UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Estabilidad de ciertas ecuaciones diferenciales no lineales: Método de dominio de frecuencia

Jhon Mario Giraldo Castaño

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Asesor:
Jairo Eloy Castellanos Ramos
Profesor del Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Carmen de Viboral, Antioquia
2022

Dedicatoria

A mi madre, hermano y hermanas, todos los profesores que fueron parte del proceso, en especial mi asesor de trabajo de grado. Y de una manera muy especial a Viviana, mi prometida.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me acompañaron en este proceso; Mis compañeros de estudio, mis profesores y de una manera muy especial a mi familia, sin su apoyo no habría logrado llegar a este punto. Agradezco enormemente a mi madre: gracias a su esfuerzo, sacrificio y entrega pude tener la posibilidad de llegar hasta las puertas de la culminación de mi carrera universitaria de pregrado.
No quiero dejar pasar la ocasión para agradecer a mi asesor de trabajo de grado, Jairo Eloy Castañeda Ramos, profesor del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, pues sin su compromiso y ayuda, este trabajo no habría sido posible.
También, quiero agradecer a Elizabeth Ramírez Orozco, quien fue un pilar en mi vida y un gran apoyo en los momentos difíciles del proceso. Ella siempre estuvo ahí presente cuando, quise renunciar, con su comprensión me supo entender, dar ánimo y aconsejarme.
De una manera muy especial, quiero agradecer a Viviana, mi prometida. Tu fuiste una de esas casualidades por las que vale la pena vivir. Eres quien me motiva e inspira a ser mejor persona cada día.
Te amo.

Resumen

Usamos el método del dominio de la frecuencia para demostrar que la solución cero de ciertas ecuaciones diferenciales de tercer orden retardadas no lineales es asintóticamente estable, (cuando no hay forzamiento de término). También probamos la existencia de una solución acotada que es exponencialmente estable, (cuando hay un término forzado acotado). También se prueba dicha existencia para la situación en la cual el término no lineal es retardado.

Palabras clave: Ecuación diferencial de retardo de tercer orden, Estabilidad asintótica, Estabilidad exponencial, Soluciones periódicas, Método de dominio de frecuencia.

Abstract

We use the frequency domain method to prove that the zero solution of certain third order nonlinear delayed differential equations is asymptotically stable, (when there is no forcing term). We also prove the existence of a bounded solution which is exponentially stable, (when there is a bounded forcing term). The situation for which the non-linear term is delayed is also proved.

Keywords: Third order delay differential equation, Asymptotic stability, Exponential stability, Periodic solutions, Frequency domain method

Contenido

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Por décadas, el término *disipatividad* sigue siendo una propiedad cualitativa clave para soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales (por lo tanto, sistemas). Ya que muchos sistemas conocidos son usados como modelos para varios campos de la tecnología, ingeniería y ciencias físicas y biológicas, es más importante estudiar las condiciones necesarias que van a dar mayor entendimiento de esta propiedad cualitativa mayor -*disipatividad*.
Recordemos que un sistema de ecuaciones, $X = f(t, X)$, que satisfaga las condiciones de unicidad y continuidad con respecto a ciertas condiciones iniciales, será *disipativo* si existe una constante ρ tal que

$$\limsup_{t\to\infty} \|X(t; t_0, X_0)\| < \rho$$

para toda solución.
Además, se dirá que el sistema es *uniformemente disipativo* si existe $\rho > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ y $t_0 \geq 0$, existe $T(\alpha)$ tal que para todo X_0 con $\|X_0\| \leq \alpha$ se tiene que $\|X(t; t_0, X_0)\| \leq \rho$ para $t \geq t_0 + T(\alpha)$.
Lo anterior significa que existe un dominio de radio ρ con centro en el origen, para el cual todas las soluciones finalmente permanecen allí uniformemente.
Las herramientas matemáticas para investigar estas propiedades han seguido variando a lo largo de los años porque nuevas ideas siguen saliendo a la luz.
La teoría de sistemas disipativos está íntimamente ligada a la teoría de estabilidad de Lyapunov. Existen herramientas desde el enfoque de la disipatividad que pueden ser usadas para generar funciones especiales de Lyapunov y viceversa. Un enfoque bien conocido habla sobre cierta propiedad de las soluciones de una ecuación diferencial (o sistema) que se cumplía si (y a veces sí y solo sí) existía una función de Lyapunov que satisface ciertas condiciones específicas. También es conocido que obtener criterios eficientes para la existencia de tales funciones es la tarea más difícil.
Sin embargo, a lo largo de los años, muchos métodos verificables fueron desarrollados por Yakubocivh[51], Kalman [21] , Popov [53] y otra vez por Yakubovich [52]. Estos métodos verificables llevaron a lo que ahora es conocido como el método de dominio de frecuencia. Basados en este método, el muy conocido lema Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) fue descubierto. Este lema da lugar a las propiedades cualitativas más discutidas, que utilizan la

teoría de Lyapunov y permite que sean investigadas. Los investigadores han usado, modificado y generalizado este lema (KYP) hasta tal punto que muchos campos de la ingeniería y de la ciencia confían en este como su principal herramienta de investigación. Por ejemplo, podemos citar el reciente trabajo de VL. Rasvan[54], quien derivó un nuevo criterio de disipatividad (Oscilaciones Towards Yakubovich) También citamos los trabajos recientes de I. Barbalat[7], I. Barbalat y A. Halanay[55, 9] y A. Halanay[56], que se basaron en los trabajos de Yakubovich[51, 52], Popov[53], y Kalman[21] entre otros. También hacemos notar los trabajos de A. Afuwape[57, 58, 59, 3], que usaban los métodos de dominio de frecuencia en algunas ecuaciones específicas de f de orden superior.
Un esfuerzo mayor en esta investigación sería representar nuestras ecuaciones en el sistema de la forma:

$$\begin{cases} X = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X) \\ \qquad \sigma(t) = C^*X \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $X \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $C, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $\varphi(\sigma) = col(\varphi_j(\sigma))$, $(j = 1, ..., m)$, y $P(t, X) \in \mathbb{R}^n$. Las herramientas para el método de dominio de frecuencia han sido aplicadas por Afuwape [57, 58, 59, 3] en casos particulares de ecuaciones diferenciales no lineales de tercer orden:

$$x''' + f(x, x', x'') + g(x, x') + h(x) = p(t, x, x', x'')$$

y en ecuaciones diferenciales no lineales de cuarto y quinto orden (cf:[63, 61, 62, 60],...). Muchas de estas ecuaciones se encuentran en variadas aplicaciones. Se espera que más adelante se puedan hacer más aplicaciones para así extender y generalizar el método.

La hipótesis principal se constituye sobre las matrices A, B y C (solo cuando estén identificadas) en las aplicaciones anteriores, condiciones tales como que A sea una matriz estable siempre se asumen. Pero siguiendo el trabajo de Rasvan, Vl[54], si esta condición no es cierta, ¿cómo se procedería con el argumento para encontrar las condiciones de disipatividad? Además, las dimensiones de B y C y su relación con cada una son necesarias para las aplicaciones.

El objetivo principal es encontrar condiciones necesarias (y posiblemente suficientes) para las cuales la desigualdad del dominio de frecuencia para ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior disipativas se mantenga.

Específicamente, vamos a considerar sistemas de la forma:

$$\begin{cases} X = AX - B\varphi(\sigma) \\ \quad \sigma(t) = C^*X \end{cases} \tag{1.2}$$

para matrices específicas A, B, C y no linealidades $\varphi(t, \sigma)$, para encontrar condiciones del dominio de frecuencia que lleven a las conclusiones de disipatividad o disipatividad uniforme de soluciones.
Las aplicaciones se harán en ecuaciones diferenciales no lineales de tercer orden. Esto complementará los trabajos de A. Afuwape [57, 58, 59, 3] en líneas similares.

Capítulo 2

Preliminares

En el contexto de las ecuaciones diferenciales sería ideal poder calcular explícitamente todas las soluciones, sin embargo esto no siempre es posible, aun en los casos más simples tales como son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. De acuerdo con lo anterior, se ve la necesidad de obtener información sobre las soluciones sin conocerlas. En este sentido, la teoría cualitativa nos permite conocer el comportamiento dinámico, es decir, las propiedades cualitativas de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales.

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la teoría cualitativa para ecuaciones diferenciales con el fin de entender los capítulos posteriores.

2.1. Sistemas dinámicos

Definición 2.1.1. *Un* **sistema dinámico** *en $\mathcal{D}$ es la tripleta $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, s)$, donde $s : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ es tal que se cumplen los siguientes axiomas:*

i) *(Continuidad): $s(\cdot, \cdot)$ es continuo en $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$, $s(\cdot, x)$ es continuamente diferenciable en $\mathcal{D}$.*

ii) *(Consistencia): $s(0, x_0) = x_0$ para todo $x_0 \in \mathcal{D}$.*

iii) *(Propiedad del grupo): $s(\tau, s(t, x_0)) = s(t + \tau, x_0)$ para todo $x_0 \in \mathcal{D}$ y $t, \tau \in \mathbb{R}$.*

De ahora en adelante, denotamos el sistema dinámico $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, s)$ por $\mathcal{G}$ y nos referimos a la aplicación $s(\cdot, \cdot)$ como el **flujo o trayectoria** de $\mathcal{G}$ correspondiente a $x_0 \in \mathcal{D}$, y para un $s(t, x_0)$ dado, $t \geq 0$, nos referimos a $x_0 \in \mathcal{D}$ como una **condición inicial** de $\mathcal{G}$. Dado $t \in \mathbb{R}$ denotamos la aplicación $s(t, \cdot) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ por $s_t(x_0)$ o s_t. Por lo tanto, para $t \in \mathbb{R}$ el conjunto de asignaciones definidas por $s_t(x_0) = s(t, x_0)$ para cada $x_0 \in \mathcal{D}$ da el flujo de $\mathcal{G}$. En particular, si $\mathcal{D}_0$ es una colección de condiciones iniciales tales $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, entonces el flujo $s_t : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ no es más que el movimiento de todos los puntos $x_0 \in \mathcal{D}_0$ o, de manera equivalente, la imagen de $\mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ bajo el flujo s_t, es decir, $s_t(\mathcal{D}_0) \subset \mathcal{D}_0$ (vea la Figura 2.1(a)). Alternativamente, si la condición inicial $x_0 \in \mathcal{D}$ está fijo y dejamos $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, entonces el mapeo $s(\cdot, x_0) : [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$ define la **curva solución o trayectoria** del sistema dinámico $\mathcal{G}$. Por lo tanto, el mapeo $s(\cdot, x_0)$ genera una gráfica en $[\alpha, \beta] \times \mathcal{D}$ identificando la trayectoria correspondiente al movimiento a lo largo de una curva C a través del punto x_0 en un subconjunto $\mathcal{D}$ del espacio de estados (ver 2.1(b)). Dado $x \in \mathcal{D}$ denotamos la aplicación $s(\,\cdot\,, x) : \mathbb{R} \to \mathcal{D}$ por $s^x(t)$ o s^x.

Si pensamos en un sistema dinámico $\mathcal{G}$ como describiendo el movimiento de un fluido, entonces el flujo de $\mathcal{G}$ describe el movimiento de todo el fluido y es consistente con una descripción euleriana del sistema dinámico en el que el movimiento se analiza en un medio continuo (volumen de control). Alternativamente, la trayectoria de $\mathcal{G}$ describe el movimiento de una partícula individual en el fluido y es consistente con una formulación lagrangiana del sistema dinámico que describe el movimiento (posición) de una partícula en función del tiempo.

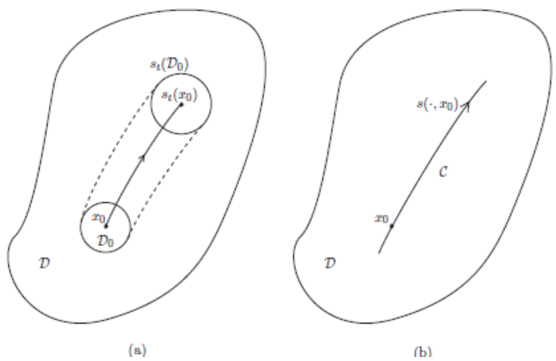

Figura 2.1: (a) Flujo de un sistema dinámico. (b) Curva de solución de un sistema

En términos de la aplicación $s_t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ los Axiomas *ii*) y *iii*) pueden ser equivalentes escrito como *ii*)′ $s_0(x_0) = x_0$ y *iii*)′$(s_\tau \circ s_t)(x_0) = s_\tau(s_t(x_0)) = s_{t+\tau}(x_0)$. Tenga en cuenta que de *i*) y *iii*) se deduce que la aplicación $s_t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ es un función con una inversa continua s_{-t}. Por lo tanto, s_t con $t \in \mathbb{R}$ genera una familia un-parámetro de homeomorfismos en $\mathcal{D}$ formando un grupo conmutativo bajo la composición. Para ver que s_t es uno a uno, tenga en cuenta que si $s(t, y) = s(t, z)$, entonces $y = z$ se sigue de

$$\begin{aligned} y =& \; s(0, y) \\ =& s(-t + t, y) \\ =& s(-t, s(t, y)) \\ =& s(-t, s(t, z)) \\ =& s(-t + t, z) \\ =& s(0, z) \\ =& z. \end{aligned} \tag{2.1}$$

También tenga en cuenta que si $y \in \mathcal{D}$, entonces $s_t(x) = y$ para $x = s(-t, y)$, y por lo tanto, s_t es sobre. Finalmente, para ver que s_t tiene una inversa continua, solo necesitamos mostrar que s_{-t} es la inversa de s_t. Para ver esto, tenga en cuenta que para dos flujos cualesquiera s_t y s_τ, $s_t \circ s_\tau = s_{t+\tau}$ ya que, para todo $x \in \mathcal{D}$,

$$(s_t \circ s_\tau)(x) = s_t(s_\tau(x)) = s_t(s(\tau, x)) = s(t + \tau, x) = s_{t+\tau}(x). \tag{2.2}$$

Además, note que para cada $x \in \mathcal{D}$, $s_0(x) = s(0, x) = x$ es la identidad operador en $\mathcal{D}$. Por lo tanto, $s_{-t} \circ s_t = s_{t-t} = s_0$, lo que establece que s_{-t} es el inverso de s_t.

Dado que un sistema dinámico $\mathcal{G}$ involucra la función $s(\cdot, \cdot)$ que describe el movimiento de $x \in \mathcal{D}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, este genera una ecuación diferencial en $\mathcal{G}$. En en particular, la función $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) := \frac{d}{dt} s(t, x)\Big|_{t=0} \tag{2.3}$$

define un **campo vectorial** continuo en $\mathcal{D}$. Para $x \in \mathcal{D}$, $f(x)$ pertenece a $\mathbb{R}^n$ y corresponde al vector tangente a la curva $s_t(x)$ en $t = 0$. Por tanto, para $s_t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ satisfaciendo los axiomas $i) - iii)$ de la definición 2.1.1, haciendo $x(t) = s(t, x_0)$ y definiendo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$n como en (2.1) se sigue que

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Usaremos la notación $s(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$ y $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, indistintamente para denotar la solución del sistema dinámico no lineal (2.1 con la condición inicial $x(0) = x_0$.

Ya vimos que un sistema dinámico no lineal $\mathcal{G}$ como se definió en 2.1.1 da lugar a una ecuación diferencial no lineal. Ahora estudiar algunos resultados de estabilidad sobre sistemas dinámicos no lineales caracterizado por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathcal{I}_{x_0}, \tag{2.5}$$

donde $x(t) \in \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{I}_{x_0}$, $\mathcal{D}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con $0 \in \mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ es continuo en $\mathcal{D}$, y $\mathcal{I}_{x_0} = (\tau_{min}, \tau_{max})$ es el *intervalo máximo de existencia* para la solución $x(\cdot)$ de (2.5). Una función continuamente diferenciable $x : \mathcal{I}_{x_0} \to \mathcal{D}$ Se dice que es una *solución* de (2.5) en el intervalo $\mathcal{I}_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$, si $x(t)$ satisface (2.5) para todo $t \in \mathcal{I}_{x_0}$.

Las siguientes definiciones proporcionan varias clasificaciones del sistema dinámico no lineal. Sea

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, t_1], \tag{2.6}$$

donde $f : [t_0, t_1] \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ es continuo por partes en t y continuo en x en $[t_0, t_1] \times \mathcal{D}$.

Definición 2.1.2. *Considere el sistema dinámico no lineal (2.6). Si $f(t, x) = f(t_0, x)$ para todo $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}$, entonces (2.6) se llama sistems* **invariante en el tiempo o autónomo***.*

Definición 2.1.3. *Considere el sistema dinámico no lineal (2.6) con $f : [t_0, \infty) \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Si existe $T > 0$ tal que $f(t, x) = f(t + T, x)$ para todo $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathcal{D}$, entonces (2.6) se denomina sistema* **periódico***. Además, el tiempo mínimo $T > 0$ para el cual $f(t, x) = f(t + T, x)$ es llamado el* **período***.*

Definición 2.1.4. *Considere el sistema dinámico (2.6) con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. Si $f(t, x) = A(t)x$, donde $A[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ es continuo a trozos en $[t_0, t_1]$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces (2.6) se llama un sistema dinámico* **lineal variable en el tiempo***. Si, alternativamente, para todo $t \in [t_0, \infty)$ existe $T > 0$ tal que $A(t) = A(t + T)$, entonces (2.6) se llama sistema dinámico periódico lineal. Finalmente, si $f(t, x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces (2.6) se llama sistema dinámico autónomo lineal.*

A continuación, presentamos el concepto de punto de equilibrio de una sistema dinámico.

Definición 2.1.5. *Considere el sistema dinámico no lineal (2.6) con* $f : [t_0, \infty) \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. *Se dice que un punto* $x_e \in \mathcal{D}$ *es un* **punto de equilibrio** *de (2.6) en el tiempo* $t_e \in [t_0, \infty)$ *si* $f(t, x_e) = 0$ *para todo* $t \geq t_e$.

Note que en el caso de los sistemas autónomos y los sistemas periódicos, $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio en el tiempo t_e si y solo si x_e es un punto de equilibrio en todo momento. Además, si x_e es un punto de equilibrio en el tiempo t_e, entonces definiendo $\tau := t - t_e$ y $\tau_0 := t_0 - t_e$ tenemos

$$\dot{x}(\tau + t_e) = f(\tau + t_e, x(\tau + t_e)), \quad x(\tau_0 + t_e) = x_0, \quad \tau \in [\tau_0, \infty), \tag{2.7}$$

donde $\dot{x}(\,\cdot\,)$ denota diferenciación con respecto a τ, y por tanto x_e es un punto de equilibrio de (2.7) en $\tau = 0$ ya que $f(\tau + t_e, x_e) = 0$ para todo $\tau \geq 0$. Por lo tanto, asumimos sin pérdida de generalidad que $t_e = 0$. Además, si $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ tiene al menos un punto de equilibrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_e = 0$ de modo que $f(t, 0) = 0$, $t \geq 0$. Para ver esto, definia $x_s := x - x_e$ y note que

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) =& \dot{x}(t) = f(t, x(t)) = f(t, x(t) + x_e) := f_s(t, x_s(t)), \\ & x_s(t_0) = x_0 - x_e, \quad t \in [\tau_0, \infty). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ahora, la afirmación sigue al notar que $f_s(t, 0) = f(t, x_e) = 0$, $t \geq t_0$. Finalmente, observamos que si $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio de (2.9) y $x(t_0) = x_e$, entonces $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$, es una solución a (2.6).

2.2. Estabilidad para sistemas dinámicos no lineales

Uno de los problemas más básicos en la teoría de sistemas es la estabilidad de los sistemas dinámicos. La estabilidad del sistema se caracteriza por analizar la respuesta de un sistema dinámico a pequeñas perturbaciones en los estados del sistema. Específicamente, un punto de equilibrio de un sistema dinámico se dice que es estable si, para valores suficientemente pequeños de perturbaciones iniciales, el movimiento perturbado permanece en una pequeña región arbitrariamente prescrita del espacio estado. Más precisamente, la estabilidad equivale a la continuidad de las soluciones en función de las condiciones iniciales del sistema en una vecindad del punto de equilibrio uniformemente en el tiempo. Si, además, todas las soluciones del sistema dinámico se acercan al punto de equilibrio para grandes valores de tiempo, entonces el se dice que el punto de equilibrio es *asintóticamente estable*. La mas completa contribución al análisis de estabilidad de sistemas dinámicos no lineales fue introducido a finales del siglo XIX por el matemático ruso A. M. Lyapunov en su obra fundamental titulada *El problema general de la estabilidad del movimiento* [29]-[31]. Los resultados de Lyapunov que incluyen el métodos directos e indirectos, junto con el principio de Barbashin-Krasovskii-LaSalle [8],[22],[24],[25] proporcionan un marco poderoso para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos no lineales, así como diseñar controladores de retroalimentación que garantizan la estabilidad del sistema en circuito cerrado.

El *método directo* de Lyapunov establece que si una función definida positiva de los estados de un sistema dinámico dado puede ser construido para el cual su tasa de cambio de tiempo debido a perturbaciones en una vecindad del equilibrio del sistema es siempre negativo o cero, entonces el punto de equilibrio del sistema es estable o, de manera equivalente, *Lyapunov estable*. Alternativamente, si la tasa de cambio en el tiempo de la función definida positiva es estrictamente negativo, entonces el punto de equilibrio del sistema es asintóticamente estable. A diferencia del método directo de Lyapunov, que puede proporcionar estabilidad global conclusiones para un punto de equilibrio para un sistema dinámico no lineal, el método indirecto de Lyapunov saca conclusiones sobre la estabilidad local del punto de equilibrio mediante el examen de la estabilidad del sistema no lineal linealizado sobre el punto de equilibrio en cuestión. Ahora presentamos algunos resultados sobre la teoría de la estabilidad necesarios para desarrollar nuestros objetivos.

Comenzamos por considerando el sistema dinámico autónomo no lineal general

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathcal{I}_{x_0}, \tag{2.9}$$

donde $x(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in \mathcal{I}_{x_0}$, $\mathcal{D}$ es un conjunto abierto con $0 \in \mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ es continuo en $\mathcal{D}$, y $\mathcal{I}_{x_0} = [0, \tau_{x_0})$, $0 \leq \tau_{x_0} \leq \infty$. Suponemos que para cada condición inicial $x(0) \in \mathcal{D}$ y cada $\tau_{x_0} > 0$, el el sistema dinámico (2.9) posee una solución única $x : [0, \tau_{x_0}) \to \mathcal{D}$ en el intervalo $[0, \tau_{x_0})$. Denotamos la solución de (2.9) con la condición inicial $x(0) = x_0$ por $s(\cdot, x_0)$, de modo que el flujo del sistema dinámico (2.9) dado por la aplicación $s : [0, \tau_{x_0}) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ es continuo en x y continuamente diferenciable en t y satisface la propiedad de consistencia $s(0, x_0) = x_0$ y la propiedad de semigrupo $s(\tau, s(t, x_0)) = s(t + \tau, x_0)$, para todo $x_0 \in \mathcal{D}$ y $t, \tau \in [0, \tau_{x_0})$ tal que $t + \tau \in [0, \tau_{x_0})$. A menos que se indique lo contrario, asumimos que $f(0) = 0$ y $f(\cdot)$ es Lipschitz es continuo en $\mathcal{D}$. La siguiente definición introduce varios tipos de estabilidad correspondientes a la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (2.9) para $\mathcal{I}_{x_0} = [0, \infty)$.

Definición 2.2.1. i) *La solución cero* $x(t) \equiv 0$ *a (2.9) es* **estable** *si, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que si* $\|x(0)\| < \delta$*, entonces* $\|x(t)\| < \epsilon$*,* $t \geq 0$*. Gráficamente*

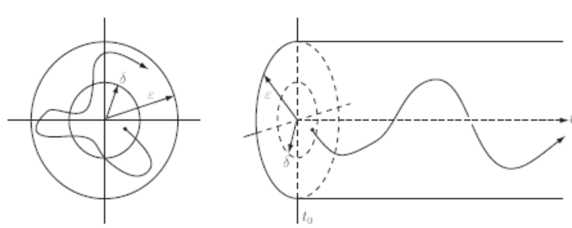

Figura 2.2: Estabilidad de un punto de equilibrio.

ii) *La solución cero* $x(t) \equiv 0$ *a (2.9) es* **asintóticamente estable** *si es estable y existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|x(0)\| < \delta$*, entonces* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$*. Gráficamente*

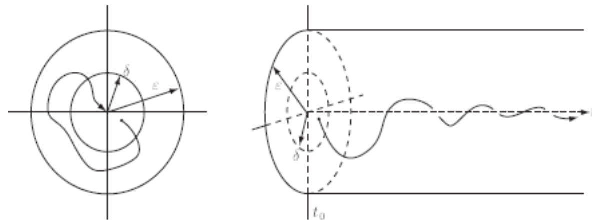

Figura 2.3: Estabilidad asintótica de un punto de equilibrio.

iii) *) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (2.9) es* **exponecialmente estable** *si existen constantes positivas α, β y δ tales que si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|e^{-\beta t}$, $t \geq 0$.*

iv) *) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (2.9) es* **globalmente asintóticamente estable** *si es estable y para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.*

v) *) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (2.9) es* **globalmente exponecialmente estable** *si existen constantes positivas α y β tal que $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$.*

vi) *) Finalmente, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (2.9) es* **inestable** *si no es estable.*

La figura 2.4 muestra las nociones de estabilidad y inestabilidad de un punto de equilibrio. Claramente, estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica y estabilidad asintótica implica estabilidad.

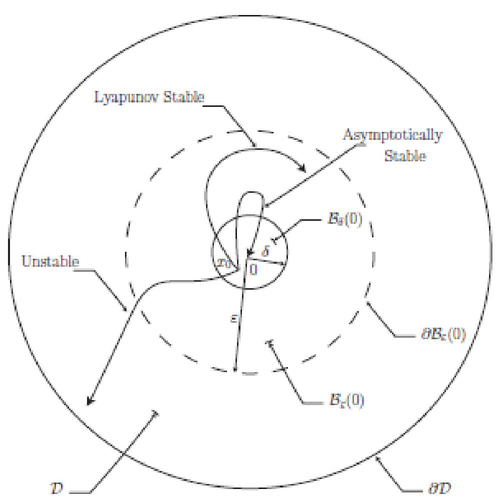

Figura 2.4: Estabilidad y inestabilidad de un punto de equilibrio.

El siguiente resultado, conocido como método directo de Lyapunov, da condiciones suficientes para la estabilidad asintótica y exponencial de Lyapunov de un sistema dinámico no lineal. Para este resultado, sea $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función continuamnte diferenciable con derivada a lo *largo de las trayectorias* de (2.9) dada por $\dot{V}(x) := V'(x)f(x)$. Note que $\dot{V}(x)$ depende del sistema dinámico (2.9). Dado que, usando la regla de la cadena, $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(s(t,x))\Big|_{t=0} = V'(x)f(x)$ se deduce que si $\dot{V}(x)$ es negativo, entonces $V(x)$ es decreciente a lo largo de la solución $s(t, x_0)$ de (2.9) pasando por $x_0 \in \mathcal{D}$ en $t = 0$.

Teorema 2.2.2. *(Teorema de Lyapunov). Considere el sistema dinámico no lineal (2.9) y asuma que existe una función $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0, \tag{2.10}$$
$$V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0, \tag{2.11}$$
$$V'(x)f(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{D}. \tag{2.12}$$

Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (2.9) es estable. Si, además,

$$V'(x)f(x) < 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0, \tag{2.13}$$

entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (2.9) es asintóticamente estable. Finalmente, si existen escalares α, β y $\epsilon > 0$, y $p \geq 1$ tales que $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ satisface

$$\alpha\|x\|^p \leq V(x) \leq \beta\|x\|^p, \quad x \in \mathcal{D}, \tag{2.14}$$
$$V'(x)f(x) \leq -\epsilon V(x), \quad x \in \mathcal{D}, \tag{2.15}$$

entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (2.9) es exponencialmente estable.

Prueba. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\epsilon(0) \subseteq \mathcal{D}$. Como $\partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$ es compacto y $V(x)$, $x \in \mathcal{D}$, es continuo, se deduce que $V(\partial\mathcal{B}_\epsilon(0))$ es compacto, y por lo tanto, $\alpha := \min_{x \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)} V(x)$ existe. Observe que $\alpha > 0$ ya que $0 \neq \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$ y $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}$, $\xi \neq 0$. A continuación, sea $\beta \in (0, \alpha)$ y define $\mathcal{D}_\beta$ como la componente conexa de $\{x \in \mathcal{D} : \ V(x) \leq \beta\}$ que contiene el origen; es decir, $\mathcal{D}_\beta$ es el conjunto de todos $x \in \mathcal{D}$ tal que existe una función continua $\psi : [0,1] \to \mathcal{D}$ tal que $\psi(0) = x$, $\psi(1) = 0$, y $V(\psi(\mu)) \leq \beta$, para todo $\mu \in [0,1]$. Note $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\epsilon(0)$ (ver Figura 2.5). Para ver esto, supongamos, por absurdo, que $\mathcal{D}_\beta \not\subset \mathcal{B}_\epsilon(0)$. En En este caso, existe un punto $p \in \mathcal{D}_\beta$ tal que $p \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$, y por lo tanto, $V(p) \geq \alpha > \beta$, lo cual es una contradicción. Ahora, dado que $\dot{V}(x) : V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_\beta$, se sigue que $V(x(t))$ es una función no creciente del tiempo, y por lo tanto, $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$, $t \geq 0$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_\beta$ es un conjunto invariante positivo con respecto a (2.9). Además, dado que $\mathcal{D}_\beta$ es compacto, se sigue que para todo $x(0) \in \mathcal{D}_\beta$, (2.9) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$.

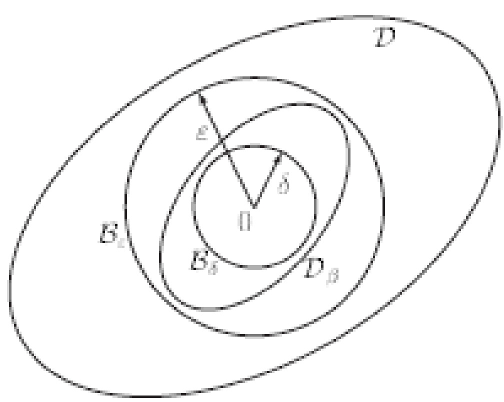

Figura 2.5: Visualización del conjunto usado en la demostración del Teorema 2.2.2.

A continuación, dado que $V(\cdot)$ es continuo y $V(0) = 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, \epsilon)$ tal que $V(x) < \beta$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$. Ahora, supongamos que $x(t)$, $t \geq 0$, satisfaciendo (2.9) con $\|x(0)\| < \delta$. Dado que, $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\epsilon(0) \subseteq \mathcal{D}$ y $V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}$, se sigue que

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s))\,ds \leq 0, \quad t \geq 0,$$

y por tanto, para todo $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) < \beta, \quad t \geq 0.$$

Ahora, como $V(x) \geq \alpha$, $x \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$ y $\beta \in (0, \alpha)$, se sigue que $x(t) \notin \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$, $t \geq 0$. Por lo tanto, para todos $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| < \epsilon$, $t \geq 0$, lo que demuestra la estabilidad de la solución cero $x(t) \equiv 0$ para (2.9).

Para demostrar la estabilidad asintótica de la solución cero $x(t) \equiv 0$ para (2.9) suponga que $V'(x)f(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$ y $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$. Entonces se deduce que $x(t) \in \mathcal{B}_\epsilon(0)$, $t \geq 0$. Sin embargo, $V(x(t))$, $t \geq 0$, es decreciente y acotada por debajo por cero. Ahora, el absurdo, suponga que $x(t)$, $t \geq 0$, no converger a cero. Esto implica que $V(x(t))$, $t \geq 0$, tiene un límite inferior, es decir, existe $L > 0$ tal que $V(x(t)) \geq L > 0$, $t \geq 0$. Por tanto, por continuidad de $V(\cdot)$ existe $\delta' > 0$ tal que $V(x) < L$ para $x \in \mathcal{B}_{\delta'}(0)$, lo que además implica que $x(t) \notin \mathcal{B}_{\delta'}(0)$ para todo $t \geq 0$. Luego, defina $L_1 := \min_{x \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)\delta' \leq \|x\| \leq \epsilon} V'(x)f(x)$. Ahora, (2.13) implica $-V'(x)f(x) \geq L_1$, $\delta' \leq \|x\| \leq \epsilon$ o equivalentemente,

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s))\,ds \leq -L_1 t,$$

y por tanto, para todo $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - L_1 t.$$

Dejando $t > \frac{V(x(0)) - L}{L_1}$, se sigue que $V(x(t)) < L$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, estableciendo la estabilidad asintótica.

Finalmente, para demostrar la estabilidad exponencial de la solución cero $x(t) \equiv 0$ para (2.9) tenga en cuenta que (2.15) implica que

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\epsilon t}, \quad t \geq 0. \tag{2.16}$$

Ahora, dado que por el supuesto $V(x(0)) \leq \beta\|x(0)\|^p$ y $\|\alpha\|x(t)\|^p \leq V(x(t))$, sigue que

$$\alpha\|x(t)\|^p \leq \beta\|x(0)\|^p - \epsilon t, \quad t \geq 0, \tag{2.17}$$

lo que implica que

$$\|x(t)\|^p \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}^{1/p}\right)\|x(0)\|e^{-(\epsilon/p)t}, \quad t \geq 0, \tag{2.18}$$

estableciendo estabilidad exponencial. □

2.3. Método dominio de frecuencia

Uno de los métodos para construir una función de Lyapunov es lo que se conoce como el método dominio de frecuencia.

El método surgió de los intentos de superar las dificultades en la construcción de funciones de Lyapunov.

Considere un sistema no lineal de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\phi(\sigma), \qquad \sigma = \mathbf{c}^*\mathbf{x} \tag{2.19}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son $n-$vectores (con $\mathbf{c}^*$ denotando la transpuesta de $\mathbf{c}$) y $\phi(\sigma)$ una función continua real. (Tenga en cuenta que muchos otros sistemas se pueden reducir a la forma de (2.19), mediante la elección adecuada de variables).

Problema de Lurie [27]: Hallar constantes μ_1, μ_2 y todas las funciones $\phi(\sigma)$ que satisfacen

$$\phi(0) = 0, \quad \mu_1\sigma^2 \leq \sigma\phi(\sigma) \leq \mu_2\sigma^2,$$

y continua en $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ para que las soluciones triviales de (2.19) sean globalmente asintóticamente estables.

La solución de este problema depende de los resultados de Popov [28], Kalman [21] y Yacubovich [51].

Proposición 2.3.1. *(Popov [28]): Suponga que la matriz* $\mathbf{A}$ *en (2.19) es estable y que la función continua* ϕ *satisface*

$$\phi(0) = 0,\ 0 < \sigma\phi(\sigma) < k\sigma^2,$$

para $\sigma \neq 0$ *y para alguna constante* k.

Suponga además que existe un número no negativo q *tal que*

$$\mathrm{Re}\ \{(1 + iwq)[\mathbf{c}^*(iwI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}]\} > 0 \tag{2.20}$$

para todo real w.

Entonces, la solución trivial de (2.19) es globalmente asintóticamente estable.

Observación 2.3.2. *De la proposición anterior, queda claro que existe la necesidad de justificar la existencia del número* q *no negativo. Esto viene dado por la siguiente proposición*

Proposición 2.3.3. *([21]): Suponga* $\mathbf{A}$ *y satisfaga las hipótesis de la Proposición 2.3.1. Supongamos además que existen constantes reales* α *y* β *y una matriz constante* B $n{\times}n$ *simétrica definida positiva. Sean* α *y* β*y satisfaciendo*

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad y \quad \alpha + \beta > 0.$$

Defina la función $V(x, \sigma)$ *por*

$$V(x, \sigma) = x^*Bx + \alpha(\sigma - c^*x)^2 + \beta \int_0^\sigma \phi(\xi)\, d\xi \tag{2.21}$$

con las propiedades

i) *$V(x,\sigma)$ es definida positiva.*

ii) *$V(x,\sigma)$ tiende a infinito cuando $\|x\| + |\sigma|$ tiende a infinito*

iii) *$\cdot V(x,\sigma)$ es definida negativa con respecto al sistema (2.19).*

Entonces existe un número $q \geq 0$ tal que se cumple (2.20), es decir,

$$\text{Re}\,\{(1 + iwq)[\mathbf{c}^*(iwI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}]\} > 0$$

Observación 2.3.4. *Note que si $V(x,\sigma)$ en (2.21 existe y satisface las propiedades i), ii) y iii), entonces la estabilidad asintótica global de las soluciones de (2.19) está garantizada por las teorías de Lyapunov. Además, la existencia de $V(x,\sigma)$ en (2.21) está ligada a la existencia de "matriz simétrica B". La existencia de tal "matriz simétrica B" viene dada por:*

Proposición 2.3.5. *([21],[51]). Suponga que $\mathbf{A}$ en (2.19) es una matriz estable, D es una matriz $n \times n$ simétrica definida positiva, b es un $n-$vector real distinto de cero y k es un $n-$vector real.*

Suponga además que τ y ϵ son escalares reales que satisfacen $\tau \geq 0$ y $\epsilon > 0$. Entonces una condición necesaria y suficiente para la existencia de una matriz definida positiva simétrica B y un $n-$vector real d, satisfaciendo

(i) $\mathbf{A}^*B + B\mathbf{A} = -dd^* - \epsilon D$ *y*

(ii) $Bd - k = \sqrt{\tau}d$ *es que ϵ sea lo suficientemente pequeño y se cumpla la desigualdad*

$$\tau + 2\text{Re}\,\{k^*(iwI - \mathbf{A})^{-1}b\} > 0 \tag{2.22}$$

para todo w real.

Observación 2.3.6. *Las desigualdades (2.20) y (2.22) son equivalentes.*

Además, a partir de la proposición (2.3.5), podemos probar

Proposición 2.3.7. *Suponga que α y β son dos números no negativos que no se anulan juntos. Entonces la desigualdad (2.20) [por lo tanto (2.22)] se satisfacen para todo $w \in \mathbb{R}$ si y solo si existe una función $V(x,\sigma)$ de la forma (2.21) y satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) de la proposición (2.3.3).*

Observación 2.3.8. **(1)** *Las variaciones en las propiedades de (2.21) $V(x,\sigma)$ dan variaciones en las propiedades cualitativas de la solución cero de (2.19). Así, también podríamos concluir con variaciones de las desigualdades (2.20) o (2.22).*

(2) *Un estudio completo de la desigualdades (2.20) o (2.22) revela una función de matriz constante $G(iw) = c^*(iwI - A)^{-1}b$ referida a como la función de transferencia de la parte lineal de (2.19). Esto está definido de manera única por la parte lineal de (2.19). A causa del efecto y ocurrencia $G(iw)$ en la desigualdad, (siendo la frecuencia-respuesta) y que el comportamiento cualitativo de las soluciones puede siempre ser expresado en términos de $G(iw)$, (2.20) o (2.22) se conoce como la desigualdad de dominio de frecuencia, y el método se denomina método o técnica de dominio de frecuencia.*

Capítulo 3

Estabilidad asintótica para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales de tercer orden no lineales con retardo

3.1. Introducción

Ha habido mucho trabajo en sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) &= (A+B)Y(t) - Q\varphi(\sigma(t)), \\ \sigma(t) &= D^*Y(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde A, B, Q, son matrices reales $n \times n, n \times n, n \times m$ y $n \times m$, con énfasis en las propiedades cualitativas de las soluciones, (D^* es la matriz conjugada transpuesta de la matriz D).

Sin embargo, para sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= AX(t) + BX(t-\tau) - Q\varphi(\sigma(t)), \\ \sigma(t) &= C_1^*X(t) + C_2^*X(t-\tau), \end{cases} \tag{3.2}$$

donde C_1, C_2 son matrices $n \times m$, cuando son generalizados a ecuaciones no lineales de tercer orden con retraso (Nota: Si la variable independiente en las derivadas de orden superior no es menor que cualquier otras derivadas en la variable independiente t, se llama ecuación diferencial con retraso), no ha habido mucho trabajo en la literatura usando técnicas de dominio de frecuencia, especialmente para propiedades cualitativas similares siempre que el parámetro τ sea lo suficientemente pequeño y las condiciones del sector

$$0 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_{1j}) - \varphi_j(\sigma_{2j})}{\sigma_{1j} - \sigma_{2j}} \leq \mu_j, \quad (\sigma_{1j} \neq \sigma_{2j}) \tag{3.3}$$

$(j = 1, 2, \cdots, m)$ estén satisfechas.

Para el estudio de las propiedades cualitativas de sistemas de este tipo, se han utilizado diferentes métodos: a saber: funciones de Lyapunov se han construido y utilizado en [5, 35, 39, 42]; Se utilizaron métodos del grado topológico en [6, 38]; y los principios de Pontryagin se utilizaron en [12]. Sin embargo, el uso del método en el dominio de la frecuencia no ha sido aprovechado, su máximo ventaja que es evitar la construcción de funcionales de Lyapunov que sigue siendo un arte. Este método se remonta a las obras de Brockett y Willems Brockett [11], Kalman [21], Popov y Halanay [32] y Yacubovich [50]. Se registra una buena cuenta de esto en [17, 26], y trabajos de Duan et al. [13].

Nuestro objetivo en este capítulo es utilizar el método de dominio de frecuencia en ciertas ecuaciones diferenciales no lineales con retardo de tercer orden. ecuaciones de las formas:

$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1x'(t) + b_2x'(t-\tau)] + [c_1x(t) + c_2x(t-\tau)] + h(x(t)) = p(t), \tag{3.4}$$
$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1x'(t) + b_2x'(t-\tau)] + [c_1x(t) + c_2x(t-\tau)] + h_1(x(t-\tau)) = p(t), \tag{3.5}$$
$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1x'(t) + b_2x'(t-\tau)] + [c_1x(t) + c_2x(t-\tau)] + g(x'(t)) = p(t), \tag{3.6}$$
$$\tag{3.7}$$

y

$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1x'(t) + b_2x'(t-\tau)] + [c_1x(t) + c_2x(t-\tau)] + g_1(x'(t-\tau)) = p(t), \tag{3.8}$$

donde a, b_1, b_2, c_1, c_2, son constantes y h, h_1, g, g_1 y $p(t)$ son funciones continuas de valor real que dependen solo de sus argumentos. Sobre estas ecuaciones, probaremos que la solución cero es asintóticamente estable (cuando no hay un término forzado, es decir, $p(t) = 0$).

Estos tipos de ecuaciones ocurren tanto en modelos biológicos como en problemas físicos (ver [14] y las referencias en él). También constituyen ecuaciones de interés estudiadas por diferentes investigadores (véanse [6,26-28] a [40]). Éstas eran en diferentes formas y con valores particulares para las constantes a, b_1, b_2, c_1, c_2, y no linealidades $h(x(t))$, $h_1(x(t-\tau))$, $g(x'(t))$ y $g_1(x'(t-\tau))$.

3.2. Preliminares

Primero recordamos que en una serie de artículos, a principios de los 70, Barbalat[7], Barbalat y Halanay [9, 10], Halanay [18, 19, 17, 20] y Rasvan [33, 34] basados en artículos de Brockett, Kalman, Popov and Yacubovich [26], (y el trabajo de Duan y compañia[13] y las referencias en el mismo), para llegar a un teorema general para sistemas de la forma (3.2).

Precisamente, se demostró el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Supongamos que para el sistema (3.2)*

(i) *El sistema*

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$$

cumple la ecuación

$$\det(pI - A - Be^{-p\tau}) = 0$$

tiene todas las raíces p con $\operatorname{Re} p < 0$*; (esto es uniformemente asintóticamente estable);*

(ii) *la función no-lineal* $\varphi(\sigma) = Col(\varphi_1(\sigma_{j1}), \varphi_2(\sigma_{j2}), \cdots, \varphi_m(\sigma_{jm}))$*, satisface*

$$\begin{aligned} \varphi_j(0) &= 0, \\ 0 &\le \frac{(\varphi_j(\sigma_j))}{\sigma_j} \le \mu_j, (\sigma_j \neq 0), \end{aligned} \tag{3.9}$$

para constantes $\mu_j, (j = 1, 2, \ldots, m)$*;*

(iii) *existe una matriz diagonal L con elementos no-negativo, y una matriz diagonal R, tal que para* $\delta > 0$, *la condición dominio de frecuencia*

$$G(i\omega) + G^*(-i\omega) \geq \delta I > 0 \text{ para todo real } \omega \in [-\infty, +\infty] \tag{3.10}$$

where

$$G(p) = LK^{-1} + (L + pR)\Upsilon(p)$$

con matriz de transferencia

$$\Upsilon(p) = (C_1^* + C_2^* e^{-p\tau})(pI - A - Be^{-p\tau})^{-1}Q,$$

and $K = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$*. Entonces, la solución cero del sistema (3.2) es asintoticamente estable para todas las funciones iniciales* $X_{t_o}(t) = \psi(t) \in C_{[-\tau,0]}$.

Para obtener una demostración detallada de este teorema, consulte [33, 34].

Observación 3.2.2. *Observamos que las matrices L y R son parámetros para ser elegido convenientemente para que se pueda lograr la condición de dominio de frecuencia (3.10). La elección de estos parámetros aumenta en dificultad con la número de funciones no-lineales y condiciones que hacen que la matriz característica puedan tener raíces con partes reales negativas.*

Observación 3.2.3. *También notamos que para* $m = 1$*, la condición dominio de frecuencia (3.10) es una desigualdad funcional, que puede reducirse a encontrar un parámetro* θ *tal que*

$$\frac{1}{\mu} + Re\{(1 + i\omega\theta)\Upsilon(i\omega)\} \geq 0$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

3.3. Estabilidad asintótica con $p(t) = 0$.

Los siguientes son los resultados principales:

Primero consideraremos ecuaciones de la forma:

$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1 x'(t) + b_2 x'(t-\tau)] + [c_1 x(t) + c_2 x(t-\tau)] + h(x(t)) = 0 \tag{3.11}$$

Teorema 3.3.1. *Suponga que en la ecuación (3.11), se cumple:*

(i)

$$\begin{aligned} &a > 0; \ a(b_1 + b_2) - (c_1 + |c_2|) > 0; \quad c_1 > |c_2|; \\ &a^2 > 2(b_1 + b_2); \quad (b_1 + b_2)^2 > 2a(c_1 + |c_2|); \end{aligned} \tag{3.12}$$

(ii) *$h(0) = 0$ y para algún $\delta > 0$, existe $\mu_1 > 0$ such that*

$$0 \leq \frac{h(x(t))}{x(t)} \leq \mu_1 \quad (x(t) \neq 0), \tag{3.13}$$

con

$$\mu_1 < (c_1 - |c_2|). \tag{3.14}$$

Entonces, la solución cero del sistema 3.11 es asintóticamente estable para todas las funciones iniciales $x_{t_o}(t) = \psi(t) \in C^2[-\tau, 0]$.

Recordamos de [2] un lema importante que será útil en la demostración del teorema 3.3.1.

Lema 3.3.2. *Sea $a > 0, ab > c$ y $c > 0$. Entonces la función $\Phi_1(v)$ definida por*

$$\Phi_1(v) = av + \frac{v(v-b)^2}{(av-c)} \tag{3.15}$$

es estrictamente convexa para $v > \frac{c}{a}$ y tiene su valor mínimo $\Phi_1(v_1)$ en v_1 con $ab > \Phi_1(v_1) > c$ donde v_1 satisface

$$\Psi_1(v) = 2av^3 + (a^3 - 2ab - 3c)v^2 + 2c(2b - a^2)v + c(ac - b^2) = 0. \tag{3.16}$$

Prueba del Lema 3.3.2: Diferenciando $\Phi_1(v)$ dos veces, obtenemos

$$(av - c)^2 \Phi_1^{'}(v) = \Psi_1(v),$$

y

$$\frac{1}{2}(av-c)^3 \Phi_1^{''}(v) = v(av-c)^2 + c(b-v)(av-c) + c(ab-c)(b-v).$$

Ahora para $v > \frac{c}{a}$, y con la hipótesis que $b > \frac{c}{a}$, tenemos

$$\Phi_1^{''}(\frac{c}{a}) > 0.$$

Además, $\Psi_1(\frac{c}{a}) < 0$, y $\Psi_1(b) > 0$. Por lo tanto, v_1 satisface $\frac{c}{a} < v_1 < b$. Es más , $\Phi_1(v) > av > c$, para $v > \frac{c}{a}$.

Prueba del Teorema 3.3.1: Escribamos (3.11) en la forma del sistema (3.2) poniendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_1 & -b_1 & -a \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & -b_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C_2 \equiv 0; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suponemos que la ecuación característica

$$\Delta(p) = \det(pI - A - Be^{-p\tau}) = p^3 + ap^2 + p(b_1 + b_2 e^{-p\tau}) + (c_1 + c_2 e^{-p\tau}) = 0$$

tienes soluciones p con Re $p < 0$.

Claramente, $\Delta(i\omega) = \mathcal{A} - i\mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{A} = (c_1 - a\omega^2) + c_2 \cos\omega\tau + b_2\omega \sin\omega\tau = (c_1 - a\omega^2) + R\cos(\omega\tau - \psi_1),$$

y

$$\mathcal{B} = \omega(\omega^2 - b_1) - b_2\omega\cos\omega\tau + c_2 \sin\omega\tau = \omega(\omega^2 - b_1) + R\sin(\omega\tau - \psi_1),$$

con $\psi_1 = \arctan(\frac{b_2\omega}{c_2})$ y $R = \sqrt{(c_2^2 + b_2^2\omega^2)}$.

En efecto, $|\Delta(i\omega)|^2 = (\mathcal{A})^2 + (\mathcal{B})^2 \neq 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, puesto que $\mathcal{A} = 0$ y $\mathcal{B} = 0$ no tienen soluciones reales comunes, siempre que $a(b_1 + b_2) - c_1 > |c_2|$.

Así, $(i\omega I - A - Be^{-i\omega\tau})^{-1}$ existe, y de hecho, la función de transferencia es

$$\Upsilon(i\omega) \quad = \quad \frac{\mathcal{A} + i\mathcal{B}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}$$

Ahora, si elegimos $L = 1$ y $R = \theta$, tenemos de la condición dominio de frecuencia (3.10) como

$$\frac{1}{k} + \frac{\mathcal{A} - \omega\theta\mathcal{B}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} > 0 \tag{3.17}$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$, con $\frac{1}{k} = \frac{1}{\mu_1} - \delta$.

Para $\theta = 0$, y $\tau \neq 0$, tenemos que demostrar que

$$\frac{1}{k} + \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} > 0,$$
$$\frac{1}{k} + \frac{[(c_1 - a\omega^2) + c_2\cos\omega\tau + b_2\tau\omega^2(\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau})]}{[(c_1 - a\omega^2) + c_2\cos\omega\tau + b_2\tau\omega^2(\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau})]^2 + [\omega(\omega^2 - b_1) - b_2\omega\cos\omega\tau + c_2\omega\tau(\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau})]^2} > 0$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Por el lema 3.3.2, usando las condiciones (3.12), y asumiendo que

$$(a - b_2\tau)(b_1 + b_2 - c_2\tau) > c_1 - |c_2|$$

tenemos

$$k < c_1 - |c_2| + \min_{\omega^2 \neq 0} \Theta_1(\omega^2)$$

donde

$$\Theta_1(v) = (a - b_2\tau)v + \frac{v([b_1 + b_2 - c_2\tau])^2}{[(a - b_2\tau)v - (c_1 - |c_2|)]}.$$

Para $\theta \neq 0$, y $\omega \neq 0$ desigualdad (3.17) se puede expandir para tener

$$\begin{aligned}
&\omega^6 + \omega^4[a^2 - 2(b_1 - b_2\cos\omega\tau) + (c_2 - ab_2)\tau(\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}) - k\theta] \\
&\quad + \omega^2\Big[b_1^2 + b_2^2 - 2a(c_1 + c_2\cos\omega\tau) + 2b_1b_2\cos\omega\tau \\
&\quad + \tau(2b_2c_1 - 2c_2b_1 - k(c_2\theta + b_2))(\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}) + k[\theta(b_1 + b_2\cos\omega\tau) - a]\Big] \\
&\quad + (c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\cos\omega\tau + kc_2\cos\omega\tau) \\
&\quad > 0
\end{aligned}$$

para todo $\omega \in [-\infty, \infty]$, si

$$k\theta < a^2 - 2(b_1 + b_2) + \tau(ab_2 - c_2).$$

Elegimos

$$\tau < \min\{\frac{a}{b_2}, \frac{b_1 + b_2}{c_2}\},$$

la condición dominio de frecuencia (3.17) se satisface para todo $\omega \in [-\infty, \infty]$, y la conclusión del teorema 3.3.1 se sigue del Teorema 3.2.1.

Observación 3.3.3. *Observamos que el teorema anterior 3.3.1 es una extensión del resultado en [4], (con $b_2 \neq 0$).*

A continuación, consideremos la ecuación de la forma:

$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1 x'(t) + b_2 x'(t-\tau)] + [c_1 x(t) + c_2 x(t-\tau)] + h_1(x(t-\tau)) = 0. \tag{3.18}$$

donde la función no-lineal es con término de retardo.

Teorema 3.3.4. *Suponga que en la ecuación (3.18), las siguientes condiciones estan satisfechas:*

(i) *$a > 0$, $a(b_1 + b_2) - c_1 > |c_2|$; $(c_1 + c_2) > 0$ y $a(b_1 + b_2) < 2(c_1 + c_2)$*

(ii) *existe $\mu_2 > 0$ such that*

$$0 \leq \frac{h_1(x(t))}{x(t)} \leq \mu_2, \quad (x(t) \neq 0), \tag{3.19}$$

donde

$$\mu_2 < c_1 + |c_2|, \quad 4c_2(c_2 - 1) > 0, \quad (|c_2| > 1). \tag{3.20}$$

Entonces, la solución cero del sistema (3.18) es asintóticamente estable para todas las funciones iniciales $x_{t_o}(t) = \psi(t) \in C^2[-\tau, 0]$.

Prueba del teorema 3.3.4: Usando el mismo esquema de la prueba del teorema (3.3.1) excepto que en este caso $C_1 \equiv 0$; y $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenemos la función de transferencia como

$$\Upsilon(i\omega) = \frac{(\mathcal{A}\cos\omega\tau - \mathcal{B}\sin\omega\tau) - i(\mathcal{B}\cos\omega\tau + \mathcal{A}\sin\omega\tau)}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}$$

Por tanto, la condición de dominio de frecuencia (3.10) se convierte en,

$$\frac{1}{\mu_2} + \frac{(\mathcal{A} + \omega\theta\mathcal{B})\cos\omega\tau - (\mathcal{B} - \omega\theta\mathcal{A})\sin\omega\tau}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} > 0. \tag{3.21}$$

Esto da

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_2} &+ \frac{(2\cos^2\omega\tau - 1)(c_2 - b_2\theta\omega^2) + (b_2 + c_2\theta)\sin(2\omega\tau)}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}\\ &+ \frac{[c_1\cos\omega\tau - \omega^2(a\cos\omega\tau + b_1\theta)] - \omega[\omega^2(1 + a\theta) - (b_1 + c_1\theta)]\sin\omega\tau}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}\\ &> 0.\end{aligned}$$

Elegimos $\theta = -\frac{1}{a}$. Luego, para valores pequeños de τ esto será cierto. En particular, si $\tau < \frac{a^2 - b_1}{2(ab_2 - c_2)}$. Además, tenemos para $\omega^2 = 0$, que esto es válido para $\mu_2 \geq 0$.

La conclusión de la demostración del teorema sigue el mismo argumento, usando el teorema (3.2.1).

Observación 3.3.5. *Observamos que el teorema anterior 3.3.4 es una extensión del resultado en [4], (con $b_2 \neq 0$).*

Ahora podemos considerar la ecuación

$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1x'(t) + b_2x'(t-\tau)] + [c_1x(t) + c_2x(t-\tau)] + g(x'(t)) = 0 \tag{3.22}$$

La no linealidad está en la primera derivada.

Teorema 3.3.6. *Suponga que en la ecuación (3.22), las siguientes condiciones son satisfechas:*

(i) $a > 0$; $a(b_1 + b_2) - (c_1 + |c_2|) > 0$; $c_1 > |c_2|$; $a^2 > 2(b_1 + b_2)$

$$(b_1 + b_2)^2 > 2a(c_1 + |c_2|); \tag{3.23}$$

(ii) $g(0) = 0$ *y para algún* $\mu_3 > 0$,

$$0 \leq \frac{g(x'(t))}{x'(t)} \leq \mu_3, \quad (x'(t) \neq 0), \tag{3.24}$$

tal que

$$\mu_3 < a^2 - 2(b_1 + b_2). \tag{3.25}$$

Entonces, la solución cero del sistema (3.22) es asintóticamente estable para todas las condiciones iniciales $x_{t_o}(t) = \psi(t) \in C^2[-\tau, 0]$.

Prueba del teorema (3.3.6): Ahora consideramos la ecuación (3.16) (o ecuación (3.22) en su forma equivalente (3.2) eligiendo $A, B,$ y Q como en el teorema (3.3.1), pero con

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C_2 \equiv 0.$$

En este caso, la función de transferencia

$$\begin{aligned}
\Upsilon(i\omega) &= C_1^*(A + Be^{-i\omega\tau} - i\omega I)^{-1}Q = \frac{i\omega\bar{\Delta}(-i\omega)}{|\Delta(i\omega)|^2},\\
\Delta(i\omega) &= \det(i\omega I - A - Be^{-i\omega\tau}) = \mathcal{A} - i\mathcal{B} \text{ con}\\
\mathcal{A} &= \left[(c_1 - a\omega^2) + c_2\cos\omega\tau + b_2\omega\sin\omega\tau\right];\\
\mathcal{B} &= \left[\omega(\omega^2 - b_1) - b_2\omega\cos\omega\tau + c_2\sin\omega\tau\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición dominio de frecuencia (3.10) se convierte

$$\frac{1}{\mu_3} + \mathrm{Re}\left\{(1 + i\omega\theta)\frac{i\omega\bar{\Delta}(-i\omega)}{|\Delta(i\omega)|^2}\right\} > 0. \tag{3.26}$$

Evaluando esto tenemos

$$\frac{1}{\mu_3} - \frac{\omega(\mathcal{B} - \omega\theta\mathcal{A})}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} > 0.$$

Por inversión y reordenamiento, encontramos que si elegimos $\theta \geq 0$ and $\mu_3 < a^2 - 2(b_1 + b_2)$, esto será cierto para todos $\omega \in [-\infty, +\infty]$.

La conclusión sigue usando el teorema (3.2.1).

Por último, consideraremos la ecuación

$$x'''(t) + ax''(t) + [b_1x'(t) + b_2x'(t-\tau)] + [c_1x(t) + c_2x(t-\tau)] + g_1(x'(t-\tau)) = 0, \tag{3.27}$$

donde la no linealidad tiene término de retraso.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.7. *Suponga que en la ecuación (3.27), se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $a > 0$, $a(b_1 + b_2) - (c_1 + |c_2|) > 0$; $c_1 > |c_2| a^2 > 2(b_1 + b_2)$

$$(b_1 + b_2)^2 > 2a(c_1 + |c_2|); \tag{3.28}$$

(ii) $g_1(0) = 0$ *y para algún* $\mu_4 > 0$,

$$0 \leq \frac{g_1(x'(t))}{x'(t)} \leq \mu_4, \quad (x'(t) \neq 0), \tag{3.29}$$

tal que

$$\mu_4 < a^2 - 2(b_1 + b_2). \tag{3.30}$$

Entonces, la solución cero del sistema (3.27) es asintóticamente estable para todas las funciones iniciales $x_{t_o}(t) = \psi(t) \in C^2[-\tau, 0]$.

Prueba del teorema (3.3.7): Estableciendo esto como un sistema de forma (3.2), con matrices como antes, pero con $C_1 \equiv 0$; $C_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; tenemos la función de transferencia como

$$\Upsilon(i\omega) = C_2^* e^{-i\omega\tau}(A + Be^{-i\omega\tau} - i\omega I)^{-1}Q = \frac{i\omega e^{-i\omega\tau}\bar{\Delta}(-i\omega)}{|\Delta(i\omega)|^2}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\Delta(i\omega) = \det(i\omega I - A - Be^{-i\omega\tau}) = \mathcal{A} - i\mathcal{B},\\
&\text{with}\\
&\mathcal{A} = \left[(c_1 - a\omega^2) + c_2\cos\omega\tau + b_2\omega\sin\omega\tau\right],\\
&\mathcal{B} = \left[\omega(\omega^2 - b_1) - b_2\omega\cos\omega\tau + c_2\sin\omega\tau\right].
\end{aligned}$$

Por tanto, la condición de dominio de frecuencia (3.10) se convierte en

$$\frac{1}{\mu_4} + \omega\left\{\frac{(\mathcal{A} - \omega\theta\mathcal{B})\sin\omega\tau - (\mathcal{B} + \omega\theta\mathcal{A})\cos\omega\tau}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}\right\} > 0. \tag{3.31}$$

Entonces, esto será cierto para todos $\omega \in [-\infty, +\infty]$ si $\theta < 0$ y $\mu_4 > \frac{1}{\theta\tau}$. Aplicación del teorema (3.2.1) completa la demostración del teorema.

Capítulo 4

Soluciones uniformemente disipativas para cierto tipo de de ecuaciones diferencilales de tercer orden no lineales

En este capítulo estudiamos soluciones uniformemente disipativa para ciertas ecuaciones diferenciales de tercer orden no lineales. Empleando el método del dominio de la frecuencia y el teorema generalizado de Yacubovich sobre la disipatividad se obtienen condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones uniformemente dispativas a la ecuación considerada.

4.1. Introducción

El propósito ahora es abordar la existencia de soluciones uniformemente disipativas para la ecuación:

$$x''' + F(r)x'' + G(r)x' + H(r)x = p(t, x, x'.x''), \tag{4.1}$$

y su sistema equivalente

$$\begin{aligned} x' &= y; \\ y' &= z; \\ z' &= -x - (1-\epsilon)y - (1-\epsilon)z \\ &\quad + k\epsilon[l(\epsilon)x + m(\epsilon)y + n(\epsilon)z](x^2 + y^2 + z^2) + p(t, x, x'.x''), \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} F(r) &= 1 - \epsilon[1 + kn(\epsilon)r^2]; \\ G(r) &= 1 - \epsilon[1 + km(\epsilon)r^2]; \\ H(r) &= 1 - \epsilon kl(\epsilon)r^2. \end{aligned}$$

Además, las funciones $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ y $p(t, x, x', x'')$ son continuas con $r^2 = x'^2 + x''^2$. Además $k > 0$ y ϵ son parámetros reales. El sistema (4.1) es periódico con un período w, y satisface la condición de unicidad de la solución con respecto al problema de valor inicial sobre el producto espacio $I \times K$, donde $t \in I$, $I = [0, +\infty)$, $(x, y, z) \in \mathbb{K}$. $\mathbb{K}$ es un subconjunto compacto arbitrario de $\mathbb{R}^3$.

La ecuación (4.1)(respectivamente sistema (4.2) con varias combinaciones de funciones no lineales no solo son de interés teórico, sino también de gran importancia práctica, ya que se pueden aplicar a modelo de control automático en sistemas de T.V. realizado por medio de filtros R-C (ver por ejemplo, Afuwape et al. [8] y las referencias allí citadas). Vamos a usar el método del dominio de la frecuencia y el teorema generalizado de Yacubovich sobre la disipatividad para obtener algunas condiciones suficientes para la existencia de soluciones uniformemente disipativas a la ecuación (4.1).

Nuestra motivación para este estudio proviene de los artículos de Chen [13] y Afuwape et al. [8]. En Chen [13], se utilizó una función de Lyapunov adecuada del tipo ”solo forma cuadrática”para obtener condiciones suficientes para la existencia de una solucin que es uniformemente acotada en última instancia, y periódica (o casi periódica) para la ecuación (4.1), mientras que Afuwape et al. [8] empleó el uso del método dominio de frecuencia para obtener la existencia de una solución acotada, que es globalmente exponencialmente estable y periódica (o casi periódica) para la misma ecuación. Observemos que el método del dominio de la frecuencia es beneficioso en aplicaciones y evita las limitaciones experimentadas en la construcción práctica del conocido método de funciones de Lyapunov (ver [19] y [20]). Los resultados obtenidos en este el documento amplía y mejora los contenidos en Chen [13] y Afuwape et al. [8] y también complementan resultados existentes en la literatura.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, se dan definiciones y algunos resultados preliminares. Después el resultado principal se da en la Sección 3, se proporcionará su prueba completa en la Sección 4. Finalmente, concluiremos el artículo con comentarios generales en la Sección 5.

4.2. Preliminares

Se supondrá a partir de la ecuación (4.1) que para todo t, x, x', x'', la función p satisface la desigualdad

$$|p(t, x, x'.x'') \leq \rho_0,$$

donde ρ_0 es una constante positiva. Es importante observar que la parte lineal del sistema (4.2) es dada por

$$\begin{aligned} x' &= y; \\ y' &= z; \\ z' &= -x - (1-\epsilon)y - (1-\epsilon)z, \end{aligned} \tag{4.3}$$

de la cual podemos derivar la matriz de coeficientes A como

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -(1-\epsilon) & -(1-\epsilon) \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

con polinomio característico

$$\det(\lambda I - A(\epsilon)) = \lambda^3 + (1-\epsilon)\lambda^2 + (1-\epsilon)\lambda + 1. \tag{4.5}$$

Las raíces características de la ecuación (4.5) se dan como

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1,\\ \lambda_2 &= \frac{\epsilon}{2} + (1 - (\frac{\epsilon}{2})^2)^{\frac{1}{2}},\\ \lambda_3 &= \frac{\epsilon}{2} - (1 - (\frac{\epsilon}{2})^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Además, es bien conocido que para que una matriz sea estable, todos sus valores propios deben tener partes real negativa, es decir, Re $(\lambda_j) < 0$. En este caso $j = 1, 2, 3$ y además, $A(\epsilon)$ será estable si $\epsilon \leq -2$. Así podemos tener $(iwI - A(\epsilon))$ siendo

$$(iwI - A(\epsilon)) = \begin{pmatrix} iw & -1 & 0 \\ 0 & iw & -1 \\ 1 & (1-\epsilon) & iw + (1-\epsilon) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

y

$$\det(iwI - A(\epsilon)) := \Delta = w^2(\epsilon - 1) + 1 - iw(w^2 + \epsilon - 1) \equiv r + iws,$$

de donde obtenemos

$$|\Delta|^2 = [w^2(\epsilon - 1) + 1]^2 + w^2[w^2 + \epsilon - 1]^2. \tag{4.8}$$

Definición 4.2.1. *Considere el sistema*

$$X' = AX - B\Phi(\sigma) + P(t, X), \qquad \sigma = C^* X; \tag{4.9}$$

donde A es una matriz real $n \times n$ estable, B y C son matrices reales $n \times m$ constantes (con C^* como la transpuesta de C), $\Phi(\sigma) = col\Phi_j(\sigma_j)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ y $P(t, X)$ es una función $n-$vector continua.

Se dice que el sistema (4.9) es disipativo si en el espacio solución x hay un conjunto cerrado acotado J tal que

i) *$x(t_0) \in J$ implica $x(t) \in J$ para todo $t \geq t_0$;*

(ii) *cualquier solución $x(t)$ que comience en cualquier momento ingresa en J en algún momento t_0 y*

(iii) *hay al menos una solución $x_0(t) \in J$ que está acotada para todo t en $\mathbb{R}$.*

Observación 4.2.2. *Si J es un conjunto uniformemente acotado, entonces se dice que el sistema (4.9) es uniformemente disipativo.*

Nuestro trabajo se beneficiará sustancialmente del siguiente teorema generalizado de Yacubovich. **Teorema generalizado de Yacubovich [11]**

Teorema 4.2.3. *Suponga que en el sistema (4.9) se cumplen las siguientes condiciones:*

i) *para*

$$|\alpha| \geq \lambda_0, \quad 0 \leq \alpha\Phi_j(\alpha) \leq \mu_{0,j}\alpha^2, \quad -\alpha_{ij} \leq \Phi_j'(\alpha) \leq \alpha_{2j} \tag{4.10}$$

para $\mu_{0,j} \leq \alpha_{2j}$ y $\alpha_{1j} \geq 0$

(ii) *para todo* (t, X) *en* $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$|P(t, X)| \leq \rho_0 \tag{4.11}$$

(iii) *existen matrices diagonales* $D_1 > 0$, $D_2, D_3 \geq 0$ *tales que la desigualdad dominio de la frecuencia*

$$\begin{aligned} \pi(w) =& D_1 + \mathrm{Re}\,[D_1 M + iwD_2]G(iw) \\ &+ w^2 \mathrm{Re}\,[D_3[I + (D'' - D')G(iw)] - G^*(-iw)D_3 D' D'' G(iw)] \\ &> 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

se cumple para todo w *en* $\mathbb{R}$, *donde* $M = diag(\mu_{0,j})$, $D' = diag\,(\alpha_{1j})$, $D'' = diag\,(\alpha_{2j})$ *y* $G(iw) = C^*(iwI - A)^{-1}B$.

Además, si la condición complementaria

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} D_2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) diag\left[\int_0^\lambda \Phi_j(\alpha)\, d\alpha - \frac{\lambda}{2}\Phi_j(\lambda)\right] \geq 0 \tag{4.13}$$

se satisface, entonces el sistema (4.9) tiene soluciones uniformemente disipativas.

4.3. Resultado principal

Teorema 4.3.1. *Además de los supuestos de la ecuación (4.1), suponga que existen constantes positivas* μ_1, μ_2, μ_3 *y las funciones* $H(r)$, $G(r)$ *y* $F(r)$ *son diferenciables para todo* $|q| \geq \lambda_0$, λ_0 *suficientemente grande de tal manera que*

$$0 \leq \frac{H(q)}{q} \leq \mu_1, \qquad 0 \leq H'(q) \leq \mu_1; \tag{4.14}$$

$$0 \leq \frac{G(q)}{q} \leq \mu_2, \qquad 0 \leq G'(q) \leq \mu_2; \tag{4.15}$$

$$0 \leq \frac{F(q)}{q} \leq \mu_3, \qquad 0 \leq F'(q) \leq \mu_3; \tag{4.16}$$

se satisfacen, entonces las soluciones de la ecuación (4.1) son uniformemente disipativas si las siguientes condiciones

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \tfrac{1}{q^2}\left[\int_0^q H(\zeta)\, d\zeta - \tfrac{1}{2}qH(q)\right] \leq 0; \tag{4.17}$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \tfrac{1}{q^2}\left[\int_0^q G(\zeta)\, d\zeta - \tfrac{1}{2}qG(q)\right] \geq 0; \tag{4.18}$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \tfrac{1}{q^2}\left[\int_0^q F(\zeta)\, d\zeta - \tfrac{1}{2}qF(q)\right] \leq 0 \tag{4.19}$$

también se cumplen.

Observación 4.3.2. *La condición de acotación en la función* $p(t, x, x', x'')$ *puede debilitarse a*

$$|p(t, x, x', x'')| \leq \rho_0 + \rho_1(|x|, |x'|, |x''|), \tag{4.20}$$

donde ρ_0 *y* ρ_1 *son constantes positivas.*

4.4. La prueba del Teorema 4.3.1

Considere la ecuación (4.1) (respectivamente el sistema (4.2)) que se puede escribir en la forma vectorial (4.9):

$$X' = AX - B\Phi(\sigma) + P(t, X), \qquad \sigma = C^* X,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -(1-\epsilon) & -(1-\epsilon) \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p(t, x, x', x'') \end{pmatrix}; \quad \Phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \widehat{H}(x) \\ \widehat{G}(y) \\ \widehat{F}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

La función de transferencia $G(iw) = C^*(IwI - A)^{-1}B$ de este sistema está dada por

$$G(iw) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ iw & iw & iw \\ -w^2 & -w^2 & -w^2 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Elijamos las matrices diagonales

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_2}{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau_3}{\mu_3} \end{pmatrix}; \quad D_2 = \begin{pmatrix} \frac{\theta_1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2}{\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_3}{\tau_3} \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Entonces la desigualdad en el dominio de la frecuencia (4.12) se convierte en

$$\Pi(w) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{pmatrix} > 0; \tag{4.24}$$

donde

$$\Pi_{11} = \frac{\tau_1}{\mu_1} + \frac{\left[r\tau_1 + w^2 \frac{\theta_1}{\tau_1} s\right]}{|\Delta(w)|^2}, \tag{4.25}$$

$$\Pi_{22} = \frac{\tau_2}{\mu_2} + \frac{w^2 \left[s\tau_2 - \frac{\theta_2}{\tau_2} r\right]}{|\Delta(w)|^2}, \tag{4.26}$$

$$\Pi_{33} = \frac{\tau_3}{\mu_3} - w^2 \frac{\left[r\tau_3 - w^2 \frac{\theta_3}{\tau_3} s\right]}{|\Delta(w)|^2}, \tag{4.27}$$

$$\Pi_{12} = \frac{p_1 + iq_1}{2|\Delta(w)|^2} \quad y \quad \Pi_{21} = \frac{p_1 - iq_1}{2|\Delta(w)|^2}.$$

Es más,

$$p_1 = \left(\tau_1 - w^2 \frac{\theta_2}{\tau_2}\right) r + w^2 \left(\tau_2 + \frac{\theta_1}{\tau_1}\right) s$$

y

$$q_1 = w\left(\left(\frac{\theta_1}{\tau_1} - \tau_2\right) r - \left(\tau_1 + w^2 \frac{\theta_2}{\tau_2}\right) s\right).$$

Similarmente,

$$\Pi_{13} = \frac{p_2 + iq_2}{2|\Delta(w)|^2} \quad y \quad \Pi_{31} = \frac{p_2 - iq_2}{2|\Delta(w)|^2}.$$

con

$$p_2 = \left(\tau_1 - w^2\tau_3\right) r + w^2 \left(\frac{\theta_1}{\tau_1} - w^2 \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) s$$

y

$$q_2 = w\left(\left(\frac{\theta_1}{\tau_1} + w^2 \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) r - \left(\tau_1 + w^2\tau_3\right) s\right).$$

También,

$$\Pi_{23} = \frac{p_3 + iq_3}{2|\Delta(w)|^2} \quad y \quad \Pi_{32} = \frac{p_3 - iq_3}{2|\Delta(w)|^2}.$$

donde

$$p_3 = w^2 \left(\tau_2 - w^2 \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) s - w^2 \left(\tau_3 + \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) r$$

y

$$q_3 = w\left(\left(\tau_2 + w^2 \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) r + w^2 \left(\frac{\theta_2}{\tau_2} - \tau_3\right) r\right).$$

Para demostrar que la desigualdad (4.24) es válida, basta con utilizar el criterio de Sylvester que exige que los principales menores de $\Pi(w)$ en la desigualdad (4.24) sean estrictamente positivos. Ahora probaremos esto en lo sigue.

Lema 4.4.1. *Para todo w en $\overline{\mathbb{R}}$, $\Pi_{ii}(w) > 0$, (i = 1, 2, 3).*

Prueba:

Para $i = 1$, $\Phi_{11}(w)$ en la ecuación (4.25) será positivo para todo w en $\overline{\mathbb{R}}$ si podemos encontrar un M_1 tal que

$$M_1 \geq \frac{1}{\mu_1} + \max_{w\in\overline{\mathbb{R}}} \left[\frac{r - w^2 \frac{theta_1}{\tau_1^2} s}{r^2 + w^2 s^2}\right] > 0. \tag{4.28}$$

Dado que tanto r y s no pueden ser idénticamente cero al mismo tiempo, el máximo de la expresión en el el corchete es alcanzable en $w^2 = \frac{-1}{\epsilon-1}$, con un valor de $\frac{-(\epsilon-1)}{\epsilon-1)^2-1}\frac{\theta_1}{\tau_1^2}$. Esto es posible al elegir $theta_1$ siendo negativo y, por tanto, $\Pi_{11}(w) > 0$.

A continuación, para $i = 2$, $\Phi_{22}(w)$ en la ecuación (4.26) será positivo para todo w en $\overline{\mathbb{R}}$, si de manera similar, podemos encontrar un M_2 tal que

$$M_2 \geq \frac{1}{\mu_2} + \max_{w\in\overline{\mathbb{R}}} \left[\frac{-w^2 s - w^2 \frac{theta_2}{\tau_2^2} r}{r^2 + w^2 s^2}\right] > 0. \tag{4.29}$$

Al usar argumentos similares a los anteriores, se observa que el máximo se alcanza en $w^2 = 1 - \epsilon$ con un valor de $\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon-1)^2-1}\frac{\theta_2}{\tau_2^2}$. Esto es posible al elegir $\theta_2 > 0$. Por tanto, $\Pi_{22}(w) > 0$.

Por último, para $i = 3$, $\Phi_{33}(w)$ en la ecuación (4.27) será positivo para todo w en $\overline{\mathbb{R}}$ si también podemos mostrar que para un M_3,

$$M_3 \geq \frac{1}{\mu_3} + \max_{w\in\overline{\mathbb{R}}} \left[\frac{-w^2 r - w^4 \frac{theta_3}{\tau_3^2} s}{r^2 + w^2 s^2} \right] > 0. \tag{4.30}$$

Esto es posible ya que el máximo existe en $w^2 = \frac{-1}{\epsilon-1}$, con un valor de $\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon-1)^2-1}\frac{\theta_3}{\tau_3^2}$ eligiendo $\theta_3 < 0$. Por tanto, $\Pi_{33}(w) > 0$.

Lema 4.4.2. *Para todo w en $\overline{\mathbb{R}}$,*

$$\Pi_{ii}(w)\Pi_{jj}(w) - |\Pi_{ij}(w)|^2 > 0, \quad (i \neq j) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Prueba

Para $i = 1$ y $j = 2$, obtenemos

$$\Pi_a(w) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{pmatrix} > 0 \tag{4.31}$$

de la desigualdad (4.24) que es equivalente a

$$\Pi_a(w) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Pi_{12}M_1^{-1}}{2|\Delta|^2} \\ \frac{\Pi_{21}}{2|\Delta|^2} & \Pi_{22} \end{pmatrix} > 0.$$

Así

$$\det \Pi_a(w) = \Pi_{22}(w) - \frac{|\Pi_{12}(w)|^2}{4|\Delta|^4} M_1^{-1} > 0,$$

si

$$\frac{\tau_2}{\mu_2} > \max_{w\in\overline{\mathbb{R}}} \left[\frac{4w^2(s\tau_2 + \frac{\theta_2}{\tau_2}r)|\delta|^2 + |\Pi_{12}(w)|^2 M_1^{-1}}{4|\Delta|^4} \right],$$

que con una mayor simplificación conduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_2} > \frac{-[(\epsilon-1)^2 - 1][1 - (\epsilon - 1)]}{(\epsilon - 1)[1 - (\epsilon - 1)]^2} + M_1^{-1} \frac{[\tau_2^2 - \theta_2]^2[(\epsilon-1)^2 - 1]^2}{4\tau^2(\epsilon-1)^2[1 - (\epsilon - 1)]^2} \\ M_1^{-1} \frac{[(1-\epsilon)\tau_2 - \frac{1}{\epsilon-1}\frac{\theta_2}{\tau_2}]^2[(\epsilon - 1) - 1]^2}{4\tau_2[1 - (\epsilon - 1)]^2} \end{aligned}$$

al elegir $w^2 = -\frac{1}{\epsilon-1}$, $\tau_1 = (1-\epsilon)\tau_2$ y $\theta_1 = -(1-\epsilon)\theta_2$. La región en la que el máximo es alcanzado está determinado por el signo de $\theta_1 = -(1-\epsilon)\theta_2$. Dado que está claro que no hay asíntotas, el máximo es alcanzable. Por tanto, se satisface la desigualdad (4.31).

Lo siguiente es mostrar que para $i = 1$ y $j = 3$,

$$\Pi_b(w) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{13} \\ \Pi_{31} & \Pi_{33} \end{pmatrix} > 0. \tag{4.32}$$

Siguiendo los argumentos anteriores, solo necesitamos mostrar que $\det \Pi_b(w)$ en la desigualdad (4.32) es definido positivo para satisfacer el criterio de Sylvester, ya que, ya ha sido probado en el Lema 4.4.1 que Π_{11} y Π_{33} son ambos positivos. Al simplificar la desigualdad (4.32), obtenemos

$$\Pi_b(w) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \frac{\Pi_{13}M_2^{-1}}{2|\Delta|^2} \\ \frac{\Pi_{21}}{2|\Delta|^2} & \Pi_{22} \end{pmatrix} > 0.$$

Así

$$\det \Pi_b(w) = \Pi_{11}(w) - \frac{|\Pi_{13}(w)|^2}{4|\Delta|^4} M_2^{-1} > 0,$$

si

$$\frac{\tau_1}{\mu_1} > \max_{w\in\mathbb{R}} \left[\frac{|\Pi_{13}(w)|^2 M_2^{-1} - 4(r\tau_1 - w^2 \frac{\theta_1}{\tau_1} s)|\Delta|^2}{4|\Delta|^4} \right].$$

Al usar argumentos similares a los anteriores con la elección de $\theta_1 < 0$, $\theta_3 < 0$ y $w^2 = 1 - \epsilon$ tenemos

$$\frac{1}{\mu_1} > \frac{[\tau_1 - (1-\epsilon)\tau_3]^2 + (1-\epsilon)\left[\frac{\theta_1}{\tau_1} + (1-\epsilon)\frac{\theta_3}{\tau_3}\right]^2 - 4\tau_1\left[1 - (\epsilon - 1)^2\right]^5}{4\left[1 - (1-\epsilon)^2\right]^4}.$$

Por tanto, se satisface la desigualdad (4.32).

Por último, mostraremos que

$$\Pi_c(w) = \begin{pmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{pmatrix} > 0. \tag{4.33}$$

Así

$$\det \Pi_c(w) = \Pi_{33}(w) - \frac{|\Pi_{23}(w)|^2}{4|\Delta|^4} M_3^{-1} > 0,$$

si

$$\frac{\tau_3}{\mu_3} > \max_{w\in\mathbb{R}} \left[\frac{|4(r\tau_3 + w^2 \frac{\theta_3}{\tau_3} s)|\Delta|^2 - |\Pi_{23}(w)|^2 M_3^{-1}}{4|\Delta|^4} \right].$$

Al usar argumentos similares a los anteriores con la elección de $\theta_1 < 0$, $\theta_3 < 0$ y $w^2 = 1 - \epsilon$ tenemos

$$\frac{1}{\mu_3} > \frac{4(1-\epsilon)(1-(1-\epsilon)^2)\tau_3\left[(1-\epsilon)^2(\tau_3 + frac\theta_3\tau_3)^2 + (\tau_2 + (1-\epsilon)\frac{\theta_3}{\tau_3})\right]}{4\left[1-(1-\epsilon)^2\right]^2}.$$

Por tanto, se satisface la desigualdad (4.33).

4.5. Conclusión para la prueba del resultado principal

Ahora queda demostrar que

$$\begin{aligned} \det \Pi(w) =& \Pi_{11}\left(\Pi_{22}\Pi_{33} - |\Pi_{23}|^2\right) + \Pi_{22}\left(\Pi_{11}\Pi_{33} - |\Pi_{31}|^2\right) & (4.34)\\ & \Pi_{33}\left(\Pi_{11}\Pi_{22} - |\Pi_{12}|^2\right) - 2\Pi_{11}\Pi_{22}\Pi_{33} & (4.35)\\ & + 2\Re(\Pi_{12}\Pi_{23}\Pi_{31}) & (4.36)\\ & > 0, & (4.37) \end{aligned}$$

que es equivalente a $\det \Pi(w) > 0$, y esto será cierto $\forall w \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\Pi_{11}\Pi_{22}\Pi_{33} - \frac{1}{4|\Delta|^4}(\Pi_{11}(p_1^2 + q_1^2) + \Pi_{22}(p_2^2 + q_2^2) + \Pi_{33}(p_3^2 + q_3^2)) \tag{4.38}$$

$$+ \frac{1}{4|\Delta|^4}(p_1(p_3 p_2 + q_3 q_2) + q_1(p_3 q_2 - q_3 q_2)) > 0. \tag{4.39}$$

Al utilizar todos los parámetros en la desigualdad (4.38), el grado de $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$, $|\Delta(w)|^2, |\Delta(w)|^4$ y $|\Delta(w)|^6$ pueden considerarse polinomios en w. Si en la desigualdad (4.38), $w^2 = 0$, entonces $\det \Pi(w) > 0$. Sin embargo, si $w^2 \neq 0$, entonces $|\Delta(w)|^2$, $|\Delta(w)|^4$ y $|\Delta(w)|^6$ pueden verse como polinomios en w^2 de órdenes tres, seis y nueve respectivamente. Por lo tanto, con la elección de μ_1, μ_2 y μ_3 que satisfacen los Lemas 4.4.1 y 4.4.2, $\det \Pi(w) > 0$.

Ahora queda por mostrar que la condición suplementaria (4.13) en relación con los sistemas (4.9 y (4.21) está satisfecho. En vista de estos y de la elección de la matriz diagonal D_2, se deduce que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix} \geq 0, \tag{4.40}$$

donde

$$\vartheta_1 = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \widehat{H}(\zeta)\, d\zeta - \frac{x}{2}\widehat{H}(x), \tag{4.41}$$

$$\vartheta_2 = \lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y^2} \int_0^y \widehat{H}(\zeta)\, d\zeta - \frac{y}{2}\widehat{H}(y), \tag{4.42}$$

$$\vartheta_3 = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z^2} \int_0^z \widehat{H}(\zeta)\, d\zeta - \frac{z}{2}\widehat{H}(z). \tag{4.43}$$

La evaluación de la desigualdad (4.40) da

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\theta_1}{x^2} \left[\int_0^x \widehat{H}(\zeta)\, d\zeta - \frac{x}{2}\widehat{H}(x) \right] \leq 0, \tag{4.44}$$

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{\theta_2}{y^2} \left[\int_0^y \widehat{H}(\zeta)\, d\zeta - \frac{y}{2}\widehat{H}(y) \right] \geq 0, \tag{4.45}$$

y

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\theta 3}{z^2} \left[\int_0^z \widehat{H}(\zeta)\, d\zeta - \frac{z}{2}\widehat{H}(z) \right] \leq 0. \tag{4.46}$$

Esto es posible eligiendo $\theta_1 < 0$, $\theta_{>}0$ y $\theta_3 < 0$. Así, todas las condiciones del teorema de Yacubovich generalizado se cumplen. Por tanto, las soluciones de la ecuación (4.1) son uniformemente disipativas.

Resultados y Conclusiones

Es el punto final de la investigación realizada, ésta se enmarca en un contexto de inicio-cierre, es decir, que se parte con las ideas propuestas o preliminares del estudio, luego se describen los logros obtenidos, y finalmente se formulan otras ideas partiendo de las que se tuvieron al principio del estudio. En términos generales, la conclusión debe incluir aspectos como:

1. Se logró enriquecer un poco la teoría del dominio de freciencias para ecuaciones no-lineales de tercer orden con retardo .

2. Un punto interesante que quiero resaltar es el hecho de que, si bien, los parámetros R y L en el teorema (3,2,1) deben ser escogidos de una manera ideal para que la condición de dominio de frecuencia se pueda dar, esta elección aumenta en dificultad en la medida en la que se aumenta el número de no-linealidades y las condiciones para que la matriz característica sea una matriz estable.

3. Se pudo constatar que el método de dominio de frecuencias resulta una herramienta muy útil a la hora de estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones de las soluciones de una ecuación diferencial o sistemas de ecuaciones diferenciales, pues da una luz a cómo puede ser construida la función de Lyapunov.

Bibliografía

[1] Afuwape, A.U. *Conditions on the behaviour of solutions for third-order nonlinear differential equations*, An. Stii ale Univ. 'Al.I.Cuza', Iasi, xxx (1984), 30-34.

[2] Afuwape, A.U. *Frequency-domain approach to nonlinear oscillations of some third-order differential equations* J. Nonlinear Analysis, TMA. 10, no.12 (1986), 1459-1470.

[3] Afuwape, A.U., Frequency domain approach to some third-order non-linear differential equations, *J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.Vol. 71, no. 12 (2009) e972 - e978.*

[4] Afuwape, A.U. *Frequency-domain approach to certain third-order nonlinear delayed differential equations* Directions in Mathematics, (1999), 49 - 58.

[5] Afuwape, A.U. and Omeike, M.O. On the stability and boundedness of solutions of a kind of third order delay differential equations , *Applied Math and Computation,* vol. 200, no.1 (2008), 444 - 451.

[6] Afuwape, A.U., Mawhin, J. and Zanolin, F.*An existence theorem for periodic solutions and applications to some nonlinear ordinary and delay equtions*, preprint.

[7] Barbalat, I. *Conditions pour un bon Comportment de certaines equations differentielles du troisieme et du Quatrieme ordre* , Equations differentielles et functionelles non-lineaires ed. P. Janssens, J. Mawhin et N. Rouche, (1973) 79 - 91.

[8] E. A. Barbashin and N. N. Krasovskii, *On the Stability of Motion in the Large,* Dokl. Akad. Nauk., vol. 86, pp. 453–456, 1952.

[9] Barbalat, I. and Halanay, A. *Nouvelles applications de la method frequentielle dans la theorie des oscillations* , Rev. Roum.Sci. Techn. Electroteechn et Energ. 16(2) (1971) 689 - 702 .

[10] Barbalat, I. and Halanay, A. *Conditions de comportement 'presque lineaire ' dans la theorie des oscillations* Rev. Roum.Sci. Techn. Electrotechn et Energ. 29(2), (1974) 321 - 341 .

[11] Brockett, R.W. and Willems, J. L. *Frequency domain stability criteria* Trans. Automat. Control vol. 2, pt. 1 (1965).

[12] Cahlon, B. and Schmidt, D. *Stability criteria for certain third-order delay differential equations* J. Comp. Appl. Math 188 (2006) 319- 335.

[13] Duan, Zhiheng; Wang, Jinzhi; Yang, Ying; and Huang, Lin *Frequency-domain and time domain methods for feedback nonlinear systems and applications to chaos control* Chaos, Solitons and Fractals 40 (2009), 848 - 861.

[14] Gopalsamy, K *Stability and Oscillations in Delay Differential Equation of Population Dynamics.* Boston: Kluwer Academic Publisher, 1992.

[15] Gromova, P.S. and Pelevina, A.F. *Absolute stability of Automatic Control Systems with time-lag* , Differential Equations 13, 2, (1977) 954 - 960.

[16] Halanay, A. *Periodic solutions of linear systems with lag*, Rev. de Math. Pure et Appliquee. Acad. R.S.R. VI, 1, (1961) 141 - 158 .

[17] Halanay, A. *Differential equations: Stability, oscillations, time lags.* Academic Press, New York-London 1966 xii+528 pp.

[18] Halanay, A. *Invariant manifolds for systems with time-lag* Differential Equations and Dynamical Systems. ed. J. Hale and J.P. La Salle. Academic Press, N.Y. (1967) 199 - 213.

[19] Halanay, A. *Almost periodic solutions for a class of non-linear systems with time lag* , Rev. Roum. Pures et Appliquee XIV, 9, (1969) 1269 - 1276.

[20] Halanay, A. *Systemes a retard. Application des methodes frequentielles* Equations differentielles et functionelles non-lineaires ed. P. Janssens, J. Mawhin et N. Rouche, (1973) 357 - 380.

[21] Kalman, R.E. *Lyapunov functions for the problem of Lurie in automatic control,* Proc. National Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963) 201 - 205.

[22] N. N. Krasovskii, *Problems of the Theory of Stability of Motion*. Stanford, CA: Stanford University Press, 1959.

[23] Kurzweil, J. *Invariant Manifolds of Flow* , Differential Equations and Dynamical Systems. ed. J. Hale and J.P. La Salle. Academic Press, N.Y. (1967) 431 - 468.

[24] J. P. LaSalle, *Some Extensions of Liapunov's Second Method,* IRE Trans. Circ. Theory, vol. CT-7, pp. 520–527, 1960.

[25] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*. New York: Academic Press, 1961.

[26] Leonov, G.A., Ponomarenko, D.V. and Smirnova, V.B. *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis, Theory and Applications.* World Scientific Publ. Co. (1996). MR 98c:93006.

[27] Lurie, A.I., *Non-linear problems of the theory of automatic control*. Gostkizdat, Moscow (1951).

[28] Popov V.M., *Absolute stability of Non-Linear Systems of Automatic control*, Aut. Rem. Control, 22, (1961), 961-979;

[29] A. I. Luré and V. N. Postnikov, *On the Theory of Stability of Control Systems,* Prikl. Mat. Mehk., vol. 8, 1944.

[30] A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion.* Kharkov, Russia: Kharkov Mathematical Society, 1892.

[31] A. M. Lyapunov, *Problème Generale de la Stabilité du Mouvement,* in Annales de la Faculté Sciences de l'Université de Toulouse (É. Davaux, ed.), vol. 9, pp. 203–474. 1907. Reprinted by Princeton University Press, Princeton, NJ, 1949.

[32] Popov, V.M. and Halanay, A. *On the stability of non-linear automatic control systems with lagging argument* , Aut. Rem. Control. (1962) 783 - 786.

[33] Rasvan, Vl. *Absolute stability of a class of non-linear time-lag control systems: I. The fundamental case; II. Critical cases* . Rev. Roum. Sci. Techn. ser. Electrotechn. et Energ. 17, 4, 667 - 681 (1972); 18, 1, 115 - 123 (1973).

[34] Rasvan, Vl. *Frequency domain stability criteria for time lag control systems with several non-linearities. I. General results; II. Applications; III. Linear and non-linear systems with monotonic time varying gain* . Rev. Roum. Sci. Techn. ser. Electrotechn. et Energ. 1, 2, 3, 17, 2, 369 - 381; 17, 3, (1972) 507 - 521.

[35] Sadek, A.I. Stability and Boundedness of a kind of third order delay differential system *Applied Math. Letters,* vol (2003), 657 - 662.

[36] Tejumola, H.O. *Existence of periodic solutions of certain third-order non-linear differential equations with delay I* . J. Nigerian Math. Soc. 7 (1988) 59 - 66.

[37] Tejumola, H.O. *Resonant and nonresonant oscillations for certain third-order differential equations with delay.* Pitman Research Notes in Mathematics series 272: Ordinary and Delay Differential Equations (Joseph Wiener and Jack K. Hale, Editors) , (1992), 238 - 243.

[38] Tejumola, H.O. and Tchegnani, B. *Stability, Boundedness and existence of periodic solutions of some third and fourth order nonlinear delay differential equations* . J. Nigerian Math. Soc. 19 (2000) 9 - 19.

[39] Tunc, Cemil *New results about stability and boundedness of solutions of certain nonlinesr third-order delay differential equations* Arab. J. Sci. Eng. 31 (2A) (2006), 185 -196

[40] Tunc, Cemil *Stability and boundedness of solutions of nonlinear equations of third-order with delay* Differential Equations and Control Processes 3 (2007) 1 -13.

[41] Tunc, Cemil *On asymptotic stability of stability of solutions to third order nonlinear differential equations with retarded argument,* Commun. Appl. Anal. 11 (3 -4) (2007), 515 - 527.

[42] Tunc, Cemil *On the boundedness of solutions of third-order delay differential equations,* Differ. Equ. (Differ. ravn.) 44(4), (2008), 464 -472.

[43] Tunc, Cemil *On the stability and boundedness of solutions to third order nonlinear differential equations with retarded arguments*, Nonlinear Dynamic. 57 (1–2) (2009) 97–106.

[44] Tunc, Cemil *A new boundedness result to nonlinear differential equations of third order with finite lag*, Commun. Appl. Anal. 13 (1) (2009) 1–10.

[45] Tunc, Cemil *Stability criteria for certain third order nonlinear delay differential equations*, Math. 66 (1) (2009) 71–80.

[46] Tunc, Cemil *On the boundedness of delay differential equations of third order*, Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci. 34 (1) (2009) 227–237.

[47] Tunc, Cemil *On the stability and boundedness of solutions of nonlinear vector differential equations of third order,* Nonlinear Anal. 34 (6) (2009) 2232–2236.

[48] Tunc, Cemil *On the qualitative behaviors of solutions of a kind of nonlinear third order differential equations with a retarded argument*, An. Stiit. Univ. 'Ovidius' Constanta Ser. Mat. 17 (2) (2009) 215–230.

[49] Tunc, Cemil *Bounded solutions to nonlinear delay differential equations of third order*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 34 (1) (2009) 131–139.

[50] Yacubovich, V.A. *The matrix method in the theory of the stability of non linear control systems,* Aut. Rem. Control 25 (1964) 905 - 916.

[51] Yacobovich, V.A. *The solutions of some matrix inequality occuring in the theory of automatic control*. Soviet math. Dokl. 4, (1962), 1304-1307.

[52] Yakubovich, V.A. *Frequency conditions for the absolute stability and dissipativity of control systems with a single differentiable nonlinearity,* Soviet Mathematics. Doklady, (1965), 98–101.

[53] Popov V.M. *The solution of a new stability problem for controlled systems.* Automation and Remote Control, (1963) 1-23.

[54] Răsvan Vl. *A new dissipativity criterion - towards Yakubovich oscillations.* International Journal of Robust and Nonlinear Control, (2007), 483-495.

[55] *Barbalat I. and Halanay A. Applications of the frequency-method to forced nonlinear oscillations.* Mathematische Nachrichten, (1970), 165–179.

[56] Halanay A. *Frequency-domain criteria for dissipativity.* Ordinary differ. Equat., Proc. NRL-MRC Conf, (1971 - 1972), 413-417.

[57] Afuwape A.U. *Frequency-domain criteria for dissipativity of some third order differential equations.* Analele Ştiinţifice ale Universităţii Al. I. Cuza din Iaşi. (Serie Nouă.) Secţiunea Ia. Matematică-Informatică, (1978), 271 - 275.

[58] Afuwape A.U. *An application of the frequency-domain criteria for dissipativity of a certain third order non-linear differential equation.* Analysis, (1981), 211 - 216.

[59] Afuwape A.U. *Uniform dissipative solutions for a third order non-linear differential equation.* Differential equations, Proc. Conf., Birmingham/Ala. 1983, North-Holland Math. Stud, (1984), 1-6.

[60] Adesina, Olufemi Adeyinka. *A result on uniformly dissipative solutions for a certain fifth order non-linear differential equation*, Journal of Mathematical Research and Exposition, (2006), 465 - 470.

[61] Afuwape A.U. and Adesina O.A. *Uniform dissipative solutions for some fifth-order non-linear differential equations*, Ordinary differential equations, (2000), 66 - 74.

[62] Afuwape A.U. and Adesina O.A. *On the uniform dissipativity of some fifth-order non-linear differential equations*, Annals of Differential Equations. Weifen Fangcheng Niankan, (2003), 489 - 496.

[63] , Afuwape A.U. *Uniform dissipative solutions to some fourth-order nonlinear differential equations.* An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Mat. (1991), 431 - 445.