Análisis cualitativo en un modelo epidemiológico S.I.S

Huber Andrés Lopera Taborda

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Asesor:
Juan Sebastían Builes Cardona, Magister en Matemáticas

Universidad de Antioquia
facultad de ciencias exactas y naturales
Instituto de matemáticas
Caucasia
2022

Análisis cualitativo en un modelo epidemológico S.I.S.

Huber Andrés Lopera Taborda

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Instituto de Matemáticas
Caucasia, Antioquia
2022

Dedicado a
mi madre.

Agradecimientos

Gracias a mis hermanos, a mi padre, a mi compañera, a mis hijos y en especial, a mi madre que siempre estuvo conmigo en este proceso y a pesar de que ya no se encuentra entre nosotros, siempre la recordaré con un inmenso cariño.

Resumen

En el presente trabajo estudiamos de forma cualitativa la existencia, unicidad y estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En especial, hacemos un análisis cualitativo de un modelo matemático de epidemias, conocido como el modelo S.I.S. En este modelo incluimos los fenómenos de natalidad y mortalidad. Así, demostramos la existencia de una única solución positiva del modelo S.I.S. Además, damos las condiciones para demostrar la estabilidad asintótica de los puntos equilibrio: libre de enfermedad y endémico. También, damos las condiciones para que la enfermedad desaparezca y para que ésta persista. Finalmente, encontramos la solución explícita del modelo, acompañada de ciertas simulaciones.

Palabras claves: Ecuación Diferencial Ordinaria, Modelo S.I.S, Equilibrio Libre de Enfermedad, Equilibrio Endémico.

Índice general

Introducción

El estudio matemático de los sistemas biológicos es una herramienta indispensable de descripción y predicción del comportamiento de ellos. Si bien, estos modelos son ideales, su estudio es necesario pues, bajo ciertas condiciones, aproximan muy bien la realidad. En este trabajo se pretende estudiar un problema epidemiológico desde una perspectiva netamente cualitativa. Las epidemias han sido parte de la naturaleza desde el origen mismo de la vida, en particular, han aquejado al ser humano desde tiempos remotos.

En la modelación de epidemias se describe una dinámica entre tres tipos de una población, a saber, los susceptibles a la enfermedad, los infectados por la enfermedad y los recuperados de la enfermedad. Estos modelos que describen tal dinámica se denominan modelos S.I.R. El estudio matemático de los modelos S.I.R data del siglo pasado. La primera propuesta de modelación matemática de epidemias se dió en el trabajo de Kermakc-Mckendrick (1927)[1], el cual es un modelo S.I.R determinista y se rige por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

donde S, I y R son las de poblaciones de los susceptibles, infectados y recuperados, respectivamente. β es el coeficiente de transmisión de la enfermedad y γ es la tasa de recuperación de la enfermedad. β y γ son constantes positivas. En este primer modelo epidemiológico se asegura que la población total es una constante positiva N. Allí, se supone que los individuos recuperados nunca más vuelven a sufrir la enfermedad. Una generalización del modelo Kermakc-Mckendrick es el modelo S.I.R con nacimientos-muertes, en el que se introduce en la dinámica el fenómeno de natalidad-mortalidad. Ahora, si todos los individuos recuperados son nuevamente susceptibles a la enfermedad, estamos hablando de un modelo S.I.S. El modelo S.I.S. con nacimientos y muertes está dada por:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS + \gamma I + \mu(N - S),$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - (\gamma + \mu)I, \quad t \geq 0.$$

donde μ es la tasa de natalidad y mortalidad.

En vista de que los modelos matemáticos que se describen anteriormente son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el siguiente trabajo se pretende, en el primer capítulo, hacer un estudio breve de las ecuaciones diferenciales ordinarias de forma cualitativa y en el segundo capítulo, garantizar las propiedades cualitativas en el modelo S.I.S con nacimientos y muertes. En el apéndice, encontramos la solución explicita al modelo y hacemos algunas simulaciones para contrastar las propiedades cualitativas de dicho modelo.

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En este primer capítulo haremos un tratamiento breve de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden desde un punto de vista cualitativo.

1.1. Ecuaciones diferenciales Ordinarias de primer orden.

Definición 1.1.1. (Ecuación diferencial ordinaria de primer orden.)
Sean $d \in \mathbb{N}$, I intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$, D un dominio de $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Una ecuación diferencial ordinaria ($E.D.O$) de primer orden es una ecuación de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1.1}$$

donde $f \in C(I \times D; \mathbb{R}^d)$.

Una solución de (1.1.1) es una función $\gamma : J \to D$, tal que:

1. J es un subintervalo de I
2. $\gamma \in C^1(J, D)$
3. $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t))$, para todo $t \in J$

Observación 1.1.

1. Si $J = I$, decimos que γ es una solución global.
2. Si $(t_0, x_0) \in I \times D$. La expresión $x(t_0) = x_0$ es una condición inicial de (1.1.1) y ésta indica que cualquier solución γ de (1.1.1) pasa por el punto (t_0, x_0) o satisface que $\gamma(t_0) = x_0$. En este sentido, el par:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

   lo denominamos problema de valor inicial ($P.V.I.$).

El siguiente teorema indica que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es equivalente a una ecuación integral.

Teorema 1.1.2.

Si $\gamma : J \to D$, donde J es un subintervalo de I, $t_0 \in J$ y $x_0 \in D$.
γ es una solución del P.V.I (1.1.2) si, y sólo si $\gamma \in C(J, D)$ y

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds, \quad \textit{para todo} \quad t \in J.$$

***Demostración**.*

Sea $t \in J$, veamos que $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, \gamma(s))ds$. Como γ es solución de del $(P.V.I)$ (1.1.2), entonces $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t))$. Ahora, integrando a ambos lados tenemos que:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\gamma}{ds}(s)ds = \int_{t_o}^{t} f(s, \gamma(s))ds$$

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$$

dado que $\gamma(t_0) = x_0$, entonces

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$$

Por otra parte, veamos que $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t))$, para todo $t \in J$, $\gamma \in C^1(J, D)$ y $\gamma(t_0) = x_0$. Es evidente que $\gamma \in C^1(J, D)$, pues $\gamma \in C(J, D)$ y se satisface que $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$.

Además, notemos que $\gamma(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,\gamma(s))ds = x_0$. Sea $t \in J$, veamos que $\frac{d\gamma}{dt}(t) = f(t,\gamma(t))$. En efecto

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left[x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(s,\gamma(s))ds\right](t)\\ &= \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{\cdot} f(s,\gamma(s))ds\right](t) = f(t,\gamma(t)).\end{aligned}$$ □

La definición que consideramos a continuación es una condición elemental de la función f para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de (1.1.1).

Definición 1.1.3. (Función Lipschitz en la variable espacial)

Sean $d \in \mathbb{N}$, I un intervalo no vacío de $\mathbb{R}$, D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^d$ y $f : I \times D \to \mathbb{R}^d$, decimos que:

1. f es globalmente Lipschitz en $I \times D$ en la variable x si, y sólo si, existe $c > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq c\|x - y\| \quad \text{para todo} \quad x,y \in D, \quad \text{para todo} \quad t \in I$$

2. f es localmente Lipschitz en $I \times D$ en la variable x si, y sólo si, para todo $(t_0,x_0) \in I \times D$, existe $\delta > 0$ tal que f es globalmente Lipschitz en $[t_0-\delta, t_0+\delta] \cap I \times \overline{B}_\delta(x_0) \cap D$ en la variable x.

Observación 1.2.

Si D es un dominio de $\mathbb{R}^d$, $f(t,x) = b(x)$, para todo $t \in I$, para todo $x \in D$ y $b \in C^1(D;\mathbb{R}^d)$ entonces f es localmente Lipschitz en $I \times D$ en la variable x.

Ahora, enunciamos la desigualdad de $Gronwall - Bellamn$ que es el argumento típico para acotar una solución de una ecuación integral.

Teorema 1.1.4. *Desigualdad de Gronwall-Bellamn*

Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $c \geq 0$, $\gamma, \beta \in C(I,[0,+\infty))$, supongamos que para cada t en $I \cap [t_0,+\infty)$

$$\gamma(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\gamma(s)ds \tag{1.1.3}$$

entonces para cada t en $I \cap [t_0,+\infty)$

$$\gamma(t) \leq c\exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right) \tag{1.1.4}$$

Demostración.

Consideremos $c > 0$ y definamos la función $\lambda : I \cap [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\lambda(t) = c + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\gamma(s)ds$, reescribiendo la desigualdad (1.1.3) tenemos que $\gamma(t) \leq \lambda(t)$ para $t \in I \cap [t_0, +\infty)$. Como $c > 0$ y $\gamma(t), \beta(t) \geq 0$, para todo $t \in I \cap [t_0, +\infty)$, por tanto tenemos que $\lambda(t) > 0$, para todo $t \in I \cap [t_0, +\infty)$. Entonces $\gamma(t)/\lambda(t) \leq 1$, multiplicando a ambos lados por $\beta(t)$, ya que $\beta(t) \geq 0$, para todo $t \in I \cap [t_0, +\infty)$, tenemos que:

$$\frac{\gamma(t)\beta(t)}{\lambda(t)} \leq \beta(t) \quad \text{para todo} \quad t \in I \cap [t_0, +\infty)$$

por otra lado, sabemos que $\lambda(t) = c + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\gamma(s)ds$, luego $\lambda'(t) = \beta(s)\gamma(s)$ para todo $t \in I \cap [t_0, +\infty)$, de esto $\lambda'(t)/\lambda(t) \leq \beta(t)$ para todo $t \in I \cap [t_0, +\infty)$. Integrando a ambos lados tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} ds &\leq \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \\
\ln|\lambda(s)|\Big]_{t_0}^{t} &\leq \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \\
\ln(\lambda(t)) - \ln(\lambda(t_0)) &\leq \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \\
\ln(\lambda(t)) &\leq \ln(c) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds, \quad \text{dado que} \quad \lambda(t_0) = c + \int_{t_0}^{t_0} \beta(s)\gamma(s)ds = c \\
\exp(\ln(\lambda(t))) &\leq \exp(\ln(c)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right) \\
\lambda(t) &\leq c \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right)
\end{aligned}$$

Y como $\gamma(t) \leq \lambda(t)$, para todo $t \in I \cap [t_0, +\infty)$, concluimos que:

$$\gamma(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right), \text{para todo} \quad t \in I \cap [t_0, +\infty)$$

para el caso donde $c = 0$ en la ecuación (1.1.4) basta tomar límite cuando c tiende a cero por derecha. $\square$

Definición 1.1.5. Aplicación contractiva

Sean (X, d) un espacio medible y $T \colon X \to X$, decimos que T es una aplicación contractiva si, y sólo si existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \text{para todo} \quad x, y \in X$$

Teorema 1.1.6. *Teorema de punto fijo de Banach*

Sean (X, d) *un espacio medible completo, y* $T : X \to X$*. Si* T *es una aplicación contractiva, entonces existe un único* $x' \in X$ *tal que* $T(x') = x'$

1.2. Existencia y unicidad

Una de las propiedades cualitativas más elemental y fundamental en el marco de las ecuaciones diferenciales ordinarias es la existencia y unicidad de las soluciones. En cualquier modelo matemático que se represente mediante una ecuación es importante garantizar que existe una solución y que la solución es única. A continuación, presentamos el teorema de existencia y unicidad que usamos para justificar que el modelo que se estudia en el siguiente capítulo está bien puesto.

Teorema 1.2.1. ***Teorema de existencia***

Sean I *un intervalo abierto no vacío de* $\mathbb{R}$*,* D *un dominio en* $\mathbb{R}^d$*,* $t_0 \in I$*,* $x_0 \in D$ *y sea* $f : I \times D \to \mathbb{R}^d$*. Consideremos el siguiente Problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Supongamos que $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^d)$ *y* $[t_0, \infty) \subset I$*. Si* f *es localmente Lipschitz en* $[t_0, \infty) \times D$ *en la variable* x*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que* (1.2.1) *tiene una solución en* $[t_0, t_0 + \delta]$.

Demostración.

Dado que D es un dominio y $x_0 \in D$, entonces como f es localmente Lipschitz en $[t_0, \infty) \times D$ en la variable x, existe $h > 0$ tal que $[t_0, t_0 + h] \times \overline{B_h}(x_0) \subset [t_0, \infty) \times D$ y f es globalmente Lipschitz en $[t_0, t_0 + h] \times \overline{B_h}(x_0)$, es decir, existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in \overline{B_h}(x_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0 + h].$$

definamos $A := [t_0, t_0 + h] \times \overline{B_h}(x_0)$, $M := \max\limits_{(t,x) \in A} \|f(t, x)\|$ (sin perdida de generalidad digamos que $M > 0$) y sea $b := \min\{h, h/M, 1/L\} > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\delta < b$, por tanto $\delta < h, h/M, 1/L$. Por otra parte, definamos:

$$\mathscr{F} = \{\gamma \in C([t_0, t_0 + \delta]; D) : \|\gamma - x_0\|_\infty \le h\}.$$

Notemos que $\mathscr{F}$ es cerrado y $\mathscr{F} \neq \emptyset$, luego $\mathscr{F}$ es Banach. Ahora sea T una aplicación de $\mathscr{F}$ a

$\mathscr{F}$ tal que para cada función $\gamma \in \mathscr{F}$, la aplicación T, la definimos así:

$$T[\gamma](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Veamos que T esta bien definida y que es una aplicación contractiva.

1. Primero veamos que T está bien definida. Dada $\gamma \in \mathscr{F}$, probemos que $T[\gamma] \in C([t_0, t_0 + \delta]; D)$ y que $\|T[\gamma] - x_0\|_\infty \leq h$, es claro que $T[\gamma] \in C([t_0, t_0 + \delta]; D)$, pues $\gamma \in C([t_0, t_0 + \delta]; D)$ y así $T[\gamma]$ es diferenciable en $[t_0, t_0 + \delta]$. Ahora, dado $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|T[\gamma](t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \gamma(s))\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \max_{s \in [t_0, t]} \|f(s, \gamma(s))\|ds \leq \int_{t_0}^{t} \max_{s \in [t_0, t_0 + \delta]} \|f(s, \gamma(s))\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \max_{(s,y) \in [t_0, t_0 + \delta] \times \overline{B}_h(x_0)} \|f(s, \gamma(s))\|ds \leq \int_{t_0}^{t} M ds \\
&= M(t - t_0) \leq M\delta < h.
\end{aligned}$$

   Así, $\|T[\gamma](t) - x_0\| < h$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, por tanto $\|T[\gamma](t) - x_0\| \leq h$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, de donde $T[\gamma](t) \in \overline{B}_h(x_0) \subset D$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, además $\max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|T[\gamma](t) - x_0\| \leq h$, lo cual significa que $\|T[\gamma] - x_0\|_\infty \leq h$.

2. Por otro lado, probemos que T es una contracción en $\mathscr{F}$, es decir, veamos que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$d_\infty(T[\gamma], T[\psi]) \leq \alpha d_\infty(\gamma, \psi), \quad \text{para todo } \gamma, \psi \in \mathscr{F} \tag{1.2.2}$$

   donde $d_\infty(\gamma, \psi) = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|\gamma(t) - \psi(t)\|$.
   Tomemos $\alpha = \delta L$, entonces $\alpha \in (0, 1)$, donde $\delta < b < 1/L$ y sean $\gamma, \psi \in \mathscr{F}$.

Dado $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|T[\gamma](t) - T[\psi](t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, \gamma(s)) - f(s, \psi(s)))ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|(f(s, \gamma(s)) - f(s, \psi(s)))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\|\gamma(s) - \psi(s)\| ds, \quad \text{por ser } f \text{ localmente Lipschitz} \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L \max_{s\in[t_0,t]} \|\gamma(s) - \psi(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L \max_{s\in[t_0,t_0+\delta]} \|\gamma(s) - \psi(s)\| ds. \\
&= L(t - t_0) \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \|\gamma(t) - \psi(t)\|. \\
&\leq L\delta \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \|\gamma(t) - \psi(t)\|. \\
&= \alpha d_\infty(\gamma, \psi).
\end{aligned}$$

Así, de 1 y 2 al aplicar el teorema de punto fijo de Banach, existe $\gamma \in \mathscr{F}$ tal que $T[\gamma] = \gamma$, es decir, $T[\gamma](t) = \gamma(t)$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, en otras palabras:

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0 + \delta]. \qquad \square$$

Observación 1.3.

Repitiendo este razonamiento podemos construir una solución γ de (1.2.1) definida en un intervalo maximal $[t_0, T)$, donde $t_0 < T \leq \infty$. Esta solución la denominamos solución maximal.

En el teorema que enunciamos a continuación se dan condiciones para que $T = \infty$, es decir, condiciones para que la solución sea global.

Teorema 1.2.2. *Sean I un intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$, D un dominio en $\mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$, $x_0 \in D$ y sea $f\colon I \times D \to \mathbb{R}^d$. Consideremos el siguiente Problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Supongamos que $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^d)$ y $[t_0, \infty) \subset I$. Si f es localmente Lipschitz en $[t_0, \infty) \times D$ en la variable x. Sea $\gamma\colon [t_0, T) \to D$ es una solución maximal de P.V.I (1.2.3) y si existe $D^* \subset D$, D^* compacto tal que $\gamma(t) \in D^*$, para todo $t \in [t_0, T)$ entonces $T = \infty$

Demostración.

Supongamos lo contrario, es decir $T < \infty$. Notemos que $[t_0, T] \times D^* \subset [t_0, \infty) \times D \subset I \times D$. Sea $M := \max\limits_{(t,x)\in[t_0,T]\times D^*} \|f(t,x)\|$. Como γ es solución de P.V.I (1.2.3), entonces

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0, T)$$

por lo tanto,

$$\left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| = \|f(t, \gamma(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T)$$

entonces existe $B \in \mathbb{R}^d$ tal que $\lim\limits_{t\to T^-} \gamma(t) = B$, y como D^* es compacto, entonces $B \in D^*$. Así $(T, B) \in [t_0, T] \times D^* \subset I \times D$. Dadas estas condiciones, existe una solución $\phi\colon [t_0, t_0 + \delta) \to D$ de (1.2.3), con $t_0 + \delta > T$, es decir podemos extender la solución (ver[6]) y como $\gamma\colon [t_0, T) \to D$ es una solución maximal de P.V.I (1.2.3), se sigue una contradicción. $\square$

El siguiente teorema muestra otras condiciones para que la solución maximal γ sea global. En este teorema asumimos las mismas hipótesis del teorema anterior.

Teorema 1.2.3. ***condiciones para que*** $T = \infty$

1. *Si existe $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, D_n un dominio acotado con $\overline{D_n} \subset D$. Además $D_n \uparrow D$, es decir $D_n \subset D_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$ y sea*

$$T_n := \inf\{t \in [t_0, T) : \gamma(t) \notin D_n\}.$$

   Si $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ entonces $T = \infty$.

2. *Si existe $M > 0$ tal que $\|f(t,x)\| \leq M$, para todo $[t_0, \infty), x \in D$, entonces $T = \infty$.*

3. *Si existe $M > 0$ tal que $\|f(t,x)\| \leq M(1 + \|x\|)$ para todo $t \in [t_0, \infty)$, para todo $x \in D$, entonces $T = \infty$.*

Demostración 1.

Veamos que $T_n \leq T$, para todo $n \geq 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$A_n := \{t \in [t_0, T) : \gamma(t) \notin D_n\}$. Si $A_n \neq \emptyset$, entonces existe $t^* \in A_n$, tal que $t^* < T$, esto implica que $\inf(A_n) \leq t^* < T$, de donde $\inf(A_n) < T$, es decir $T_n < T$, entonces $T_n \leq T$. Por otra parte, si $A_n = \emptyset$ implica que $\inf(A_n) = \infty$, de donde $T_n = \infty$ y $\gamma(t) \in D_n$, para todo $t \in [t_0, T)$. Luego $\gamma(t) \in \overline{D_n}$ para todo $t \in [t_0, T)$, y dado que $\overline{D_n}$ es compacto, con $\overline{D_n} \subset D$, entonces $T = \infty$. Así, $T_n = T$, de donde $T_n \leq T$. Por lo tanto, si $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ entonces $T = \infty$. $\square$

Demostración 2.

Supongamos lo contrario que $T < \infty$ y sabemos que $\gamma \colon [t_0, T) \to D$ es una solución de (1.2.1), entonces

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \quad \text{para todo } t \in [t_0, T)$$

luego $\gamma(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$ para todo $t \in [t_0, T)$. Así,

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \right\|, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \gamma(s))\| ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M ds, \quad \text{pues } \ \gamma(t) \in D, \text{para todo } s \in [t_0, t] \subset [t_0, \infty) \\
&= M(t - t_0) \leq M(T - t_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0, T).
\end{aligned}$$

Sea $D^* = \{x \in D : \|x - x_0\| \leq M(T - t_0)\}$. Notemos que D^* es compacto, además $D^* \subset D$ y como $\gamma(t) \in D^*$, para todo $t \in [t_0, T)$, entonces $T = \infty$, lo cual es una contradicción. $\square$

Demostración 3.

Supongamos que $T < \infty$, sabemos que $\gamma : [t_0, T) \to D$ es solución de (1.2.1), entonces

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \quad \text{para todo } t \in [t_0, T).$$

luego $\gamma(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$, para todo $t \in [t_0, t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds \right\|, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \gamma(s))\| ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M(1 + \|\gamma(s)\|) ds, \quad \text{pues } \ \gamma(t) \in D, \text{para todo } s \in [t_0, t] \subset [t_0, \infty) \\
&= M(t - t_0) + M \int_{t_0}^{t} \|\gamma(s)\| ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T)
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t)\| &\leq \|x_0\| + M(t-t_0) + M\int_{t_0}^{t} \|\gamma(s)\|ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \\
&\leq \|x_0\| + M(T-t_0) + M\int_{t_0}^{t} \|\gamma(s)\|ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \\
&\leq C + M\int_{t_0}^{t} \|\gamma(s)\|ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, T), \quad C := \|x_0\| + M(T-t_0) \\
&\leq C \exp M(t-t_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0, T) \quad \text{por (1.1.4)} \\
&\leq C \exp M(T-t_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0, T).
\end{aligned}$$

Así, por la desigualdad de *Gronwall-Bellman*, tenemos que:

$$\|\gamma(t)\| \leq C \exp M(t-t_0) \leq C \exp M(T-t_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0, T).$$

Definamos $D^* = \{x \in D : \|x\| \leq c \exp M(T-t_0)\}$. Notemos que D^* es compacto y además $D^* \subset D$ y $\gamma(t) \in D^*$, para todo $t \in [t_0, T)$, entonces $T = \infty$, lo cual es una contradicción. □

El terreno está preparado para el teorema de existencia y unicidad global. Antes de enunciar este teorema es importante definir el operador de Lyapunov asociado a la ecuación (1.2.3). Tal operador lo denotamos por $\mathscr{L}$ y lo definimos como:

$$\mathscr{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dada $V \in C^1([t_0,\infty) \times D; \mathbb{R})$. La acción de $\mathscr{L}$ sobre V es:

$$\mathscr{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

En particular, para $(t,x) \in [t_0,\infty) \times D$, tenemos que:

$$\mathscr{L}V(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(t,x)$$

En forma más compacta,

$$\mathscr{L}V(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \langle f(t,x), \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\rangle.$$

$\mathscr{L}V$ indica la evolución de una solución de la ecuación (1.2.3) a lo largo de V.

Teorema 1.2.4. ***Teorema de existencia y unicidad***

Sean I un intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$, D un dominio en $\mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$, $x_0 \in D$ y sea $f\colon I \times D \to \mathbb{R}^d$. Consideremos el siguiente Problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Supongamos que $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^d)$ y $[t_0,\infty) \subset I$. Si f es localmente Lipschitz en $[t_0,\infty) \times D$ en la variable x, y existen $V \in C^1([t_0,\infty) \times D; \mathbb{R}^+)$, $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, con D_n dominios acotados, $\overline{D_n} \subset D$ y además $D_n \uparrow D$ tal que

1. *Si existe $c > 0$, tal que $\mathscr{L}V(t,x) \le cV(t,x)$, para todo $t \in [t_0,\infty)$, para todo $x \in D$.*
2. *$V_n := \inf\limits_{t\in[t_0,\infty), x\notin D_n} V(t,x) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.*

entonces existe una única solución de (1.2.4) en $[t_0,\infty)$

Demostración. Veamos primero la existencia.

Existencia: Dado que f es localmente lipschitz en $[t_0,\infty) \times D$ en la variable x, existe una solución (maximal) $\gamma\colon [t_0,T) \to D$ de (1.2.4), donde $t_0 < T \le \infty$, veamos que $T = \infty$. Supongamos que $T < \infty$, sabemos que $\gamma(t) \in D$ para todo $t \in [t_0,T)$ Así, de 1, tenemos que:

$$\mathscr{L}V(t,\gamma(t)) \le cV(t,\gamma(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0,T).$$

Haciendo un paréntesis, notemos que $\gamma'(s) = f(s,\gamma(s))$, por lo que $\gamma_i'(s) = f_i(s,\gamma(s))$, $1 \le i \le d$. Definamos $h(s) := V(s,\gamma(s)) = V(s,\gamma_1(s),\gamma_2(s),\ldots,\gamma_d(s))$, así:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(s) &= \frac{\partial V}{\partial t}(s,\gamma(s)) + \frac{\partial V}{\partial x_1}(s,\gamma(s))\gamma_1(s) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_d}(s,\gamma(s))\gamma_d(s) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(s,\gamma(s)) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial V}{\partial x_i}(s,\gamma(s))\gamma_i(s) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(s,\gamma(s)) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial V}{\partial x_i}(s,\gamma(s)) f_i(s,\gamma(s)) = \mathscr{L}V(s,\gamma(s)). \end{aligned}$$

Continuando con lo anterior e integrando a ambos lados de la desigualdad anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \mathscr{L}V(s,\gamma(s))ds &\leq c\int_{t_0}^{t} V(s,\gamma(s)), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T)\\
\int_{t_0}^{t} \frac{dh}{dt}(s)ds &\leq c\int_{t_0}^{t} V(s,\gamma(s)), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T)\\
h(t)-h(t_0) &\leq c\int_{t_0}^{t} V(s,\gamma(s)), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T)\\
V(t,\gamma(t))-V(t_0,\gamma(t_0)) &\leq c\int_{t_0}^{t} V(s,\gamma(s)), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(t,\gamma(t)) &\leq V(t_0,x_0)+c\int_{t_0}^{t} V(s,\gamma(s)), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T)\\
V(t,\gamma(t)) &\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(t-t_0)\right), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T), \quad \text{por (1.1.4).}\\
&\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0)\right), \quad \text{para todo } t\in[t_0,T).
\end{aligned}$$

Consideremos $T_n := \inf\{t\in[t_0,T) : \gamma(t)\notin D_n\}$, $n\geq 1$, como $T<\infty$, entonces $T_n<\infty$, pues $T_n\leq T$. Veamos que $T_n<T$. Sabemos que $T_n<\infty$, entonces $A_n\neq\emptyset$, donde $A_n=\{t\in[t_0,T) : \quad \gamma(t)\notin D_n\}$. Entonces existe $t*\in A_n$ y como $t*<T$, por tanto $\inf A_n<t*<T$, de donde $T_n<T$, por lo que $T_n\in[t_0,T)$. Así,

$$V(T_n,\gamma(T_n))\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(T_n-t_0)\right) \text{ para todo } n\geq 1.$$

Luego,

$$V(T_n,\gamma(T_n))\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0)\right) \text{ para todo } n\geq 1.$$

Y como $T_n\in[t_0,\infty)$ y $\gamma(T_n)\notin D_n$, por lo que:

$$V(T_n,\gamma(T_n))\geq \inf_{t\in[t_o,\infty),x\notin D_n} V(t,x)=V_n$$

por tanto,

$$V_n\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0\right) \text{ para todo } n\geq 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} V_n &\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0)\right)\\
\infty &\leq V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0)\right).
\end{aligned}$$

lo que implica que $V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0)\right)=\infty$, esto es absurdo, pues $V(t_0,x_0)\exp\left(c(T-t_0)\right)\in\mathbb{R}$. Así, $T=\infty$, entonces $\gamma\colon[t_0,\infty)\to D$ es una solución de (1.2.4).

Unicidad: Sean γ_1 y γ_2 soluciones de (1.2.4) en $[t_0,\infty)$. Definamos $\mathscr{H}:=\{t\in[t_0,\infty) : \quad \gamma_1(t)=\gamma_2(t)\}$. Usemos un argumento de conexidad. Claramente $\mathscr{H}\neq\emptyset$, pues $\gamma_1(t_0)=x_0=\gamma_2(t_0)$, además $\mathscr{H}$ es cerrado, dado que $\mathscr{H}=\gamma^{-1}(\{0\})$, $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$ y como $\{0\}$ es cerrado y γ es continua, por tanto $\mathscr{H}$ es cerrado. Veamos ahora que $\mathscr{H}$ es abierto. Sea $s \in \mathscr{H}$, probemos que existe $\delta > 0$ tal que $(s-\delta, s+\delta) \subset \mathscr{H}$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $s > t_0$, como $s \in \mathscr{H}$, entonces $\gamma_1(s) = \gamma_2(s) = y$, luego $(s, y) \in [t_0, \infty) \times D$ y como f es localmente lipschitz en $[t_0, \infty) \times D$ en la variable x, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que f es globalmente lipschitz en $[s-\epsilon, s+\epsilon] \times \overline{B}_\epsilon(y)$ en la variable x, $[s-\epsilon, s+\epsilon] \times \overline{B}_\epsilon(y) \subset [t_0, \infty) \times D$, es decir existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,z)\| \leq L\|x - z\|, \quad \text{para todo } x, z \in \overline{B}_\epsilon(y), \text{para todo } t \in [s-\epsilon, s+\epsilon].$$

Sea $M := \max\limits_{[s-\epsilon,s+\epsilon]\times\overline{B}_\epsilon(y)} \|f(t,x)\|$. Sabemos que γ_1 y γ_2 son continuas en s, por tanto:

$$\begin{aligned}
&\text{existe } \delta_1 > 0, \quad \text{para todo } u \in [t_0, \infty) \quad \|u - s\| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad \|\gamma_1(u) - y\| < \epsilon \\
&\text{existe } \delta_2 > 0, \quad \text{para todo } u \in [t_0, \infty) \quad \|u - s\| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad \|\gamma_2(u) - y\| < \epsilon
\end{aligned}$$

es decir, $\gamma_1|_{(s-\delta_1,s+\delta_1)}(u) \in B_\epsilon(y)$, $\gamma_2|_{(s-\delta_2,s+\delta_2)}(u) \in B_\epsilon(y)$, para todo $u \in [t_0, \infty)$.
Ahora, por la densidad de $\mathbb{R}$, existe $0 < \delta < \min\{\epsilon, \epsilon/M, 1/L, \delta_1, \delta_2\}$.
Sea $\mathscr{F} = \{\gamma \in ((s-\delta, s+\delta); D) : \quad \|\gamma - y\| \leq \epsilon\}$ y definamos la siguiente aplicación T de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{F}$, donde para cada $\gamma \in \mathscr{F}$, tenemos que:

$$T[\gamma](t) := y + \int_s^t f(u, \gamma(u))du.$$

Sabemos (por un argumento anterior) que T es una contracción. Luego, por el teorema de punto fijo de Banach, existe un único $\gamma \in \mathscr{F}$, tal que $T[\gamma] = \gamma$.
Notemos que $\gamma_1|_{(s-\delta,s+\delta)} \in \mathscr{F}$, $\gamma_2|_{(s-\delta,s+\delta)} \in \mathscr{F}$ y además, sabemos que γ_1 y γ_2 son soluciones de (1.2.4), es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_1}{dt}(t) &= f(t, \gamma_1(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty) \\
\frac{d\gamma_2}{dt}(t) &= f(t, \gamma_2(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty).
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_1}{dt}(t) &= f(t, \gamma_1(t)), \quad \text{para todo } t \in (s-\delta, s+\delta) \\
\frac{d\gamma_2}{dt}(t) &= f(t, \gamma_2(t)), \quad \text{para todo } t \in (s-\delta, s+\delta).
\end{aligned}$$

integrando a ambos lados de la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_s^t \frac{d\gamma_{1,2}}{dt}(u)du &= \int_s^t f(u,\gamma_{1,2}(u)du, \quad \text{para todo } t \in (s-\delta, s+\delta) \\
\gamma_{1,2}(t) - \gamma_{1,2}(s) &= \int_s^t f(u,\gamma_{1,2}(u)du, \quad \text{para todo } t \in (s-\delta, s+\delta) \\
\gamma_{1,2}(t) &= y + \int_s^t f(u,\gamma_{1,2}(u)du, \quad \text{para todo } t \in (s-\delta, s+\delta) \\
\gamma_{1,2}(t) &= T[\gamma_{1,2}](t), \quad \text{para todo } t \in (s-\delta, s+\delta).
\end{aligned}$$

En otras palabras, $\gamma_{1,2}|_{(s-\delta,s+\delta)}$ satisfacen que $\gamma = T[\gamma]$. Por lo que, $\gamma_1|_{(s-\delta,s+\delta)} = \gamma_2|_{(s-\delta,s+\delta)}$, de donde $(s-\delta, s+\delta) \subset \mathscr{H}$, lo cual es equivalente a que $\mathscr{H}$ es abierto. finalmente, $\mathscr{H} = [t_0, \infty)$. Así, para todo $t \in [t_0,\infty)$, $(t \in \mathscr{H})$, i.e, para todo $t \in [t_0,\infty)$, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. Lo cual implica que $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Observación 1.4. la única solución de (1.2.4) sujeta a la condición inicial $x(t_0) = x_0$ la denotamos por $x(t; t_0, x_0)$.

1.3. Estabilidad

En este apartado, introducimos la noción de estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La estabilidad, intuitivamente, indica el comportamiento de una solución de una ecuación diferencial ordinaria cuando ésta sufre pequeños cambios en las condiciones iniciales. En particular, analizaremos el comportamiento de las soluciones triviales.

Definición 1.3.1. Soluciones triviales o puntos estacionarios

Sean $t_0 \geq 0$, $x_0 \in D$ y $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^d)$. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.3.1}$$

Decimos que x_0 es un punto estacionario de (1.3.1) si, y sólo si, $f(t,x_0) = 0$, para todo $t \in [t_0,\infty)$ (podemos interpretar esto como una solución trivial $\gamma(t) \equiv x_0$.)

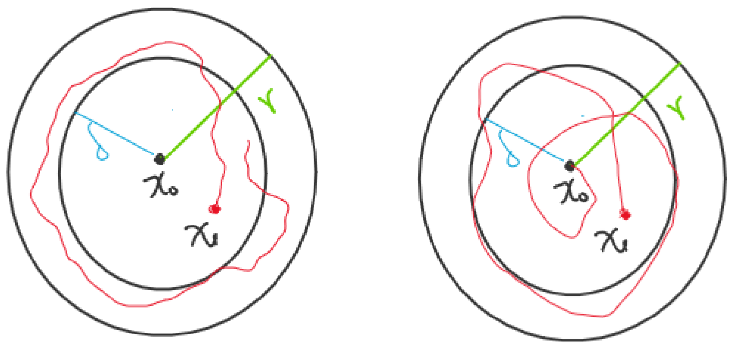
En adelante, vamos a suponer que el teorema de existencia y unicidad se satisface, es decir, existe una única solución de (1.3.1) independiente de cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Definición 1.3.2. Estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos estacionarios.

Dado $x_0 \in D$ un punto estacionario de (1.3.1). Decimos que x_0 es estable si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$, tal que para todo $x \in D$, $\|x_1 - x_0\| < \delta$, entonces $\|x(t,t_0,x_1) - x_0\| < \epsilon$, para todo $t \in [t_0,\infty)$.

Decimos que x_0 es asintóticamente estable si, y sólo si x_0 es estable y existe $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, t_0, x_1) = x_0$, para todo $x_1 \in B_\delta(x_0)$.

Observación 1.5. Para dar una mejor idea de como es la estabilidad en forma geométrica, a continuación se exaltara dos figuras que daran ejemplo de un punto estable y asintoticamente estable:



(a) Estabilidad (b) Estabilidad asintótica

Figura 1.1: Estabilidad de puntos estacionarios

Definición 1.3.3. Funciones definidas positivas y negativas

Dado $x_0 \in D$ y sean $V \in C([t_0, \infty) \times D; \mathbb{R})$ y $\varphi \in C(D; \mathbb{R})$. Decimos que:

1. φ es definida positiva en x_0 si, y sólo si $\varphi(x_0) = 0$ y $\varphi(x) > 0$, para todo $x \in D$, $x \neq x_0$.

   φ es definida negativa en x_0 si, y sólo si, $\varphi(x_0) = 0$ y $\varphi(x) < 0$, para todo $x \in D$, $x \neq x_0$.

2. V es definida positiva en x_0 si, y sólo si existe $\varphi \in C(D; \mathbb{R})$, φ definida positiva tal que $V(t, x) \geq \varphi(x)$ para todo $t \in [t_0, \infty)$, para todo $x \in D$ y $V(t, x_0) = \varphi(x_0) = 0$, para todo $t \in [t_0, \infty)$.

   V es definida negativa en x_0 si, y sólo si, existe $\varphi \in C(D; \mathbb{R})$, φ definida positiva tal que $V(t, x) \leq -\varphi(x)$ para todo $t \in [t_0, \infty)$, para todo $x \in D$ y $V(t, x_0) = \varphi(x_0) = 0$, para todo $t \in [t_0, \infty)$.

Teorema 1.3.4. ***Teorema de Lyapunov para la estabilidad de puntos estacionarios***

Dado x_0 un punto estacionario de (1.3.1). Si existe $V \in C^1([t_0, \infty) \times D; \mathbb{R})$ tal que V es definida positiva en x_0, entonces:

1. *Si $\mathscr{L}V(t, x) \leq 0$, para todo $t \in [t_0, \infty)$, para todo $x \in D$, entonces $x = x_0$ es estable.*

2. *Si $\mathscr{L}V$ es definida negativa en x_0, entonces $x = x_0$ es asintóticamente estable.*

Demostración.

1. Veamos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, para todo $x \in D$ tal que $\|x_1 - x_0\| < \delta$ entonces $\|x(t, t_0, x_1) - x_0\| < \epsilon$, para todo $t \in [t_0, \infty)$. Sea $\epsilon > 0$ y sabemos que V es definida positiva, es decir, existe $\varphi \in C(D; \mathbb{R})$, φ definida positiva en x_0 tal que $V(t, x) \geq \varphi(x)$ para todo $x \in D$, para todo $t \in [t_0, \infty)$. Consideremos $L := \min\{\varphi(x)/x \in \partial B_\epsilon(x_0)\}$. Claramente $\varphi(x) > 0$, para todo $x \in \partial B_\epsilon(x_0)$ y como φ es continua, aseguramos que $L > 0$. Además, tenemos que:

$$\lim_{x \to x_0} V(t_0, x) = V(t_0, x_0) = 0. \tag{1.3.2}$$

Particularizando con $L > 0$ en (1.3.2), entonces existe $h > 0$, para todo $x \in D$ tal que

$$\|x - x_0\| < h \quad \text{entonces} \quad |V(t_0, x)| < L.$$

Ahora, tomemos $\delta := \min\{h, \epsilon/2\}$ y sea $x \in D$ tal que $\|x_1 - x_0\| < \delta \leq h$, luego:

$$V(t_0, x) < L. \tag{1.3.3}$$

Veamos que $\|x(t; t_0, x_1) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, \infty)$. Denotemos a $x(\cdot, t_0, x_1)$ por $\gamma(\cdot)$ y notemos que $h(t) := V(t, \gamma(t))$ es decreciente en $[t_0, \infty)$, pues $\mathscr{L}V(t, \gamma(t)) \leq 0$, para todo $t \in [t_0, \infty)$ y como $h'(t) = \mathscr{L}V(t, \gamma(t))$, para todo $t \in [t_0, \infty)$, por lo tanto $h(t) \leq h(t_0)$, para todo $t \in [t_0, \infty)$. Luego, $V(t, \gamma(t)) \leq V(t_0, \gamma(t_0)) = V(t_0, x_1)$, para todo $t \in [t_0, \infty)$ y así,

$$V(t, \gamma(t)) \leq V(t_0, x_1), \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty). \tag{1.3.4}$$

Además,

$$\varphi(\gamma(t)) \leq V(t, \gamma(t)), \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty). \tag{1.3.5}$$

Por (1.3.3), (1.3.4) y (1.3.5), tenemos que:

$$\varphi(\gamma(t)) < L, \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty).$$

Con esto concluimos que $\gamma(t) \notin \partial B_\epsilon(x_0)$, para todo $t \in [t_0, \infty)$ y por lo tanto, $\gamma(t) \in B_\epsilon(x_0)$, para todo $t \in [t_0, \infty)$. Pues si existe $t^* \in [t_0, \infty)$ tal que $\gamma(t^*) \notin B_\epsilon(x_0)$, entonces $\gamma(t^*) \in Ext(B_\epsilon(x_0))$ y como γ es continua, existe $t^{**} < t^*$ tal que $\gamma(t^{**}) \in \partial B_\epsilon(x_0)$, lo cual es contradicción. Así, $\|\gamma(t) - x_0\| < \epsilon$, para todo $t \in [t_0, \infty)$. En otras palabras $\|x(t, t_0, x_1) - x_0\| < \epsilon$, para todo $t \in [t_0, \infty)$.

2. Es evidente que $x = x_0$ es estable, pues $\mathscr{L}V$ es definida negativa en $x = x_0$. Veamos que existe $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que para todo $x_1 \in B_\delta(x_0)$,

$$\lim_{t \to \infty} x(t; t_0, x_1) = x_0$$

Como D es abierto y $x_0 \in D$, entonces existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_0) \subset D$. Como $x = x_0$ es estable, entonces existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x_1 \in D$, $\|x_1 - x_0\| < \lambda$ se tiene que $\|x(t; t_0, x_1) - x_0\| < \rho/2$, para todo $t \in [t_0, \infty)$. Tomemos $\delta := \lambda > 0$ y sea $x_1 \in B_\delta(x_0)$.

Denotemos a $x(\cdot, t_0, x_1)$ por $\gamma(\cdot)$. Definamos a $h(\cdot) := V(\cdot, \gamma(\cdot))$ y sea $\epsilon > 0$. Notemos que h es decreciente en $[t_0, \infty)$ y acotado inferiormente $[t_0, \infty)$, por lo tanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} V(t, \gamma(t)) = \alpha$$

Veamos que $\alpha = 0$. Si $\alpha > 0$, afirmamos que existe $\beta > 0$ tal que $\|\gamma(t) - x_0\| \geq \beta$, para todo $t \in [t_0, \infty)$, pues si suponemos lo contrario, entonces tenemos que para todo $\beta > 0$ existe $t \in [t_0, \infty)$ tal que $\|\gamma(t) - x_0\| < \beta$. Así, existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0, \infty)$, $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ tal que

$$\|\gamma(t_n) - x_0\| < \frac{1}{n}$$

luego, $\lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) = x_0$. Además, $\lim_{n\to\infty} V(t_n, \gamma(t_n)) = 0$ y por otro lado, por la caracterización secuencial del límite, tenemos que $\lim_{n\to\infty} V(t_n, \gamma(t_n)) = \alpha$, de donde $\alpha = 0$, lo que es absurdo. Sabemos que $\mathscr{L}V$ es definida negativa en $x = x_0$, entonces existe $\varphi \in C(D; \mathbb{R})$, φ definida positiva en $x = x_0$ tal que

$$\mathscr{L}V(t, x) \leq -\varphi(x) \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty), \quad \text{para todo } x \in D$$

Sea $L := \inf\{\varphi(x) / \quad \beta \leq \|x - x_0\| \leq \rho/2\}$. Claramente $L > 0$, luego

$$\mathscr{L}V(t, \gamma(t)) \leq -\varphi(\gamma(t)) \leq -L \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \mathscr{L}V(s, \gamma(s))ds &\leq \int_{t_0}^{t} -Lds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty) \\
V(t, \gamma(t)) - V(t_0, \gamma(t_0)) &\leq -L(t - t_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty) \\
V(t, \gamma(t)) &\leq V(t_0, x_1) - L(t - t_0), \quad \text{para todo } t \in [t_0.\infty)
\end{aligned}$$

Si tomamos $t* > t_0 + V(t_0, x_1)/L$, por lo tanto, $V(t*, \gamma(t*)) < 0$, lo cual es una contradicción, pues V es no negativa. Así,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} V(t, \gamma(t)) = 0$$

Razonando de la misma forma que en el primer numeral, podemos demostrar que:

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t)) = x_0.$$

□

Teorema 1.3.5. ***Teorema de linealización de Lyapunov***

Sean $t_0 \geq 0$, $0 \in D$ y $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer *orden (autónoma):*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1.3.6}$$

Si $x = 0$ *es un punto estacionario de* (1.3.6) *y sea* $A := \mathbb{J}f(0)$. *Si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|f(x) - Ax\| < \epsilon\|x\|$, *para todo* $x \in B_\delta(0) \cap D$ *y* A *es una matriz que tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces* $x = 0$ *es asintóticamente estable.*

Demostración. Tomemos Q una matriz simétrica real definida positiva de orden $d \times d$. Dado que A cumple que todos sus valores propios tienen parte real negativa, entonces existe P una matriz simétrica real definida positiva de orden $d \times d$ tal que:

$$PA + A^T P = -Q \tag{1.3.7}$$

El argumento anterior lo podemos encontrar en [12]. Particularizando con $0 < \epsilon < \lambda_{\text{mín}}(Q))/2\|p\|$ en la hipótesis, existe $\delta > 0$, para todo $x \in B_\delta(0) \cap D$ tal que
$\|f(x) - Ax\| < \epsilon\|x\|$. Definamos $r(x) := f(x) - Ax$. Por otra parte, definamos $V\colon [t_0, \infty) \times B_\delta(0) \cap D \to \mathbb{R}$ dada por $V(t,x) := \langle x, Px\rangle = x^T Px$. Claramente V es definida positiva en $x = 0$ y veamos que $\mathscr{L}V$ es definida negativa en $x = 0$.

Dado $t \in [t_0, \infty)$ y $x \in B_\delta(0) \cap D$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}V(t,x) &= \langle \frac{dx}{dt}, Px\rangle + \langle x, \frac{d}{dt}(Px)\rangle \\
&= \langle \frac{dx}{dt}, Px\rangle + \langle x, P\frac{dx}{dt}\rangle \\
&= \langle f(x), Px\rangle + \langle x, Pf(x)\rangle \\
&= \langle Ax + r(x), Px\rangle + \langle x, P(Ax + r(x))\rangle \\
&= \langle Ax + r(x), Px\rangle + \langle x, PAx + Pr(x)\rangle \\
&= \langle Ax + r(x), Px\rangle + \langle x, PAx\rangle + \langle x, Pr(x)\rangle \\
&= \langle Ax, Px\rangle + \langle r(x), Px\rangle + \langle x, PAx\rangle + \langle x, Pr(x)\rangle \\
&= \langle Ax, Px\rangle + \langle Px, r(x)\rangle + \langle x, PAx\rangle + \langle x, Pr(x)\rangle \\
&= \langle x, A^T Px\rangle + \langle x, P^T r(x)\rangle + \langle x, PAx\rangle + \langle x, Pr(x)\rangle \\
&= \langle x, A^T Px\rangle + \langle x, PAx\rangle + 2\langle x, Pr(x)\rangle, \quad \text{por ser } P \text{ una matriz simétrica} \\
&= \langle x, x(A^T P + PA)\rangle + 2\langle x, Pr(x)\rangle \\
&= \langle x, -Qx\rangle + 2\langle x, Pr(x)\rangle = -\langle x, Qx\rangle + 2\langle x, Pr(x)\rangle \\
&< -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\epsilon\|P\|\|x\|^2 = (-\lambda_{\min}(Q) + 2\epsilon\|P\|)\|x\|^2 \\
&= K\|x\|^2, \quad K := -\lambda_{\min}(Q) + 2\epsilon\|P\| \\
&= -|K|\|x\|^2
\end{aligned}$$

Las últimas desigualdades las justificamos de la siguiente forma: sabemos que $\langle x, Qx\rangle \geq \lambda_{\min}(Q)\|x\|^2$, por tanto $-\langle x, Qx\rangle \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2$. Además, por desigualdad de Cauchy-

Schwarz

$$\begin{aligned}\langle x, Pr(x)\rangle &\leq \|x\|\|Pr(x)\| \\ &\leq \|x\|\|P\|\|r(x)\| < \|x\|\|P\|\|x\|\epsilon = \epsilon\|P\|\|x\|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $0 < \epsilon < (\lambda_{\text{mín}}(Q))/2\|p\|)$, por tanto $2\epsilon\|P\| < \lambda_{\min}(Q)$, de donde $-\lambda_{\min}(Q)+2\epsilon\|P\| < 0$. Así, tenemos que $\mathscr{L}V(t,x) \leq -|K|\|x\|^2$. Luego, por el teorema anterior, $x = 0$ es asintóticamente estable. □

Capítulo 2

Modelos Epidemiológicos

En este capítulo estudiamos una aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la epidemiología. Los modelos que presentamos en este apartado se denominan modelos S.I.R. y S.I.S. Es muy común utilizar en las aplicaciones el término "punto de equilibrio" en vez de "punto estacionario".

2.1. Modelos S.I.R. y S.I.S.

Un modelo matemático S.I.R. es un modelo epidemiológico en el que aparecen tres tipos de individuos en una población, a saber, los susceptibles, infectados y recuperados. En los modelos más primitivos se considera que el número de individuos de cada especie evoluciona con el tiempo y el número de individuos de la población es constante (en el tiempo).

El estudio matemático de los modelos S.I.R. data del siglo pasado. La primera propuesta de modelación matemática de epidemias se dió en el trabajo de Kermakc-Mckendrick (1927) [1], el cual es un modelo S.I.R determinista y se rige por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde S, I y R son las de poblaciones de individuos susceptibles, infectados y recuperados, respectivamente. β es el coeficiente de transmisión de la enfermedad y γ es la tasa per-cápita de recuperación de la enfermedad. Aquí, se considera tanto a β como a γ constantes positivas. Además, en este modelo se asume que la población total en cualquier instante de tiempo t es una constante positiva N, así;

$$S(t) + I(t) + R(t) \equiv N \tag{2.1.2}$$

Al sistema (2.1.1), frecuentemente, se le impone la condición inicial:

$$S(0) > 0; I(0) > 0; R(0) = 0.$$

También se supone la siguiente dinámica: sólo los individuos susceptibles pueden infectarse al estar en contacto con los infectados. Las mezclas entre poblaciones son uniformes. Bajo estos supuestos el término no lineal βSI es justificado, pues los individuos susceptibles están en contacto con los infectados para enfermar y, como la mezcla es uniforme, se producen infecciones proporcionales al producto SI. Los individuos infectados pueden recuperarse y luego, son inmunes a la enfermedad. Si supone que todos los individuos recuperados inmediatamente vuelven a sufrir la enfermedad, estamos hablando de un modelo S.I.S. Una generalización del modelo S.I.S es el modelo S.I.S. con nacimientos y muertes, en el que se involucran los fenómenos de natalidad y mortalidad y está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta IS + \gamma I + \mu(N - S), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - (\gamma + \mu)I, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

donde μ es una constante positiva que representa la tasa per-cápita de natalidad y mortalidad. Ahora, como las dos ecuaciones anteriores están acopladas por el supuesto $S + I = N$, entonces podemos estudiar una sola ecuación en términos de los infectados I, es decir, basta estudiar la ecuación:

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(N - I) - (\gamma + \mu)I, \quad t \geq 0. \tag{2.1.4}$$

Notemos que (2.1.4) se puede escribir de la forma:

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(\hat{I} - I), \quad t \geq 0, \tag{2.1.5}$$

donde $\hat{I} := N - \dfrac{\gamma + \mu}{\beta}$

2.2. Propiedades Cualitativas

2.2.1. Existencia y Unicidad

Dada una condición inicial $I(0) = I_0 \in (0, N)$ de (2.1.4), entonces (2.1.4) tiene una única solución I en $[0, \infty)$.

Justificación: notemos que $f(t,I) := \beta I(\hat{I} - I)$, con $t \in [0,\infty)$ y $I \in (0,N)$. Veamos que f es localmente Lipschitz en $[0,\infty) \times (0,N)$ en la variable I, esto es, dado $(t',I') \in [0,\infty) \times (0,N)$, existe $\delta > 0$ tal que f es globalmente Lipschitz en $[t'-\delta, t'+\delta] \times [I'-\delta, I'+\delta]$ en la variable I. Sin perdida de generalidad supongamos que $t' > 0$, como $I' \in (0,N)$ entonces $0 < I < N$, por tanto existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $[I'-\delta_1, I'+\delta_1] \subset (0,N)$ y $t' > \delta_2$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sea $c = \beta N + \gamma + \mu + 2\beta(\hat{I} + \delta)$. Dado que $I_1, I_2 \in [I'-\delta, I'+\delta]$ y $t \in [t'-\delta, t'+\delta]$ ahora

$$\begin{aligned}
|f(t,I_1) - f(t,I_2)| &= |\beta I_1(N - I_1) - (\gamma+\mu)I_1 - \beta I_2(N - I_2) + (\gamma+\mu)I_2| \\
&= |\beta I_1 N - \beta I_1^2 - (\gamma+\mu)I_1 - \beta I_2 N + \beta I_2^2 + (\gamma+\mu)I_2| \\
&= |\beta N(I_1 - I_2) + (\gamma+\mu)(I_2 - I_1) + \beta(I_2^2 - I_1^2)| \\
&= |\beta N(I_1 - I_2) + (\gamma+\mu)(I_2 - I_1) + \beta(I_2 - I_1)(I_2 + I_1)| \\
&\leq \beta N|I_1 - I_2| + (\gamma+\mu)|I_1 - I_2| + \beta|I_1 - I_2||I_1 + I_2| \\
&\leq \beta N|I_1 - I_2| + (\gamma+\mu)|I_1 - I_2| + 2\beta(I' + \delta)|I_1 - I_2| \\
&= (\beta N + \gamma + \mu + 2\beta(I' + \delta))|I_1 - I_2| = c|I_1 - I_2|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|f(t,I_1) - f(t,I_2)| \leq c|I_1 - I_2|$. De aquí se sigue que f es localmente lipschitz en $[I'-\delta, I'+\delta] \times [t'-\delta, t'+\delta]$ en la variable I. Ahora veamos que existe $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ una sucesión de dominios acotados, con $\overline{D_n} \subset D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $D_n \uparrow D$. En efecto, consideremos $D_n := (1/n, N - 1/n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Claramente D_n es un dominio acotado para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\overline{D_n} \subset D$, pues si $x \in \overline{D_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $1/n \leq x \leq N - 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $1/n > 0$ y $N - 1/n < N$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $0 < 1/n \leq x \leq N - 1/n < N$. Así, $0 < x < N$, esto es $x \in (0,N)$. Por otro lado veamos que $D_n \uparrow D$, es decir,

$$D_n \subset D_{n+1} \quad \text{y} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D.$$

Es claro que $D_n \subset D_{n+1}$, pues dado $x \in D_n$, entonces $1/n < x < N - 1/n$. Además, $n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $1/n > 1/(n+1)$ y como $N > 0$ tenemos que $N - 1/n < N - 1/(n+1)$, de donde $0 < 1/(n+1) < 1/n < x < N - 1/n < N - 1/(n+1)$, es decir, $x \in (1/(n+1), N - 1/(n+1)) = D_{n+1}$. Ahora mostremos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$. Como $\overline{D_n} \subset D$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $D_n \subset D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \subset D$. Del otro lado, sea $x \in D$, esto es, $x > 0$ y $x < N$, luego $N - x > 0$. Denotemos por $c = \min\{x, N - x\}$, es claro que $c > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < c$, por tanto $1/n_0 < x$ y $1/n_0 < N - x$. Así, $x < N - 1/n_0$. En conclusión, $1/n_0 < x < N - 1/n_0$, por lo que $x \in D_{n_0}$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, en otras palabras, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. falta garantizar la existencia de $V \in C^1([0,\infty) \times (0,N); \mathbb{R}^+)$ tal que

1. Si existe $c > 0$, tal que $\mathscr{L}V(I) \leq cV(I)$, para todo $t \in [0,\infty)$, para todo $I \in (0,N)$.

2. $$V_n = \inf_{t\in[0,\infty), I\notin D_n} V(I) \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

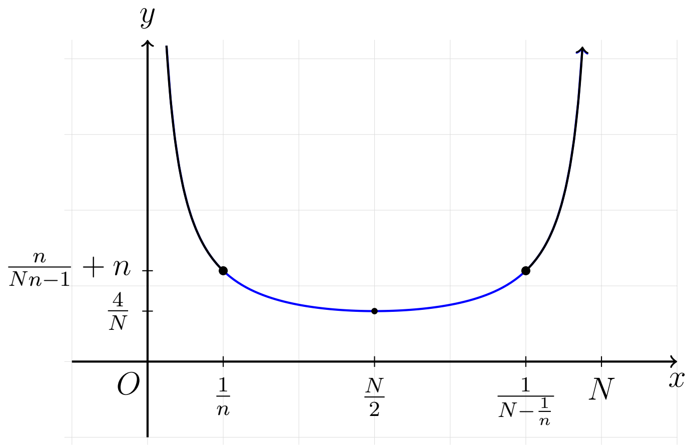


Figura 2.1: Función $V(I) = \dfrac{1}{I} + \dfrac{1}{N-I}$

Tomemos $V : [0,\infty) \times (0,N) \to \mathbb{R}$ dada por $V(t,I) := 1/I + 1/(N-I)$. Una observación antes de empezar es que $V(t,I)$ no depende de la variable temporal, por lo que denotaremos a partir de ahora $V(t,I)$ por $V(I)$. De esta forma la función nos queda de la siguiente manera $V(I) := 1/I + 1/(N-I)$, pero sin descuidar que también está involucrada la variable temporal, solo que en este caso no aparece. Claramente $V \in C^1([0,\infty)\times(0,N);\mathbb{R}^+)$ y $V(I) > 0$ para para todo $I \in (0,N)$. Calculemos la derivada de $V(I)$ para encontrar el punto mínimo de esta función y también, visualizar de una mejor manera los intervalos abierto D_n y aquellos puntos que no están sobre esos intervalos.

Es fácil ver que:

$$V'(I) = -\frac{1}{I^2} + \frac{1}{(N-I)^2} = \frac{-(N-I)^2 + I^2}{I^2(N-I)^2} = \frac{-N^2 + 2NI - I^2 + I^2}{I^2(N-I)^2} = \frac{2NI - N^2}{I^2(N-I)^2}$$

Ahora encontremos el mínimo de $V(I)$. Como el denominador nunca se anula, pues $I \in (0,N)$. Entonces, el numerador se anula, cuando $I = N/2$. Ahora, tomemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < N/2$. Finalmente, calculemos las imágenes de los extremos del intervalo D_n :

$$V\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{N - \frac{1}{n}} = n + \frac{n}{Nn-1}$$
$$V\left(N - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N-\frac{1}{n}} + \frac{1}{N - (N - \frac{1}{n})} = \frac{1}{N-\frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{Nn-1} + n$$

Dado $n > n_0$, tenemos que $V_n = n/(Nn-1) + n$. Notemos que si $n \to \infty$, entonces $V_n \to \infty$. Solo resta ver que existe $c > 0$ tal que $\mathscr{L}V(I) \leq cV(I)$, todo $I \in (0,N)$. Tomemos como $c = \max\{\beta N, \gamma + \mu\} > 0$ y sea $I \in (0,N)$. Así,

$$\mathscr{L}V(I) = \frac{\partial V}{\partial t}(I) + \frac{\partial V}{\partial I}(I)f(I) = \frac{\partial V}{\partial I}(I)f(I)$$

y como

$$\frac{\partial V}{\partial I}(I) = -\frac{1}{I^2} + \frac{1}{(N-I)^2}, \quad \text{y} \quad f(I) = \beta I(\hat{I} - I) = \beta I(N-I) - (\gamma+\mu)I.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}V(I) &= \left(-\frac{1}{I^2} + \frac{1}{(N-I)^2}\right)(\beta I(N-I) - (\gamma+\mu)I) \\
&= -\frac{\beta(N-I)}{I} + \frac{\gamma+\mu}{I} + \frac{\beta I}{N-I} - \frac{(\gamma+\mu)I}{(N-I)^2} \\
&< \frac{\gamma+\mu}{I} + \frac{\beta I}{(N-I)} < \frac{\gamma+\mu}{I} + \frac{\beta N}{N-I} \\
&< \frac{c}{I} + \frac{c}{N-I} = c\left(\frac{1}{I} + \frac{1}{N-I}\right) = cV(I)
\end{aligned}$$

Así, por el teorema (1.2.4), para la condición inicial $I(0) = I_0$, existe una única solución I (2.1.4) en $[0, \infty)$.

2.2.2. Positividad e Invarianza

Dada una condición inicial $I(0) = I_0 \in (0, N)$, entonces $I(t) \in (0, N)$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Justificación: por definición, I es una función de $[0, \infty)$ en $(0, N)$, luego $I(t) \in (0, N)$ para todo $t \in [0, \infty)$.

2.2.3. Estabilidad de los puntos estacionarios.

En esta sección estudiaremos la estabilidad de los puntos estacionarios que aparecen en (2.1.4). Recordemos que función f está dada por $f(t, I) = f(I) = \beta I(N-I) - (\gamma+\mu)I = \beta I(\hat{I} - I)$, donde $\hat{I} = N - (\gamma+\mu)/\beta$. Es evidente que $I = 0$ y $I = \hat{I}$ son puntos estacionarios de (2.1.4). Ahora analizaremos la estabilidad de cada uno de ellos.

Estabilidad del punto estacionario $I = 0$

Si $\hat{I} < 0$ entonces $I = 0$ es un punto estacionario de (2.1.4) asintóticamente estable.

Justificación: sabemos que $f(I) := \beta I(\hat{I} - I)$, claramente $f \in C^1((0, N); \mathbb{R})$. Ahora, sea $A := \mathbb{J}f(0)$. En este caso A es la derivada de f en el punto $I = 0$, por tanto, $A = \beta\hat{I}$, luego el único valor propio es $\beta\hat{I} < 0$, es decir, este valor propio tiene parte real negativa. Por otro

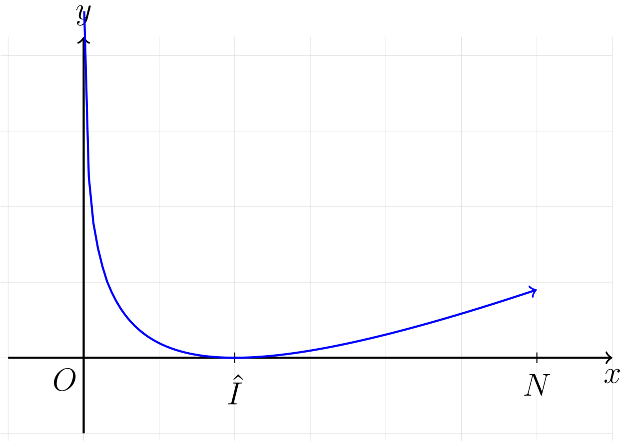


Figura 2.2: Función $V(I) = \hat{I}\left(\frac{I}{\hat{I}} - \ln\left(\frac{I}{\hat{I}}\right) - 1\right)$

lado, sea $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta = \min\{\epsilon/\beta, N\} > 0$ y sea $I \in [0, N)$, con $I < \delta \leq N$

$$|f(I) - AI| = |\beta I(\hat{I} - I) - \beta\hat{I}I| = |-\beta I^2| = |\beta I^2| = |\beta||I^2| = \beta I^2 < \beta\delta I \leq \epsilon I.$$

Así, por tanto por el teorema (1.3.5), tenemos que $I = 0$ es asintóticamente estable.

Estabilidad del punto estacionario $I = \hat{I}$

Si $\hat{I} > 0$ entonces $I = \hat{I}$ es un punto estacionario de (2.1.4) asintóticamente estable.

Justificación: consideremos la función

$$V(t, I) = V(I) := \hat{I}\left(\frac{I}{\hat{I}} - \ln\left(\frac{I}{\hat{I}}\right) - 1\right)$$

claramente $V \in C^1((0, N); \mathbb{R})$ y $V(I) > 0$ para todo $I \neq \hat{I}$ y $V(\hat{I}) = 0$, esto es, V es definida positiva en $I = \hat{I}$. Veamos que $\mathscr{L}V$ es definida negativa en $I = \hat{I}$. En efecto,

$$\mathscr{L}V(I) = \frac{\partial V}{\partial I}(I)f(I) = V'(I)f(I).$$

Y como

$$V'(I) = \hat{I}\left(\frac{1}{\hat{I}} - \frac{1}{I}\right) = \hat{I}\left(\frac{I - \hat{I}}{\hat{I}I}\right) = \frac{I - \hat{I}}{I}$$

Así,

$$\mathscr{L}V(I) = \left(\frac{I - \hat{I}}{I}\right)(\beta I(\hat{I} - I)) = -\beta(\hat{I} - I)^2 = -\varphi(I).$$

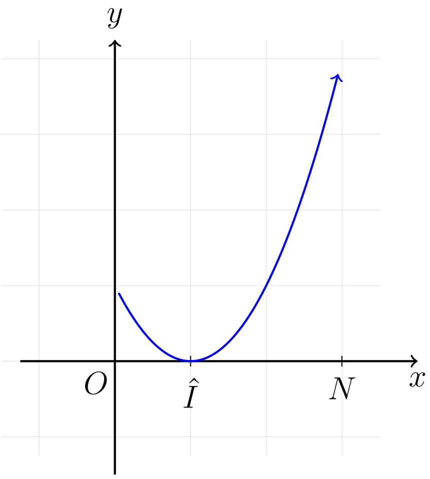


Figura 2.3: Función $\varphi(I) = \beta(\hat{I} - I)^2$

donde $\varphi(I) := \beta(\hat{I} - I)^2$. Como φ es definida positiva en $I = \hat{I}$, entonces $\mathscr{L}V$ es definida negativa en $I = \hat{I}$. Así, por el teorema (1.3.4), tenemos que $I = \hat{I}$ es asintóticamente estable.

2.2.4. Extinción

Dada la condición inicial $I(0) = I_0 \in (0, N)$ de (2.1.4) y $\hat{I} < 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0.$$

Justificación: veamos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln(I(t))}{t} < 0.$$

Ya sabemos que existe una única solución I en $[0, \infty)$ de (2.1.4) tal que $I(t) \in (0, N)$, para todo $t \in [0, \infty)$. Ahora, consideremos la función $V : (0, N) \to \mathbb{R}$ definida por $V(I) := \ln(I)$. Es claro que tanto V y I son diferenciables, luego por la regla de la cadena:

$$\frac{dV(I)}{dt} = \frac{dV(I)}{dI}\frac{dI}{dt} = \frac{dV(I)}{dI}b(I) = V'(I)b(I) = \mathscr{L}V(I)$$

Sea $t > 0$. Integrando de 0 a t la expresión tenemos que:

$$\int_0^t \frac{dV(I)}{ds}(s)ds = \int_0^t \mathscr{L}V(I(s))ds$$

es decir,

$$V(I(t)) - V(I(0)) = \int_0^t \mathscr{L}V(I(s))ds$$

en otras palabras,

$$\begin{aligned}\ln(I(t)) = \ln(I_0) + \int_0^t L_d V(I(s))ds &= \ln(I_0) + \int_0^t (\beta I(s)(N - I(s)) - (\gamma + \mu)I(s))\frac{1}{I(s)}ds \\ &= \ln(I_0) + \int_0^t \Big(\beta(N - I(s)) - (\gamma + \mu)\Big)ds \\ &\leq \ln(I_0) + (\beta N - (\gamma + \mu))t,\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

luego dividiendo entre t,

$$\frac{\ln(I(t))}{t} \leq \frac{\ln(I_0)}{t} + (\beta N - (\gamma + \mu)).$$

por tanto,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln(I(t))}{t} \leq \beta N - (\gamma + \mu) < 0.$$

Así, existen $h < 0$ y $T > 0$ tal que $\dfrac{\ln(I(t))}{t} \leq h$, para todo $t \geq T$. Luego, $I(t) \leq e^{ht}$, para todo $t \geq T$. Y finalmente, como $\lim\limits_{t\to\infty} e^{ht} = 0$ y $I(t) > 0$, para todo $t \geq T$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$.

2.3. Solución Explicíta y Simulaciones

2.3.1. Solución Explicíta

Recordemos que nuestra ecuación diferencial tiene la forma:

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(\hat{I} - I) = \beta I\hat{I} - \beta I^2 \tag{2.3.1}$$

Supongamos que $\hat{I} \neq 0$. Calculemos la solución aplicando el método de Bernoulli para resolver (2.3.1). Para ello, notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta I\hat{I} - \beta I^2 \\ \frac{dI}{dt} - \beta I\hat{I} &= -\beta I^2.\end{aligned}$$

$$\text{Consideremos} \quad z = I^{1-2} = I^{-1}, \quad \text{luego } \frac{dz}{dt} + \beta\hat{I}z = \beta.$$

Calculemos el factor integrante

$$F.I = \exp\left(\int \beta\hat{I}dt\right) = \exp(\beta\hat{I}t)$$

Así, la solución es:

$$
\begin{aligned}
z\exp(\beta\hat{I}t) &= \int \exp(\beta\hat{I}t)\beta dt \\
z\exp(\beta\hat{I}t) &= \frac{\exp(\beta\hat{I}t)}{\beta\hat{I}}\beta + C \\
\frac{1}{I}\exp(\beta\hat{I}t) &= \frac{\exp(\beta\hat{I}t)}{\hat{I}} + C \\
\frac{1}{I} &= \frac{1}{\hat{I}} + C\exp(-\beta\hat{I}t) \\
\frac{1}{I} &= \frac{1 + C\hat{I}\exp(-\beta\hat{I}t)}{\hat{I}} \\
I &= \frac{\hat{I}}{1 + C\hat{I}\exp(-\beta\hat{I}t)}
\end{aligned}
$$

Ahora, si $t = 0$ y $I = I_0$ entonces $\dfrac{\hat{I}}{I + C\hat{I}} = I_0$

$\dfrac{\hat{I}}{I_0} = 1 + C\hat{I}$, entonces $\dfrac{\hat{I}}{I_0} - 1 = C\hat{I}$ de donde $\dfrac{\hat{I} - I_0}{I_0\hat{I}} = C$.

Luego

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{I}}{1 + \dfrac{(\hat{I} - I_0)}{I_0\hat{I}}\hat{I}\exp(-\beta\hat{I}t)} &= I \\
\frac{\hat{I}I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)\exp(-\beta\hat{I}t)} &= I
\end{aligned}
$$

Ahora, supongamos que $\hat{I} = 0$. Ahora recordemos nuestra ecuación (2.3.1), por tanto, nos quedará el problema de valor inicial de la siguiente manera:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dI}{dt} = -\beta I^2 \\
\\
I(0) = I_0.
\end{cases}
\tag{2.3.2}
$$

Podemos calcular la solución de (2.3.2) a través del método de separación de variables:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -\beta I^2, \quad \text{equivalente a} \quad \frac{1}{I^2}dI = -\beta dt \\
\int \frac{1}{I^2}dI &= -\int \beta dt, \quad \text{esto es,} \quad -\frac{1}{I} = -\beta t + C_1 \\
I &= \frac{1}{\beta t - C_1}, \quad \text{ahora tomando el valor inicial,} \quad I(0) = I_0 \\
I(0) &= \frac{1}{-C_1}, \quad \text{entonces} \quad I_0 = -\frac{1}{C_1}, \quad \text{de donde,} \quad C_1 = -\frac{1}{I_0} \\
\text{Por lo tanto,} \quad I(t) &= \frac{1}{\beta t + \frac{1}{I_0}}, \quad \text{lo cual es equivalente a} \quad I(t) = \frac{I_0}{\beta t I_0 + 1}
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la solución de (2.3.1) está dada por:

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{\hat{I} I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)\exp(-\beta \hat{I} t)}, & \text{si} \quad \hat{I} \neq 0 \\[2ex] \dfrac{I_0}{\beta t I_0 + 1}, & \text{si} \quad \hat{I} = 0. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Notemos que si $\hat{I} \leq 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{I} I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)\exp(-\beta \hat{I} t)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{I_0}{\beta t I_0 + 1} = 0$$

y si $\hat{I} > 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{I} I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)\exp(-\beta \hat{I} t)} = \frac{\hat{I} I_0}{I_0 + 0} = \hat{I}$$

De esta última observación, podemos determinar varias condiciones como: si $I_0 > \hat{I}$, $I_0 < \hat{I}$ y $I_0 = \hat{I}$. Ahora miremos como se comporta la solución en cada caso.

1. Si $\hat{I} = I_0$, es evidente que la solución será una función constante, es decir $I(t) \equiv \hat{I}$, puesto que $I(t) = \dfrac{\hat{I}^2}{\hat{I} + (\hat{I} - \hat{I})e^{-\beta \hat{I} t}} = \dfrac{\hat{I}^2}{\hat{I}} = \hat{I}$.

2. Si $\hat{I} < I_0$, Veamos que $\hat{I} < I(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$. Sea $t \in [0, \infty)$, notemos que $\hat{I} - I_0 < 0$, entonces $(\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t} < 0$, por lo tanto $I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t} < I_0$. Además sabemos que $1 \geq e^{-\beta \hat{I} t}$ y $I_0 > I_0 - \hat{I}$,, entonces $I_0 \geq (I_0 - \hat{I})e^{-\beta \hat{I} t}$, de donde $I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t} \geq 0$,

por lo que

$$
\begin{aligned}
1 &< \frac{I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t}} \\
\hat{I} &< \frac{\hat{I} I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t}} = I(t), \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).
\end{aligned}
$$

Y como $\frac{dI}{dt}(t) = \beta I(t)(\hat{I} - I(t))$, para todo $t \in [0, \infty)$, tenemos que $\frac{dI}{dt}(t) < 0$ para todo $t \in [0, \infty)$, entonces I es decreciente en $[0, \infty)$

3. Si $\hat{I} > I_0$, Veamos que $\hat{I} > I(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$. Sea $t \in [0, \infty)$, notemos que $\hat{I} - I_0 > 0$, entonces $(\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t} > 0$, por lo tanto $I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t} > I_0$, por lo que

$$
\begin{aligned}
1 &> \frac{I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t}} \\
\hat{I} &> \frac{\hat{I} I_0}{I_0 + (\hat{I} - I_0)e^{-\beta \hat{I} t}} = I(t), \quad \text{para todo } t \in [0, \infty)
\end{aligned}
$$

Ahora, como $\frac{dI}{dt}(t) = \beta I(t)(\hat{I} - I(t))$, para todo $t \in [0, \infty)$, tenemos que $\frac{dI}{dt}(t) > 0$ para todo $t \in [0, \infty)$, entonces I es creciente en $[0, \infty)$

2.3.2. Simulaciones

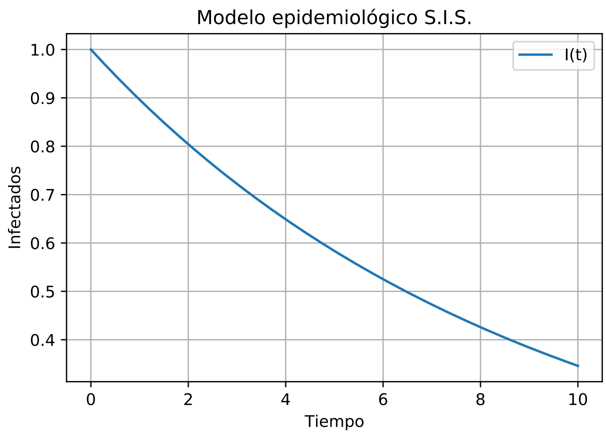


Figura 2.4: con la condición de $\hat{I} < 0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.01$	$N = 100$
$\gamma = 0.7$	$I_0 = 1$
$\mu = 0.4$	$S_0 = 99$

Tabla 2.1: con la condición de $\hat{I} < 0$

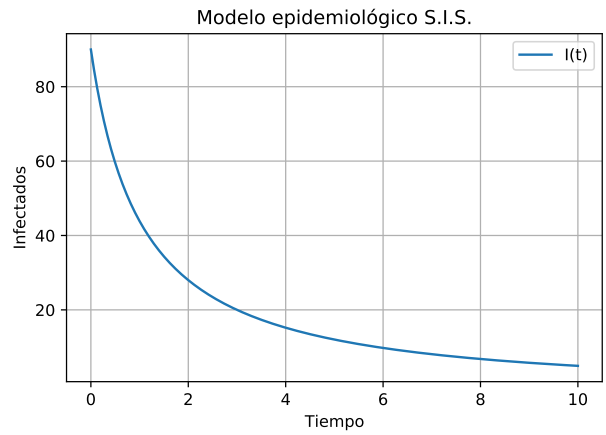


Figura 2.5: con la condición de $\hat{I} < 0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.01$	$N = 100$
$\gamma = 0.7$	$I_0 = 99$
$\mu = 0.4$	$S_0 = 1$

Tabla 2.2: con la condición de $\hat{I} < 0$

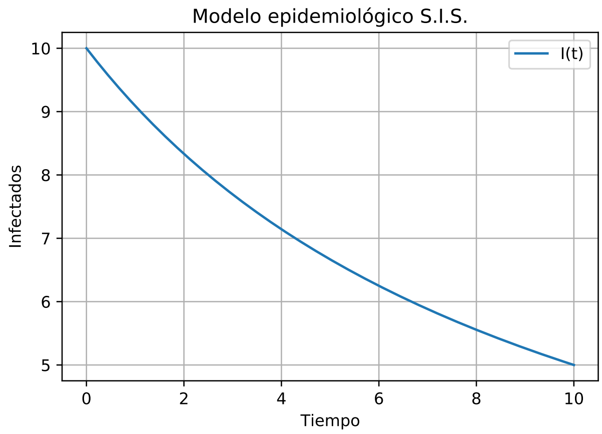


Figura 2.6: con la condición de $\hat{I} = 0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.01$	$N = 100$
$\gamma = 0.7$	$I_0 = 1$
$\mu = 0.3$	$S_0 = 99$

Tabla 2.3: con la condición de $\hat{I} = 0$

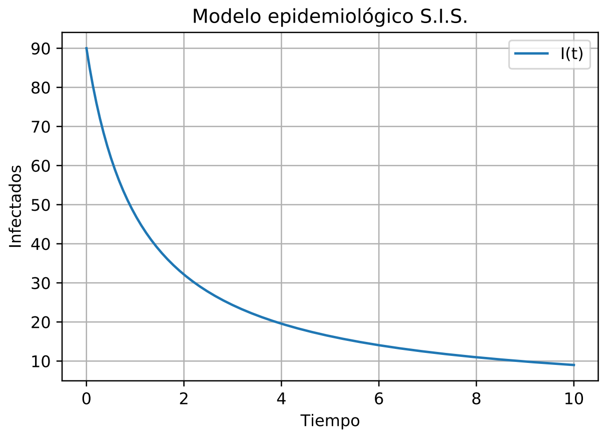


Figura 2.7: con la condición de $\hat{I} = 0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.01$	$N = 100$
$\gamma = 0.7$	$I_0 = 99$
$\mu = 0.3$	$S_0 = 1$

Tabla 2.4: con la condición de $\hat{I} < 0$

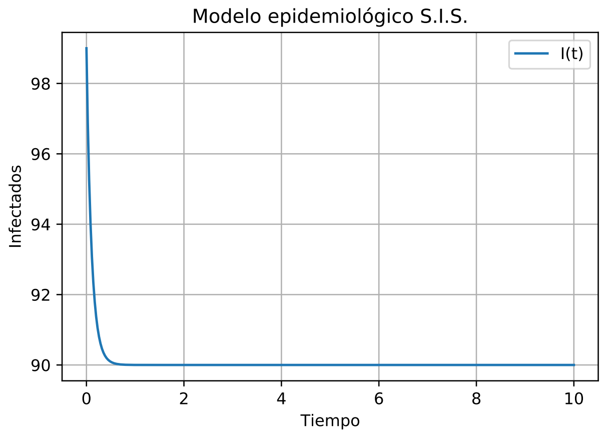


Figura 2.8: con la condición de $\hat{I} > 0$ y $\hat{I} < I_0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.1$	$N = 100$
$\gamma = 0.7$	$I_0 = 90$
$\mu = 0.4$	$S_0 = 10$

Tabla 2.5: con la condición de $\hat{I} > 0$ y $\hat{I} < I_0$

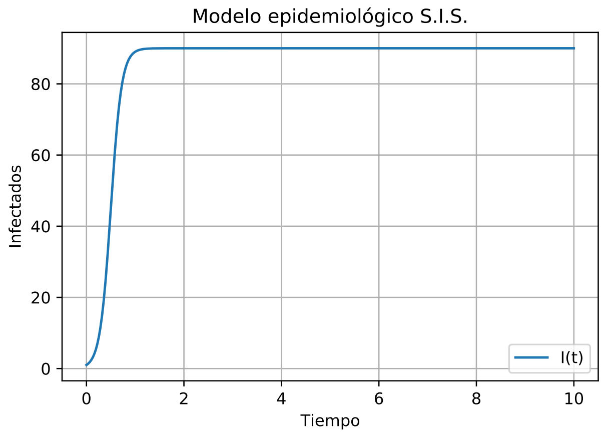


Figura 2.9: con la condición de $\hat{I} > 0$ y $\hat{I} > I_0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.1$	$N = 100$
$\gamma = 0.7$	$I_0 = 1$
$\mu = 0.4$	$S_0 = 99$

Tabla 2.6: con la condición de $\hat{I} > 0$ y $\hat{I} < I_0$

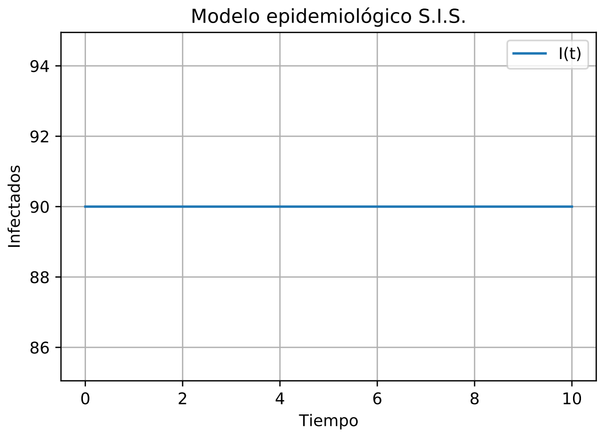


Figura 2.10: con la condición de $\hat{I} > 0$ y $\hat{I} = I_0$

Valor del paraámetro	valores iniciales
$\beta = 0.1$	$N = 100$
$\gamma = 00.7$	$I_0 = 90$
$\mu = 0.4$	$S_0 = 10$

Tabla 2.7: con la condición de $\hat{I} > 0$ y $\hat{I} < I_0$

Conclusiones

Después de haber analizado de forma cualitativa el modelo epidemiológico S.I.S. con nacimientos y muertes, pudimos establecer la regularidad de las soluciones y garantizamos el sentido biológico del fenómeno con la positividad e invarianza del dominio de dicho modelo. Más aún, si $\hat{I} < 0$, hemos podido garantizar la extinción de la enfermedad, lo que va de mano con que 0 sea un punto de equilibrio asíntoticamente estable. Además, con la solución explícita y en conjunto con las simulaciones, logramos darle la validez las propiedades cualitativas de modelo en mención.

Bibliografía

[1] W.O. Kermack, A.G. Mckendrick, Contributions to the mathematical theory of epidemics, Proc. R. Soc. A 115 (1927) 700-721.

[2] R. Khasminskii, Stochastic Stability of Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2012).

[3] X. Mao, stochastic Differential equations and applications, Horwood Publishing Chichester, UK, (2007).

[4] J. Hale, H. Koçak, Dynamics and bifurcations, Springer-Verlag New York, (1991).

[5] Kot. Mark, Elements of mathematical ecology, Cambridge University Press, (2001).

[6] Marcos Lizana, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias,Universidad de los Andes, Merida-Venezuela, (2000).

[7] Ma, Zhien and Zhou, Yicang and Wu, Jianhong,Modeling and dynamics of infectious diseases, volumen 11, World Scientific, (2009).

[8] Brauer, Fred and Castillo-Chavez, Carlos, Mathematical models for communicable diseases,SIAM, (2012).

[9] Gray, Alison and Greenhalgh, David and Hu, Liangjian and Mao, Xuerong and Pan, Jiafeng, A stochastic differential equation SIS epidemic model, SIAM Journal on Applied Mathematics, 71, 3, pgs 876–902, (2011).

[10] Guzmán, M de, Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoria de estabilidad y control, Pub. Alhambra. Madrid, 1, (1980).

[11] Meyer, Kenneth R, Ordinary Differential Equations (Jack K. Hale. John Wiley), SIAM Review, 14, 2, pgs 348–350,SIAM, (1972).

[12] Khalil, Hassan K, Nonlinear systems third edition, Patience Hall, 115, (2002).

[13] Meiss, James D, Differential dynamical systems, SIAM, (2007).

[14] LaSalle, Joseph P, Stability theory for ordinary differential equations, Journal of Differential equations, 4, 1, pages 57–65, Academic Press, (1968).