $[1; 1{,}1]$

Solución:

1. En el intervalo $[1; 2]$, el objeto cae desde la altura $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ metros hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ metros. La velocidad promedio es

$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{36-84}{2-1} = \frac{-48}{1} = -48$ metros por segundo.

2. En el intervalo $[1; 1{,}5]$, el objeto cae desde una altura de 84 metros hasta una altura de 64 metros. La velocidad promedio es

$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{64-84}{1.5-1} = \frac{-20}{0.5} = -40$ metros por segundo.

3. En el intervalo $[1; 1{,}1]$, el objeto cae desde una altura de 84 metros hasta una altura de 80,64 metros. La velocidad promedio es:

$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{80.64-84}{1.1-1} = \frac{-3.36}{0.1} = -33.6$ metros por segundo.

Observe que aquí las velocidades promedio son *negativas,* lo cual indica que el objeto se mueve hacia abajo.

34. Definición de velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $s = s(t)$ entonces su velocidad instantánea en el instante de tiempo t es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

Esto significa que la velocidad instantánea en el instante t es igual a la pendiente de la recta tangente.

Es decir, la función velocidad es la derivada de la función de posición. La velocidad puede ser negativa, positiva o cero. La *rapidez* de un objeto es el valor absoluto de su velocidad. La rapidez no puede ser negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad puede representarse mediante la ecuación:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ Función de posición

Donde s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 es la velocidad inicial del objeto y g es la aceleración debida a la gravedad. En la tierra el valor de g es aproximadamente -32 pies por segundo por segundo o -9.8 metros por segundo por segundo.

Ejemplo 34.1

En el tiempo $t = 0$, un clavadista salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 32 pies sobre el agua. La posición del clavadista está dada por

$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$ Función de posición

donde s está dada en pies y t está dado en segundos.

1. ¿Cuál es el tiempo en el que el clavadista choca con el agua?
2. ¿Cuál es la velocidad del clavadista en el momento del impacto?

Solución:

1. Para hallar el tiempo t en el que el clavadista choca con el agua, se hace $s = 0$ y se despeja t.

$-16t^2 + 16t + 32 = 0$ Igualar con cero la función de posición

$-16(t+1)(t-2) = 0$ Factorizar

$t = -1$ ó 2 Despejar t

Como $t \geq 0$, se elige el valor positivo y se concluye que el clavadista choca con el agua en $t = 2$ segundos.

2. La velocidad en el tiempo t está dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. Por lo tanto, la velocidad en el tiempo $t = 2$ es

$s'(2) = -32(2) + 16 = -48$ pies por segundo.

Ejemplo 34.2

Un fabricante produce camisetas, y estima que el ingreso de producir y vender x unidades de estas camisetas será $I(x) = 0.25x^2 + 2x - 1$ millones de pesos.

1. ¿A qué razón cambia el ingreso respecto al nivel de producción x cuando se producen 4 unidades?
2. ¿Está aumentando o disminuyendo el ingreso?

Solución:

1. Como x representa el número de unidades producidas entonces $x \geq 0$ y

$$I'(x) = 0.5x + 2 \Rightarrow I'(4) = 2 + 2 = 4$$

Entonces se deduce que el ingreso cambia a razón de $4'000.000 por unidad respecto al nivel de producción cuando se producen 4 unidades de camisetas.

2. El ingreso está aumentando ya que $I'(4) = 4$ es positivo, es decir la pendiente de la recta tangente es positiva y por tanto el ingreso es creciente en $x = 4$.

35. Reglas del producto y del cociente

Las reglas para derivar un producto y un cociente de funciones derivables son los siguientes.

35.1 Teorema 5: Regla del producto

Sean f y $g$dos funciones derivables. La derivada de su producto es igual a la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función más la primera función por la derivada de la segunda. Esto es,

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Y como $g(x)$ es derivable y por lo tanto es continúa entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\ \Delta x) = g(x+0) = g(x)$$

Luego

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ejemplo 35.1

Encuentre la derivada de la función $(4x^3 - 2x + 1)(3x + 4)$

Solución:

$$\frac{d}{dx}[(4x^3 - 2x + 1)(3x + 4)]$$

$$= \frac{d[(4x^3 - 2x + 1)]}{dx}(3x + 4)\ + \frac{d[(3x + 4)]}{dx}(4x^3 - 2x + 1)$$

$$= (12x^2 - 2)(3x + 4) + 3(4x^3 - 2x + 1)$$

$$= 36x^3 + 48x^2 - 6x - 8 + 12x^3 - 6x + 3$$

$$= 48x^3 + 48x^2 - 12x - 5$$

35.2 Teorema 6: Regla del cociente

Sean dos funciones derivables f y g con $g(x) \neq 0$. Entonces la función f/ges derivable y su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$$

Esto es, la derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador sobre el cuadrado del denominador.

Ejemplo 35.2

Determine la derivada de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

Solución:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} = \frac{x^{1/2}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x^2+1) - 2x(x^{1/2})}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x^{3/2}}{1}}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{x^2+1-4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$$

Ejemplo 35.3

Encuentre $D_x y$ si $y = \frac{5x-2}{x^2+1}$

Solución:

$$D_x\left(\frac{7x-2}{3x^2+5}\right) = \frac{(3x^2+5)D_x(7x-2)D_x(3x^2+5)}{(3x^2+5)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+5)7-(7x-2)6x}{(3x^2+5)^2} = \frac{21x^2+35-42x^2+12x}{(3x^2+5)^2} = \frac{-21x^2+12x+35}{(3x^2+5)^2}$$

35.3 Derivada de orden superior

Si $y = f(x)$ entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ es una función de x; y la función $f'(x)$ puede derivarse nuevamente con respecto a x para obtener la segunda derivada de $f(x)$ con respecto a x denotada por

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = D_x[y']$$

Y también se denota como

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

La tercera derivada con respecto a x de $f(x)$, se obtiene derivando la función $f''(x)$ y se denota como

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)] = D_x[y''] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$$

35.3.1 Notación

En general, las derivadas de orden superior se denotan como se muestra a continuación:

Derivada	Notación y'	Notación $f'(x)$	Notación $\frac{dy}{dx}$	Notación $\frac{d}{dx}[f(x)]$	Notación $D_x y$
Primera	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$	$D_x y$
Segunda	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{d^2x}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$	$D_x^2 y$
Tercera	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{d^3x}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$	$D_x^3 y$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{d^nx}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$	$D_x^n y$

Ejemplo 35.4

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ encuentre $f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$.

Solución:

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f'''(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

36. Regla de la cadena

36.1 Teorema 7: La regla de la cadena

Esta es una regla de derivación potente que nos permite derivar funciones compuestas.

Sea $y = f(u)$una función derivable de u, y $u = g(x)$ es una función derivable en x, entonces la función compuesta $y = f(u) = f(g(x))$ es derivable con respecto a x, y su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esto es,

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En palabras, la derivada de una función compuesta es la derivada de la función externa evaluada en la función interna, por la derivada de la función interna.

Ejemplo 36.1

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ si $y = \sqrt[3]{9x^2 + 4} = (9x^2 + 4)^{1/3}$.

Solución:

Sea $u(x) = 9x^2 + 4$ derivable en x y $\frac{du}{dx} = 18x$ además, $y = u^{1/3}$ es derivable en u.

Por lo tanto,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} u^{1/3 - 1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{3} u^{-2/3} \cdot 18x$$

Luego

$y' = \frac{1}{u^{-2/3}} \cdot 6x = \frac{6x}{(9x^2+4)^{2/3}}$.

Ejemplo 36.2

Determine $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones

1. $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$
2. $y = (x^3 + x + 2)^5$
3. $y = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}}$

Solución:

1. Reescribiendo la función se tiene que $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x} = (x^2 + 5x)^{1/3}$,luego por la regla de la potencia y la regla de la cadena se sigue que:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^2 + 5x)^{-2/3} \cdot (2x + 5) = \frac{2x+5}{3(x^2+5x)^{2/3}}$.
2. $\frac{dy}{dx} = 5(x^3 + x + 2)^4 \cdot (3x^2 + 1) = 5(3x^2 + 1)(x^3 + x + 2)^4$.
3. $y = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (x^2 - 1)^{-1/2}$ Luego $y' = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-3/2} \cdot (2x) = \frac{-x}{(x^2-1)^{3/2}}$.

37. Derivadas de las funciones trascendentes

37.1 Teorema 8: Derivadas de las funciones trigonométricas

Derivadas de las funciones trigonométricas son:

1.$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$

2.$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$

3. $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$

4.$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

5. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \cdot \tan x$

6. $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cdot \cot x$

Si $u = u(x)$ es derivable en x por la regla de la cadena se sigue que

1. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u(x)] = \cos u(x) \cdot u'(x)$

2. $\frac{d}{dx}[\cos u(x)] = -\operatorname{sen} u(x) \cdot u'(x)$

3.$\frac{d}{dx}[\tan u(x)] = \sec^2 u(x) \cdot u'(x)$

4. $\frac{d}{dx}[\cot u(x)] = -\csc^2 u(x) \cdot u'(x)$

5.$\frac{d}{dx}[\sec u(x)] = \sec u(x) \cdot \tan u(x) \cdot u'(x)$

6. $\frac{d}{dx}[\csc u(x)] = -\csc u(x) \cdot \cot u(x) \cdot u'(x)$

Algunas demostraciones de estas reglas de derivación

2

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,[1 - \cos \Delta x] - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \Delta x]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = -\operatorname{sen} x$$

$$= \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

3.

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6.

$$\frac{d}{dx}[\csc x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right] = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} x - 1 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\csc x \cdot \cot x$$

Ejemplo37.1

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(t) = \sec t \tan t$
2. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x$

Solución:

1. $f(t) = \sec t \tan t$

$f'(t) = D_t(\sec t) \tan t + D_t(\tan t) \sec t$

$= \sec t \tan t \tan t + \sec^2 t \cdot \sec t$

$= \sec t \tan^2 t + \sec^3 t$

2. $\frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x$

$= x^2 \cos x + 2 \cos x$

$= \cos x \, (x^2 + 2)$

Ejemplo 37.2

Determine $D_x[\cos^{2}(\operatorname{sen}(x^2))]$

Solución:

$D_x[\cos^2 \operatorname{sen}(x^2))] = D_x[\cos(\operatorname{sen}(x^2))]^2$

$= 2[\cos(\operatorname{sen}(x^2))]\, D_x \cos(\operatorname{sen}(x^2))$

$= 2[\cos(\operatorname{sen}(x^2))][-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2))]D_x \operatorname{sen}(x^2)$

$= 2[\cos(\operatorname{sen}(x^2))][-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2))] \cos(x^2) D_x x^2$

$= 2[\cos(\operatorname{sen}(x^2))][-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2))] \cos(x^2)\, 2x$

$= -4x \cos(\operatorname{sen}(x^2)) \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2)) \cos(x^2)$

Ejemplo 37.3

Determine $f'(x),\ f''(x), f'''(x)$ si $f(x) = \tan x$

Solución:

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = \sec^2 x$

$f''(x) = 2 \sec x \sec x \tan x \tan x + \sec^2 x\,(2 \sec^2 x)$

$= 4 \sec^2 x \tan^2 x + 2 \sec^2 x$

37.2 Teorema 9: Derivadas de las funciones exponenciales

1. Si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$.
2. Si $f(x) = e^{u(x)}$ entonces $f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$.
3. Si $f(x) = a^x$ entonces $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.
4. Si $f(x) = a^{u(x)}$ entonces $f'(x) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$.

Ejemplo 37.4

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones:

1. $y = e^x + 3^x + x^3 + 8$

2. $y = 6^{2x}$

3. $y = x^2 \cdot e^{5x}$

Solución:

1. $y' = e^x + 3^x \cdot \ln 3 + 3x^2$

2. $y' = 6^{2x} \cdot 2 \ln 6$

3. $y' = 2x \cdot e^{5x} + e^{5x} \cdot 5x^2$

37. 3 Teorema 10: Derivada de funciones logarítmicas

1. $\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

2. $\frac{d}{dx}[\log_a u(x)] = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$ con $u(x)$ una función derivable de x.

3. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x};\ x > 0$

4. $\frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'(x)}{u(x)};\ u > 0$ con $u(x)$ una función derivable de x.

Ejemplo 37.5

Determine:

a. $\frac{d}{dx}[\ln(5x)]$

b. $\frac{d}{dx}[\ln(x^2)]$

c. $\frac{d}{dx}[\log_3(2x^3 - 3)]$

d. $\frac{d}{dx}\left[\ln \sqrt{x^2 + 1}\right]$

Solución:

a. $\frac{d}{dx}[\ln(5x)] = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$

b. $\frac{d}{dx}[\ln(x^2)] = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

c. $\frac{d}{dx}[\log_3(2x^3-3)] = \frac{6x^2}{(2x^3-3)\ln 3}$

d. $\frac{d}{dx}\left[\ln\sqrt{x^2+1}\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x^2+1)^{1/2}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right] = \frac{2x}{2(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+1}$

38. Derivación implícita

Cuando escribimos $y = f(x) = x^2 + 3x\tan x - \sqrt{x}$ estamos expresando y como una función de x y decimos que y está explícitamente representado como función de x.

En otros casos, la relación entre xe $y$está expresada mediante una ecuación; de esta no es posible despejar $y$en términos de x. En estos casos, decimos que y está definida implícitamente en términos de $x$en la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación:

$x^2y^3 + xy^2 + \operatorname{sen} xy = 0$

Es prácticamente imposible obtener a $y$como función de x;entonces decimos que $y$es una función implícita de x. El proceso para obtener $\frac{dy}{dx}$ en estas situaciones se conoce como derivación implícita.

En derivación implícita siempre que derivemos $h(y)$ aparece $\frac{dy}{dx}$ como su derivada interna.

En el proceso de derivación implícita procedemos así:

1. Derivamos todos los términos de la ecuación respecto a x.
2. Al derivar funciones de y su derivada interna la indicamos como $\frac{dy}{dx}$.
3. Despejemos $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 38.3

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita:

1. $x^3 - xy + y^2 = 4$
2. $\sqrt{3xy} + \cos y + y^2 = 4$

Solución:

1. Derivando a ambos lados la ecuación con respecto a x

$$\frac{d}{dx}[x^3 - xy + y^2] = \frac{d}{dx}[4]$$

$$3x^2 - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agrupamos los términos en los que aparece $\frac{dy}{dx}$ y factorizando se sigue que:

$$\frac{dy}{dx}(-x + 2y) = -3x^2 + y$$

Por último despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + y}{-x + 2y}$$

2. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{3xy} + \cos y + y^2\right] = \frac{d}{dx}[4]$

$$\frac{d}{dx}\left[(3xy)^{1/2} + \cos y + y^2\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}\frac{d}{dx}[3xy] - \operatorname{sen} y\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}\left(3y + 3x\frac{dy}{dx}\right) - \operatorname{sen} y\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}3x\frac{dy}{dx} - \operatorname{sen} y\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}3y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}3x - \operatorname{sen} y + 2y\right) = -\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}3y}{\frac{1}{2}(3xy)^{-1/2}3x - \operatorname{sen} y + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{3y}{2(3xy)^{1/2}}}{\frac{3x}{2(3xy)^{1/2}} - \operatorname{sen} y + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{3y}{2(3xy)^{1/2}}}{\frac{3x-2(3xy)^{1/2}\operatorname{sen} y+4y(3xy)^{1/2}}{2(3xy)^{1/2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3y}{3x-2(3xy)^{1/2}\operatorname{sen} y+4y(3xy)^{1/2}}$$

Ejemplo 38.4

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $x^3-y^3+6xy=0$ en el punto $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Solución:

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}+6y+6x\frac{dy}{dx}=0$$

$$-3y^2\frac{dy}{dx}+6x\frac{dy}{dx}=-3x^2-6y$$

$$\frac{dy}{dx}(-3y^2+6x)=-3x^2-6y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-6y}{(-3y^2+6x)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{y=8/3}^{x=4/3}=\frac{-3\left(\frac{16}{9}\right)-6\left(\frac{8}{3}\right)}{-3\left(\frac{8}{3}\right)+6\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{y=8/3}^{x=4/3}=\frac{-3\left(\frac{16}{9}\right)-\frac{48}{3}}{-3\left(\frac{8}{3}\right)+\frac{24}{3}}=\frac{\frac{-48-144}{9}}{\frac{-192+72}{9}}$$

$$\frac{dy}{dx}=m=\frac{192}{120}=\frac{8}{5}$$

Por la ecuación de punto pendiente, tenemos que la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$está dada por:

$$y-\frac{8}{3}=\frac{8}{5}\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

$$y=\frac{8}{5}x-\frac{32}{15}+\frac{8}{3}$$

$$y=\frac{8}{5}x+\frac{8}{15}$$

38.1 Derivación logarítmica

Aplicando primero la función logaritmo y usando sus propiedades se puede simplificar el trabajo de derivar expresiones que incluyan productos, cocientes y potencias. Este método se llama derivación logarítmica.

Ejemplo 38.6

Derive $y=\frac{x^2\sqrt{5x+2}}{(x^3+1)^3}$

Solución:

Tomando logaritmo natural en cada lado de la ecuación se tiene que:

$$\ln y=\ln\frac{x^2\sqrt{5x+2}}{(x^3+1)^3}$$

$\ln y=\ln x^2+\ln(5x+2)^{1/2}-\ln(x^3+1)^3$ Prop. de ln para el produto y el cociente

$\ln y=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(5x+2)-3\ln(x^3+1)$ Prop. de ln para la potencia

$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{5}{2(5x+2)}-\frac{3(3x^2)}{x^3+1}$ derivando a ambos lados de la ecuación

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{5}{2(5x+2)}-\frac{9x^2}{x^3+1}$$

$$y'=\frac{x^2\sqrt{5x+2}}{(x^3+1)^3}\left[\frac{2}{x}+\frac{5}{2(5x+2)}-\frac{9x^2}{x^3+1}\right]$$

Taller de derivadas

1. Responda Verdadero o Falso. Justifique las respuestas falsas mediante un contraejemplo o con la respuesta correcta.

a) Si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x)$

b) Si $f(x) = g(x) + c$ entonces $f'(x) = g'(x)$

c) Si $y = e^2$ entonces $\frac{dy}{dx} = e^2$

d) Si $y = \pi^2$ entonces $\frac{dy}{dx} = 2\pi$

e) Si $y = \frac{x}{\pi}$ entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

f) Si $g(x) = \frac{1}{x^n}$ entonces $g'(x) = \frac{1}{nx^{n-1}}$

g) Si $y = f(x)g(x)$ entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)g'(x)$

h) Si $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ entonces $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$

i) Si $f'(c)$y $g'(c)$son cero y $h(x) = f(x)g(x)$ entonces $h'(c) = 0$

j) Si $y = (x-1)^{1/2}$ entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$

k) Si $f(x) = \text{sen}^2(2x)$entonces $f'(x) = 2\text{sen}(2x)\cos(2x)$

l) Si y es una función derivable de u, y u es una función derivable de u y u es una función derivable en x, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

m) La derivada de la función $f(x)$ es la función $f'(x)$ con la regla $f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ para los valores de x para los que existe el límites.

n) Si $f'(a)$ existe, hay una recta tangente de la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ y su pendiente es $f'(a)$.

ñ) $D_x\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}x^{-1/2}$

o) Si $D_x(\text{sen } x) = \cos x$, entonces $D_z(\text{sen } z) = \cos z$

p) Si $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces $f'(a)$ existe.

q) Si $f(x)$ es continua en $x = c$ y $f'(x)$ tiende al infinito cuando x tiende a c, entonces la gráfica de $f(x)$ tiene una recta tangente horizontal en el punto $(c, f(c))$.

r) Si $f'(a)$ existe, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

s) Si $h(x) = \frac{1}{x}$, entonces la gráfica de $h(x)$tiene una recta tangente vertical en $(0,0)$.

2. En los siguientes ejercicios, encuentre la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado:

a) $f(x) = 2x^3 - x, (-1,1)$

b) $f(x) = x^2 - 6, (1, -5)$

c) $f(x) = \frac{3}{5+x}, (0,3/5)$

d) $f(x) = \frac{5}{2}x + 3, (-2,2)$

e) $f(x) = 6 - \frac{1}{x}, (2,11/2)$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}, (0,1)$

3. Obtenga la derivada de las siguientes funciones por medio de la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 7x + 2$

c) $f(x) = 5 + \frac{2}{5}x$

d) $f(x) = \frac{3}{2x^2+1}$

e) $f(x) = x^2 + 3x - 2$

f) $f(x) = x^3 + 2x$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

i) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$

4. Obtenga $f'(c)$ para las siguientes funciones por medio de la definición:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

a) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{5x+3}{x}$

c) $f(x) = x^2 - 3$

d) $f(x) = \sqrt{x-8}$

5. Calcule la derivada de las siguientes funciones, por medio de las reglas de derivación:

a) $f(x) = \frac{1}{5x^8}$

b) $f(x) = x^2 + 4x^3$

c) $f(x) = 6x^2 - e^x + 2$

d) $f(x) = \frac{\pi}{2} sen(x) - \cos(x)$

e) $f(x) = \frac{5}{6}x^2 + \tan(x)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}e^x - 3\log_2(x)$

g) $f(x) = \frac{4}{3}5^x + \sec(x)$

h) $f(x) = (7x^2 + 8^x)(6x^2 - 2x + 1)$

i) $f(x) = \cot x \left(\frac{5}{3}x^3 + 7x^2 + 10x - 2\right)$

j) $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 + 4)$

k) $f(x) = \cot(x) - \sqrt{x}\csc(x)$

l) $f(x) = \cos(x)\,(x^3 + 2x - 8)$

m) $f(x) = 9^x(\log_7 x + sen(x))$

n) $f(x) = \frac{3-12x-x^2}{3x^2+1}$

ñ) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-6}$

o) $f(x) = \frac{\ln x}{2x+7}$

p) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)+2}{x^4-1}$

q) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3+1}$

r) $f(x) = \frac{3-2x-x^2}{x^2-1}$

s) $f(x) = 7^x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

6. Encuentre la derivada que se indica:

a) $D_x \log_2(x^2 + 3x + \pi)$

b) $D_x \ln(x-4)^3$

c) $D_x \ln[sen(x)\tan(x)]^2$

d) $D_x 5^{-\frac{1}{x}}(5x^2 - x + 2)^{12}$

e) $\frac{dy}{dx}$, si $y = \sec(4^{x^2+1})\ln(\sqrt{x})$

f) $\frac{dz}{dx}$, si $z = \frac{\mathrm{sen}(\cos x)}{\ln(x^2)}$

g) $\frac{dy}{dx}$, si $y = e^{2x} + 2^{\sqrt{x}}$

h) $\frac{dy}{dx}$, si $y = \tan(e^x) + \cos(\cot(2x))$

i) $\frac{dy}{dx}$, si $y = \frac{e^x + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

j) $\frac{dy}{dx}$, Si $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+3x-1}{x^3+2}}$

k) $\frac{dy}{dx}$, si $y = \cot^2\left(sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

l) $D_x \ln[\sec(x) + \tan(x)]$

m) $D_x \ln[\cot(\mathrm{x}^2) + \csc(x)]$

7. Encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$ si:

a) $y = -2x^3 + 8x^2 - 5x$

b) $y = sen(x^3)$

c) $y = \frac{7x}{5x-2}$

d) $y = 3^x + \ln x$

e) $y = 3\sqrt[3]{x^5} + \sqrt{x}$

f) $y = \sqrt{x^2 \cos(x)}$

8. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ usando la derivación implícita:

a) $2x^3 + 8y^2 = 16$

b) $x^2y^3 - x + 15 = 0$

c) $2x^3 - 3xy^2 + 19xy = 0$

d) $\sqrt{xy} + 2y = 10x^2$

e) $\frac{y^2}{x^3} - 1 = \sqrt{y^3}$

f) $y^2 + \ln(xy) = x^2$

g) $\cos(xy) = y^2 + 2x$

h) $y = \frac{3x+y^2}{x+y^2}$

i) $xy + \sqrt{\frac{x+y}{x}} - 5 = 0$

j)$e^{xy} + y^2x = 2x^2$

k) $e^{x+y} = x + y + 4$

l))$e^{xy} + yx = 4$

9. El costo, en pesos, para producir x unidades de lapiceros es:

$$C(x) = 1500 + 2x + 0{,}02x^2 + 0{,}0001x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal.

b) Halle $C'(100)$ y explique su significado.

10. Un fabricante estima que cuando se produzcan y se vendan $x$unidades de chocolate, el ingreso será $I(x) = 0{,}4x^2 + 2x - 1$ en millones de pesos.

¿A qué razón cambia el ingreso respecto al nivel de producción $x$cuando se producen 5 unidades? ¿Está aumentando o disminuyendo el ingreso?

11. La ganancia total (acumulada) para un negocio de computadoras después de t en años está dada por la función $G(t) = 10500t^2$ pesos.

a) ¿Cuál fue su ganancia durante el tercer año (entre$t = 2$ y $t = 3$)?

b)¿Cuál fue su tasa promedio de ganancia durante la primera mitad del tercer año, entre $t = 2$y $t = 2{,}5$?

c) ¿Cuál es la tasa instantánea de ganancia en $t = 2$?

12. Suponga que el ingreso $I(x)$ en pesos por producir x bombillas está dado por

$I(x) = 0.3x - 0.0001x^2$

Encuentre las tasas instantáneas del cambio del ingreso cuando $x = 10$ y $x = 10$

Algunas respuestas

1.

a) F

c) F

e) F

g) F

i) F

k) F

m) F

ñ) F

p) F

r) V

2.

a) $y - 1 = 5(x + 1)$

c) $y - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}x$

e) $y - \frac{11}{2} = \frac{1}{4}(x - 2)$

3.

a) $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = \frac{2}{5}$

e) $f'(x) = 2x + 3$

g) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

i) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^{3/2}}$

4.

a) $f'(x) = -\frac{6}{(x-3)^2}$

c) $f'(x) = 2x$

5.

a) $f'(x) = -\frac{8}{5x^9}$

c) $f'(x) = 12x - e^x$

e) $f'(x) = \frac{5}{3}x + \sec^2(x)$

g) $f'(x) = \frac{4}{3}5^x \ln 5 + \sec(x)\tan(x)$

i) $f'(x) = \cot x(5x^2 + 14x + 10) - \csc^2 x\left(\frac{5}{3}x^3 + 7x^2 + 10x - 2\right)$

k) $f'(x) = \sqrt{x}\cot x \csc x - \csc^2 x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\csc x$

m) $f'(x) = 9^x \ln 9(\log_7 x + \operatorname{sen} x) + 9^x\left(\frac{1}{x \ln 7} + \cos x\right)$

ñ) $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-12}{2(\sqrt{x}-6)^2}$

p) $f'(x) = \frac{(x^4-1)\cos x - 4x^3(\operatorname{sen} x + 2)}{(x^4-1)^2}$

r) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

6.

a) $D_x \log_2(x^2+3x+\pi) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+\pi)\ln 2}$

c) $D_x \ln[\operatorname{sen}(x)\tan(x)]^2 = 2(\cot x + \sec x \csc x)$

e) $\frac{dy}{dx} = 2x\sec\left(4^{x^2+1}\right)\tan\left(4^{x^2+1}\right)4^{x^2+1}\ln 4 \ln\sqrt{x} + \frac{1}{2x}\sec\left(4^{x^2+1}\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}2^{\sqrt{x}}\ln 2$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+2)+e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)^{3/2}}$

k) $\frac{dy}{dx} = 2\cot\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)\csc^2\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sec\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)$

m) $D_x \ln[\cot(\mathrm{x}^2)+\csc(x)] = -\frac{2x\csc^2(x^2)+\cot x\csc x}{\cot(x^2)+\csc x}$

7.

a) $y'' = -12x+16$

c) $y'' = \frac{140}{(5x-2)^3}$

e) $y'' = \frac{620x^{40/9}-9\sqrt{x}}{36x^2}$

8.

a) $y' = \frac{-8y}{3x^2}$

c) $y' = \frac{3y^2-19y-6x^2}{19x-6xy}$

e) $y' = \frac{6y^2}{x^4(4y-3x^3\sqrt{y})}$

g) $y' = -\frac{2+y\operatorname{sen}(xy)}{2y+x\operatorname{sen}(xy)}$

i) $y' = \frac{y(\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x+y})}{x(2x^2\sqrt{x+y}+\sqrt{x})}$

k) $y' = \frac{e^{x+y}-1}{1-e^{x+y}}$

9.

a) $C'(x) = 0{,}0003x^2 + 0{,}04x + 2$

b) $C'(100) = 9$, esto significa que para producir un lapicero adicional, después de 100 cuesta 9 pesos.

Bibliografía

- Uribe Calad, Julio A. Matemáticas básicas y operativas. Susaeta. Primera edición. 1986.
- Sobel, Max A. y Lerner, Norbert. Precálculo. Pearson. Sexta edición. 2006. México. ISBN 970-26-0753-1. Páginas 952.
- Arya, Jagdish y Robin, W. Lardner. Matemáticas Aplicadas a la administración y a la economía. Pearson - Prentice-Hall. Cuarta edición, 2002.
- Demana, Franklin D., Waits Bert K., Foley Gregory D., Kennedy Daniel. Precálculo. Gráfico, numérico y algebraico. Peason – Addison Wesley. Séptima Edición, 2007.
- Purcell, Edwin. Dale, Varberg y Steven E. Rigdon. Cálculo. Pearson - Prentice-Hall. Novena edición, 2007.
- Simons, Geroge, F. Cálculo y Geometría Analítica. Mc Graw-Hill. Segunda Edición, 2002.
- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Tercera edición, 2006.
- Sydsaeter, Knut. Hammond, Peter. J. Matemáticas para el análisis económico. Pearson – Prentice-Hall. Primera edición, 1966.
- Díez M, Luis H. Matemáticas Operativas. Primer año de universidad, preuniversitarios y semilleros, Lina Díez editora, 2009.
- Haeussler, Ernest F, Jr. y Richard, S. Paul. Matemáticas para administración y economía. Pearson – Prentice Hall. Décimosegunda edición, 2008
- Larson, R., Edwards, B.H., Hostetler, R.P. Cálculo Esencial. Editorial CEGANGE Learning. Primera edición, 2010.
- Del Valle Sierra, Jesús. Elementos básicos de cálculo diferencial. Editores Ude@. Primera edición.

Matemáticas I para las ciencias económicas es el resultado del trabajo de un equipo de profesores, con una amplia trayectoria en docencia e investigación en matemáticas, con énfasis en las disciplinas económicas. Por esta razón, se centra en las dificultades observadas entre los estudiantes y los vacíos detectados al abordar problemas de mayor complejidad. De este modo, puede afirmarse que sin claridad en los aspectos desarrollados en el presente texto, sería inviable acometer la solución de problemas y ecuaciones de microeconomía, macroeconomía, así como comprender conceptos claves, como la teoría de juegos y métodos matemáticos específicos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE INVESTIGACIONES Y CONSULTORÍAS - CIC