

## EJE 8

### Nuevos conocimientos en ciencias básicas, orientados a la enseñanza

Metodología de Experimentos de  
Enseñanza para la comprensión del  
concepto de curva en el marco de la  
teoría de Pirie y Kieren



*«Nuevos paradigmas y  
experiencias emergentes»*

# Metodología de Experimentos de Enseñanza para la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

## Teaching Experiments Methodology for the Understanding of the Curve Concept Within the Framework of Pirie and Kieren's Theory

Carlos Pulgarín Pulgarín<sup>1</sup>

Carlos Jaramillo López<sup>2</sup>

René Londoño Cano<sup>3</sup>

### Resumen

Las importancia histórica y epistemológica del concepto de curva y la creciente preocupación por el estudio de la comprensión que se ha generalizado en el ámbito de la educación matemática hacen que la presente investigación<sup>4</sup> suscite un llamativo interés. En principio se plantea una Metodología de Experimentos de Enseñanza (TEM, por sus siglas en inglés) articulado con la teoría de Pirie y Kieren (PK), con el fin de estructurar un episodio de enseñanza e instrumentos de recolección de información, los cuales a partir de una serie de descriptores dispuestos en los cuatro primeros niveles del modelo PK, aportan elementos para analizar la comprensión que presentan los estudiantes de un curso de cálculo integral, sobre el concepto de curva en las transiciones entre lo discreto y continuo, mediante procesos de razonamiento infinito. Posteriormente, se presentan las unidades de análisis y una matriz que integra el TEM, los niveles PK y las categorías de análisis.

**Palabras clave:** curvas, TEM, comprensión.

### Abstract

The historical and epistemological importance of the concept of curve and the growing concern for the study of understanding that has become widespread in the field of Mathematics Education, have aroused the interest to investigate about it. In this sense, this writing proposes a TEM (Teaching Experiment Methodology) articulated with the Pirie and Kieren (PK) theory, in order to structure a teaching episode and information gathering instruments, which from a series of descriptors arranged in the first four levels of the PK model, provide elements to analyze the understanding that students of an integral calculus course present on the concept of curve in the transitions between discrete and continuous through infinite reasoning processes. Subsequently, the units of analysis and a matrix that integrates the TEM, the PK levels and the categories of analysis are presented.

**Keywords:** curves, TEM, understanding.

<sup>1</sup> Universidad de Antioquia, Colombia, carlosm.pulgarin@udea.edu.co

<sup>2</sup> Universidad de Antioquia, Colombia, carlos.jaramillo1@udea.edu.co

<sup>3</sup> Universidad de Antioquia, Colombia, rene.londono@udea.edu.co

<sup>4</sup> Esta investigación forma parte del proceso de estudio de doctorado en Educación, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

## 1. Introducción

Los antecedentes históricos y epistemológicos del concepto de curva permiten suponer su trascendencia e implicaciones en el aprendizaje del cálculo, dado que vincula elementos tan importantes como la continuidad y el infinito. Según Crespo (2001):

«Al postular la continuidad se establece una equivalencia entre el continuo aritmético y el geométrico, y es posible establecer una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. Quizás el concepto de continuidad no sea realmente tan intuitivo como puede parecer a simple vista y merece un cuidadoso tratamiento»(p. 41).

La discusión sobre el continuo en matemáticas parece inducir necesariamente un carácter discreto, y en tal sentido ambos términos han sido relacionados en esta investigación de manera consistente a partir de la introducción del concepto de transición, el cual, en relación con el cálculo, será entendido como el paso de lo discreto a lo continuo o viceversa a través de procesos de razonamiento infinito.

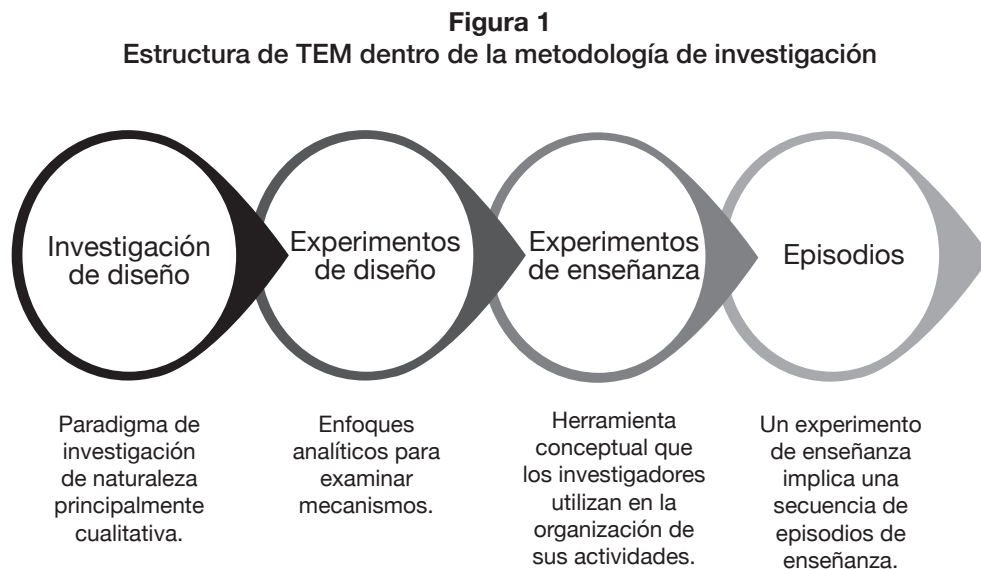
Este último concepto (infinito) propicia a su vez la discusión sobre el concepto de curva. Como afirma Artigue (1995) (Citado por Sánchez-Matamoros 2008), «existen dificultades para que los jóvenes de primeros semestres de universidad logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático». En particular, la derivada y la integral se formalizan sobre el concepto de curva y por lo tanto se destaca la importancia de estudiar la comprensión de dicho concepto.

La comprensión se define como «un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento de una persona» (Meel, 2003, p. 235). En matemáticas ha tomado mayor importancia en los últimos años dado que «un aprendizaje comprensivo de las matemáticas aporta privilegios y ventajas intelectuales, proporciona experiencias satisfactorias que fomentan actitudes favorables, apoya la autonomía en el aprendizaje futuro y propicia el uso flexible del conocimiento ante nuevos tipos de problemas en contextos diversos» (MEN, 2006).

En vista de lo anterior, la presente investigación fundamenta la importancia de analizar la comprensión del concepto de curva con el fin de responder ¿Cómo es el proceso de comprensión de dicho concepto en las transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de PK? Para ello se considera una investigación de diseño y a partir de la articulación de la teoría PK con un TEM, se estructuran una serie de descriptores dentro de los niveles del modelo PK y de este modo con base a las variables de las categorías de la unidad de análisis (UA) poder responder a la pregunta de investigación en cuestión.

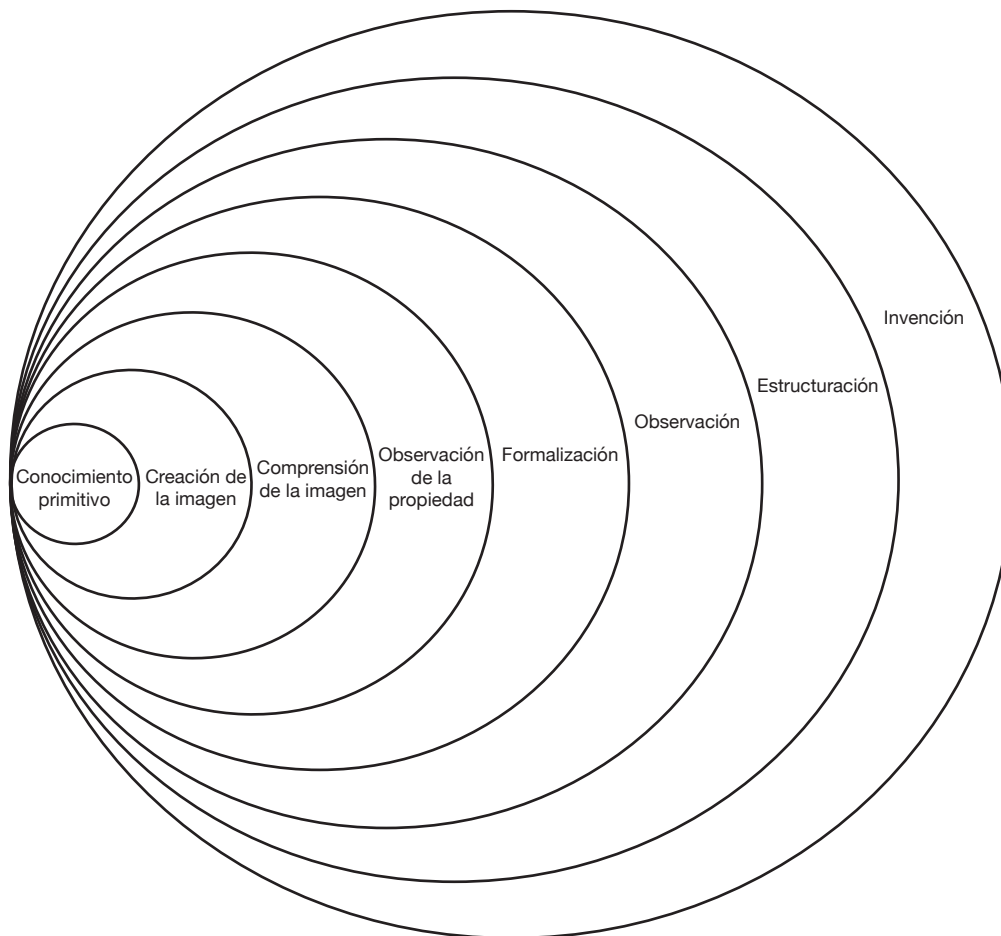
## 2. Metodología

La comprensión del concepto de curva involucra diversas acciones y expresiones mentales tales como reconocer atributos, representaciones, relaciones entre variables, entre otras. Los estudiantes suelen construir una imagen limitada del concepto y en el caso de una curva, dicha limitante afecta directamente la elaboración de otros conceptos vinculados, como la derivada e integral, «al tomar atributos no relevantes como si lo fueran para la definición del concepto» (Tall y Vinner, 1981, p. 152). De ahí que la investigación adopte los experimentos de enseñanza (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000; Stylianides & Stylianides, 2013) para intentar dar respuesta al problema de comprensión inmerso en el concepto de curva y apoyar el aprendizaje de los estudiantes a partir de explicaciones teóricas sobre lo que ocurre con la comprensión del concepto a la luz de la teoría PK.



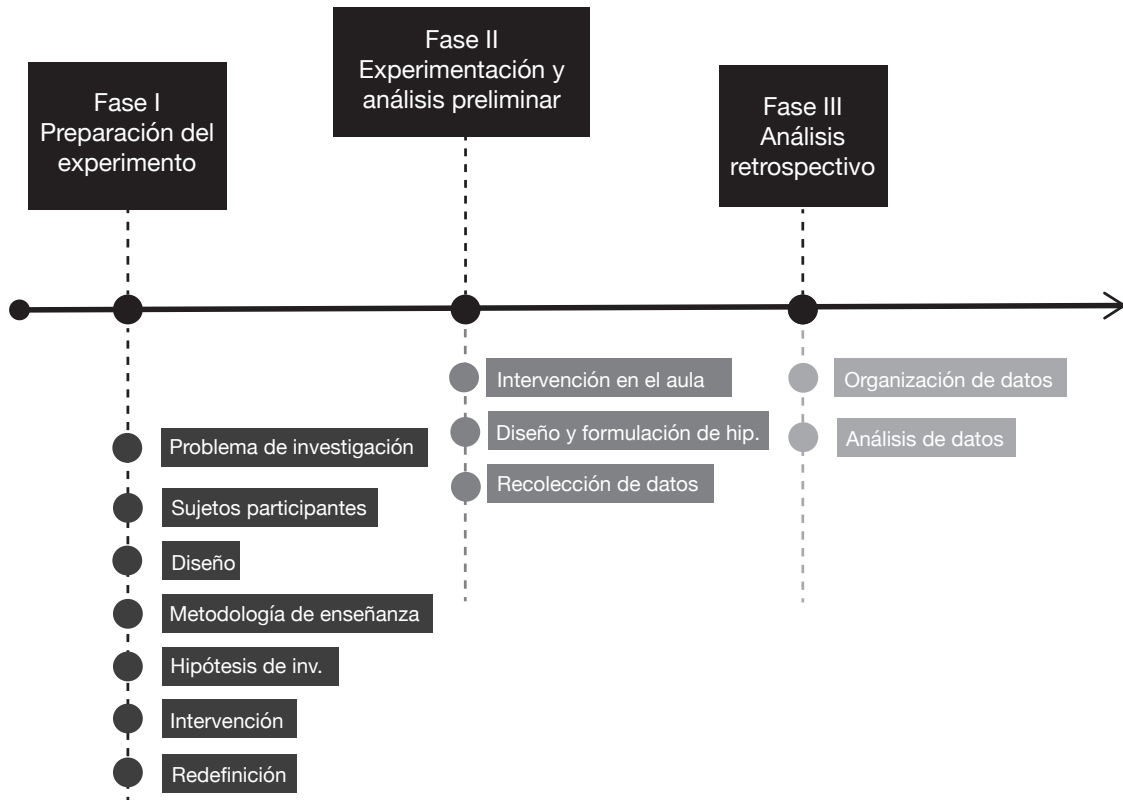
Cabe recordar que Pirie y Kieren (1994) conciben dentro de su modelo, que cada nivel más allá al conocimiento primitivo está compuesto por complementariedades de la acción y la expresión. La acción puede abarcar actividades tanto mentales como físicas, y la expresión puede revelar a los demás o a sí mismo la naturaleza de las actividades.

**Figura 2**  
**Modelo PK (Pirie y Kieren, 1994)**



Considerando la comprensión como un proceso, las TEM se articulan con la teoría PK, ya que cada fase del experimento de enseñanza trae consigo acciones, y aunque la expresión verbal no es estrictamente necesaria, es solo a través de la exteriorización que se puede inferir la comprensión que el estudiante está construyendo. Por esta razón, para el experimento de enseñanza se consideraron los cuatro primeros niveles del modelo PK, así como las estructuras cognitivas de los estudiantes a partir del concepto imagen y del concepto definición planteadas por Tall & Vinner (1981).

**Figura 3**  
Fases y acciones de las TEM

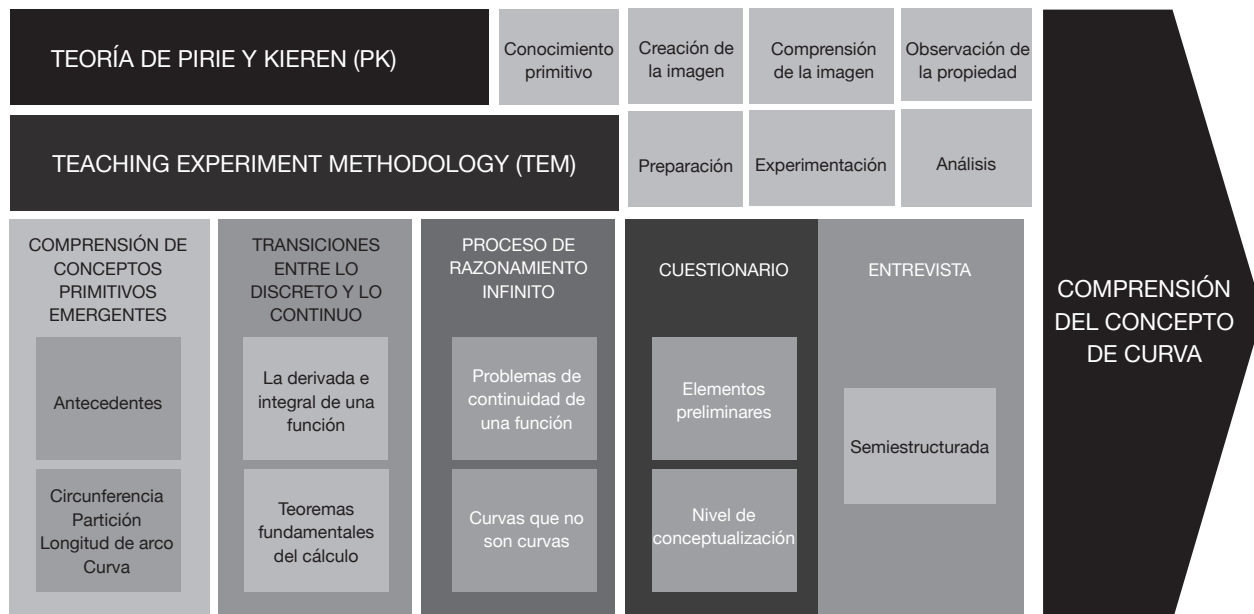


**Nota:** Extraído de Tall & Vinner (1981)

### 3. Resultados

Dentro de los resultados de la investigación, asumiendo su parte metodológica se obtiene una secuencia de enseñanza en la que se consideraron los contenidos que están en consonancia con los programas para las carreras, de los cuales hacen parte el grupo de estudiantes de Cálculo Integral seleccionado. De este modo, las sesiones de la TEM fueron estructuradas a partir de los elementos: comprensión de conceptos primitivos emergentes, transiciones entre lo discreto y lo continuo y, por último, procesos de razonamiento infinito.

**Figura 4**  
Articulación de la TEM y la teoría PK



**Nota:** Elaboración propia

Por otra parte, en el TEM se diseñaron tres instrumentos de recolección de información: cuestionario inicial, entrevista, cuestionario final. Estos tres instrumentos permiten hacer seguimiento al proceso antes, durante y después de la intervención en el trabajo de campo. A su vez, se consolidó una serie de descriptores con una notación y sistematización propia que permite clasificar de manera práctica cada estudiante dentro de los respectivos niveles del modelo PK.

Los descriptores fueron denotados con la letra D seguida del número que indica el nivel en el que se ubica, y un guion acompañado de un número que señala el descriptor al que hace referencia dentro de dicho estrato (Pulgarín Pulgarín, 2014). Como ejemplo: D2-3 hace referencia al Descriptor 3 del nivel 2.

En el caso de las preguntas, fueron abreviadas con la letra P acompañada del número de la pregunta, Ejemplo: P2 hace referencia a la pregunta número 2.

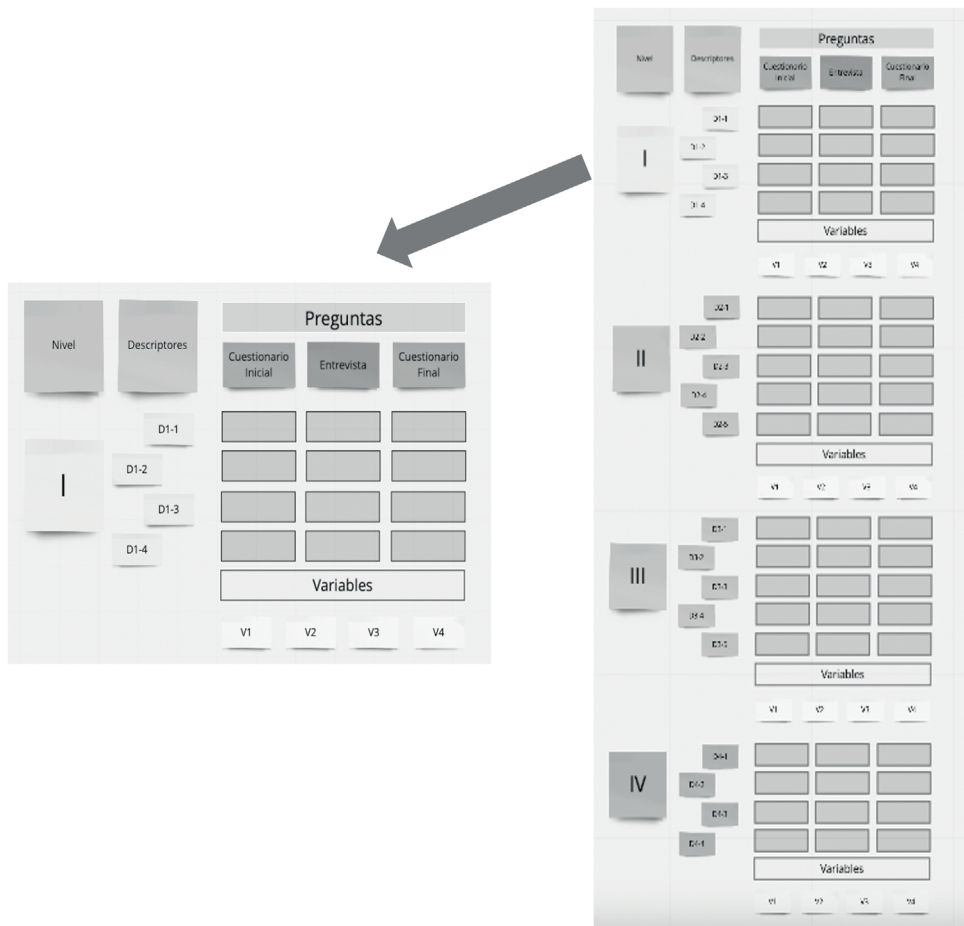
En la Figura 5 se presenta brevemente el cuestionario inicial (elementos preliminares), el cual consta de una serie de preguntas que se ubican en las fases I y II del TEM y que indagaran por el conocimiento preliminar del estudiante como punto de partida dentro del modelo PK.

**Figura 5**  
Secciones del cuestionario inicial: elementos preliminares

Los resultados de este instrumento permitieron analizar con base en los descriptores, el nivel en el que se ubica el estudiante dentro del modelo PK. Es de destacar que algunas preguntas ofrecen miradas distintas a una misma situación. Sin embargo, pueden hacer emerger en el estudiante cierto tipo de contradicciones o «errores» que posteriormente en la TEM pueden ser replanteados, al hacer un análisis retrospectivo de la situación, y que en el marco de la teoría PK hace referencia a una característica importante conocida como redoblar.



**Figura 6**  
Matriz para la unidad de análisis asociada con los descriptores y niveles PK



Se adoptaron como parte final de la sistematización de los resultados, las unidades de análisis (UA) y observación (UO), las cuales permitieron estructurar categorías con respecto a las preguntas formuladas en los instrumentos. Conjugando de esta forma el material empírico asociado al problema de investigación y un cuerpo teórico a través del cual se llevan a cabo inferencias con mayor coherencia y consistencia (Picón y Melian 2014).

**Figura 7**  
Categorías y variables de la UA

Categoría de preguntas (CP)	Enunciados por categoría (EC)	Variables (V)
<p>CP1</p> <p>¿De qué manera representa una curva?</p>	<p>EC1</p> <p>Representaciones de una curva</p>	<p>V1</p> <p>Capacidad de representación del estudiante</p>
<p>CP2</p> <p>¿Cómo define una curva?</p>	<p>EC2</p> <p>Argumentos asociados al concepto de curva</p>	<p>V2</p> <p>Capacidad de argumentación del estudiante</p>
<p>CP3</p> <p>¿Cómo relaciona los conceptos, las expresiones algebraicas y las representaciones a partir de transiciones entre lo discreto y lo continuo?</p>	<p>EC3</p> <p>Relaciones de conceptos y representaciones entre lo continuo y lo discreto</p>	<p>V3</p> <p>Capacidad de interpretación del estudiante</p>
		<p>V4</p> <p>Capacidad de comunicación del estudiante</p>

#### 4. Conclusiones

La TEM dentro de la investigación cualitativa es una herramienta conceptual de gran relevancia que permitió consolidar el proceso previo al desarrollo del trabajo de campo y a su vez articular el objeto matemático y de estudio de forma sistemática.

Analizar la comprensión de los estudiantes frente al concepto de curva en el marco de la teoría PK resultó ser pertinente, dadas las características del modelo en cada uno de sus niveles. Además, se articula de forma consistente con la metodología de experimentos de enseñanza.

El desarrollo de la fase I del TEM permitió consolidar una serie de descriptores en el marco de la teoría PK. Sin embargo, la fase II hace posible el refinamiento de los descriptores, hecho que amplía la perspectiva en la fase III cuando se hace uso de las variables de las UA.

Los instrumentos: cuestionario inicial, entrevista semiestructurada y cuestionario final a partir de la TEM y los descriptores para la comprensión del concepto de curva, con base en el modelo PK, aportan elementos indispensables para la triangulación de la información y la sistematización de los resultados, con el fin de analizar el proceso de comprensión del concepto de curva.

## 5. Referencias bibliográficas

- Cobb P., & Steffe L. P. (1983) The constructivist researcher as teacher and modelbuilder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2): 83-94
- Crespo, C. (2001) El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos. Argentina. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/6239/1/CrespoElconceptoAlme2005.pdf>
- Meel, D. (2003). *Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory*. CBMS Issues in Mathematics Education, 12, 132-181.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Recuperado de: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-116042_archivo_pdf2.pdf)
- Picón, D., & Melian, Y. (2014). *La unidad de análisis en la problemática enseñanza-aprendizaje*. Informe Científico Técnico UNPA, ISSN-e 1852-4516, Vol. 6 N.º 3, págs. 101-117. Argentina. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5123550>
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 165-190.
- Pulgarín, C. (2014) *Aproximación de curvas a partir del plegado de superficies planas*. Medellín. Universidad de Antioquia.
- Sánchez-Matamoros, García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Inglaterra. *Revista Educational Studies in Mathematics*. Recuperado de: [http://www.im.ufrj.br/~claudia/cursos-2010-1/artigo\\_Tall\\_Vinner.pdf](http://www.im.ufrj.br/~claudia/cursos-2010-1/artigo_Tall_Vinner.pdf)
- Steffe, L., & Thomson, P. (2000). *Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements*. Research design in mathematics and science education. New Jersey. 267-307.
- Stylianides, A., & Stylianides, G. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM*, 45(3), 333-341.