Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 1, 2011, pág. 31–54

Inmersiones isométricas en variedades riemannianas

Carlos Alberto Marín Arango*
Universidad de Antioquia, Instituto de Matemáticas, Medellín–Colombia.

Resumen. Este trabajo recapitula la teoría básica de conexiones en fibrados principales y fibrados vectoriales con el fin de aplicar tales teorías al estudio de inmersiones isométricas en variedades riemannianas; por medio de una versión apropiada del teorema de Frobenius mostramos un resultado que generaliza el teorema fundamental de las inmersiones isométricas.

Palabras claves: fibrados vectoriales, fibrados de referenciales y conexiones, inmersiones isométricas.
MSC2000: 53B20, 53C05, 53C42

Isometric immersions into Riemannian Manifolds

Abstract. This paper summarizes the basic theory of connections in principal bundles and vector bundles in order to apply these theories to the study of isometric immersions in Riemannian manifolds; by an appropriate version of the Frobenius theorem we show a result that generalizes the Fundamental Theorem of isometric immersions.
Keywords: vector bundles, frame bundles and connections, isometric immersions.

1. Introducción

Tanto en la literatura clásica como en la literatura moderna, aparecen diversos teoremas referentes a la existencia de *inmersiones isométricas* en variedades riemannianas. Tal es el caso de inmersiones en espacios de curvatura seccional constante [1], inmersiones en variedades de Kähler con curvatura holomorfa

* Autor para correspondencia: *E-mail*: `camara@matematicas.udea.edu.co`
Recibido: 18 de Febrero de 2011, Aceptado: 27 de Mayo de 2011.

constante y más recientemente algunos resultados sobre la existencia de inmersiones en variedades riemannianas más generales [2]. En el contexto de estos ejemplos, las ecuaciones de *Gauss, Codazzi y Ricci* resultan ser condiciones necesarias para la existencia de inmersiones isométricas; el *teorema fundamental de las inmersiones isométricas* [1] muestra que ellas son también condiciones localmente suficientes; además, en algunas situaciones geométricas específicas se necesitan suposiciones adicionales para tal fin [3].

El objetivo de este trabajo es recapitular la teoría básica de conexiones en fibrados principales y fibrados vectoriales, con el fin de aplicar tales teorías al estudio de inmersiones isométricas en variedades riemannianas; la idea es mostrar, por medio de una versión apropiada del teorema de Frobenius, un resultado que generaliza el teorema fundamental de las inmersiones isométricas; más específicamente, pretendemos responder a la siguiente pregunta: Dadas variedades riemannianas (M^n, g) y $(\overline{M}^{\bar{n}}, \bar{g})$, ¿cuándo es posible encontrar una inmersión isométrica $f : M \to \overline{M}$ con segunda forma fundamental y conexión normal preestablecidas? O sea, dados un fibrado vectorial riemanniano $\pi : (E, g^E) \to M$ con fibra típica $\mathbb{R}^k$ $(k + n = \bar{n})$ y dotado de una conexión lineal compatible ∇^E, y una sección simétrica α_0 del fibrado $\mathrm{Lin}_2(TM; E)$, ¿cuándo es posible encontrar un par (f, L) en que $f : U \subset M \to \overline{M}$ sea una inmersión isométrica y $L : E|_U \to f^{\perp}$ sea una isometría de fibrados que preserve conexión y relacione α_0 con la segunda forma fundamental de la inmersión f?

2. Conexiones en fibrados

A lo largo de esta sección, para efectos de notación y terminología empleamos [3].

2.1. Conexiones en fibrados principales

Sea dado un fibrado principal $\Pi : P \to M$ con grupo estructural G. Para cada $x \in M$ denotamos por P_x la *fibra* de P sobre x. Para cada $x \in M$ el conjunto P_x es una subvariedad suave de P y, dado $p \in P_x$, el espacio tangente $T_p(P_x)$ es un subespacio del espacio T_pP, el cual es llamado el *espacio vertical* de P en el punto p y es denotado por $\mathrm{Ver}_p(P)$. Claramente $\mathrm{Ver}_p(P) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\Pi_p)$; de este modo, para cada $x \in M$ y cada $p \in P_x$, la aplicación dada por la acción del grupo G en el punto p, la cual es denotada por $\beta_p : G \to P_x$, induce un isomorfismo entre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo estructural G y el espacio vertical $\mathrm{Ver}_p(P)$. A saber,

$$\mathrm{d}\beta_p(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ver}_p(P) \tag{1}$$

define un isomorfismo de espacios vectoriales llamado el *isomorfismo canónico*.

Una *conexión principal,* o simplemente una *conexión* en un fibrado principal P, es una distribución suave $\mathrm{Hor}(P)$ en P que es horizontal e invariante por la acción de G; más específicamente, para cada $p \in P$ se tiene $T_pP = \mathrm{Hor}_p(P) \oplus \mathrm{Ver}_p(P)$; además,

$$\mathrm{d}\gamma_g\big(\mathrm{Hor}_p(P)\big) = \mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P)$$

para cada $p \in P$, cada $g \in G$, donde $\gamma_g : P \to P$ denota el difeomorfismo dado por la acción de g en P. Dada una conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$ en P, la diferencial $\mathrm{d}\Pi_p$ induce un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathrm{Hor}_p(P)$ y $T_{\Pi(p)}M$ para cada $p \in P$.

Asociada con toda conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$ en P hay una 1-forma suave ω en P a valores en $\mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{Ker}(\omega_p) = \mathrm{Hor}_p(P)$, para cada $p \in P$. A saber:

$$\omega_p(\zeta) = \begin{cases} \big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1}(\zeta) \in \mathfrak{g}, & \text{si } \zeta \in \mathrm{Ver}_p(P), \\ 0 \in \mathfrak{g}, & \text{si } \zeta \in \mathrm{Hor}_p(P), \end{cases} \tag{2}$$

para cada $p \in P$. La condición correspondiente a la G-invarianza de la distribución se puede expresar por medio de la identidad

$$\gamma_g^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega, \quad g \in G. \tag{3}$$

Una 1-forma suave en P a valores en $\mathfrak{g}$ la cual satisface las condiciones dadas por (2) y (3) se denomina una *forma conexión* en P.

Recíprocamente, si ω es una forma de conexión en P, entonces la distribución $\mathrm{Hor}(P)$, definida por

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \mathrm{Ker}(\omega_p), \quad p \in P, \tag{4}$$

define una conexión principal en P.

La igualdad (4) define una correspondencia uno-a-uno entre la conexiones en P y las formas de conexión en P.

La *forma de curvatura* de una conexión $\mathrm{Hor}(P)$ en un fibrado G-principal P es la 2-forma suave en P definida por

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}\,\omega \wedge \omega, \tag{5}$$

en que ω denota la forma de conexión en P asociada con la conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$ y el producto $\wedge$ es considerado respecto al conmutador del álgebra de Lie del grupo estructural G.

Si M es una variedad suave de dimensión n, denotaremos por $\mathrm{FR}(TM)$ el *fibrado* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$*-principal de los referenciales en* TM; la *forma canónica* de $\mathrm{FR}(TM)$ es la 1-forma suave en $\mathrm{FR}(TM)$ a valores en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$\theta_p(v) = p^{-1}\left(\mathrm{d}\Pi_p(v)\right), \tag{6}$$

para cada $p \in \mathrm{FR}(TM)$, cada $v \in T_p\left(\mathrm{FR}(TM)\right)$. Si Hor es una conexión principal en $\mathrm{FR}(TM)$ con forma de conexión ω, la *forma de torsión* de $\mathrm{FR}(TM)$ es la 2-forma suave en $\mathrm{FR}(TM)$ definida por

$$\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta, \tag{7}$$

en que el producto $\wedge$ es considerado respecto al pareamiento natural entre $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R}^n$. Con mayor generalidad, si E es un fibrado vectorial con fibra típica E_0 definido sobre una variedad suave M, denotamos por $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ el fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal consistente de todos los E_0-referenciales en E; dado un morfismo de fibrados vectoriales $\iota : TM \to E$, la forma *ι-canónica* de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ es la 1-forma suave en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ a valores en E_0 definida por

$$\theta^\iota_p(v) = p^{-1}\left(\iota_x \cdot \mathrm{d}\Pi_p(v)\right), \tag{8}$$

para cada $x \in M$, cada $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, cada $v \in T_p\left(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\right)$; en este caso la forma de *ι-torsión* en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ es la 2-forma en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ definida por

$$\Theta^\iota = \mathrm{d}\theta^\iota + \omega \wedge \theta^\iota,$$

en que $\wedge$ es considerado respecto al pareamiento natural entre $\mathfrak{gl}(E_0)$ y E_0.

2.2. Conexiones en fibrados asociados

Una conexión en un fibrado G-principal P sobre una variedad suave M induce de forma natural una conexión en cada fibrado asociado de P. Más precisamente, si N es una variedad suave dotada de una acción por difeomorfismos de G, denotamos por $P \times_G N$ el fibrado asociado de P, i.e.,

$$P \times_G N = \bigcup_{x \in M} P_x \times_G N,$$

en que para cada $x \in M$ la fibra $P_x \times_G N$ denota el espacio de la órbitas en $P_x \times N$ dado por la acción: $g \cdot (p, n) = (p \cdot g^{-1}, g \cdot n)$. Dada una conexión $\mathrm{Hor}(P)$ en P, denotamos por $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$ la proyección canónica relativa a la acción anterior; de este modo, haciendo

$$\mathrm{Hor}_{[p,n]}(P \times_G N) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\mathrm{Hor}_p(P) \oplus \{0\}\big) \tag{9}$$

para cada $p \in P$, $n \in N$, se define una única distribución horizontal suave en el fibrado asociado $P \times_G N$. Esta distribución es llamada *conexión generalizada* en el fibrado asociado $P \times_G N$ *asociada* a la conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$.

2.3. Conexiones en fibrados vectoriales

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica E_0. Denotamos por $\mathbf{\Gamma}(E)$ el conjunto de todas la secciones suaves de E y por $C^\infty(M)$ el conjunto de todas las funciones suaves real valuadas en M.

Dados un campo vectorial $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y una función $f \in C^\infty(M)$ (o, más generalmente, f puede ser una función suave en M a valores en un espacio vectorial real finito dimensional). $X(f)$ denota la función definida por $X(f)(x) = \mathrm{d}f_x{\cdot}X(x)$, para cada $x \in M$. Una *conexión* en el fibrado vectorial E es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\nabla : \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(E) \ni (X, \epsilon) \longmapsto \nabla_X \epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E),$$

la cual es $C^\infty(M)$-lineal en X y satisface la *regla de Leibnitz*:

$$\nabla_X(f\epsilon) = X(f)\epsilon + f\nabla_X\epsilon, \tag{10}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ y cada $f \in C^\infty(M)$.

El *tensor de curvatura* de la conexión ∇ se define como la aplicación

$$R : \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(E) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}(E)$$

dada por

$$R(X, Y)\epsilon = \nabla_X\nabla_Y\epsilon - \nabla_Y\nabla_X\epsilon - \nabla_{[X,Y]}\epsilon,$$

para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$, en que $[X, Y] \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ denota el corchete de Lie de los campos X y Y.

Dada una conexión ∇ en el fibrado tangente a una variedad suave M, TM, el *tensor de torsión* de ∇ es la aplicación $T : \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(TM) \to \mathbf{\Gamma}(TM)$ definida por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. Más generalmente, si ∇ es una conexión en un fibrado vectorial arbitrario $\pi : E \to M$, y si $\iota : TM \to E$ es un morfismo de fibrados vectoriales, entonces *la ι-torsión* de ∇ es la aplicación $T^\iota : \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(TM) \to \mathbf{\Gamma}(E)$ definida por

$$T^\iota(X, Y) = \nabla_X\big(\iota(Y)\big) - \nabla_Y\big(\iota(X)\big) - \iota\big([X, Y]\big),$$

para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. Una conexión en TM cuyo tensor de torsión T es idénticamente cero es llamada *simétrica*.

Sean dados fibrados vectoriales E, E' sobre una variedad suave M, dotados de conexiones lineales ∇ y ∇', respectivamente. Decimos que un morfismo de fibrados vectoriales $L : E \to E'$ *preserva conexión* si $\nabla'_v(L \circ \epsilon) = L(\nabla_v\epsilon)$, para cada $v \in TM$ y cada $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$.

2.4. Relacionando conexiones principales con conexiones lineales

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad suave M con fibra típica E_0, y sea $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ una conexión principal en el fibrado principal de los E_0-referenciales en E. Tal conexión induce una conexión $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0\big)$ en el fibrado asociado $\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0$ ($G = \mathrm{GL}(E_0)$). La aplicación

$$\mathcal{C}^E : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0 \ni [p,e] \longmapsto p(e) \in E$$

induce una única distribución horizontal $\mathrm{Hor}(E)$ en E definida por

$$\mathrm{Hor}_{p(e)}(E) = \mathrm{d}\mathcal{C}^E_{[p,e]}\big[\mathrm{Hor}_{[p,e]}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0\big)\big], \tag{11}$$

para cada $[p,e] \in \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0$.

La distribución $\mathrm{Hor}(E)$ define un operador de derivada covariante para secciones suaves del fibrado E, a saber: si $\epsilon : U \to E$ es una sección local suave de π, entonces, dados $x \in U$ y $v \in T_xM$, la *derivada covariante* de ϵ en el punto x en la dirección de v con respecto a la distribución $\mathrm{Hor}(E)$ se denota por $\nabla_v\epsilon$ y se define como

$$\nabla_v\epsilon = \mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v\big) \in \mathrm{Ver}_{\epsilon(x)}(E), \tag{12}$$

en que $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}$ denota la proyección en la componente vertical. El operador de derivada covariante ∇ correspondiente a la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(E)$ es una conexión lineal en el fibrado vectorial E, llamada la *conexión asociada con la conexión principal* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$.

Recíprocamente, si se da una conexión lineal ∇ en el fibrado vectorial E, existe una única conexión principal $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ tal que ∇ es el operador de derivada covariante de la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(E)$ en el fibrado E inducida por $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$. De este modo, se establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de las conexiones principales en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y el conjunto de las distribuciones horizontales en E, cuyos operadores de derivada covariante son conexiones lineales en E; en particular, hay una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de las conexiones principales en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y el conjunto de las conexiones lineales en E.

Con base en la correspondencia anterior es posible establecer una relación entre el tensor de curvatura (respectivamente, torsión) de una conexión lineal en un fibrado vectorial y la forma de curvatura (respectivamente, de torsión) de la conexión principal correspondiente; más específicamente, si ∇ es una conexión lineal en un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ con fibra típica E_0 y Ω denota la forma de curvatura de la conexión principal $\mathrm{Hor}\,(\mathrm{FR}_{E_0}(E))$ en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ asociada con ∇, entonces el tensor de curvatura de la conexión ∇ y la forma de curvatura de la conexión principal correspondiente están relacionados por la identidad

$$p \circ \Omega_p(\zeta_1, \zeta_2) \circ p^{-1} = R_x\big(\mathrm{d}\Pi_p(\zeta_1), \mathrm{d}\Pi_p(\zeta_2)\big) \in \mathrm{Lin}(E_x), \tag{13}$$

para cada $x \in M$, $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, $\zeta_1, \zeta_2 \in T_p\mathrm{FR}_{E_0}(E)$.

Igualmente, si $\iota : TM \to E$ es un morfismo de fibrados vectoriales y Θ^ι denota la forma de ι-torsión en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$, el tensor de torsión de ∇ y la forma ι-canónica de la conexión principal correspondiente están relacionados por la identidad

$$p\big(\Theta_p^\iota(\zeta_1, \zeta_2)\big) = T_x\big(\mathrm{d}\Pi_p(\zeta_1), \mathrm{d}\Pi_p(\zeta_2)\big) \in E_x, \tag{14}$$

para cada $x \in M$, $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, $\zeta_1, \zeta_2 \in T_p\mathrm{FR}_{E_0}(E)$.

2.5. Componentes de una conexión lineal

Sean E un fibrado vectorial sobre una variedad suave M, E^1, E^2 subfibrados de E tales que $E = E^1 \oplus E^2$; denotamos por $\mathrm{pr}_1 : E \to E^1$, $\mathrm{pr}_2 : E \to E^2$ las correspondientes proyecciones. Dada una conexión ∇ en E, hacemos:

$$\begin{aligned} \nabla^1_X \epsilon_1 &= \mathrm{pr}_1 \circ \nabla_X \epsilon_1 \in \mathbf{\Gamma}(E^1), \\ \nabla^2_X \epsilon_2 &= \mathrm{pr}_2 \circ \nabla_X \epsilon_2 \in \mathbf{\Gamma}(E^2), \\ \alpha^1(X, \epsilon_2) &= \mathrm{pr}_1 \circ \nabla_X \epsilon_2 \in \mathbf{\Gamma}(E^1), \\ \alpha^2(X, \epsilon_1) &= \mathrm{pr}_2 \circ \nabla_X \epsilon_1 \in \mathbf{\Gamma}(E^2), \end{aligned} \tag{15}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, cada $\epsilon_1 \in \mathbf{\Gamma}(E^1)$, $\epsilon_2 \in \mathbf{\Gamma}(E^2)$. Claramente ∇^1 y ∇^2 definen conexiones lineales en los fibrados vectoriales E^1 y E^2, respectivamente. Además, α^1 y α^2 son aplicaciones $C^\infty(M)$-bilineales, luego pueden ser identificadas con secciones suaves de los fibrados vectoriales $\mathrm{Lin}(TM, E^2; E^1)$ y $\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)$, respectivamente. Las aplicaciones ∇^1, ∇^2, α^1, α^2 definidas en (15) son llamadas colectivamente las *componentes* de la conexión ∇ relativas a la descomposición $E = E^1 \oplus E^2$. Recíprocamente, dadas las conexiones ∇^1 y ∇^2 en los fibrados E^1 y E^2, respectivamente, $\alpha^1 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}(TM, E^2; E^1)\big)$, $\alpha^2 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)\big)$, haciendo

$$\nabla_X \epsilon = \nabla^1_X(\mathrm{pr}_1 \circ \epsilon) + \alpha^1(X, (\mathrm{pr}_2 \circ \epsilon)) + \nabla^2_X(\mathrm{pr}_2 \circ \epsilon) + \alpha^2(X, (\mathrm{pr}_1 \circ \epsilon)),$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y cada $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$, se define una única conexión lineal ∇ en E cuyas componentes son las conexiones ∇^1 y ∇^2 y las aplicaciones α^1 y α^2.

Si $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial dotado de una estructura riemanniana $g \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}_2^{\mathrm{s}}(E, \mathbb{R})\big)$, una conexión ∇ en E se denomina *compatible* con g si $\nabla g = 0$. Esto es equivalente a la siguiente igualdad:

$$X\big(g(\epsilon_1, \epsilon_2)\big) = g(\nabla_X \epsilon_1, \epsilon_2) + g(\epsilon_1, \nabla_X \epsilon_2), \tag{16}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y cada $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbf{\Gamma}(E)$.

Luego si g es una estructura riemanniana en E y se tiene una descomposición en suma directa g-ortogonal $E = E^1 \oplus E^2$, para $i = 1, 2$, la restricción de g al fibrado vectorial E^i induce una estructura riemanniana en el fibrado E^i. Además, si ∇ es una conexión lineal en E y ∇^1, ∇^2, α^1 y α^2 denotan sus componentes relativas a la descomposición g-ortogonal $E = E^1 \oplus E^2$, entonces ∇ es compatible con g si, y solamente si, la conexión ∇^i es compatible con la métrica $g^i = g\,|_{E^i}$, para $i = 1, 2$; además, las aplicaciones α^1 y α^2 están relacionadas por la identidad

$$g_x\big(\alpha_x^2(v, e_1), e_2\big) + g_x\big(e_1, \alpha_x^1(v, e_2)\big) = 0, \tag{17}$$

para cada $x \in M$, $v \in T_xM$, $e_1 \in E_x^1$, $e_2 \in E_x^2$. La condición (17) permite escribir la aplicación α^1 en términos de la aplicación α^2 y del tensor métrico g; luego si $E = E^1 \oplus E^2$ es una descomposición en suma directa g-ortogonal, para describir las componentes de una conexión lineal ∇ en E compatible con g solo es necesario especificar conexiones ∇^1 y ∇^2 en E^1 y E^2, respectivamente, compatibles con g^1, g^2 y una sección suave α del fibrado vectorial $\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)$.

3. Teorema de Frobenius

Sean M una variedad suave y $\mathcal{D} \subset TM$ una distribución suave en M. Por una *subvariedad integral* para $\mathcal{D}$ entendemos una subvariedad inmersa $S \subset M$ para la cual $T_xS = \mathcal{D}_x$, para cada $x \in S$. Decimos que $\mathcal{D}$ es *integrable* si dado $x \in M$, existe una subvariedad integral S para $\mathcal{D}$ con $x \in S$. La distribución $\mathcal{D} \subset TM$ es llamada *involutiva* si para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{D})$ se tiene $[X, Y] \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{D})$.

El siguiente resultado se demuestra en [4].

Teorema 3.1 (Frobenius). *Sea M una variedad suave. Una distribución suave $\mathcal{D} \subset TM$ en M es involutiva si, y solamente si, es integrable.*

El teorema de Frobenius puede interpretarse como un resultado que garantiza la existencia de soluciones para cierta clase de ecuaciones diferenciales de primer orden; informalmente hablando, ecuaciones de la forma $\mathrm{d}f_x = F\big(x, f(x)\big)$. La relación entre las soluciones de este tipo de ecuaciones y los elementos que aparecen en el enunciado del teorema se establece de la siguiente forma: si f es una solución para una ecuación del tipo $\mathrm{d}f_x = F\big(x, f(x)\big)$, su gráfico es una subvariedad integral de una distribución apropiada. El caso en el cual estamos interesados se describe enseguida.

Dadas las variedades suaves M y N, supóngase que se tienen 1-formas λ^M y λ^N en M y en N, respectivamente, a valores en un espacio vectorial real finito-dimensional V; además, suponga que para cada $y \in N$ la aplicación $\lambda_y^N : T_yN \to$

V es un isomorfismo. Estamos interesados en encontrar una aplicación suave $f : U \to N$ definida en un conjunto abierto $U \subset M$ con

$$f^*\lambda^N = \lambda^M|_U. \tag{18}$$

Nótese que (18) es equivalente a la igualdad $\mathrm{d}f(x) = \tau_{xf(x)}$, donde, para $y \in N$ y $x \in M$, $\tau_{xy} : T_xM \to T_yN$ denota la aplicación lineal definida por

$$\tau_{xy} = (\lambda_y^N)^{-1} \circ \lambda_x^M. \tag{19}$$

Considérese la distribución suave $\mathcal{D}$ en $M \times N$ definida por

$$\mathcal{D}_{(x,y)} = \mathrm{Gr}(\tau_{xy}) \subset T_xM \oplus T_yN \cong T_{(x,y)}(M \times N), \tag{20}$$

para cada $y \in N$ y $x \in M$. Es claro que una función suave $f : U \to N$ definida en un subconjunto abierto U de M satisface (18) si, y solamente si, el gráfico de f es una subvariedad integral para $\mathcal{D}$. Por lo tanto, la existencia de la aplicación f satisfaciendo (18) puede ser obtenida como una aplicación del teorema de Frobenius. Más específicamente, se tiene el siguiente resultado [3]:

Teorema 3.2. *Sean M y N variedades suaves. Supóngase que se tienen* 1*-formas suaves λ^M y λ^N en M y N respectivamente, a valores en un espacio vectorial real finito-dimensional V, tales que $\lambda_y^N : T_yN \to V$ es un isomorfismo, para cada $y \in N$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) para cada $x \in M$, $y \in N$ existe una aplicación suave $f : U \to N$ definida en una vecindad abierta U de x en M con $f(x) = y$ tal que la igualdad (18) *se verifica;*

(b) para cada $x \in M$, $y \in N$, $\tau_{xy}^*\mathrm{d}\lambda_y^N = \mathrm{d}\lambda_x^M$, donde $\tau_{xy} : T_xM \to T_yN$ es la aplicación lineal definida en (19)*.*

Observación 3.3. Un caso particular interesante del teorema anterior sucede cuando N es un grupo de Lie y λ^N denota la forma de Maurer-Cartan para N, ya que si λ^M es una 1-forma suave definida en una variedad suave M a valores en el álgebra de Lie de N, la condición (b) del enunciado equivale a que λ^M satisface la ecuación de Maurer-Cartan, más específicamente, $\mathrm{d}\lambda^M = -\frac{1}{2}\lambda^M \wedge \lambda^M$.

4. Inmersiones isométricas

4.1. Notación y preliminares

Sean (M, g) y $(\overline{M}, \bar{g})$ variedades riemannianas. Por una *inmersión isométrica* de (M, g) en $(\overline{M}, \bar{g})$ entendemos una aplicación suave $f : M \to \overline{M}$ tal que

$$\bar{g}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\big) = g_x(v, w), \tag{21}$$

para cada $x \in M$, $v, w \in T_xM$.

En este caso, el morfismo de fibrados vectoriales $\mathrm{d}f : TM \to T\overline{M}$ induce un morfismo de fibrados vectoriales inyectivo $\overline{\mathrm{d}f} : TM \to f^*T\overline{M}$, cuya imagen $\overline{\mathrm{d}f}(TM)$ es un subfibrado vectorial de $f^*T\overline{M}$ que es isomorfo a TM. El *pull-back* de la estructura riemanniana $\bar{g}$ por la función f denotado por $f^*\bar{g}$, es una estructura riemanniana en el fibrado vectorial $f^*T\overline{M}$. El subfibrado $f^*\bar{g}$-ortogonal a $\overline{\mathrm{d}f}(TM)$ en $f^*T\overline{M}$ se denota por $f^\perp$ y es llamado *fibrado normal* de la inmersión isométrica f. De este modo, la expresión

$$f^*T\overline{M} = \overline{\mathrm{d}f}(TM) \oplus f^\perp \tag{22}$$

define una descomposición en suma directa $f^*\bar{g}$-ortogonal. Si $\overline{\nabla}$ denota la conexión de Levi-Civita de $(\overline{M}, \bar{g})$, i.e., $\overline{\nabla}$ es la única conexión $T\overline{M}$ que es simétrica y compatible con $\bar{g}$, considérese la conexión obtenida por el *pull-back* $f^*\overline{\nabla}$. Las componentes de $f^*\overline{\nabla}$ relativas a la descomposición (22) son denotadas por ∇, $\nabla^\perp$, α, en que ∇ es una conexión en $\overline{\mathrm{d}f}(TM)$, $\nabla^\perp$ es una conexión en el fibrado normal $f^\perp$ y α es una sección suave del fibrado $\mathrm{Lin}(TM, \overline{\mathrm{d}f}(TM); f^\perp)$. Es claro que ∇ es compatible con la estructura riemanniana de TM obtenida por la restricción de $\bar{g}$ (más precisamente, $f^*\bar{g}$); además, haciendo $\iota_1 = \overline{\mathrm{d}f} : TM \to \overline{\mathrm{d}f}(TM)$, $\iota = \overline{\mathrm{d}f} : TM \to f^*T\overline{M}$ se tiene:

$$0 = \overline{T}(\mathrm{d}f_x \cdot v, \mathrm{d}f_x \cdot w) = T^\iota_x(v, w) = T^{\iota_1}_x(v, w) + \alpha_x\,(v, \iota_1(x)) - \alpha_x\,(w, \iota_1(v))$$

para cada $x \in M$, $v, w \in T_xM$, en que $\overline{T}$ denota el tensor de torsión de la conexión $\overline{\nabla}$, T^ι denota la ι-torsión de $f^*\overline{\nabla}$ y T^{ι_1} denota la ι_1-torsión de ∇. Dado que (22) es una descomposición $f^*\bar{g}$-ortogonal, podemos concluir que $T^{\iota_1} = 0$; y además, que $\alpha_x\,(v, \iota_1(x)) = \alpha_x\,(w, \iota_1(v))$ para cada $x \in M$, $v, w \in T_xM$. Luego, usando ι_1 para identificar TM con $\overline{\mathrm{d}f}(TM)$, se sigue que ∇ es la conexión de Levi-Civita de (M, g); también, que α puede identificarse con una sección suave del fibrado $\mathrm{Lin}_2^{\mathrm{s}}(TM, f^\perp)$, i.e., para cada $x \in M$, $\alpha_x : T_xM \times T_xM \to f_x^\perp$ es una forma bilineal simétrica llamada la *segunda forma fundamental* de la inmersión f.

4.2. Ecuaciones de Gauss, Codazzi, Ricci

Con base a la terminología y la notación de la sección anterior, cabe indagar sobre la relación existente entre los tensores de curvatura $\overline{R}$, R y $R^\perp$ de las conexiones $\overline{\nabla}$, ∇, $\nabla^\perp$; la respuesta a este interrogante es dada por las ecuaciones de *Gauss, Codazzi, Ricci*, las cuales son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{g}\big(\overline{R}(X,Y)Z, W\big) = g\big(R(X,Y)Z, W\big) &+ g^\perp\big(\alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\big) \\ &- g^\perp\big(\alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\big), \end{aligned} \tag{23}$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathbf{\Gamma}(TM)$;

$$\overline{R}(X,Y)Z^{\perp} = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z), \tag{24}$$

para cada $X, Y, Z \in \mathbf{\Gamma}(TM)$;

$$\bar{g}\big(\bar{R}(X,Y)\xi,\eta\big) = g^{\perp}\big(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\big) - g\big([A_\xi, A_\eta]X, Y\big), \tag{25}$$

para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM), \xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(f^{\perp})$. $A : TM \times f^{\perp} \to f^{\perp}$ es la aplicación definida por

$$g\big(A_\xi X, Y\big) = g^{\perp}\big(\alpha(X,Y),\xi\big),$$

con $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.

En particular, si $\overline{M}$ tiene curvatura seccional constante c, sabemos que

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\,(\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y)$$

para cada $X, Y, Z \in \mathbf{\Gamma}(T\overline{M})$; y en este caso, para $X, Y, Z, W \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(f^{\perp})$, las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son, respectivamente:

$$\begin{aligned} c\big(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\big) &= g\big(R(X,Y)Z,W\big) \\ &\quad + g^{\perp}\big(\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\big) - g^{\perp}\big(\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\big); \end{aligned} \tag{26}$$

$$\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) = \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z); \tag{27}$$

$$g^{\perp}\big(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\big) = g\big([A_\xi, A_\eta]X, Y\big). \tag{28}$$

4.3. Relacionando inmersiones isométricas con formas en fibrados principales

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son condiciones necesarias para la existencia de una inmersión isométrica $f : (M, g) \to (\overline{M}, \bar{g})$. Estas son también condiciones localmente suficientes; este es el contenido del conocido *Teorema fundamental de las inmersiones isométricas* [1].

Teorema 4.1. *Sean $(M^n, g), (\overline{M}^{\bar{n}}, \bar{g})$ variedades riemannianas, $\pi : (E, g^E) \to M$ un fibrado vectorial riemanniano con fibra típica $\mathbb{R}^k$ ($k + n = \bar{n}$) dotado de una conexión compatible ∇^E. Sea $\alpha_0 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}^{\mathrm{s}}_2(TM; E)\big)$. Para cada $\xi \in \mathbf{\Gamma}(E)$ se define $A_\xi : TM \to TM$ por*

$$g\big(A_\xi X, Y\big) = g^E\big(\alpha_0(X,Y),\xi\big).$$

Si $\overline{M}$ es completa, simplemente conexa y posee curvatura seccional constante c, y α_0, ∇^E satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi, Ricci para el caso de curvatura seccional constante c, entonces para cada $x \in M$ existe un entorno abierto $U \subset M$ y un par (f, L) en que $f : U \to \overline{M}$ es una inmersión isométrica y $L : E\mid_U \to f^{\perp}$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales tal que

(1) para cada $y \in U$, $L_y : \big(E_y, g^E_y\big) \to \big(f^{\perp}_y, g^{\perp}_y \perp\big)$ es una isometría;

(2) $L\big(\alpha_0(\cdot,\cdot)\big) = \alpha(\cdot,\cdot)$ (α segunda forma fundamental de f);

(3) L preserva conexión (E dotado con ∇^E, $f^{\perp}$ dotado de la conexión $\nabla^{\perp}$).

El interés de este trabajo es responder el siguiente cuestionamiento: Dadas variedades riemannianas $(M^n, g), (\overline{M}^{\bar{n}}, \bar{g})$, ¿cuándo es posible encontrar una inmersión isométrica $f : U \subset M \to \overline{M}$ con segunda forma fundamental y conexión normal preestablecidas? Más específicamente, dados un fibrado vectorial riemanniano $\pi : (E, g^E) \to M$ con fibra típica $\mathbb{R}^k$ $(k+n = \bar{n})$ dotado de una conexión compatible ∇^E y una sección simétrica α_0 del fibrado $\mathrm{Lin}_2(TM; E)$, ¿cuándo es posible encontrar un par (f, L) en que $f : U \subset M \to \overline{M}$ es una inmersión isométrica y $L : E\mid_U \to f^{\perp}$ es una isometría de fibrados que preserva conexión y relaciona α_0 con la segunda forma fundamental de f?

Para responder a esta pregunta consideremos el fibrado vectorial riemanniano $(\widehat{E}, \widehat{g}) = (TM, g) \oplus (E, g^E)$. Sea $\widehat{\nabla}$ una conexión compatible con la estructura riemanniana $\widehat{g}$ en $\widehat{E}$, y cuyas componentes relativas a esta descomposición en suma directa ortogonal para $\widehat{E}$ son la conexión de Levi-Civita ∇ de (M, g), la conexión dada ∇^E en E y la aplicación α_0. En este caso, para $X, Y, Z, W \in \mathbf{\Gamma}(TM), \xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ el tensor de curvatura para $\widehat{\nabla}$ es dado por:

$$\begin{aligned}\widehat{g}\big(\widehat{R}(X,Y)Z, W\big) = g\big(R(X,Y)Z, W\big) &+ g^E\big(\alpha_0(X,Z), \alpha_0(Y,W)\big)\\ &- g^E\big(\alpha_0(X,W), \alpha_0(Y,Z)\big),\end{aligned} \tag{29}$$

$$\widehat{g}\big(\widehat{R}(X,Y)Z, \xi\big) = g^E\big(\nabla^E_X\alpha_0(Y,Z) - \nabla^E_Y\alpha_0(X,Z), \xi\big), \tag{30}$$

$$\widehat{g}\big(\widehat{R}(X,Y)\xi, \eta\big) = g^E\big(R^E(X,Y)\xi, \eta\big) - g\big([A_\xi, A_\eta]X, Y\big). \tag{31}$$

El problema de determinar la existencia de un par (f, L) satisfaciendo las condiciones anteriores es equivalente a determinar la existencia de una aplicación suave $f : U \subset M \to \overline{M}$ y una isometría $S : \widehat{E}\mid_U \to f^*(T\overline{M})$ que relacione la conexión $(f^*\bar{\nabla})$ con la conexión $\widehat{\nabla}\mid_U$ y además satisfaga que $S\mid_{TM} = \mathrm{d}f$. Tal isometría

$S : \widehat{E}\,|_U \to f^*(T\overline{M})$ también relaciona el tensor de curvatura $\widehat{R}$ de la conexión $\widehat{\nabla}$ con el tensor de curvatura $f^*\overline{R}$ de la conexión $(f^*\bar{\nabla})$. Más explícitamente,

$$\widehat{g}\big(\widehat{R}(X,Y)\xi,\eta\big) = \bar{g}\big(\overline{R}(S(X),S(Y))S(\xi),S(\eta)\big), \tag{32}$$

para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ cada $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$.

Para resolver esta situación presentamos el siguiente lema.

Lema 4.2. *Sean $M^n, \overline{M}^{\bar{n}}$ variedades suaves, $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $\mathbb{R}^k$ ($k+n=\bar{n}$), $\widehat{\nabla}$ y $\overline{\nabla}$ conexiones lineales en los fibrados $\widehat{E} = TM \oplus E$ y $T\overline{M}$ respectivamente. Sean $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{FR}(\widehat{E})$ un referencial local para $\widehat{E}$, $f : U \to \overline{M}$ una función arbitraria y $S : \widehat{E}|_U \to f^*(T\overline{M})$ una aplicación biyectiva lineal en cada fibra. Defínase $F : U \to \mathrm{FR}(T\overline{M})$ haciendo*

$$F(x) = S_x \circ \mathfrak{s}(x) \in \mathrm{FR}(T_{f(x)}\overline{M}),$$

para cada $x \in U$. Si $\bar{\omega}$, $\widehat{\omega}$ denotan las respectivas formas de conexión en $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ y $\mathrm{FR}(\widehat{E})$ asociadas con las conexiones lineales $\overline{\nabla}$ y $\widehat{\nabla}$, y también si $\bar{\theta}$, $\widehat{\theta}$ denotan las formas canónicas de $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ y $\mathrm{FR}(\widehat{E})$, respectivamente, entonces f es una aplicación suave, S es un isomorfismo de fibrados vectoriales que relaciona la conexión $\widehat{\nabla}$ con la conexión $f^*\bar{\nabla}$, y además, $S\,|_{TM} = \mathrm{d}f$ si, y solamente si, la aplicación F es suave y se cumple

$$F^*\bar{\theta} = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}, \tag{33}$$

$$F^*\bar{\omega} = \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}. \tag{34}$$

Demostración. Sea $S_* : \mathrm{FR}(\widehat{E}) \to \mathrm{FR}(f^*T\overline{M}) = f^*\mathrm{FR}(T\overline{M})$ la aplicación de fibrados principales inducida por S que se define como $S_*(p) = S \circ p$, para cada $p \in \mathrm{FR}(\widehat{E})$. Sea también $\bar{f} : f^*\mathrm{FR}(T\overline{M}) \to \mathrm{FR}(T\overline{M})$ la aplicación canónica del *pull-back* $f^*\mathrm{FR}(T\overline{M}) \subset TM\,|_U \times \mathrm{FR}(T\overline{M})$, la cual es simplemente la restricción a este conjunto de la proyección en la segunda coordenada del producto $TM\,|_U \times \mathrm{FR}(T\overline{M})$. Es claro que:

$$F = \bar{f} \circ S_* \circ \mathfrak{s}. \tag{35}$$

Afirmamos que la aplicación F es suave si, y solamente si, ambas f y S son suaves. En efecto, si ambas f y S son aplicaciones suaves, entonces la igualdad (35) implica que la aplicación F es suave. Recíprocamente, si F es suave, entonces f también lo es, dado que $f = \overline{\Pi} \circ F$, en que $\overline{\Pi} : \mathrm{FR}(T\overline{M}) \to \overline{M}$ es la proyección canónica. Además, F es una sección local de $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ a lo largo de f, luego la sección local correspondiente para $f^*\mathrm{FR}(T\overline{M})$,

$$S_* \circ \mathfrak{s} = \overline{F},$$

es suave; como $\mathfrak{s}$ es una sección local arbitraria del atlas de secciones locales del fibrado principal $\mathrm{FR}(\widehat{E})|_U$, se tiene que $S_* : \mathrm{FR}(\widehat{E})|_U \to \mathrm{FR}(f^*T\overline{M})$ es un isomorfismo suave de fibrados principales cuyo morfismo subyacente de grupos estructurales es la aplicación identidad de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$. Esto muestra que la aplicación S es suave.

Asumamos ahora que F, f y S son aplicaciones suaves y veamos que S preserva conexión (i.e., S relaciona las conexión $\widehat{\nabla}$ con la conexión $f^*\bar{\nabla}$) si, y solamente si, la igualdad (34) se satisface. En efecto, S preserva conexión si, y solamente si, la aplicación inducida $S_* : \mathrm{FR}(\widehat{E}) \to \mathrm{FR}(f^*T\overline{M})$ preserva conexión. Por definición, la forma de conexión del *pull-back* $\mathrm{FR}(f^*T\overline{M}) = f^*\mathrm{FR}(T\overline{M})$ es igual a $\bar{f}^*\overline{\omega}$; luego, S_* preserva conexión si, y solamente si

$$(S_* \circ \mathfrak{s})^*(\bar{f}^*\overline{\omega}) = s^*\widehat{\omega}. \tag{36}$$

Pero (36) es obviamente lo mismo que (34).

Finalmente probemos que para cada $x \in U, S_x |_{T_xM} = \mathrm{d}f_x$ si, y solamente si, la igualdad (33) es satisfecha. Como consecuencia de (8), dado $x \in U$ se vale

$$\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}_x = \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \iota_x, \;\; F^*\overline{\theta}_x = \overline{\theta}_{F(x)}\,(\mathrm{d}F_x) = F(x)^{-1} \circ \mathrm{d}\overline{\Pi}_{F(x)} \circ \mathrm{d}F_x,$$

en donde $\iota : TM \to \widehat{E}$ denota la aplicación inclusión, vemos que la igualdad (33) se cumple si, y solamente si

$$F(x)^{-1} \circ \mathrm{d}\overline{\Pi}_{F(x)} \circ \mathrm{d}F_x = \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \iota_x, \tag{37}$$

para cada $x \in U$. Como $\overline{\Pi} \circ F = f$, se tiene que (37) se cumple si, y solamente si,

$$F(x)^{-1} \circ \mathrm{d}f_x = \mathfrak{s}(x)^{-1} \,|_{T_xM}, \tag{38}$$

para cada $x \in U$. Finalmente, dado que $F(x) = S_x \circ \mathfrak{s}(x)$, es claro que (38) se cumple si, y solamente si, $S_x |_{T_xM} = \mathrm{d}f_x$. Esto concluye la prueba. ☑

Sean $\widehat{P} \subset \mathrm{FR}(\widehat{E})$ y $\overline{P} \subset \mathrm{FR}(T\overline{M})$ las $\mathrm{O}(\bar{n})$-estructuras en $\widehat{E}$ y $T\overline{M}$ inducidas por las métricas $\widehat{g}$ y $\bar{g}$ respectivamente. Es decir, $\widehat{P}$ y $\overline{P}$ consisten de los referenciales ortogonales en los respectivos fibrados $\widehat{E}$ y $T\overline{M}$. Sean $\mathfrak{s} : U \to \widehat{P}$ un referencial local ortogonal para $\widehat{E}$ y $F : U \to \overline{P}$ una aplicación suave tal que las igualdades (33), (34)[1], son satisfechas. Sean $f : U \to \overline{M}$, $S : \widehat{E}\,|_U \to f^*T\overline{M}$ las aplicaciones definidas por

$$f = \overline{\Pi} \circ F, \quad S_x = F(x) \circ \mathfrak{s}(x)^{-1} : \widehat{E}_x \longrightarrow T_{f(x)}\overline{M} = (f^*T\overline{M})_x,$$

[1]Como $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita en $T\overline{M}$, la restricción de $\overline{\omega}$ al fibrado principal $\overline{P}$ induce una conexión en él.

para cada $x \in U$. Como consecuencia del Lema 4.2 se tiene que f y S son aplicaciones suaves y S es una isometría que relaciona $\widehat{\nabla}$ con $f^*\bar{\nabla}$ y $S\mid_{TM} = \mathrm{d}f$. Luego el par $(f, S\mid_E)$ es una solución al problema de inmersión inicialmente planteado.

En las siguientes secciones, apoyados en el Teorema 3.2, construiremos la aplicación suave $F : U \to \overline{P}$ de modo que las igualdades (33), (34) sean satisfechas.

4.4. Inmersiones en espacios de curvatura seccional constante

Estudiamos en lo que sigue el problema de la existencia de inmersiones isométricas en los espacios completos conexos y simplemente conexos de curvatura seccional constante. Con base a la notación empleada en la sección anterior, escribiremos $\overline{M}$ para denotar cualquiera de las tres variedades en cuestión, $\mathbb{R}^n, \mathrm{S}^n$ o H^n.

Sean (M, g) una variedad riemanniana, $\pi : (E, g^E) \to M$ un fibrado vectorial riemanniano con fibra típica $\mathbb{R}^k$ $(k + n = \bar{n})$ dotado de una conexión lineal compatible ∇^E y α_0 una sección del fibrado $\mathrm{Lin}_2^s(TM; E)$. Consideremos el fibrado vectorial riemanniano $(\widehat{E}, \widehat{g}) = (TM, g) \oplus (E, g^E)$. Sea $\widehat{\nabla}$ una conexión compatible con la estructura riemanniana $\widehat{g}$ en $\widehat{E}$ y cuyas componentes relativas a esta descomposición son la conexión de Levi-Civita ∇ de (M, g), la conexión ∇^E en E y la aplicación α_0. Sea $\mathfrak{s} : U \to \widehat{P}$ un referencial local ortogonal para $\widehat{E}$.

Como consecuencia de lo presentado en la sección 4.3 tenemos:

Teorema 4.3. *Empleando la notación y la terminología antes vista, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) α_0, ∇^E *satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi, Ricci para el caso de curvatura seccional constante c;*

(2) para cada $x \in M$*, existe un entorno abierto* $U \subset M$ *y un par* (f, S) *en que* $f : U \to \overline{M}$ *es una aplicación suave y* $S : \widehat{E}\mid_U \to f^*(T\overline{M})$ *es una isometría de fibrados vectoriales que relaciona la conexión* $(f^*\bar{\nabla})$ *con la conexión* $\widehat{\nabla}\mid_U$*, y además satisface que* $S\mid_{TM} = \mathrm{d}f$*;*

(3) $F^*\bar{\theta} = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}$, $F^*\bar{\omega} = \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}$*, donde* $F : U \to \overline{P}$ *es la aplicación definida por*

$$F(x) = S_x \circ \mathfrak{s}(x) \in \overline{P}_{f(x)},$$

para cada $x \in U$*. Además,* $\bar{\omega}$ *y* $\widehat{\omega}$ *denotan las respectivas formas de conexión en* $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ *y* $\mathrm{FR}(\widehat{E})$ *asociadas con las conexiones lineales* $\overline{\nabla}$*,* $\widehat{\nabla}$*, y* $\bar{\theta}$*,* $\widehat{\theta}$ *denotan las formas canónicas de* $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ *y* $\mathrm{FR}(\widehat{E})$*, respectivamente.*

Como consecuencia del Teorema 3.2 (ver Observación 3.3) es posible presentar algunas condiciones adicionales equivalentes a las dadas en el Teorema 4.3. En efecto, para esto veamos que el fibrado $\mathrm{O}(\bar{n})$-principal $\overline{P}$ de los referenciales ortonormales en $\overline{M}$ posee, además de una estructura de fibrado principal, una estructura de grupo de Lie cuya forma de Maurer-Cartan está dada por la forma canónica de $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ y por la forma de conexión en $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ asociada con la conexión $\overline{\nabla}$.

Inmersiones en $\overline{M} = \mathbb{R}^n$

En este caso la afirmación es inmediata, puesto que $\overline{P} = \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$, el cual, además de ser un fibrado principal trivial sobre $\mathbb{R}^n$ con grupo estructural $\mathrm{O}(n)$, es un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$. Los elementos de este grupo y de su álgebra matricialmente se representan como

$$p = \begin{pmatrix} T & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T \in \mathrm{O}(n), t \in \mathbb{R}^n;$$

$$V = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X \in \mathfrak{so}(n), x \in \mathbb{R}^n.$$

Empleando (6) y (2), para cada $p \in \overline{P}$, cada $V \in \mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$ se obtiene:

$$\bar{\theta}_p(p \cdot V) = p^{-1}\big(\mathrm{d}\overline{\Pi}_p(p \cdot V)\big) = p^{-1}\left(\mathrm{d}\overline{\Pi}_p \begin{pmatrix} TX & Tx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = p^{-1}\begin{pmatrix} Tx \\ 0 \end{pmatrix} = x,$$

$$\bar{\omega}_p(p \cdot V) = \bar{\omega}_p \begin{pmatrix} TX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{\omega}_p \begin{pmatrix} 0 & Tx \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p^{-1}\begin{pmatrix} TX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X;$$

como la forma de Maurer-Cartan satisface $\lambda_p(p \cdot V) = V$, se tiene que $\lambda = (\bar{\omega}, \bar{\theta})$.

Con la notación del Teorema 4.3, el par $(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$ define una 1-forma en M a valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$. La condición (a) que aparece en el Teorema 3.2 (ver Observación 3.3) corresponde a la condición (3) en el Teorema 4.3; o sea, se tiene una 1-forma en M que coincide con el *pull-back* por F de la forma de Maurer-Cartan $\lambda = (\bar{\omega}, \bar{\theta})$ del grupo de Lie $\overline{P}$. Luego el Teorema 3.2 garantiza que el par $(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$ satisface la ecuación de Maurer-Cartan, lo que significa que la condición (3) en el Teorema 4.3 es equivalente con la condición

(4) $\mathrm{d}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right),$

en que el producto $\wedge$ es considerado relativo al conmutador del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$. Calculando en $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$ y efectuando la derivada exterior, la condición (4) equivale a las identidades

$$\mathfrak{s}^* \left(\mathrm{d}\widehat{\omega} + \frac{1}{2} \widehat{\omega} \wedge \widehat{\omega} \right) = 0, \;\; \mathfrak{s}^* \left(\mathrm{d}\widehat{\theta} + \widehat{\omega} \wedge \widehat{\theta} \right) = 0. \tag{39}$$

Empleando las igualdades (7) y (5) concluimos que las igualdades en (39), son equivalentes a

$$\widehat{\Omega} = 0, \;\; \widehat{\Theta} = 0. \tag{40}$$

Por otro lado, como consecuencia de las igualdades (13) y (14) se tiene que las igualdades en (40) equivalen a

(5) $\widehat{R} = 0, \;\; \widehat{T} = 0,$

en donde $\widehat{R}$ y $\widehat{T}$ denotan los tensores de curvatura y torsión respectivamente de la conexión $\widehat{\nabla}$. Acabamos de mostrar el siguiente resultado:

Teorema 4.4. *Las condiciones* (1), (2) *y* (3) *enunciadas en el Teorema 4.3 para* $c = 0$ *y* $\overline{M} = \mathbb{R}^n$*, son equivalentes a las condiciones*

(4) $\mathrm{d} \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \right) = -\frac{1}{2} \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \right);$

(5) $\widehat{R} = 0, \;\; \widehat{T} = 0.$

Inmersiones en $\overline{M} = \mathrm{S}^n$

El espacio completo conexo simplemente conexo con curvatura seccional constante $c = 1$, es la esfera $\overline{M} = \mathrm{S}^n$. El grupo de isometrías es el conjunto $\mathrm{O}(n+1)$, el cual puede ser interpretado como un fibrado principal sobre S^n con grupo estructural $\mathrm{O}(n)$. A saber, considere la proyección $\Pi : \mathrm{O}(n+1) \to \mathrm{S}^n$ definida por $\Pi(p_1, \ldots, p_{n+1}) = p_1$. Identificando el grupo $\mathrm{O}(n)$ con el subgrupo de $\mathrm{O}(n+1)$ dado por los elementos de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad T \in \mathrm{O}(n),$$

se tiene una acción suave por traslaciones a derecha, la cual preserva las fibras. Para cada $p \in \mathrm{O}(n+1)$, se tiene:

$$\mathrm{Ver}_p(\mathrm{O}(n+1)) = p \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n});$$

$$\mathrm{Hor}_p(\mathrm{O}(n+1)) = p\cdot\begin{pmatrix} 0 & -a^t \\ a & 0, \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1), \quad a\in\mathbb{R}^n.$$

Luego todo elemento $V\in T_p(\mathrm{O}(n+1))$ puede escribirse de la forma:

$$V = p\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 & -a^t \\ a & 0, \end{pmatrix},$$

con $A\in\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$, $a\in\mathbb{R}^n$.

Empleando (6) y (2), para $V\in T_p(\mathrm{O}(n+1))$ se obtiene:

$$\bar{\theta}_p(V) = p^{-1}\mathrm{d}\overline{\Pi}_p(V) = p^{-1}\left(p\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ a; \end{pmatrix}\right) = a\in\mathbb{R}^n;$$

$$\bar{\omega}_p(V) = p^{-1}\left(p\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) = A\in\mathfrak{so}(n).$$

Con base en lo anterior es posible escribir la forma de Maurer-Cartan como:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\theta}^t \\ \bar{\theta} & \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

Con la notación del Teorema 4.3, el par $(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$ define una 1-forma en M a valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n+1)$. La condición (a) que aparece en el Teorema 3.2 (ver Observación 3.3) corresponde a la condición (3) en el Teorema 4.3; o sea, se tiene una 1-forma en M que coincide con el *pull-back* por F de la forma de Maurer-Cartan:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\theta}^t \\ \bar{\theta} & \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

del grupo de Lie $\overline{P}$. Luego el Teorema 3.2 garantiza que el par $(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$ satisface la ecuación de Maurer-Cartan, lo que significa que la condición (3) en el Teorema 4.3 es equivalente a la condición

$$\text{(4)}\qquad \mathrm{d}\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix},$$

en que el producto $\wedge$ es considerado relativo al conmutador del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n+1)$. Sean $x\in M$ y $X, Y\in T_xM$. Denotemos por A y B las matrices en $\mathfrak{so}(n+1)$ definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(X) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(Y) \end{pmatrix}.$$

El conmutador de A y B en $\mathfrak{so}(n+1)$ está dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & \left(\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(X,Y)\right)^t \\ \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(X,Y) & \rho(X,Y) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(X) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(Y) \end{pmatrix},$$

en que $\rho(X,Y) \in \mathfrak{so}(n)$ se define mediante la identidad:

$$\rho(X,Y) = -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X)\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y)^t + \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y)\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X)^t;$$

efectuando la derivada exterior, la condición (4) resulta equivalente a

$$\mathfrak{s}^*\left(\mathrm{d}\widehat{\omega} + \frac{1}{2}\,\widehat{\omega} \wedge \widehat{\omega}\right) = -\rho,\ \ \mathfrak{s}^*\left(\mathrm{d}\widehat{\theta} + \widehat{\omega} \wedge \widehat{\theta}\right) = 0. \tag{41}$$

De (7) y (5) es posible concluir que las igualdades en (41) son equivalentes a

$$\mathfrak{s}^*\widehat{\Omega} = -\rho,\ \mathfrak{s}^*\widehat{\Theta} = 0. \tag{42}$$

Sean $x \in M$ y $p = (V_1, \dots, V_n) \in \widehat{P}_x$ un referencial ortonormal asociado con la base canónica $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$; para cada $i = 1, \dots, n$ denotamos por Z_i la proyección sobre T_xM del vector V_i . Para cada $X, Y \in T_xM$ denotamos por $X^*, Y^* \in T_p\widehat{P}$ los vectores horizontales tales que $\mathrm{d}\Pi_p(X^*) = X, \mathrm{d}\Pi_p(Y^*) = Y$. Empleando la igualdad (13) tenemos que:

$$\langle \widehat{\Omega}_p(X^*, Y^*) \cdot e_i, e_j\rangle = \widehat{g}_x(\widehat{R}_x(X,Y) \cdot V_i, V_j),\ \ i,j = 1, \dots, n.$$

Como consecuencia de la condición $\mathfrak{s}^*\widehat{\Omega} = -\rho$, para cada $i, j = 1, \dots, n$ calculamos:

$$\widehat{\Omega}_p(Z_i^*, Z_j^*) = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Z_i)\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Z_j)^t - \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Z_j)\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Z_i)^t = E_{ij} - E_{ji},$$

en que, E_{ij} denota la matriz $n \times n$ con entradas nulas excepto para la componente ij, la cual es 1, y $\mathfrak{s}(x) = p$. Por lo tanto, para cada $i \neq j$ se tiene

$$\langle \widehat{\Omega}_p(Z_i^*, Z_j^*) \cdot e_i, e_j\rangle = -1.$$

De (14) y (13) es posible concluir que la igualdades en (42) son equivalentes a

(5) $$\widehat{g}\left(\widehat{R}(X,Y)\xi, \eta\right) = \widehat{g}(Y,\xi)\,\widehat{g}(X,\eta) - \widehat{g}(Y,\eta)\,\widehat{g}(X,\xi),\ \ \widehat{T} = 0,$$

para $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$. Todo lo anterior se recopila en el siguiente resultado:

Teorema 4.5. *Las condiciones* (1)*,* (2) *y* (3) *enunciadas en el Teorema 4.3 para* $c = 1$ *y* $\overline{M} = \mathrm{S}^n$*, son equivalentes a las condiciones:*

(4) $\mathrm{d}\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix}$;

(5) $\widehat{g}\left(\widehat{R}(X,Y)\xi,\eta\right) = \widehat{g}(Y,\xi)\,\widehat{g}(X,\eta) - \widehat{g}(Y,\eta)\,\widehat{g}(X,\xi)$, $\widehat{T} = 0$, *para cada* $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ *y cada* $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$.

Inmersiones en $\overline{M} = \mathrm{H}^n$

El espacio completo conexo simplemente conexo con curvatura seccional constante $c = -1$ es el hiperboloide $\overline{M} = \mathrm{H}^n$ dado por

$$\mathrm{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x\rangle_L = -1 \wedge x_0 > 0\},$$

en que $\langle \cdot,\cdot\rangle_L$ denota el *producto de Minkowski*. Por lo tanto, para cada $x \in \mathrm{H}^n$ se tiene

$$T_x\mathrm{H}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, x\rangle_L = 0\}.$$

Luego es posible escoger una base $\{b_0 = x, b_1, \dots, b_n\}$ para $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle x, b_i\rangle_L = 0, \langle b_i, b_j\rangle_L = \delta_{ij}$, lo que muestra que la métrica inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ en H^n es riemanniana. El grupo de isometrías es el conjunto $\mathrm{O}^1(n+1)$, formado por las isometrías de $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ que preservan *orientación temporal,* i.e., mantienen el signo de la primera coordenada. Identificando el grupo $\mathrm{O}(n)$ con el subgrupo de $\mathrm{O}^1(n+1)$ dado por los elementos de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad T \in \mathrm{O}(n),$$

se tiene una acción suave libre y transitiva en los referenciales ortonormales de H^n. Luego el fibrado $\mathrm{O}(n)$-principal de los referenciales ortonormales $\overline{P}$ puede ser identificado con el grupo $\mathrm{O}^1(n+1)$. Para cada $p \in \mathrm{O}^1(n+1)$ se tiene:

$$\mathrm{Ver}_p(\mathrm{O}^1(n+1)) = p \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n});$$

$$\mathrm{Hor}_p(\mathrm{O}^1(n+1))) = p \cdot \begin{pmatrix} 0 & a^t \\ a & 0, \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1), \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, todo elemento $V \in T_p(\mathrm{O}^1(n+1))$ puede escribirse de la forma

$$V = p\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 & a^t \\ a & 0, \end{pmatrix},$$

con $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Empleando (6) y (2), para $V \in T_p(\mathrm{O}^1(n+1))$ se obtiene:

$$\bar{\theta}_p(V) = a \in \mathbb{R}^n;$$

$$\bar{\omega}_p(V) = A \in \mathfrak{so}(n).$$

Con base en lo anterior es posible escribir la forma de Maurer-Cartan como:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\theta}^t \\ \bar{\theta} & \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

De forma análoga a lo realizado para la esfera, el par $(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$ define una 1-forma en M que coincide con el *pull-back* por F de la forma de Maurer-Cartan

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\theta}^t \\ \bar{\theta} & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

del grupo de Lie $\overline{P}$; además, esta 1-forma satisface la ecuación de Maurer-Cartan, lo que significa que la condición (3) en el Teorema 4.3 equivale a la condición

(4) $$\mathrm{d}\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix}.$$

Ídem a los casos anteriores, se concluye que la condición (4) es equivalente a

$$\mathfrak{s}^*\widehat{\Omega} = -\varphi, \ \mathfrak{s}^*\widehat{\Theta} = 0, \tag{43}$$

en donde $\varphi(X,Y) = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X)\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y)^t - \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y)\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X)^t$. Además, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 4.6. *Las condiciones* (1), (2) *y* (3) *enunciadas en el Teorema 4.3 para* $c = -1$ *y* $\overline{M} = \mathrm{H}^n$*, son equivalentes a las condiciones:*

(4) $$\mathrm{d}\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix};$$

(5) $\mathfrak{s}^*\widehat{\Omega} = -\varphi, \ \mathfrak{s}^*\widehat{\Theta} = 0$*;*

(6) $\widehat{g}\left(\widehat{R}(X,Y)\xi,\eta\right) = \widehat{g}(Y,\xi)\,\widehat{g}(X,\eta) - \widehat{g}(Y,\eta)\,\widehat{g}(X,\xi),\ \widehat{T} = 0$*, para cada* $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ *y cada* $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$*.*

4.5. Inmersiones isométricas en espacios arbitrarios

En esta sección abordamos el problema de determinar la existencia de inmersiones isométricas entre variedades riemannianas arbitrarias. Empleando la notación y la terminología antes establecidas, fijemos objetos (M, g), $(\overline{M}, \bar{g})$, $\pi : (E, g^E) \to M$, $\widehat{E}$, $\widehat{\nabla}$, $\overline{\nabla}$, $\widehat{P}$ y $\overline{P}$. Dado un referencial local $\mathfrak{s} : U \to \widehat{P}$, denótese por $\lambda^{\overline{P}}$ la 1-forma en $\overline{P}$ a valores en $\mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{so}(\bar{n})$ obtenida restringiendo la 1-forma $(\bar{\theta}, \bar{\omega})$, y por λ^U la 1-forma en U a valores en $\mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{so}(\bar{n})$ definida por

$$\lambda^U = (\mathfrak{s}^* \widehat{\theta}, \mathfrak{s}^* \widehat{\omega}).$$

Dado que $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita, se tiene que $\lambda^{\overline{P}}_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}\overline{P} \to \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{so}(\bar{n})$ define un isomorfismo para cada $\bar{p} \in \overline{P}$.

Para $x \in U$, $y \in \overline{M}$ y $\bar{p} \in \overline{P}$ considérese la aplicación lineal

$$\tau = (\lambda^{\overline{P}}_{\bar{p}})^{-1} \circ \lambda^U_x : T_x M \longrightarrow T_{\bar{p}}\overline{P}.$$

Con el fin de aplicar el Teorema 3.2 para obtener una aplicación suave $F : U \to \overline{P}$ tal que $F^* \lambda^{\overline{P}} = \lambda^U$, debemos mostrar que

$$\tau^* \mathrm{d}\lambda^{\overline{P}}_{\bar{p}} = \mathrm{d}\lambda^V_x, \tag{44}$$

o de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \tau^*(\mathrm{d}\bar{\theta} + \bar{\omega} \wedge \bar{\theta})_{\bar{p}} &= \big(\mathfrak{s}^*(\mathrm{d}\,\widehat{\theta} + \widehat{\omega} \wedge \widehat{\theta})\big)_x, \\ \tau^*(\mathrm{d}\bar{\omega} + \tfrac{1}{2}\,\bar{\omega} \wedge \bar{\omega})_{\bar{p}} &= \big(\mathfrak{s}^*(\mathrm{d}\widehat{\omega} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{\omega} \wedge \widehat{\omega})\big)_x. \end{aligned} \tag{45}$$

Pero, de (5) y (7), las igualdades en (45) equivalen a

$$\tau^* \bar{\Theta}_{\bar{p}} = (\mathfrak{s}^* \widehat{\Theta})_x, \quad \tau^* \bar{\Omega}_{\bar{p}} = (\mathfrak{s}^* \widehat{\Omega})_x, \tag{46}$$

donde $\bar{\Theta}$ denota la forma de torsión de $\mathrm{FR}(T\overline{M})$, $\bar{\Omega}$ denota la forma de curvatura asociada con la conexión $\overline{\nabla}$, $\widehat{\Theta}$ denota la ι-torsión de $\mathrm{FR}(\widehat{E})$ y $\widehat{\Omega}$ denota la forma de curvatura asociada con la conexión $\widehat{\nabla}$. Usando (13) y (14) concluimos que las identidades en (46) son válidas si, y solamente si,

$$\begin{aligned} \bar{p}^{\,-1}\Big(\overline{T}_y\big(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(v)], \mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(w)]\big)\Big) &= \mathfrak{s}(x)^{-1}\big(\widehat{T}_x(v, w)\big), \\ \bar{p}^{\,-1} \circ \overline{R}_y\big(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(v)], \mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(w)]\big) \circ \bar{p} &= \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \widehat{R}_x(v, w) \circ \mathfrak{s}(x), \end{aligned} \tag{47}$$

para cada $v, w \in T_x M$. Calculando, se obtiene

$$(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}} \circ \tau)(v) = \big(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}} \circ (\lambda^{\overline{P}}_{\bar{p}})^{-1} \circ \lambda^U_x\big)(v) = \big(\bar{p} \circ \mathfrak{s}(x)^{-1}\big)(v).$$

Como $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita, $\overline{T} = 0$; luego (47) equivale a

$$\widehat{T} = 0, \quad \overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(w)\big) = \sigma \circ \widehat{R}_x(v, w) \circ \sigma^{-1}, \tag{48}$$

en donde $\sigma = \bar{p} \circ s(x)^{-1}$.

Por lo tanto, para obtener el resultado deseado es necesario suponer que $\widehat{\nabla}$ tiene torsión nula, luego esta es la conexión de Levi-Civita en $\widehat{E}$; además, que para cada $y, z \in \overline{M}$, toda isometría $\phi : T_y\overline{M} \to T_z\overline{M}$ relaciona $\overline{R}_y$ con $\overline{R}_z$, y que para cada $x \in M$, toda isometría $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, relaciona $\widehat{R}_x$ con $\overline{R}_y$. Más específicamente, tenemos:

Teorema 4.7. *Fijemos objetos (M, g), $(\overline{M}, \bar{g})$, $\pi : (E, g^E) \to M$, $\widehat{E}$, $\widehat{\nabla}$, $\overline{\nabla}$, $\widehat{P}$ y $\overline{P}$ como en el planteamiento del problema. Denotemos por $\widehat{R}$ y $\overline{R}$, respectivamente los tensores de curvatura de $\widehat{\nabla}$ y $\overline{\nabla}$, y supongamos que $\widehat{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita en $\widehat{E}$; además, para cada $y, z \in \overline{M}$ y cada $x \in M$, y supongamos que toda isometría $\phi : T_y\overline{M} \to T_z\overline{M}$ relaciona $\overline{R}_y$ con $\overline{R}_z$, y toda isometría $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, relaciona $\widehat{R}_x$ con $\overline{R}_y$. Entonces, para cada $x_0 \in M$, cada $y_0 \in \overline{M}$ y cada isometría $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$, existe un par (f, S) en que $f : U \to \overline{M}$ es una función suave, con $f(x_0) = y_0$, y $S : \widehat{E} \to f^*(T\overline{M})$ es un isomorfismo de fibrados tal que:*

(1) $S_{x_0} = \sigma_0$;

(2) para cada $y \in U$, $S_y : \big((\widehat{E}\,|_U)_y, g^E_y\big) \to \big((f^*T\overline{M})_y, \bar{g}_{f(y)}\big)$ *es una isometría;*

(3) $S^*(f^*\bar{\nabla}) = \widehat{\nabla}\,|_U$;

(4) $S\,|_{TM} = \mathrm{d}f$.

5. Consideraciones finales

Todos los resultados presentados en este trabajo referentes a la existencia de inmersiones isométricas con segunda forma fundamental y conexión normal preestablecidas son de carácter local; para obtener enunciados globales es necesario suponer que la variedad M es simplemente conexa y que la variedad $\overline{M}$ es geodésicamente completa.

El resultado referente a la existencia de inmersiones en variedades completas conexas y de curvatura seccional constante empleó una versión apropiada del Teorema 3.2; más específicamente, el hecho de que el fibrado de los referenciales ortogonales admite una estructura de grupo de Lie (ver la Observación 3.3). Esta casualidad desafortunadamente no es válida en el caso de una variedad riemanniana arbitraria. Sin embargo, esta es una situación general en el siguiente sentido: si M es una variedad arbitraria dotada de una conexión lineal ∇,

$G \subset \mathrm{GL}(n)$ es un grupo de Lie y $P \subset \mathrm{FR}(M)$ es una G-estructura en M, decimos que la tripla (M, ∇, P) es *una variedad afín homogénea* si para cada $x, y \in M$ y cada $p, q \in P_x$, existe una difeomorfismo $f : M \to M$ que preserva conexión, preserva G-estructura y tal que $f(x) = y$ y $\mathrm{d}f_x \circ p = q$. Es decir, la tripla es homogénea si se tiene una acción transitiva del grupo de los difeomorfismos en M, los cuales preservan conexión y G-estructura sobre los referenciales de P. Cuando M es conexa, esa acción es libre, y por lo tanto P puede ser identificado con ese grupo de automorfismos, el cual es un grupo de Lie.

El enunciado del Teorema 4.7 asume que $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita en $(\overline{M}, \overline{g})$, y además que $\widehat{\nabla}$ es una conexión compatible con la estructura métrica en el fibrado vectorial $\widehat{E}$; sin embargo, esto puede ser demostrado asumiendo simplemente que $\overline{\nabla}$ es una conexión compatible con la estructura métrica $\overline{g}$. En este caso se debe tener una hipótesis adicional relativa a la torsión similar a la impuesta para el tensor de curvatura; más específicamente, para cada $y, z \in \overline{M}$, cada $x \in M$, toda isometría $\phi : T_y\overline{M} \to T_z\overline{M}$ relaciona $\overline{T}_y$ con $\overline{T}_z$ y toda isometría $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$ relaciona $\widehat{T}_x$ con $\overline{T}_y$. Más generalmente, puede pensarse en abolir las condiciones referentes a la compatibilidad de las conexiones $\overline{\nabla}$ y $\widehat{\nabla}$ con las respectivas estructuras métricas, caso en el cual aparece un tensor $\mathfrak{I}$ llamado *torsión interna*, que mide el grado de compatibilidad de las conexiones con las respectivas estructuras métricas (ver [3]). En este caso, una hipótesis adicional igual a la impuesta para los tensores de curvatura y torsión es necesaria para el tensor $\mathfrak{I}$.

Referencias

[1] Dajczer M., *Submanifolds and isometric immersions,* Mathematics Lecture Series, 13, Publish or Perish, Houston, Texas, 1990.

[2] Daniel B., "Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds", *Comment. Math. Helv.* 82 (2007), no. 1, 87–131.

[3] Piccione P. and Tausk D., *The theory of connections and G–structures. Applications to affine and isometric immersions*, XIV Escola de Geometría Diferencial, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[4] Warner F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups,* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1983.