ARTÍCULOS
DE
INVESTIGACIÓN

La Noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele

Educación Matemática
Vol. 13 No. 1 abril 2001
pp.68-80

Fecha de recepción: Septiembre 1999

Carlos Mario Jaramillo López,
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
cama@matematicas.udea.edu.co
Pedro Pérez Carreras,
Universidad Politécnica de Valencia, España
pperez@mat.upv.es

Resumen. *El objetivo que persigue este artículo es dotar el concepto de convergencia de una serie de términos positivos de una componente visual dinámica, que será utilizada como instrumento de una experiencia educativa encuadrada en el modelo educativo de van Hiele encaminada a probar y describir los distintos niveles de razonamiento que, en la consecución del objetivo, existen.*
Palabras y frases clave: *Convergencia de una serie, longitud, modelo de van Hiele, niveles, descriptores.*

Abstract. *The goal of this paper is to endow the concept of convergence of a positive terms series with a dynamical visual component, which will be used as an instrument of an educative experience in the frame of the van Hiele's model in order to prove and describe the different levels of reasoning which is our goal to prove their existence.*
Key words and phrases: *convergence of a series, length, van Hiele's model, levels, descriptors.*

1. La noción de convergencia

Motivados por problemas de cuadraturas, los pioneros del cálculo diferencial e integral se verían forzados a estudiar las series infinitas, un proceso infinito de acumulación de cantidades. Su gran genio consistiría en saber qué sumas infinitas podían ser tratadas de acuerdo con las reglas de lo finito y cuáles no, gracias a una comprensión profunda de los problemas que trataban. Sin embargo, dado que una suma finita es asociativa y conmutativa y una suma infinita no tiene porque serlo, el uso indebido de las reglas de lo finito les llevaría pronto a conclusiones falaces, por lo que se evidenciaría la necesidad de comprender de forma precisa qué significaba converger.

La respuesta proporcionada por los rigorizadores del cálculo discurriría en dos frentes: (i) por un lado entender una sucesión como una regla con la que podemos hallar cualquier término específico de la misma (no se trata de poder calcular todo término, sino cualquiera de ellos) y considerar una serie como una pareja de sucesiones, en donde la posible definición de convergencia es aplicada a la segunda de ellas, la llamada "sucesión de sumas parciales" y (ii) proporcionar una definición de convergencia de una sucesión como la comparación entre los términos de la sucesión y su supuesto límite, controlando el error cometido.

2. Propósito

El profesor enfrenta el problema pedagógico de cómo tratar procesos indefinidos (esas manifestaciones de la idea de infinito potencial tan características de la esencia del cálculo infinitesimal) y producir la conclusión de ese proceso (el límite de una sucesión, la suma de una serie, el valor de un área. Es decir, el problema de cómo explicar la conclusión de un proceso que nunca termina, garantizar la existencia de un producto final a ese proceso (si existe) y, finalmente, computarlo exacta o aproximadamente.

Nuestro propósito es posibilitar una introducción preuniversitaria a la idea de proceso indefinido y a cómo garantizar la existencia de un producto final a ese proceso (cuando lo haya) dejando, para cuando el entrevistado adquiera la madurez algebraica y lógica requerida, las técnicas que lo hagan computable como también la formalización del concepto mismo.

Abordaremos nuestro propósito desde una perspectiva visual-geométrica, siguiendo la pauta de estudios anteriores realizados sobre la noción de recta tangente [1] y el concepto de continuidad, en la versión de A. Cauchy-K. Weierstrass, [2]. Así, también nuestro estudio se desarrolló en el contexto de la aplicación del modelo de van Hiele.

En lo que sigue, expondremos la descripción de la parte esencial de la metodología empleada (la entrevista clínica semiestructurada) en la que se hará patente, desde un punto de visto cualitativo, la existencia de una jerarquía de niveles de razonamiento. Nuestro interés apunta a que esos niveles se pueden detectar a través de sus correspondientes descriptores.

Para completar nuestro estudio, y utilizando métodos cuantitativos, el análisis de las entrevistas realizadas llevaron a la confección de un test escrito de respuesta múltiple. Los datos obtenidos del estudio de un número considerable de entrevistas permitió llevar acabo un tratamiento estadístico riguroso y robusto que validó la existencia de niveles de razonamiento. Dejamos para un segundo artículo, el análisis del test, el estudio del tratamiento estadístico de datos acumulados, así como la propuesta metodológica que facilita la asimilación del concepto.

3. El modelo de van Hiele.

El *modelo de van Hiele* proporciona una descripción del proceso de aprendizaje que postula la existencia de niveles de pensamiento, que no se identifican con niveles de habilidad computacional, y que podríamos clasificar como: Nivel 0 (predescriptivo), Nivel I (de reconocimiento visual), Nivel II (de análisis), Nivel III (de clasificación y relación) y Nivel IV (de deducción formal), aunque sobre éste último, se tiene la propia afirmación de los van Hiele como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así, la aplicación de este tipo de modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permita la detección de los mismos, por lo que parece razonable asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro de ese modelo: (i) los niveles deben de ser jerárquicos, recursivos y secuenciales (ii) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual (iii) los tests (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben de recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos y (iv) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Las raíces de este modelo hay que buscarlas en la obra de Piaget, aunque con diferencias relevantes: admitiendo la existencia de varios niveles de razonamiento, Piaget piensa que el paso de un nivel a otro es función del desarrollo, van Hiele del aprendizaje; la preocupación de van Hiele estriba en cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente. Piaget no ve la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio del nivel inferior; en el modelo de van Hiele se alcanza el nivel superior, si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura. Finalmente, sin ser lo último, Piaget no da importancia al lenguaje en el paso de un nivel al otro; en este modelo, cada nivel desarrolla su propio lenguaje característico de ese nivel.

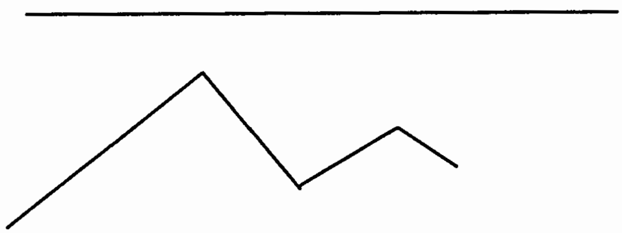
4 Elección del problema y visualización elegida.

En la docencia de las Matemáticas, el disponer de visualizaciones adecuadas de los conceptos delicados es un poderoso aliado que facilita el progreso hacia el entendimiento. Cuando esta visualización no está disponible, la pura abstracción del concepto dificulta su asimilación y, cuando se utiliza una visualización que no corresponde al concepto, se están estableciendo obstáculos cognitivos serios. Se argumenta con frecuencia y, con relación a la docencia de las Matemáticas, que buena parte de las visualizaciones empleadas incorporan más información que la estipulada por el problema y una argumentación válida no puede, ni debe hacer uso de hipótesis distintas de las estipuladas. Claro que, también es cierto que las visualizaciones pueden proporcionarnos representaciones extraordinariamente poderosas y ricas de información y, aunque, ese poder pueda ser fuente de errores y malas interpretaciones, su uso es casi indispensable para el matemático creativo. En todo caso, parece prudente que, puestos a diseñar una introducción a un concepto básico dirigida a entrevistados que no tengan necesariamente una madurez algebraica y para paliar las posibles disfunciones que se deriven de los argumentos anteriores, debemos elegir la visualización más parca posible.

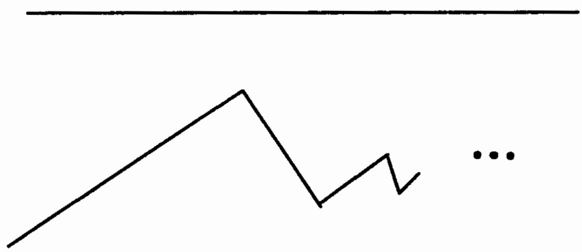
De entre todas las posibles manifestaciones del proceso de convergencia en el Análisis, hemos elegido el concepto de convergencia de una serie de términos positivos visualizada bidimensionalmente como una poligonal indefinida, asimilando la noción de término de una serie a la longitud de un segmento, la noción de serie a un zig-zag indefinido y la noción de suma de una serie a la "longitud" de ese zig-zag (si la tiene, en el sentido de la definición de convergencia), desarrollando una estrategia de estirar el zig-zag infinito unidimensionalmente y comprobando si ese estiramiento cabe o no en un segmento (ilustrando también, de esta forma, un resultado básico del análisis: toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente).

Se define el zig-zag como una sucesión de segmentos rectilíneos formando una poligonal simple, cuya trayectoria recuerda a la representación convencional de los rayos. Los zig-zags tienen características interesantes, especialmente su conexión con el concepto de longitud. ¿Tienen todos los zig-zags una longitud? Si definimos la longitud de un zig-zag como la suma de las longitudes de cada uno de los segmentos (trozos) que lo integran, tenemos que el cálculo de esa longitud (cuando exista) requiere del diseño de un mecanismo para sumar indefinidamente cantidades finitas.

En nuestro experimento educativo, el entrevistado se moverá en el contexto de poligonales y no de series. Partiendo de un segmento (sin longitud numérica estipulada), estableciendo subdivisiones en el mismo y quebrándolo, produciremos zig-zags finitos e indefinidos. Para los primeros,

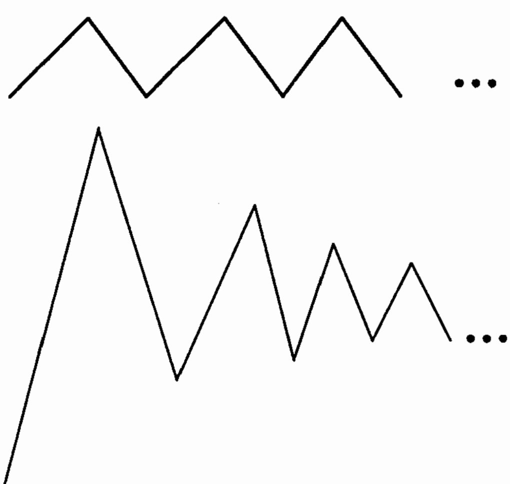


El entrevistado no tendrá dificultad en afirmar que tiene longitud y podrá aseverar cuál es su longitud (la del segmento inicial) y los segundos que resultan del proceso de división indefinida de un segmento en trozos. Observemos el siguiente zig-zag que resulta de dividir el segmento dado a la mitad, luego el trozo de la derecha a la mitad y así sucesivamente.



Estos zig-zags ejemplificarán la naturaleza de un proceso de razonamiento indefinido con plausible resultado final finito, en lo que a la noción de longitud se refiere.

Para otros zig-zags, que se forman tomando trozos comunes, a partir de un segmento fijo, es decir las longitudes de sus trozos no son disjuntas, sino que se traslapan. Situación bien diferente al zig-zag anterior, que se formó de la división de un segmento a la mitad en trozos disjuntos.



El entrevistado deberá confrontar el problema de decidir qué (no cuál) es la longitud de esa poligonal, llegando a afirmar que algunos tienen longitud y otros no.

En el discurrir de nuestro experimento, el entrevistado deberá proporcionar respuestas a preguntas como las siguientes: ¿**Todos** los zig-zags indefinidos tiene longitud?, ¿**Existen** zig-zags indefinidos que tienen longitud?, ¿Bajo qué condiciones un zig-zag indefinido tiene longitud?, Tras las cuales, buscaremos respuesta a la pregunta: ¿Qué es la longitud de un zig-zag?

En todo este proceso de razonamiento, probaremos la existencia de niveles en el sentido del modelo educativo de van Hiele, lo que nos permitirá establecer una propuesta metodológica basada en estas consideraciones. El diseño de la visualización deberá: i) presentar situaciones geométricas que transmitan la esencia de lo que es el proceso infinito, tratando encubiertamente la noción de convergencia de una serie y su producto final (la suma de la misma), ii) poseer una jerarquía identificable y ponderable de niveles de razonamiento, y iii) preparar al entrevistado para dar el salto a la definición formal con mínimo esfuerzo.

5 La entrevista socrática

En las investigaciones enmarcadas en el modelo de van Hiele predomina la utilización de métodos cualitativos, siendo la entrevista individualizada el instrumento por excelencia. El tipo empleado suele denominarse entrevista clínica y, en ella, el entrevistador plantea diversas actividades y dialoga con el entrevistado a tenor de su forma de resolverlas y del progreso hacia el entendimiento que vaya manifestando en su discurrir.

En el intento de llegar a un diseño óptimo de la misma, versiones iniciales son empleadas con dos propósitos: conjeturar la existencia de niveles y su ubicación a lo largo de la entrevista y encontrar y formular sus descriptores. Así, y en lo que a su diseño se refiere, nos encontramos con un proceso largo y cuidadoso de retroalimentación progresivo: se utiliza un primer diseño de entrevista para formular una versión tentativa de los posibles descriptores de los niveles y se van mejorando y precisando en sucesivos diseños, a tenor de las respuestas producidas por los entrevistados en muchas entrevistas hasta lograr un fluir natural del diálogo, consiguiendo que el entrevistador tenga una idea precisa de dónde se hallan los puntos de ruptura, que supuestamente corresponden a una transición a un nivel más refinado de razonamiento. La entrevista ya pulida será aplicada a una nueva muestra de entrevistados, para iniciar la auténtica investigación (la existencia de niveles vía su detección).

Nuestra entrevista es una experiencia de aprendizaje y tiene el carácter de una prueba *semiestructurada*, es decir, existe un guión construido previamente con las características señaladas, pero que no excluye la intervención del entrevistador en función de las respuestas que va recibiendo. Su carácter *socrático* lleva a que algunas de estas intervenciones estén previstas en función de las respuestas recibidas y buscará comprender como se va formando el concepto a estudiar en la mente del entrevistado, aunque el objetivo básico es garantizar la existencia de los niveles postulados en el modelo y detectar hasta qué nivel ha progresado el entrevistado sometido a la experiencia educativa.

En concordancia con el modelo educativo de referencia, el lenguaje que emplee el entrevistado para expresarse es de suma importancia en nuestro experimento educativo, debido a que es un instrumento más de detección de la evolución en su razonamiento. Las entrevistas previas al diseño definitivo sirvieron también para entrenar al entrevistador en los cambios sutiles de lenguaje empleados por un mismo entrevistado a lo largo del proceso, por lo que es esencial que el lenguaje empleado por el entrevistador sea concordante con el del entrevistado. Su papel debe limitarse a introducir las ideas esenciales, no introducir palabras o expresiones que no estén ancladas más que en aquellos instrumentos o ideas que se manejan, para evitar evocar preconcepciones erróneas o no relacionadas con el tema a tratar o provoquen obstáculos de comprensión para el entrevistado y, sólo intervenir decisivamente, cuando se alcanzan las inmediaciones de las zonas de ruptura con ideas anteriores que requieren de una readaptación de la nueva información producida a la estructura cognitiva previa.

Ante la imposibilidad de incluir todo el diseño de la entrevista por su extensión y fuerte contenido gráfico, comentemos algunos aspectos de su diseño: partiendo de unas percepciones elementales (segmento geométrico y poligonal), en la primera etapa, se presenta una cuerda doblada y se pregunta por su longitud, con el fin de que el entrevistado vea la necesidad de extender (estirar) la cuerda para estimar su longitud. También, para hacer referencia al infinito como proceso, presentamos imágenes que evocan dicha situación. Confrontado con zig-zags, en un principio finitos y posteriormente indefinidos, buscaremos que, dado un zig-zag, el entrevistado conciba la idea de que es necesario extenderlo para averiguar si tiene longitud, o sea, que identifique a un segmento como la acumulación de tramos del zig-zag. Se le muestran varias representaciones de un mismo zig-zag con el fin de que observe que su longitud es invariante respecto a extenderlos o desdoblarlos.

La presencia de zig-zags indefinidos hace que podamos cerciorarnos de que el entrevistado percibe el infinito potencial como proceso indefinido (finito, pero ejecutable tantas veces como uno quiera). Así, le presentamos situaciones concretas que lo motiven a admitir, sin objeción, que un segmento puede ser dividido indefinidamente. Encontramos en el entrevistado la idea preconcebida de que un zig-zag decreciente indefinido (Zig-zag cuyo trozos decrecen en longitud) no tiene longitud, es decir, no se puede ser estirado para encajarlo en un segmento. Los zig-zags decrecientes indefinidos construidos como resultantes de comprimir un segmento dado, una vez se han establecido subdivisiones en él (por ejemplo, mediante regla y compás) deben ayudar a romper con esta preconcepción.

En una segunda etapa, el entrevistado inicia el delicado proceso de pasar de la noción estática de longitud de un segmento a la noción dinámica de longitud de un zig-zag, cuando admite que un zig-zag finito se puede representar como un zig-zag decreciente indefinido y que las longitudes de ambos son iguales, o sea, que un mismo segmento representa ambas longitudes. En esta etapa el alumno comprende que la aproximación de la sucesión infinita de las sumas parciales de las longitudes de los trozos de un zig-zag indefinido es la longitud del zig-zag. El entrevistado debe notar que, dado un zig-zag indefinido, no siempre es posible obtener a partir de él un zig-zag con longitud.

En una tercera etapa, se hace indispensable presentar preguntas para que el entrevistado se percate que dado un zig-zag decreciente indefinido no siempre tiene longitud y éste es un nuevo desafío que se le plantea al entrevistado pues, hasta el momento, los había considerado con longitud. Se le muestra que los zig-zags decrecientes indefinidos que tienen longitud no se pueden transformar en zig-zags crecientes indefinidos. Con este hecho asimilado, el entrevistado debe ser consciente de esa característica relevante, aunque no cree necesario relacionarlo con las preguntas anteriores. Para forzarle a pensar en ello, se le presenta un zig-zag indefinido decreciente que se puede transformar en un zig-zag creciente indefinido (zig-zag cuyos trozos crecen en longitud) y que, por lo tanto, no tiene longitud (el zig-zag proveniente de la serie armónica que muestra, cómo extendiendo dos tramos, luego cuatro, luego ocho, obtenemos un zig-zag creciente indefinido, de forma análoga a cómo se prueba la divergencia de la serie armónica por el método de agrupamiento de términos de Oresme). Esta es una situación de frustración para el entrevistado, pero a la misma vez ventajosa, porque es aquí donde requiere de un procedimiento para decidir qué zig-zags indefinidos tienen longitud y preguntarse, finalmente, qué es la longitud de un zig-zag. El entrevistado debe pretender expresar con su propio lenguaje el método de decisión y luego, al proponerle ejemplos en ese sentido, debe aplicar adecuadamente dicho método.

Con el propósito de ilustrar el objetivo de la tercera etapa, consideremos la última pregunta del guión entrevista que debe responder el entrevistado: *¿Es razonable la siguiente afirmación? "La acumulación indefinida de tramos de segmentos puede dar como resultado un segmento (es decir, una longitud)"*. Esta pregunta invita al entrevistado a una reflexión minuciosa, tanto del contenido de las preguntas, como de las respuestas anteriores y debiera producir una respuesta matemáticamente plausible, lo que de ocurrir, reflejaría que se encuentra a puertas de la formalización del concepto que encubiertamente estamos tratando. También, de acuerdo a su respuesta, se puede inferir que el entrevistado percibe la comparación entre sumas parciales y el supuesto resultado final.

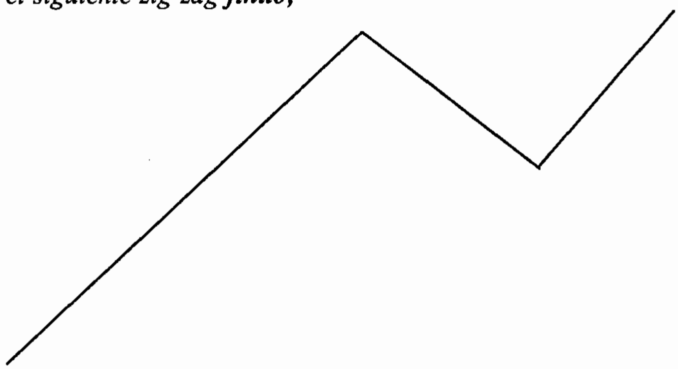
Destaquemos que la respuesta a una pregunta no determina el nivel de razonamiento en el que se encuentra un entrevistado y que no existen preguntas asociadas a un nivel, ya que todas pueden responderse según el nivel de razonamiento en que se encuentre el entrevistado. Además de escuchar cuidadosamente la respuesta del entrevistado, es relevante observar sus actitudes y gestos que hace en el momento de responder a una serie de preguntas. El lenguaje empleado por el entrevistado, a medida que avanza en su razonamiento, es más preciso, debido a que utiliza las expresiones con un mayor significado matemático. *También hay que tener en cuenta que por el carácter socrático de la entrevista y por tratarse de una experiencia personal, el entrevistado va evolucionando en su razonamiento. Algunas preguntas nos aportan mucha información, otras, en cambio, están destinadas a encauzar, reforzar o rebatir indirectamente sus razonamientos. Normalmente, obtendremos mucha más información de una respuesta incorrecta seguida de un razonamiento, ya que nos permitirá observar como se van construyendo los conceptos en su mente y los obstáculos que le están impidiendo avanzar. Con las preguntas adecuadas, podremos conseguir que conteste correctamente, pero no es ésa la intención de la entrevista, pues lo que se quiere lograr es medir el nivel de razonamiento. Bajo el supuesto que lográramos obtener una entrevista ideal y contáramos con el suficiente tiempo de atención al entrevistado, tenemos la convicción de que le llevaríamos desde el nivel más bajo al más alto de razonamiento.*

Todo el abanico de respuestas (acertadas o no), más frecuentes producidas por la muestra de entrevistados, sirvieron para la elaboración de un test de respuesta múltiple, que sería el instrumento cuantitativo sometido a un tratamiento estadístico fiable y robusto.

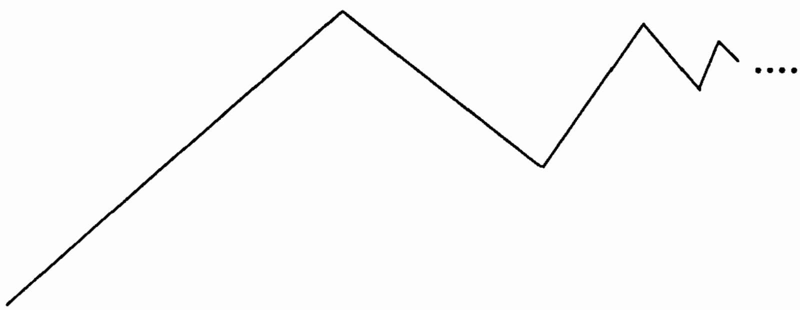
El número de entrevistados y sus características fueron las siguientes: 15 entrevistados del último año de secundaria (cuyas edades oscilaban entre los 16 y 18 años), 18 entrevistados del primer año de universidad y 20 entrevistados del segundo año de universidad (cuyas edades oscilan entre los 18 y 20 años).

A continuación transcribimos algunas de las preguntas del guión entrevista:

*13. Dado el siguiente zig-zag **finito,***



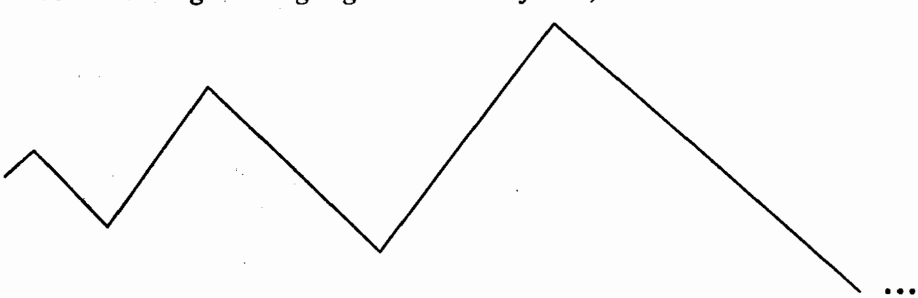
*Toma el tercer segmento, divídelo en dos trozos, el segmento de la derecha lo vuelves a dividir en dos trozos, si continuas con este proceso de división indefinida, ¿crees que podrías obtener un zig-zag **indefinido** como el siguiente, y al estirarlos, ambos podrían tener la misma longitud?*



Pregunta que confirma que un alumno del nivel tres puede ver (visualización dinámica del concepto) la longitud de un zig-zag finito como la aproximación de la sucesión de sumas parciales de longitudes de trozos de un zig-zag indefinido. Aquí, el alumno capta en forma explícita el aspecto de la estabilización (límite) de la suma indefinida de las longitudes de los trozos del zig-zag. Pretendemos que el alumno perciba el aspecto dinámico del concepto. Algunas de las respuestas de los estudiantes fueron: i) No, porque de un zig-zag finito no se puede obtener un zig-zag indefinido. ii) Sí se puede, pero no tiene la misma longitud. iii) Sí, sí se podría trazar un zig-zag indefinido y ambos tendrían la misma longitud. iv) No, no se podría porque no se pueden dibujar todos sus trozos.

La siguiente pregunta plantea la situación de un zig-zag que no tiene longitud.

*18. Dado el siguiente zig-zag **creciente indefinido,***

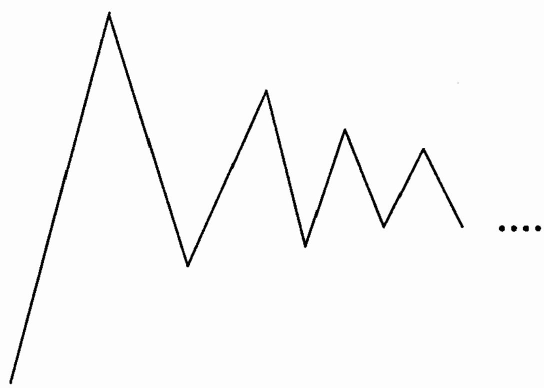


¿Crees que puedes estirarlo para hallar su longitud?.
¿Puedes trazar un segmento que represente la longitud de este zig-zag?.

La respuesta a esta pregunta no parece ser importante para el alumno. Todavía, no le encuentra ninguna relación con los zig-zags indefinidos de longitud finita. La mayoría de los alumnos dan la respuesta esperada y argumentan que por ningún motivo este zig-zag creciente indefinido tendría longitud.

La siguiente pregunta prepara al alumno para que asimile, un método que permita la clasificación de los zig-zags indefinidos que tienen longitud. Es decir que pueda establecer y manifestar en el lenguaje propio del nivel tres, bajo qué condiciones un zig-zag indefinido tiene longitud. Aquí, el entrevistador le menciona al alumno que este zig-zag se forma tomando trozos comunes a partir de un segmento fijo.

*21. Dado el siguiente zig-zag decreciente **indefinido**, ¿ crees que su longitud se podría representar en un segmento?.*



Este zig-zag lo denominamos armónico, pues representa geométricamente la serie armónica $\Sigma 1/n$ en el contexto de la prueba. Con esta pregunta se inicia el proceso de clasificación de los zig-zags. Las demás preguntas que a continuación se le hacen al alumno, muestran como extendiendo los dos trozos, luego los cuatro, luego los ocho y así sucesivamente obtenemos un zig-zag creciente indefinido, en forma análoga a la demostración que se encuentra en los textos de cálculo para probar que esta serie es divergente (método de agrupamiento de Oresme).

Esta pregunta y las tres siguientes, le crean al alumno un poco de desconcierto, al confrontarle el concepto imagen (si lo tenía) que se había formado hasta el momento referente a la longitud de los zig-zags indefinidos, y conseguimos entorpecerlo (aspecto socrático de la prueba) para poder que él evoque la necesidad de un método que le permita clasificar cuando un zig-zag decreciente indefinido tiene longitud. Es decir, un alumno del nivel tres asimila un concepto definición adecuado que le permita esclarecer y generalizar un método de clasificación. Evitamos respuestas lacónicas, le solicitamos al alumno que justifique sus respuestas con el propósito que construya el método de clasificación. La respuesta manifestadas por el alumno se le confrontarán más adelante con una entrega de información que le sirve de base para que explicite en forma precisa el método de clasificación. Algunas de las respuestas de los alumnos fueron: i) Sí, porque un zig-zag decreciente indefinido es de longitud finita. ii) No, porque un zig-zag decreciente indefinido no tiene longitud. iii) No estoy seguro, quizás se podría obtener un zig-zag creciente indefinido. iv) No, porque este zig-zag se forma a partir de trozos comunes de un mismo segmento

> *29. ¿Bajo qué condiciones un zig-zag* ***indefinido*** *tiene longitud?. De un método que especifique tales condiciones.*

Para el alumno que ha evolucionado en su razonamiento y se encuentra en el nivel III, esta pregunta le brinda la oportunidad de expresarse en términos precisos y rigurosos propios del lenguaje matemático. El alumno, ya no acude a las imágenes, posee en su razonamiento la idea clara para hacer una correcta clasificación de los zig-zags indefinidos que tienen longitud. Sus respuestas tienen un mayor significado matemático. Él reconoce que un zig-zag finito se puede transformar en un zig-zag indefinido, pero que su recíproco no siempre se cumple.

La siguiente pregunta invita al alumno a la reflexión. Él debe hacer un mayor esfuerzo en su razonamiento para producir una respuesta matemáticamente plausible que refleja que se encuentra a puertas de la formalización del concepto, es decir, a la entrada del nivel IV. También, él percibe la comparación entre sumas parciales y el supuesto resultado final (aproximación de la sucesión infinita de sumas parciales), además intenta escribir alguna notación algebraica y símbolos relacionados con el concepto de límite.

> *31. ¿Es razonable la siguiente afirmación?*
>
> *"La acumulación indefinida de trozos de segmentos* ***puede dar*** *como resultado un segmento (es decir, una longitud)".*

6 Sobre el discurrir de la entrevista

Se procuró iniciarla en un ambiente relajado, lo que es especialmente importante cuando se entrevista a estudiantes más jóvenes (de bachillerato) y, por tanto, fue necesario dedicar el tiempo suficiente para crear ese clima, enfatizando, por ejemplo, que *no se va a hacer un examen.* Explicábamos que con las contestaciones de la prueba no se podía *quedar ni bien ni mal,* sino que de lo que se trataba es de saber lo que piensa el entrevistado sobre algunas cuestiones sencillas. Tras esto, y con la intención de motivarlo a realizar la entrevista con interés, se le hacía la observación sobre nuestra intención de apreciar su razonamiento.

Con las primeras preguntas de la prueba le dábamos confianza sobre la sencillez de la prueba aunque, a medida que iba evolucionando, las preguntas solicitaban un mayor nivel de atención y concentración. Todos los estudiantes entrevistados colaboraron voluntariamente y, en todos los casos, se pidió una cierta discreción sobre el contenido de la prueba para evitar, dentro de lo posible, que se entrevistara a alguien que de alguna forma ya tuviera familiaridad con su contenido (creemos que, sin ser algo decisivo, es conveniente la improvisación en el entrevistado). También, se advirtió a cada estudiante que la entrevista se grabaría en cinta magnetofónica y se cronometraría. Respecto del contenido específico, solo se les informaba previamente que la prueba versaba sobre longitud de zig-zags. Se les informó que sus datos personales iban a ser confidenciales, pero que sus respuestas se usarían para un trabajo de investigación. Para diferenciar la prueba de un examen, se tomó solamente las iniciales del entrevistado para asegurar una identificación del caso y que el proceso fuera confidencial. Se intentó que todas las entrevistas se hicieran en condiciones bastante semejantes, aunque cada entrevista producía un diálogo peculiar entre entrevistado y entrevistador.

Un dato que puede resultar significativo sobre el desarrollo de la entrevista es el cansancio que manifestaron la mayoría de los estudiantes al finalizarla. El detalle nos parece relevante, si se enmarca en el proceso de relajación al que antes nos hemos referido y se nos pone de manifiesto que nos encontramos ante una prueba relacionada con el razonamiento, cuyo socratismo provoca el entorpecimiento y la obligación de evolución en el razonamiento y de la readaptación de imágenes conceptuales. En ese mismo sentido, podemos señalar también que, a pesar de las advertencias iniciales, algunos estudiantes preguntaron, al finalizar la prueba, sobre el resultado, pues estaban interesados en saber si lo habían hecho bien. Una vez terminada, se les daba una explicación detallada de la motivación de cada pregunta, de la interpretación que hacíamos de sus respuestas, cómo considerábamos que iba evolucionando su progreso hacia el entendimiento y cómo podíamos detectarlo. Todo parece indicar que la experiencia conseguía captar su interés y no les dejaba indiferentes.

La experiencia nos ha alertado sobre la relativa facilidad que puede darse en confundir socratismo con dirigismo, de modo que fue necesario tener buen cuidado en no influir en las respuestas (sobre todo, cuando éstas eran manifiestamente incorrectas) atendiendo hasta detalles aparentemente menores, como gestos, etc. La actitud general quiso ser siempre tranquilizadora, coherente con lo expuesto al principio, dando predominio al diálogo frente a la búsqueda de resultados. En algunos casos, hubo que redirigir las preguntas para evitar afirmaciones que no tenían que ver con el razonamiento estudiado y que impedían el progreso del mismo.

7 Niveles y descriptores

En concordancia con el modelo de van Hiele y fruto del trabajo realizado, enunciemos los niveles y descriptores de los mismos:

Nivel 0. (Predescriptivo)

0.1 El mero reconocimiento de los objetos de estudio (segmento geométrico y poligonal) constituye lo que consideramos nivel 0 o predescriptivo.

Nivel 1. (Visual)

1.1. Estira (extiende) una cuerda para hallar su longitud. (El estudiante reconoce que un segmento rectilíneo, es una representación correcta del concepto de longitud. El segmento está asociado a la idea de medida).

1.2. Para las distintas representaciones de un zig-zag finito el estudiante afirma con total seguridad (al estirar cada zig-zag), que estas representaciones caben en un mismo segmento.

1.3. Tiene claro que un segmento matemático es infinitamente divisible (un proceso indefinido), mientras que un cable material puede que no lo sea.

1.4. Reconoce el infinito potencial como proceso, mediante situaciones concretas relacionadas con el concepto de longitud no finita.

1.5. El estudiante afirma, sin demasiadas dudas, que al extender un zig-zag decreciente indefinido no es posible hallar su longitud.

1.6. El entrevistado no relaciona la longitud de un segmento con el proceso de aproximación (estabilización) de acumulación de longitudes parciales de los trozos de un zig-zag indefinido.

Nivel 2 (De análisis)

2.1. En este nivel, puede reconocer que un zig-zag finito se puede representar como un zigzag (decreciente) indefinido. Empieza a percibir el dinamismo del concepto.

2.2. El estudiante reconoce, que un zig-zag decreciente indefinido puede caber en un segmento. Se muestra desconcertado por este hecho.

2.3. El entrevistado realiza procesos de aproximación. Consigue acumulaciones parciales de trozos de un zig-zag decreciente indefinido.

2.4. Reconoce que un segmento es una representación de la acumulación indefinida de todos los trozos de un zig-zag decreciente indefinido.

2.5. El estudiante no comprende la necesidad de determinar si un zig-zag decreciente indefinido se puede hacer creciente.

2.6. La separación entre el nivel 2 y 3 se detecta cuando el estudiante manifiesta la necesidad de saber bajo qué condiciones un zig-zag decreciente indefinido tiene longitud. Esto ocurre después de presentarle un zig-zag decreciente indefinido, en el que se pueden organizar sus tramos, de tal manera que se obtiene un zig-zag creciente indefinido.

Nivel 3 (De clasificación o relación)

3.1. Dado un zig-zag decreciente indefinido, el estudiante siente la necesidad de organizar sus trozos para intentar obtener un zig-zag creciente indefinido y poder establecer si su longitud se puede representar en un segmento.

3.2. El estudiante proporciona y aplica un método adecuado para determinar cuando un zig-zag indefinido tiene longitud.

8 Conclusiones

Hemos podido extender el modelo de van Hiele al estudio de una de las varias manifestaciones del concepto de aproximación, tan característico del Análisis Matemático, como es la noción de convergencia de una serie de términos positivos. En nuestro estudio, hablar de convergencia es referirnos a la longitud (si existe) de un zig-zag indefinido como el límite de la sucesión infinita de las sumas parciales de las longitudes de sus trozos. El análisis cualitativo llevado a cabo sugiere la existencia de niveles de razonamiento que postula el modelo de van Hiele. Todo el trabajo experimental que se ha realizado a continuación de nuestra entrevista (no incluido en este artículo) corrobora cuantitativamente los resultados obtenidos. El diseño de la entrevista nos parece apto como propuesta metodológica.

9 Referencias

[1] Llorens, J. L., Pérez Carreras, P. *An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation*, Int. J. Math. Edu. Sci. Technol. **28**, No. 5 (1997), 713-726.

[2] Campillo Herrero, P., Pérez Carreras, P. *La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele,* Divulgaciones Matemáticas, v. **6**, No. 1 (1998), 69-80.