Conceptos Contraintuitivos en la Comprensión de los Números Racionales.
El caso de tres Estudiantes del grado 7º de la Institución Educativa Alfredo Cock Arango.

Luis Gabriel Aguas Hernández

Lizeth Dayana Lozada Jiménez

Paola Viviana Tobar Rosales

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Asesor

René Alejandro Londoño Cano, Doctor (PhD) Línea de Formación en Educación Matemática

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

Medellín, Antioquia, Colombia

2022

Agradecimientos

En primer lugar, queremos agradecer a los estudiantes que hicieron posible el desarrollo de este trabajo investigativo, puesto que gracias a ellos se logró hacer el rastreo, aplicación de instrumentos y análisis de los resultados por medio de evidencias visuales, auditivas, escritas y orales.

A las familias de los estudiantes por permitirnos cualificar el proceso de comprensión de sus hijos.

Al asesor René Alejandro Londoño Cano por su dedicación y compromiso en la evaluación y corrección de nuestro trabajo, puesto que, gracias a ello, aprendimos de nuestros errores y fortalecimos nuestras habilidades.

A la Institución Educativa Alfredo Cock Arango por permitirnos hacer la implementación de nuestros instrumentos, que fueron de vital importancia para el análisis de la información.

A la profesora María Eugenia Zapata por brindarnos el espacio de sus clases, puesto que facilitó la recolección de los datos.

Yo, Luis Gabriel Aguas Hernández quiero agradecer a mis padres Luis Manuel Aguas Vergara e Isabel Sofía Hernández García, a mis hermanos Kateryn Aguas Hernández y Héctor Manuel Aguas Hernández y a mi tía Elcy Elena Aguas Vergara, por el acompañamiento emocional y económico que me brindaron a lo largo de este trabajo investigativo, puesto que, gracias a ello, logré enfocarme y motivarme en cada paso; así mismo, agradecer a mis coinvestigadoras y amigas Lizeth Dayana Lozada Jiménez y Paola Viviana Tobar Rosales por su entrega y dedicación en el desarrollo de este trabajo, pues aprendí de sus exigencias, acompañamiento y comprensión para consolidar el presente trabajo.

Yo, Lizeth Dayana Lozada Jiménez, quiero agradecer en este trabajo de grado principalmente a Dios por darme la fortaleza día a día para luchar por cada una de las cosas que me he propuesto, a todos los que me apoyaron en mi formación académica y pedagógica en los años como estudiante de la licenciatura, en la que he afianzado mi pasión por la docencia, la enseñanza y formación en las matemáticas y la física. Quiero agradecer también a mi Madre, por estar presente en cada paso que he dado en mi formación, por el amor, el apoyo y la motivación cuando me sentía desfallecer. A mis hermanas por la confianza que han puesto en mí, para ser la primera de la familia con tener un título universitario. A la Familia Vélez, por su apoyo incondicional, confiando en mí, siendo un apoyo más que moral y emocional. Por último, a mi asesor René Alejandro Londoño Cano, por su dedicación, exigencia y compromiso, a mis compañeros con los que he compartido tanto aprendizajes y momentos especiales, por esos altibajos que nos llevaron a culminar nuestro trabajo de grado contentos con los logros obtenidos.

Yo, Paola Viviana Tobar Rosales, quiero agradecer y dedicar este trabajo en primer lugar a Dios, por darme la sabiduría y fortaleza para seguir adelante y darme ánimos para lograr mis sueños, siendo el dueño de mi vida y de mis decisiones; también se lo dedico a mis padres Homero Tobar y Patricia Rosales, quienes han sido el motor y motivo para levantarme todos los días con la ilusión de cumplir un sueño, gracias por su amor, su esfuerzo, y por el trabajo que han realizado por sacarme adelante, me siento muy agradecida con la vida por tener padres como ellos. Agradezco a mis 4 hermanas por ser mi guía, ejemplo y compañía en cada momento, pues en ellas encuentro mi lugar seguro, también a mis sobrinos por ser siempre la alegría de mi corazón. Agradezco a mi novio por su compañía, por su amor y por su espera, por darme motivos de alegría y por apoyarme siempre en mis sueños, al igual que a su familia quienes siempre me han brindado su cariño sincero; también a mis mejores amigas porque su cariño y compañía irradiaron alegría en momentos de soledad, además de haberme brindado su mano para ayudarme a sobresalir. Finalmente, agradezco a las personas que han hecho esto posible, a mi asesor René Alejandro Londoño; a mis compañeros y amigos de este camino Luis Gabriel y Lizeth Lozada, pues su compañía y amistad fueron un valioso tesoro que llevaré en mí; y finalmente, a los buenos maestros y compañeros que marcaron y formaron mi camino en la vida universitaria.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

El presente trabajo de grado corresponde a una investigación llevada a cabo con tres estudiantes del grado 7º de la Institución Educativa Alfredo Cock Arango, en torno al estudio sobre cómo los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales, bajo el análisis de la caracterización cognitiva realizada por Fischbein y la metodología de experimentos de enseñanza. De esta forma, se desarrolla la investigación aplicando diferentes instrumentos que permitieron la recolección de la información analizada.

Así, de acuerdo con la metodología de experimentos de enseñanza y su enfoque cualitativo, la implementación del trabajo se presentó en torno a tres fases, llevando a cabo el análisis detallado y conciso en el que se desarrollaron conceptos tales como la noción de infinito, la densidad de los números racionales y el principio de orden o transitividad de los números racionales, buscando que los resultados den respuesta a la pregunta de investigación, por medio de la indagación y estudio de diferentes conceptos contraintuitivos que fueron evidentes en el desarrollo de los experimentos en el aula de clase. Además, esta metodología permitió el análisis en cada uno de los episodios realizados, para que así cada instrumento se pudiera perfeccionar y trabajar de acuerdo con las dinámicas del grupo.

El análisis permitió encontrar que en la comprensión de los números racionales emergieron conceptos contraintuitivos, que se desarrollaron en torno a la definición, operatividad y representación de los números racionales. De acuerdo con lo anterior y a los resultados obtenidos de la investigación, se pudo evidenciar que en los estudiantes se presentaron conceptos contraintuitivos que afectaron su comprensión, situación que fue contrarrestada a medida que se llevaba a cabo el trabajo de campo.

Palabras clave: investigación, contraintuitivo, comprensión, intuición, enseñanza, metodología, cognición.

Abstract

The present degree work corresponds to an investigation carried out with three students of the 7th grade of the Alfredo Cock Arango Educational Institution, around the study of how counterintuitive concepts derive the process of understanding rational numbers, under the analysis of the cognitive characterization made by Fischbein and the methodology of teaching experiments. In this way, the research is developed by applying different instruments that allowed the collection of the analyzed information.

Thus, according to the methodology of teaching experiments and its qualitative approach, the implementation of the work was presented around three phases, carrying out the detailed and concise analysis in which concepts such as the notion of infinity, the density of rational numbers and the principle of order or transitivity of rational numbers, seeking that the results give an answer to the research question, through the investigation and study of different counterintuitive concepts that were evident in the development of the experiments in the classroom. In addition, this methodology allowed the analysis in each of the episodes carried out, so that each instrument could be perfected and worked according to the dynamics of the group.

The analysis allowed to find that in the understanding of the rational numbers of counterintuitive concepts emerged, which were developed around the definition, operation and representation of rational numbers. According to the above and the results obtained from the investigation, it was possible to show that students presented counterintuitive concepts that affected their understanding, a situation that was counteracted as the field work was carried out.

Keywords: research, counterintuitive, comprehension, intuition, teaching, methodology, cognition.

Introducción

El presente trabajo de investigación tuvo como propósito analizar cómo los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales, haciendo uso de la metodología de experimentos de enseñanza, la cual permitió analizar a través de episodios, las particularidades o maneras de razonar del estudiante, puesto que dicha metodología no se enfoca en analizar casos generales, sino específicos; el análisis que se realizó con respecto a los conceptos contraintuitivos, se llevó a cabo a partir de las características intuitivas postuladas por Fischbein, las cuales permitieron categorizar los conceptos en intuitivos y contraintuitivos.

Para poder categorizar y encontrar estas afectaciones de los estudiantes en torno al conjunto de los números racionales, se implementaron las tres fases propuestas en las metodologías de experimentos de enseñanza, en la que se usaron guías experimentales, conceptuales y/o test, que facilitaron la recolección de la información, pues fue posible sistematizar y clasificar en distintos ejes los conceptos contraintuitivos que se encontraron a lo largo del análisis. Se inició desde las ideas previas de los estudiantes, para que luego, a través de distintos experimentos, retos y explicaciones, analizar cómo se visibilizaron los conceptos contraintuitivos.

Cada instrumento que se aplicó se enfocó en mejorar los procesos de comprensión de los estudiantes en torno a los números racionales, debido a que anteriormente se percibieron procesos rutinarios que dificultaban el razonamiento de los estudiantes, para ello, se definió el concepto de número racional, y se especificaron sus distintas formas de representación numérica y gráfica, las cuales permitieron mejorar paulatinamente las respuestas dadas por los participantes. Para el estudio fue importante evidenciar los procesos mecánicos y memorísticos que usualmente se dan en las aulas de clase de matemáticas, con el fin de detectar indicios que conllevaran a la identificación de características intuitivas. Algunos conceptos que afloraron en el trabajo de campo por parte de los estudiantes fueron: la idea de infinito, relaciones de orden, operaciones y representaciones, a partir de los cuales se evidenciaron ciertos conceptos contraintuitivos.

El estudio se desarrolló en 5 capítulos; el capítulo I se centró en el propósito del trabajo de investigación y contiene el planteamiento de la pregunta de investigación, su justificación, los objetivos generales y específicos, la selección de la población, el objeto de saber específico y los antecedentes como base del marco teórico.

En el capítulo II, se encuentran los referentes teóricos y planteamientos de autores que fueron fundamento para la construcción de las diferentes nociones y conceptos como guía para el desarrollo del trabajo; en este capítulo se desarrollan ciertas ideas conceptuales de los números racionales, además de algunas posturas teóricas acerca de la intuición, la comprensión y los conceptos contraintuitivos.

El capítulo III se focalizó en la ruta metodológica para realizar la investigación, por lo que se eligió un enfoque cualitativo que llevó a determinar los experimentos de enseñanza como la metodología más adecuada para implementar los instrumentos de recolección de la información. El trabajo de campo se llevó a cabo mediante episodios y fases por medio de un test diagnóstico, un test conceptual y pruebas experimentales que permitieron seleccionar la población.

El capítulo IV contiene la aplicación y análisis de las pruebas realizadas, detectando de manera minuciosa respuestas que indiquen el reconocimiento de conceptos contraintuitivos que afectan la comprensión de los números racionales.

Finalmente, en el capítulo V se explicitan las conclusiones, haciendo una reflexión sobre los resultados del análisis y de las perspectivas encontradas en el trabajo de investigación, además del tratamiento de algunas posturas teóricas que pudieron generar controversia.

Capítulo I. Contextualización del Estudio

En este capítulo se encuentran los propósitos bajo los cuales se realizó esta investigación; para ello se identificaron ciertas dificultades en los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Alfredo Cock Arango, donde fue realizada la práctica pedagógica docente.

1.1 Problema de Investigación

1.1.1 Justificación del Problema

Los motivos que llevaron a investigar sobre la comprensión del concepto de los números racionales, es la evidente mecanización de los procesos matemáticos dentro de los espacios educativos, que a pesar de que en ocasiones es conveniente y necesaria para la internalización de los procesos matemáticos en general, genera obstáculos. Como maestros en formación, queremos aportar nuevas herramientas y estrategias para que sea posible la comprensión de los números racionales, determinando a través de situaciones hipotéticas y/o experimentales el razonamiento de los estudiantes. Con base en lo anterior, se pretende analizar principalmente cómo los conceptos contraintuitivos emergen en la comprensión de los números racionales, además de cómo la mecanización en algún momento puede convertirse en generador de ideas contraintuitivas.

Así mismo, se considera pertinente analizar si la comprensión de los números racionales a través de la mecanización, y el razonamiento estructural y conceptual responden a los interrogantes: ¿La mecanización puede llegar a ser un concepto contraintuitivo que afecta el proceso de comprensión de los números racionales? y ¿Cuáles son las dificultades en la comprensión de los números racionales? Lo cual podría ampliar el campo de estudio en este sentido. Por otro lado, el uso de estrategias didácticas en la construcción de conocimiento permite indagar ¿De qué manera los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales? Dando paso al análisis de las manifestaciones intuitivas del estudiante, sus sesgos establecidos a través de la comprensión, la mecanización del concepto y la operatividad sobre los números racionales.

Los planteamientos anteriores llevan a analizar cómo a través de la intuición se puede comprender los conceptos relacionados con los números racionales, sin tener como primer paso la mecanización, para inducir a los estudiantes a solucionar preguntas, problemas, juegos, entre otros, que permitan la internalización de esta conceptualización de forma significativa.

1.1.2 Formulación del Problema

Se evidencio que los estudiantes del grado 7º de la Institución Educativa Alfredo Cock Arango en el área de matemáticas, presentan dificultades relacionadas con los números racionales en su definición, operatividad y representación, debido a la influencia de conceptos o rutinas contraintuitivas durante el proceso de comprensión, afectando las características generales de las cogniciones intuitivas que se presentan en el desarrollo de las matemáticas.

1.2 Pregunta de Investigación

¿De qué manera los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales?

1.3 Objetivos de Investigación

1.3.1 Objetivo General

Analizar cómo los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar los conceptos previos que emplean los estudiantes con respecto al concepto de los números racionales.
- Caracterizar habilidades y estrategias con las que se desenvuelven los estudiantes en la solución de problemas y el tratamiento de conceptos planteados, relacionados con los números racionales.
- Evaluar de manera preliminar los conceptos contraintuitivos a los que se enfrentan los estudiantes en el desarrollo de conceptos o propiedades relacionadas con los números racionales, tales como la densidad, el principio de orden, sus operaciones y las diferentes representaciones.

1.4 Objeto de Estudio

Conceptos contraintuitivos en la comprensión de los números racionales.

1.5 Objeto del Saber Específico

Los números racionales.

1.6 Antecedentes

1.6.1 Acerca de la Comprensión y lo Contraintuitivo

A continuación, la tabla 1 se centra en las ideas y/o pensamientos de varios autores, expresando su opinión acerca de las diferentes maneras en que la comprensión da cabida a algunos saberes específicos en el área de matemáticas; en estas citas, principalmente se muestra la importancia del papel docente al momento de elaborar o planear un buen trabajo académico para propiciar un proceso de comprensión dentro de la enseñanza.

Además, podemos encontrar algunas citas relacionadas con los conceptos contraintuitivos que se pueden evidenciar en el área de matemáticas, especialmente en las operaciones, representaciones y estructuras de los números racionales, teniendo en cuenta los diferentes procesos que conllevan a la interpretación y abstracción que se establece en la definición del concepto objeto de estudio.

Tabla 1

Antecedentes Acerca de la Comprensión y lo Contraintuitivo

Título del trabajo	Autores	Citas para destacar	Aportes de los investigadores
La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática	Johan Espinoza G. José Luis Lupiáñez G. Isidoro Segovia A. (2014)	“De igual forma, los profesores pueden planear sistemáticamente tareas de invención de problemas con varios fines. Primero, pueden examinar y valorar directamente la comprensión de los conceptos matemáticos de los estudiantes, ya que en los problemas generados queda plasmado el significado que tienen de los conocimientos aprendidos, habilidades matemáticas, creatividad, profundización de los	Los autores muestran la importancia de la labor que se tiene como profesores, pues hacer que los estudiantes comprendan depende en gran parte de la manera que se enseña, así, se busca ser estratégicos, creativos y cuidadosos al momento de plantear un problema o enseñar cierto tema; es a partir de ahí que empieza el proceso de

		conceptos, patrones, uso de los números y cantidades, entre otros.” (p. 9)	comprensión y resignificación de saberes.
Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas	María Mayela Calvo Ballestero (2008)	“Es fundamental para la enseñanza significativa de la matemática buscar “El modo de conexión entre el aprendizaje nuevo con los conocimientos que ya posee y facilitar de esta manera la comprensión del nuevo aprendizaje. El docente no puede desechar los conocimientos previos de sus estudiantes como si fueran inútiles; por el contrario, debe destacarlos y aprovecharlos para fomentar la confianza en sí mismo al reconocer que la información que traen consigo es importante para el proceso de enseñanza.” (p. 129)	Se permite ver la importancia de entrelazar los saberes de cada estudiante; el hacer una buena conexión entre lo que sabía y lo que se va a aprender, puede facilitar de alguna forma la comprensión de cada estudiante, para así lograr una buena formación con respecto a lo que se enseña.
Mentalidades matemáticas	Jo Boaler (2016)	William Thurston (citado por Jo Boaler, 2016) “Las matemáticas son increíblemente comprensibles: puede ser que te esfuerces mucho tiempo, paso a	La autora del texto toma la cita de Thurston ya que evidencia en qué consiste el proceso conceptual que se lleva a cabo en nuestro cerebro. La comprensión

		paso, para trabajar en el mismo proceso o la misma idea desde varios enfoques. Pero una vez que realmente entiendes eso y tienes la perspectiva mental que te permite verlo como un todo, a menudo se produce una tremenda comprensión mental. Puedes archivar ese contenido, recuperarlo totalmente y con rapidez cuando lo necesites y utilizarlo como un solo paso en algún otro proceso mental. La comprensión que acompaña a esta comprensión es una de las verdaderas alegrías que nos aportan las matemáticas. (Thurston, 1990)" (p.69)	es de los procesos más complejos que podemos tener a la hora de aprender la matemática, al mismo tiempo es un proceso en el que se aprenden conceptos o conocimientos nuevos ocupando un gran espacio en el cerebro, mientras se da el proceso de comprensión; una vez este es completado, se vuelve intuitiva la comprensión de otros para repetir el proceso.
Intuición en ciencias y matemáticas.	Efraím Fischbein (1987)	"En una primera fase, en la historia de la ciencia y la filosofía la tendencia principal era considerar la intuición como una fuente o un método para obtener un conocimiento absolutamente fiable. Pero se fueron acumulando más y más hallazgos que	Uno de los autores que consideramos principales para nuestro trabajo es Fischbein, ya que en su libro *intuición en ciencias y matemáticas*, no solo nos habla de esos conceptos que se adquieren por medio de la experiencia, sino que también

		apuntaban a que las teorías y representaciones, antes consideradas como eternas y absolutas, debían abandonarse y que debían aceptarse interpretaciones diferentes y contraintuitivas" (p. 12)	nos habla sobre estos conceptos que son contraintuitivos, aquellos que no son fáciles de comprender, de deducir e intuir; son estos quienes conforman los conceptos que se consideran abstractos.
El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas.	Juan D. Godino, Carmen Batanero y Pablo Flores (2003)	"Borovcnik y Peard (1996) indican también que existen resultados contraintuitivos incluso en conceptos muy elementales, mientras que en otras ramas de la matemática los resultados contraintuitivos no se encuentran hasta que se llega a un alto grado de abstracción. Por ejemplo, el hecho de que al haber obtenido una racha de cuatro caras seguidas al lanzar una moneda no afecte la probabilidad de que la siguiente moneda sea una cara, es contraintuitivo." (p. 4)	Los conceptos contraintuitivos se pueden encontrar en cualquier área del conocimiento; en este caso particular hablaremos de estos en las matemáticas. Inicialmente, se puede pensar que los conceptos contraintuitivos son relativos a cada persona, si pensamos en lo más básico de las matemáticas y en niños que no hayan tenido ningún acercamiento a la misma; podemos evidenciar que, al organizar un conjunto de objetos, se les dificultará seleccionar los objetos por diferentes características (tamaño, forma, color, grosor, entre otros).

La intuición y la matemática.	Claudia López (2007)	"Las intuiciones, una vez establecidas, están arraigadas firmemente. La instrucción formal que provee al estudiante el conocimiento conceptual tiene muy poco impacto sobre el conocimiento intuitivo. Las intuiciones erróneas pueden convivir junto a las interpretaciones conceptuales correctas toda la vida. La supervivencia de las contradicciones entre lo intuitivo, las representaciones y los conceptos científicamente adquiridos es una permanente fuente de dificultades para el profesor." (p. 3)	Lo contraintuitivo son los conceptos que no se comprenden con facilidad o que a pesar de una explicación profunda los estudiantes se quedan pensando en que esos conceptos no se deducen fácilmente. Es allí donde muchos recurren a la mecanización para intentar generar la comprensión de estos conceptos que van en contra de lo intuitivo. El impacto que tienen estos conceptos en ocasiones tiende a ser mayor, ya que, al ser más complejos, los estudiantes empiezan a complejizar el aprendizaje de los conceptos matemáticos contraintuitivos, lo que genera dificultades.
Consideraciones sobre la noción de intuición matemática.	Lina María Peña Páez (2020)	"Ahora bien, la historia de las matemáticas ha mostrado que luego de la revolución copernicana, el auge de las geometrías no euclidianas, Cantor y el concepto de infinito real y	La historia y su evolución han aumentado los conceptos contraintuitivos, la ciencia y en especial las matemáticas, están compuestas por estos. Lo contraintuitivo es todo aquello

		otros hallazgos, la comunidad científica ha identificado que la intuición no siempre es evidente, ni garantía de verdad, ni mucho menos sinónimo de certeza. De hecho, "conceptos no intuitivos o contraintuitivos han invadido cada vez más la ciencia y las matemáticas" (p. 10)	que no es evidente, no genera certeza, ni mucho menos es autoevidente, por lo cual se vuelve más complejo el aprendizaje de estos. Es por estos motivos que los maestros deben buscar estrategias para que estos conceptos no interrumpan el aprendizaje de los diversos conceptos del área de matemáticas y, por el contrario, se conviertan en detonantes de comprensión.

Nota. Citas que aportan al trabajo investigativo.

1.6.2 Acerca de los Números Racionales

La tabla a continuación estructura de manera sintetizada los aportes de ciertas investigaciones que se han dado alrededor del concepto de número racional, mostrando las dificultades que acarrean a estudiantes en entornos de desarrollo mecanicista, de razonamiento y de intuición, y que han sido orientadas desde la representación que se le otorga y los limitantes generados desde la construcción de sus conceptos adyacentes. Así, los autores realizan un análisis inquisitivo de la construcción y cambios en el aprendizaje de los números racionales.

Tabla 2

Antecedentes Acerca de los Números Racionales

Título del trabajo	Autores	Citas para destacar	Aportes de los investigadores
		"La instrucción sobre los números racionales positivos, ocupa una parte	Esta investigación muestra las dificultades que se tienen en

Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria.	Rafael Escolano Vizcarra. José María Gairín Sallán. (2005)	muy destacada de la aritmética que figura en los currículos oficiales de la Enseñanza Primaria en España. Sin embargo, un estudio del INCE con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años) concluye que "son casi tres de cada cuatro los que tienen dificultad para comprender el concepto de fracción y operar con fracciones" (p. 1)	cuanto a la conceptualización de los números racionales, a pesar de la apropiación que los docentes tienen en cuanto a la temática, pues la dificultad radica en el uso operativo que se le otorga, dejando el trasfondo de las definiciones y argumentos que con estos se desarrollan.
Tendencias en la educación matemática basada en la investigación.	Lidia Aurora Hernández Rebollar. José Antonio Juárez López. Josip Slisko Ignjatov. (2015)	"A propósito de las dificultades conceptuales relativas al argumento fracciones, una posterior complicación cognitiva está constituida, como ya vimos en distintas ocasiones, por el adjetivo "igual": "dividir una unidad en partes 'iguales'" es la solicitud preliminar a cualquier aproximación sobre las fracciones" (p. 28)	Estos autores muestran en su investigación otras dificultades aparte de la definición misma del número racional y es el hecho de que se tienden a confundir los conceptos de los números racionales (razón, proporción, división y cociente) en la que no se establece la diferencia entre estas, sino que se percibe como una misma estructura.
Representaciones semióticas del número racional.	Claudia María Campuzano. (2017)	"Los números racionales son aquellos que podemos representar por fracciones, pero no es esta la única forma de representarlo.	La autora conduce con su escrito hacia los fundamentos básicos de la construcción del número racional, haciendo

		También podemos hacerlo a través de los decimales, los porcentajes, la notación científica o en forma mixta. Por ejemplo, el número racional que expresa la relación entre un cuadrado y un rectángulo formado por dicho cuadrado y su mitad puede representarse por 3/2 ó 1,5 ó 150% 1 ½" (p. 23)	comparaciones entre las distintas clasificaciones y/o representaciones que se le da a ellos, asumiendo una posición crítica en cuanto a su significado mismo.
Tres enfoques para enseñar los números racionales en el séptimo grado de educación primaria.	Adriana Lucía Pérez Schmalvach. (2011)	"Por número entendemos, no tanto una multitud de cantidades, como la razón abstracta de cualquier cantidad a otra cantidad de la misma clase que tomamos por unidad. Un entero es lo que es medido por la unidad, una fracción es aquello a lo que una parte es submúltiplo de la unidad y un sub, aquello que es inconmensurable con la unidad" (p. 7)	Esta investigación contribuye a enfatizar el argumento de razón abstracta que se tiene en cuanto a la infinidad de números racionales y la posición que se estableció al momento de dar una estructura a este conjunto numérico, pues se habla de la infinidad en cuestiones de representación y en semejanza dentro de su conceptualización.
Números racionales.	Verónica Saldaña Caro.	"El conjunto de los números racionales se caracteriza por ser infinito, ordenado y denso. El símbolo Q denota al conjunto de los números racionales y proviene de la	Los autores involucran de manera implícita la propiedad de densidad de los números racionales, dando paso a las aproximaciones que se dan al momento de generar las

	Nicolás Melgarejo Sabelle. (2019)	palabra inglesa 'quotient' que significa cociente" (p. 2)	múltiples representaciones y al concepto generado a partir de la unión y expansión del número racional a medida que se conocen sus propiedades.

Nota. Citas que aportan al trabajo investigativo.

1.6.3 Acerca de la Intuición

En la tabla 3 se podrán encontrar algunos antecedentes sobre la intuición desde el punto de vista de varios autores, quienes indican su importancia para la comprensión conceptual de los estudiantes y cómo se pueden estimular para generar un aprendizaje significativo. En esta investigación se consideró de suma importancia la intuición para la comprensión conceptual, ya que permitió la enseñanza de las matemáticas de forma significativa, dando oportunidad a analizar los procesos de comprensión del concepto de los números racionales y abriendo nuevas estrategias para su enseñanza.

Tabla 3

Antecedentes Acerca de la Intuición

Título del trabajo	Autores	Citas para destacar	Aportes de los investigadores
Intuición en ciencias y matemáticas.	Efraím Fischbein (1987)	"La mayor parte de nuestra información: datos numéricos, nombres, fórmulas, teoremas, leyes científicas, se aceptan por pruebas o porque están respaldados por la autoridad de un libro de texto o de un maestro, pero no se sienten como creencias intrínsecas. No son	En este capítulo, el autor principalmente quiere dar a conocer la importancia de la intuición en la educación y cómo ésta permite que el estudiante sea un poco más autónomo a la hora de adquirir el aprendizaje, de entender los temas y comprender los conceptos.

		cogniciones aceptadas intuitivamente.” (p. 46)	
Intuición en ciencias y matemáticas.	Efraím Fischbein (1987)	“El papel esencial de un modelo intuitivo es, entonces, constituir un dispositivo intermedio entre lo intelectualmente inaccesible y lo intelectualmente aceptable y manipulable. El modelo tiene que codificar los datos del original (propiedades, procesos, relaciones), en sus propios términos específicos e intuitivamente aceptables. El problema se resuelve en términos del modelo y se reinterpreta en términos del original.” (p. 123)	La intuición permite que el aprendizaje se lleve a cabo por medio del aprendizaje significativo y en el que se les indican las bases a los estudiantes para que puedan resolver futuros problemas de manera intuitiva. Fischbein habla de modelos que son dicotómicos, para que se dé uno, debe necesariamente existir el otro, dando paso a un mejor desarrollo intuitivo.
Mentalidades matemáticas.	Jo Boaler (2016)	“¿Qué es lo que llamamos intuición? ¿Y por qué los matemáticos usan la intuición cuando los estudiantes rara vez lo hacen en las aulas? Los profesores pueden alentar a sus alumnos a usar la intuición con cualquier problema de matemáticas; para ello basta con que les pregunten qué creen que funcionaría antes de enseñarles un método. En todos los	La autora habla principalmente sobre la importancia de que los maestros impulsen el pensamiento intuitivo de los estudiantes, que éste se puede dar por medio de metodologías didácticas, de preguntas, de acertijos y problemas en los cuales puedan pensar primero de forma intuitiva antes de mirar qué método es el apropiado

		niveles de la enseñanza hay oportunidades para que los alumnos piensen de manera intuitiva en relación con las matemáticas.” (p. 276)	para resolver los problemas o situaciones que se presentan en el área de matemáticas.
Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático.	Cecilia Crespo Crespo (2008)	“Aristóteles sienta las bases de la utilización de la intuición en la ciencia, al afirmar que toda ciencia tiene punto de partida en ideas y verdades absolutas, evidentes e indiscutibles, posteriormente se llega a nuevas verdades por medio de la razón. La intuición es, entonces, la fuente primaria del conocimiento. Los postulados y nociones comunes muestran su evidencia por medio de la intuición.” (p. 718-719)	Con esta idea se pretende valorar la intuición como un eje fundamental en la enseñanza de la ciencia, en especial de las matemáticas, ya que todos aprendemos por medio de la experiencia y es ésta la que permite que la intuición se desarrolle, siendo más inmediata cada vez que se enfrenta a un campo ya conocido o similar a lo que rodea a las personas, su entorno y diario vivir.
Berson, Las matemáticas y el devenir.	Miguel Espinoza (1996)	“La intuición es un contacto inmediato entre el organismo y la cosa. El organismo llega a ser la cosa conocida. Estas observaciones sobre la intuición son justas, aunque habría que reconocer también el valor científico de los formalismos: en una palabra, permiten controlar, a	El individuo aprende inicialmente por medio de la experiencia, ésta es la que permite la evolución de la intuición. Lo que antes se creía desconocido, con el tiempo se vuelve algo natural, tanto por la realización experimental continua, como por la mecanización que sí o

	su vez, la intuición, fijar lo conocido y generar nuevas proposiciones.” (p. 240)	sí existe en la ciencia, especialmente en las matemáticas.

Nota. Citas que aportan al trabajo investigativo.

Capítulo II. Marco Referencial

En este capítulo se realizó un rastreo sobre las dinámicas educativas de la Institución Educativa ALFREDO COCK ARANGO donde se desarrollaron las prácticas pedagógicas docentes, lo que consolida el marco contextual; se hace una revisión de los Lineamientos curriculares, los DBA, los Estándares Básicos de Aprendizaje y la Ley General de Educación como marco legal; y con respecto al marco conceptual y teórico, se profundiza sobre el por qué la investigación se enfoca en el saber específico de los números racionales y el cómo se da el proceso de recolección de información teórica sobre el objeto de estudio.

2.1 Marco Contextual

Se destaca el papel que la Institución cumple dentro del trabajo de grado, por lo que es importante dar a conocer su historia, su ubicación, y, sobre todo, el papel institucional que cumple, ya que ha sido un pilar fundamental para los resultados del trabajo de grado.

La institución educativa Alfredo Cock Arango está ubicada en la Carrera 72 # 99-55, en la comuna 6 de Medellín entre los barrios Castilla y Pedregal, y empezó a prestar sus servicios educativos desde el año de 1963, cuando la junta comunal del barrio Castilla vio la necesidad de organizar una Institución Educativa que llegara hasta el nivel de secundaria; entonces se creó el colegio nombrado en ese entonces como Rafael Núñez, inicialmente de carácter privado, pero dentro de su misión estaba poder oficializar la institución para hacerla más asequible a toda la comunidad.

En el año 2001 surge la ley 715, que dentro de sus decretos da la orden a las entidades territoriales de prestar los servicios educativos en el nivel de preescolar, básica y media proceso de legalización que permite reconocerla oficialmente como Institución Educativa Alfredo Cock Arango por parte de la Secretaría de Educación de Medellín a partir del año 2002 hasta el día de hoy.

Desde que se reconoce como Institución Educativa, tiene la intención de formar a sus estudiantes en competencias y habilidades que vayan más allá del nivel medio académico, por lo que se formaliza oficialmente la media técnica en diferentes convenios, en algún momento con la escuela superior de mercadotecnia y su especialidad en gestión de negocios; ya en el 2005 se hace el convenio con el SENA con el fin de dar inicio a diferentes ciclos para que los estudiantes puedan iniciar niveles que permiten adelantar su formación a través de cursos técnicos, tecnológicos y profesionales; también es importante reconocer que dentro de la Institución se manejan los Ciclos Lectivos Integrados Especiales en la educación formal (CLEI), que permite que las personas adultas o jóvenes que están atrasados en su proceso de formación puedan adelantar sus estudios académicos.

La Institución Educativa dentro de su propuesta formativa tiene la misión de ofrecer una formación integral para buscar el bien común de cada uno de sus estudiantes, esto desde un enfoque humanístico, técnico e inclusivo, para poder cumplir con las necesidades de la comunidad que hace parte de este espacio educativo, implementando valores y principios donde puedan surgir aprendizaje en los jóvenes en el ser, el saber y el saber hacer, desde distintas habilidades humanas, académicas y técnicas, con el fin de hacer que los estudiantes tomen posiciones críticas dentro de su formación académica y del lugar que ocupan en la sociedad.

Desde su estructura institucional, la Institución Educativa Alfredo Cock Arango cuenta con 1000 estudiantes aproximadamente en la jornada mañana, tarde y nocturna, ofreciendo formación en los niveles de educación preescolar, básica, media y técnica; actualmente en el año lectivo 2022 se cuenta con tres periodos académicos y la intensidad horaria en el área de matemáticas es de 5 horas a la semana; en recursos humanos la institución cuenta con tres docentes directivos, el rector René Alejandro Londoño Cano, el coordinador de la jornada de la mañana, licenciado Jhon Jairo Preciado Correa y el coordinador de la jornada de la tarde, licenciado Héctor de Jesús Santa Valenzuela; también cuenta con el servicio de 36 docentes, una maestra de apoyo, dos psicólogas, dos secretarias y una bibliotecaria; todos cumpliendo su labor con el fin de contribuir a la formación de estudiantes con niveles académicos y actitudes personales de calidad.

2.2 Marco Legal

El marco legal que se presenta, parte de la Ley General de Educación de 1994, los Estándares Básicos de Competencias, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y los lineamientos curriculares del área de matemática que rigen los espacios educativos colombianos.

2.2.1 Ley General de Educación

La Ley General de Educación señala las normas generales que regulan el sistema educativo colombiano, cumpliendo una función social desde las necesidades e intereses de las personas, familias y de la sociedad colombiana en general. En el Artículo 1º se menciona que el objetivo general está encaminado a lo propuesto en la Constitución Política de Colombia en su artículo 67, en el cual se resalta la importancia de la educación como un proceso de formación permanente, personal, cultural y social fundamentando una concepción integral de la dignidad, los derechos y deberes de cada individuo y reconociendo que formar a los estudiantes no solo consiste en transmitir saberes específicos, sino también formar su pensamiento crítico teniendo en cuenta la sociedad y el contexto en el que se desarrolla la educación.

A continuación, se presentan algunos de los artículos que se tendrán en cuenta en el desarrollo de la investigación.

Artículo 9º. El derecho a la educación. El desarrollo del derecho a la educación se regirá por la ley de carácter estatutario. (MEN, Ley General de Educación. Ley 115 de Febrero 8 1994, 2013)

Artículo 20º. Objetivos generales de la educación básica. Literal c. Ampliar y profundizar el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana. (MEN, Ley General de Educación. Ley 115 de Febrero 8 1994, 2013)

Artículo 22º. Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de secundaria. Literal c. El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, lógicos, analíticos, de conjunto, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana. **Literal f.** La comprensión de la dimensión práctica de los conocimientos teóricos, así como la dimensión teórica del conocimiento práctico y la capacidad para utilizarla en la solución de problemas. (MEN, Ley General de Educación. Ley 115 de Febrero 8 1994, 2013)

2.2.2 Estándares Básicos de Competencias

Los Estándares Básicos de Competencias constituyen parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr los niveles de calidad esperados que obtienen en su paso por un centro educativo. Como se menciona en el título de la investigación, los casos de estudio son tres estudiantes del grado 7º de la Institución Educativa Alfredo Cock Arango, con los cuales se aborda el trabajo de campo teniendo en cuenta el pensamiento numérico y sistemas numéricos, y el pensamiento variacional, para llevar a cabo las diferentes actividades propuestas en la metodología de la presente investigación.

A continuación, se enuncian aquellos estándares basados en los pensamientos matemáticos que se tendrán en cuenta para el desarrollo de esta investigación.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos.

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. (MEN, Estándares Básicos de Competencias de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 2006)
- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. (MEN, Estándares Básicos de Competencias de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 2006)
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números (de igualdades, desigualdades, adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación). (MEN, Estándares Básicos de Competencias de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 2006)

Pensamiento variacional

- Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan. (MEN, Estándares Básicos de Competencias de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 2006)

2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) constituyen el conjunto de aprendizajes que complementan los Estándares Básicos de Competencia con cuales los niños, niñas y jóvenes construyen por medio de las interacciones que establecen con el mundo, y por medio de experiencias que se obtienen a través de los ambientes pedagógicos en los que están presente el juego, las actividades artísticas, las propuestas didácticas, entre otros. Analizando los DBA del grado 7º del área de matemáticas, se evidenciaron tres que se corresponden con el desarrollo de las actividades en torno a los números racionales.

Comprende y resuelve problemas, que involucran los números racionales con las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación) en contextos escolares y extraescolares. (MEN, Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016)

Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones y decimales) y los emplea con sentido en la solución de problemas. (MEN, Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016)

Utiliza diferentes relaciones, operaciones y representaciones en los números racionales para argumentar y solucionar problemas en los que aparecen cantidades desconocidas. (MEN, Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016)

2.2.4 Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Al analizar los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se encontró que la comprensión de las relaciones entre las operaciones juega un papel importante para el desarrollo del trabajo de grado, ya que, para poder comprender el concepto de los números racionales es necesario interiorizar y aprender significativamente todo lo relacionado con las operaciones que se pueden dar entre este tipo de números. De igual forma, se observaron y analizaron los efectos que tienen los conceptos contraintuitivos que pueden afectar dicha comprensión. Así mismo, se tuvo en cuenta los siguientes tipos de comprensión matemática:

Comprensión de las propiedades matemáticas de las operaciones.

Comprensión del efecto de las operaciones.

Comprensión de la relación entre operaciones.

Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones.

Aplicación de números y operaciones.

Comprensión de las relaciones entre el contexto del problema y el cálculo necesario.

2.3 Marco Conceptual

Los números racionales son un conjunto numérico que en este trabajo se aborda a partir de conceptos intuitivos y contraintuitivos, en los que se presentan definiciones, clasificaciones y estructuras enfocadas a entender las dificultades que se pueden presentar en el proceso de comprensión.

Un número racional (Q) viene expresado de distintas maneras, como cociente, fracción o decimal; según su estructura se establece un concepto y representación numérica, donde se encuentran los aspectos básicos-generales de este conjunto. Por otro lado, gracias a la necesidad de establecer un conjunto numérico más completo que los números enteros (Z), se empezó a realizar un estudio enfocado en cubrir los vacíos existentes entre un par de números enteros consecutivos, más que en la extensión misma de este conjunto, lo cual permite hablar de lo que se conoce como "densidad de los números racionales", que en otras palabras no es más que el conjunto de los racionales. En este sentido, se empiezan a generar ideas contraintuitivas que permiten reconstruir el significado matemático de los conjuntos numéricos, en los que la inconmensurabilidad es el eje principal para desarrollar las estructuras cognitivas del estudiante; si bien es imposible conocer la totalidad de números existentes entre otros dos pares cualesquiera, por lo menos se debe saber interpretar, representar y conocer algún conjunto finito de ellos.

Existen otras investigaciones que afirman que el conjunto de los números racionales resultó de la necesidad que se tenía de repartir o dividir una unidad en distintas partes; en ellas se menciona más que una estructura, la operación de división en la que se reconocen los términos y su finalidad en la aplicación en contexto de los números racionales. A partir de esta operación se establece una relación en lo que hoy se conoce como modelación matemática y la resolución de problemas aplicados; a partir de esta construcción se definen ecuaciones de tipo AX + B, que con los números enteros era casi imposible resolverlos, encontrando que el conjunto de los números racionales aún sigue siendo discontinuo y que hay otros valores entre ellos que fueron nombrados números irracionales.

Uno de los primeros acercamientos que se presentaron en torno a este conjunto, lo hizo el científico Richard Dedekind (1993), quien afirmó que "todo número racional produce una cortadura (A,B) en el sistema de los números racionales **Q** (es decir, **Q** es unión disjunta de los subconjuntos no vacíos A y B, siendo todo elemento de A menor que cualquier elemento de B)" en el que se inicia con el concepto de continuidad y termina con la definición de completitud, integrando aspectos procedimentales de índole informativo, como el hecho de afirmar que para cualquier punto localizado en la recta numérica, siempre va a existir un valor que se le puede asignar a éste.

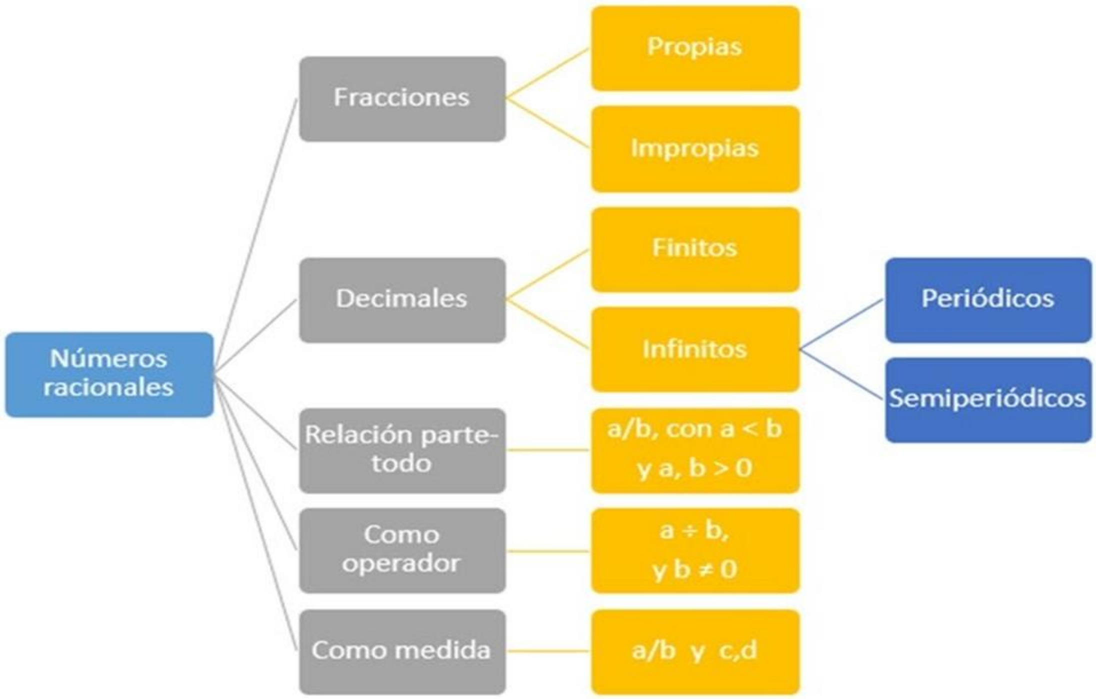
2.3.1 El Número Racional como Parte-Todo

Es una de las nociones más usadas para representar un número racional y de las más conocidas por las personas en cuanto que su uso se basa en una relación establecida entre el todo y sus partes; su forma matemática permite controlar la parte en que una unidad tiene sus divisiones y las cantidades que de estas se pueden obtener, es por ello que se inicia con la denotación de que b será quien indique las partes en que la unidad estará dividida equitativamente y a, las partes que serán escogidas de éste, lo que se representa como a/b. Se empieza a argumentar la diferenciación entre este tipo de notación, en las que se producen los conceptos de fracciones propias e impropias.

En este sentido, Pérez (2011) afirma que "enfocar las fracciones desde el punto de vista parte-todo es algo bastante limitado no solo fenomenológicamente sino también matemáticamente- este enfoque produce solo fracciones propias (Freudenthal, 1995)" definición que se encuentra en el texto –tres enfoques para enseñar los números racionales en el séptimo grado de educación básica- y que permite ver el desbalance entre lo que constituyen los números racionales y su comprensión. Por otro lado, la cotidianidad misma de ella ha reforzado su estructura, en cuanto que cotidianamente o en términos coloquiales, esta relación parte-todo se usa cuando decimos "media cucharada de azúcar" o "un cuarto de pollo"; todas estas expresiones son las que iniciaron la posibilidad de construir un campo, en el que se permita hacer operaciones que contribuyan a la interpretación de estos datos. Es así como se inicia con la estructura conceptual de los números racionales y sus distintas características, lo cual se resume en la **Figura 1.**

Figura 1

Representaciones de los Números Racionales



Nota. Adaptado de Números Racionales, (Saldaña y Melgarejo, 2019).

2.3.2 El Número Racional como Operador

En este sentido, cuando tomamos un número racional como un operador ya se empieza a generar otro tipo de interpretación a su significado, en cuanto se abarca cualquier cantidad que pueda tener la estructura y que a su vez modifique cualquier número n, "esta transformación se logra mediante la realización de dos asociaciones: multiplicar la cantidad inicial por el número entero del numerador y dividir el resultado por el número entero del denominador" (Escolano & Gairín, 2005), lo que implica directamente dos operadores: la multiplicación y la división, que según sea el caso, puede amplificar o reducir la cantidad dada inicialmente.

Los números racionales como operador empiezan a tener un dinamismo procedimental de carácter conceptual, pues ya no se habla únicamente de una estructura asignada a una circunstancia, como el caso anterior, sino que se genera un sentido cambiante dado que se presenta una cantidad inicial y esta se opera para obtener un producto final, el cual es una transformación a partir de los números racionales como operador.

2.3.3 El Número Racional como Medida

Los números racionales como medida se representan como parte-todo o como decimal en el sentido de lo conmensurable. Es a partir de esta construcción y de la necesidad de dividir una cantidad en partes exactamente iguales que nace este enfoque, pues implica distribuir la significación del resultado en correspondencia con un único decimal que puede ser expresado por la relación parte-todo $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Para entender esto, es importante hacer una breve distinción entre las connotaciones parte-todo y medida; veamos el siguiente ejemplo: "Una cosa es tener una botella graduada de 1 litro y decidir llenar los 3/4, y otra bien distinta es tener una botella de vino que ya tiene como medida 0,75" (Hernández y otros, 2015), porque es más complicado interpretar la medida de un volumen expresado en relación parte todo $\frac{a}{b}$, que entenderlo como una medida vista en decimal a,b, pues su lenguaje regular se enmarca en esta última representación. Esto da a entender que, aunque las expresiones que se mencionan sean correctas, por lo general existe un lenguaje pertinente según el contexto en el que se use, afirmar que un niño tiene una estatura de 0,75 metros o que un niño tiene una estatura $\frac{3}{4}$ de metro tiene el mismo significado final, pero su expresión cotidiana hace que la idea de representarlo como parte-todo no sea oportuna.

2.3.4 Densidad de los Números Racionales

Con anterioridad, se ha mencionado que el conjunto de los números racionales es infinito en toda su extensión, pues estos intentan llenar todos los vacíos que deja el conjunto de los números enteros. Pero bien, este tipo de expresión es un poco más maleable en el sentido de que se puede comprender con mayor facilidad al intentar ubicarlos en la recta numérica y ver que no es posible terminar, pero, lo que empieza a dar un poco de dificultad es la idea de que "entre dos números racionales cualesquiera, siempre va a existir una infinidad de números racionales" a partir del orden en que este conjunto se establece.

La idea de infinidad entre dos números racionales cualesquiera (propiedad que se le conoce como densidad de números racionales) es un aspecto que caracteriza a este conjunto numérico. Esta noción surge con la necesidad de completar todos esos vacíos que dejan los números enteros (no siendo suficiente con el conjunto de los números racionales), motivando a la construcción equitativa de una recta numérica. Entre los números racionales es conocido que se puede establecer un orden, sin embargo, intuitivamente no es fácil percibirlo, pues ante la pregunta ¿Cuáles son los números racionales que están entre…? Se puede tender a pensar que es fácil encontrarlos, pero como ya se ha establecido una configuración y una noción de este concepto, se puede decir que es imposible conocer todos y cada uno de estos elementos, pues al existir una infinidad de ellos y no existir un modelo que permite calcularlos, se deduce que la respuesta inmediata será –no es posible encontrar todos estos valores, cosa muy distinta si la idea cambia con el propósito de identificar 10 números racionales que están entre… Aquí la respuesta sí es posible, pues se está acotando la densidad de este conjunto al cálculo de un número determinado de números racionales.

2.4 Reportes Teóricos

2.4.1 La Educación Matemática

La educación matemática es concebida como una disciplina que tiene su origen en la caracterización de actividades práctico-teóricas que están presentes en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, compuesta por una componente heurística, un marco teórico y la sistematización de resultados. El conocimiento matemático es necesario, pero no suple la interpretación de la disciplina, es aquí donde la educación matemática inicia su papel más importante, ya que la disciplina está organizada alrededor de los núcleos conceptuales, más conocidos como "teoremas".

La educación matemática pretende profundizar en el desarrollo cognitivo, el cual se basa en la interacción que existe entre la práctica y la teoría, es decir, busca nuevas estrategias para la enseñanza de diversos conceptos matemáticos, realizando así actividades didácticas con las que se usan varias herramientas para transmitir el conocimiento. Además de transmitir conocimiento, su objetivo principal es que los estudiantes tengan un aprendizaje significativo que puedan aplicar en su día a día.

Piaget es uno de los principales autores que aporta a la educación matemática y desarrollo cognitivo de los niños, creando los periodos o estadios piagetianos, con los cuales establece que los estudiantes tienen la capacidad de pensar por sí solos. Afirma que a medida que van madurando su organismo, lo hacen de igual forma con el pensamiento, desde lo que conocen innatamente y lo que van asimilando cognitivamente, en otras palabras, la intuición se va formando en ellos a medida que se enfrentan a los diferentes conocimientos que aprenden, tanto en la escuela como en su día a día.

De lo anterior, se puede decir que Piaget pretende que los estudiantes desarrollen su conocimiento por medio de las experiencias diarias; por otro lado, se considera pertinente que los docentes con estas nuevas estrategias que propone la educación matemática les den la autonomía a sus estudiantes sobre los contenidos y conceptos que estén aprendiendo. “Esto requiere que los estudiantes puedan entrar en una actividad intelectual y que ellos estén convencidos de que esto vale la pena, no sólo desde el punto de vista de su inserción en la escuela, sino también desde un punto de vista social y cultural.” (Douady, 1995)

Por tanto, el docente debe asegurar que los estudiantes dispongan de los materiales y/o herramientas con los que se llevará a cabo el desarrollo cognitivo; para “Brousseau, la devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctico) o de un problema, y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.” (Douady, 1995). Es decir, se da la libertad para que los estudiantes se vuelvan autónomos en su desarrollo cognitivo, analizando de igual forma que no todos aprenden de la misma manera, por tanto, se requieren de diversas estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de la educación matemática.

En esta misma línea se visualiza la psicología piagetiana, que menciona la equilibración de las estructuras cognitivas, las cuales son de suma importancia para el desarrollo cognitivo. Además, el desarrollo cognitivo tiene tres características importantes para la formación intelectual de cada individuo, estas son: programa inicial, condiciones particulares de existencia y unidad central de procesos que posibiliten la lectura y la realización de programas; para que estas características actúen coordinadamente es necesaria la autorregulación del sistema para que exista una armonía en éste. De este modo, Piaget propone una secuencia de procesos de equilibración en el cual resalta los tres aspectos que se evidencian en la **Figura 2.**

Figura 2
Proceso de Equilibración

Nota. Adaptado de Psicología piagetiana y educación matemática, (Nortes y Martínez, 1994).

Resumiendo, lo que Piaget quiere dar a entender es que cada nivel da lugar a nuevas equilibraciones conllevando a regulaciones de un rango superior, donde se prolonga el nivel de partida, mediante la abstracción reflexiva. Aun así, el nivel superior es un regulador que controla las regulaciones de los niveles anteriores, es decir, cada que se avanza de un nivel a otro su desarrollo cognitivo se vuelve más innato y se podrá recurrir a él en cualquier momento que se considere o necesite para propiciar un nuevo conocimiento o saber. A esto, Piaget lo denomina el producto de reflexión que "representa el prototipo de una regulación de regulaciones, pudiendo considerar como una regulación que regula todo lo que las regulaciones anteriores han dejado insuficientemente regulado. (Piaget, 1978)" (Nortes & Martínez, 1994)

2.4.2 La Comprensión

El fundamento principal de todo razonamiento lógico e intuitivo es la comprensión, vista como un modo de entender lo que sucede a nuestro alrededor. Desde este punto de vista se inicia con los fundamentos en la comprensión de los números racionales, al hablar del término que da paso a la comprensión matemática; por eso es importante reconocer la importancia que tiene el comprender y el saber hacerlo dentro de las operaciones de los números racionales.

En las aulas de clases, el deber del maestro es impartir conocimiento de tal manera que los estudiantes lleven un proceso de aprendizaje enriquecedor, por tanto, es fundamental desarrollar un trabajo que sea práctico, didáctico y que genere dentro de ello la intuición para la solución de problemas; es por eso que las actividades se fundamentan en procesos didácticos e intuitivos que permiten que los estudiantes creen estrategias y habilidades; como dice Torres, “es evidente que el trabajo matemático no sólo consiste en desarrollar rigurosos argumentos. Tal como lo señala Pólya, en él se hallan presentes muchas otras cosas como la observación de casos y su generalización, el análisis de figuras, el manejo informal o intuitivo de los objetos, la puesta en juego de la imaginación, razonamientos por analogía y uno que otro chispazo divino (súbitas ocurrencias) que preceden a la lógica” (Torres, 2016); hay que entender que a partir de ese momento en el que se enseña y de la manera en la que se hace, inicia el proceso de comprensión y la personificación de saberes en cada uno de los estudiantes. Es importante reconocer que cuando se refiere a comprender, no se necesita un resultado riguroso, su objetivo es que los estudiantes entiendan la situación a la que se enfrentan y de esa manera puedan ser críticos para que en la búsqueda de respuestas puedan justificar esa situación en común.

Es importante reconocer que todo proceso o desarrollo de la comprensión debe estar en base a una teoría bien formulada, para la cual, la información que se maneje tenga contenidos en los que los estudiantes puedan reconocer las capacidades y habilidades propias, permitiendo la familiarización con el concepto y mediante eso se generen representaciones que sirvan como herramientas para facilitar el reconocimiento de ciertas temáticas o teorías.

Cuando se habla del tema de los números racionales, hay que tener claro que dentro de la explicación del tema y de su desarrollo, se puede observar y analizar cómo se forman conexiones mentales que permitan que el estudiante se desenvuelva a la hora de resolver ejercicios y problemas, mediante el uso de técnicas que surgen del análisis, la intuición y la comprensión de dicha explicación; en términos de Meel (2003): “Para un concepto particular como las fracciones, se puede suponer que al rastrear el crecimiento de la comprensión matemática, un estudiante llega a la situación de aprendizaje con una gran cantidad de información que puede o no dar forma a la evolución de la comprensión”.

Así, el proceso de comprensión complementa las respuestas de los objetivos iniciales que se tienen sobre cualquier unidad de aprendizaje, esto a través de la indagación, formulación o explicación de otros saberes; cuando se descubre algo se encuentran nuevos acontecimientos que si bien llevan a plantear nuevas ideas o técnicas de desarrollo, también se evidencian todas esas fallas y problemas que se presentan dentro de ese proceso de comprensión, esto conlleva a limitarse a seguir con el proceso de una idea errónea con la finalidad de que sea aclarada y que además se consiga que no hayan interferencias en el proceso de comprensión.

Finalmente, cabe resaltar que el desarrollo de la comprensión depende en primer lugar del trabajo, destreza, conceptualización y herramientas que cada maestro utiliza a la hora de impartir conocimiento en clases; eso involucra al estudiante a organizar y estructurar el aprendizaje de tal modo que se pueda demostrar que las diferentes prácticas matemáticas se dan desde la interacción, la intuición y la didáctica, consolidando una estrategia de trabajo que permite resaltar el desarrollo de la comprensión de cierta unidad de aprendizaje, controlando situaciones en las que los procesos contraintuitivos que surgen a partir de la mecanización y de otros aspectos, puedan verse de otro modo para propiciar un aprendizaje significativo.

2.4.3 Intuición

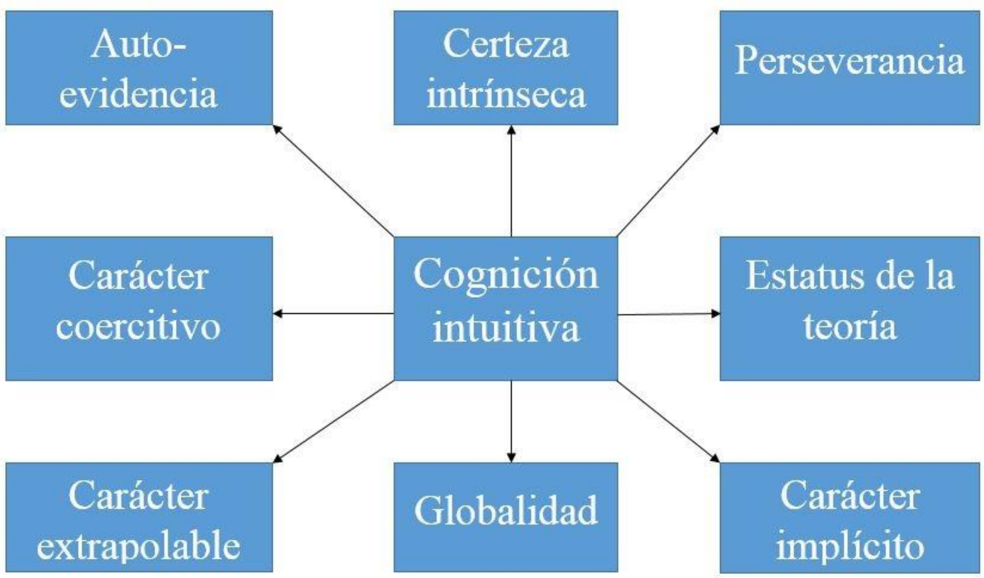
Desde la perspectiva de Fischbein con respecto a las características generales de las cogniciones intuitivas, se pudo observar que existen distintos tipos de pensamiento intuitivo que se pueden desarrollar en un sujeto que comprende y analiza distintos procesos orientados a partir de estructuras cognitivas; en este sentido, se empieza a considerar que el pensamiento de los estudiantes se ha deteriorado en torno a su intuición, pues su razonamiento se está enfocando estrictamente en el desarrollo de procesos mecánicos y procedimentales, donde el fin consiste en obtener el resultado sin razonar sobre las etapas que se dieron para llegar a él. Por lo anterior, se considera que la intuición debe jugar el papel de motivador y orientador al mismo tiempo, en cuanto que su uso despierta curiosidad y permite analizar situaciones desde distintos puntos de vista.

La intuición desde el enfoque de Fischbein, permite que el sujeto, a partir de la construcción de sus ideas, justifique lógica o empíricamente esos conceptos que son abordados en el área de matemáticas; estas estructuras condicionan la cognición del sujeto en torno a esas experiencias o vivencias que les acontece. Se percibe que esta forma de razonar en los sujetos se ha venido afectando por las interpretaciones de los otros, que en cierto modo tienden a direccionar el pensamiento hacia su forma de percibir el mundo, lo cual puede no ser errada, pero cohíbe a la persona de tener una capacidad intuitiva un poco mayor.

En este sentido, se empiezan a crear unificaciones de teoría que apuntan hacia un mismo pensamiento intuitivo (que en su sentido ya ha dejado de tener el carácter estricto de la intuición) en el que fenómenos y circunstancias asociadas a las ciencias son de índole lógico y demostrativo; es por esto que “el carácter global de la intuición recuerda el concepto de la Gestalt. La intuición es una cognición estructurada que ofrece una visión (o percepción) unitaria y global de una determinada situación” (Fischbein, 1987). Esta postura permite resumir los puntos de vista en una integración de percepciones e ideas generales. Por otro lado, es relevante reconocer que la intuición como cognición presenta características generales que se resumen en la **Figura 3.**

Figura 3

Características de las Cogniciones Intuitivas



Nota. Adaptado de Intuición en ciencias y matemáticas, (Fischbein, 1987)

Ahora bien, cuando se habla de la cognición intuitiva en el ámbito educativo, más exactamente en el área de matemáticas y, en profundidad, en el concepto de los números racionales, se generan controversias en cuanto al entendimiento de estos procesos, una de ellas es cuando se percibe la densidad de los números racionales y su orden, pues se dificulta en cierto sentido el modelo que se sigue para distinguir estas manifestaciones; así la intuición se plasma como un modelo que genera destrezas y habilidades en cuanto a la interpretación y aprendizaje de los procesos.

Una nueva significación se empieza a ampliar cuando los sujetos analizan a profundidad los conceptos que se tratan e interrogan por las circunstancias que rodean los modelos matemáticos y autorregulan su propio aprendizaje, por ello se menciona que “los modelos intuitivos son genuinamente beneficiosos con respecto a todos estos aspectos. Un modelo ofrece al solucionador un sustituto del original que, por sus cualidades, se adapta mejor a la naturaleza del pensamiento humano que el original” (Fischbein, 1987), abriendo paso al uso de modelos que se enmarcan, no en la repetición de éste, sino en la modificación profunda de los caracteres aprendidos; aquí, la conceptualización se convierte en el marco referencial de la persona y lo transforma en secuencias didácticas orientadas a suplir las necesidades estructurales de procesos matemáticos.

En general, el enfoque cognitivo de este modelo intuitivo proporciona fundamentos explícitos e implícitos, que ayudan a los sujetos a interpretar y crear de manera individual ideales que se distinguen por su autonomía y percepción propia; por otro lado, en el uso exclusivo del lenguaje matemático al mencionar que el conjunto de los números racionales tiene la misma extensión que los números naturales (igual cardinal), se empieza a generar otro tipo de modelo que se contrapone a la idea de lo intuitivo y al cual se concibe como contraintuitivo.

2.4.4 Conceptos Contraintuitivos

Los conceptos contraintuitivos son todos aquellos que no se aprenden por medio de la experiencia, de ejercicios prácticos, de actividades didácticas o de forma intuitiva, como su nombre lo dice, son conceptos que van en contra de lo que comúnmente se encuentra en el saber de la ciencia y en especial de las matemáticas; esto sucede ya que cada año se aprenden aplicaciones y teoremas que fundamentan la educación matemática. En este sentido, Fischbein afirma: “En una primera fase, en la historia de la ciencia y la filosofía la tendencia principal era considerar la intuición como una fuente o un método para obtener un conocimiento absolutamente fiable. Pero se fueron acumulando más y más hallazgos que apuntaban a que las teorías y representaciones, antes consideradas como eternas y absolutas, debían abandonarse y que debían aceptarse interpretaciones diferentes y contraintuitivas” (Fischbein, 1987).

Es así, como a medida que la naturaleza en las ciencias ha evolucionado, donde se encuentran conceptos que no se entienden a simple vista, se debe hacer un estudio más profundo en relación con éste. En la matemática regularmente se encuentran conceptos contraintuitivos que en los estudiantes empiezan a generar desconfianza sobre lo que ellos conocen intuitivamente. De esta forma, se puede decir que enseñar estos conceptos por separado, hace que se haga una brecha entre los conceptos, donde a los estudiantes se les dificulta relacionar las unidades de aprendizaje que recepcionan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que las matemáticas están conformadas por diversas ramas que estudian todos estos conceptos matemáticos y que se relacionan entre sí. La comprensión que hay inmersa en lo contraintuitivo es la que genera un estudio más profundo en estos conceptos en los que solo se nombran y se demuestran, sin justificar cuál es su importancia; muchas veces los docentes enseñan las fórmulas o los procedimientos para resolver y evitar la complejidad del aprendizaje de estos. “Borovcnik y Peard (1996) indican también que existen resultados contraintuitivos incluso en conceptos muy elementales, mientras que en otras ramas de las matemáticas los resultados contraintuitivos no se encuentran hasta que se llega a un alto grado de abstracción.” (Godino y otros, 2003).

Como se mencionó anteriormente, los conceptos contraintuitivos en las matemáticas son variados y pueden surgir por un proceso de abstracción, falta de conocimiento en el campo mismo o un mal manejo de los conceptos por parte de los docentes y estudiantes. En relación con lo anterior, se mencionan algunos conceptos que tienen un gran impacto contradictorio en las matemáticas: la densidad de los números racionales, el principio de orden de los números racionales, la propiedad arquimediana, la proporción, los fundamentos lógicos, los teoremas, las propiedades matemáticas, entre otros. Cada uno de los temas o conceptos mencionados antes, generan posiblemente en cada individuo un conocimiento que no es intuitivo.

“Dos ítems contradictorios de evidencia pueden coexistir y manifestarse alternativamente como tales. Al comparar el conjunto de los números naturales con el conjunto de los números pares, se siente por un lado que el conjunto de los números naturales tiene más elementos y por otra parte se sabe que los conjuntos son equivalentes (ambos conjuntos infinitos)” (López, 2007). De acuerdo con lo anterior, es natural que el individuo no sea capaz de justificar lógicamente lo que sucede en este caso que presenta López, así que la autoevidencia es aquí algo posiblemente contradictorio, porque una afirmación que se acepta comúnmente no siempre es verdadera.

Por otro lado, Fischbein presenta en su libro “Intuition in Science and Mathematics” las características generales del conocimiento intuitivo, que no siempre se pueden tomar como aplicables, ya que se relacionan con el desarrollo cognitivo que posee cada individuo. Estas características podrán contribuir a una comprensión de los conceptos contraintuitivos de una forma más amena, llegando al punto de volverlos intuitivos. La auto evidencia definida como aquellas declaraciones que son verdaderas por sí mismas, sin la necesidad de ninguna justificación; la certeza intrínseca entendida como aquella donde las personas tienden a pasar por alto la fragilidad de sus conocimientos y expresan gran confianza en sus soluciones e interpretaciones, incluso cuando no está justificado; la perseverancia comprendida como la instrucción formal que proporciona al estudiante conocimiento conceptual que tiene poco impacto en su experiencia intuitiva; el carácter coercitivo se define como la perpetuación de interpretaciones erróneas, renunciando a aceptar las correctas, incluso después de haber sido aprobadas lógicamente; el estatus de la teoría expresado como una representación particular, utilizando un modelo: paradigma, analogía, diagrama, etc.; el carácter extrapolable es entendido como aquel en el que el individuo llega a conclusiones sobre la base de información menos explicitas, que normalmente se requiere para llegar a esa conclusión; la globalidad trata sobre una visión directa y rápida, una visión sintética sin ningún análisis preliminar, que conlleva a una generalización de la teoría; el carácter implícito es aquel donde aparece, en general, para el individuo como cogniciones autoevidentes y auto consistentes; son las características mencionadas por Fischbein, quien además decía que para generar cogniciones intuitivas eran necesarias y más aún cuando se trabajan en relación unas con las otras. Así mismo, como se mencionó anteriormente, se convierten en un mecanismo para generar una forma diferente de aprender estos conceptos contraintuitivos.

Capítulo III. Metodología

En este capítulo se incorporan los elementos fundamentales que conforman la metodología, tales como: el enfoque cualitativo, diseño: metodología de experimentos de enseñanza (TEM), selección de la población, diseño del instrumento, recolección de la información y consideraciones éticas, que permiten el desarrollo y la aplicación de las actividades propuestas.

3.1 Enfoque Cualitativo

Este trabajo se desarrolló bajo el enfoque cualitativo, a partir de la construcción teórica que permitió dar fundamento a la pregunta y al objetivo de investigación, componentes que fueron reevaluados y modificados en el transcurso de la práctica docente realizada en la Institución Educativa Alfredo Cock Arango. Así mismo, dentro del proceso de investigación se evidenciaron sucesos, comportamientos y situaciones en los estudiantes que otorgaron modificaciones al trabajo de grado, dando paso a la característica primordial del enfoque cualitativo, que consiste en reevaluar constantemente cada uno de los pasos y secciones dentro de un trabajo investigativo. Así, el enfoque cualitativo no es lineal y permite que la investigación sea más interactiva.

El enfoque cualitativo tiende a estructurar y conocer los aspectos simbólicos que se trabajan en torno a la expansión y entendimiento de conceptos; su principal ideología se enmarca en recoger datos, estudiarlos, analizarlos y utilizarlos en los espacios que se consideren pertinentes. Dado que “Según Jiménez-Domínguez (2000) los métodos cualitativos parten del supuesto básico de que el mundo social está constituido de significados y símbolos. De ahí que la intersubjetividad sea una pieza clave de la investigación cualitativa y punto de partida para captar reflexivamente los significados sociales.” (Salgado, 2007), las investigaciones desarrolladas a través de este enfoque, tiene en cuenta la percepción del investigador y todos aquellos sujetos que, por medio de los instrumentos y las metodologías, permiten entender las dinámicas y dificultades al momento de comprender el concepto a trabajar.

Es importante reconocer que el enfoque cualitativo impulsa a crear un diseño metodológico para la investigación, de modo que sea flexible y abierto, con el fin de que en su desarrollo los participantes se puedan acomodar a las condiciones que el espacio va proporcionando, lo que permite elegir la metodología de experimentos de enseñanza (TEM) como la más adecuada para desarrollar el presente estudio, dado que permite analizar el aprendizaje en el contexto, tal como se muestra a continuación.

3.2 Diseño: Metodología de Experimentos de Enseñanza (TEM)

Para este trabajo se incluyen las ideas de Molina y otros (2011) sobre la investigación basada en diseño, la cual es de naturaleza cualitativa, que permite la implementación de formas de aprendizaje, estrategias y herramientas desde el contexto en el que se desarrolla la investigación; la muestra investigativa permite la reflexión sobre los conceptos desarrollados a partir de la metodología de experimentos de enseñanza, que hace parte del diseño investigativo. En coherencia con lo anterior, “Su objetivo es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación.” (Molina y otros, 2011). En la **Figura 4** se evidencian componentes que están inmersos en la ejecución de una investigación de diseño.

Figura 4

Investigación Basada en Diseño

Nota. Adaptado de Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza, (Molina y otros, 2011).

La metodología de experimentos de enseñanza (TEM), es el diseño el cual se desarrolló el presente estudio; en él se testean y generan hipótesis que se reevalúan durante episodios permitiendo un acto reflexivo constante en la realización de cada una de las fases que éste conlleva y que se pueden evidenciar en la Figura *5*. Así mismo, se da paso al investigador-docente para experimentar de primera mano el razonamiento, el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. “De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores” (Molina y otros, 2011).

Figura 5

Acciones a Realizar en Cada una de las Fases de un Experimento de Enseñanza

FASES	ACCIONES
Preparación del experimento	Definir el problema y los objetivos de investigación. Identificar los objetivos instruccionales. Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos. Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Diseñar la recogida de datos. Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje. Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.
Experimentación	
Antes de cada intervención	Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible. Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos. Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.
En cada intervención	Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.
Después de cada intervención	Analizar los datos recogidos en la intervención. Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.
Análisis retrospectivo de los datos	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: *a*) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. *b*) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.

Nota. Tomado de Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza, (Molina y otros, 2011).

Es importante considerar que los planteamientos propuestos en el TEM desarrollan en los docentes avances formativos dentro del ámbito educativo, en el cual, al obtener los resultados en cada una de las secciones, permite que las hipótesis se replanteen y se trabajen dentro del aula, con el fin de tener un acercamiento a las dificultades que se encuentran en el proceso de aprendizaje para desarrollar habilidades conceptuales por medio de la aplicación de diferentes instrumento para encontrar soluciones a las problemáticas detectadas.

3.3 Selección de la Población

Para la realización de este trabajo investigativo se seleccionaron tres estudiantes del grado 7º de la Institución Educativa Alfredo Cock Arango de la jornada de la mañana; Se tomó la decisión porque es en esta etapa que se da tratamiento a las nociones y conceptos de los números racionales, permitiendo encontrar o provocar conceptos contraintuitivos que dan desarrollo al análisis del objetivo general. Es de aclarar que el diseño de los instrumentos se llevó a cabo con la totalidad de los estudiantes del grado 7°, eligiendo para la recolección y el análisis de la información solo a tres de ellos; a continuación, se dan los criterios por los cuales fueron escogidos.

- El interés, la responsabilidad y la experticia al resolver cada una de las actividades propuestas.
- El diligenciamiento de los diferentes test.
- La constancia y asistencia al desarrollo de las temáticas.
- La capacidad para exhibir de manera natural conceptos contraintuitivos susceptibles de analizar.
- La participación constante en la que se asumen retos, lo que fue resaltado en gran medida para desarrollar la conceptualización.

Cuando se inició la práctica docente se evidenció cómo los estudiantes tenían temor de participar, además, como antecedió un año de clases virtuales, se les hacía difícil entrar en confianza con sus compañeros de clase. Es por esto que la motivación y la escucha ayudaron a que las actividades se llevaran a cabalidad, suscitando reflexiones tanto en el aula de clase como fuera de esta.

Reconociendo el proceso de selección de la población, el cual fue llevado a cabo bajo las normas de convivencia legales de la Institución Educativa, para así continuar con el proceso investigativo, se solicitaron los permisos a la institución, los padres de familia y los estudiantes, para que diligenciaran el consentimiento informado (Anexo 1, pág. 82) realizado y solicitado por parte de los practicantes-investigadores para el desarrollo del trabajo de grado.

3.4 Diseño de los Instrumentos

Actualmente, en la enseñanza de las matemática se pretende interpretar, analizar y proponer actividades orientadas a la evidencia de las dificultades conceptuales de los estudiantes, lo cual requiere de la construcción de instrumentos que justifiquen tanto el objeto de estudio como el objeto del saber específico, aspectos que se enmarcan en la estructura metodológica propuesta en la investigación; es importante tener en cuenta que para la recolección de información y análisis de resultados, se debe llevar una sistematización que permita definir una estructura para que sea aplicada a la muestra poblacional.

Así mismo, para darle aplicabilidad a la unidad de análisis de la investigación, es necesario definir un instrumento con el que se puedan evaluar dificultades y avances a los que se enfrentan los estudiantes en el proceso de comprensión de los números racionales, centrando la recolección de la información en la guía de aprendizaje abordada desde: el test diagnóstico, la guía experimental y la guía conceptual y/o test, los cuales son instrumentos que permiten el desarrollo, la evaluación, la recopilación y el análisis de los resultados en torno a la investigación.

Estos instrumentos fueron construidos y refinados con diferentes grupos de estudiantes durante la práctica pedagógica docente, y se consolidaron como el medio por el cual se hizo un riguroso análisis, evaluación y mejoramiento por parte de los investigadores, en concordancia con la metodología de experimentos de enseñanza. Al ser avalados y revisados por un experto (que para el caso particular es el director del trabajo) se dio paso a la implementación y aplicación a la muestra poblacional objeto de la investigación. Es importante aclarar que estos instrumentos fueron aplicados a una población que no había sido intervenida con anterioridad.

3.4.1 Guía de Aprendizaje

La guía de aprendizaje está definida en función de las guías didácticas, las cuales para Martínez Mediano (1998) “constituyen un instrumento fundamental para la organización del trabajo del alumno y su objetivo es recoger todas las orientaciones necesarias que le permitan al estudiante integrar los elementos didácticos para el estudio de la asignatura”. De esta manera se tuvo en cuenta aspectos importantes para la construcción de la guía de aprendizaje, en las que se pudo encontrar las siguientes funciones: motivadora, facilitadora de la comprensión y activadora de aprendizaje, orientación, diálogo y evaluación.

De este modo, la guía de aprendizaje como instrumento de investigación, se utilizó para recolectar, analizar e interpretar los datos obtenidos; su contenido está presentado desde el test diagnóstico, la guía experimental y la guía conceptual y/o test, estos se interpretaron respecto a los conceptos contraintuitivos que afectan la comprensión del concepto de número racional.

3.4.1.1 Test Diagnóstico

Es un primer acercamiento a las condiciones en que se encuentran los estudiantes con respecto a las consideraciones conceptuales, simbólicas, estructurales y representativas de los números racionales; con este test se pretende recolectar las ideas generales de los argumentos mecánicos y comprensivos, así como el surgimiento de ideas intuitivas y contraintuitivas en cada una de las interpretaciones que se dan a las preguntas planteadas; es a partir de estos planteamientos que se desarrollan diversas actividades, en las cuales los estudiantes puedan comprender intuitivamente el concepto de número racional, con el fin de realizar un primer análisis y reformulación de las hipótesis planteadas.

3.4.1.2 Guía Experimental

La guía experimental es una herramienta que permite orientar a los estudiantes en el estudio y desarrollo de la comprensión de los conceptos relacionados con los números racionales e identificar sus habilidades y dificultades en la solución de problemas, por tanto, se pueden contextualizar a través de situaciones concretas, en las que el estudiante pueda interactuar con lo que sucede a su alrededor, de tal manera que arroje resultados a la investigación, no con un objetivo en general, sino con el fin de enfrentar estos conceptos contraintuitivos que de cierta manera afectan la comprensión de dichos conceptos.

3.4.1.3 Guía Conceptual y/o Test

Dentro de este trabajo, la guía conceptual será interpretada como una herramienta educativa, en la cual están planteadas actividades como test de selección múltiple y preguntas problematizadoras que involucren cierta conceptualización de los números racionales; la intención es recolectar datos e información que permitan analizar la comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos involucrados en los números racionales, así como evidenciar los avances y dificultades que se presentaron a nivel conceptual y estructural a lo largo de su aplicación.

3.5 Recolección de la Información

Para la recolección de la información, se decidió realizar una propuesta didáctica en la cual se incluyeron los diversos instrumentos planteados para el desarrollo de la metodología llevada a cabo en el trabajo de investigación. Así mismo, se busca desarrollar contenidos interdisciplinares en los cuales los estudiantes puedan interactuar con el medio, para comprender conceptos que conoceremos como contraintuitivos y que afectan su aprendizaje. “La propuesta didáctica plantea la construcción de prácticas educativas innovadoras para el abordaje de los contenidos con un énfasis lúdico que faculte al alumno para el autoaprendizaje” (Márquez y otros, 2008).

Por tanto, definimos como propuesta didáctica la herramienta que permite la recolección de datos en una investigación con enfoque cualitativo, la cual sistematiza la información obtenida por los instrumentos de recolección de la información, para así formalizar cuáles son las actividades que se consideran pertinentes a realizar en el aula de clase en las que los conceptos contraintuitivos evidenciados se puedan transformar en cogniciones intuitivas.

3.5.1 La Propuesta Didáctica

Esta propuesta didáctica es una herramienta que los docentes del área de matemáticas pueden desarrollar con los estudiantes del grado 7º, ya que, es en este grado donde se desarrollan conceptos subyacentes a los números racionales. Está compuesta inicialmente por la pregunta y el objetivo con el cual se llevó a cabo la investigación, seguidamente se plantean los contenidos que están inmersos en las diferentes actividades, tal como la metodología de ejecución y los instrumentos y/o materiales que se necesitan para el desarrollo de las mismas, además de un espacio para la evaluación y retroalimentación.

En este sentido, se pretende que el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro y fuera de las aulas de clases, sea comprendido e interpretado desde el lenguaje cotidiano, concebido a partir de la interacción con materiales de fácil acceso y simbolización matemática usada en el desarrollo de los conceptos de los números racionales.

3.6 Consideraciones Éticas

Para llevar a cabo la investigación, hay que tener en cuenta ciertas normas sociales y morales que muestran el respeto, el reconocimiento y el lugar del otro, por tanto, es deber de los investigadores proteger a los participantes y velar por la integridad y autonomía de cada uno. "Cuando se trata de seres humanos, es primordial contar con ellos e informarles de la finalidad de las investigaciones; constituye una obligación consensuar con el resto de los miembros del equipo y con las personas que forman la muestra del trabajo, su intencionalidad y repercusión futura. No hacerlo así, conduce a un uso inadecuado de los resultados obtenidos. El consentimiento informado implica que los sujetos tienen el derecho a ser notificados de que van a ser estudiados, y a conocer la naturaleza de la investigación y las posibles consecuencias que se derivan de los estudios." (González y otros, 2012).

Por esto, es importante tener en cuenta que dentro del trabajo de investigación hay ciertos lineamientos éticos a cumplir; inicialmente se reconoce que se va a trabajar con una población que no cumple con la edad legal establecida para tomar decisiones, por lo tanto, se requiere del permiso de los acudientes; así mismo, se solicita un consentimiento informado en el que se pueda avalar la realización de las actividades propuestas por los investigadores. También, se tendrán en cuenta las actas de ingreso a la práctica educativa docente, con las cuales se da el permiso para interactuar con los estudiantes y hacer uso de los espacios de formación. Finalmente, al ser estudiantes de la Universidad de Antioquia, se necesitan permisos de la Facultad de Educación que permitan el acceso a otros espacios que se encuentran por fuera del campus universitario, incorporando por cuestiones del COVID 19 ciertos protocolos de bioseguridad para la interacción con los diferentes agentes pertenecientes a la Institución Educativa.

Capítulo IV. Análisis de la Información

Este capítulo está conformado por el análisis que se realizó a la información recogida en los instrumentos; se desarrolla bajo la metodología de experimentos de enseñanza que permite el desarrollo de tres fases consecutivas, que contiene tres episodios y cinco etapas, los cuales se desarrollan a continuación.

4.1 Fase 1. Preparación del Experimento y Primera Parte del Episodio 1

En esta fase se presenta un acercamiento a lo expresado por Molina y otros (2011), en el que se menciona la multiplicidad de contextos y diversidad de sujetos, como un producto de enriquecimiento a la investigación, pues permite ampliar las ideas que son de sustento para el análisis de los datos y de las estructuras planteadas en los experimentos que posibilitaron la sistematización de la problemática justificada en este trabajo de investigación. Aclarando que el episodio 1 está dividido en dos partes, la primera permitió llevar a cabo el test diagnóstico.

Primera Parte del Episodio 1 y Evaluación del Conocimiento Inicial de los Estudiantes.

En la fase de preparación del experimento se diseñó un test diagnóstico para la recolección de la información con respecto a esas ideas y saberes previos que tenían los estudiantes sobre el concepto de los números racionales (Anexo 3, pág. 95). Al comienzo de la implementación del test diagnóstico se presentaron inquietudes en torno al concepto, los estudiantes no tenían una noción clara de este conjunto, mostrando dificultades para el reconocimiento de los diversos conjuntos numéricos existentes, números naturales, enteros y racionales.

El análisis de esta información permitió posicionar a los estudiantes en una perspectiva poco teórica, pues como explica Campuzano C. (2017) “la didáctica de la matemática se encarga de estudiar los problemas que surgen en el proceso de enseñanza y de aprendizaje y propone acciones para su desarrollo que, en relación con el número racional, implica la comprensión de éste como objeto matemático” y es a partir de esto que se evidencian ciertas dificultades en el desarrollo de cada respuesta. Los estudiantes en esta primera etapa mostraron que su intuición afecta su comprensión, debido a que las respuestas estaban orientadas hacia la certeza intrínseca y la autoevidencia, dificultando el razonamiento requerido en cada una de las preguntas.

De esta manera, se evidenció que inicialmente los estudiantes no tenían claro cuál es la definición de los números racionales, consideraban que $\frac{a}{b}$ era la única forma de representación numérica de este conjunto; otra dificultad en la aplicación de este instrumento fue reconocer como única representación gráfica la división en partes iguales de una figura geométrica, volviendo el proceso mecánico. De igual forma, al observar cómo intentaban ubicar un número racional en la recta, se presentaron dos aspectos contraintuitivos a tratar, el primero orientado a considerar que la recta numérica para alguno de ellos también puede ser el plano cartesiano, con sus ejes X y Y; el segundo dirigido hacia la ubicación de un fraccionario, donde el numerador lo consideraban como las unidades que se debían contar y el denominador como la décima que se ubica después de la unidad.

Los procesos evidenciados anteriormente dieron paso a reconocer que los estudiantes tienden a definir los números racionales como una operación, tal como lo es la suma, la resta y en especial la división, pues no tienen claro la definición de que los números racionales son parte de un conjunto numérico; de alguna manera, se evidencia que los estudiantes tienen un concepto contraintuitivo frente a esto, que no les permite ver al conjunto de los números racionales más allá de un proceso operativo.

Ahora bien, manifestaciones verbales por parte de los estudiantes dejan evidenciar otra dificultad, la cual radica en confundir los términos matemáticos para definir lo que quieren dar a entender. Se percibió que para expresar una de las características de una fracción mencionan que: “el número de arriba es el que me dice las partes que debo tomar y el número de abajo son todas las partes en que está dividiendo” lo que indica poca significación a los términos matemáticos que influyen en el proceso de comprensión del conjunto de los números racionales; sin embargo, no se puede ver como un aspecto completamente negativo, pues eso presupone que el estudiante comprende grosso modo lo que es una fracción, siendo capaz de expresarlo en sus propias palabras.

Cada dificultad presentada permitió estructurar con mayor rigurosidad la significación de la metodología aplicada en el trabajo de investigación, como bien lo afirman Molina y otros (2011) “el objetivo, por tanto, no es dar respuesta a un problema, sino un producto particular ya sea teórico o de otra índole, así como información sobre el proceso de diseño que aporte directrices para guiar futuros diseños” lo cual, es el objetivo central de esta investigación; cada episodio en este estudio se centra en indagar sobre las dificultades presentadas por los estudiantes tanto a nivel conceptual, como procedimental y práctico, abriendo paso a nuevos enfoques que pueden ser usados en otros contextos tal como lo afirman Molina y otros (2011).

De lo expuesto anteriormente, se evidenció cuáles eran los saberes y conceptos que los estudiantes tenían con respecto a las preguntas planteadas, dando paso a la afluencia de los conceptos contraintuitivos iniciales que se presentaron con respecto a la comprensión de los números racionales. Como se pudo analizar no son únicamente concepciones construidas desde su cognición intuitiva, sino que, también se ven reflejadas en las definiciones erróneas que han aprendido de libros, internet e incluso de maestros de matemáticas.

El análisis realizado a esta fase sirvió para la refinación de los instrumentos que serán abordados en las siguientes fases. Además, permitió un acercamiento más interactivo con los estudiantes, que a su vez manifestaron todas las inquietudes que tuvieron con respecto a la temática, dando paso a la profundización de estos conceptos contraintuitivos que afectan la comprensión de los números racionales, que como ya se mencionó, tendrán su debido análisis más adelante en este capítulo.

4.2 Fase 2. Experimentación

En esta fase se pone en marcha el experimento de enseñanza, teniendo presente el análisis realizado en la fase 1 y primera parte del episodio 1, las observaciones de cada una de las intervenciones realizadas por parte de los estudiantes, los diferentes test conceptuales y los experimentos llevados a cabo que se recolectaron de forma audiovisual, siendo estos fundamentales para la construcción de la experimentación con la cual se abordó la pregunta y el objetivo de investigación. Siguiendo la secuencia de la metodología de experimentos de enseñanza, este apartado estará divido en tres ejes fundamentales que se tuvieron en cuenta para un buen desarrollo del mismo. Entre ellos tendremos: *Antes de la intervención, en la intervención y después de la intervención,* los cuales se trabajan a continuación.

4.2.1 Antes de la Intervención

En este proceso investigativo se tuvo en cuenta lo trabajado en la fase 1 y primera parte del episodio 1, esto permitió analizar las afectaciones de la intuición y contra intuición (tratamiento de conceptos contraintuitivos) en torno al concepto de los números racionales, sus diversas representaciones numéricas y gráficas, y su aplicabilidad en el contexto; las distintas preguntas orientadas en el test diagnóstico evidenciaron diversas dificultades como el desconocimiento de terminología matemática, dificultades en la comprensión del concepto, el error en la interpretación que se le da a la recta numérica y la idea que se tiene sobre los números racionales.

Ahora bien, el análisis de los episodios se hizo en torno a las diversas preguntas establecidas a lo largo de la ejecución de los instrumentos investigativos, señalando la intención de cada una de las preguntas (Anexo 2 pág. 83); como se verá a lo largo de este análisis, particularidades como los experimentos de enseñanza empleados, las anotaciones a preguntas establecidas y las intervenciones de cada estudiante, permitieron ampliar las directrices seguidas en el proceso investigativo.

Interpretaciones como tomar al conjunto de los números racionales en una única representación axial, son aspectos que generan ambigüedades al momento de entender el amplio campo de este conjunto numérico, pues desde de la definición misma se ve una dirección en su comprensión, que no enmarca las distintas vías de representación numérica. Por otro lado, palabras coloquiales usadas en el contexto fueron guías para comprender algunas de las ideas erróneas que se presentaron en una interpretación, porque al utilizar la palabra “división” para referirse a la fracción o para nombrar la operación misma, son las que dan cabida a generar los conceptos contraintuitivos que se presentaron a lo largo de la investigación.

Finalmente, este análisis realizado permitió que el trabajo investigativo diera luz a la manera cómo los investigadores pueden realizar su trabajo dentro del aula, además de hacer una revisión diagnóstica en el proceso de comprensión, lo cual permitió que se pudiera conocer al grupo con el que se realizaron las pruebas, aspecto que se consideró importante para el desarrollo de la fase 2 y así poder dar paso a la fase 3.

4.2.2 En la Intervención

Como lo menciona Molina y otros (2011), los datos recogidos se revisan a la luz de la experimentación, los cuales permiten la reformulación de las preguntas y las guías planteadas que se llevaron a cabo en el desarrollo de los experimentos de enseñanza, todo lo anterior permitió que se concretara el diseño, planificación y temporalización de las sesiones planteadas en la etapa previa al experimento.

Como se pudo evidenciar, en la primera parte del episodio 1 se llevó a cabo la realización de un test diagnóstico a los estudiantes, el cual permitió evaluar el conocimiento inicial que tenían con respecto a los números racionales, evidenciar los conceptos contraintuitivos y cómo transcurrió el proceso de comprensión frente a las preguntas realizadas. Este análisis dio paso a la reformulación y refinación de los episodios 2 y 3, mejorando la aplicación de los mismos sin afectar el objetivo de investigación.

En esta fase se llevaron a cabo cinco etapas, las cuales permitieron indagar sobre los conceptos de los números racionales y los conceptos contraintuitivos que afectan su comprensión. Por ende, en la segunda parte del episodio 1 se encuentra la etapa 1, que está compuesta por una explicación sobre el concepto de número racional, la propiedad de densidad y el principio de orden, dando paso al desarrollo del primer experimento; en el episodio 2 se realizaron las debidas explicaciones de los conceptos y representaciones de un número racional, seguidamente se llevó a cabo un test conceptual que fue retroalimentado con la actividad experimental y se concluye con un reto matemático, en el cual los estudiantes debían enfrentarse a lo aprendido en el desarrollo de este episodio, que está constituido por dos etapas; finalmente, en el episodio 3 se llevó a cabo un último experimento y una evaluación en torno a los números racionales, lo que constituyen las dos etapas finales de los experimentos de enseñanza.

Para obtener los resultados de las pruebas realizadas en cada episodio, se tuvo en cuenta la aplicación llevada a cabo, por lo que es importante aclarar que cada uno se realizó en un tiempo de dos horas, en las que se aplicaron el test diagnóstico y/o conceptual, y los experimentos llevados a cabo teniendo en cuenta aspectos didácticos y desarrollo de habilidades lúdicas del grupo en general; esto permitió lograr una recolección de información concreta, en relación a la observación, los audiovisuales y las intervenciones de los estudiantes. Lo nombrado anteriormente proporcionó información importante y necesaria para el estudio analítico del trabajo de investigación. En el apartado 4.4 -análisis de los episodios- se detalla con más precisión su análisis.

4.2.3 Después de la Intervención

Posteriormente al desarrollo de los experimentos de enseñanza, cada episodio es analizado a la luz de los estudiantes escogidos como población a investigar, ya que permiten un acercamiento a estos conceptos contraintuitivos que afectan la comprensión de los números racionales, dando paso a la sistematización y clasificación de los instrumentos implementados en cada uno de los episodios que permitieron organizar y detallar los aspectos relevantes para la investigación. Siguiendo la ruta metodológica, se obtienen resultados necesarios para dar paso a la fase 3, en la cual se realiza un análisis general por medio de los aspectos que propone Molina y otros (2011) para el tratamiento de la información.

4.3 Fase 3. Análisis Retrospectivo de la Información

Para realizar el análisis retrospectivo se tuvo en cuenta la vivencia de los investigadores durante la ejecución de los experimentos y guías, así como el uso de distintos mecanismos de recolección de la información tal como la observación, los materiales audiovisuales y la argumentación escrita y oral de los estudiantes; cada uno de estos aspectos permiten analizar las características contraintuitivas que afectan la comprensión del estudiante, puesto que detallan las particularidades que componen cada uno de los episodios.

Por otro lado, este análisis integra la recolección de la información obtenida en la fase 1 y 2, argumentado en la diversidad de contenidos trabajados que fueron retomados para encontrar los conceptos contraintuitivos para analizar cómo afecta el proceso de comprensión de los estudiantes y, finalmente, reconocer el avance conceptual, experimental y procedimental en cada uno de los episodios abordados. Para todo lo anterior, se tienen en cuenta algunos aspectos importantes que permiten dar entrada al análisis de la información; según lo expresado por Molina y otros (2011), estos son:

- Identificar las estrategias que emplean los alumnos en la resolución de las sentencias numéricas consideradas.
- Caracterizar el uso de pensamiento relacional que evidencian sus producciones e intervenciones, identificando los elementos en los que centran su atención cuando hacen uso de este tipo de pensamiento.
- Analizar y evaluar la comprensión del signo igual que mostraron al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas.
- Detallar la evolución de la comprensión del signo igual y del uso de pensamiento relacional que pusieron de manifiesto.

En relación con el trabajo de investigación, se adecúan de la siguiente manera:

- **Identificar** los conceptos previos que emplean los estudiantes con respecto al concepto de los números racionales.

- **Caracterizar habilidades y estrategias** que aplican los estudiantes en la solución de problemas y conceptos planteados, además de evidenciar los conceptos intuitivos que emplean para tales soluciones.
- **Analizar y evaluar conceptos contraintuitivos** a los que se enfrentan los estudiantes en el desarrollo de la comprensión de las diferentes nociones de los números racionales (propiedad de densidad, principio de orden, operaciones y tres representaciones numéricas vistas).
- **Detallar** cómo se lleva a cabo la evolución en cada fase trabajada e identificar los cambios y procesos nuevos que se encuentren en la comprensión de los números racionales.

Seguidamente, se presenta el análisis de los episodios 1, 2 y 3 en los que se aborda el desarrollo de las cinco etapas mencionadas en la fase 2, aclarando que el episodio 1 está compuesto por dos ejes fundamentales, la prueba diagnóstica y la etapa 1, un primer experimento que permitió la confrontación con los saberes previos que tenía cada uno de los estudiantes investigados. Posteriormente, se realiza el análisis de los episodios siguiendo las acciones de los experimentos de enseñanza, como lo señala Molina y otros (2011).

4.4 Análisis de Episodios

El experimento de enseñanza se ejecuta a partir de tres fases y tres episodios, en la primera fase se desarrolló un test diagnóstico que permitió analizar los conocimientos previos que tenían los estudiantes con respecto a los conceptos de los números racionales, este fue el primer paso para identificar las diferentes nociones contraintuitivas que se encuentran en la comprensión de los números racionales.

La segunda fase se desarrolló en tres ejes fundamentales denominados: antes de la intervención, en la intervención y después de la intervención, en los cuales se llevaron a cabo los dos episodios restantes y la segunda parte del episodio 1, que fueron subdivididos en cinco etapas para realizar un análisis profundo sobre los conceptos contraintuitivos que afectan la comprensión de los números racionales. La etapa 1 estuvo compuesta por una explicación sobre los conceptos, la propiedad de densidad y el principio de orden de los números racionales, seguidamente se realizó un experimento en el cual cada estudiante debía ordenar ciertos números racionales, exhibiendo el último principio mencionado. La etapa 2 consistió en realizar una explicación sobre las representaciones de números racionales y realizar un test conceptual, dando paso a la etapa 3, que permitió por medio de un experimento hacer una retroalimentación sobre estas representaciones numéricas y evaluar su comprensión por medio de un reto, en el que los estudiantes debían realizar trazos a un cuadrilátero buscando cumplir con la proporcionalidad entre sus partes; estas dos etapas componen el episodio 2. Finalmente, en el episodio 3 se llevaron a cabo dos etapas, la etapa 4 estuvo compuesta por un experimento en el cual los estudiantes por medio de una actividad didáctica pudieran interiorizar todos los conceptos trabajados en los números racionales, y la etapa 5 constituida por un test final donde se evaluó si persisten los conceptos contraintuitivos iniciales.

La tercera fase consistió en argumentar cómo los conceptos contraintuitivos han afectado la comprensión de los números racionales en los estudiantes, realizado a través de un análisis que involucra al investigador y sus múltiples métodos de recolección de información; además, se centró en evidenciar las distintas características mencionadas por Molina y otros (2011), lo que permitió categorizar a los estudiantes en los tres episodios mencionados, así como analizar sus implicaciones en el contexto y los conceptos contraintuitivos que prevalecen en la comprensión de los números racionales al finalizar dichas actividades. Lo anterior dio paso al análisis de cada episodio en torno a los conceptos contraintuitivos categorizados en definiciones, operaciones y representaciones, que se amplían a continuación.

4.4.1 Análisis de la Segunda Parte del Episodio 1-Etapa 1

Desarrollada la prueba diagnóstica, se observaron y analizaron los conceptos contraintuitivos presentados inicialmente, dando paso así a la etapa 1 compuesta por la explicación de los conceptos, la propiedad de densidad y el principio de orden de los números racionales, complementada con la participación de los estudiantes en el desarrollo de ejemplos y de la actividad propuesta en el experimento que se llevó a cabo en el aula de clase, todo esto registrado en audiovisuales. Lo anterior evidenció los conceptos contraintuitivos que se presentan a continuación.

Conceptos Contraintuitivos en torno a las Definiciones

Se logró evidenciar que el concepto encontrado sobre los números racionales generó dificultades a la hora de comprender qué son y cómo están compuestos. Son definidos como "un número racional es aquel que se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$, de tal manera que a y b sean números enteros, pero b tiene que ser distinto de 0" (Saldaña & Melgarejo, 2019, pág. 3). Se considera que a esta definición le hace falta rigurosidad para que pueda ser comprendida y no se clasifique solo en los números fraccionarios, por tanto, se define a un número racional como aquel que se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$, si $b \neq 0$ y $a \in R$, tal que el m.c.d (a, b) =1. De acuerdo con lo anterior, se analizó las respuestas de E2 y E3 en torno a las preguntas que se presentan a continuación.

¿Qué son los números racionales y dónde se usan en su cotidianidad?

Figura 6

Actividad Experimental 1

Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

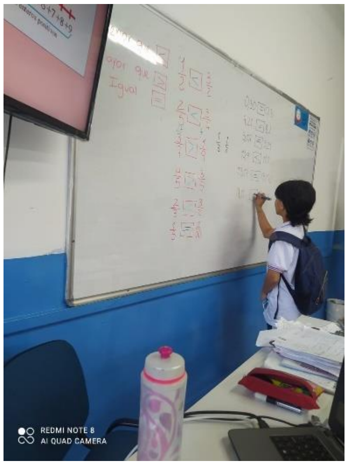
Haciendo un análisis a partir de la observación y el diálogo en el aula de clases, se pudo evidenciar que un concepto contraintuitivo presentado, está en la definición del concepto de los números racionales, pues hay una interpretación errada por parte de los estudiantes con respecto al conjunto de los números racionales, su operatividad y definiciones, ya que lo expresan como la operación, suma, resta o división. Así, se considera éste como un concepto contraintuitivo ya que afecta la comprensión de la definición apropiada de los números racionales.

Esto se pudo evidenciar en la respuesta de E2, al decir que los números racionales son una operación, expresado de la siguiente manera: "en una fracción se quita, ya que a $\frac{2}{3}$ se le quita 2, o sea se resta, a 2 se le quita 3 y queda 1". Por otro lado, E3 manifestó: "Es una división o una resta". Se logra evidenciar que los estudiantes presentaron ciertos conceptos contraintuitivos con respecto a la definición del concepto de los números racionales, ya que, al considerar a un número racional como una operación, se le quita el valor de número; se considera que esto puede ocurrir porque los estudiantes conciben los números racionales solo como los que están escritos de la forma $\frac{a}{b}$. Por otro lado, se evidenció que las características que afectan esta comprensión son la certeza intrínseca, que en términos generales trata de un conocimiento que se impone subjetivamente como absoluto en el individuo, además, acompañada de la coacción, donde estas intuiciones subjetivas se imponen como únicas y no se pueden erradicar fácilmente.

De acuerdo con el principio de orden, coloca mayor que (>) o menor que (<) según sea el caso.

Figura 7

Actividad Experimental 1



Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

Al momento de establecer un orden específico en los números racionales, se generaron afectaciones en cuanto a comprender que los símbolos, menor que (<) y mayor que (>), informan un orden específico entre estas cantidades, se creyó que entre más grande el numerador o el denominador mayor sería el número fraccionario; en cuanto a los decimales, creían que entre más decimales tenía la cifra, mayor era el número. Asimismo, se presentaron confusiones en entender cuál era la desigualdad que representaba cada símbolo, lo que implicó el surgimiento de un nuevo concepto contraintuitivo.

En palabras de E1 "yo sé cuál es el fraccionario más grande, pero no sé cuál símbolo usar" lo que permitió analizar el concepto contraintuitivo que afecta la comprensión del estudiante, el cual se enfatiza en la poca interpretación de los símbolos matemáticos; lo anterior, implicó que E1 considerara el orden de los fraccionarios como se hace con los números enteros, con los que a mayor cantidad de dígitos mayor es el número, detonando un aspecto distinto a lo expresado por Saldaña y otros (2019) "Podemos comparar racionales igualando numeradores, denominadores o transformándolos a decimales o multiplicando cruzado las fracciones", lo que apuntó hacia la extrapolación contenida en las características cognitivas, tratada como aquellas conclusiones a las cuales llega un sujeto, teniendo como base argumentos poco evidentes.

Conceptos Contraintuitivos en torno a las Operaciones

En el proceso de análisis se encontraron conceptos contraintuitivos que se relacionan con la operatividad de los números racionales, como lo es la ubicación en la recta numérica, sus características y operaciones mecanicistas al solucionar numéricamente este conjunto. De esta manera, se realizó el análisis respecto a las respuestas establecidas por E1, E2 y E3 a los siguientes interrogantes.

¿Cómo se ubica un número racional en la recta numérica?

Figura 8

Actividad Experimental 1

Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

En el uso de los términos matemáticos surge otro concepto contraintuitivo, en cuanto que, en el diálogo establecido entre investigador e investigado se evidenció una confusión entre los términos décima y decimal; E1 considera que las decenas de una cantidad numérica son semejantes a las décimas de ésta. Lo anterior implicó que la comprensión de E1 se viera afectada en torno al concepto de los números racionales, pues se percibió una autoevidencia, comprendida como aquellos argumentos que son verdaderos en sí mismos sin la necesidad de que esta posea una justificación en la respuesta obtenida.

Su respuesta ante la interpretación de la cantidad numérica dio a entender que reconoce la escritura del número decimal, pero confunde su definición; E1 menciona que "para que sea un decimal, la unidad debe estar dividida en 10 partes y si son tres décimas, indica que la unidad se debe dividir en 30 partes", lo cual develó una aproximación a los conceptos contraintuitivos que están en cada estudiante, categorizado así por la característica intuitiva de Fischbein mencionada anteriormente.

Observa las siguientes fracciones $-\frac{7}{8}, \frac{-7}{8}, \frac{7}{-8}$. ¿Son iguales? ¿Por qué?

Figura 9
Actividad Experimental 1

Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

En el desarrollo de la actividad experimental y de los diálogos en el aula de clase, se pudo identificar otro concepto contraintuitivo con respecto a la ubicación de los signos de los números racionales representados en una fracción, tal como se evidencia en la pregunta, localizando el signo menos de tres formas distintas en una misma fracción. E1 afirmó que, si el signo de un fraccionario lo lleva el numerador, la operación a realizar es una resta, llevando a identificar un concepto contraintuitivo relacionado con la operatividad.

Por su parte, E2 afirma que “no son iguales, ya que unos tienen diferente signo, unos son positivos, o sea se suman y los negativos, se restan”; E3 por su lado, manifiesta que “no son iguales ya que hay positivos en unos y negativos en otros y los números positivos del denominador se convierten en negativos”. Se considera que este concepto contraintuitivo afecta el proceso de comprensión de los números racionales, en cuanto que los estudiantes comprenden que la representación de una fracción, cuando tiene un signo, representa una operación y no al número como tal; lo cual resta importancia a la notación de la fracción en la que el signo ubicado en el numerador, denominador o abarcando la fracción, connota expresiones distintas en su representación, aunque su resultado operativamente sea igual. De lo anterior se ha podido identificar que la característica que afecta la comprensión de los números racionales es el carácter implícito, pues se percibe que el concepto operativo se afirma con obviedad sin ninguna justificación, por lo que conlleva a la confusión del razonamiento en el que se trabaja.

4.4.2 Análisis del Episodio 2-Etapa 2

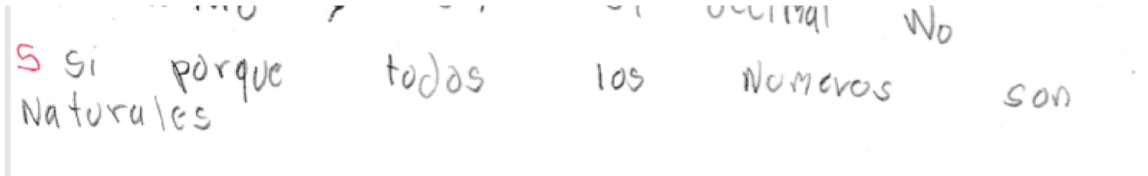
El episodio 2 está compuesto por dos etapas. En este apartado se analiza la etapa 2, en la cual se llevó a cabo una explicación sobre las representaciones numéricas de los números racionales, entre ellas, la representación como fraccionario, como decimal y como cociente. Al igual que el apartado 4.4.1, se analizan los conceptos contraintuitivos observados y evidenciados en el test conceptual que se llevó a cabo después de las explicaciones dadas por los investigadores.

a) Conceptos Contraintuitivos en torno a las Definiciones.

El desarrollo de la etapa 2 permitió evidenciar que se presenta un concepto contraintuitivo en torno a las definiciones, se reconoce que hay complejidad al momento de relacionar los conjuntos numéricos, que como tal se definen: “En el conjunto de los números racionales pueden distinguirse dos subconjuntos especiales: El conjunto de los números naturales N, con N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . } y el conjunto de los números enteros Z, con Z = {. . . , – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, . . . }” (Saldaña & Melgarejo, 2019, pág. 2). Lo anterior nos permite hacer un análisis de las respuestas obtenidas por E1 y E3 a las siguientes preguntas.

¿Todo número entero se puede representar como fracción? ¿Por qué?

Figura 10
Guía 2 Test Conceptual


S Si porque todos los Numeros son Naturales

Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

En las respuestas obtenidas a partir del test conceptual se identificó un concepto contraintuitivo en el que se considera que el conjunto de los números naturales es de orden superior y, por tanto, es éste quién contiene al conjunto de los números racionales; E3 y E1 manifiestan respondiendo “Si, porque todos los números son naturales”.

De lo anterior, se deduce que el no tener claridad en las definiciones de los conjuntos numéricos y en especial del conjunto de los números racionales, conlleva a que el concepto contraintuitivo que se presenta interfiera en la comprensión de la definición del conjunto de los números racionales. De esa manera, se identificó que la certeza intrínseca es la característica que prevalece en estos planteamientos, pues se reconoce que están seguros de su definición y lo afirman con obviedad, lo que produce una sensación de intuición como lo dice Fischbein, pero en realidad provocó conceptos contraintuitivos en la comprensión.

Conceptos Contraintuitivos en torno a las Operaciones

En el análisis realizado en la etapa 2, se empezó a argumentar sobre los conceptos contraintuitivos que fueron reiterativos, sobre aquellos que mejoraron después de la explicación desarrollada y sobre el surgimiento de otros nuevos, en torno al aspecto operacional; en este apartado se analizan las diferentes respuestas obtenidas por E1, con respecto a la siguiente pregunta:

¿Crees que $4\frac{6}{3}$ es una fracción? ¿Por qué?

Figura 11
Guía 2 Test Experimental


7 = Pues la verdad es que no creo porque hay una parte este numero de fraccion pero me confundo y no se como realizarla por $4\frac{6}{3}$

Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

El argumento expresado por E1 se empezó a ver como un nuevo concepto contraintuitivo, pues no se presentan únicamente las operaciones básicas conocidas, sino que se entrelaza la solución con cada uno de los conjuntos numéricos que se encuentran contenidos dentro del conjunto de los números racionales; luego se introduce una nueva terminología matemática, la cual trata de los fraccionarios mixtos, en la que se generan respuestas con base a conclusiones que obtienen de información poco explícita, situando dicho argumento en la extrapolación mencionada por Fischbein.

Respuestas como las de E1: "pues la verdad es que no creo, porque hay una parte entre el número de la fracción, pero me confundo y no sé cómo realizarla" dejó en evidencia que la dificultad en los estudiantes está en reconocer que, así como una fracción puede ser mixta, esta puede ser expresada como una fracción que se denomina fracción impropia, en la que el numerador es mayor que el denominador. Lo anterior lleva a pensar que aún no hay claridad en cuanto a la infinidad de números fraccionarios que existen en la recta numérica y entre dos números racionales cualesquiera, por que como ya se sabe, "el conjunto de los números racionales es un conjunto denso, es decir, entre dos números racionales siempre existe otro número racional" (Saldaña & Melgarejo, 2019) en la que se involucra la propiedad de orden establecida.

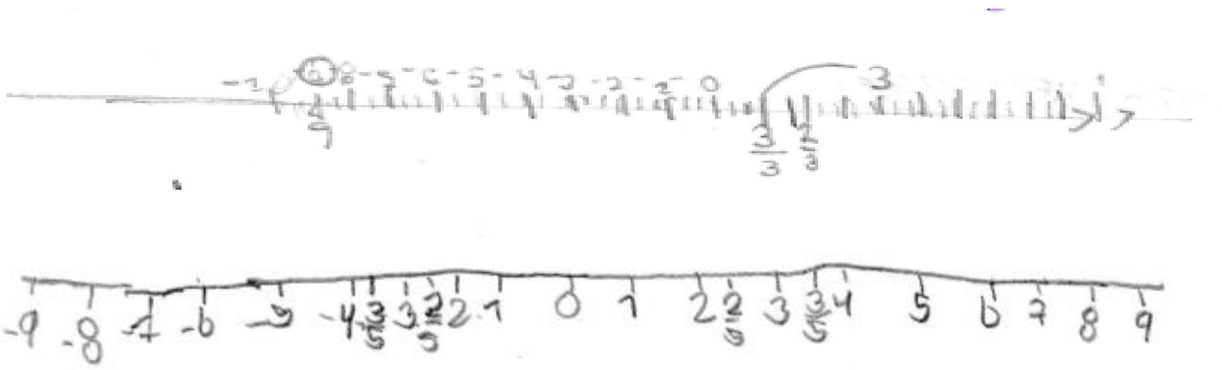
Conceptos Contraintuitivos en torno a la Representación Gráfica.

Las representaciones gráficas que posee un número racional pueden variar dependiendo de las indicaciones que se den por parte del docente. En este caso, en especial, se analiza la representación y/o ubicación de los números racionales en la recta numérica. Durante el desarrollo del test conceptual, los estudiantes representaron números racionales en la recta numérica, teniendo presente que en la explicación que se llevó a cabo antes del desarrollo del mismo, se dieron tres representaciones numéricas sobre un número racional. A continuación, se analizan dos conceptos contraintuitivos que se evidenciaron con respecto a lo anterior.

Ubicar en la recta numérica los números racionales.

Figura 12

Guía 2 Test Conceptual



Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

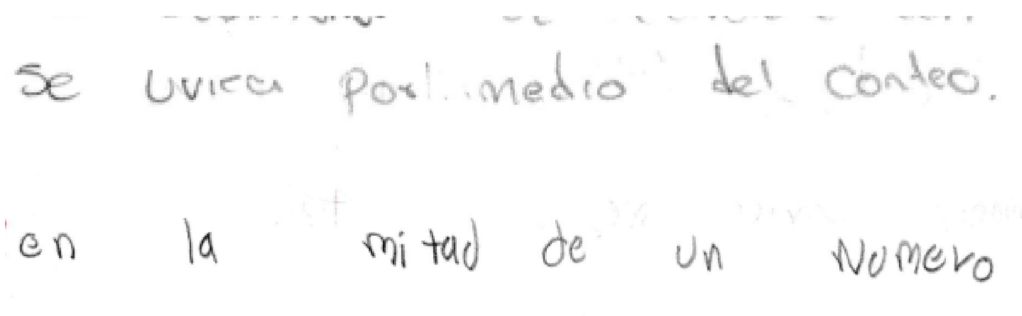
Al analizar las respuesta del test conceptual, se observó que el principal concepto contraintuitivo que afecta a los estudiantes en la ubicación de los números racionales en la recta numérica, está compuesto por la dificultad en la proporción espacial entre cada número, además, no les es posible entender fácilmente cuáles son las unidades y cuáles son las décimas, lo que da paso al segundo concepto contraintuitivo encontrado, pues los estudiantes creen que los fraccionarios se ubican teniendo como unidad al numerador y como décima al denominador. Por otro lado, se entiende que "para representar números fraccionarios en la recta numérica, es recomendable determinar en cuántos tramos se debe dividir los segmentos que representan una unidad. En términos generales, se deben dividir los trazos unitarios según el denominador de la fracción y se debe ubicar la fracción tantos lugares desde el cero a la derecha o izquierda, según el signo de la fracción, como lo indique el numerador" (Saldaña & Melgarejo, 2019, pág. 6).

Se logra evidenciar en las rectas numéricas de E2 y E3 dos conceptos contraintuitivos relacionados con la espacialidad y la poca comprensión que existe sobre la ubicación de los fraccionarios. E2 representó el fraccionario $\frac{3}{3}$ en la primera unidad, algo que es apropiado, pero al momento de ubicar $\frac{2}{3}$ lo ubica después del fraccionario mencionado anteriormente; se identifica que la característica cognitiva afectada en este caso es la extrapolación, la cual depende de cuántas pistas tenga el individuo para resolver un problema, además, de la perseverancia, permitiendo que las intuiciones erróneas prevalezcan a pesar de las explicaciones y/o definiciones conceptuales. Por su parte, E3 ubica los números fraccionarios de tal forma que el numerador indica las unidades y el denominador las partes en que se divide la unidad, evidenciando así que los conceptos contraintuitivos encontrados en el test diagnóstico aún sobreviven en los estudiantes, lo que dificulta la comprensión de nuevas concepciones y/o definiciones con respecto a la representación gráfica en la recta numérica.

¿Cómo ubicar decimales en la recta numérica?

Figura 13

Guía 2 Test Conceptual



Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

Otro concepto contraintuitivo encontrado con respecto a las representaciones en la recta numérica es la ubicación de los números decimales; los estudiantes presentan dificultad al momento de definir qué es un número decimal y cómo se deben ubicar en la recta numérica. En general, expresan que son aquellos números que no son enteros, que se debe dividir cada unidad de acuerdo con las decenas que tiene cada una. Cuando se habla de ubicar los números decimales en la recta numérica, “es recomendable determinar en cuántos tramos se deben dividir los segmentos que representan una unidad” (Saldaña & Melgarejo, 2019, pág. 7), teniendo en cuenta las décimas, centésimas, milésimas… que conforman cada número decimal, las cuales permiten saber el orden de estos números.

Así, las respuestas dadas por los estudiantes manifestaron conceptos contraintuitivos que afectan inicialmente la comprensión de número decimal, lo que conlleva a afectar la comprensión de ubicación en la recta numérica. E3 afirmó que los números decimales se ubican en la recta numérica “en la mitad de un número”, por otro lado, E2 manifestó que “se ubican por medio del conteo”; se considera que el aporte de E2 no es del todo contraintuitivo, aun así, el concebir un conteo en los números decimales al igual que en los números naturales, evidencia que el status de la teoría se está generalizando hacia cualquier número, sin tener en cuenta que los números decimales pueden ser infinitos y mayores que otro, de acuerdo a la naturaleza de sus cifras decimales. Además, la concepción de que un decimal solo se ubica entre dos números enteros, presenta un carácter implícito, ya que se concibe una aparente obviedad en cuanto al conteo y al creer que los decimales no pueden ser números enteros y/o fraccionarios.

4.4.3 Análisis del Episodio 2-Etapa 3

Para culminar con el análisis del episodio 2, le damos entrada a la etapa 3, que consistió en llevar a cabo una actividad experimental y la construcción del reto lógico en el que se trabajó la proporción de un cuadrilátero, por tanto, se realizó una actividad lúdica y didáctica con los estudiantes, en la que a partir de diálogos se construyen conocimientos con respecto al concepto de los números racionales y su representación como fracción, decimal y cociente. De este reconocimiento surgen, los siguientes conceptos contraintuitivos que fueron evidenciados únicamente en torno a las representaciones. Este análisis se realizó a partir de la observación en el aula y el material audiovisual recolectado en el desarrollo de la etapa.

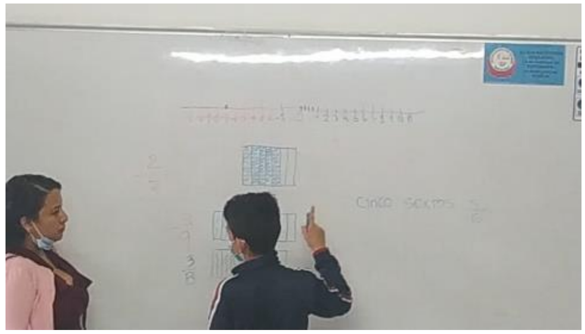
a) Concepto Contraintuitivo en torno a las Representaciones

En el desarrollo de la actividad experimental y del reto matemático se empezó a evidenciar un nuevo concepto contraintuitivo, el cual se centró en la división en partes iguales de una figura geométrica llamada cuadrilátero y la proporcionalidad que se hace al momento de dar una representación gráfica de los números fraccionarios; en esta participación, E1 y E2 empezaron a mostrar similitudes en sus respuestas, por lo cual se analiza lo expresado por E1 en torno al experimento y lo argumentado por E2 en cuanto a la división del cuadrilátero.

Represente gráficamente la siguiente fracción $\frac{7}{3}$

Figura 14

Actividad Experimental 2



Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

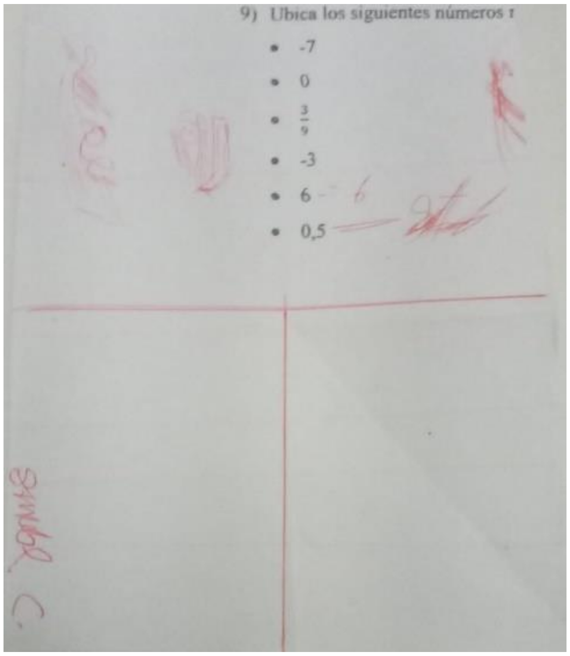
A partir del desarrollo de la actividad y la interacción con los estudiantes, se ha identificado un concepto contraintuitivo relacionado con la representación gráfica del fraccionario nombrado en la actividad a realizar, pues como se puede observar, $\frac{7}{3}$ es una fracción impropia, por lo que se notó que representar gráficamente el número fraccionario, dificultó la comprensión de los estudiantes con respecto a la división en partes iguales de la unidad.

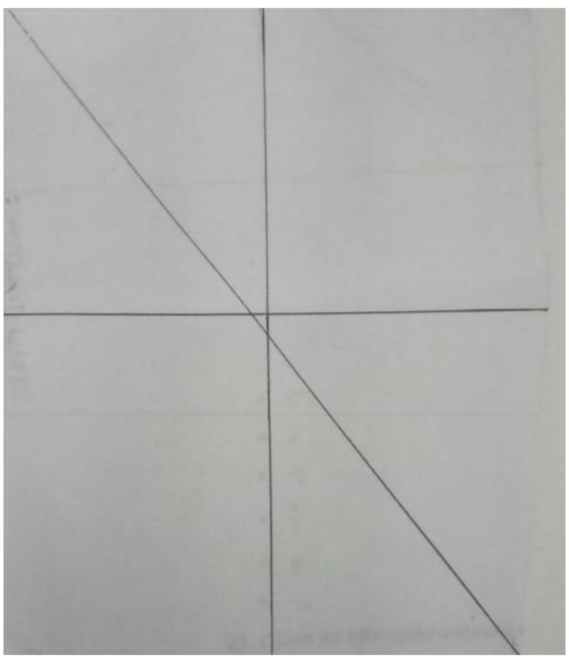
De esta manera E2, manifiesta que “es una representación que no se puede realizar”, pero más adelante traza diagramas en el tablero que no cumplen con una proporción adecuada, pues hizo un gráfico de $\frac{3}{7}$, pero notó que no representaba $\frac{7}{3}$, sino $\frac{3}{7}$, luego graficó tres cuadriláteros divididos en tres partes y coloreó siete de ellas, por lo que se pudo observar que ya no había tantos obstáculos con el concepto contraintuitivo trabajado, sino que empezaron a aparecer características de la intuición como lo es la auto evidencia, permitiendo que a partir de múltiples transformaciones se llegue a comprender los conceptos desarrollados en torno a los números racionales.

Dividir en partes iguales el cuadrilátero

Figura 15

Actividad Experimental 2





Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

En este reto matemático en el que se les pidió a los estudiantes que trazaran líneas de tal manera que el papel quede dividido, por un lado, en tres partes iguales, y por otro lado, en seis partes iguales, se evidenció que ellos intentan dimensionar la proporción como una simple división de figuras, lo cual afecta que comprendan cómo se representa numéricamente un número fraccionario; esto permitió que el estudiante visionara distintas maneras para dividir proporcionalmente un cuadrilátero. Todo lo anterior, empieza a evidenciar que la dificultad radica en comprender que la proporción entre los cortes o trazos realizados en una figura implican necesariamente una distribución uniforme entre sus partes.

Como se evidencia en ambas representaciones gráficas, existe una representación absoluta y única que hace parte de la coacción determinada en la caracterización realizada por Fischbein; esta noción de división para los estudiantes es casi independiente a la proporcionalidad, pues su visión sólo es permeada por la subdivisión en las partes mencionadas de la figura entregada; esto ocurre por la manera en cómo interpretan ellos el fraccionario, pues si se reconoce la estructura matemática de un número fraccionario, la representación numérica o gráfica sería más sencilla, pues ya no se deja todo el trabajo a la visión mental, sino que se acompaña por los conceptos contraintuitivos operacionales y de definiciones.

4.4.4 Análisis del Episodio 3-Etapa 4

En el episodio 3 se llevaron a cabo las dos últimas etapas del proceso investigativo, por ende, la etapa 4 se analizó por medio de una actividad didáctico-experimental, similar al juego ¿Quién quiere ser millonario? En este caso se plantearon preguntas con respecto a los números racionales, que fueron formuladas durante el análisis que se llevó a cabo desde la etapa 1, por tanto, cada estudiante debía escoger una respuesta; la actividad permitió identificar un concepto contraintuitivo por parte de la respuesta de E3, la cual pudo ser categorizada en los conceptos contraintuitivos con respecto a las operaciones.

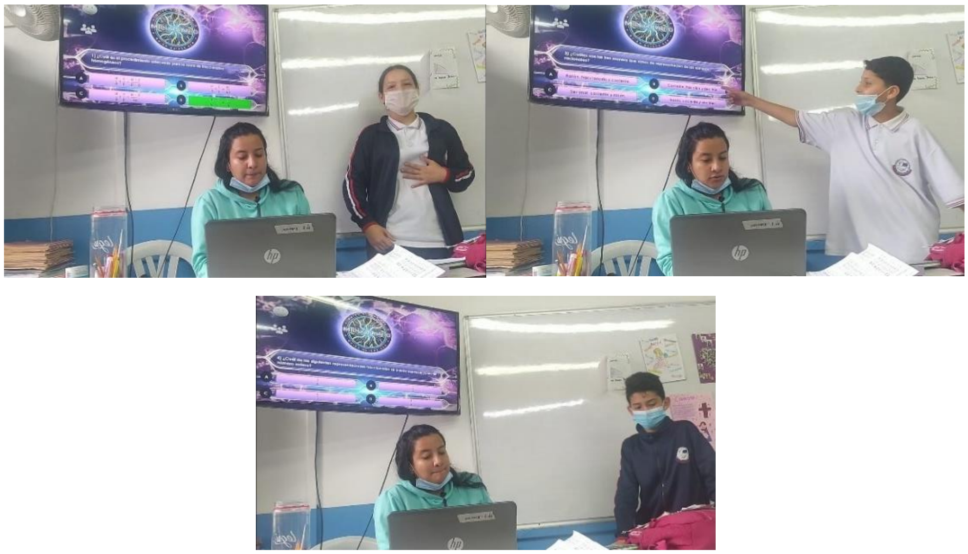
a) Conceptos Contraintuitivos en torno a la Operación.

En el desarrollo de la etapa 4 del episodio 3, se encontró un concepto contraintuitivo con respecto a la operación; la respuesta de E2 frente a la pregunta, permitió evidenciar que hay dificultad al interpretar un número fraccionario como un número entero, pues como hemos dicho anteriormente, su definición es "Simbólicamente, un número es racional si puede escribirse como $\frac{a}{b}$, tal que a y b son números enteros y b $\neq$0." (Saldaña & Melgarejo, 2019, pág. 2), que además se complementa con que el m.c.d. (a, b) =1, lo que demuestra la presencia de un concepto contraintuitivo que afecta la comprensión de los números racionales.

¿Cuál de las siguientes representaciones fraccionarias se pueden expresar como un número entero?

Figura 16

Actividad Experimental 3



Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

A partir del análisis de la interacción con los estudiantes y de los diálogos que se encontraron en el desarrollo de la actividad ¿Quién quiere ser millonario? Se analizó la respuesta del estudiante E3 frente a la pregunta planteada, pues para él, el número fraccionario que representa un número entero es $\frac{3}{6}$. Esto se percibe como un concepto contraintuitivo, en el que la comprensión que se tiene frente a la relación de números enteros con los números fraccionarios se interrumpe por una interferencia de conceptos, por lo que la perseverancia es la característica que se identifica frente a la intuición, pues se evidencia que la interpretación conceptual que asume E2 le hace creer que su concepto es correcto.

4.4.5 Análisis del Episodio 3-Etapa 5

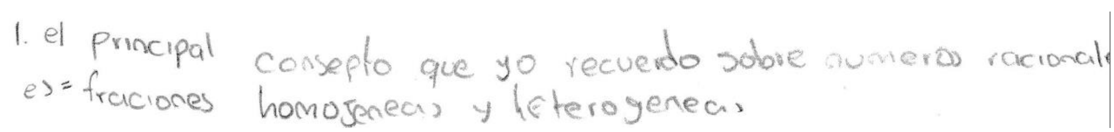
El episodio 3 se finaliza realizando un test conceptual basado en algunas preguntas del test diagnóstico del episodio 1 y del test conceptual desarrollado en el episodio 2. La idea principal de esta actividad fue evaluar cuáles conceptos contraintuitivos persisten en los estudiantes, tras el estudio de los conceptos por medio de la teoría, los ejemplos, los ejercicios, la resolución de los test y los experimentos, así como la participación en las diferentes dinámicas que permitieron la construcción de conocimiento en torno a los números racionales. Los conceptos contraintuitivos desarrollados en los episodios y etapas anteriores mostraron una mayor compresión y se pudo avanzar desde el estado absoluto en el cual se encontraban los estudiantes, aun así, encontramos que para E2 aún persistían dificultades al reconocer el conjunto de los números racionales, lo cual se analiza a continuación.

a) Concepto contraintuitivo en torno a las definiciones.

En el desarrollo de esta etapa se analizó la respuesta desarrollada por E1; es aquí donde se evidenció la reiteración de un concepto contraintuitivo en torno a las definiciones, enmarcado en la comprensión de la definición de los números racionales; para lo anterior, se analizó lo expresado por E1 con respecto a la siguiente pregunta.

¿Cuáles han sido los principales conceptos matemáticos que recuerdas con respecto a los números racionales?

Figura 17
Test Conceptual Final


1. el principal conseplo que yo recuerdo sobre numeros racional es = fracciones homojeneas y leterogeneas

Nota. Tomado de las evidencias audiovisuales del grupo investigado.

En esta etapa 5 se evidenció que E1 aún continúa con afectaciones conceptuales, enmarcadas en considerar que los números racionales siguen siendo aquellos que se expresan de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, es decir, consideran que sólo viene dado por los números fraccionarios; este tipo de expresiones impidió que se reconociera al conjunto de los números racionales como un conjunto numérico que contiene distintas representaciones numéricas; así, se evidenciaron dificultades para que el estudiante reconociera cada una de las definiciones trabajadas en torno al concepto de número racional, enfocando el razonamiento del estudiante hacia una única terminología.

Este tipo de dificultades se pudo evidenciar por la respuesta de E1, quien menciona que "el principal concepto que yo recuerdo sobre números racionales, es igual a fracciones homogéneas y heterogéneas", haciendo posible analizar que estas condiciones vienen dadas por la misma estructura de los números racionales en su definición, así como en el modo de razonar que tienen los estudiantes, pues desde hace tiempo, tanto teoría como operaciones, tiende a desarrollarse de manera mecanicista, lo que junto con los conceptos contraintuitivos, dificultan la comprensión de los estudiantes; las expresiones de E1 permitieron analizar que tiende a quedarse con aquello que considera evidente, con lo que aparentemente es verdadero, cuya información se afirma en la auto evidencia expresado, de acuerdo a las características de la intuición postuladas por Fischbein.

El análisis de los episodios, fases y etapas que se hicieron, permitieron evidenciar algunos conceptos contraintuitivos con respecto a las definiciones, operaciones y representaciones que poseen los estudiantes respecto al conjunto de los números racionales; como se pudo apreciar, la existencia de procesos mecanicistas son una de las dificultades que afectan la comprensión de los estudiantes, en cuanto que su reiterativo procedimiento en la ejecución de ejercicios, impidió que se manifieste el amplio campo de conocimiento al cual pueden acceder los estudiantes. En el transcurso de este análisis, se evidenció la presencia de algunos aspectos contraintuitivos que prevalecieron en los estudiantes participantes, así como opacidad de otros conceptos en los que quedaron pocos rasgos contraintuitivos; cada una de estas condiciones permitieron dar cuenta de cómo los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales en los estudiantes, no necesariamente de forma negativa, ya que algunos conceptos contraintuitivos pueden subsistir sin interrumpir la comprensión o pueden catapultarla.

Capítulo V. Conclusiones

Este capítulo está conformado por las conclusiones obtenidas en el trabajo de investigación a partir de los objetivos y análisis de la información, además de nuevas perspectivas encontradas y las futuras líneas de investigación en torno a los conceptos contraintuitivos, finalmente se desarrollaron las discusiones que se presentaron en el trabajo investigativo.

5.1 Consecución de los Objetivos Generales y Específicos

A través del análisis realizado en las fases, episodios y etapas, se evidenció que la comprensión de los estudiantes en cuanto a los conceptos contraintuitivos de los números racionales se afecta porque la interpretación que realizan se fundamenta en las primeras impresiones que tienen de la definición de los números racionales. Sólo el hecho de mencionar que los números racionales son una división o que se puede representar únicamente como fracción, permite develar que los procesos mecánicos hacen parte de estos conceptos contraintuitivos, puesto que, la interpretación que se da a este conjunto se basa en la inmediatez y la certeza intrínseca caracterizada por Fischbein, puesto que la primera impresión es la que queda en el razonamiento del sujeto.

Además, el reiterativo proceso de las operaciones que se hacen en el conjunto de los números racionales puede incorporar en los estudiantes una idea sesgada del proceso y razonamiento que se obtiene a partir de la comprensión de los conceptos dentro de este conjunto numérico. Este tipo de ideas, a través de las preguntas que se realizaron a los estudiantes y las que ellos postularon, permitieron encontrar afectaciones orientadas hacia distintas líneas, como la definición, operatividad y representación, enmarcadas en las características contraintuitivas.

Así, aspectos esenciales como la operatividad y la representatividad son generalidades que se mantuvieron a lo largo de las respuestas obtenidas por los estudiantes en cada uno de los episodios, conllevando a malinterpretar la definición de los números racionales y determinando así conceptos contraintuitivos, los cuales se perciben al considerar que la recta numérica puede ser un plano cartesiano o que fracciones homogéneas y heterogéneas se operan siempre de distinta manera, todo ello hace parte de esas características contraintuitivas que afectan la comprensión de los números racionales.

La unión de conceptos previos y experiencia fueron base clave en la respuesta de cada estudiante en el desarrollo de los episodios, pues la consecución de expresiones como dividir, restar o sumar, evidenció que cada estudiante asociaba lo que conocía con los nuevos conceptos que estaban ante ellos, lo que para ellos fue la apertura necesaria para dar respuesta a la mayor parte de preguntas, porque al responder una de ellas e interpretando que las siguientes eran particularidades de la primera, los estudiantes generaron un proceso cognitivo en el que su intuición se orientó hacia la familiaridad de términos y operaciones.

Por otro lado, es importante destacar la manera en la que los estudiantes hacen uso de su lenguaje para referirse a términos matemáticos; mencionar que los números decimales son aquellos que se separan por una coma, involucra en el estudiante un razonamiento que le ayuda a comprender los conceptos trabajados, ya que a medida en que se refina esta conceptualización, el estudiante reafirma lo que comprendió, porque es más sencillo tener como base un buen concepto y poca terminología matemática, que tener un buen léxico matemático y poca comprensión del concepto.

Los estudiantes al estar enfrentados a estas dinámicas individuales que les presupuso un reto, consideraban correcto empezar a generar conjeturas y expresar en sus propias palabras lo que ellos comprendieron; en este tipo de expresiones pueden estar encerradas algunas bases conceptuales contraintuitivas, porque según lo que el estudiante entiende es que empieza a lanzar palabras explicativas, que a fin de cuentas, lo pudo llevar a confundir más o aclarar las ideas que traía consigo, dependiendo de la comprensión y el uso tan común que se de en la escuela.

Por ello, comprender que el conjunto de los números racionales es aquel que contiene a los enteros y que a su vez contiene a los naturales, permite mitigar los conceptos contraintuitivos que emergen de la concepción de que el conjunto de los números naturales contienen a los números racionales; entender que los números racionales poseen orden específico a pesar de su densidad numérica, facilitó que los estudiantes comprendieran que entre dos o más números racionales, se puede establecer un orden jerárquico, sin importar la representación numérica que este posee, pues cada número ocupa un único lugar en la recta numérica.

Se sabe que cada estudiante aprende, entiende y comprende de distinta manera, lo cual permite ampliar la percepción hacia el campo general de los conceptos contraintuitivos, lo que necesariamente no se enmarca en lo teórico, sino que se abarca desde las expresiones más simples como “dividir”, hasta procesos más complejos como lo es “el uso de unidades y decimales dentro de una representación de fracciones” que encierra el panorama de las características intuitivas mencionadas por Fischbein; lo anterior permite categorizar en distintas nociones cada uno de los conceptos contraintuitivos encontrados e involucrados en los conceptos de los números racionales.

5.2 Nuevas Perspectivas Encontradas

En el desarrollo de la investigación y del análisis obtenido de los episodios, además de la interacción con los estudiantes en el aula, se pudo encontrar respuestas a nuestra pregunta de investigación, pero también se encontraron otros conceptos y definiciones que conllevan a plantear la pregunta: ¿De qué manera la memorización y la intuición influyen en la comprensión de los números racionales?

La pregunta anterior es el resultado de observar y analizar que los estudiantes en el proceso de comprensión y al momento de adquirir aprendizajes, utilizan principalmente a la memorización, pues realizan operaciones o responden conceptos y definiciones a partir de lo que un maestro, libro u otra fuente les enseñó y lo practican memorísticamente tal cual lo aprendieron; esto conlleva a que los estudiantes al momento de solucionar problemas lleven un patrón mecánico. De lo anterior, se puede deducir que la memorización, aunque se considera un factor importante para la comprensión matemática, hace que el estudiante se cierre ante las posibilidades de razonar o pensar intuitivamente.

5.3 Futuras Líneas de Investigación

Como futura línea de investigación en torno a los referentes teóricos y al desarrollo de este trabajo, se propone desarrollar investigaciones que profundicen sobre la influencia de la mecanización en el estudio, enseñanza, aprendizaje y comprensión de los números racionales.

Lo anterior se soporta teniendo en cuenta que, al analizar los resultados de los tres episodios, se observó que los estudiantes presentaron una evidente memorización al momento de realizar las diferentes actividades, por otro lado, la concepción errónea de ciertas temáticas anteriores a la desarrollada en el trabajo generó ciertas dificultades en el momento de comprensión de los conceptos. Así mismo, los conceptos contraintuitivos son constantes en la enseñanza de las matemáticas, por lo cual se debe trabajar sobre ellos y cómo estos afectan la comprensión de estas temáticas y/o conceptos; cabe recalcar que cuando se habla de afectar no necesariamente es de forma contraproducente.

5.4 Discusión

En el desarrollo del trabajo investigativo, se encontraron dos temas que generaron controversia, el primero corresponde a la definición que se dio en el trabajo sobre los números racionales; algunos autores emplean una definición general, pero desde nuestro punto de vista como maestros en formación que iniciamos el proceso como investigadores y a partir de los resultados del análisis, creemos necesaria una definición más completa y universal en todos los ámbitos y niveles educativos.

Otro asunto de discusión se centra entre los planteamientos de los racionalistas y los intuicionistas, en su relación con los conceptos contraintuitivos y la comprensión de los números racionales. Como primer asunto de discusión se tiene lo observado dentro del aula de clase; los análisis a las guías planteadas y el desarrollo de cada una de las actividades realizadas permitieron evidenciar que la falta de rigurosidad a la hora de expresar el concepto de los números racionales afectó el proceso de comprensión en los estudiantes. Lo anterior debido a que, al momento de analizar la prueba diagnóstica, se pudo establecer que la mayoría de los estudiantes concebían a los números racionales, sólo como aquellos que se representan de la forma $\frac{a}{b}$, además, decían que estas fracciones denotaban una operación tal como la resta y/o división.

Cuando se inició el proceso de enseñanza y conceptualización en torno a los números racionales, los estudiantes manifestaron que ellos creían que los fraccionarios eran una operación, ya que, los veían desde un punto de vista operativo, por otro lado, cuando se les habló del concepto de número racional, mencionaron que se los definieron como aquellos números que se representan de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$. Esto llevó, teniendo en cuenta la caracterización de Fischbein, a evidenciar que ciertos rasgos cognitivos se vieran afectadas negativamente por los conceptos contraintuitivos; debido a esta definición, los estudiantes percibían las fracciones como una operación y los subconjuntos asociados a los números racionales no eran correctamente concebidos.

Debido a lo anterior, se analizó que era de suma importancia reforzar la definición de número racional, para que los estudiantes lograran incluir los conjuntos de los números naturales y enteros en estos, además de reconocer que solo las fracciones que tiene un m.c.d (a, b) = 1, son las que representan un número racional, ya que las demás son simples representaciones equivalentes a las mencionadas anteriormente. Por supuesto, esta definición rigurosa, permite conceptualizar en el campo de las matemáticas discretas, conceptos de orden mayor, relacionados con las relaciones de equivalencia particiones y representante de una clase de equivalencia.

Desarrollando esta nueva definición en el aula de clase, se evidencia que los estudiantes logran incluir los números racionales, diferenciándolos, haciendo representaciones en la recta numérica, realizando operaciones o dando un orden específico. Al finalizar las actividades experimentales, sólo uno de los estudiantes analizados presentó a los números racionales como aquellos que están inmersos en una operación. Lo anterior permitió reconocer por medio de la extrapolación y la certeza intrínseca que estas concepciones permanecen arraigadas y son difíciles de erradicar, aun así, esto no imposibilita al estudiante comprender diferentes conceptos que se trabajan en relación con los números racionales.

El otro asunto de discusión se encuentra en el análisis desarrollado en torno a los conceptos contraintuitivos; se presentan dos perspectivas que dan sus aportes en cuanto al modo de razonar del sujeto; por una parte se encuentran los intuicionistas, quienes perciben que la experiencia adquirida puede ser un punto clave para entender su manera de razonar, pues, a través de procesos metodológicos y de estructuras cognitivas, el sujeto es capaz de mantener respuestas coherentes y demostrar el nivel de interpretación requerido en sus respuestas; por otra parte, están los racionalistas, quienes expresan que la realidad del pensamiento se enmarca en la manera cómo razona ante las situaciones de su contexto, cada una de las formas de pensar se gestiona a través de la razón y por ello se estructura la comprensión de cada sujeto.

En torno a los conceptos contraintuitivos de los números racionales, estas perspectivas se pueden evidenciar cuando los intuicionistas develan que el estudiante para comprender la formalidad de este concepto, debe hacer uso de las prácticas vivenciales de cada quien, donde se empieza a generar características de auto evidencia y de certeza, dejando al sujeto la oportunidad de enfocar sus cogniciones intuitivas hacia las respuestas de suficiencia; también los racionalistas aportan a este conocimiento, cuando facilitan al sujeto estructurar su razón a través de argumentos válidos y demostrables, mostrando la capacidad de raciocinio que debe alcanzar el sujeto según el nivel que se ubica. En fin, estas perspectivas pueden facilitar que el sujeto forme estructuras mentales, solidificadas en las intuiciones y modos de razonar del sujeto.

Referencias

Boaler, J. (2016). Mentalidades matemáticas. En J. Boaler, *Mentalidades matemáticas.* (pág. 276). Málaga, España.: Sirio.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Universidad de Costa Rica.*, 123-138.

Canpuzano, C. (2017). Representaciones semióticas del número racional. *Universidad Autónoma de Manizales.*, 1-59.

Crespo, C. (2008). Intuición y razon en la construcción del conocimiento matemático. *CICATA-IPN.*, 717-727.

Dedekind, R. (1993). *Qué son y para qué sirven los números.* Alianza editorial.

Diaz, A. (2008). Los decimales más que una escritura. *Acelerating the world`s research*, 118.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En R. Douady, *Ingeniería didáctica en educación matemática* (págs. 1-148). Grupo editorial Iberoaméricana, S.A. de C.V.

Escolano, R., & Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Revista iberoamericana de educación matemática*.

Escolano, R., & Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Revista Iberoamericana de educación matemática*.

Espinosa, M. (1996). Berson, Las matemáticas y el devenir. . *La ciencia de los filósofos.*, 223-243.

Espinoza, J., Lupiáñez, J., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Matemática, educación e internet.*

Fischbein, E. (1987). Intuición en ciencias y matemáticas. En E. Fischbein, *Intuición en ciencias y matemáticas* (págs. 43-56). Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Batanero, C., & Flores, P. (2003). EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO COMO RECURSO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. *Juan D. Godino, Carmen Batanero y Pablo Flores.*, 1-17.

González, O., González, M., & Ruiz, J. C. (2012). Consideraciones éticas en la investigación pedagógica: una aproximación necesaria. *Edumecentro, 4*(1), 1-5.

Hernández, L., Juárez, J., & Slisko, J. (2015). Tendencias en la educación matemática basada en la investigación. *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.*, 1-39.

López, C. (2007). La intuición y la matemática. *Universidad de Palermo.*, 1-8.

Márquez, F., López, L., & Pichardo, V. (2008). Una propuesta didáctica para el aprendizaje centrado en el estudiante. *Apertura, 8*(8), 66-74.

Meel, D. (2003). Modelos y teorias de la comprensión matemática. Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 221-271.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Resolución Educativa Colombia Aprende.

MEN. (2013). *Ley General de Educación. Ley 115 de Febrero 8 1994.* UNION Ltda.

MEN. (2013). *Ley General de Educación. Ley 115 de Febrero 8 de 1994.* Bogotá: UNIÓN Ltda.

MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. *MEN*, 1-88.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Investigación didáctica, 1*(29), 75-88.

Nortes, A., & Martínez, R. (1994). Psicología Piagetana y Educación Matemática. *Interuniversitaria de formación del profesorado, nº21*, 59-70.

Peña, L. (2020). Consideraciones sobre la noción de intuición matemática. . *AGORA*, 1-15.

Pérez, A. (2011). Tres enfoques para enseñar los números racionales en el septigo grado de educación primaria. *Universidad de Cartagena.* , 1-54.

S.A.S., G. D. (s.f.). *IEACA*. IEACA: https://www.ieaca.edu.co/

Saldaña, V., & Melgarejo, N. (2019). Números racionales. . *TICLAS.*, 1-19.

Salgado, A. C. (2007). Investigación cualitativa: diseño, evaluación del rigor metodológico y retos. *Liberabit*(13), 71-78.

Torres, C. (2016). Acerca de la comprensión en matemáticas. *Miscelánea matemática*, 81-103.

Anexos

Anexo 1

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PRÁCTICA PEDAGÓGICA
Semestre 2022-1

En el marco del curso de Trabajo de Grado del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física del Departamento de Enseñanza de las Ciencias y las Artes, solicitamos de su consentimiento en calidad de acudiente de un estudiante para realizar diferentes actividades pedagógicas e investigativas que requieren la grabación de audios, videos y la toma de imágenes.

Con el presente documento como consentimiento informado, usted autoriza:

1. La toma de fotografías, videos, audios para ser utilizados como material pedagógico e investigativo.
2. La toma de fotografías en actividades pedagógicas para ser utilizadas en la página web de la Universidad y/o Facultad, Boletines, Informes de Gestión y Presentaciones Académico-Administrativas.
3. Que el material fotográfico, videos, audios entren a ser parte del archivo de la Universidad de Antioquia y sus bases de datos.

Datos del Acudiente:

Nombres y Apellidos completos	
Identificación	
Firma	

Datos del estudiante:

Nombres y Apellidos completos	
Grado y Grupo	
Institución Educativa	
Firma	

Agradecemos su colaboración.

Cordial Saludo.

Atentamente,

Estudiantes del curso de Trabajo de Grado, DECA, FE, UdeA.

Anexo 2

Plantilla de Propuesta Didáctica

TÍTULO: Conceptos contraintuitivos que afectan el proceso de comprensión de los números racionales	**GRADO:** **7º**
JUSTIFICACIÓN/DESCRIPCIÓN GENERAL Esta propuesta didáctica se crea para analizar cómo los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión que los estudiantes tienen en torno al conjunto de los números racionales, además de evidenciar algunas características intuitivas categorizadas en lo expresado por Fischbein. Se podrán encontrar actividades relacionadas con la definición, operación y representación numérica y gráfica de los números racionales. La evidencia de la comprensión y experimentación de estos conceptos contraintuitivos permitirán especificar las principales afectaciones de los estudiantes al momento de estudiar este conjunto numérico; cada actividad experimental y test conceptuales propuestos en las guías, permite recolectar la información necesaria para analizar y categorizar cada uno de estos conceptos contraintuitivos que surjan en el avance de cada actividad. En la presente propuesta didáctica queremos que los estudiantes entiendan que el uso de terminologías matemáticas y el razonamiento que se orienta al conjunto de los números racionales, son argumentos que le ayudarán a disminuir conceptos contraintuitivos que puedan tener arraigados en ellos. En este sentido, debemos partir de una definición puntual de los números racionales que según Saldaña y otros (2019) "es aquel que se puede expresar de la forma a/b, de tal manera que a y b sean números enteros, pero b tiene que ser distinto de 0" donde podemos anexar que "el máximo común divisor de a y b debe ser igual	

a 1 m.c.d(a, b) = 1, cuyo argumento propone evidenciar que de todos los números que se pueden escribir como a/b, se les llamará racionales al número más simple entre sus equivalentes.

Para determinar qué conceptos son o no contraintuitivos, tendremos en cuenta las características de las cogniciones intuitivas referenciadas por Fischbein, en las que se encuentran la autoevidencia, certeza intrínseca, perseverancia, carácter coercitivo, carácter extrapolable, globalidad, carácter implícito y status de la teoría; cada uno de las características mencionadas anteriormente, son las que permitirán a través de un análisis, decir cuáles de los argumentos en las respuestas de los estudiantes pueden ser categorizadas en lo contraintuitivo. Asimismo, se busca desarrollar contenidos interdisciplinares en los cuales los estudiantes puedan interactuar con el medio, para comprender conceptos contraintuitivos que afectan su aprendizaje, puesto que, como lo menciona Márquez y otros (2008) "la propuesta didáctica plantea la construcción de prácticas educativas innovadoras para el abordaje de los contenidos con un énfasis lúdico que faculte al alumno para el autoaprendizaje"

Por otro lado, esta propuesta didáctica es una herramienta que los docentes del área de matemáticas pueden desarrollar con los estudiantes del grado 7º, ya que es en este grado en el que se desarrollan los conceptos de los números racionales. Está compuesta inicialmente por la pregunta y el objetivo con el cual se llevó a cabo la investigación, seguidamente se plantean los contenidos que están inmersos en las diferentes actividades, tal como la metodología de ejecución y los instrumentos y/o materiales que se necesitan para el desarrollo de las mismas, además de un espacio para la evaluación y retroalimentación.

En este sentido, se pretende que el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro y fuera de las aulas de clases, sea comprendido e interpretado desde el lenguaje cotidiano, concebido a partir de la interacción con materiales de fácil acceso y simbolización matemática usada en el desarrollo de los conceptos de los números racionales.

<table>
<tr><td colspan="2">

SUGERENCIAS PARA GUIAR EL TRABAJO

En primer lugar tenemos la fase 1, donde se presentará un test conceptual que pretende encontrar la familiaridad que tienen los estudiantes con el conjunto de los números racionales, en los aspectos teóricos, operativos y de representación; es aquí donde las ideas previas de los estudiantes se hacen de vital importancia para dar respuesta a las preguntas propuestas; una vez terminado se propone un experimento de enseñanza donde los estudiantes deben ordenar de menor a mayor ciertas cantidades numéricas, en las que se incorporan los fraccionarios, decimales y cocientes.

Luego, tenemos la fase 2, que contiene una actividad experimental consistente en que a cada estudiante se le hace tirar un par de dados y según el resultado de los dados, hace la prueba que corresponde y que está dada por una tabla y un test conceptual donde irán preguntas orientadas hacia tres representaciones numéricas (fracción, decimal y cociente), todo ello con el propósito de reconocer cómo los estudiantes interpretan las diferentes representaciones de los números racionales y evidenciar así si prevalecen conceptos contraintuitivos, determinando si surgen otros nuevos.

Por tal motivo, tenemos la fase 3; en ella se hace una retroalimentación sobre los números racionales a través de una actividad didáctica llamada “quién quiere ser millonario”, para poder hacer un análisis de los estudios realizados con el grupo y, por último, un test conceptual que permita analizar cómo los conceptos contraintuitivos ralentizan el proceso de comprensión de los números racionales.

</td></tr>
<tr><td>

CONTENIDOS CONCEPTUALES (ESTÁNDARES/DBA)

Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

</td><td>

CONTENIDOS ACTITUDINALES (COMPETENCIA CIUDADANA-ESTÁNDAR)

</td></tr>
</table>

	• Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. • Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de fi guras planas y cuerpos con medidas dadas. • Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas.
CONTENIDOS PROCEDIMENTALES • Identificar los conceptos previos que emplean los estudiantes con respecto al concepto de los números racionales. • Caracterizar habilidades y estrategias con las que se desenvuelven los estudiantes en la solución de problemas y conceptos planteados; además de evidenciar los conceptos intuitivos que emplea para tales soluciones. • Analizar y evaluar conceptos contraintuitivos a los que se enfrentan los estudiantes en el desarrollo de comprensión de las diferentes nociones de los números racionales; como lo es la densidad, el principio de orden, las relaciones como parte-todo, sus operaciones y las tres representaciones trabajadas. • Detallar cómo se lleva a cabo la evolución en cada fase trabajada e identificar los cambios y procesos nuevos que se	

<table>
<tr><td colspan="2">encuentren en la comprensión de los números racionales.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">PREGUNTA DINAMIZADORA O AUTÉNTICAS:

¿De qué manera los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales?</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVO DE ENSEÑANZA/APRENDIZAJE:

Analizar cómo los conceptos contraintuitivos afectan el proceso de comprensión de los números racionales.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES</td></tr>
<tr><td>Sesiones
1
2
3</td><td>Tiempo
85min – 90min
85min – 90min
85min – 90min</td><td>Actividad Para Suscitar
• Conceptos contraintuitivos en los números racionales.
• Comprensión de los procesos de razonamiento de los números racionales.
• Conceptos contraintuitivos teóricos.
• Conceptos contraintuitivos operativos.
• Conceptos contraintuitivos de representación.</td></tr>
</table>

Institución Educativa Alfredo Cock Arango

Área	Matemáticas
Guía #1	Introducción a los números racionales
Grado	7°

LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales son un conjunto numérico que contiene a los números enteros, son infinitos y tienen diversas representaciones e interpretaciones, por ejemplo, en forma de fracción, razón o cociente, en los que se presenta la ordinalidad y la cardinalidad. Una de las formas de escribir los números racionales es la siguiente:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \ \ b \neq 0\right\}$$

Objetivo: Analizar algunos conceptos contraintuitivos que los estudiantes tienen con respecto a la noción de los números racionales.

Prueba diagnóstica

1) ¿Qué son los números racionales y donde se usan en su cotidianidad?
2) ¿Cuáles han sido los principales conceptos matemáticos que recuerdas con respecto a los números racionales?
3) ¿Qué semejanzas o diferencias encuentras en las diferentes representaciones de los números racionales?
4) ¿La operación suma de los números fraccionarios es igual a la operación suma que se realiza con los números enteros? ¿Por qué?
5) Representa gráficamente un número racional.
6) ¿Existe algún orden específico en los números racionales? ¿Por qué?
7) Observa las siguientes fracciones $-\frac{7}{8}, \frac{-7}{8}, \frac{7}{-8}$ ¿Son iguales? ¿Por qué?
8) ¿Consideras que este razonamiento es correcto $-\frac{5}{2} = \frac{-5}{-2}$?
9) Ubica los siguientes números racionales en la recta numérica:

- -7
- 0
- $\frac{3}{9}$
- -3
- 6

- 0,5

Principio del buen orden

El principio del buen orden, es uno de los teoremas más utilizados para determinar que en un conjunto numérico existe un primer elemento, que permite establecer la dirección creciente de su cardinal; en este sentido y al analizar su definición, podemos establecer que en todo conjunto numérico, en este caso los números racionales, se puede establecer una jerarquía u orden entre cualquier par de números, lo que permite graficar, operar, representar y nombrar un orden específico, definiéndolo como un conjunto ordenado.

Actividades experimentales

Se llevan las fichas con varios números racionales y se ubican en el tablero, para que cada estudiante pase al frente y tome una ficha; así, uno a uno se irá dando un orden a los números racionales, teniendo en cuenta las explicaciones dadas en clase.

Elaborado por	Luis Gabriel Agua Hernández Lizeth Dayana Lozada Jiménez Paola Viviana Tobar Rosales
Materiales:	Fichas de cartulina, cinta, marcadores, tijeras.
No. de páginas:	2

Institución Educativa Alfredo Cock Arango

Área	Matemáticas
Guía #2	Representaciones de los números racionales
Grado	7°

REPRESENTACIONES DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales tienen diferentes representaciones e interpretaciones; en esta guía se presentarán tres de los casos considerados importantes al momento de estudiar los números racionales. Entre ellas se puede encontrar: la representación como número fraccionario, representación como cociente y representación como número decimal.

Representación como número fraccionario

Es la representación de una división indicada entre dos o más números enteros. Estos números por lo general se representan en la forma $\frac{a}{b}$, en donde al segmento horizontal se le llama vínculo.

Con estos números se pueden realizar diferentes operaciones, como lo son la suma, resta, multiplicación y división.

Representación como cociente

Se conoce como cociente, al resultado que se obtiene tras dividir un número entero por otro.

Representación como número decimal

En el ámbito de las matemáticas, se conoce como número decimal a aquellos que cuentan con una parte entera, una coma o punto decimal y una parte decimal diferente a 0 (que se coloca después de la coma o punto decimal).

Objetivo: Reconocer los conceptos contraintuitivos que se presentan en la comprensión de las diferentes representaciones de los números racionales.

Test Conceptual

1) ¿Qué características cumplen los decimales?
2) ¿Cómo ubicar decimales en la recta numérica?
3) ¿En qué se relaciona y se diferencia una fracción, un decimal y un cociente?

4) ¿Todo número entero se puede representar como fracción? ¿Por qué?
5) Si sumas $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ y luego $\frac{3}{9}+\frac{4}{7}$ ¿Qué procedimiento has realizado? ¿Es el mismo procedimiento en ambos casos?
6) ¿Crees que $4\frac{6}{3}$ es una fracción? ¿Por qué?

En las preguntas 7 a 9, elige la opción que creas es la correcta.

7) ¿Qué es un cociente?
    a) Una división
    b) Una proporción entre dos números.
    c) Una operación entre números.
    d) Una comparación entre dos cantidades
8) El cociente de dos números racionales siempre es un número racional
    a) Verdadero
    b) Falso
9) En la división de números racionales se cumple la propiedad conmutativa
    a) Verdadero
    b) Falso

Actividades Experimentales

Escalera de decimales

Objetivo: Reconocer con los estudiantes las diferentes representaciones de los números racionales y ponerlos a prueba.

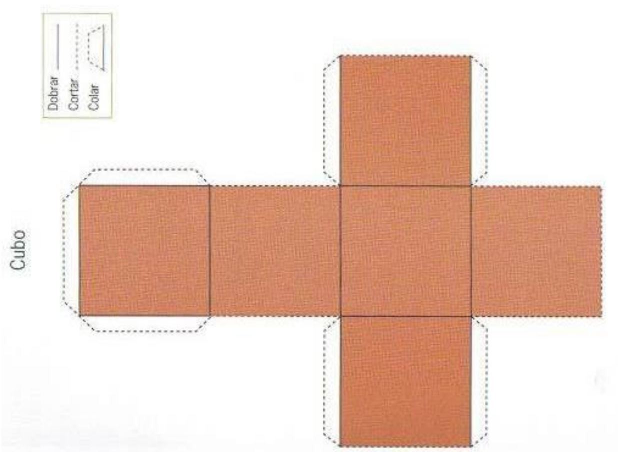
Metodología: A cada estudiante se le hace tirar un par de dados y según el resultado de los dados, se ubica en el rectángulo indicado de la tabla, para luego ejecutar la instrucción. La tabla se muestra a continuación:

Materiales:

- Dados
- Lápiz
- Borrador
- Hoja de papel

Reto matemático

Armar un cubo con la siguiente maqueta, para luego realizar dos cortes en los que se aseguren cuatro figuras iguales.



Elaborado por	Luis Gabriel Agua Hernández Lizeth Dayana Lozada Jiménez Paola Viviana Tobar Rosales
Materiales:	Fichas de cartulina, cinta, marcadores, tijeras.
No. de páginas:	3

Institución Educativa Alfredo Cock Arango

Área	Matemáticas
Guía #5	Retroalimentación
Grado	7°

RETROALIMENTACIÓN

Los números racionales.

Conforman un conjunto numérico en el que se puede establecer un orden, es infinito e incompleto. Este conjunto se puede representar de distintas maneras tales como, número fraccionario, cociente, razón y número decimal; además, se caracteriza por cumplir con las propiedades de un campo, bajo la operación suma y la operación multiplicación.

Objetivo: Analizar cómo los conceptos contraintuitivos ralentizan posiblemente el proceso de comprensión de los números racionales.

Actividad Experimental

¿Quién quiere ser Millonario?

Objetivo: Retroalimentar la conceptualización desarrollada en torno a los números racionales, con el fin de analizar y contrastar la información recolectada.

Metodología: Llevar al aula diferentes operaciones y preguntas sobre los temas estudiados de los números racionales, pedir a los estudiantes que de cuatro opciones escojan la correcta y si el estudiante la responde correctamente puede avanzar en los niveles. El que llegue al nivel 10 gana.

Test Conceptual

1) ¿Cuáles han sido los principales conceptos matemáticos que recuerdas con respecto a los números racionales?

2) Si sumas $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ y luego $\frac{3}{9}+\frac{4}{7}$ ¿Qué procedimiento has realizado? ¿Es el mismo procedimiento en ambos casos?
3) ¿Todo número decimal se puede representar como fracción? ¿Por qué?
4) ¿Qué es un cociente? (Elige la opción que creas es la correcta)

a) Una división

b) Una proporción entre dos números.

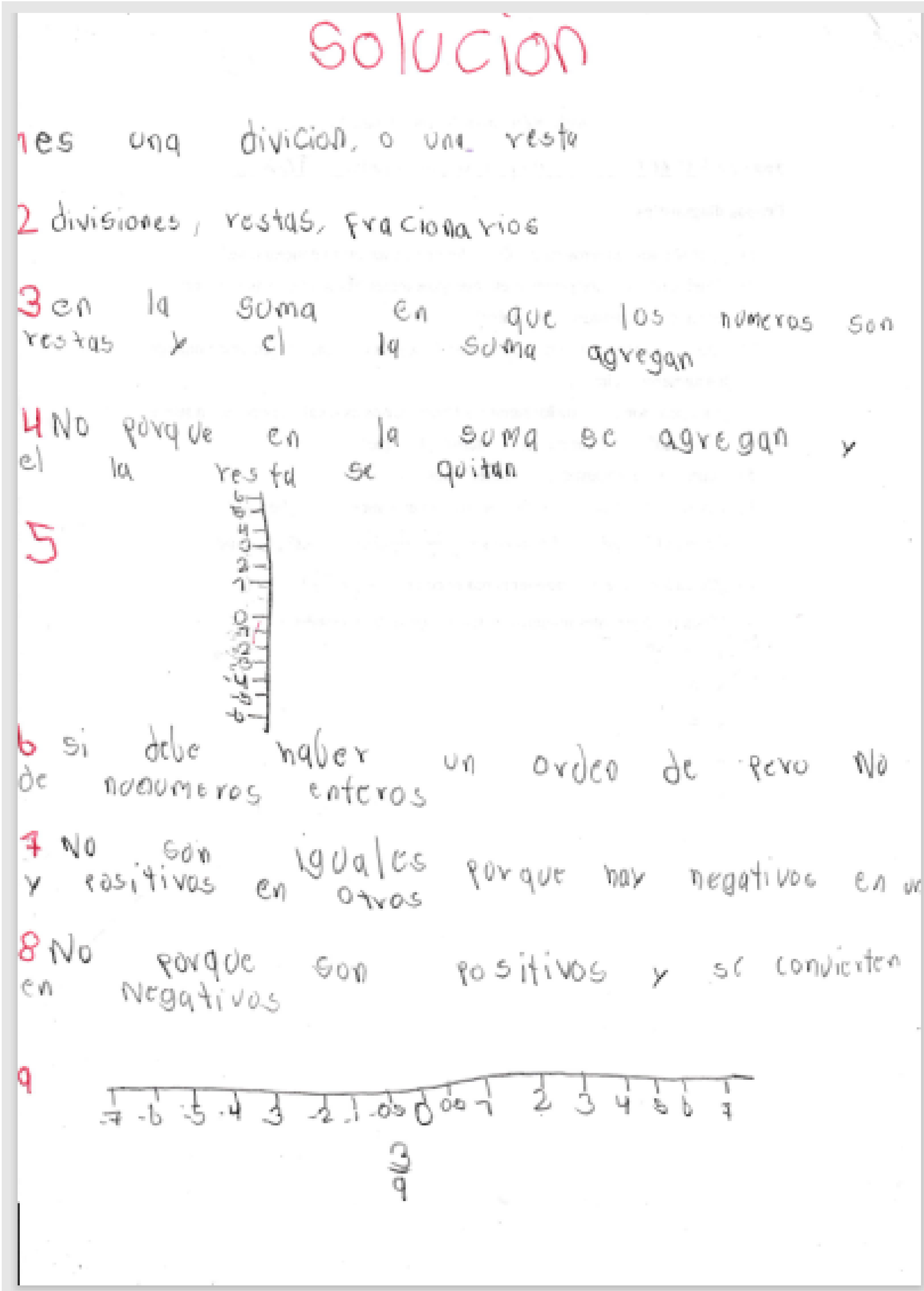
c) Una operación entre números.

d) Una comparación entre dos cantidades

5) ¿En qué se relaciona y se diferencia una fracción, un decimal y un cociente?
6) ¿Podemos representar el resultado de una fracción como un entero o decimal? ¿De qué manera?
7) Observa las siguientes fracciones $-\frac{7}{8}$, $\frac{-7}{8}$, $\frac{7}{-8}$ ¿Son iguales? ¿Por qué?
8) ¿Consideras que la siguiente igualdad es correcta? $-\frac{5}{2}=\frac{-5}{-2}$

Elaborado por	Luis Gabriel Agua Hernández Lizeth Dayana Lozada Jiménez Paola Viviana Tobar Rosales
Materiales:	Papel, Lápiz
No. de páginas:	2

Anexo 3


Solucion

1 es una divicion, o una resta

2 divisiones, restas, fracionarios

3 en la suma en que los numeros son restas y el la suma agregan

4 No porque en la suma se agregan y el la resta se quitan

5

6 si debe haber un orden de pero No de nuoumeros enteros

7 No son iguales porque hay negativos en un y positivas en otras

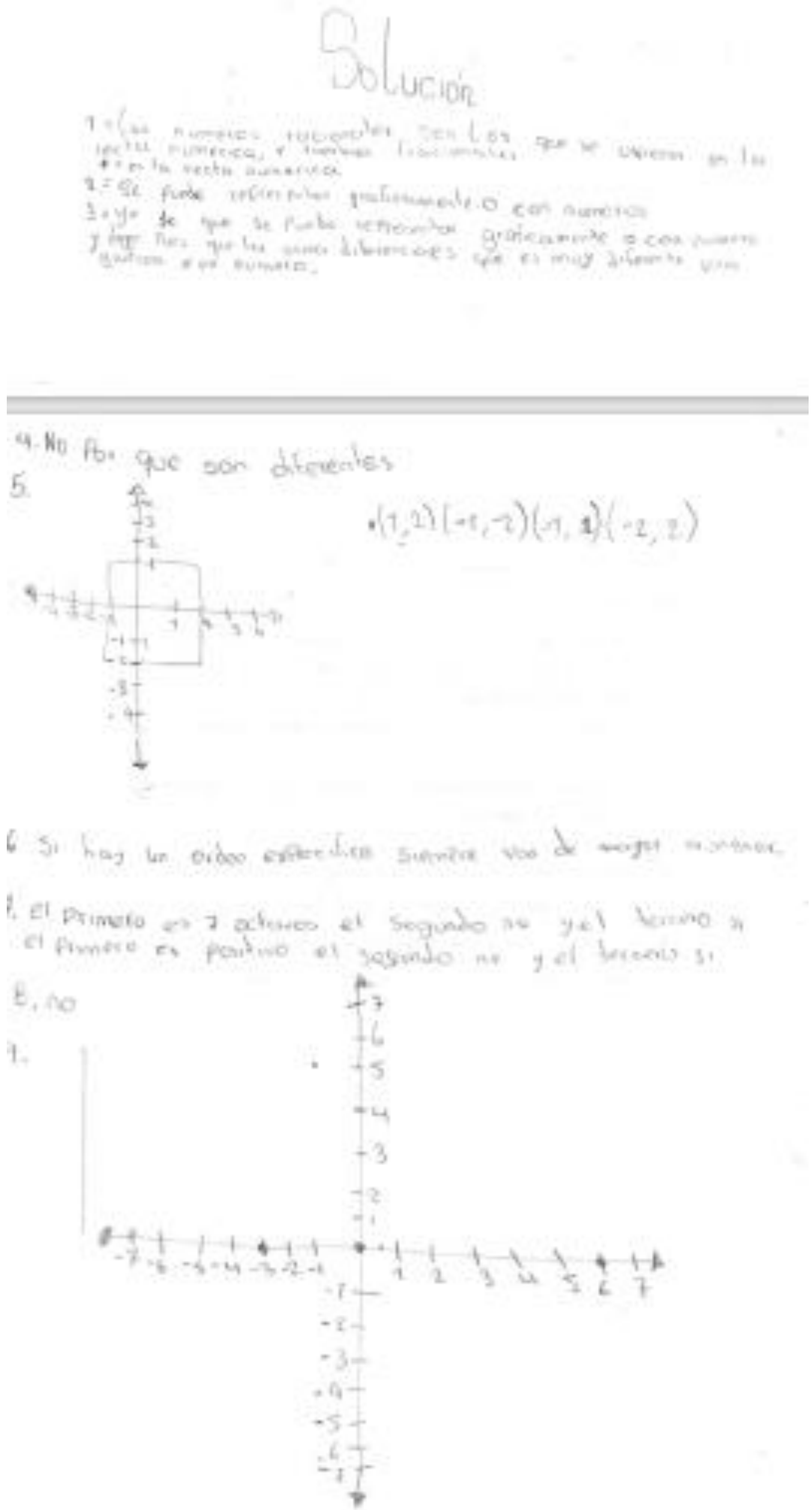
8 No porque son positivos y se convierten en Negativos

9

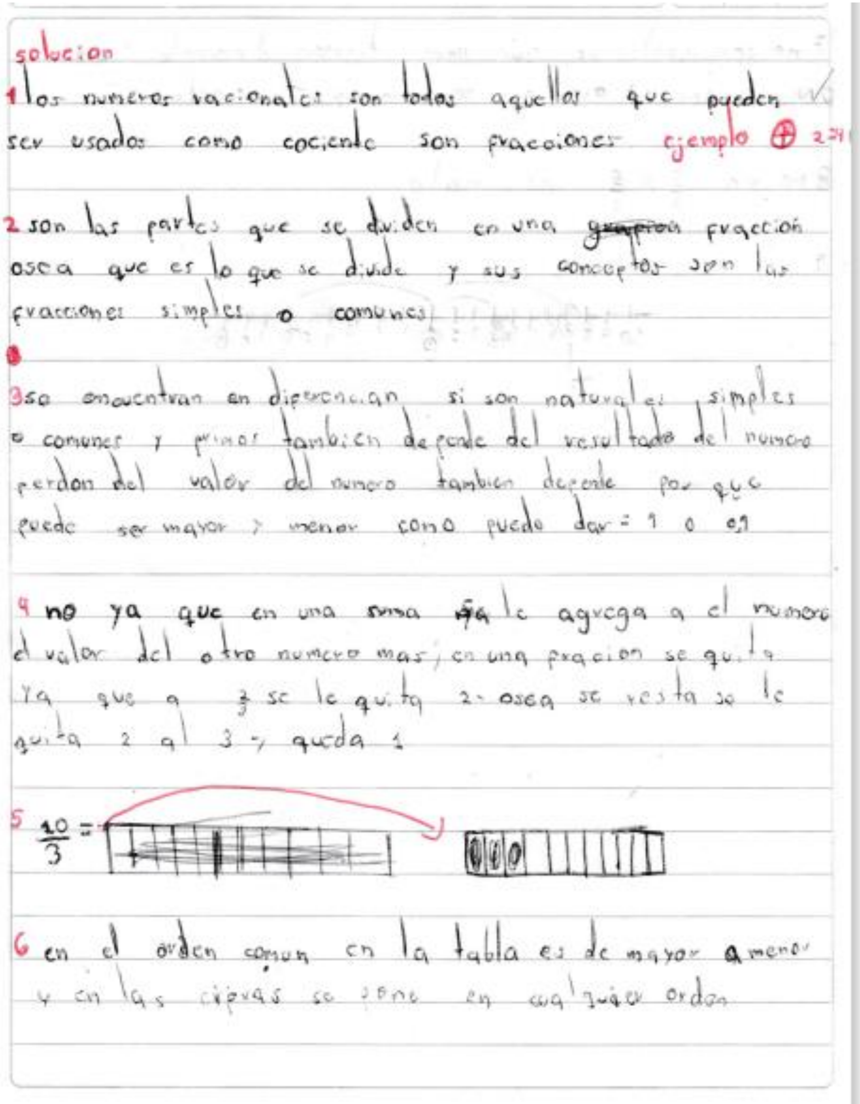
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 -0.5 0 0.5 1 2 3 4 5 6 7

3/9

Anexo 4


Solución
4. No Por que son diferentes
5.
6. Si hay un orden específico siempre voy de mayor a menor
8. no
9.

Anexo 5


solucion

1 los numeros racionales son todos aquellos que pueden ser usados como cociente son fracciones ejemplo

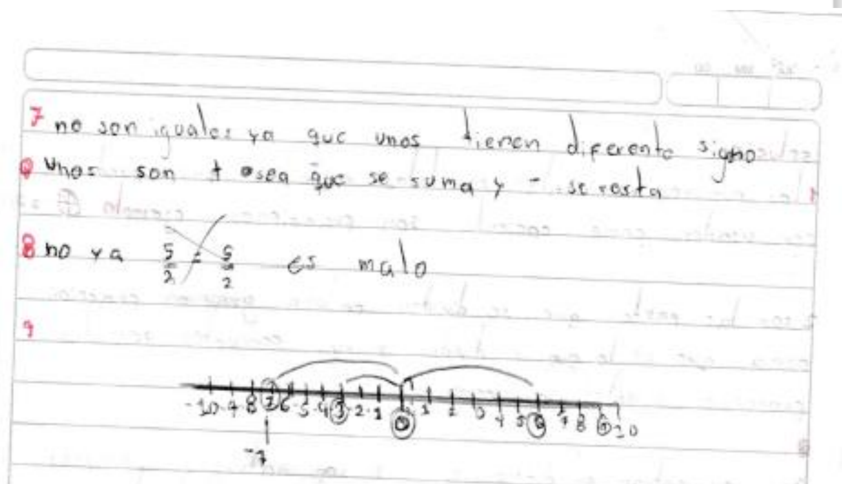
2 son las partes que se dividen en una ~~grupo~~ fraccion osea que es lo que se divide y sus conceptos son las fracciones simples o comunes

3 se encuentran en diferencian si son naturales simples o comunes y primos tambien depende del resultado del numero perdon del valor del numero tambien depende por que puede ser mayor y menor como puede dar = 1 o e1

4 no ya que en una suma le agrega a el numero el valor del otro numero mas, en una fracion se quita ya que a $\frac{3}{3}$ se le quita 2. osea se resta se le quita 2 a 3 y queda 1

5 $\frac{10}{3}$ =

6 en el orden comun en la tabla es de mayor a menor y en las cifras se pone en cualquier orden


7 no son iguales ya que unos tienen diferente signo unos son + osea que se suma y - se resta

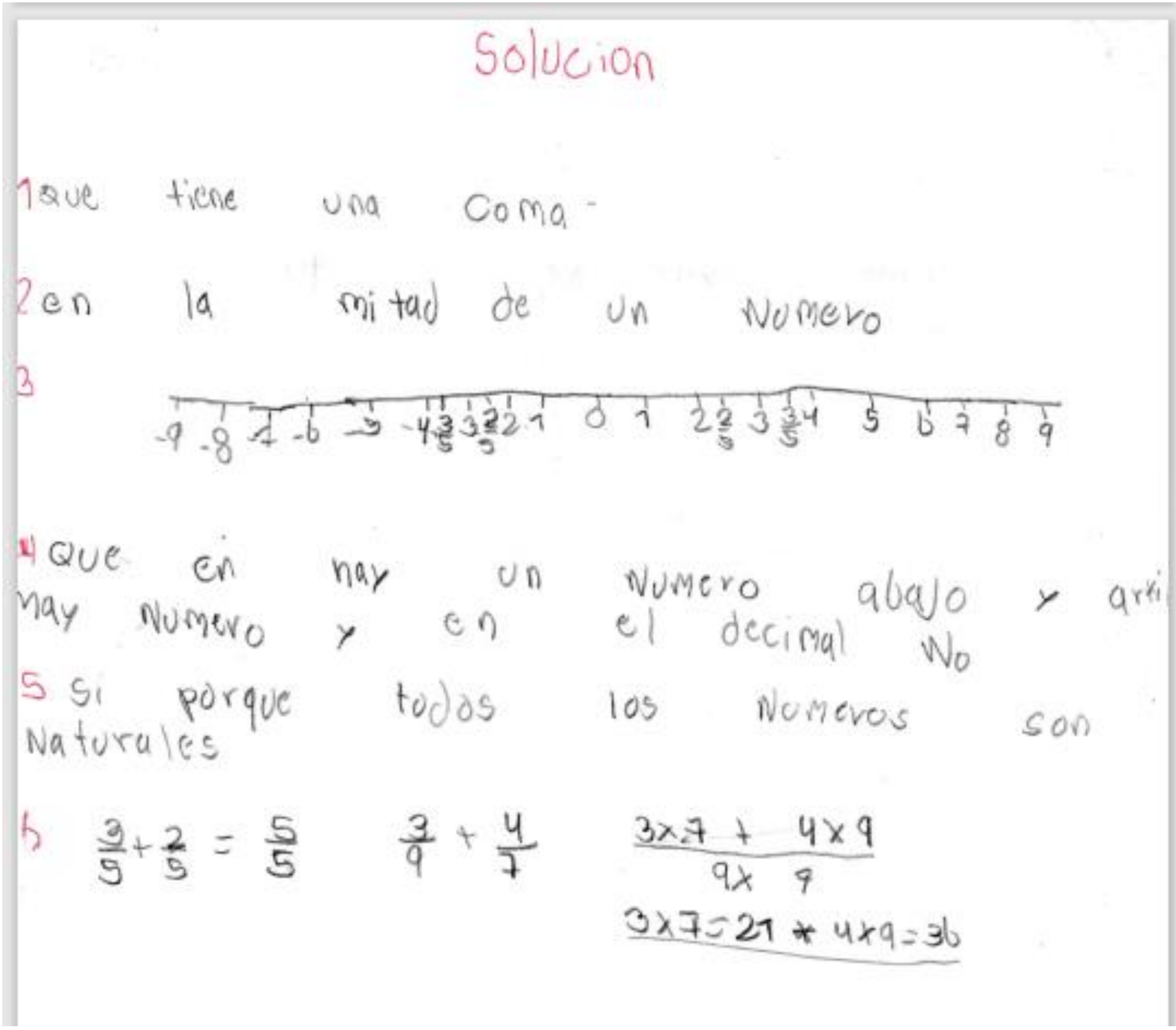
8 no ya $\frac{5}{2} \neq \frac{5}{2}$ es malo

9

-10 -9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

-7

Anexo 6


Solucion

1 que tiene una coma -

2 en la mitad de un Numero

3 -9 -8 -7 -6 -5 -4 $\frac{3}{5}$ 3 $\frac{2}{5}$ 2 1 0 1 2 $\frac{2}{5}$ 3 $\frac{3}{5}$ 4 5 6 7 8 9

4 Que en hay un Numero abajo y arri
hay Numero y en el decimal No

5 Si porque todos los Numeros son Naturales

6 $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}$ $\frac{3}{9}+\frac{4}{7}$ $\frac{3\times7+4\times9}{9\times7}$

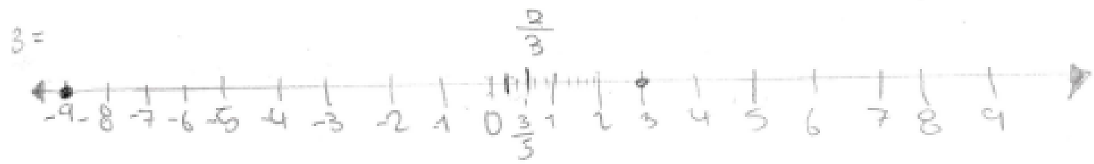
$3\times7=21 * 4\times9=36$

Anexo 7

Solución

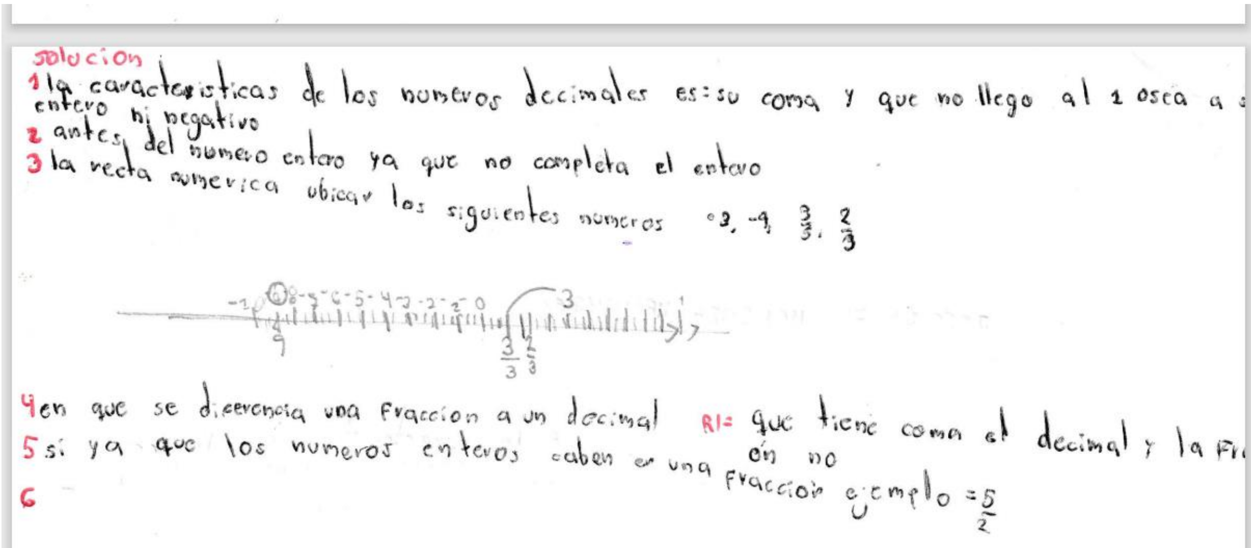
1= Los desimales se caracterizan por tener coma.
2= Se uvica por medio del conteo.

3 =

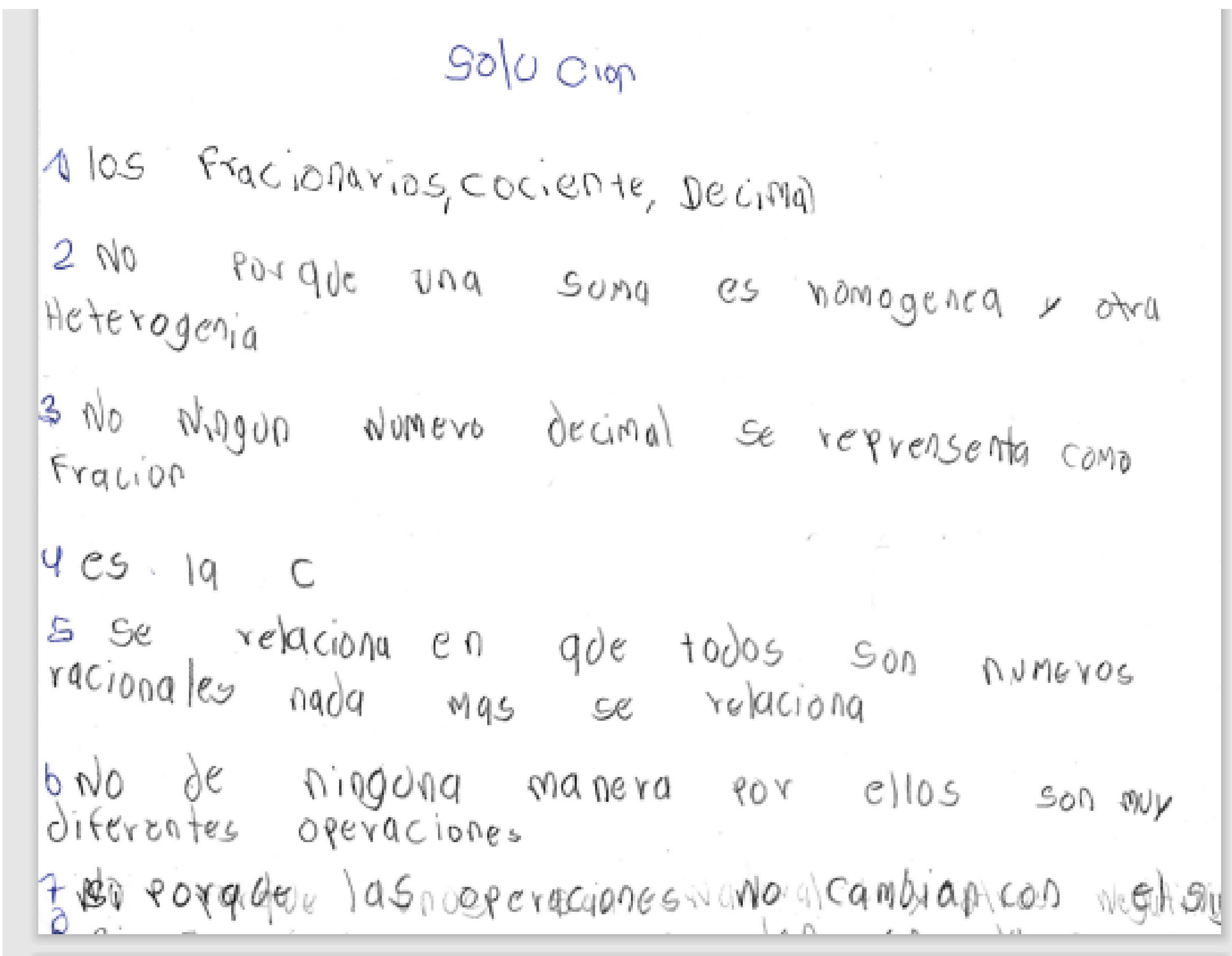


4= Por que los tres son numeros, los tres se pueden sumar, restar E/C
5= Si porque todos los numeros son naturales
6.= NO es el mismo procedimiento por que:
*NO es la misma operación
*Se realizan de forma distinta por que una es Homogenea y la otra heterogenea.
7= Pues la verdad es que no creo por que hay una parte este numero de fraccion pero me confundo y no se como realizarla por 4 6/3
8 =

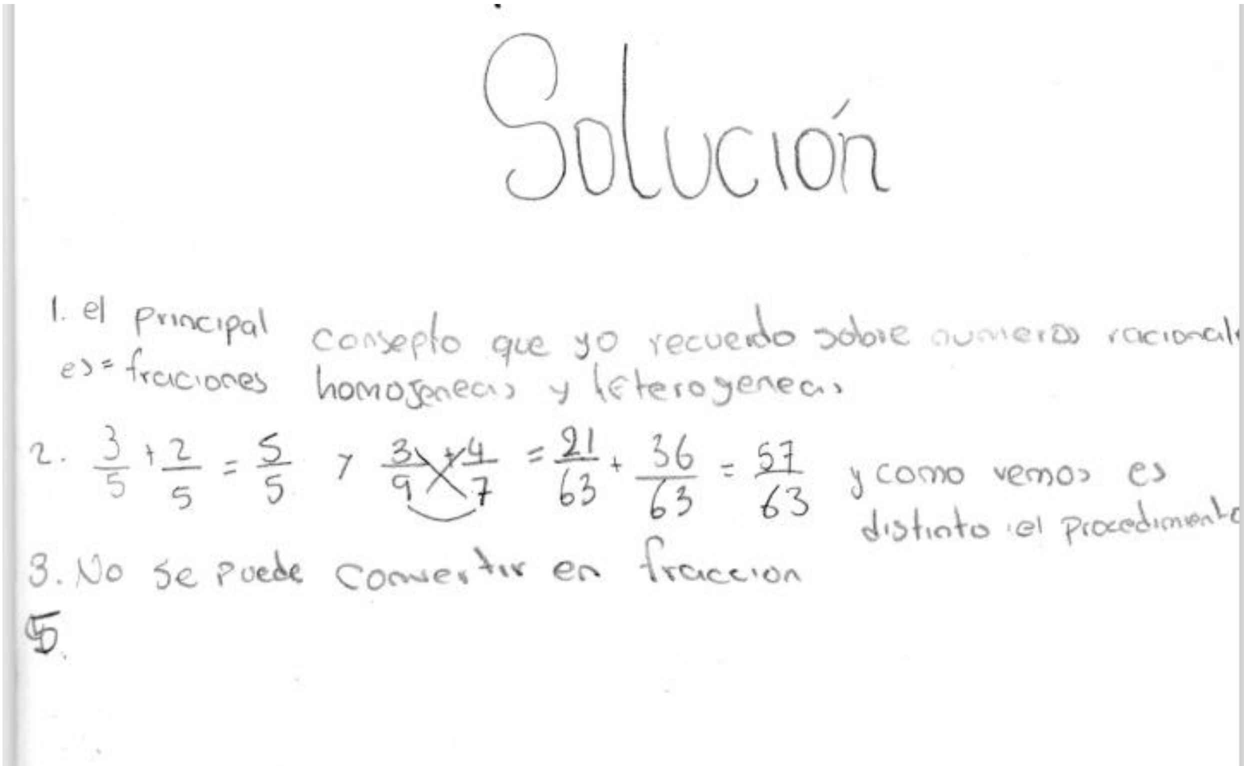
Anexo 8



Anexo 9



Anexo 10


Solución

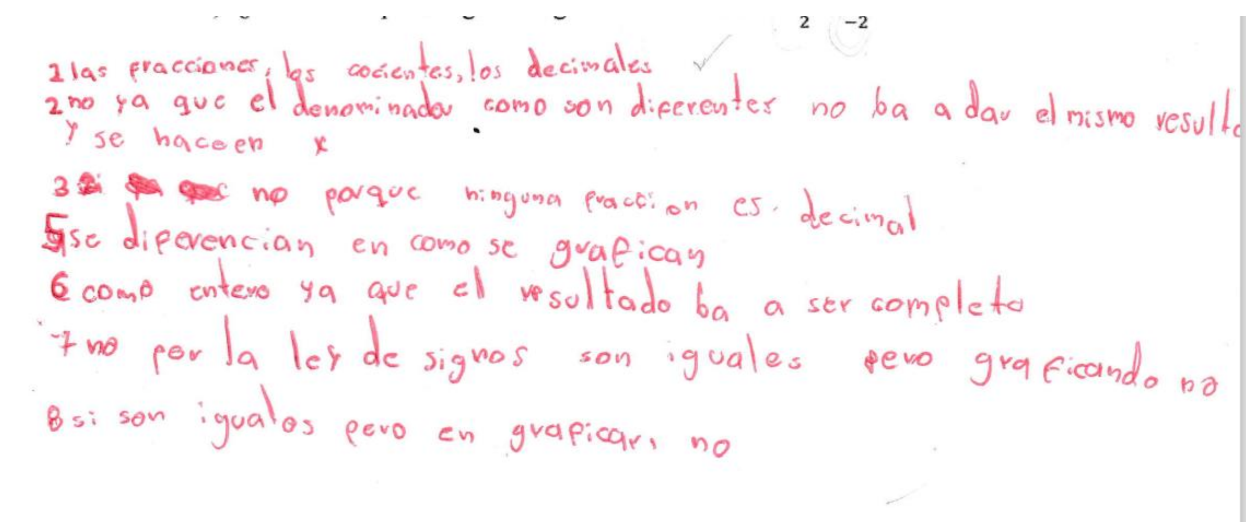
1. el Principal conseplo que yo recuerdo sobre numeros racionale es = fraciones homojeneas y leterogeneas

2. $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$ y $\frac{3}{9} + \frac{4}{7} = \frac{21}{63} + \frac{36}{63} = \frac{57}{63}$ y como vemos es distinto el procedimiento

3. No se puede convertir en fraccion

5.

Anexo 11


2 −2

1 las fracciones, los cocientes, los decimales

2 no ya que el denominador como son diferentes no ba a dar el mismo resultado y se hacen x

3 no porque ninguna fraccion es decimal

5 se diferencian en como se grafican

6 como entero ya que el resultado ba a ser completo

7 no por la ley de signos son iguales pero graficando no

8 si son iguales pero en graficar no

Anexo 12

Anexo 13

Participación en eventos diálogos EDUMATH del grupo de Investigación Educación Matemática Historia UdeA, EAFIT.