

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**SANDRA YANED CADAVID MUÑOZ  
CRUZ AMPARO RESTREPO RESTREPO**

**EL PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA  
DESDE EL USO DE ARTEFACTOS**

**Trabajo de grado para optar el título de Magíster en Educación**

**Asesora: Dra. Diana Victoria Jaramillo Quiceno**

**Medellín, Colombia  
2011**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
TESIS DE MAESTRÍA**

**EL PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA  
DESDE EL USO DE ARTEFACTOS**

**Sandra Yaned Cadavid Muñoz  
Cruz Amparo Restrepo Restrepo**

**Asesora: Dra. Diana Victoria Jaramillo Quiceno**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

---

Diana Victoria Jaramillo Quiceno  
**Nombre del presidente del jurado**

Marcelo de Carvalho Borba  
**Nombre del jurado**

Leonor Camargo Uribe  
**Nombre del jurado**

**Medellín, Colombia  
2011**

*A nuestros padres*

## AGRADECIMENTOS

A la profesora Dra. Diana Victoria Jaramillo Quiceno, quién durante todo el proceso de formación nos acompañó como asesora y amiga.

A la profesora Yolanda Beltrán de Covaleda, por su colaboración durante el trabajo de campo y sus valiosos aportes durante todo el proceso investigativo.

A nuestros colegas y amigos del grupo colaborativo, con quienes compartimos nuestras alegrías y angustias, y quienes, en cada uno de los encuentros realizados durante el proceso de investigación, nos posibilitaron irnos (re)constituyendo como maestras e investigadoras.

A la Institución Educativa Comercial Antonio Roldán Betancur, por brindarnos el espacio para realizar el trabajo de investigación.

A los estudiantes del grado 11<sup>o</sup> del año 2010, por su compromiso, dedicación y responsabilidad para llevar a cabo las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*.

A la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, por su apoyo durante el desarrollo de la investigación.

Al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación —COLCIENCIAS—, por su apoyo financiero en este proceso de investigación.

Al Dr. Martín Acosta, profesor de la Universidad Industrial de Santander, quién nos dio valiosos aportes en torno al proyecto de las antenas parabólicas y el uso del *software Geogebra*.



A Dra. Leonor Camargo Uribe y al M.Sc Gustavo Gallego, profesores de la Universidad Pedagógica Nacional y de la Universidad de Antioquia, respectivamente, quienes leyeron una primera versión del proyecto investigación presentado para su cualificación.

A la Dra. Leonor Camargo Uribe y al Dr. Marcelo Borba, profesores de la Universidad Pedagógica Nacional y la *Universidade do Estado de Sao Paulo-UNESP* de Brasil, respectivamente, por sus valiosas contribuciones como jurados de este trabajo.

A nuestras familias y parejas, por su compañía y amor incondicional.

## RESUMEN

En este estudio pretendimos dar respuesta a la pregunta ¿cómo es el proceso de objetivación de la parábola desde el uso de artefactos en estudiantes de grado once? Así, el objetivo de nuestra investigación fue analizar el proceso de objetivación de la parábola desde el uso de artefactos en estudiantes de grado once. Los fundamentos teóricos para analizar este proceso de objetivación del concepto de parábola fueron abordados desde la perspectiva sociocultural de la educación y de la Educación Matemática, específicamente, desde la *Teoría de la Actividad*, la *Teoría de la Objetivación*, las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* y las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*.

Esta investigación se llevó a cabo con los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Antonio Roldán Betancur del municipio de Bello (Antioquia), la cual es de carácter público. Esta investigación la abordamos desde el paradigma de investigación cualitativa, bajo un enfoque crítico-dialéctico, bajo la metodología “investigación participante”. Para el análisis de las producciones de los estudiantes utilizamos el estudio de casos. Esta investigación, a su vez, estuvo inmersa en una mayor, de tipo colaborativo, intitulada “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”, la cual contó con el apoyo financiero del Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación —COLCIENCIAS— y de la Universidad de Antioquia.

Desde los resultados obtenidos en esta investigación vimos cómo las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* les posibilitaron a los estudiantes producir sentidos y significados para el concepto de parábola, desde la comprensión de los fenómenos del medio, específicamente el funcionamiento de las antenas parabólicas. Las actividades también viabilizaron el uso de artefactos que mediaron en cada una de las acciones de los estudiantes, y posibilitaron su proceso de objetivación del concepto de parábola. Así, consideramos que la manera como un sujeto llega a pensar y a conocer un objeto depende de los significados culturales producidos, de las interpretaciones propias, de las formas de acercarse al objeto, por medio de la actividad misma y siempre mediada por artefactos.

En esta investigación, el *software Geogebra* jugó un papel importante en la objetivación del concepto de parábola, por parte de los estudiantes, para modelar situaciones reales como fue el funcionamiento de una antena parabólica. En dicha modelación, el modo de “arrastré” proporcionado por el *software* posibilitó a los estudiantes el establecimiento de invariantes y relaciones; aspectos que fueron importantes en el acercamiento del estudiante al concepto de parábola y, consecuentemente, a su proceso de objetivación.

**Palabras clave:** Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase, Teoría de la Actividad, Actividades Orientadoras de Enseñanza, Geogebra, Dialogía, subjetividad, Mediación.

## TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMENTOS.....	iv
RESUMEN.....	vi
LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABLAS.....	ix
LISTA DE EPISODIOS.....	x
PRESENTACIÓN.....	11
CAMINO METODOLÓGICO.....	17
<b>Planteamiento del problema</b> .....	17
<b>Hacia la pregunta de investigación</b> .....	21
LA PARÁBOLA: SU PROCESO DE OBJETIVACIÓN. LA ASCENSIÓN DE LO ABSTRACTO A LO CONCRETO.....	54
<b>A modo de presentación</b> .....	54
<b>El pensamiento empírico y el pensamiento teórico</b> .....	62
LOS ARTEFACTOS COMO CONSTITUYENTES DEL SUJETO EN EL PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA.....	102
<b>A modo de presentación</b> .....	102
<b>Artefactos como constituyentes del sujeto</b> .....	107
<b>El Geogebra como constituyente de objetivación del concepto de parábola.</b> .....	113
<b>Instrumentos psicológicos como artefactos.</b> .....	122
<b>Consideraciones generales</b> .....	127
(RE)CONSTITUCIÓN DE SUBJETIVIDADES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS.....	130
<b>A modo de presentación</b> .....	130
<b>(Re)constitución de subjetividades</b> .....	132
CONCLUSIONES.....	147
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	151
ANEXO.....	154

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Ideograma: fundamentos del proyecto de investigación.....	21
<b>Figura 2:</b> foto Parque de los Deseos de la ciudad de Medellín, abril 26 de 2010.....	35
<b>Figura 3:</b> fotos del experimento de la reflexión de los rayos de luz, Carolina, mayo 25 de 2010.....	41
<b>Figura 4:</b> producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, julio 8 de 2010.....	45
<b>Figura 5:</b> actividad video parábola-1, secuencia de algunos movimientos realizados por Carolina al applet, agosto 30 de 2010.....	49
<b>Figura 6:</b> actividad video parábola, secuencia de algunos de los movimientos realizadas por Carolina al applet, agosto 30 de 2010. ....	50
<b>Figura 7:</b> actividad video parábola 3, secuencia de algunos de los movimientos realizadas por Carolina al applet, agosto 30 de 2010. ....	50
<b>Figura 8:</b> estructura psicológica de la actividad de Leontiev. ....	59
<b>Figura 9:</b> representaciones conchas acústicas. Izquierda: Estefanía y su equipo. Derecha: Víctor y su equipo. ....	67
<b>Figura 10:</b> producción de la estudiante, relaciones entre los elementos de la parábola, Estefanía, julio 12 de 2010.....	80
<b>Figura 11:</b> producción del estudiante, Víctor. Construcción de la izquierda actividad de julio 8 de 2010 y construcción de la derecha actividad de julio 12 de 2010. ....	93
<b>Figura 12:</b> producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, Mayo 10 de 2010.....	108
<b>Figura 13:</b> proceso de objetivación y subjetivación.....	110
<b>Figura 14:</b> proceso de modelación de la propiedad de reflexión.....	114
<b>Figura 15:</b> (re)construcción del proceso de objetivación y subjetivación. ....	132
<b>Figura 16:</b> producción escrita, Estefanía, abril 6 de 2010.....	144

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 1:</b> secuencia de actividades .....	32
<b>Tabla 2:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Mi relación con los medios tecnológicos” .....	32
<b>Tabla 3:</b> ideograma, Carolina, abril 6 de 2010.....	33
<b>Tabla 4:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Conozcamos sobre las antenas parabólicas” .....	34
<b>Tabla 5:</b> preguntas de investigación de los equipos de investigación de Estefanía, Víctor y Carolina, Parque de los Deseos, abril 26 de 2010.....	36
<b>Tabla 6:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Video para motivar hacia la investigación” .....	37
<b>Tabla 7:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Hacia la conformación de equipos y preguntas” .....	37
<b>Tabla 8:</b> preguntas de investigación de los equipos de investigación de Estefanía, Víctor y Carolina, conformación de equipos y preguntas, mayo 10 de 2010. ....	39
<b>Tabla 9:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Experimento: reflexión de los rayos de luz” .....	40
<b>Tabla 10:</b> plantilla para el experimento de los rayos de luz .....	43
<b>Tabla 11:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Modelando rayos de luz en Geogebra” .....	44
<b>Tabla 12:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Identificando relaciones” .....	48
<b>Tabla 13:</b> intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Utilizando applets” .....	48
<b>Tabla 14:</b> preguntas realizadas en torno a las conchas acústicas del Parque de los Deseos de Medellín. ....	67
<b>Tabla 15:</b> preguntas de investigación de los grupos de Carolina, Estefanía y Víctor, mayo 10 de 2010 .....	92

## LISTA DE EPISODIOS

<i>Episodio 1: videograbación, julio 8 de 2010.....</i>	<i>87</i>
<i>Episodio 2: videograbación, Mayo 25 de 2010.....</i>	<i>95</i>
<i>Episodio 3: videograbación, Julio 8 de 2010.....</i>	<i>95</i>
<i>Episodio 4: videograbación, septiembre 14 de 2010.....</i>	<i>107</i>
<i>Episodio 5: entrevista, octubre 15 de 2010.....</i>	<i>111</i>
<i>Episodio 6: entrevista, octubre 15 de 2010.....</i>	<i>112</i>
<i>Episodio 7: videograbación, julio 8 de 2010.....</i>	<i>118</i>
<i>Episodio 8: entrevista, septiembre 14 de 2010.....</i>	<i>119</i>
<i>Episodio 9: videograbación, mayo 10 de 2010.....</i>	<i>123</i>
<i>Episodio 10: videograbación, julio 8 de 2010.....</i>	<i>124</i>
<i>Episodio 11: entrevista, Estefanía, octubre 15 de 2010.....</i>	<i>134</i>
<i>Episodio 12: entrevista, Carolina, octubre 15 de 2010.....</i>	<i>135</i>
<i>Episodio 13: videograbación, julio 8 de 2010.....</i>	<i>139</i>

## PRESENTACIÓN

El abordaje histórico-cultural de Vygotski (1995) se torna clave en la investigación que estamos presentando, toda vez que en él se incorpora un componente social, en donde el medio y la cultura juegan un papel importante en la objetivación del conocimiento. Según este autor, la actividad humana es producto de las interrelaciones con el otro, donde ese otro puede ser un artefacto (simbólico o material) o un sujeto. Para Vigotsky, el aprendizaje es una experiencia del sujeto ligada a la mediación de instrumentos culturales y, a su vez, los instrumentos culturales median las acciones humanas.

Concordando con esta perspectiva, y desde los planteamientos de Bajtín (2009), en esta investigación asumimos al sujeto como un ser que se constituye en la dialéctica con el otro, que no vive en una conciencia aislada, que vive en un juego de múltiples conciencias; esto implica que el sujeto continuamente se está reconstituyendo en la intersubjetividad, en una dialéctica con el otro. Así, el sujeto es movimiento, se mueve entre lo individual y lo social, entre lo singular y lo plural; dicho movimiento hace que el sujeto sea ser histórico, producto de lo histórico y social.

De esta manera, en las interrelaciones del sujeto con el otro, donde ese otro puede ser un sujeto, pero también puede ser un artefacto, podemos ver la naturaleza mediada del pensamiento. Bajo estas acepciones, las cuales serán ampliadas en el capítulo III, el aprendizaje es considerado como una experiencia mediada. Así, según Radford

(2008), “los artefactos no son simplemente ayudas para pensar, ni simples amplificadores, sino más bien partes constitutivas y consustanciales del pensamiento. Pensamos con y a través de artefactos culturales”. (p. 218)<sup>1</sup>

Los artefactos se tornan en (re)constituyentes del pensamiento en la dialéctica sujeto-objeto, ya que en esas interacciones el sujeto transforma al objeto y el sujeto se transforma a su vez, en un movimiento continuo. En cada acercamiento entre el sujeto y el objeto se produce una reconstitución de ambos. Así, en el curso del aprendizaje, el sujeto objetiva conocimientos culturales y, al hacerlo, se torna objetivado, en un movimiento reflexivo que se puede llamar subjetivación.

En este sentido, para Radford (2006) el aprendizaje “no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido los objetos conceptuales que encuentre el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados” (p. 113). Es esa idea de aprendizaje la que asumimos en esta investigación.

Asumiendo las perspectivas antes expuestas, en este estudio pretendimos dar respuesta a la pregunta ¿Cómo es el proceso de objetivación de la parábola desde el uso de artefactos en estudiantes de grado once? Consecuentemente, el objetivo de nuestra investigación fue: analizar el proceso de objetivación de la parábola desde el uso de artefactos en estudiantes de grado once.

Los fundamentos teóricos para analizar este proceso de objetivación del concepto de parábola fueron abordados desde la perspectiva sociocultural de la educación y de la

---

<sup>1</sup> Esta traducción es nuestra. De igual manera, todas las traducciones son de nuestra autoría.



Educación Matemática, para lo cual nos apoyamos, entre otros, en autores como Leontiev (1981), Vygotski (1978; 1981; 1995), Wertsch (1993), Caraça (1984), Moura (2010) y Radford (2004; 2006; 2008).

Esta investigación se llevó a cabo con los alumnos de grado once de la Institución Educativa Antonio Roldán Betancur del municipio de Bello (Antioquia), la cual es de carácter público. Para efectos del análisis, analizamos las producciones hechas por Víctor, Estefanía y Carolina.<sup>2</sup>

Nuestro estudio estuvo basado en un abordaje cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Según Sánchez (1998), dicho enfoque concibe al sujeto como “el resultado de los procesos sociales, transformador de su medio y constructor de la historia” (p. 96). Esta posición es acorde con nuestra concepción epistemológica acerca del conocimiento, en el sentido de Vigotsky, por cuanto en su abordaje histórico-cultural nos propone concebir al sujeto no como ser aislado, en una separación dual mente-cuerpo, sino como un ser histórico que se constituye en la relación con el otro. Paraphraseando a Bajtín (2009), concebimos al sujeto como un ser que se constituye en las interrelaciones con los otros, como producto de otros “yoes”. Estos y otros aspectos referidos a la metodología están en el capítulo I.

En aras de posibilitar un ambiente de aprendizaje y de investigación participativo, nos apoyamos metodológicamente en la “investigación participante”, la cual, en el marco de nuestra investigación, posibilitó, como veremos en los capítulos II, III y

---

<sup>2</sup> Los nombres de los estudiantes investigados, los cuales aparecen a lo largo del trabajo, son reales. Para ello recibimos las autorizaciones escritas de los respectivos padres de familia, así como el consentimiento de los estudiantes.

IV, el diálogo en la sala de clase, además de la reflexión y la investigación que les permitió a los estudiantes la apropiación de significados compartidos.

Es importante destacar que esta investigación hace parte de otra, desarrollada bajo la perspectiva de la investigación colaborativa, intitulada "El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase". Dicha investigación contó con el apoyo financiero de COLCIENCIAS y de la Universidad de Antioquia.

La producción de los registros y los datos de esta investigación se realizó por medio de autobiografías, entrevistas, fotografías, videgrabaciones, recursos tecnológicos como el *software Geogebra* y *CamStudio*, además de otros registros producidos a partir de las actividades realizadas en clase. Estas actividades fueron abordadas para atender a una metodología de clase conocida como *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, propuesta por Ponte, Brocardo y Oliveira (2003). Bajo esta metodología de clase, diseñamos las actividades basadas en el enfoque de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, propuestas por Moura (2010), las cuales, a su vez, están basadas en la *Teoría de la Actividad*.

Así, a la luz de las *investigaciones matemáticas en aula* fue importante para nosotras la creación de un ambiente que posibilitara el aprendizaje. Las ideas de los alumnos fueron valoradas y discutidas con sus compañeros, no siendo necesaria la validación constante de la maestra e investigadora Sandra, y de la otra investigadora, Cruz.

Desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, pudimos diseñar actividades que procuraron interacciones entre las investigadoras, los estudiantes y el conocimiento matemático. Un conocimiento socialmente construido desde una necesidad, unos motivos, unas acciones y una finalidad; de tal manera que dicho conocimiento

tuviera sentido para el estudiante y le posibilitara su propia (re)constitución como sujeto.

Durante el desarrollo de la investigación realizamos un total de nueve (9) actividades —las cuales serán descritas en capítulo I— en cada una de ellas realizamos videograbaciones (13.5 horas), observaciones y producciones de los estudiantes. Un primer análisis de las producciones de los estudiantes, lo realizamos durante el mes de julio y agosto de 2010<sup>3</sup>. A partir de los registros de cada clase, seleccionábamos información que considerábamos pertinente para responder a nuestra pregunta de investigación, estos extractos son llamados episodios.

Con base en los episodios obtenidos, realizamos un análisis a través de categorías emergentes, desde una triangulación entre la teoría, nuestra mirada como investigadoras y las voces de los estudiantes. De allí surgieron las siguientes categorías de análisis: a) *La parábola, su proceso de objetivación. La ascensión de lo abstracto a lo concreto*; b) *Los artefactos como constituyentes en el proceso de*

---

<sup>3</sup> En el mes de julio, nos fue aprobada una presentación de un Poster en **The 34 of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME34)**, la cual se llevó a cabo en la ciudad de Belo Horizonte, Brasil, entre el 18 y 23 de julio. Es importante mencionar que este evento es el segundo en importancia a nivel mundial en el área de Educación Matemática. Durante la presentación del Poster, mostramos los avances del trabajo investigativo, recibiendo por parte de los asistentes al congreso, observaciones que (re)significaron nuestro trabajo investigativo.

Posterior al congreso realizamos también una pasantía académica en Brasil en la **Universidad de São Paulo (USP)** del 26 de Julio al 6 de agosto de 2010. En dicha pasantía trabajamos junto con nuestra asesora, dos compañeras de maestría y dos profesoras participantes del grupo colaborativo, con el grupo de Estudio sobre Investigación y Actividades Educativas —GEPAPe— liderado por el profesor Manoel Oriosvaldo de Moura, el cual era un asesor internacional del proyecto de investigación antes mencionado. Los participantes y colegas de GEPAPe, escucharon nuestra presentación sobre los avances de la maestría y, nos surgieron algunos caminos para realizar el análisis de las producciones de los estudiantes.

*objetivación del concepto de parábola y c) (Re)constitución de subjetividades en la clase de matemáticas.* Estas categorías serán analizadas en los capítulos II, III y IV, respectivamente.

En la categoría “*la parábola, su proceso de objetivación. La ascensión de lo abstracto a lo concreto*”, analizamos cómo fue el proceso de objetivación del concepto de parábola en Víctor, Estefanía y Carolina, desde los planteamientos de Davidov (1988) en cuanto al pensamiento empírico y el pensamiento teórico; este último asumido desde la ascensión de lo abstracto a lo concreto. Así mismo, analizamos dicha ascensión en relación a la dotación de sentidos y significados por parte de los estudiantes, propuesta por Radford (2008).

En la categoría de “*los artefactos como constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola*”, explicitamos, en una primera parte, la importancia que desde la *Teoría de la Actividad* se le ha dado al carácter mediatizado del pensamiento; seguidamente mostramos, a partir de los diferentes episodios, cómo los artefactos culturales, en el sentido de Radford (2008) se convierten en constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola.

Finalmente, en el capítulo IV: “*(re)constitución de subjetividades en la clase de matemáticas*”, analizamos cómo el uso de los artefactos, a partir de las actividades propuestas, permitió, en los estudiantes, la subjetivación propuesta por Radford (2010) dentro de la *teoría de la objetivación*. Tratamos también en este capítulo de explicitar cómo, desde los planteamientos de Bajtín (2009) —excedente de visión, dialogía, ética y estética—, pudo evidenciarse el proceso de subjetivación.

# CAPÍTULO I

## CAMINO METODOLÓGICO

### Planteamiento del problema

El problema de investigación surgió, en primer lugar, a partir de algunas reflexiones devenidas desde nuestra práctica docente; en segundo lugar, de nuestras posiciones teóricas con respecto a la educación matemática; y, en tercer lugar, desde un replanteamiento que venimos haciendo de las directrices curriculares para el área de matemáticas

Desde nuestra experiencia como docentes, considerábamos que en el aula de clase de matemáticas, en el proceso de acercarse a un concepto matemático no se hacía uso de diferentes artefactos que posibilitaran la construcción de sentidos y significados por parte de los estudiantes. En particular, en el caso de los artefactos tecnológicos, veíamos como el uso de estos artefactos no había logrado el impacto esperado en cuanto a convertir dichos medios en artefactos que posibilitaran generar nuevos tipos de relaciones como acercamientos a la objetivación del concepto de parábola. En algunas investigaciones realizadas, relativas a la enseñanza de las cónicas y el uso de tecnologías, como las de Reyes (2001), Bagazgoitia (2003) y Osi (2004), notábamos como el énfasis en el uso de las tecnologías en la Educación Matemática era dado al

manejo operativo de la máquina o a la realización de construcciones geométricas a partir de una serie de pasos.

Respecto al concepto de parábola, veíamos cómo éste era abordado desde su definición algebraica, tanto en las aulas de clase “regulares” como en las salas de informática. Así mismo, percibíamos que en ninguno de los dos ambientes de aprendizaje mencionados se había abordado el tema de la parábola a partir de situaciones reales, como las antenas parabólicas para nuestro caso; tampoco se le había dado énfasis a la definición de parábola desde el establecimiento de relaciones entre los elementos constituyentes de ésta a partir del uso de diferentes artefactos y, poco o nada, se había reflexionado acerca del proceso de objetivación del concepto de parábola. Además, veíamos cómo el uso del *software Geogebra* se había enfocado desde una manera instrumental, basado, en muchos casos, en la elaboración de secuencias didácticas que conllevaban a construcciones mediante pasos algorítmicos, que igual podrían realizarse con lápiz y papel, o en un tablero.

Desde nuestra posición teórica respecto a la educación matemática, consideramos importante la *Teoría de Objetivación de Radford* (2010), en el sentido de que para él, el aprendizaje es una experiencia mediada por artefactos culturales, se trata de dotar de sentido y significado los objetos que el estudiante encuentra en su cultura. Así, en el proceso de objetivación se produce una dialéctica entre el sujeto y el objeto, donde a cada acercamiento del sujeto al objeto, el sujeto transforma al objeto y a su vez es transformado por él.

Respecto a los instrumentos computacionales, estamos de acuerdo con Moreno (2002) cuando afirma que éstos generan nuevas formas de conocimiento. En los

entornos computacionales, los objetos matemáticos pueden ser sometidos a manipulaciones, lo que posibilita generar un nuevo realismo matemático. Lo anterior nos significó que los instrumentos computacionales posibilitaban al estudiante crear nuevas estrategias de acción al momento de enfrentarse a una construcción geométrica, en un ambiente virtual como es *Geogebra*, ya que le posibilitaría hacer y analizar construcciones por medio del establecimiento de relaciones entre los elementos constituyentes de un concepto. De este modo, empezamos a pensar que los recursos tecnológicos podrían ofrecer otras alternativas de aprendizaje desde las cuales se pudiera abordar un conocimiento, para nuestro caso el de parábola.

Por otro lado, el sistema educativo colombiano, regido por la Ley General de la Educación (ley 115 de 1994), en los artículos 23 y 31, incorpora la tecnología y la informática como área fundamental y obligatoria en la educación básica y media. En esa dirección, el documento de Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas, propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en 1999, como apoyo a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, presenta algunas orientaciones, tales como:

Asumir la educación como un proceso permanente y continuo de adquisición y transformación de los conocimientos, valores y destrezas inherentes al diseño y producción de artefactos, procedimientos y sistemas tecnológicos y [...] Apuntar a la preparación de personas en la comprensión, uso y aplicación racional de la tecnología para la satisfacción de las necesidades individuales y sociales. (MEN, 1999, p.16).

Así mismo, los Lineamientos Curriculares propuestos por el MEN (1998), al referirse a la geometría en la escuela, expresan que ésta debe favorecer las interacciones, partiendo de la actividad del alumno, dando prioridad a las

operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas, y a la importancia de las transformaciones en la comprensión de los conceptos que a primera vista parecen estáticos. Igualmente, los Lineamientos afirman que “se trata de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna” (MEN, 1998, p.57) hasta que los mismos estudiantes puedan proponer y evaluar posibles definiciones.

Estas reflexiones en torno a las directrices curriculares para el área de matemáticas, a nuestra posición teórica respecto al conocimiento, a la forma como se ha venido abordando el concepto de parábola en las aulas de matemáticas y, con miras a propender un mejor aprovechamiento del uso de los artefactos, en especial de los computacionales, en donde el estudiante juegue un papel importante en relación con el conocimiento, y en donde se genere conocimiento geométrico, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo es el proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos?

A continuación presentamos un ideograma (Figura 1) donde plasmamos los fundamentos del proyecto de investigación, incluyendo algunos elementos constituyentes del mismo y las relaciones que subyacen entre ellos. En el mapa, la idea central —el proceso de objetivación del concepto de parábola— se encuentra ilustrado por medio del puente, el cual representa ese camino o devenir que recorre el sujeto para objetivar dicho concepto ayudado por actividades, diseñadas desde la teoría de la actividad de Leontiev (1981), particularmente desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* de Moura (2010), la teoría de la objetivación de Radford



(2010) y la teoría sociocultural de la educación, y en particular de la Educación Matemática.



*Figura 1: Ideograma: fundamentos del proyecto de investigación.*

### Hacia la pregunta de investigación

Esta investigación la abordamos bajo el paradigma de investigación cualitativa, ya que se trata de analizar el proceso de objetivación del concepto de parábola por parte de los estudiantes, desde el uso de diferentes artefactos, en donde nuestra preocupación estuvo focalizada en la descripción detallada de situaciones que surgieron en el aula de clase de matemáticas, en aquellas interacciones entre los

estudiantes y el conocimiento matemático referido a la parábola, y en el análisis de las experiencias de los participantes en cada una de las actividades propuestas.

Según Denzin y Lincon (1994), citados por Vasilachis (1996), "la investigación cualitativa es multimetódica, naturalista e interpretativa. Es decir que las investigadoras e investigadores indagan en situaciones naturales, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos de los significados que las personas le otorgan"(p.25).

De esta manera, en esta investigación pretendimos entender e interpretar los fenómenos desde su contexto y dinámica propia. Esta mirada, propia del enfoque sociocultural de la educación<sup>4</sup> —se asumió en esta investigación— nos permitió poner de manifiesto las cuestiones no sólo cognitivas sino también afectivas, las cuales juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Situarnos desde el paradigma cualitativo nos facilitó, como investigadoras, proponer actividades que conllevaron a la objetivación del concepto de parábola, a través de la reflexión permanente entre los estudiantes, la profesora y las investigadoras, creando así un espacio dialógico; es decir, convirtiendo el aula de clase, a través de las actividades matemáticas, en un espacio para el debate, la actitud crítica e investigativa por parte de los estudiantes.

---

<sup>4</sup> En este trabajo elegimos hablar del término sociocultural y no sociohistórico, por algunas razones que compartimos con Wertsch (1993). Con este término es posible reconocer las importantes contribuciones de algunos teóricos en lo que se refiere a la acción mediada, pasando desde los aportes de Vygotski hasta los aportes de teóricos más modernos. Con la elección de sociocultural no debe pensarse que estamos descartando la parte histórica, ya que según Werstch (1993), "una omisión de lo cultural en el título, expondría un riesgo más grande: reducir diferencias culturales a diferencias históricas, que es precisamente lo que Vygotski tendía hacer"(p.33)

Nuestro estudio fue realizado bajo un enfoque crítico-dialéctico ya que, según Sánchez (1998), dicho enfoque concibe al sujeto como “el resultado de los procesos sociales, transformador de su medio y constructor de la historia” (p. 96). Esta posición es acorde con nuestra concepción epistemológica acerca del conocimiento en el sentido de Vygotski (1995), por cuanto en su abordaje histórico-cultural la actividad humana es el proceso que media la relación entre el sujeto y aquella parte de la realidad que será transformada por él (objeto de transformación). Dicha relación es dialéctica, el sujeto resulta también transformado, ya que se originan cambios en su cognición por medio de signos que, como el lenguaje sirven de instrumentos.

Bajo esta perspectiva, el sujeto no tiene un papel pasivo en su contexto como tampoco frente a la objetivación del conocimiento, sino que, transforma la realidad y, a la vez, es transformado por ella. Consecuentemente asumimos también una concepción de ciencia que fuese concordante con esta posición epistemológica así:

La propia ciencia es una construcción histórica y la investigación científica un proceso continuo insertado en el movimiento de las formaciones sociales, una forma desarrollada de la formación activa entre el hombre y la naturaleza, en la cual el hombre como sujeto construye la teoría y la práctica, el pensar y el actuar en un proceso cognitivo-transformador de la naturaleza. (Sánchez, 1998 p. 65)

En esta perspectiva, para analizar la parábola a partir de su proceso de ascensión de lo abstracto a lo concreto —como se mostrará en el capítulo II de este texto—, nos basamos en los planteamientos de Sánchez (1998) cuando dice que “el proceso del conocimiento parte de lo real objetivo percibido a través de categorías abstractas para llegar a la construcción de lo concreto” (p. 96), posición que también comparte Davidov (1998). Esta concepción del conocimiento, es acorde con el enfoque crítico-dialéctico propuesto en esta investigación.

Igualmente, para el caso de nuestra investigación, los supuestos gnoseológicos, desde el enfoque crítico-dialéctico, son acordes con nuestros supuestos epistemológicos antes expuestos, ya que el estudiante al acercarse al objeto de conocimiento, al tiempo que lo objetiva es también subjetivado. En otras palabras: el estudiante transforma y es transformado. Esta dialéctica entre el sujeto-realidad se originó, para nuestros estudiantes desde la percepción empírico-objetiva, pasando por lo abstracto hasta lo concreto.

De este modo, el proceso de objetivación propuesto por Radford (2008) y asumido por nosotras en esta investigación, es acorde a nuestra mirada ontológica, ya que desde la *Teoría de la Objetivación*, el conocimiento no es entendido como algo exterior al sujeto, sino como parte de él, como algo que se va (re)constituyendo en las múltiples interacciones sujeto-objeto. En palabras de Sánchez (1998), ver desde una noción ontológica un mundo inacabado y un universo en construcción nos posibilita “percibir los fenómenos educativos en su devenir y en su proceso histórico, utilizando categorías fundadas en la lógica dialéctica y el movimiento y la lucha de contrarios”. (p.68)

Desde los supuestos epistemológicos, ontológicos y gnoseológicos, explicitados hasta el momento, consideramos que los supuestos o principios de orden técnico son acordes con el enfoque crítico-dialéctico asumido en esta investigación. La utilización de técnicas no cuantitativas como las entrevistas no estructuradas, el diseño de las actividades bajo el enfoque de las *Actividades Orientadas de Enseñanza* y las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase* —ambas serán profundizadas más adelante en este mismo capítulo— así como el análisis de las

producciones de los estudiantes Víctor, Carolina y Estefanía, nos posibilitaron dar importancia al sujeto como ser social y como producto de las interrelaciones en aula de clase.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes utilizamos el estudio de casos. Los tres estudiantes: Víctor, Carolina y Estefanía, fueron elegidos de un grupo de treinta y siete (37) estudiantes de grado once. Estos estudiantes fueron escogidos con base en la disponibilidad de ellos para participar en la investigación y en características particulares de cada uno de ellos, al momento de interactuar con cada uno de los compañeros de clase.

Víctor, por ejemplo, era un estudiante que sobresalía por su liderazgo, por sus aportes precisos frente a diferentes temas, por su interés por descubrir nuevas cosas y encontrar su génesis. Estefanía se mostraba como una estudiante tímida, receptiva y dedicada a sus tareas académicas. Carolina, por su parte, era una de las estudiantes más expresivas del grupo al momento de compartir y defender sus ideas. Víctor, Carolina y Estefanía, tenían en común una actitud reflexiva, de debate, de respeto por la palabra del otro y mucho compromiso en las actividades de clase. Al describir algunas características de los estudiantes investigados, no pretendemos tomar una muestra representativa del grupo, ni mucho menos generalizar el proceso de objetivación de todo el grupo. Nuestro interés es analizar el proceso de cada uno de ellos a luz de nuestras posiciones teóricas y, desde nuestras miradas como maestras e investigadoras.

Ahora, desde la misma relación que guarda en la educación la relación teoría-práctica y nuestra concepción de carácter contextualizado del conocimiento, para el

análisis de los datos hicimos referencia a teóricos basados en el materialismo dialéctico, siendo esta acorde con el enfoque crítico-dialéctico. Al respecto Sánchez (1998) expresa “las investigaciones crítico-dialécticas presentan mayor énfasis en las referencias teóricas por la necesidad de asegurar mayores informaciones para los análisis contextualizados a partir de una referencia teórica previa, fundada en el materialismo histórico”. (p. 62)

Según Sánchez (1998), “toda investigación debe utilizar instrumentos y técnicas para la recolección, el registro, la organización, la sistematización y el tratamiento de los datos sobre el fenómeno investigado” (p. 49). Así, para efectos de la producción de los datos de nuestra investigación tuvimos en cuenta instrumentos de orden cualitativo acordes con el enfoque crítico-dialéctico adoptado por nosotras.

De este modo, utilizamos como instrumentos las producciones de los estudiantes, en el marco de las actividades diseñadas por nosotras, desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, entrevistas semiestructuradas, videograbaciones, registros fotográficos, grabaciones y el *software Geogebra*. La producción de datos la realizamos en el ambiente natural del estudiante, en este caso, en el aula de clase, excepto los datos obtenidos durante la visita a las conchas acústicas del Parque de los Deseos y a la Universidad de Antioquia.

Para la realización de las entrevistas nos basamos en Hernández, Fernández y Batista (2008), quienes expresan que “las entrevistas, como herramientas para recolectar datos cualitativos, se emplean cuando el problema de estudio no se puede observar o es muy difícil de hacerlo por ética o complejidad” (p. 598). Las entrevistas nos permitieron dar cuenta de las abstracciones, (re)significaciones y subjetividades de

los estudiantes frente a su proceso investigativo, además de posibilitarnos indagar acerca de fenómenos observados en los estudiantes que no habían sido claramente comprendidos por nosotras, como investigadoras, con anterioridad.

Para el análisis de los datos, utilizamos “episodios” en el sentido de Moura (2010), los cuales son abstracciones de información de los registros obtenidos durante el desarrollo de las actividades. Para la selección de dichos registros tuvimos como criterio el llevarnos a responder la pregunta de investigación.

Así, los episodios fueron discutidos por nosotras y posteriormente agrupados por temáticas, tales como: artefactos, objetivación, subjetividades, tecnologías y concepto de parábola. A partir de esas temáticas emergentes, analizamos elementos que se hacían visibles recurrentemente, y que a nuestra forma de ver nos podrían llevar a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación. Fue así como las temáticas mencionadas anteriormente fueron agrupadas en categorías, las cuales a su vez, nos posibilitarían dar respuesta a la pregunta de investigación. De esta forma, las categorías fueron

- La parábola: su proceso de objetivación. La ascensión de lo abstracto a lo concreto.
- Los artefactos como constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola.
- (Re)constitución de subjetividades en la clase de matemáticas.

Para el análisis de cada una de estas categorías analizamos los episodios en una triangulación entre la teoría, nuestra mirada como investigadoras y las voces de los estudiantes protagonistas de esta investigación.

Acorde con el enfoque crítico-dialéctico, este estudio se enmarcó dentro de la “Investigación participante”, puesto que nuestro interés fue crear un ambiente de aprendizaje participativo, en donde se propició en los estudiantes el diálogo, la reflexión y la investigación que les permitió la apropiación de significados compartidos. Desde aquí, la investigación no se realizó tan sólo para generar hechos, sino para posibilitar la objetivación del concepto de parábola en los estudiantes al interior del contexto en el cual estaban inmersos. Según Sánchez (1998), la investigación participante

...presupone que el conocimiento es esencialmente un producto social que se extiende o cambia continuamente, de la misma manera que cambia la realidad concreta y no está separada de la práctica; el objetivo último de la investigación es la transformación de la realidad social y el mejoramiento de la vida inmersa en dicha realidad. (p.26)

Esta investigación, a su vez, está inmersa en una más grande, la cual es de tipo colaborativo, intitulada “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”. De este grupo colaborativo, hacíamos parte profesores de instituciones escolares de contextos urbanos, rurales e indígenas, estudiantes de pregrado, estudiantes de maestría, profesores universitarios e investigadores. El grupo programaba encuentros mensuales, con el fin de reflexionar en torno a la clase de matemática; en dichas reuniones compartíamos nuestras experiencias de aula, nos confrontábamos y nos interrogamos sobre nuestro quehacer como maestras e investigadoras.

Como metodología de clase, propusimos a los estudiantes “*Las Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase*”. Esta metodología nos ayudó a crear en el aula un espíritu investigativo dentro de la clase de matemáticas. Según Ponte, Brocardo, y



Oliveira (2003), “el alumno es llamado a actuar como un matemático, no solo en la formulación de preguntas y conjeturas sino en la argumentación de sus resultados ante sus compañeros de clase y el profesor”. (p.23)

Así, las *Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase* están basadas en la formulación de una pregunta o conjetura alrededor de un suceso o evento del contexto del estudiante, y a partir de allí se busca la respuesta a dicha pregunta, haciendo uso de las experiencias del estudiante en contexto y desde las matemáticas mismas.

De este modo, dentro de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, el estudiante asume un papel más activo en el aula, es crítico, debate, explora, formula preguntas y justifica conjeturas. Del mismo modo el maestro se convierte en un orientador del trabajo en el aula, posibilitando el debate en cada una de las actividades que propone.

De esta forma, en el marco de las *Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase*, era importante para nosotras la creación de un ambiente que posibilitara el aprendizaje, en el cual las ideas de los estudiantes fueran valorizadas y discutidas con sus compañeros, donde se generaran en el aula discusiones interesantes entre los estudiantes y las investigadoras. Así, en el diseño de las actividades posibilitamos a los estudiantes responderse paulatinamente la pregunta de investigación planteada por ellos, donde las inquietudes y conjeturas surgidas en aula de clase se convertían en insumos para posteriores actividades.

Así, con las *Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase*, diseñamos las actividades bajo el enfoque de *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, propuestas

por Moura (2010), las cuales a su vez están basadas en la *Teoría de la Actividad*. Estas actividades nos facilitaron realizar la producción de registros y datos de los estudiantes, utilizando técnicas cualitativas que posibilitaron la intersubjetividad y un conocimiento profundo, por parte de las investigadoras, de los fenómenos que ocurrían en el aula de clase.

Las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, propuestas por Moura (2010), son las mediadoras entre la actividad de aprendizaje y la actividad de enseñanza, donde el motivo de ambas debe coincidir en una sola actividad, no hay actividad de enseñanza si no hay actividad de aprendizaje, la actividad de aprendizaje debe ser intencional, y organizada desde la actividad de enseñanza. Así, las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, posibilitan a los estudiantes la apropiación de los conceptos matemáticos, constituidos históricamente, a partir del pensamiento teórico (esta idea será profundizada en el capítulo III). Desde allí, diseñamos actividades que procuraron interacciones entre el profesor, los estudiantes y el conocimiento matemático socialmente construido a partir de una necesidad, unos motivos, unas acciones y una finalidad, de tal manera que dicho conocimiento tuviera sentido para el estudiante y le posibilitara su propia (re)constitución como sujeto. Según Moura (2002), citado por Moura (2010) —este libro es una producción del Grupo de Estudios e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica GEPAPe<sup>5</sup>—, la *Actividad Orientadora de Enseñanza* se constituye en

---

<sup>5</sup> GEPAPe, es un grupo de investigación la universidad de Sao Pablo, Brasil, coordinado por Manoel Oriosvaldo de Moura y Elaine Sampaio Araújo. El grupo tiene por objeto:

a. Realizar estudios e investigaciones sobre la actividad pedagógica, de acuerdo con los principios teóricos y metodológicos del enfoque histórico-cultural, centrándose en los elementos de la enseñanza

...un modo general de organización de la enseñanza, en el que su contenido principal es el conocimiento teórico y su objeto es la constitución del pensamiento teórico del individuo en el movimiento de la apropiación del conocimiento. Así, el profesor, al organizar las acciones que objetivan el enseñar, también recualifica sus conocimientos, y es ese proceso que caracteriza la Actividad Orientadora de Enseñanza como unidad de formación del profesor y del estudiante. (p.100)

Las actividades diseñadas fueron colectivas, buscando con ello posibilitar las diferentes posturas individuales que emergían de los diferentes grupos en cuales estaban inmersos los estudiantes. De esta forma, la actividad en el sentido de Leontiev, citado por Radford (2004), fue considerada como “una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana”. (p.10)

Acorde a lo anterior y con miras a analizar el proceso de objetivación del concepto de parábola por parte de los estudiantes, diseñamos, como lo expresamos anteriormente, una serie de actividades encadenadas, tal como lo muestra la tabla 1.

<b>Fecha</b>	<b>Actividad</b>
1. Abril 6 de 2010 (Martes) Abril 12 de 2010 (Lunes)	Ideograma: “Mi relación con los medios tecnológicos”. Socialización de Ideogramas
2. Abril 26 de 2010 (Viernes)	Conozcamos sobre las antenas parabólicas. Visita conchas acústicas, Parque de los deseos.
3. Abril 26 de 2010 (Viernes)	Video para motivar hacia la investigación

y el aprendizaje en la formación inicial y continua de profesores e investigadores, la práctica de la conexión entre la enseñanza, la investigación y la extensión.

b. Desarrollar una producción de acción sobre la formación continua de profesores de los sistemas de escuelas públicas e instituciones educativas de educación básica y educación superior.

c. Asesorar a las instituciones de educación y formación.

Obtenido de <http://www2.fe.usp.br/~gepape/index.html> el 19 de febrero de 2011

4. Mayo 10 de 2010 (Martes)	Hacia la conformación de grupos y preguntas
5. Mayo 25 de 2010 (Lunes)	Experimento: “Reflexión de los rayos de luz”
6. Mayo 31 de 2010 (Lunes) Julio 12 de 2010 (Lunes)	Modelando en Geogebra
7. Agosto 30 de 2010 (Lunes)	Identificando relaciones. Utilización de <i>applets</i>

**Tabla 1:** *secuencia de actividades*

A continuación, mostraremos cómo fue el proceso investigativo en el aula de clase, cómo se presentaron cada una de las actividades a los estudiantes, y cuál fue la intencionalidad, la necesidad y las respectivas acciones de cada una de ellas. Esta información se información se organizará en las Tablas: 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13.

La primera actividad que propusimos tenía como nombre “Mi relación con los medios tecnológicos”. En ella proponíamos a los estudiantes realizar un ideograma, en el cual podían expresar cómo había sido su relación con los medios tecnológicos. Para ello se les explicó a los estudiantes que podían hacer uso de signos, imágenes y fotos, de tal modo que en el ideograma expresaran su relación con los medios tecnológicos. A continuación, presentamos la intencionalidad, las acciones y la necesidad de la actividad y, posteriormente, el ideograma diseñado por Carolina y los comentarios que compartió con la clase.

<b>Intencionalidad</b>	Identificar usos y significados que damos a la tecnología.
<b>Acciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaboración de un ideograma donde se presente la relación “yo” con los medios tecnológicos.</li> <li>• Socialización del ideograma.</li> </ul>
<b>Necesidad</b>	(Re)significar los usos que damos a la tecnología.

**Tabla 2:** *intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Mi relación con los medios tecnológicos”.*



nuestra investigación en un tipo de antena, la cual era muy utilizada y muy conocida por ellos en su cotidianidad, la antena parabólica. Fue así como propusimos a los estudiantes, las antenas parabólicas como motivo y detonante de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*.

El 26 de abril de 2010 visitamos el Parque de los Deseos de la ciudad de Medellín<sup>6</sup>, figura 1, con la intención de (re)conocer las antenas parabólicas que allí se encontraban. Mostramos a continuación se muestra la respectiva intencionalidad, acciones y necesidad de la actividad.

<b>Intencionalidad</b>	Identificar algunos de los elementos de una parabólica y su funcionamiento.
<b>Acciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realización de una visita guiada a las conchas parabólicas.</li> <li>• En grupos de tres personas, elaborar tres preguntas y una representación gráfica de las conchas.</li> </ul>
<b>Necesidad</b>	Explorar el funcionamiento de la parabólica.

**Tabla 4:** intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Conozcamos sobre las antenas parabólicas”.

<sup>6</sup> “Este parque se localiza al nororiente de Medellín; cuenta con 12.000 m<sup>2</sup>, y fue construido con el fin de relacionar el universo con la gente.

Ofrece 8 atracciones lúdicas diferentes, que dan testimonio de los sueños, los deseos y los logros de la humanidad en diferentes épocas: helióstato, réplica observatorio Muisca, mundo de los vientos, esfera celeste, voces a distancia, reloj solar, eclipse y asoleamiento en Medellín, permitiendo al visitante conocer o recordar estos primitivos sistemas.”

Obtenido el 1 de mayo de 2011 en

<http://www.conexionciudad.com/InformaciónMedell%C3%ADn/Parques/tabid/204/Default.aspx>



*Figura 2: foto Parque de los Deseos de la ciudad de Medellín, abril 26 de 2010*

Después de la exploración realizada por los estudiantes, éstos se hicieron preguntas y representaciones referidas a las conchas acústicas. A continuación presentamos las preguntas realizadas por los equipos de investigación de Estefanía, Carolina y Víctor, respectivamente.

<b>Equipo de investigación en compañía de...</b>	<b>Preguntas formuladas por los equipos</b>
Estefanía	¿Por qué entre más lejos se está del reflector parabólico se escucha más duro? ¿Por qué el reflector parabólico es de esa forma? ¿Si los dos reflectores parabólicos se encuentran a una distancia más larga se escuchará igual? ¿Por qué se encuentran esos cubos <sup>7</sup> al frente de los reflectores parabólicos?
Víctor	¿Por qué se expanden las ondas de sonido en seguir uniformemente? ¿Por qué las conchas tienen que ser curvas y no rectas? ¿Por qué se llaman conchas acústicas?
Carolina	¿Para qué los cuadros negros? ¿Por qué tiene la forma cónica?

<sup>7</sup> Los cubos y cuadros negros mencionados por los estudiantes pueden verse en la figura 1. Estos cubos contienen en su interior luces, además posibilitan a los niños o personas que se acerquen a las conchas acústicas pararse encima de ellos. Los estudiantes en esta primera experiencia, pensaban, que los cubos o cuadros negros, tenían algo que ver con la transmisión de las ondas, inclusive que al interior habían micrófonos

	¿Qué pasaría si tuviera otra forma? ¿Por qué tiene una distancia definida?
--	---

**Tabla 5:** preguntas de investigación de los equipos de investigación de Estefanía, Víctor y Carolina, Parque de los Deseos, abril 26 de 2010

Después de la visita al Parque de los Deseos, realizamos una visita al Museo de la Universidad de Antioquia, donde los estudiantes conocieron e interactuaron con otras antenas parabólicas que allí se encontraban. Ese mismo día, aprovechando que teníamos toda la mañana para compartir con los estudiantes, les presentamos un video que se titulaba “Érase una vez Los Inventores Cap02 Arquímedes y los Griegos AsturCampanilla 2/3”<sup>8</sup>. En este puede verse como Arquímedes soluciona el problema planteado por el rey, cuando éste le pide cómo saber si su corona es de oro puro o mezclado con otros metales.

<b>Intencionalidad</b>	Identificar algunos elementos necesarios para el abordaje de una investigación
<b>Acciones</b>	En pequeños grupos discutir e identificar, aspectos como: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ver video “Érase una vez Los Inventores Cap02 Arquímedes y los Griegos AsturCampanilla 2/3”, e identificar en él lo relativo a las estrategias para afrontar una investigación.</li> <li>2. Problema presentado por el rey</li> <li>3. Pregunta generada por el rey</li> <li>4. ¿Qué actitud tomó Arquímedes cuando le fue presentada la situación?</li> <li>5. ¿Qué estrategias llevó a cabo Arquímedes para dar respuesta a su pregunta?</li> <li>6. ¿Cómo presentó Arquímedes la respuesta al rey?</li> <li>7. Seguidamente los grupos de trabajo socializaron las preguntas anteriores, tratando de llegar a acuerdos</li> </ol>

<sup>8</sup> El video fue obtenido en <http://www.youtube.com/watch?v=wJOTbDEeg6E&feature=related> el 6 de abril de 2010



	comunes sobre los elementos básicos para llevar a cabo una investigación.
<b>Necesidad</b>	Comprender algunos elementos necesarios para el abordaje y desarrollo de una investigación.

*Tabla 6: intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Video para motivar hacia la investigación”.*

A partir del video, los estudiantes reflexionaron sobre la actitud que ellos debían tener hacia la investigación y sobre las preguntas que ellos habían realizado en el Parque de los Deseos.

Posteriormente, el 10 de mayo de 2010, propusimos a los estudiantes una actividad llamada “Hacia la conformación de grupos y preguntas”.

<b>Intencionalidad</b>	Plantear las preguntas de investigación en relación con las antenas parabólicas.
<b>Acciones</b>	En grupos de cuatro integrantes elaborar una pregunta de investigación teniendo en cuenta las ya elaboradas de las conchas acústicas. Socialización de las preguntas y discusión de las mismas.
<b>Necesidad</b>	Generación de las preguntas de investigación.

*Tabla 7: intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Hacia la conformación de equipos y preguntas”.*

Cuando los estudiantes se reunieron en sus grupos de investigación, les entregamos las preguntas que ellos habían elaborado en el Parque de los Deseos, con el fin de que las discutieran y generaran una sola pregunta de investigación que los guiaría en sus investigaciones. A continuación presentamos la guía en la que debieron registrar sus producciones.



Institución Educativa Comercial  
Antonio Roldán Betancur  
Universidad de Antioquia



Fecha: 10 Mayo de 2010

11°6

Proyectos de investigación

1. La mediación instrumental en el proceso de construcción del concepto de parábola: el caso del "geogebra"
2. El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase

Conformando mi grupo



Nombre de mi grupo

Nuestra pregunta de investigación

¿Recuerdas las preguntas que planteaste en la visita a las conchas acústicas? Revisalas antes de que formules la pregunta de investigación

Después del debate al interior de cada equipo de investigación, los estudiantes elaboraron su pregunta de investigación y le pusieron nombre a su grupo, dándole un significado, tal como se expresa en la tabla 8.

ESTUDIANTE	NOMBRE DEL EQUIPO Y SIGNIFICADO	PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN
Estefanía	Black Newton. “Nosotras nos llamamos Black Newton. Este nombre se lo dimos, primero Black porque estamos en la oscuridad de conocimiento, que tenemos los ojos cerrados y que vamos a buscar de dónde provienen las cosas. Newton es un científico que estudió mucho sobre las ondas, que eso es parte fundamental para nosotras. De esto sale Black Newton.”	¿La forma como viajan las ondas de una concha a otra es igual a la forma como se transmiten las ondas de una antena parabólica a otra?
Carolina	Nosotras y Javier. “El nombre fue debido a que en el grupo eran tres mujeres y un hombre: Javier.”	¿La posición material y forma de una parabólica acústica influye en las diversas características para la dispersión de las ondas?
Víctor	JPI. “Significa Jóvenes Pensantes e Investigadores, porque, lógicamente somos jóvenes, pero el motivo de este trabajo es descubrir nuevas cosas y ver que para encontrar esas cosas tenemos que pasar por muchos procesos, investigar, tenemos que leer de todo, tenemos que analizar información.”	¿Es necesario pensar en la forma ovalada de una antena parabólica o debe complementarse con algo más?

**Tabla 8:** preguntas de investigación de los equipos de investigación de Estefanía, Víctor y Carolina, conformación de equipos y preguntas, mayo 10 de 2010.

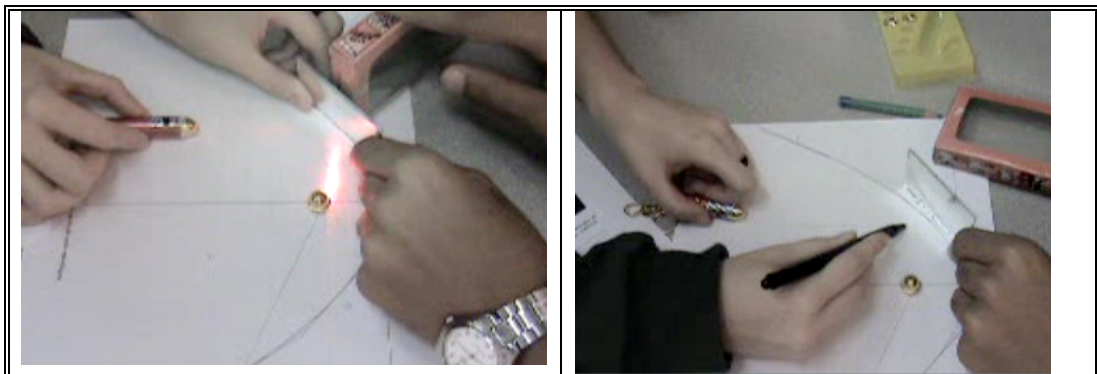
A partir de las preguntas que fueron surgiendo en las investigaciones de los estudiantes, con base en los debates y la reflexión en cada uno de los equipos de

investigación, realizamos con los estudiantes una actividad llamada “Experimento: reflexión de los rayos de luz”<sup>9</sup>.

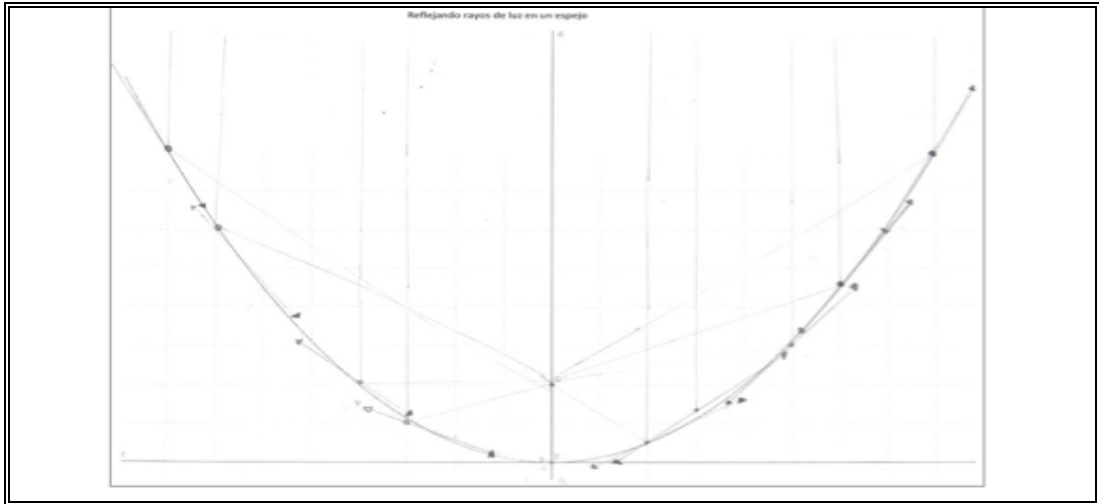
<b>Intencionalidad</b>	Identificar la propiedad de reflexión de la luz utilizando espejos planos.
<b>Acciones</b>	En grupos de cuatro integrantes, reflexionar acerca de la propiedad de la reflexión de la luz desde el experimento y unas preguntas guía.
<b>Necesidad</b>	Experimentar la propiedad de reflexión de la luz

*Tabla 9: intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Experimento: reflexión de los rayos de luz”.*

En la figura 2, mostramos algunas imágenes de esta actividad y luego presentamos la guía que les fue entregada a los estudiantes para realizar dicha actividad.



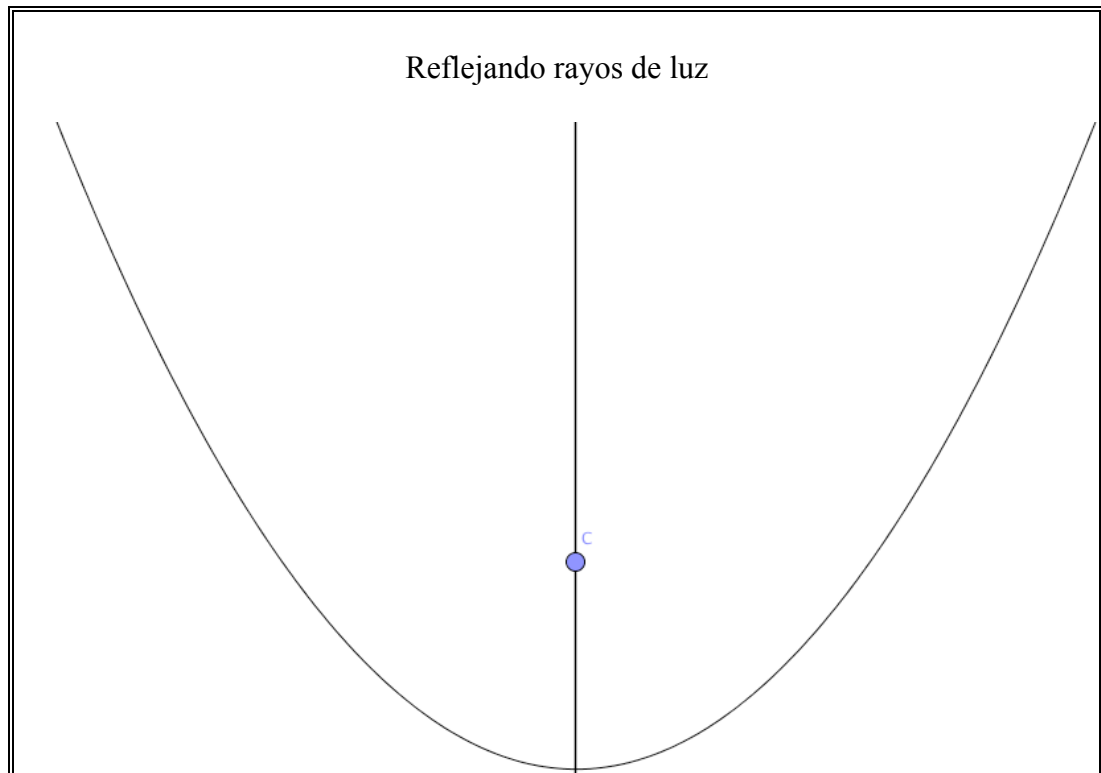
<sup>9</sup> Esta actividad fue recomendada por el Dr. Martín Acosta, profesor de la Universidad Industrial de Santander, y surgió producto de las conversaciones que amablemente sostuvimos con él y con nuestra asesora, en torno al proyecto de las antenas parabólicas y del uso del *software Geogebra*. Sea la ocasión para reiterar nuestro agradecimiento por su valioso aporte.



**Figura 3:** fotos del experimento de la reflexión de los rayos de luz, Carolina, mayo 25 de 2010



En esta guía se menciona que uno de los materiales recibidos por los estudiantes era una hoja, en la cual ellos debían poner un objeto en punto C y lanzar rayos paralelos a la recta que pasa por el punto C. Esta hoja se ilustra a continuación en la Tabla 10.



**Tabla 10:** plantilla para el experimento de los rayos de luz

Posteriormente, a partir del experimento con los rayos de luz, propusimos a los estudiantes una actividad que llamamos “Modelando los rayos de luz en *Geogebra*”, en la cual los estudiantes representaron los rayos de luz del experimento con los rayos láser.

<b>Intencionalidad</b>	Representar la propiedad de los rayos de luz en el <i>software Geogebra</i> .
<b>Acciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelar el experimento de los rayos de luz utilizando el <i>software Geogebra</i>.</li> <li>• Explorar diferentes formas de disposición de los espejos</li> </ul>

	<p>para que se produzca la reflexión de la luz.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecer algunas relaciones entre los elementos constitutivos de la parábola.</li> </ul>
<b>Necesidad</b>	Identificar la forma parabólica que deben formar los espejos para que se produzca la reflexión de la luz.

*Tabla 11: intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Modelando rayos de luz en Geogebra”.*

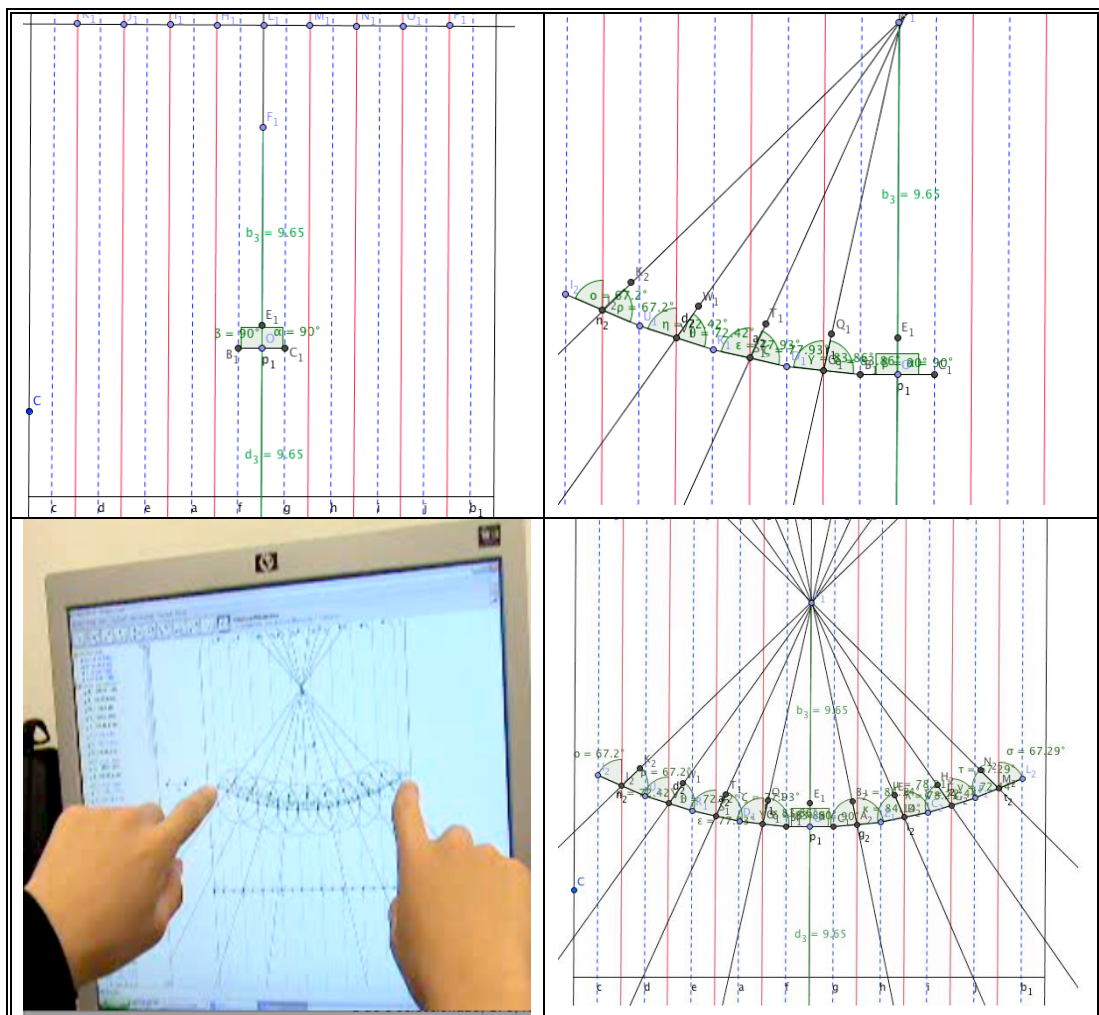
A continuación mostramos las acciones que los estudiantes realizaron en *Geogebra* para la representación de los rayos de luz. Para cada una de estas acciones, la profesora Sandra, realizó una serie de preguntas que les permitían a los estudiantes ir realizando su construcción en constante correlación con el experimento de los rayos de luz.

- Se le pidió a los estudiantes trazar una serie de rectas paralelas, todas a igual distancia una de otra y un punto sobre la de la mitad. Este punto representaba el objeto sobre el cual se reflejaban los rayos de luz apuntados hacia el espejo.
- Luego, sobre la misma recta en la que estaba el punto, trazaron un segmento perpendicular que representaba el primer espejo, de manera que el segmento quedó simétrico con respecto a la recta.
- A partir de ese punto construyeron un segundo espejo, trazando un círculo con centro en un extremo del espejo y radio cualquiera (trataron de colocar siempre el extremo del espejo que se está construyendo en la mitad entre dos rayos consecutivos).
- Colocaron un punto sobre el círculo y trazaron el radio correspondiente con centro en ese punto, que representaba el segundo espejo, el cual debía cortar la recta siguiente.



- Aplicando la propiedad de reflexión de los rayos, reflejaron el segundo rayo de luz con respecto a ese segmento, e iban modificando la posición del espejo (moviendo el punto sobre el círculo) hasta que el rayo reflejado pasaba por el punto objeto.

Después de realizada la construcción, ilustrada en la figura 2, los estudiantes registraron sus observaciones, interpretaciones y abstracciones en la guía propuesta para la actividad.



**Figura 4:** producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, julio 8 de 2010



**Institución Educativa Comercial  
Antonio Roldán Betancur  
Universidad de Antioquia**



**Momento 1**

**Fecha: 8 de Julio de 2010**

1. Teniendo en cuenta la modelación de los rayos que realizaste en Geogebra, responde:

a. Si se pusieran, por ejemplo, treinta (30) espejos, qué forma crees que formarían éstos.

---

---

---

---

---

b. Has una representación gráfica.

---

---

---

---

---

d. ¿Cuál es la única disposición posible de los espejos que permite que todos los rayos paralelos se reflejen en el objeto?

---

---

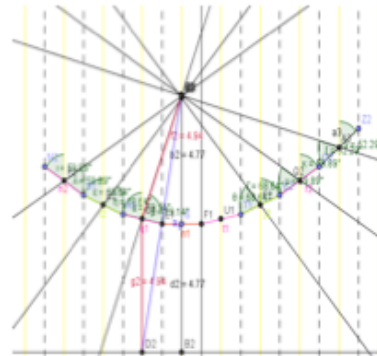
---

---

---

2. En el modelo de los rayos de luz realizado mediante el software Geogebra, ilustrado en la siguiente figura:

a. ¿Qué relación encuentras entre las distancias comprendidas entre el punto donde choca la luz y el punto F, con la distancia entre el punto



donde choca la luz y el punto de intersección (D2) sobre la recta e2?

---

---

---

---

---

b. Si unimos los puntos mencionados anteriormente, ¿qué clase de figura se forma? Explica.

---

---

---

---

---

---

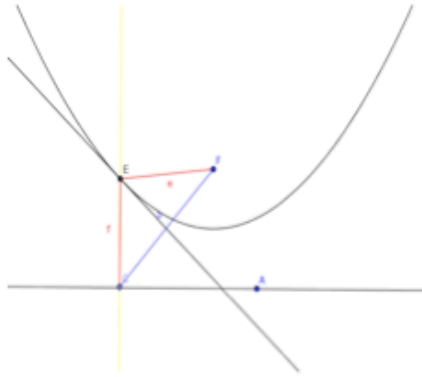
---

---

---

---

c. Colorea cada uno de los rayos de luz con su correspondiente reflejo en el objeto.



3. Observa la construcción de la parábola y realiza:
- a. Identifica y colorea cada uno de los siguientes elementos, para ello utiliza los mismos colores de la construcción que representa la modelación de los rayos de luz.
    - i. El rayo de luz
    - ii. El espejo
    - iii. El punto de choca el rayo de luz con el espejo
    - iv. El objeto
    - v. El rayo reflejado que pasa por el objeto
    - vi. La recta  $e_2$
  - b. ¿Qué clase de triángulo se formó?, utilizando el modo de arrastre para el punto E, ¿qué pasa con la figura anterior?

---



---



---



---

NOMBRE DEL GRUPO:

- c. Utiliza el modo de arrastre sobre el punto

i. ¿Qué pasa con la curva?

---



---



---



---

ii. ¿Qué pasa con el triángulo?

---



---



---



---

iii. ¿Qué pasa con la recta que representa el espejo y con la recta  $e_2$ ?

---



---



---



---

iv. ¿Qué relación hay entre el triángulo formado y la recta que representa el espejo?

---



---



---



---

- d. Utiliza el modo de arrastre sobre el punto A perteneciente a la recta  $e_2$

i. ¿Qué pasa con la curva?

ii. ¿Qué pasa con el triángulo?

iii. ¿Qué pasa con la recta que representa el espejo?

iv. ¿Qué pasa con el punto F?

A partir de las representaciones que los estudiantes realizaron en *Geogebra* del experimento de los rayos de luz, propusimos a los estudiantes la actividad “Identificando relaciones”, ilustrada en el momento 2 de la guía anterior. A continuación mostramos su intencionalidad, acciones y necesidad.

<b>Intencionalidad</b>	Identificar relaciones entre los elementos de la parábola
<b>Acciones</b>	Realizar movimientos generados por el <i>software</i> , mediante el modo de arrastre e interpretar las transformaciones causadas a la construcción.
<b>Necesidad</b>	Identificar la parábola como un lugar geométrico.

**Tabla 12:** intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Identificando relaciones”.

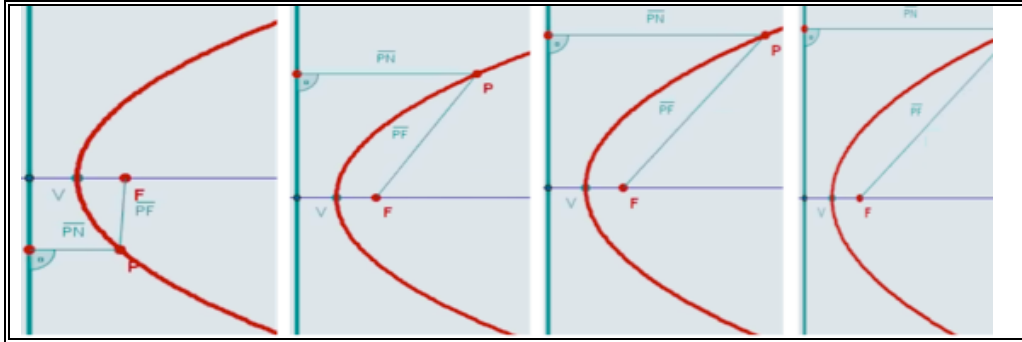
Finalmente, propusimos a los estudiantes una actividad donde se presentaban *applets*<sup>10</sup>, en los cuales se representaban algunas de las actividades realizadas con anterioridad, como por ejemplo, el experimento de los rayos de luz y su modelación en *Geogebra*.

<b>Intencionalidad</b>	(Re)significar relaciones entre los elementos de la parábola
<b>Acciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observar los movimientos generados por el <i>software</i>, mediante los videos de los <i>applets</i>.</li> <li>• Interpretar las transformaciones causadas a las construcciones presentadas en los <i>applets</i>.</li> </ul>
<b>Necesidad</b>	Identificar y establecer las relaciones entre los elementos de la parábola, desde su definición como un lugar geométrico.

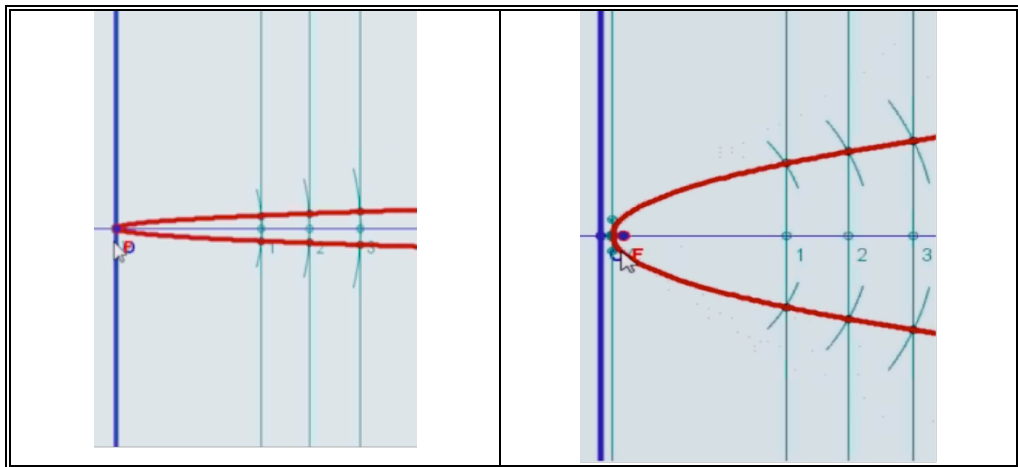
**Tabla 13:** intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Utilizando applets”.

<sup>10</sup> Un *applet* es una aplicación que se ejecuta a través de la WEB, puede ofrecernos información gráfica y en algunas ocasiones interactúa con el usuario.

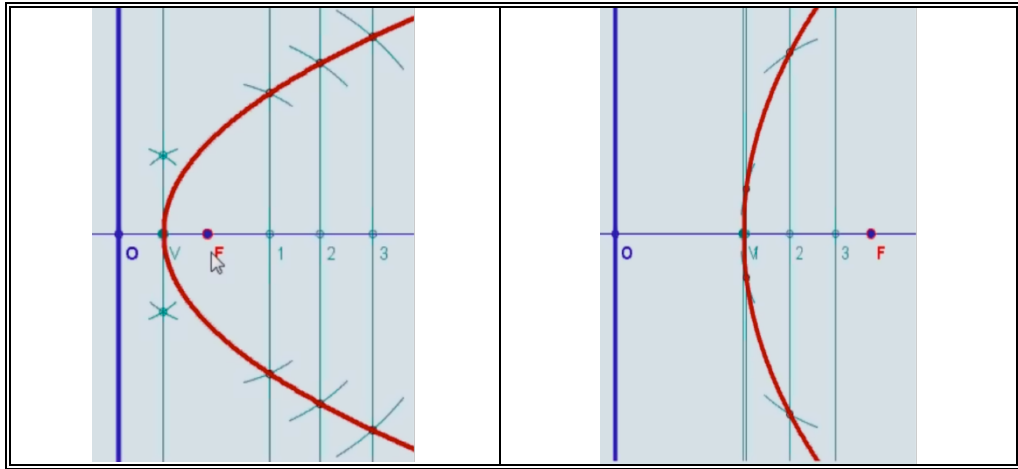
A continuación ilustramos la respectiva guía de la actividad y algunos de los *applets*<sup>11</sup> propuestos en ella.



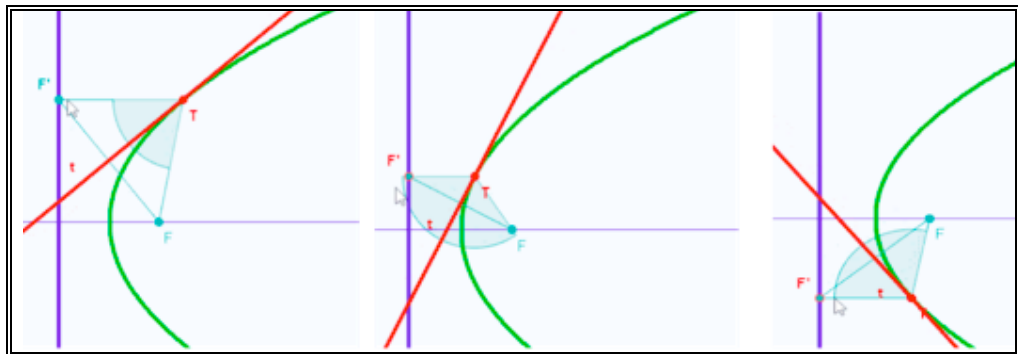
**Figura 5:** actividad video parábola-1, secuencia de algunos movimientos realizados por Carolina al *applet*, agosto 30 de 2010.



<sup>11</sup> Estos *applets* fueron obtenidos en <http://www.educacionplastica.net/conicas.htm#par> el 18 junio de 2010.



**Figura 6:** actividad video parábola, secuencia de algunos de los movimientos realizadas por Carolina al applet, agosto 30 de 2010.



**Figura 7:** actividad video parábola 3, secuencia de algunos de los movimientos realizadas por Carolina al applet, agosto 30 de 2010.



## Estableciendo relaciones entre los elementos de la parábola-definiendo la parábola

Agosto 30 de 2010

Después de haber modelado el experimento de los rayos de luz en Geogebra, veamos ahora algunas relaciones que se pueden establecer a partir de los elementos de la parábola. Para ello vamos a interactuar con los *applets* que se nos dan.

1. Recordemos el experimento de los rayos de luz y relacionalo con el video llamado "parábola".

Contémoslo en nuestras propias palabras: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



2. En el video "parábola 1" y 1-1:

a. ¿Cuál es la particularidad del punto P? \_\_\_\_\_

b. Describe como es la relación entre los dos segmentos NP y PF \_\_\_\_\_



c. ¿Qué relación hay entre los tres puntos que se encuentran sobre la la recta que pasa por el punto V?

\_\_\_\_\_

d. ¿Cómo es el segmento NP con relación a la recta que pasa por los puntos F y V? \_\_\_\_\_ y ¿con la recta que contiene al punto N?

\_\_\_\_\_

3. Del video "parábola 2"

- a. ¿Qué pasa con la figura a medida que alejamos y acercamos el punto F de la recta que pasa por el punto O? \_\_\_\_\_

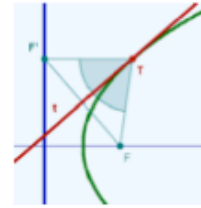


- b. ¿Cómo son las dos rectas que muestra el *applet*? \_\_\_\_\_
- c. ¿cómo es la distancia entre los segmentos OV y VF? \_\_\_\_\_
- d. ¿Qué relación hay entre las distancias anteriores y los segmentos de recta paralelos a la recta que pasa por el punto O? \_\_\_\_\_

- e. Expresemos en términos algebraicos la relación anterior. \_\_\_\_\_

4. En la "parábola 3"

- a. ¿Cómo es la recta de color rojo con respecto a la parábola? \_\_\_\_\_



- b. ¿Qué relación tiene la recta del punto anterior con el segmento F'F? \_\_\_\_\_

5. Desde las relaciones hechas en los puntos anteriores, fruto de nuestras reflexiones, tratemos de definir el concepto de parábola:

---



---



---

6. Tratemos de expresar la parábola mediante una expresión algebraica:

---

Nombre del grupo:

---



---



---



---



Después de la actividad propuesta en la cual se presentaron los *applets* a los estudiantes, programamos, en compañía de los estudiantes, una socialización de las *investigaciones matemáticas* sobre las antenas parabólicas que ellos habían venido trabajando desde el mes de abril de 2010. El objetivo de la socialización era compartir a los compañeros del grupo, y con otras personas lo logrado hasta el momento.

Dicha socialización se programó el día 14 de septiembre. Los estudiantes realizaron presentaciones en las que expusieron las producciones y elaboraciones hechas por ellos en sus investigaciones. Las exposiciones se realizaron en el auditorio de la Institución y se encontraban como asistentes los estudiantes del grupo 11<sup>o</sup>6, estudiantes de otros grupos de la institución, las investigadoras y Diana Jaramillo y Yolanda Beltrán, profesoras de la Universidad de Antioquia, algunos padres de familia y profesores de matemática de la institución. Algunos detalles de esta socialización se explicitan en los capítulos II, III y IV.

Finalmente, el 15 de octubre, con la colaboración de la profesora Yolanda, realizamos una entrevista a los participantes, en la cual pretendimos escuchar las opiniones y conceptualizaciones de los tres participantes —Víctor, Carolina y Estefanía— de las actividades realizadas durante el trabajo investigativo. (El derrotero de la entrevista lo ilustramos en el Anexo)

## **CAPÍTULO II**

### **LA PARÁBOLA: SU PROCESO DE OBJETIVACIÓN. LA ASCENSIÓN DE LO ABSTRACTO A LO CONCRETO**

#### **A modo de presentación**

En la primera parte de este capítulo mostraremos la diferencia entre el pensamiento empírico y el pensamiento teórico, a partir de las abstracciones, generalizaciones, representaciones y conceptos que corresponden a cada tipo de pensamiento, analizados a partir de los diferentes episodios. Mostraremos, también, cómo la formación del pensamiento teórico, a través de la actividad, posibilitó en los estudiantes el desarrollo psíquico. En la segunda parte presentaremos cómo desde las particularidades del pensamiento teórico, cómo son la solución de tareas cognoscitivas y la formación de nuevos conceptos, se abre paso a la ascensión de lo abstracto a lo concreto, y cómo mediante este procedimiento los estudiantes, protagonistas de esta investigación, fueron objetivando el concepto de parábola.

Antes de iniciar la primera parte de este capítulo, creemos necesario presentar nuestras posiciones teórico-metodológicas referentes al materialismo histórico-dialéctico.

Uno de los presupuestos de la teoría histórico-cultural es concebir el trabajo como la base del conocimiento y el desarrollo humano. Según Davidov (1988), el trabajo

presupone una finalidad, la cual pasa a ser una propiedad inherente al hombre que lo constituye humano. De esta manera, el trabajo, a través de la actividad mediada por instrumentos, conlleva a transformaciones biológicas y psicológicas en el orden de lo individual, pero principalmente en el orden de lo social.

En este sentido, según Moura (2010), no es posible hablar de actividad humana sin relacionarla con la conciencia, ya que según este colectivo

En las relaciones entre la consciencia y la actividad, la consciencia es la forma específicamente humana de la reflexión psíquica de la realidad, es decir, es la expresión de las relaciones del individuo con el mundo social, cultural e histórico, que abre al hombre un cuadro del mundo en el que el mismo está inmerso. La conciencia se refiere, así mismo, a la posibilidad humana de comprender el mundo social e individual posible de análisis. (p.20)

Así, la conciencia se encuentra estrechamente vinculada con la actividad, por lo tanto sólo puede ser concebida en el marco de lo social, en las interacciones con otros hombres y con el mundo circundante. De allí, que, para la teoría histórico-cultural, la actividad, en dialéctica con la conciencia, da origen al desarrollo humano.

En esta investigación nos basamos en la *Teoría de la Actividad*, considerando que ella atiende a una concepción del hombre como ser histórico y social, como un sujeto activo que “conoce” y que construye el conocimiento desde su dialéctica con la naturaleza.

La *Teoría de la Actividad* tiene sus orígenes en el materialismo dialéctico e histórico, el cual se apoya en la filosofía Marxista-Leninista. El materialismo dialéctico aborda los fenómenos de la naturaleza desde el método dialéctico, donde se entiende que ningún fenómeno de la naturaleza es estático, y que no puede ser comprendido si se le toma aisladamente, sin conexión con los fenómenos que le rodean.

De acuerdo con el materialismo dialéctico marxista, estamos asumiendo el concepto de ciencia propuesto por el matemático Caraça (1958). Así para Caraça “el mundo está en permanente evolución, todas las cosas, en todo momento, se transforman, todo fluye, todo deviene”. (1958, p.110)

Esta idea de movimiento, de cambio y de transformación propuesto por el materialismo dialéctico e histórico, es compartido por Caraça en su concepción de ciencia, y se refleja en la concepción filosófica-psicológica de la actividad propuesta por Davidov (1988), en donde se muestra el constante movimiento del sujeto en relación con la realidad; de este modo ambos se transforman, ambos están en constante cambio,

...la relación del sujeto humano como ser social hacia la realidad externa, relación mediatizada por el proceso de transformación y cambio de esta realidad. La forma inicial y universal de tal relación son las transformaciones y los cambios instrumentales dirigidos a una finalidad, realizados por el sujeto social, de la realidad sensorio-objetal, o sea de la práctica material productiva de las personas. (Davidov, 1988, p.11)

Para el materialismo dialéctico e histórico la formación del pensamiento es considerado un proceso objetivo de la actividad humana y de la conciencia, lo que es llamado el desarrollo psíquico humano, el cual, según Davidov (1988), hablando de Vigotsky y Leontiev, expresa que es un proceso de desarrollo<sup>12</sup> y de apropiación<sup>13</sup>

---

<sup>12</sup> Para Davidov (1988) el desarrollo del niño se da en el proceso de educación y enseñanza. La educación y la enseñanza son consideradas como la forma en la que se manifiesta el desarrollo psíquico humano. Rubinstein citado por Davidov, expresa “Para el niño no hay nada más natural que desarrollarse, formarse, volverse lo que es en el proceso de educación y enseñanza”(Davidov, 1988, p.57).

<sup>13</sup> Para Davidov (1988) la apropiación hace alusión al contenido del desarrollo psíquico humano, es decir, a la forma como el sujeto, en la actividad, aprende a pensar teóricamente (esta idea será desarrollada mas adelante). La apropiación es un proceso social que requiere de una actividad (intencionalmente diseñada), de la comunicación con los otros y estar bajo la orientación del profesor.

que lleva al individuo a la reproducción, en su propia actividad, de las capacidades humanas formadas históricamente. (Davidov, 1988)

Así, desde la psicología histórico-cultural, la actividad debe tener una finalidad y ser orientada por el profesor, de esta manera el proceso de desarrollo —asociado a la educación y a la enseñanza— y la apropiación alcanzarían su finalidad: el desarrollo psíquico humano.

Para Davidov (1988), al hablar de desarrollo del pensamiento, se hace necesario hablar de los orígenes de la actividad, la cual tiene como base la actividad objeto-práctica: el trabajo. En ella los objetos de la naturaleza se consideran como objetos y medios para fabricar instrumentos; la utilización de herramientas culturales y simbólicas presuponen siempre una finalidad, en este sentido se consideran mediadores de la actividad humana. El hombre al fabricar instrumentos, transforma la naturaleza, según Davidov (1988, p.116), “por sí mismos los objetos naturales no adquirirían la forma que se les da conforme a las necesidades del hombre social”. De esta manera, en la relación del hombre con la naturaleza se pone de manifiesto la transformación práctica de los objetos.

La relación del hombre con la naturaleza no es pasiva, es más bien dialéctica. Al respecto, Vygotski (1995) plantea que la actividad modifica y transforma la naturaleza humana, por cuanto posibilitan ir más allá de una simple adaptación pasiva del individuo a una sociedad. Así, en el mundo de las interacciones, el sujeto transforma y se transforma a la vez; de lo cual puede deducirse que la cultura no sólo se recibe, sino que es transformada por las personas de esa cultura.

Según Radford (2004), la actividad es una forma de organización de las acciones de un grupo de individuos que están orientadas a un fin bien definido. Una actividad produce acciones y se comprende por medio de las acciones. Sin embargo, la actividad no es reducible a las acciones. Los sistemas de actividad evolucionan dependiendo de periodos socio-históricos y económicos, tomando a menudo la forma de instituciones y organizaciones. La actividad colectiva se conecta para objetar y motivar los asuntos individuales que son a menudo inconscientes, y que emergen del grupo en el cual están inmersas.

En la misma línea, Leontiev, citado por Wertsch (1993), al hablar de la actividad humana, comenta

... si retiráramos la actividad humana del sistema de relaciones sociales y de la vida social, no existiría ni tendría estructura alguna. Con sus diversas formas, la actividad individual humana es un sistema en el sistema de relaciones sociales. No existe sin tales relaciones. La forma específica en la que existe está determinada por las formas y los medios de interacción social, material y mental creados por el desarrollo de la producción. (Leontiev, citado por Wertsch, 1993, p. 219)

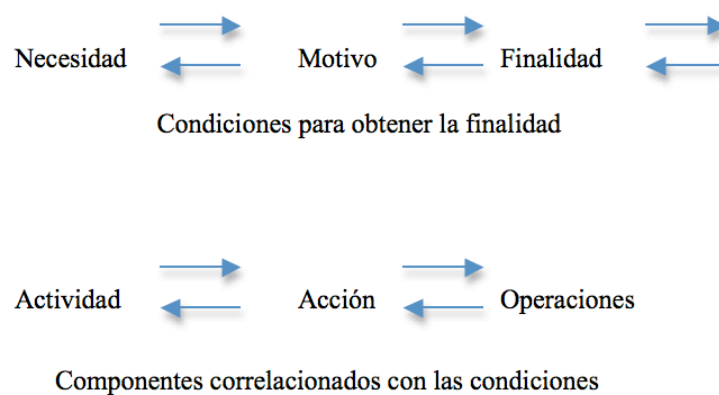
Podemos decir que la actividad intelectual no está separada de la actividad práctica, es decir, del trabajo. Así, en la actividad intelectual, el trabajo surge y se desarrolla con las diferentes formas de actividad espiritual de las personas. En este sentido, para Davidov (1988), el sujeto individual en el proceso de apropiación reproduce las formas histórico-sociales de la actividad. Así:

... el sujeto colectivo e individual de la actividad, en el proceso de satisfacción de sus necesidades, transforma la esfera objetal de su vida. La actividad del hombre tiene estructura compleja: sus componentes son las necesidades, las finalidades, las tareas, las acciones y las operaciones que se encuentran en permanentes interrelaciones y transformaciones. (p.11)

En la misma línea, Leontiev (1978) plantea cómo la actividad surge a partir de las necesidades del hombre, al interactuar éste con la naturaleza. Así, para Leontiev (1978),

... la primera condición de toda actividad es una necesidad. Todavía en sí la necesidad no puede determinar la orientación concreta de la actividad pues es apenas en el objeto de la actividad que ella encuentra su determinación: debe, por así decir, encontrarse en él. Una vez que la necesidad encuentre su determinación en el objeto (se objetiva en él) y dicho objeto se torna motivo de la actividad, aquello que lo estimula. (p.115)

De esta manera, para Leontiev, citado por Davidov (1988), la estructura de la actividad es dialéctica, es decir existe un cambio y una transformación entre cada uno de los elementos. Así, la necesidad puede convertirse en un motivo, la actividad puede convertirse en una acción al perder el motivo, las acciones pueden convertirse en operaciones al modificarse sus finalidades, el motivo puede convertirse en la finalidad para la acción y, a su vez, esta acción convertirse en una actividad. En la siguiente figura ilustramos, desde nuestra comprensión, la estructura que plantea Davidov (1988) al compartir con Leontiev las transformaciones y correlaciones que surgen entre los diferentes elementos de la actividad.



**Figura 8:** estructura psicológica de la actividad de Leontiev.

Desde lo anterior, Lenin, citado por Davidov (1988), expone cómo en el estudio de los elementos de la actividad se pueden revelar las relaciones entre el sujeto y el objeto, como también las condiciones del origen de la conciencia. Así, “en la base del desarrollo histórico del pensamiento se encuentra el desarrollo de la actividad práctica social (genérica) de las personas” (Davidov 1988, p.21).

De este modo, en el proceso de desarrollo de la actividad intelectual o cognoscitiva, basada en la actividad práctica, aparecen diferentes sistemas semióticos que posibilitan transformar la imagen inicial del objeto de trabajo en otro objeto idealizado. Según Davidov (1988) esto es llamado por la filosofía: pensamiento.

Así, desde el materialismo dialéctico se establecen dos tipos de pensamiento: el pensamiento empírico y el pensamiento teórico. El primero se apoya en observaciones y refleja las representaciones de las propiedades externas de los objetos; mientras que el segundo surge sobre la base de la transformación mental de los objetos, refleja las relaciones y conexiones internas, saliendo así de los límites de las representaciones al concepto; en él se persigue la finalidad de reproducir la esencia del objeto estudiado. Estos dos tipos de pensamiento, el empírico y el teórico, serán ampliados en la primera parte de este capítulo, en relación con los episodios presentados.

Así, el concepto, para Davidov, es considerado como “la forma de la actividad mental por medio de la cual se reproduce el objeto idealizado y el sistema de sus relaciones, que en unidad reflejan la universalidad o la esencia del movimiento del objeto material” (Davidov, 1998, p.126)



El proceso de formación de nuevos conceptos en la solución de tareas cognoscitivas es llamado ascensión de lo abstracto a lo concreto. En este procedimiento existen medios propios para reproducir el objeto, ya sean elementos materiales o semióticos que posibilitan la realización del pensamiento —lo que es llamado por Davidov (1988) como la actividad espiritual— que está condicionada por la práctica humana. Dicha actividad posibilita reflejar la realidad en forma de conocimiento, como un todo mental que posibilita actuar ante la realidad. Este proceso será retomado en la segunda parte de este capítulo, analizado a luz de los episodios presentados.

Así, desde lo anterior, el concepto de “actividad” resulta crucial para entender la actividad humana, ya que no se trata de cualquier tipo de “acción”, sino de una “actividad social”, una práctica cultural compartida por un grupo; donde hay un intercambio simbólico y una utilización de herramientas culturales.

De acuerdo con lo anterior, la actividad no puede verse entonces como una mera reunión de personas que se encuentran para resolver una tarea. Una actividad, en el sentido de Leontiev, citado por Radford (2004), debe considerarse como “una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana” (p.10).

En la misma línea, Leontiev (1978) plantea que hablar de “actividad” significa referirse a las acciones de un individuo en una comunidad, a aquellas “acciones” dirigidas al trabajo colectivo en las cuales, en muchos casos, son subordinadas incluso a fines parciales que son posibles distinguir de un fin u objetivo general.

Desde lo anterior, la actividad nos habla de las formas de organización, al interior de una cultura, orientadas a un fin determinado.

En este capítulo nos centraremos en una actividad en particular: el aprendizaje. Según Lompscher (1999), citado por Cedro (2008), existen dos tipos de aprendizaje: el que ocurre en la actividad y el aprendizaje como una actividad. El primero es aquel que se da sin un objetivo específico de aprendizaje en las diversas actividades del individuo (por ejemplo: el juego, la comunicación del día-a-día, el trabajo); mientras que el segundo aprendizaje posee una intencionalidad en la actividad misma. Por tanto, al referirnos a la actividad, en este capítulo, nos estamos refiriendo, al segundo tipo: al aprendizaje como una actividad. En palabras de Davidov (1988), a una actividad de aprendizaje con contenido y estructuras especiales que determina el surgimiento de las funciones psíquicas.

### **El pensamiento empírico y el pensamiento teórico**

En esta primera parte trataremos de analizar cómo fue el proceso de objetivación del concepto de parábola en Víctor, Estefanía y Carolina. Cuando nos referimos al proceso, no lo estamos entendiendo como el estado cognitivo que hace referencia a un estado final a partir de un estado inicial del estudiante en la objetivación de un conocimiento, como tampoco a la descripción de una serie de pasos que den cuenta de la evolución en la objetivación de un concepto. Aquí estamos entendiendo el proceso como una lectura del devenir entre esos estados, inicial y final, como un proceso de las acciones mentales llevadas a cabo por el estudiante durante el desarrollo de las actividades. Desde esta mirada, Davidov (1988) plantea

...por eso es legítimo considerar los conocimientos, por una parte, como resultado en sí, y por otra, como proceso de obtención de este resultado, en el que encuentra su expresión el funcionamiento de las acciones mentales. En consecuencia, es completamente aceptable designar con el término “conocimiento” el resultado del pensamiento (reflejo de la realidad) y el proceso de su obtención (es decir, las acciones mentales). (p. 174)

Para ilustrar como fue el proceso de objetivación del concepto de parábola, expondremos algunas ideas sobre cómo se evidenció en los estudiantes, el pensamiento empírico y el pensamiento teórico, desde los planteamientos de Davidov (1988), y cómo esta objetivación del concepto no solo implicó operaciones mentales y cognoscitivas en los estudiantes, sino también su (re)constitución como sujetos.

Desde Davidov (1988), la apropiación de un conocimiento implica unos conocimientos que requieren de un pensamiento empírico y otros conocimientos que requieren de un pensamiento teórico. En esta investigación haremos explícitas las características con relación al pensamiento empírico y otras con relación al pensamiento teórico que nos posibilitaron evidenciar cómo estos tipos de pensamiento, a partir de los planteamientos de Davidov (1988) y desde nuestra mirada, fueron los que posibilitaron en los estudiantes la objetivación del concepto de parábola.

Desde el pensamiento empírico según Davidov (1988, p.154), la primera de las características es que “el proceso de concretización de los conocimientos empíricos consiste en seleccionar ilustraciones, ejemplos, que entran en la correspondiente clase de objetos”. Desde el inicio de la investigación, una de nuestras preocupaciones fue que los estudiantes objetivaran el concepto de parábola a partir de la modelación

de situaciones reales, que les posibilitaran concretizar<sup>14</sup> en el sentido de Davidov, el concepto de parábola. Desde allí, las actividades que propusiéramos debían estar en concordancia con ésta preocupación, fue por ello que decidimos que las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, como metodología de clase, posibilitarían a los estudiantes darle sentido y significado al concepto de parábola.

Así, iniciamos nuestra investigación proponiendo a los estudiantes realizar un ideograma con la intencionalidad de que ellos identificaran los usos y significados dados por ellos a la tecnología. Para ello, los estudiantes realizaron un ideograma donde mostraron su relación con los medios tecnológicos. En la socialización de los ideogramas pudimos observar cómo los estudiantes enfatizaron en el uso que hacían de los medios tecnológicos. Uso demarcado, básicamente, en términos de comunicaciones. Así, el computador era utilizado, por ejemplo, para comunicarse con sus amigos por *Facebook*, correo electrónico y *chat*; el celular les era útil para comunicación oral y escrita, para escuchar música y para tomar fotos, entre otros usos.

Los ideogramas y su socialización llamaron nuestra atención, ya que la importancia dada por los estudiantes a la comunicación con el otro nos facilitó proponer de una manera muy natural las antenas parabólicas, en el sentido de que en las mismas socializaciones de los ideogramas surgieron las antenas como mecanismos que posibilitaban la producción de las comunicaciones. Fue así como propusimos a los

---

<sup>14</sup> Para Davidov (1988) lo concreto es un producto del pensamiento, de las abstracciones, del establecimiento de relaciones de un determinado concepto. Lo concreto aparece como fruto del procedimiento de la ascensión de lo abstracto a lo concreto (el cual se abordará en profundidad en este capítulo), en él, lo concreto “aparece como un proceso de síntesis, como resultado y no como punto de partida” (p.142). Cuando un sujeto concretiza un concepto, es porque ha puesto al descubierto la esencia del objeto.

estudiantes, las antenas parabólicas como motivo y detonante de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*. Así, el uso de las antenas parabólicas nos permitió ese proceso de ascensión de lo abstracto a lo concreto abordado desde los conocimientos empíricos.

Para nosotras, las antenas parabólicas como motivo de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, permitieron en los estudiantes la objetivación del concepto de parábola, lo cual pudimos observar en la respuesta dada por Víctor ante la pregunta de la profesora e investigadora Yolanda Beltrán, co-asesora de nuestro proyecto de investigación, ¿tú crees que se pueden establecer relaciones entre ese conocimiento matemático, el entorno y la vida cotidiana?:

Sí, con el proyecto de las antenas parabólicas. Yo primero decía, ¿qué tienen que ver las matemáticas con un proyecto de antenas parabólicas?, pero mira que sí. Descubrí que con las matemáticas, con conceptos matemáticos, se puede crear una antena parabólica. Muchas de las cosas que nosotros utilizamos con las que nosotros convivimos necesitan conocimiento matemático, por ejemplo, una hoja de papel, un lapicero, todo necesita de cálculos matemáticos. Entonces sí, nuestra vida cotidiana se relaciona con las matemáticas. (Víctor, Entrevista, octubre 15 de 2010)

Para Víctor, el proyecto de las antenas parabólicas fue un ejemplo que le permitió ir concretizando, en el sentido de Davidov, desde el pensamiento empírico, el concepto de parábola. El acercamiento de Víctor a las antenas, en compañía de sus compañeros, le permitió hacerse preguntas que fue respondiendo paulatinamente durante el desarrollo de las actividades propuestas durante el proceso de investigación. En una de las actividades de clase, Víctor comentó a sus compañeros del curso

... porque yo no puedo coger, como un ejemplo que me dio la profesora, coger la mitad de un totumo y utilizarlo como una antena porque eso no me va a transmitir nada, o sea, si ahí llega el sonido yo no voy a tener forma de escucharlo, entonces por eso es la pregunta de nosotros: ¿Que se necesita adicionalmente para interpretar esas señales? Ustedes pueden ver que las ondas de sonido no las escuchan simplemente. Por ejemplo, las emisoras necesitan un sintonizador para poder

escuchar ese sonido, es por eso la pregunta de nosotros. (Víctor, videograbación, mayo 10 de 2010)

Para Víctor y su grupo, la investigación sobre las antenas parabólicas les permitió la elaboración de unas primeras conjeturas sobre su funcionamiento. Conjeturas que, aunque eran basadas en su experiencia y observación del medio, crearon la necesidad de responder a su pregunta de investigación y, posteriormente, realizar razonamientos más complejos a partir del conocimiento directo de su realidad. Al respecto Davidov (1988), citando a Naúmenko, señala

Lo empírico no es sólo el conocimiento directo de la realidad, sino también, lo que es más importante, el conocimiento de lo inmediato en la realidad, justamente del aspecto que se expresa por la categoría de existencia, de existencia presente, cantidad, calidad, propiedad, medida. (p.123)

De esta manera, el pensamiento empírico manifiesta, a través de los órganos de los sentidos, ligado con la vida real de las personas, unas formas primarias de pensamiento, así como unas representaciones generales de los objetos, expresadas a partir de lo sensorial.

La segunda característica, desde el pensamiento empírico, señala cómo los conocimientos, “apoyándose en observaciones, reflejan en representaciones las propiedades externas de los objetos” (Davidov, 1988, p.154). Este rasgo pudo evidenciarse desde una de las primeras actividades que propusimos a los estudiantes, “la visita a las conchas acústicas”. En esta actividad, la intencionalidad era identificar algunos de los elementos de una parabólica y su funcionamiento. Los estudiantes, por medio de la exploración sobre el funcionamiento de las conchas acústicas del Parque de los Deseos de la ciudad de Medellín, realizaron una representación gráfica de ellas y elaboraron tres preguntas sobre las inquietudes surgidas en la actividad.

Los estudiantes, al visitar las conchas acústicas del Parque de los Deseos, pudieron hacer observaciones y experimentaciones a través de los sentidos, de lo sensorial; además plantearon algunas representaciones de las propiedades externas que veían en ellas. A continuación presentamos, en la tabla 5, las preguntas elaboradas por los estudiantes en el Parque de los Deseos, y en la figura 8, algunas representaciones de las conchas acústicas.

<b>Grupo de Carolina</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Por qué está simbolizada en la luna?[<i>En cada una de las conchas acústicas aparecen las caras de la luna</i>]</li> <li>2. ¿Para qué los cuadros negros?[<i>Al frente de cada una de las conchas acústicas hay un cajón que contiene luces y permite a las personas pararse en él</i>]</li> <li>3. ¿Por qué tiene la forma cónica?</li> <li>4. ¿Qué pasaría si tuviera otra forma?</li> <li>5. ¿Por qué tiene una distancia definida?</li> </ol>
<b>Grupo de Estefanía</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. ¿Por qué entre más lejos se este del reflector parabólico se escucha más duro?</li> <li>7. ¿Por qué el reflector parabólico es de esa forma?</li> <li>8. ¿Si los dos reflectores parabólicos se encuentran a una distancia más larga se escuchará igual?</li> <li>9. ¿Por qué se encuentran esos cubos al lado de los reflectores parabólicos?</li> </ol>
<b>Grupo de Víctor</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>10. ¿Por qué se expanden las ondas de sonido en seguir uniformemente?</li> <li>11. ¿Por qué las conchas tienen que ser curvas y no rectas?</li> <li>12. ¿Por qué se llaman conchas acústicas?</li> </ol>

**Tabla 14:** preguntas realizadas en torno a las conchas acústicas del Parque de los Deseos de Medellín.



**Figura 9:** representaciones conchas acústicas. Izquierda: Estefanía y su equipo. Derecha: Víctor y su equipo.

Las preguntas que los estudiantes plantearon hicieron alusión a la forma de las conchas acústicas que ellos estaban percibiendo (figura 8), y a cómo imaginaban ellos que viajaban la ondas de una concha a otra. Estas primeras representaciones y preguntas, que se hicieron los estudiantes a partir de la visita, posibilitaron aproximarlos hacia la propiedad de reflexión de la parábola y, desde ahí, a una aproximación al concepto de parábola; así como al establecimiento de juicios que llevarían a los estudiantes, particularmente a Carolina, Víctor y Estefanía, a plantear razonamientos basados en esta experiencia.

Durante la visita al Parque de los Deseos, los estudiantes experimentaron en torno a la transmisión de las ondas de una concha a otra. Carolina se situó frente al cuadro ubicado en el centro de una de las conchas (el cual fue ilustrado en la figura 8) y otros compañeros se situaron en la otra concha. Ellos comenzaron a experimentar sobre cuál posición era la más adecuada, para obtener un sonido más nítido y fuerte. Esta experimentación posibilitó, tanto a Carolina como a sus compañeros, experimentar a través de los sentidos, observar las conchas, tocarlas, y hacer conjeturas sobre cómo creían que era su funcionamiento. Al respecto, al preguntarle a Carolina sobre cuál de las actividades había sido más importante en su proceso, ella expresó

Profe, me encantó la de la actividad en el Parque de los Deseos, porque había un espacio en el que la voz se escuchaba más, como una distancia que tenía que tener, yo no sabía eso, como que se me grabó bastante, fue diferente. (Carolina, Entrevista, octubre 15 de 2010)

Esta actividad posibilitó a Víctor, Estefanía y Carolina, a partir de las representaciones generales y de las observaciones directas que ellos tuvieron de las conchas acústicas, estructurar juicios que los prepararían para hacer, posteriormente,



razonamientos más complejos. Al respecto, según Davidov (1988), en el desarrollo de la actividad cognoscitiva

...la formación de las representaciones generales, directamente enlazada con la actividad práctica, crea las condiciones necesarias para la compleja actividad espiritual que habitualmente se llama pensamiento. Para éste son características la formación y utilización de las palabras-denominaciones que permiten dar a la experiencia sensorial la forma de la universalidad abstracta. Gracias a dicha forma se puede generalizar la experiencia en los juicios, utilizarla en los razonamientos. (p.123)

De esta manera, desde Davidov (1988) surge una tercera característica, “las palabras-términos son el medio para fijar estos conocimientos” (p.154). Las representaciones que Carolina, en primera instancia, se hacía de las conchas acústicas, a partir de la experiencia sensorial, de su actividad práctica, le permitió expresar unas representaciones generales y juicios fruto de sus observaciones directas. Por ejemplo, cuando Carolina debatía en su equipo sobre cuál debería ser la pregunta de investigación, ella dijo

No, yo pienso, ¿si las ondas llegan desde el centro, o sea se escucha la voz desde el centro, aquí al abarcar todo esto [*mientras habla, Carolina ilustra a sus compañeros en una hoja formas cuadradas, triangulares, circulares, haciendo alusión a la forma de las conchas acústicas del Parque de los Deseos*] al desplazarse [...] al llegar el sonido en forma de triángulo, o sea qué pasaría ahí?. (Carolina, Videograbación, mayo 10 de 2010)

En ese momento, Carolina expresó sus ideas, adquiridas de sus datos sensoriales, a través de las palabras; todavía no hacía uso de conceptos matemáticos, estaba en el plano de las representaciones, particularidad del pensamiento empírico. Al respecto, Davidov (1988), citando a Marx, plantea:

Después de multiplicarse y desarrollarse ulteriormente las necesidades de los hombres y los tipos de actividad, con cuya ayuda se satisfacen, las personas dan nombre a clases enteras de objetos que ellas ya diferencian, en la experiencia del resto del mundo externo [...] Esta denominación verbal solo expresa en forma de representación lo que la actividad repetida convirtió en experiencia [...] las personas

solo dan a estos objetos una denominación especial (genérica), por cuanto ya conocen la capacidad de estos objetos de servir a la satisfacción de sus necesidades. (p.120)

Las representaciones surgidas en la actividad práctica de Carolina le posibilitaron, a través de actividades como el debate con sus compañeros de equipo y de su imaginación, establecer unas diferencias y relaciones entre las posibles formas que podía tener una concha; así mismo, esto le posibilitó planificar sus acciones frente al trabajo investigativo propuesto, referente a las antenas parabólicas.

De esta manera, notamos cómo los conocimientos empíricos pueden ser expresados verbalmente como fruto de las observaciones sensoriales; esto es precisamente lo que los diferencia de los conocimientos teóricos, ya que éstos últimos no pueden ser observados directamente. En los conocimientos empíricos, propios del pensamiento empírico, las partes aparecen aisladas del todo; mientras que en los conocimientos teóricos, propios del pensamiento teórico, la parte aparece como manifestación de otra dentro de un todo. Al respecto Davidov (1988) dice

...las dependencias internas, esenciales, no pueden ser observadas directamente, por cuanto en la existencia presente, formada, resultante y desmembrada ellas ya no están dadas. Lo interno se descubre en las mediatizaciones, en un sistema, dentro del todo, en su formación. Dicho con otras palabras, aquí lo presente y observable debe ser correlacionado mentalmente con lo pasado y con las potencias del futuro; en estos tránsitos está la esencia de la mediatización, de la formación del sistema, del todo a partir de las diferentes cosas interactuantes. El pensamiento teórico o el concepto deben reunir las cosas desemejantes, diferentes, multifacéticas, no coincidentes y señalar su peso específico en ese todo. (p.130)

Así, en estas primeras actividades los estudiantes pudieron establecer relaciones y dependencias entre las partes y el todo, evidenciándose ello cuando Víctor expresa

...porque yo no puedo coger, como un ejemplo que me dio la profesora, coger la mitad de un totumo y utilizarlo como una antena porque eso no me va a transmitir nada, o sea, si ahí llega el sonido yo no voy a tener forma de escucharlo, entonces

por eso es la pregunta de nosotros, ¿Que se necesita adicionalmente para interpretar esas señales?. (Víctor, Videograbación, mayo 10 de 2010)

Las primeras intervenciones que Víctor realizaba en las clases, nos mostraron que, para él, las cosas no existen en forma aislada, que éstas están en relación con otras dentro de un todo. Así, Víctor deja ver su interés por develar “qué otra cosa”, fuera de la forma que debía tener la parábola, se requería para que existiese una comunicación. Así, la experiencia de Víctor, nos mostró cómo las primeras actividades, que en un primer momento pensamos que tendrían un carácter meramente empírico, también evidenciaron unos razonamientos propios del pensamiento teórico.

De esta manera, nuestro objetivo en cuanto a que los estudiantes formaran un pensamiento teórico que les posibilitará la objetivación del concepto de parábola lo empezamos a visualizar tempranamente en nuestra investigación. Con miras a continuar la formación del pensamiento teórico en los estudiantes, diseñamos otras actividades de aprendizaje en las cuales se evidenciaron algunas características propias del conocimiento teórico, y que además posibilitaron, en palabras de Davidov (1988), el desarrollo psíquico de los estudiantes.

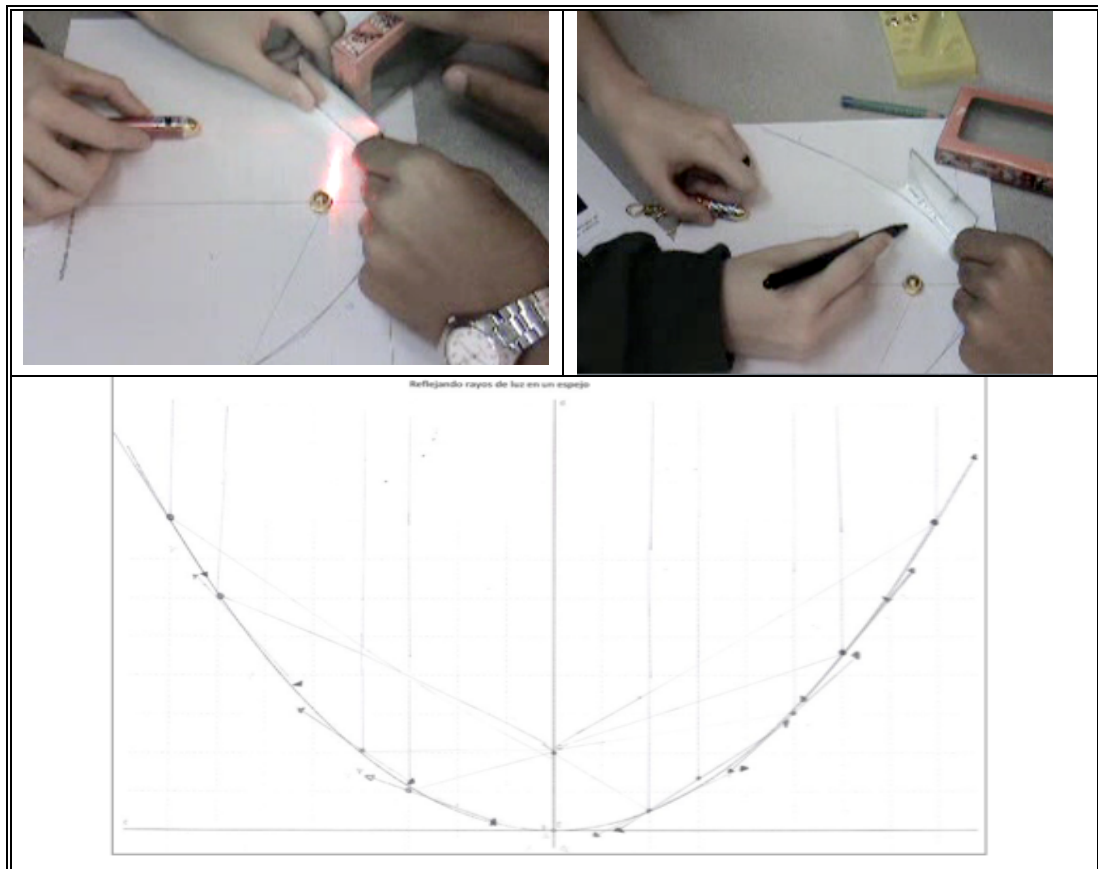
A continuación ilustraremos como las actividades diseñadas bajo el enfoque de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, nos posibilitaron desarrollar en los estudiantes el pensamiento teórico, el cual a su vez, los llevaría a la ascensión de lo abstracto a lo concreto.

Algunas de las particularidades del pensamiento teórico que trataremos de mostrar, hacen alusión a los planteamientos que Davidov (1988) hace de los conocimientos

teóricos. Parafraseando a Davidov (1988), los conocimientos teóricos se caracterizan por: surgir a partir de un análisis del papel y la función de cierta relación entre las cosas al interior de un sistema integral; se concretiza mediante la manifestación y explicación de las manifestaciones particulares y singulares del sistema integral a partir de su fundamento universal. Se constituyen sobre la base de la transformación mental de los objetos. Reflejan las relaciones y conexiones internas, saliendo así de los límites de las representaciones. Se expresan en los procedimientos de la actividad mental y luego con ayuda de diferentes medios simbólicos y semióticos, en particular de los lenguajes natural y artificial. En ellos se fija el enlace de la relación universal, realmente existente, del sistema integral con sus diferentes manifestaciones, el enlace de lo singular con lo universal.

Para nosotras, las particularidades propias del pensamiento teórico, descritas anteriormente, fueron surgiendo tempranamente a lo largo de las actividades donde, desde el inicio, pudimos ver algunas características del pensamiento empírico y del pensamiento teórico.

Posterior a la actividad de las conchas acústicas, propusimos a los estudiantes otras actividades que posibilitaron la formación del pensamiento teórico. Una de ellas fue la del “Experimento: reflexión de los rayos de luz”. En esta actividad la intencionalidad era identificar la propiedad de reflexión de la luz utilizando espejos planos. Para el desarrollo de la actividad los estudiantes se reunieron en grupo, experimentando sobre la posición que debían tener los espejos para que al chocar el rayo de luz se reflejara en el objeto. En la figura siguiente se ilustra el experimento.



**Figura 2:** fotos del experimento de la reflexión de los rayos de luz, Carolina, mayo 25 de 2010

A partir de este experimento, Carolina, Estefanía y Víctor empezaron a relacionar cada uno de los elementos de la parábola. Para ellos, de acuerdo a la posición que tomaran los espejos, ello posibilitaría que los rayos que venían paralelos a la recta que pasaba por el objeto, se reflejará en dicho objeto. Carolina, por ejemplo al preguntarle qué opinaba del experimento decía, “*la forma de viajar de los rayos es muy peculiar, el rayo se refleja en el punto C. Para que la luz se refleje, el espejo tiene que estar bien situado, tiene que tener un ángulo de  $90^\circ$  y la luz paralela a la recta donde está C*”. (Videograbación, Carolina, mayo 25 de 2010)

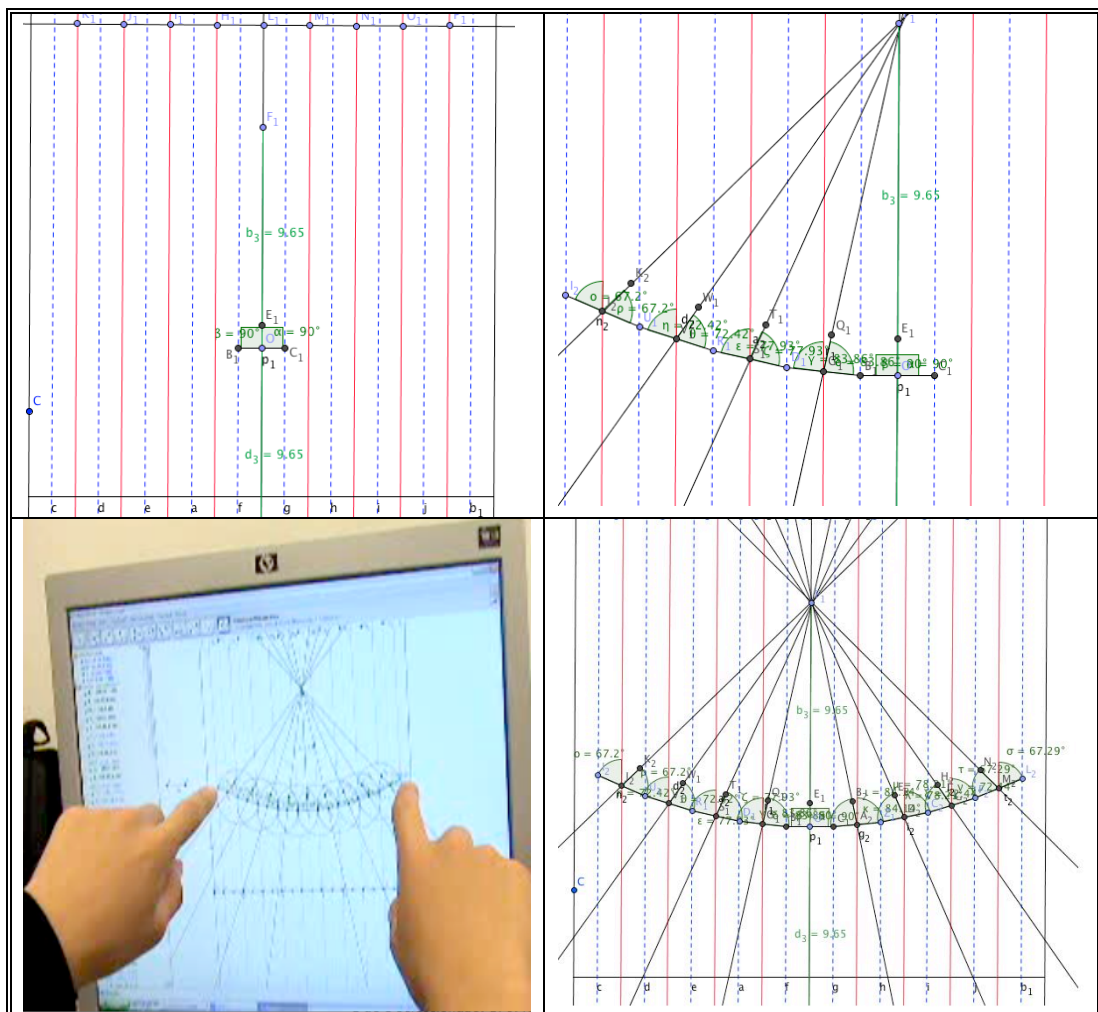
De esta forma, Carolina, a partir de las interacciones con su grupo, de su experimentación con sus compañeros de equipo (ilustrada en la figura 2) y de sus razonamientos expuestos, pudo establecer relaciones entre los elementos del experimento: los rayos, el objeto y los espejos. Carolina descubrió las interrelaciones entre objetos que a primera vista parecían aislados, autónomos, pero que, en realidad, podían explicarse dentro de un sistema integral, es decir, para producirse la reflexión de la luz, cada uno de los elementos anteriormente descritos debían estar encadenados, de esta forma se producía una dialéctica entre los objetos singulares y el todo; es decir entre los espejos, el objeto y los rayos, y la propiedad de reflexión de la luz. Según Davidov (1988) “el pensamiento teórico es el área de los fenómenos objetivamente interrelacionados, que conforman un sistema integral, sin el cual y fuera del cual estos objetos solo pueden ser objeto de examen empírico”. (p.129)

Así, a partir del experimento con los rayos de luz, propusimos a los estudiantes una actividad que llamamos “Modelando los rayos de luz en *Geogebra*<sup>15</sup>” la intencionalidad de ésta actividad era representar la propiedad de reflexión de los rayos de luz utilizando el *software Geogebra*. En esta actividad, los estudiantes exploraron diferentes formas de disposición de las rectas que representaban los espejos en el experimento de los rayos de luz, al mismo tiempo que establecían algunas relaciones entre los elementos constitutivos de la parábola. Sin embargo la necesidad de los estudiantes de realizar la modelación en *Geogebra* era movida por

---

<sup>15</sup> En esta investigación la modelación no fue nuestro objeto de estudio, fue una de las muchas actividades que le posibilitaron a los estudiantes objetivar el concepto de parábola, por ello cuando hablamos de modelación, la estamos entendiendo en el sentido de Davidov (1988), posición que será explicada, más adelante, en este mismo capítulo.

la motivación de dar respuesta a sus preguntas de investigación, referidas a la forma que debía tener el reflector parabólico en una antena parabólica. A continuación presentamos en la figura 3, algunas imágenes que ilustran algunos momentos de la realización de la modelación por parte de Víctor.



**Figura 3:** producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, julio 8 de 2010

Al referirse a su construcción en *Geogebra*, Víctor explicó:

Les voy a hacer un breve recuento [mostrando a su vez la figura de la modelación de los rayos de luz en *Geogebra* que el realizó]. Les voy a explicar que significan todas estas rayas [señalando las rectas paralelas]. Entre todas esas rayas hay unas

rojas que representan el rayo, por ejemplo un rayo laser, lanzadas desde un punto de arriba, quiere decir que la luz llega hasta este punto [señala los segmentos de la línea tangente a la parábola], según la ley de reflexión, el ángulo formado en la parábola y el que se refleja en la parábola debe ser el mismo. Esta línea [muestra una de las rectas rojas, ilustradas en la figura 3] representa cuando la luz llega a este punto en la parábola y va a llegar hasta este punto [señala el foco]. En una antena parabólica lo podemos interpretar como la onda electromagnética que llega hasta este punto [señala donde choca la onda en la parábola] y se concentra hasta el foco principal. Todos estos [mostrando el resto de las rectas] representan la forma como se va a reflejar también la luz. (Videograbación, Víctor, Septiembre 14 de 2010)

La representación que Víctor realizó en *Geogebra* del experimento de los rayos de luz le permitió concretizar su pensamiento, a través de las explicaciones y deducciones que él hizo de su modelación con relación a las antenas parabólicas. Igualmente, Víctor pudo realizar objetivación del concepto de parábola por medio de las transformaciones mentales que fue haciendo de los objetos matemáticos representados en su construcción en *Geogebra*, dichas objetivaciones fueron a la vez fruto de las relaciones entre los objetos representados en pantalla, los cuales estaban asociados al experimento de los rayos de luz, además de las diferentes representaciones que Víctor utilizó, en este caso, el *software Geogebra* y su lenguaje natural.

En este sentido, Davidov (1988), al hablar de los diferentes medios que existen para reproducir un objeto expresa, “los diferentes símbolos (materiales, gráficos) pueden convertirse en medios para establecer patrones, y con ello, idealizar los objetos materiales, en medio de pasajes de éstos al plano mental” (p.127). Así, los símbolos, en este caso el *Geogebra* y el propio lenguaje natural, se convierten en artefactos que posibilitaron a Víctor develar la esencia de las cosas; en palabras de Davidov (1988), su universalidad, cosas que fueron captadas por Víctor en primera instancia de manera sensorial.



Al igual que Víctor, en Estefanía pudimos evidenciar la trascendencia que tuvo para ella el poder dar respuesta a su pregunta de investigación, a través de las relaciones que estableció entre su modelación en *Geogebra* y las antenas parabólicas. Al preguntarle sobre cómo pudo finalmente responder a su pregunta de investigación, la cual hacía alusión a la forma que debía tener un reflector parabólico en una antena parabólica, ella expresó,

... a través del *Geogebra* fue que descubrimos que la forma debía ser una parábola, porque experimentamos con varias formas y con la única que lográbamos reflejar los rayos de luz en el foco era con la parábola, con las otras la señal se desviaba. Gracias a esta forma era que se lograban reflejar los rayos paralelos y dar directamente en el foco. Voy hablar de la propiedad de reflexión de las ondas. La reflexión es el cambio de dirección de la onda cuando choca con un obstáculo al que se le denomina superficie reflectora. Ese cambio de dirección depende de la forma de la superficie reflectora. Los rayos que inciden en la superficie reflectora se denominan rayos incidentes y los que se reflejan rayos reflectores. Cuando la forma de la superficie reflectora es parabólica, los rayos incidentes son paralelos al eje de la parábola y se reflejan en dirección al foco. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.” (Entrevista, Estefanía, septiembre 14 de 2010)

Para Estefanía, la posibilidad de representar, con ayuda del *Geogebra*, la reflexión de los rayos de luz, le ayudó a entender que la forma del reflector parabólico debía ser una parábola. De esta manera, la modelación se convirtió en un tipo de idealización simbólico-semiótico, en donde los símbolos posibilitaron reflejar las correlaciones de los objetos, materialmente representados en la pantalla del computador, con las cosas reales. Al respecto Davidov (1988) dice:

“Los modelos son una forma peculiar de abstracción, en las que las relaciones esenciales del objeto están fijadas en enlaces y relaciones visualmente perceptibles y representadas de elementos materiales o semióticos. Se trata de una peculiar unidad de lo singular y lo general, en la que en primer plano se presenta lo general, lo esencial”.p.134

Las acciones realizadas a través de las actividades, posibilitaron a Víctor, Estefanía y Carolina establecer relaciones entre lo exterior y lo interior, posibilitándoles, desde el

materialismo dialectico, una integridad objetiva de lo universal y lo singular, por medio de las conexiones y de las correlaciones entre los elementos de la parábola, proceso llamado por Davidov (1988), lo concreto. Así, el concepto de parábola, aparece como una relación objetiva entre lo universal y lo singular, donde el proceso de formación de lo concreto es el pensamiento, el cual se evidencia a través de los conceptos, es decir por medio del pensamiento teórico. En este sentido, según Davidov (1988)

El contenido del pensamiento teórico es la existencia mediatizada, reflejada, esencial. El pensamiento teórico es el proceso de idealización de uno de los aspectos de la actividad objetual-práctica, la reproducción, en ella, de las formas universales de las cosas. Tal reproducción tiene lugar en la actividad laboral de las personas como peculiar experimento objetual-sensorial. Luego este experimento toma un carácter más cognoscitivo, permitiendo a las personas pasar, con el tiempo, a los experimentos realizados mentalmente. (p.125)

Para Davidov (1988), los experimentos mentales son la base del pensamiento teórico, los cuales fueron antes precedidos por experimentos objeto-sensoriales, pero para alcanzar la forma de conceptos debe ir más allá de las representaciones, propias del pensamiento empírico. Los experimentos mentales realizados por Estefanía, Víctor y Carolina, ilustrados en los episodios anteriores, les posibilitaron objetivar el concepto de parábola. Davidov (1988), citando a Bibler, señala particularidades esenciales de los experimentos mentales,

1) El objeto de conocimiento es colocado mentalmente en condiciones en las que su esencia puede ponerse al descubierto con especial determinación; 2) la cosa dada se vuelve objeto de las posteriores transformaciones mentales; 3) en el experimento dado se forma un sistema de enlaces mentales en el que cabe dicho objeto. (p.125)

La primera de esas particularidades pudo ser evidente a partir de las actividades intencionalmente diseñadas, desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, que les posibilitó a los estudiantes realizar acciones que los llevaría, a partir de sus

propios interrogantes de cada una de sus investigaciones matemáticas, a extraer la esencia del modelo que ellos estaban representando. Dicha esencia es representada en la forma parabólica que debían adquirir los espejos para que se cumpliera la reflexión de los rayos de luz.

El experimento de los rayos de luz y, su posterior modelación en *Geogebra*, creó las condiciones para dar paso a la segunda particularidad de los experimentos mentales, ya que viabilizó en los estudiantes las continuas transformaciones que ellos podían hacer al objeto allí representado a través del *Geogebra*. Al respecto Estefanía expresó

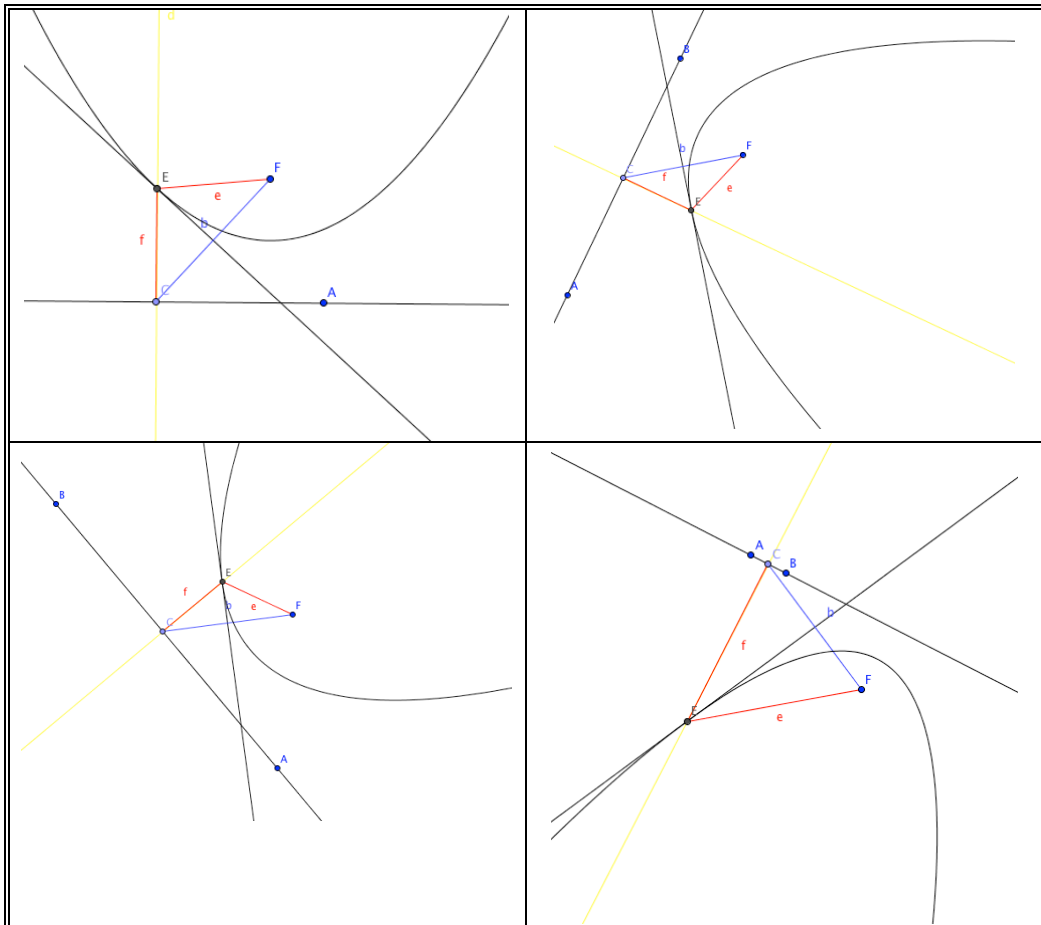
... pues, Geogebra fue lo más importante; porque como uno experimentaba y las podía mover [*las rectas tangentes a un punto  $P: (x,y)$ , que fue representada por los espejos*] para ver si se dañaba la forma. Esto es como lo que más le ayuda a uno a entender lo que se está haciendo, porque con la teoría uno aprende pero no entiende en sí mucho, pero cuando ya uno lo práctica ve que en realidad es muy fácil. (Entrevista, Estefanía, octubre 15 de 2010)

*Geogebra* se convirtió en uno de los artefactos que posibilitó la objetivación del concepto de parábola, ya que, a partir de su dinamismo y de las relaciones que podían establecer entre el experimento de los rayos de luz y las antenas parabólicas, ellos pudieron dar forma a un sistema de enlaces mentales en el que cabía el concepto de parábola. Lo anterior nos posibilitó evidenciar la tercera particularidad de los experimentos mentales.

Según Davidov (1988), a partir de estos experimentos mentales, el concepto aparece en ellos como

...la forma de la actividad mental por medio de la cual se reproduce el objeto idealizado y el sistema de sus relaciones, que en su unidad reflejan la universalidad o la esencia del movimiento del objeto material. El concepto actúa, simultáneamente como forma de reflejo del objeto material y como medio de su reproducción mental, de su estructuración, es decir, como acción mental especial. (p.126)

Así, en éstas actividades, los estudiantes pudieron reproducir mentalmente la parábola, a partir de las rectas tangentes a la curva (la cual no estaba presente en la modelación) en el punto  $P:(x,y)$ , las cuales estaban representadas por los espejos que reflejaban los rayos de luz. Posteriormente, los estudiantes establecieron las relaciones entre los elementos de la parábola, desde aquellos que permanecían constantes y los que variaban a partir de los movimientos de uno de ellos. En la siguiente figura mostramos una de las actividades que permitió a las estudiantes ver éstas relaciones, en las cuales después de realizar la construcción (primera ilustración), se movió el punto F (segunda ilustración) y luego la directriz (tercera y cuarta ilustración).



**Figura 10:** producción de la estudiante, relaciones entre los elementos de la parábola, Estefanía, julio 12 de 2010

A partir de las representaciones que los estudiantes realizaron en *Geogebra* del experimento de los rayos de luz, les propusimos la actividad “Identificando relaciones”, en la cual la intencionalidad era que los estudiantes identificaran relaciones entre los elementos de la parábola. Para ello, los estudiantes debían utilizar el modo de arrastre<sup>16</sup> del *Geogebra* y, a partir de los movimientos generados por el *software* y de las transformaciones causadas a la construcción ilustrada en la figura 4, debían expresar sus propias conclusiones. Después de que Estefanía realizó su construcción, presentada en la figura anterior, y las transformaciones mediante el modo de arrastre, le preguntamos cómo era el triángulo ACE (ver figura 4), ella expresó *“un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales. Después de moverla la figura sigue conservando dos de sus lados iguales, sin importar la dirección en que se mueva...el triángulo aumenta o disminuye su tamaño pero siempre conserva los dos lados iguales... Que sin importar hacia donde se desplace el triángulo no se deforma.”*. (Producción Estefanía, julio 12 de 2010).

A partir de esta actividad, a Estefanía le fue posible observar cómo a pesar de que se moviera cualquier elemento de la parábola, las distancias de un punto  $P:(x,y)$  de la parábola al foco y a la directriz eran iguales, de donde se formaba un triángulo isósceles.

---

<sup>16</sup> El modo de arrastre, es una característica de los software dinámicos de geometría, en nuestro caso el *Geogebra*, este posibilita la manipulación de los diferentes objetos que hacen parte de una construcción geométrica, posibilitando así la transformación continua de las figuras. Esta característica será ampliada en el capítulo III de este trabajo.

De esta manera, los objetos matemáticos representados en la pantalla del computador estaban en constante movimiento, por lo tanto estaban cambiando, se estaban transformando, pero al mismo tiempo conservaban su esencia, representada en la igualdad de los lados del triángulo. Al respecto Lenin, citado por Davidov (1988), dice “la tarea del pensamiento es abarcar la regularidad universal de la naturaleza en eterno desarrollo y movimiento” (p.129). Desde esta mirada, el pensamiento para Lenin aparece como la sucesión de fenómenos ligados y armónicos, pertenecientes a un todo. Así, para Davidov (1988) “la tarea del pensamiento es abarcar toda representación en su movimiento, es decir, expresar el conjunto de los datos sensoriales en desarrollo, y para ello es indispensable el pensamiento dialéctico”. (p.139)

Este enfoque dialéctico del pensamiento, mencionado por Davidov (1988), es precisamente una de las tesis de la lógica dialéctica, la cual propone cómo en la actividad cognoscitiva de las personas debe existir una correlación entre la representación sensorial y el pensamiento teórico, donde este último tiene como objetivo alcanzar el movimiento en su totalidad, el desarrollo psíquico de las personas, el concepto; fin que se escapa a las posibilidades de las representaciones, propias del pensamiento empírico.

Desde este punto vista, consideramos que las actividades que propusimos a los estudiantes, posibilitaron el cambio de pensamiento, donde el establecimiento de relaciones y la objetivación del concepto de parábola, no solo ocurrió en lo sensorial, en la experiencia de los estudiantes, sino también en el análisis del fenómeno, a partir de algunos usos dados a la parábola en diferentes actividades: las antenas

parabólicas, las conchas acústicas, la reflexión de los rayos de luz y como lugar geométrico, este último desde las diferentes actividades realizadas con ayuda de los *applets* y con el modo arrastre. Así, desde diferentes miradas, los estudiantes fueron estableciendo múltiples relaciones que a primera vista eran imperceptibles para ellos, que escapaban del análisis empírico.

A partir de las actividades y de las interacciones que ellas posibilitaron entre los estudiantes, la profesora y las investigadoras, fue importante para nosotras observar cómo los estudiantes identificaban características esenciales de la parábola en cada una de las diferentes actividades, además cómo las diferenciaban de otras no-esenciales. Esto fue evidente cuando Víctor, Estefanía y Carolina, al hablar de la propiedad de reflexión de la parábola basados en las modelaciones en *Geogebra* que ellos realizaron, la relacionaban con el experimento de los rayos de luz y la forma del reflector parabólico. Para nosotras, ellos encontraron algunas características que interrelacionaban estos fenómenos y les posibilitaban hablar de uno de ellos en constante relación con los otros.

De esta manera, las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* que propusimos para la objetivación del concepto de parábola, favorecieron en los estudiantes el desarrollo de habilidades sociales que les posibilitaron comprender los fenómenos del medio, específicamente el funcionamiento de las antenas parabólicas. Las actividades también viabilizaron el uso de artefactos que mediaron en cada una de sus acciones y posibilitaron el desarrollo psíquico de los estudiantes en el sentido que fueron posibles, por medio de éstas, la formación de la conciencia y procesos psíquicos tales como: procesos cognoscitivos y emociones.

Para los estudiantes, la actividad poseía un sentido y significado personal, el cual fue desencadenado por un motivo que posibilitó la objetivación del concepto de parábola en los estudiantes, y que pretendió satisfacer la necesidad de responder a la pregunta de investigación que los estudiantes se habían propuesto en cada uno de sus grupos de investigación. Desde este punto de vista, podemos ver, según Sánchez (1998), la concepción de un sujeto, como un ser dialógico, fundador de sentidos y significados, como resultado de los procesos sociales, transformador de su medio y constructor de la historia. Un sujeto que, en palabras de Freire (1997) se constituye en las relaciones, en el ser en el mundo y en el ser con otros.

Las actividades diseñadas, de manera intencional, posibilitaron a Carolina, Estefanía y Víctor realizar acciones que respondían a un objetivo ante un motivo dado: la forma de las antenas parabólicas. Así, las acciones llevaron a que desde el procedimiento de ascensión de lo abstracto a lo concreto, en el cual se hizo necesario de las abstracciones y de las generalizaciones propias del conocimiento teórico, los estudiantes pudieran concretizar el concepto de parábola, estableciendo las conexiones internas entre cada uno de los elementos de la parábola y el todo, es decir, la parábola en su conjunto.

### **Ascensión de lo abstracto a lo concreto.**

En esta segunda parte presentaremos cómo desde las particularidades del pensamiento teórico, vistas en nuestras actividades de aula como la solución de tareas cognoscitivas y la formación de nuevos conceptos, se posibilitó en los estudiantes el procedimiento de la ascensión de lo abstracto a lo concreto, y cómo



mediante este procedimiento los estudiantes fueron objetivando el concepto de parábola.

El procedimiento de ascensión de lo abstracto a lo concreto, en esta investigación, fue posible a partir de las actividades diseñadas intencionalmente, las cuales posibilitaron el proceso de objetivación del concepto de parábola en Víctor, Carolina y Estefanía. Estas actividades posibilitaron que los estudiantes, en un comienzo, establecieran relaciones generales, a partir de unas abstracciones iniciales basadas en la experiencia producida por ellos desde las diferentes actividades propuestas, a lo largo de la investigación. Las abstracciones fueron surgiendo fruto de las múltiples interacciones de los estudiantes con el objeto de conocimiento, en nuestro caso, con el concepto parábola, en dichas interacciones los artefactos fueron constituyentes en el proceso de objetivación de los estudiantes.

Así, estas abstracciones iniciales posibilitaron darle sentido y significado a las posteriores actividades (como lo dijimos en la primera parte de este capítulo); además, posibilitaron, también, que los estudiantes establecieran otras abstracciones y generalizaciones que los llevaran a deducciones y generalizaciones más particulares del concepto de parábola, es decir, a la apropiación de la esencia del objeto, al concepto. En este sentido, dice Davidov (1988)

Cuando los escolares comienzan a utilizar la abstracción y la generalización iniciales como medios para deducir y unir otras abstracciones, ellos convierten las estructuras iniciales en concepto, que fija cierta “célula” del objeto estudiado. Esta “célula” sirve posteriormente a los escolares como principio general para orientarse en toda la diversidad del material fáctico, que deben asimilar en forma conceptual por vía de la ascensión de lo abstracto a lo concreto. (p. 175)

Este procedimiento de la ascensión de lo abstracto a lo concreto, que fue posible a partir de las actividades propuestas y del papel de las investigadoras, posibilitó a los estudiantes la objetivación del concepto de parábola. Objetivación que, según Davidov (1988), se comprende como la formación del desarrollo psíquico de los estudiantes, así como la dotación de sentidos y significados por parte del estudiante; comprensión esta también propuesta por Radford (2008).

Nos proponemos, entonces, expresar, a través de diferentes episodios, el proceso de objetivación del concepto de parábola, entendiendo que la dialéctica sujeto-objeto nos propone empezar por lo abstracto. Recordemos lo que en este sentido señala Davidov (1988): “las definiciones abstractas conducen a la reproducción de lo concreto por medio del pensamiento” (p.142).

Según Davidov (1988), todo conocimiento está relacionado con procesos de abstracción. Sin estos procesos no sería posible descubrir la esencia del objeto, conocerlo a profundidad, en el sentido de dividirlo y delimitarlo en las partes esenciales de éste. Así, una de las facetas o formas del conocimiento consiste en la separación mental de las propiedades de los objetos.

Consecuentemente, en un objeto, lo concreto es la interconexión objetiva de sus partes, determinada ésta por las relaciones esenciales entre los componentes del objeto. De allí, lo concreto del conocimiento es la interconexión real en el sistema de conceptos que reproducen estructuradamente, desde su misma génesis, el contenido objetivo del objeto. Al respecto, Davidov (1988) expresa que “el pensamiento teórico es el área de los fenómenos objetivamente interrelacionados, que conforman un sistema integral, sin el cual y fuera del cual estos fenómenos sólo pueden ser objeto

de examen empírico” (p.129). Esta idea la evidenciamos cuando Estefanía, en la actividad del 8 Julio, respondiendo a algunas preguntas de una de las investigadoras expresó:

**Episodio 1:** videograbación, julio 8 de 2010

	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Cruz	¿Cuáles son los rayos de luz?
2	Estefanía	Están en amarillo, los que van de arriba abajo.
3	Cruz	Vamos a ver los rayos de luz, ¿qué pasa ahí?
4	Estefanía	[Señalando con el mouse los rayos de luz representados en la construcción geométrica] ¿no son estos? Y cuando se reflejan dan al C.
5	Cruz	Si movemos el radio de alguna de las circunferencias... movamos algunos de los espejos. [Estefanía los mueve, utilizando el modo de arrastre de Geogebra] ¿Qué pasa?
6	Estefanía	Ya no da en el punto
7	Cruz	No da en el punto, ¿cierto?, ¿entonces qué conclusión podemos sacar hasta el momento?. O conclusión no, algo que podamos deducir.
8	Estefanía	[Estefanía no responde]
9	Cruz	¿Cuál es el motivo de nuestra investigación?
10	Estefanía	[Estefanía guarda silencio]
11	Cruz	¿Ustedes hicieron preguntas de investigación relativas a qué?
12	Karen	Antenas parabólicas
13	Cruz	A las antenas parabólicas, ¿entonces qué podemos decir acá? [se guarda un poco de silencio por parte de las alumnas]
14	Estefanía	Que los rayos de luz llegan a un punto y se esparcen en la misma dirección.
15	Cruz	¿Y con la forma de la parabólica cómo podríamos relacionar la construcción?
16	Estefanía	[Señalando el foco] ¿Esto no es cómo el foco que tiene la antena parabólica ahí adelante? [representando con la mano izquierda abierta la antena y con la mano derecha representa el foco] acá está la antena y acá tiene el foquito, entonces yo digo que los rayos llegan en forma paralela [acercando las manos una a otra], chocan con el foco y ahí es que se esparcen a las antenas de las casas.
17	Cruz	Listo, dañémosle un poquito a la modelación de la antena parabólica que tenemos en el computador, ¿cómo le dañaríamos un poquito la forma?
18	Estefanía	¿A esta curva? [señala las rectas que representan los espejos]
19	Cruz	Sí.
20	Estefanía	Ummmm. El punto o laaaa...
21	Cruz	El punto, el espejo.
22	Estefanía	[Estefanía mueve el rayo]
23	Cruz	¿Qué pasa?
24	Estefanía	Ya los rayos no llegan al foco, no es la forma como esparcía

- antes, porque ya los rayos se pierden [*sonríe con asombro, como aquellos momentos que causan felicidad por haber descubierto algo*]
- 25 Cruz [*Percibe la expresión de la estudiante y pregunta*] ¿Estás descubriendo en este momento algo?
- 26 Estefanía [*sigue sonriendo*] Sí, porque mira que la forma es la que hace que lleguen a un punto y se abran otra vez así [*abre las manos representando la situación del modelo*], mientras que así [*gesticula con las manos*] el rayo como que se pierde, o sea que la forma es la que hace que como que se esparzan [*sigue asombrada*]
- 27 Cruz Bueno, gracias.

En este episodio pudimos evidenciar la ascensión de lo abstracto a lo concreto, por parte de Estefanía, puesto que ella, a partir de las relaciones de su representación en *Geogebra*, con otras actividades anteriores (el experimento de los rayos de luz y la formulación de su pregunta de investigación, fruto a su vez de la visita a las conchas acústicas del Parque de los Deseos), pudo hacer deducciones, abstracciones y generalizaciones particulares del objeto en su modelación. Un ejemplo de ello es cuando Estefanía en (24 y 26) se asombra al descubrir que al mover uno de los elementos de su construcción, la propiedad de reflexión ya no se cumple y que por lo tanto la disposición de los espejos debe ser una parábola: “la forma es la que hace que lleguen a un punto”.

Caso similar ocurrió con Víctor cuando expresó

Si esto tuviera otra forma [moviendo una de las rectas, que para él representan rayos de luz] la luz no reflejaría directamente al foco principal, porque, como este ángulo debe ser igual a este [mostrando los ángulos de incidencia y reflexión]. Si son diferentes, la luz va a reflejar en un punto diferente del foco principal. De ahí la simple deducción de que las antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica. Igual, una forma elíptica sí sirve para los espejos pero no para una parabólica. Las antenas elípticas sirven para una antena de foco desplazado. En el caso de nosotros, la forma debe ser una parábola, para que en cualquier punto donde choque la luz del laser la onda electromagnética cumpla la ley de reflexión y llegue hasta el foco principal.

Vemos como la objetivación del concepto de parábola, por parte de Víctor y Estefanía, fue un proceso que los fue llevando, a partir del uso de diferentes artefactos, a dotar de sentido y significado el concepto de parábola desde las abstracciones y generalizaciones producidas por ellos. Abstracciones y generalizaciones que fueron ampliándose y (re)significándose a través de las diferentes actividades. Estas actividades propiciaron interacciones de los estudiantes con sus compañeros de equipo, investigadoras, profesora, conocimiento matemático y compañeros de clase.

De esta manera, la objetivación dada por las continuas (re)significaciones del concepto de parábola, a partir de las abstracciones y generalizaciones, les permitió a los estudiantes identificar características propias del objeto, que no eran perceptibles bajo el pensamiento empírico, es decir, desde su observación inmediata. Estas características son llamadas por Davidov (1988) la esencia, que según él

...es la conexión interna que, como fuente única, como base genética, determina todas las otras especificidades particulares del todo. Se trata de enlaces objetivos, los que en su desmembración y manifestación aseguran la unidad de los aspectos del todo, es decir, dan al objeto un carácter concreto (p.147).

Desde esta perspectiva, el concepto puede ser tomado, según Davidov (1988) como: “La acción de construcción y transformación del objeto mental constituye el acto de su comprensión y explicación, el descubrimiento de su esencia” (p.126). De ahí que para el autor, “expresar el objeto en forma de concepto significa comprender su esencia”. (p.126)

Cuando Víctor y Estefanía establecieron relaciones en cuanto a la forma que debía tener la superficie de los reflectores parabólicos para que se produjera la transmisión de ondas, o a la disposición de los espejos para que se produjera la reflexión de luz

con su representación en *Geogebra*, evidenciaron, de forma implícita, unas conceptualizaciones acerca el concepto de parábola producidas, a su vez, por su apropiación de la esencia del objeto.

En la objetivación del concepto de parábola, la palabra, según Vigotsky (1995), juega un papel central en la formación de los conceptos. Por ejemplo, cuando Víctor dijo “*de ahí la simple deducción de que las antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica*”, nos mostró el sentido de la afirmación de Vigotsky (1995) cuando este autor plantea que:

Los verdaderos conceptos son imposibles sin palabras, y el pensamiento por conceptos no existe más allá del pensamiento verbal. Por esta razón, el factor principal en la formación de los conceptos, y su causa generativa, es un uso específico de las palabras como instrumentos funcionales. (p.125)

Así, las palabras expresadas por Víctor, son un instrumento que supera la inmediatez, en el sentido de que dichas palabras son fruto de los sentidos y significados producidos por él, a partir de las relaciones, deducciones, abstracciones y generalizaciones, social e individualmente elaboradas en cada una de las actividades propuestas. De la misma forma, para Estefanía las palabras le permitieron materializar sus sentidos y significados construidos hasta ese momento. Sentidos y significados acompañados de gestos y expresiones corporales que en el momento ella utilizó, también, como instrumento para ayudar a sus palabras a concretizar el concepto de parábola.

Estefanía y Víctor, antes de ese proceso de concretización, producto de abstracciones y generalizaciones, elaboradas a partir de interconexiones entre los elementos del objeto, también pasaron por lo abstracto, en el sentido de Davidov (1988). Es decir, ellos establecieron relaciones entre algunos de los componentes del objeto (rectas

paralelas, foco, tangentes, ángulos, equidistancias). Aunque dichas relaciones, en primera instancia, los estudiantes las hicieron en forma fragmentada, es decir, sin interconexiones con otros elementos del objeto —característica propia de lo abstracto— ellos fueron ampliando dichas relaciones, lo cual les permitió ir concretizando la parábola.

Desde lo anterior, pensamos que ambos conocimientos (abstracto y concreto) son importantes al momento de pensar en el objeto, para nuestro caso el concepto de parábola. Pues vemos los dos tipos de conocimientos necesarios y complementarios uno a otro, en el sentido de pensar que lo abstracto se va convirtiendo en lo concreto de forma paulatina. En otras palabras: lo abstracto no se aleja, se va transformando en otro tipo de verdad. Esta idea es explicitada por Davidov (1988) así:

Lo abstracto y lo concreto son momentos de la desmembración del propio objeto, de la realidad misma, reflejada en la conciencia y por ello son derivados de la actividad mental. Lenin señaló “la naturaleza es a la vez concreto y abstracta”. Lo abstracto aparece en permanente cambio. (p.144)

De esta manera, podemos pensar en la ascensión de lo abstracto a lo concreto como camino o procedimiento para pensar la trayectoria del surgimiento del concepto de parábola, de modo que se vea reflejada esa disociación objetiva del objeto investigado (la parábola) y la unidad de cada una de sus partes; presuponiendo ello mirar o analizar el movimiento inicial de lo abstracto (dado desde la contemplación, desde lo sensorial) a lo concreto.

En esta dirección, entendemos que lo abstracto no es lo contrario de lo concreto. Consideramos lo abstracto como una etapa en el movimiento hacia lo concreto; en

otras palabras, lo abstracto es lo concreto sin revelarse, sin desplegarse, sin desarrollarse aún.

De ahí que sea necesario distinguir lo abstracto como objeto que se estudia, como punto de partida de nuestra investigación (lo sensible) y lo concreto como punto de llegada, como concepto científico del objeto (lo concreto conceptual). Así, Carolina, Víctor y Estefanía, cuando formularon sus preguntas de investigación al interior de sus equipos de investigación, estaban haciendo unas primeras abstracciones, a partir de las experiencias que habían tenido en las conchas acústicas del Parque de los Deseos. Abstracciones hechas desde lo sensorial, desde lo observable, desde lo abstracto. De esta forma, las preguntas que de allí les surgieron hacían relación a la forma y al funcionamiento de las antenas. Las preguntas se presentan en la siguiente tabla

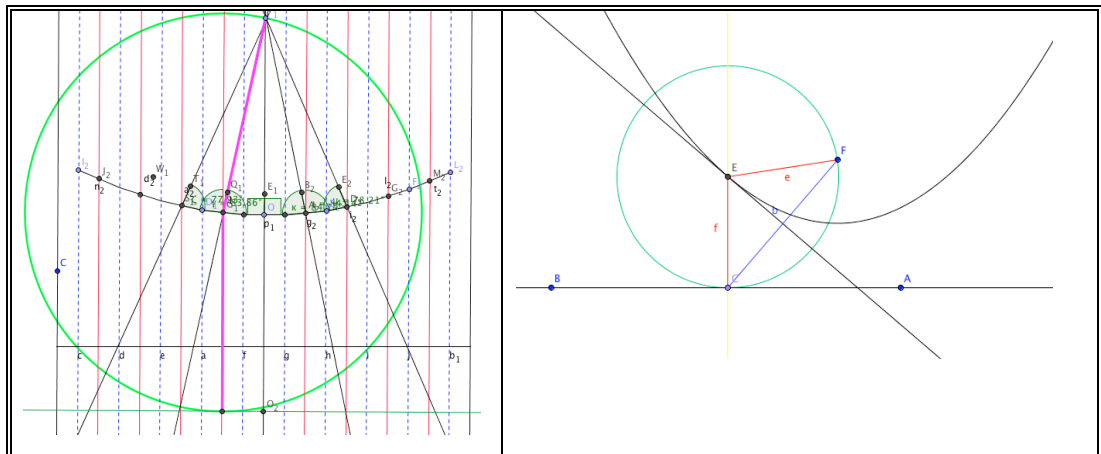
<b>Pregunta del grupo de Carolina</b>	¿La posición material y la forma de una parabólica acústica influye en sus diversas características para la dispersión de las ondas?
<b>Pregunta del grupo de Estefanía</b>	¿Es necesario pensar en la forma ovalada de una antena parabólica o debe complementarse con algo más?
<b>Pregunta del grupo de Víctor</b>	¿La forma como viajan las ondas de una concha a otra es igual a la forma como se transmiten las ondas de una antena parabólica a otra?

*Tabla 15: preguntas de investigación de los grupos de Carolina, Estefanía y Víctor, mayo 10 de 2010*

Estas preguntas, realizadas por Víctor, Carolina y Estefanía, en compañía de sus grupos de investigación, fueron el producto de sus reflexiones desde el inicio de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*. Las respuestas a tales preguntas se convirtieron, para ellos, en una necesidad que pretendían responder. A partir de allí, las actividades que propusimos estuvieron encaminadas a posibilitar en los



estudiantes la creación de sentidos y significados que los ayudaran a dar respuestas a dichas preguntas, a la vez que los ayudara a objetivar el concepto de parábola. Lo anterior fue posible evidenciarlo en las actividades que realizó Víctor en los días 8 y 12 de julio de 2010, las cuales ilustraremos a continuación.



**Figura 11:** producción del estudiante, Víctor. Construcción de la izquierda actividad de julio 8 de 2010 y construcción de la derecha actividad de julio 12 de 2010.

En la actividad del 8 de julio preguntamos a Víctor, en el modelo de los rayos de luz realizado mediante el *software Geogebra*, ¿qué relación encuentras entre las distancias comprendidas, entre el punto donde choca la luz y el punto  $F$ , con la distancia entre el punto donde choca la luz y el punto intercepto  $D_2$  sobre la recta  $e_2$ ? (En la figura de la izquierda, estos segmentos están representados de color morado). Víctor, para dar respuesta a esta pregunta, construyó la circunferencia que aparece en la figura 10, y al referirse a estas distancias expresó “*la relación es que tienen la misma distancia, por ser los radios de una circunferencia*”.

En la segunda actividad, en vista de que utilizaron la circunferencia como construcción auxiliar para mostrar la igualdad de los segmentos, pensamos en hacerle la misma pregunta, a partir de la igualdad de los lados de un triángulo. Así, después de que Víctor realizó la construcción que se ilustra al lado derecho de la figura 10, le preguntamos ¿qué clase de triángulo se formó?, utilizando el modo de arrastre para el punto  $E$ , ¿qué pasa con la figura anterior? A esta pregunta Víctor respondió: “*se formó un triángulo isósceles y al arrastrar el punto  $F$  el triángulo no abandona su forma*”. Igualmente, a la misma pregunta, Estefanía respondió en forma similar diciendo: “*un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales. Después de moverlo la figura sigue conservando dos de sus lados iguales, sin importar la dirección en la que se mueva*”. A partir de estas relaciones que Víctor y Estefanía hicieron, se pudo ver, implícitamente, la aparición del “lugar geométrico”, específicamente la definición de la parábola desde las equidistancias mencionadas por los estudiantes.

Igualmente, en este proceso de objetivación, hacia el concepto de parábola, los estudiantes establecieron otras clases de relaciones entre los elementos de la parábola, relaciones que fueron surgiendo básicamente a medida que hacían uso del *software Geogebra* para modelar las experiencias vividas, mediante el experimento de los rayos de luz. La utilización de diferentes artefactos les fue llevando a nuevas conjeturas, las cuales, a su vez, los llevaron a responder sus respectivas preguntas de investigación.

En los siguientes episodios mostraremos cómo, en el caso de Víctor, se hizo explícita la objetivación del concepto de parábola con el uso de los diferentes artefactos presentados durante dichas actividades.

### Episodio 2: videograbación, Mayo 25 de 2010

	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Cruz	¿Estas rectas que significan?
2	Víctor	Que ahí ponemos el espejo
3	Cruz	¿Y entonces?
4	Víctor	Que ponemos el láser y no se va a ver reflejado en otra parte. La intención del experimento es que poniendo el láser en posición paralela a la recta que pasa al punto C y el vértice de la parábola, se va a reflejar en el punto C.
5	Cruz	Vamos a representar el experimento con un lápiz, vamos a seguir el rayo de luz con un lápiz. ¿Qué pasa con el rayo de luz cuando llega al espejo?
6	Cruz	¿En qué posición tiene que estar el espejo bordeando la gráfica para que los rayos de luz se reflejen en el espejo?
7	Víctor	Tiene que estar formando un ángulo de $90^\circ$

### Episodio 3: videograbación, Julio 8 de 2010

	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Cruz	Víctor, ¿qué te puede significar la modelación que estamos haciendo en el momento?
2	Víctor	Me puede significar muchas cosas [ <i>sonríe suavemente en forma de jajaja</i> ]
3	Víctor	[ <i>Señalando la construcción, específicamente la curva</i> ] si, por ejemplo, esta figura que se forma acá es la forma de una antena, cierto?, y el foco con el que se unen estas líneas es el receptor de la antena; y se me parece a un reloj de arena, solo que le falta la parte de arriba.
4	Cruz	Bueno, entonces ¿qué relación podemos encontrar en esa antena, en el receptor de la antena?, ¿cómo podríamos describirlo acá en el modelo?
5	Víctor	A ver, cómo lo podemos describir. No, no, no. O sea, viéndolo es que yo lo veo así es que [ <i>señala todo el movimiento del rayo, todo el funcionamiento del modelo</i> ] aquí este rayo se refleja a este foco, así mismo se reflejan las señales de la antena ¿cierto?. Por ejemplo las señales que llegan a este punto se van a reflejar directamente acá, que es lo que hacemos en <i>Geogebra</i> , que estamos representando el recorrido de estas mismas ondas [ <i>hace el recorrido mostrando con sus manos en la pantalla del computador</i> ]
6	Cruz	Víctor, y si movemos la antena, le cambiamos la forma, ¿qué pasaría?
7	Víctor	[ <i>sin hacer movimiento alguno en la pantalla, contesta de inmediato y</i>

- de forma segura] si le cambiamos la forma creo que... ].
- 8 Cruz Si le cambiamos la forma, si le movemos alguno de los espejos, ¿qué pasaría?
- 9 Víctor [De inmediato mueve el radio de una de las circunferencias y responde de inmediato sin vacilaciones] que la onda ya no va a llegar directamente al foco sino que se va a desviar para otro punto. En conclusión: una antena debe ser de esta forma [mostrando la curva con una de las manos] para que la señal llegue al receptor [señala el foco]
- 10 Cruz Y si continuamos agrandando la forma, ¿a qué figura en matemática se nos parecería?
- 11 Víctor Si continuamos agrandando la forma... Sí, sé de qué forma es, pero no recuerdo el nombre

En (4) del episodio 2 y en (5) del episodio 3, vemos como Víctor hizo conjeturas según los usos dados a los artefactos, y a los sentidos y significados producidos por él desde las mismas actividades, correlacionándolas con su experiencia en actividades anteriores como fue la visita al Parque de los Deseos. Así mismo, consideramos que fueron las actividades y la interrelación con sus compañeros de equipo quienes le posibilitaron a Víctor hacer abstracciones y generalizaciones que le posibilitaron pasar de lo abstracto a lo concreto.

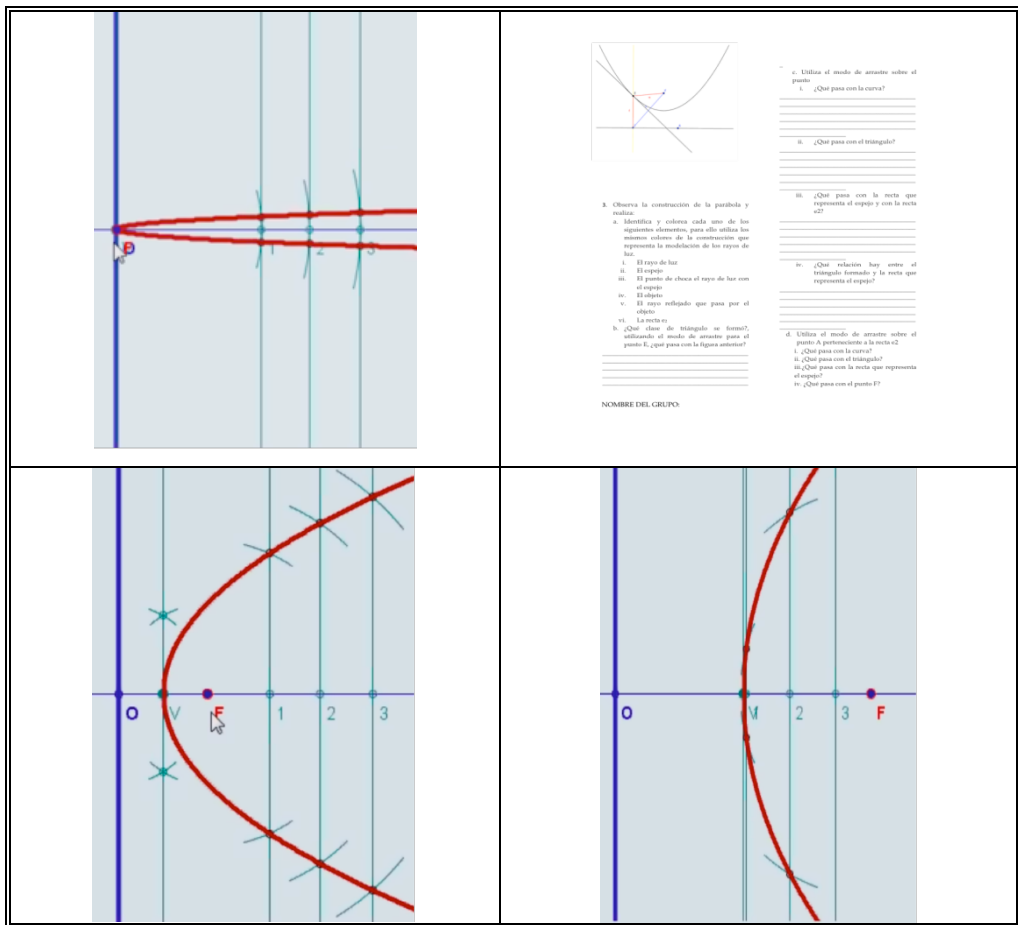
En (4) del episodio 2, vemos que los artefactos utilizados, como los rayos de luz y la curva parabólica dada, le posibilitaron a Víctor reflexionar acerca de la posición de los espejos para que se produjese la reflexión de la luz; mientras que las acciones llevadas a con el *software Geogebra*, en el episodio 3, le posibilitaron establecer otras clases de relaciones, además de las establecidas en el episodio 2; por ejemplo, la de determinar la forma que debía tomar la curva: no pudiendo ser ésta una curva cualquiera, tenía que tener forma parábola; tal como el mismo lo expresó.

La utilización de diferentes artefactos, le permitió a Víctor, realizar diferentes abstracciones, a través de cada uno de los usos dados a los artefactos. De igual manera, le permitió la realización de generalizaciones, a partir del establecimiento de relaciones, en cada una de las actividades realizadas, que le llevó a ir mas allá de la mera identificación de características aisladas, ampliando y (re)descubriendo la esencia del objeto a partir de las interrelaciones hechas por él desde el inicio de la investigación. Desde lo anterior, vemos como las generalizaciones hechas por Víctor van en el sentido de Davidov (1988), ya que para él “Hacer una generalización sustancial significa descubrir cierta sujeción a la ley, una interrelación necesaria de los fenómenos particulares y singulares con la base general de cierto todo, descubrir la ley de formación de la unidad interna de éste” (p.152).

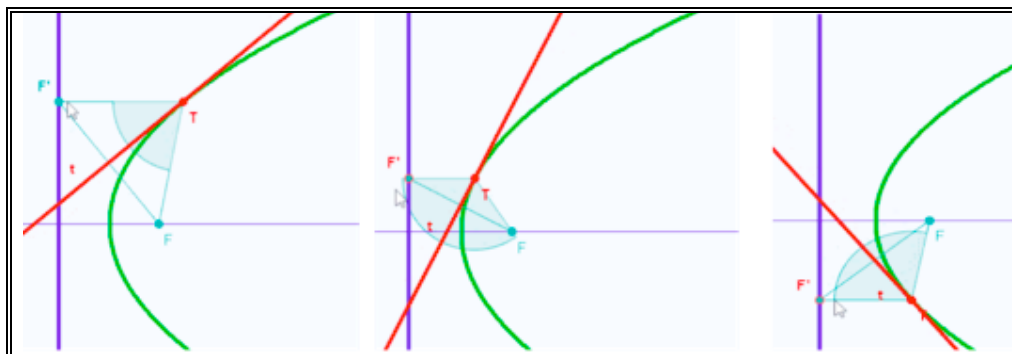
Así mismo, Víctor nos mostró cómo el proceso de objetivación del concepto de parábola le fue posible, en la medida en que iba participando de las diferentes actividades realizadas en la investigación. De esta manera, para Víctor, las actividades estaban relacionadas entre sí. En cada una de las actividades, Víctor iba estableciendo relaciones entre los elementos de la parábola, que posteriormente, le permitían generar otras relaciones o ampliar las que ya había establecido. En este sentido Caraça (1984) manifiesta, que el mundo está en constante evolución, que en todo momento se transforma, que todo fluye, que “todas las cosas están relacionadas unas con las otras” (p. 109, traducción nuestra).

Teniendo en cuenta el encadenamiento de actividades que hemos mencionado anteriormente, propusimos a los estudiantes una actividad final con *applets*, en los cuales se representaban algunas de las actividades realizadas con anterioridad, como

el experimento de los rayos de luz y su modelación en *Geogebra*. La intención, en dicha actividad, fue que los estudiantes (re)significaran las relaciones que habían hecho anteriormente entre los elementos de la parábola. A continuación ilustramos dos de los *applets* propuestos en la actividad.



**Figura 5:** actividad video parábola-1, secuencia de algunos movimientos realizados por Carolina al applet, agosto 30 de 2010.



**Figura 6:** actividad video parábola 3, secuencia de algunos de los movimientos realizadas por Carolina al applet, agosto 30 de 2010.

Estos *applets*, que ilustramos en las figuras 5 y 6, posibilitaron que los estudiantes establecieran relaciones entre los elementos de la parábola, desde su definición como lugar geométrico. En la figura 6, por ejemplo, los estudiantes evidenciaron cómo los segmentos  $\boxed{\times}$  y  $\overline{PF}$  eran iguales, y cómo, inclusive, después del movimiento generado por el modo de arrastre, conservaban su igualdad. Los estudiantes pudieron, también, observar cómo el ángulo formado entre  $\boxed{\times}$  y la directriz era recto; e igual que en el caso de los segmentos, este ángulo se conservaba recto en cualquier posición del punto  $P$ . Esto lo expresó Carolina cuando dijo “*mientras el punto  $P$  recorre la parábola estos dos segmentos miden igual y tienen igual ángulo...forman un ángulo de  $90^\circ$* ” (Producción de la estudiante, Carolina, agosto 30 de 2010).

El *applet* de la figura 6 también posibilitó que los estudiantes vieran la relación entre el vértice, el foco y el punto de intersección entre la directriz y el eje focal. Esto fue visible cuando se les preguntó a los estudiantes acerca de la relación entre los puntos que se encuentran en el eje focal; tanto Carolina como Víctor expresaron esta

relación en términos de equidistancias. Carolina, por ejemplo, dijo: *“los 3 puntos se encuentran a igual distancia uno de otro; uno describe el punto medio de la parábola, el siguiente es el Foco y el primero es el punto que dibuja la recta y ángulo que produce el espejo”*. En el mismo sentido Víctor dijo: *“representan la distancia de la directriz, la parábola y el Foco con igual distancia”*.

En la Figura 7 los estudiantes pudieron identificar como la recta roja, que representaba para ellos los espejos en la modelación de los rayos de luz, era la mediatriz del segmento  $\overline{FF'}$ ; e identificaron, también, como ésta siempre pasaba por el punto  $T$  perteneciente a la parábola. Esto fue evidente cuando Carolina expresó: *“siempre va unida a la parábola por un punto  $T$ ”*. Víctor al hablar de la recta roja y del segmento  $\overline{FF'}$  dijo: *“son perpendiculares”*. Estas relaciones ya habían sido vistas por ellos en la actividad de modelación de los rayos de luz, cuando construyeron una circunferencia que les permitió mostrar la igualdad de los segmentos, situación ilustrada en la figura 5. En esta actividad los estudiantes tuvieron la oportunidad de ver la perpendicularidad entre el segmento  $\overline{FF'}$  y la recta roja, la cual es la tangente a la parábola en el punto  $T$ .

Consideramos que esta actividad permitió, en los estudiantes, la ascensión de lo abstracto a lo concreto, en el sentido que les permitió ver otras relaciones particulares. Estas relaciones los llevarían a hacer abstracciones y generalizaciones referentes a la parábola, desde su definición como lugar geométrico, como lo fue la identificación de la perpendicularidad de la mediatriz con el segmento  $\overline{FF'}$  y la recta tangente a la parábola en el punto  $P$ .



De esta manera, la ascensión de lo abstracto a lo concreto, propuesto por Davidov (1988), en los protagonistas de nuestra investigación, se fue posibilitando en cada acercamiento de los sujetos al objeto, a través de las abstracciones establecidas durante cada actividad. Las abstracciones dependieron, a su vez, de los diferentes artefactos que estuvieron presentes en cada una de las actividades propuestas; dependieron también de las acciones ejercidas sobre los artefactos por los estudiantes e investigadoras; dependieron también de las relaciones entre las diferentes actividades, relaciones que se fueron tejiendo a lo largo del proceso investigativo y que les permitió, a los estudiantes, ir objetivando el concepto de parábola.

## **CAPÍTULO III**

# **LOS ARTEFACTOS COMO CONSTITUYENTES DEL SUJETO EN EL PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA**

### **A modo de presentación**

En la primera parte de este capítulo mostraremos, a partir de los diferentes episodios, cómo los artefactos culturales, en el sentido sugerido por Radford (2008), se convierten en constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola. En la segunda parte, nos centraremos en el *software Geogebra* como constituyente en la objetivación de dicho concepto. En la tercera parte, especificamos el papel de los instrumentos psicológicos, como artefactos, en la perspectiva de Vygotski (1978; 1981; 1995), y, finalmente, daremos unas consideraciones generales sobre los artefactos.

Antes de centrarnos en los diferentes episodios, se nos hace necesario explicitar la importancia que desde *la teoría de la actividad* se le ha dado al carácter mediatizado del pensamiento. En esta línea y según Vygotski (1995), Rabardel (1995), Balachef y Kaput (1996), Moreno (2002a; 2002b) y Radford (2008) el pensamiento es mediatizado a través de herramientas-instrumentos-artefactos.

Vygotski (1978; 1995) sugiere que los procesos mentales superiores se consideran funciones de la actividad mediada. Propone tres clases principales de mediadores: instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y la mediación de otros seres humanos, en nuestro caso, las interrelaciones generadas entre los estudiantes del grado once y, de éstos con las investigadoras. Según Kozulin (2000), Vygotski no considera los instrumentos materiales como utensilios individuales; para él presuponen un empleo colectivo, una comunicación interpersonal y una representación simbólica; los instrumentos materiales se dirigen a los objetos de la naturaleza. De otra parte, los instrumentos psicológicos median entre los propios procesos psicológicos de los seres humanos transformándolos en funciones mentales superiores. Para Vygotski (1995), la mediación del otro descansa en la idea de que el desarrollo cultural de las personas es primero a nivel social (intersicológico) y luego a nivel individual (intrasicológico); para él la otra persona es mediadora de significados.

Así, este autor nos muestra cómo la actividad humana es mediada por instrumentos psicológicos y materiales. Los primeros asociados con el sistema de signos, y los segundos son los que orientan o posibilitan las acciones materiales sobre el mundo externo. Para él, ambos instrumentos, desde una perspectiva psicológica, pueden ser incluidos dentro de la misma categoría. Así, la analogía entre signo y herramienta descansa en la función mediadora que caracteriza a ambos.

Para Vygotski (1995), hablar de herramienta es equiparable a hablar de instrumento. Rabardel (1995), por su parte, propone ampliar esta opinión y considerar el instrumento como una entidad mixta que tiene a la vez el sujeto y el artefacto. El

instrumento incluye, en este sentido, un artefacto material o simbólico producido por el usuario o por otros sujetos, y uno o más esquemas de utilización asociados a la construcción propia.

Autores como Balacheff y Kaput (1996) afirman que las herramientas han servido al hombre como instrumentos de mediación. Según estos autores, las herramientas han sido desarrolladas en distintos medios culturales y en diversos periodos históricos, convirtiéndose en parte integral de la actividad humana. En la misma línea, Moreno (2002a) expresa que el ser humano, a lo largo de su historia, ha construido herramientas con propósitos específicos, las cuales le han posibilitado fortalecer mecanismos de adaptación al mundo exterior y modificar sus patrones mentales o estructuras cognitivas.

Moreno (2002b), para referirse a dichas adaptaciones o modificaciones de las estructuras cognitivas, hace diferencia entre herramienta e instrumento. Este autor concibe a la herramienta como amplificadora, entendiendo por ésta una forma de ver aumentado aquello que no podría ser visto a simple vista; y concibe al instrumento como un reorganizador cognitivo. Así, la herramienta no cambia la estructura del objeto de la visión de quien la usa, mientras que el instrumento posibilita ver aspectos que no eran posibles de observar o ver con la herramienta, posibilitando acceder a conocimientos nuevos. Según el autor, lo que le posibilita al usuario hacer de una herramienta un instrumento es el modo de uso de la misma; en nuestro caso, *Geogebra* actuó inicialmente como una herramienta, pero la manipulación y la experimentación, por parte del estudiante, de los objetos que aparecen en pantalla por medio del modo de arrastre, fue lo que le posibilitó paulatinamente convertir dicha

herramienta en instrumento, en la medida en que el estudiante iba identificando invariantes entre los elementos constitutivos de la parábola, realizó abstracciones y generalizaciones que le posibilitarían la objetivación del concepto de parábola.

Con relación a los procesos de amplificación y reorganización posibilitados por las herramientas y los instrumentos, Moreno (2002b) afirma que los dos están presentes en un mismo proceso. El proceso de amplificación se experimenta en un primer momento; situación que ratifica el autor al expresar que primero se debe dar una adaptación o familiarización con la herramienta, de modo que posibilite generar cambios en los patrones mentales de quien la usa, convirtiéndose así en un instrumento. El paso de la herramienta hacia el instrumento no es un proceso automático, se requiere de tiempo y uso sostenido de la herramienta.

El paso del proceso de amplificación al de reorganización ocurre, según Moreno (2002b) por los esquemas de uso. Este proceso es llamado por Rabardel (1995) como génesis instrumental, el cual es el resultado de un doble proceso: la instrumentalización y la instrumentación. Los procesos de instrumentalización se dirigen hacia el artefacto, y los procesos de instrumentación se refieren a la aparición y a la evolución de los esquemas de uso y de acción. Desde este punto de vista, podría decirse que es en la forma de uso del artefacto que el individuo convierte el artefacto en instrumento, a partir de una actividad específica.

Radford (2008) habla de los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en el sentido de Vygotski; es decir, desde el papel que juegan éstos, en la realización de la práctica social, lo que es conocido como el carácter mediatizado del pensamiento. Según este autor, “los artefactos no son simplemente ayudas para

pensar, ni simples amplificadores, sino más bien partes constitutivas y consustanciales del pensamiento. Pensamos con y a través de artefactos culturales”. (Radford, 2008, p. 218)

En este estudio no es nuestro interés centrarnos en el establecimiento de las diferencias entre herramienta-instrumento-artefacto, o en el proceso del paso de uno a otro. En esta investigación estamos asumiendo la idea de artefacto propuesta por Radford (2006; 2008), en el sentido de considerar los artefactos como constituyentes del pensamiento. Para nosotras, la idea de constituyentes lleva implícita la idea de mediación propuesta por Vygotski (1995), como también la constitución del ser en unión con las interrelaciones con el otro. Así, en adelante, hablaremos de artefacto como constituyente, lo cual nos posibilitará hablar no sólo en el sentido de la mediación, sino también, en cómo el uso del artefacto posibilita al estudiante constituirse en la interacción con el otro. De esta manera, el estudiante es transformado, y a su vez, transforma la realidad en el uso de artefactos.

De esta forma, Radford (2008), nos sugiere que la clase de matemáticas, debería convertirse en un espacio que posibilite al sujeto su constitución como ser social, un espacio que conlleve la interacción con el otro, en donde el sujeto, en la actividad misma, aprenda a saber con el otro. Para Radford (2008), “aprender matemáticas no es simplemente aprender a hacer las matemáticas (resolver problemas), sino más bien es aprender a ser en matemáticas”. (p.229, traducción nuestra)

### Artefactos como constituyentes del sujeto

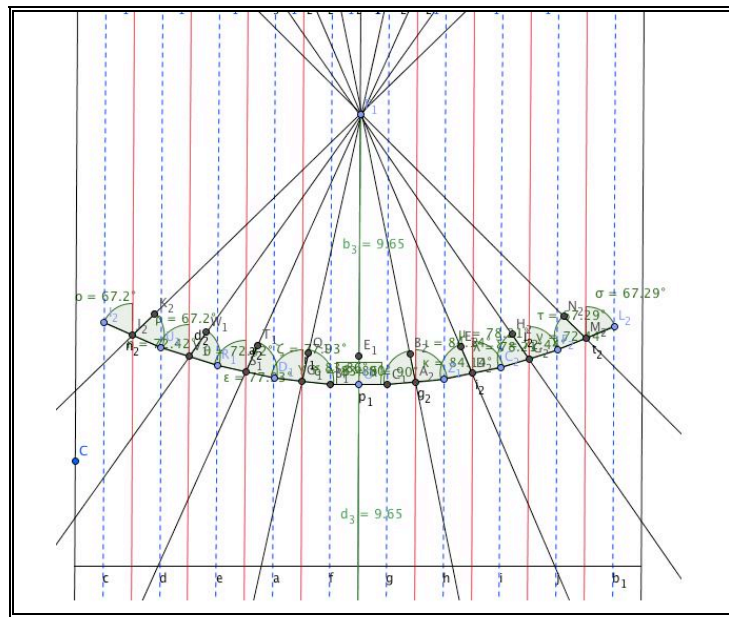
El siguiente episodio muestra a Víctor acompañado de sus compañeros de equipo de investigación —“Jóvenes Pensantes Investigadores (JPI)”— compartiendo los resultados de su proceso investigativo con sus compañeros de clase, su profesora, las investigadoras, y los invitados.

En el episodio, Víctor explicó una actividad realizada por él con el *software Geogebra*, en la cual se modeló el “experimento con rayos de luz”, cuya intencionalidad fue identificar la propiedad de reflexión de la luz utilizando espejos planos. Es importante recordar que, previa a esta actividad, los estudiantes visitaron las conchas acústicas del Parque de los Deseos de la ciudad de Medellín; en esta actividad la intencionalidad fue identificar algunos de los elementos de una parabólica y su funcionamiento.

#### Episodio 4: videograbación, septiembre 14 de 2010

<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1 Víctor	<p>Les voy a dar un breve recuento [<i>mostrando a su vez la imagen de la modelación de los rayos de luz en Geogebra que él realizó (figura 11)</i>]</p> <p>Les voy a explicar qué significan todas estas rayas [<i>señalando las rectas paralelas</i>]. Entre todas esas rayas hay unas rojas que representan el rayo, por ejemplo un rayo laser, lanzadas desde un punto de arriba, quiere decir que la luz llega hasta este punto [<i>señala los segmentos de la línea tangente a la parábola</i>]. Según la ley de reflexión, el ángulo formado en la parábola y el que se refleja en la parábola debe ser el mismo.</p> <p>Esta línea [<i>muestra las rectas rojas</i>] representa,..O sea, cuando la luz llega a este punto en la parábola y va a llegar hasta este punto [<i>señala el foco</i>].</p> <p>En una antena parabólica lo podemos interpretar como la onda electromagnética que llega hasta este punto [<i>señala donde choca la onda en la parábola</i>] y se concentra hasta el foco principal.</p> <p>Todas estas [<i>mostrando el resto de las rectas</i>] representan la forma</p>

- como se va a reflejar también la luz.
- 2 Sandra Si la figura que tú muestras en el momento tuviera otra forma, ¿también se reflejaría?
- 3 Víctor Si esto tuviera otra forma [moviendo uno de las rectas, que para él representan rayos de luz] la luz no reflejaría directamente al foco principal, porque como este ángulo debe ser igual a este [mostrando los ángulos de incidencia y reflexión], si son diferentes la luz va a reflejar en un punto diferente del foco principal. De ahí la simple deducción de que las antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica. Igual, una forma elíptica sí sirve para los espejos pero no para una parabólica, las antenas elípticas sirven para una antena de foco desplazado. En el caso de nosotros la forma debe ser una parábola, para que en cualquier punto donde choque la luz del laser, la onda electromagnética cumpla la ley de reflexión y llegue hasta el foco principal.



**Figura 12:** producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, Mayo 10 de 2010

La explicación, por parte de Víctor a sus compañeros (1) mostró como el estudiante relacionó las actividades hechas anteriormente como la visita a las conchas acústicas, el experimento con los rayos de luz y la modelación del experimento en *Geogebra*. Estas relaciones hechas por Víctor, le posibilitaron realizar abstracciones de la



propiedad de reflexión desde diferentes actividades, pero al mismo tiempo le posibilitaron relacionar estas abstracciones e identificar las características comunes.

Para Víctor, las conchas acústicas, las antenas parabólicas, los espejos y los láser, fueron artefactos que mediaron y le posibilitaron dar sentido y significado a cada uno de los elementos de su construcción realizada en *Geogebra*. Por ejemplo, cuando Víctor dice en (1) *“entre todas esas rayas hay unas rojas que representan el rayo, por ejemplo un rayo laser... en una antena parabólica lo podemos interpretar como la onda electromagnética que llega hasta este punto... todas estas [mostrando el resto de las rectas] representan la forma como se va a reflejar también la luz”*.

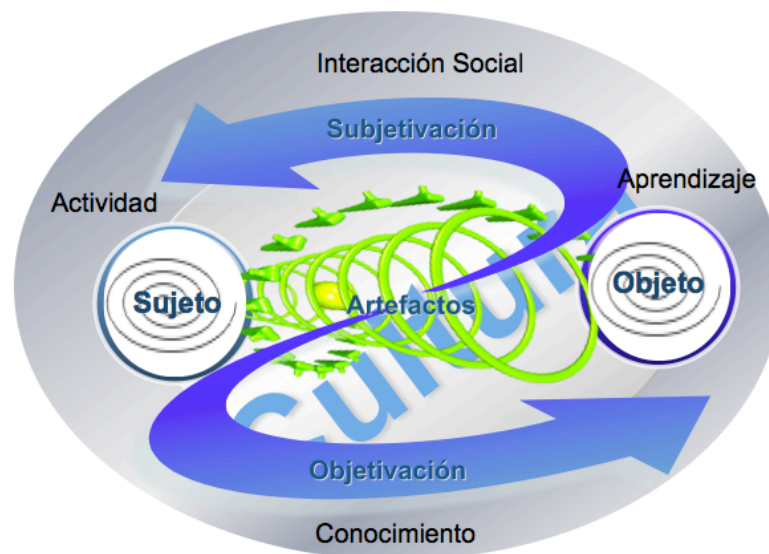
Así, concordamos con Radford (2008) cuando se refiere a la naturaleza mediada del pensamiento ya que, según él, citando a Geertz, el pensamiento no debe ser visto como una actividad meramente intracerebral, pues “el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales para su propio razonamiento; y aquellos recursos son, consecuentemente, no adjuntos<sup>17</sup>, pero sí constituyentes, de la actividad *mental*”. (Radford, 2008 p.217)

Los recursos culturales, como no adjuntos pero sí constituyentes de la actividad mental, son tomados por Radford (2008) en el sentido de que “los artefactos no son simplemente ayudas para pensar, ni simples amplificadores, sino más bien partes constitutivas y consustanciales del pensamiento. Pensamos con y a través de artefactos culturales”. (Radford, 2008, p. 218)

---

<sup>17</sup> Al hablar de recursos culturales como “no adjuntos”, estamos entendiendo éstos, mas allá de ser simples medios o ayudas para pensar.

Al considerar los artefactos como constituyentes de la actividad mental, se está pensando en los artefactos en una nueva dimensión, diferente a la de considerarlos solamente como mediadores en la relación sujeto-objeto. Así, los artefactos se tornan como constituyentes del pensamiento en la dialéctica sujeto-objeto, ya que en esas interacciones el sujeto transforma al objeto y el sujeto se transforma a su vez. En cada acercamiento entre el sujeto y el objeto se produce una reconstitución de ambos, reconstitución representada por nosotras en la figura 12 en forma de espiral. Lo anterior es expresado por Radford (2008) el proceso de objetivación y subjetivación.



**Figura 13:** proceso de objetivación y subjetivación.

En el gráfico ilustramos, desde nuestras significaciones, el proceso de objetivación y subjetivación propuesto por Radford (2008). Para él

La objetivación es más que la conexión epistemológica clásica de los dos polos, sujeto y objeto: es en realidad un proceso transformador y creativo entre estos dos polos, donde, en el curso del aprendizaje, el sujeto objetiva conocimientos culturales y, al hacerlo, se ve objetivado en un movimiento reflexivo que se puede llamar subjetivación. (p. 11)

Así, en la *teoría de la objetivación* de Radford (2006), “el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido los objetos conceptuales que encuentre el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados” (p.113). En el siguiente episodio mostramos cómo se expresó esa elaboración activa de significados por parte de Estefanía.

**Episodio 5:** entrevista, octubre 15 de 2010

<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1 Sandra	¿Qué significaban para ti las rectas paralelas?
2 Estefanía	Eran los rayos de luz, las ondas que se reflejaban en la parábola, en sí es como la señal en las antenas parabólicas, la señal que llega a la parábola y se refleja después en el foco

En este episodio, en el proceso de objetivación del concepto de parábola, a partir de la propiedad de reflexión, para Estefanía fue importante la utilización de varios artefactos, que le posibilitaron, en unión con las experiencias y debates en su equipo de investigación, ir objetivando, en el sentido de Radford (2008), el concepto de parábola. Tal vez hubiese sido difícil para Estefanía hablar de su modelación en *Geogebra* sin relacionarla con las antenas parabólicas y la reflexión de los rayos de luz. Para la alumna en (2), su construcción en *Geogebra* gana sentido al relacionarla con las actividades realizadas anteriormente y con la búsqueda de la solución a su pregunta de investigación, referida al funcionamiento de las antenas parabólicas.

Cada una de las acciones mediatizadas por artefactos que Víctor y Estefanía, en compañía de sus compañeros de investigación fueron realizando, les permitió la producción de sentidos y significados del concepto de parábola desde cada una de las actividades propuestas (visita al parque de los deseos, el experimento con rayos de luz y la modelación en *Geogebra*).

Así, vemos que el concepto de parábola no se objetivó, por los alumnos, en un solo acercamiento al concepto; diferentes objetivaciones llevaron a varios procesos de subjetivación. Esto puede verse en el siguiente episodio:

**Episodio 6:** entrevista, octubre 15 de 2010

<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1 Yolanda	¿Cómo te apropiaste de esos conceptos (parábola, propiedad de reflexión, ángulos de incidencia y reflexión y foco)?
2 Víctor	En realidad esos conceptos yo no los tenía bien claros, yo los vine a comprender ya cuando trabajamos con las antenas. Yo si me preguntaba cómo hacían las antenas para captar esos rayos y todo, porque siempre me ha causado curiosidad los pequeños detalles. Ya en la vida, ya cuando ando por la calle y miro cualquier luz o un rayo, digo, esto aplica tal regla, la ley de reflexión o esto funciona de tal forma. Por ejemplo, la caja registradora que tiene los láser en la parte de abajo funciona con base a eso... Ya ando por ahí como teniendo claros muchos conceptos, ya entiendo muchas cosas.

Las interacciones de Víctor con el concepto de parábola, a través de las actividades propuestas, le llevaron, en palabras de Radford (2006), no solo a **hacer** en matemáticas sino también **ser** en matemáticas. Para Víctor en (2), las interacciones con el concepto de parábola le permitieron ir objetivando el concepto, pero al mismo tiempo irse subjetivando en esas interacciones; así, los conceptos matemáticos de los cuales Víctor se apropió, cambiaron la forma como él interpretaba los fenómenos de su entorno y contribuyeron a formar en él una

posición crítica frente a ellos. Aparecen así los artefactos como constituyentes del sujeto.

En el siguiente apartado, presentaremos el *Geogebra* como un constituyente en el proceso de objetivación del concepto de parábola.

**El Geogebra como constituyente de objetivación del concepto de parábola.**

Después del desarrollo de varias de las actividades propusimos a los estudiantes realizar la modelación del experimento de los rayos de luz, utilizando el *software Geogebra*. La intencionalidad de esta actividad fue representar la propiedad de reflexión de la parábola en Geogebra. En esta actividad la necesidad era identificar la forma que debían formar los espejos para que se produjera la reflexión de la luz hacía un mismo punto (el foco). Las siguientes figuras ilustran el proceso de modelación en forma detallada.

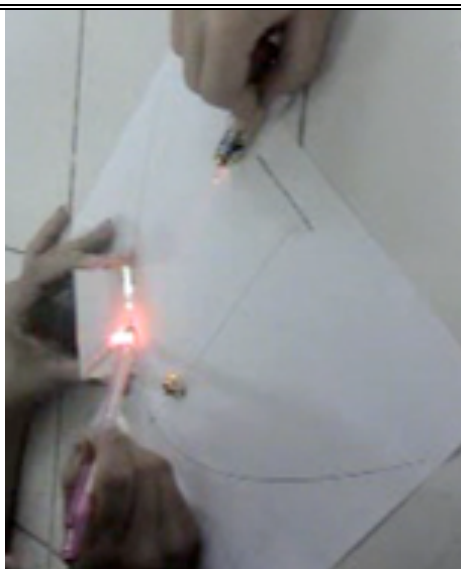


Figura 2. Foto del experimento de la reflexión de los rayos de luz, mayo 25 de 2010

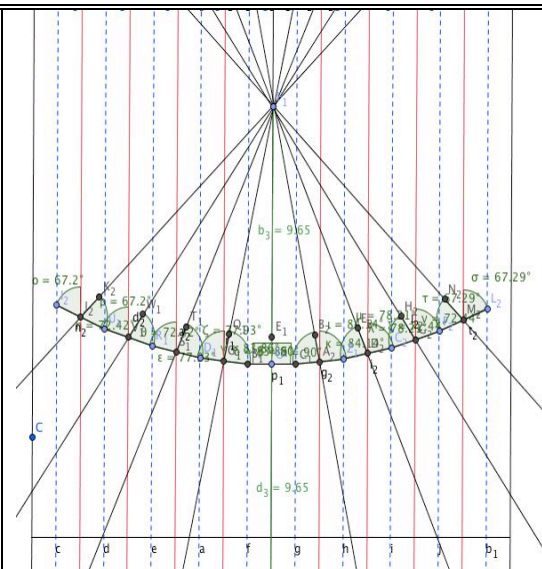
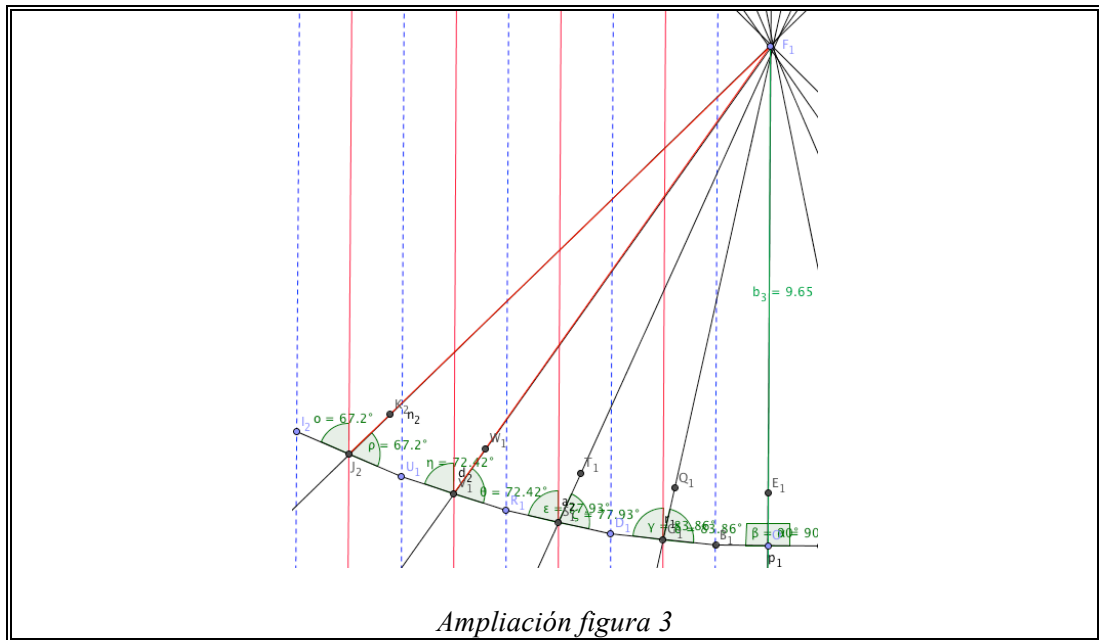


Figura 3. Producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, mayo 10 de 2010



**Figura 14:** proceso de modelación de la propiedad de reflexión.

En el proceso de modelación del experimento de los rayos de luz en *Geogebra*, consideramos que los estudiantes le encontraron sentido a su construcción a partir del experimento con los rayos de luz y el funcionamiento de las antenas parabólicas, como fue el caso de Estefanía en el episodio 5, cuando relacionaba las rectas rojas, que aparecen en la figura 13, con las ondas de las antenas parabólicas y los rayos de luz. Al igual que Estefanía, Víctor en el episodio 3, nos mostró como cada uno de los elementos que él representó en *Geogebra* lo asociaba con el experimento de los rayos de luz, así como con el funcionamiento de las antenas parabólicas.

Para Víctor, al igual que para Estefanía, el *Geogebra* cobró sentido cuando con el uso de éste, en la actividad en el aula de clase, pudo dar respuesta a sus preguntas de investigación, referidas a cómo debía ser la forma del reflector parabólico y cómo era el funcionamiento de las antenas parabólicas, así lo expresó Estefanía:

Mi desempeño fue muy bueno, excelente, yo trabajé mucho, yo me esforcé mucho por esa actividad, porque me pareció muy interesante, porque me ocasionaba mucho interés descubrir de qué se trataba. Cuando nos hicimos la pregunta, yo era pensando: pero ¿cómo voy a descubrir eso?, ¿cómo voy hacer para solucionarla?. Fue muy bueno para mí, entonces puse mucho interés en el trabajo porque me gustaba mucho descubrir la respuesta de lo que me había preguntado. (Entrevista, Estefanía, octubre 15 de 2010)

Consideramos que cada una de las actividades fue contribuyendo a dar respuestas a las preguntas de los participantes, pero fue finalmente, a través del *Geogebra*, que Estefanía, Víctor y Carolina pudieron comprobar y validar sus conjeturas. Esto fue mencionado por Carolina cuando le preguntamos cómo había sido su apropiación de conceptos como parábola, foco, segmento, intercepción, puntos, pendientes y ángulos; al respecto ella expresó “*antes yo tenía una apropiación, pero ahora después de las actividades que hicimos...digamos, que cuando empezamos a trabajar en Geogebra, fue que me apropié más de ellos*” (Entrevista, Carolina, octubre 15 de 2010)

Consideramos, así, el *software Geogebra* como uno de los constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola.

El dinamismo del *software Geogebra*, por medio del modo de arrastre, posibilitó la manipulación de los diferentes objetos que hacían parte de la construcción geométrica, y en consecuencia, conlleva la transformación continua de las figuras. Por ejemplo, a Víctor, *Geogebra* le posibilitó establecer conjeturas, así como experimentar diferentes formas en las posiciones de los espejos que posibilitaban la reflexión del rayo. Además, también le viabilizó el establecimiento de relaciones, haciendo uso de una misma construcción, tal como nos lo muestra a continuación:

Si esto tuviera otra forma [*moviendo una de las rectas, que para él representaban los espejos*] la luz no reflejaría directamente al foco principal, porque como este

ángulo debe ser igual a este [*mostrando los ángulos de incidencia y reflexión*], si son diferentes la luz va a reflejar en un punto diferente del foco principal. De ahí la simple deducción de que las antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica. (Videograbación, Víctor, septiembre 14 de 2010)

El modo de “arrastre” le permitió a Víctor la visualización de la propiedad de reflexión, a través del ángulo de reflexión y el ángulo de incidencia, los cuales se forman en un punto  $P(x,y)$  de la parábola. Víctor, al mover uno de los espejos de su construcción en *Geogebra* (el cual es la recta tangente a una curva en un punto  $P$  de la parábola) pudo observar cómo los ángulos de reflexión e incidencia permanecían con igual medida, pero el rayo de luz ya no se reflejaba en el foco, ya que la forma en la que estaban dispuestos los espejos ya no era una parábola, así para ese foco y los anteriores espejos ya colocados, solo había una forma en la cual se debían seguir poniendo los demás espejos. Víctor, gracias a las experimentaciones realizadas con sus compañeros de equipo para lograr determinar la posición de cada uno de los espejos de su construcción, y al modo de arrastre proporcionado por *Geogebra* —que le permitió visualizar la propiedad de reflexión de la parábola— pudo descubrir cómo la posición en la que debían ir quedando esos espejos no era un círculo, ni un ovalo, ni una elipse, era una parábola.

Creemos que si Víctor sólo hubiese utilizado como artefacto el papel y el lápiz para modelar el experimento de los rayos de luz, posiblemente hubiese tenido dificultades en su razonamiento o no hubiese alcanzado las deducciones expuestas por él. Decimos lo anterior porque al utilizar los artefactos de papel y lápiz, y hacer una modificación en uno de los elementos de la construcción, era factible que no hubiese alcanzado a establecer cómo se comportaba un elemento de la figura o construcción geométrica con respecto a otro. Por ejemplo, si trazáramos una parábola en una hoja



de papel, identificando en ella: el foco, la directriz, el vértice y una recta paralela al eje focal, y quisiéramos desplazar, por ejemplo, el foco, para observar que ocurre con cada uno de los elementos mencionados, tendríamos que trazar otra parábola, que satisfaga las nuevas condiciones, y esto debería hacerse para cualquier movimiento que decidamos hacer de cualquier elemento de la parábola.

De este modo, en las construcciones hechas a papel y lápiz, las interrelaciones entre los elementos de la construcción no le hubiesen posibilitado, a Víctor, visualizar fácilmente las dependencias entre los elementos constituyentes de la figura, así como el establecimiento de invariantes con los diferentes movimientos. En este sentido, una de las ventajas que ofrece el artefacto tecnológico, en nuestro caso el *software Geogebra*, nos lo expresa Recio (2009) al argumentar que éste:

...permite mucho más que una simple transposición al ordenador de aquellos instrumentos escolares que han sido utilizados desde hace tiempo atrás para la realización de construcciones geométricas sobre las cuales es posible modelar situaciones reales, demostrar, experimentar y conjeturar, ya que los software de geometría dinámica por la posibilidad de permitir señalar y arrastrar en la pantalla del ordenador partes de una construcción hecha conservando las interrelaciones entre los elementos constituyentes de la figura construida. (p. 5)

Así, el uso de los diferentes artefactos, como lo expresa Recio (2009), fue lo que le posibilitó a Víctor conjeturar y establecer relaciones entre las diferentes actividades propuestas como fueron las antenas parabólicas, el experimento de los rayos de luz y la modelación en *Geogebra*. De este modo, Víctor expresó en el episodio 3 “*de ahí la simple deducción de que las antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica [...] la forma debe ser una parábola, para que en cualquier punto donde choque la luz del laser, la onda electromagnética cumpla la ley de reflexión y llegue hasta el foco principal*”. (Videograbación, Víctor, septiembre 14 de 2010)

Al igual que Víctor, Estefanía hizo algunas deducciones al interactuar con el *software Geogebra*. Este hecho fue visible en la actividad de la modelación de los rayos de luz en *Geogebra*, cuando le pedimos a Estefanía mover el radio de una de las circunferencias que hacían parte de su construcción, radio que representaba en el modelo de *Geogebra* el espejo del experimento de los rayos de luz. Al mover el radio Estefanía expresó:

**Episodio 7:** videograbación, julio 8 de 2010

	Autor	Discurso
1	Estefanía	Ya los rayos no llegan al foco, no hay la forma como se esparcía antes porque ya los rayos se pierden. [ <i>sonríe con asombro</i> ]
2	Cruz	[ <i>Percibe la expresión de la estudiante y pregunta</i> ] ¿Estás descubriendo en este momento algo?
3	Estefanía	[ <i>Sigue sonriendo</i> ], Sí, porque mira que la forma es la que hace que lleguen a un punto y se abran otra vez así [ <i>abre las manos representando la situación del modelo</i> ], mientras que así [ <i>gesticula con las manos</i> ] el rayo como que se pierde, o sea que la forma es la que hace que como que se esparzan [ <i>sigue asombrada</i> ]

A Estefanía, la actividad de modelación de los rayos de luz, le permitió descubrir — a través del dinamismo proporcionado por *Geogebra*, por medio del modo de arrastre y de las experiencias y las actividades propuestas anteriores a la de la modelación— las relaciones entre los elementos constituyentes de la parábola a partir de su construcción en *Geogebra*. Estas relaciones le permitieron, a su vez, la objetivación del concepto de parábola, mientras daba respuesta a su pregunta de investigación. El *software Geogebra* como artefacto no sólo le permitió la experimentación para llegar a darse cuenta de que la forma que se iba tomando con las posiciones de los espejos, era una parábola, sino, que le generó emociones y sentimientos gratificantes, cuando se vio, frente al descubrimiento de su pregunta de investigación —la cuál

hacia alusión a la forma que debía tener el reflector de una antena parabólica—, como lo expreso en (2) y (3), cuando se asombró y se sonrió al dar cuenta que esa forma era una parábola.

Es así como el uso de un artefacto tecnológico, en nuestro caso del *Geogebra*, se convirtió en un artefacto que permitió, a Víctor, Carolina y Estefanía, la visualización, experimentación y objetivación del concepto de parábola. Así mismo, les facilitó, a estos estudiantes, la generación de algunas estrategias de solución que los llevaron a dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas por ellos y sus grupos de investigación; preguntas que indagaban por el funcionamiento de las antenas parabólicas y la forma que debían tener las superficies reflectoras. El siguiente episodio muestra algunas conclusiones que Estefanía y su equipo de investigación expusieron a sus compañeros y a nosotras, las investigadoras, durante el cierre del trabajo investigativo, referidas a las antenas parabólicas y el uso del *Geogebra*.

#### **Episodio 8:** entrevista, septiembre 14 de 2010

<b>n</b>	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Estefanía	Nosotras nos formulamos varias preguntas, una de ellas era ¿Cuál debe ser la forma de la superficie reflectora de una antena parabólica?, otra estaba referida al funcionamiento de las antenas.
2	Cruz	¿Cómo pudieron responderlas?
3	Estefanía	La de la forma, a través de <i>Geogebra</i> . A través del <i>Geogebra</i> fue que descubrimos que la forma debía ser una parábola, porque experimentamos con varias formas y con la única que lográbamos reflejar los rayos de luz en el foco era con la parábola, con las otras la señal se desviaba. Gracias a esta forma era que se lograba reflejar los rayos paralelos y dar directamente en el foco.
4	Estefanía	Voy hablar de la propiedad de reflexión de las ondas. La reflexión es el cambio de dirección de la onda cuando choca con un obstáculo al que se le denomina superficie reflectora. Ese cambio de dirección depende de la forma de la superficie reflectora. Los rayos que inciden en la superficie reflectora se denominan rayos incidentes y los que se reflejan rayos reflectores.

Cuando la forma de la superficie reflectora es parabólica, los rayos incidentes son paralelos al eje de la parábola y se reflejan en dirección al foco. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

A partir del dinamismo proporcionado por el *software Geogebra*, Estefanía en (4), así como lo pudimos ver en Víctor, experimentó y descubrió cómo debía ser la forma de superficie reflectora. Para Estefanía, el uso del *Geogebra* fue importante en la búsqueda de soluciones a su pregunta de investigación. *Geogebra* le permitió experimentar e interpretar la propiedad de reflexión de otras maneras, que no hubiesen sido posible con lápiz y papel. Para Estefanía, *Geogebra* no sólo fue mediador en el proceso de objetivación del concepto de parábola sino que fue constituyente en la forma cómo pensaba, cómo conjeturaba y cómo materializaba sus ideas.

Víctor y Estefanía nos mostraron cómo los elementos matemáticos van surgiendo y transformándose en el desarrollo de las actividades, transformación que también sucedió gracias al proceso de objetivación a través de artefactos —las conchas acústicas, los rayos infrarrojos y el *software Geogebra*—.

Así, vemos cómo en el proceso de objetivación del concepto de parábola, Víctor, Estefanía y Carolina se fueron constituyendo a través de diferentes miradas en cada una de las interacciones con los artefactos mediante acciones mediatizadas. Acciones sobre diferentes artefactos, que fueron posibilitando a su vez nuevos acercamientos al conocimiento matemático.

Para el caso de nuestra investigación, aunque nos centramos en el *software Geogebra* como constituyente en el proceso de objetivación del concepto de parábola, no quiere

decir que los artefactos utilizados en las actividades anteriores a la modelación de los rayos de luz, no hayan sido relevantes. Por el contrario, cada uno de los artefactos constituyó a los sujetos investigados. De esta manera, en cada encuentro de Víctor, Estefanía y Carolina con el concepto de parábola, cada uno de los artefactos, les permitió a los estudiantes la constitución de nuevos sentidos y significados que le fueron llevando paulatinamente a la objetivación del concepto de parábola.

Así, la manera como llegamos a pensar y conocer un objeto, depende de los significados culturales, de las interpretaciones propias, de las formas de acercarnos al objeto por medio de artefactos y en la actividad misma. En este sentido, Radford (2006) expresa: “el pensamiento es considerado como una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de actividad de los individuos”.

Ahora bien, para el mismo autor, pensar no es casual, está mediatizado por artefactos en una actividad específica. De esta forma, cuando Estefanía, en el episodio anterior, descubre que la forma de la antena debe ser una parábola, para que se cumpla la propiedad de reflexión, no fue una simple idea que se le ocurrió de repente o una mera coincidencia. Este *descubrimiento* fue, de hecho, producto de sus significados culturales e interpretaciones que, mediadas por los diferentes artefactos, en el desarrollo de cada actividad, le permitieron, finalmente, establecer relaciones entre los elementos de su construcción y su pregunta de investigación, e ir objetivando el concepto de parábola.

### **Instrumentos psicológicos como artefactos.**

Según Vygotski (1995), “las funciones mentales superiores del ser humano deben considerarse productos de una actividad mediada” (p.18). Vygotski señala los instrumentos psicológicos (símbolos, signos, lenguajes, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos, técnicas mnemotécnicas) como mediadores en el desarrollo y el dominio de las funciones mentales superiores (la percepción, la memoria, la atención). En esta investigación, estamos concibiendo los instrumentos psicológicos, no solo como mediadores, sino como constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola.

La adquisición y apropiación de los instrumentos psicológicos, según Kozulin (2000), son elementos esenciales de la enseñanza. Para él “los instrumentos psicológicos son recursos culturales que se adquieren en el curso de actividades de aprendizaje especiales” (p.104). Así, en el transcurso de cada una de las actividades propuestas en nuestra investigación fue intencional el uso de los instrumentos psicológicos por parte de los estudiantes e investigadoras.

Los estudiantes, en la actividad de conformación de equipos, tuvieron la oportunidad de debatir algunas ideas, que les posibilitaron la elaboración de la pregunta de investigación. Fue el caso de Carolina y su grupo de investigación, quienes discutieron algunas ideas con relación a la forma de las conchas acústicas, en la experiencia de la visita al parque de los deseos, como se muestra a continuación.

**Episodio 9:** videograbación, mayo 10 de 2010

	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Alejandra	Si una concha es cuadrada, o triángulo ya no tendría la forma de antena parabólica.
2	Yesika	No, pero tendría la forma, sólo que en triángulo [ <i>la estudiante hace con sus brazos la forma de un triángulo</i> ]
3	Carolina	No, yo pienso, si las ondas llegan desde el centro, o sea se escucha la voz desde el centro, aquí al abarcar todo esto [ <i>mientras habla, Carolina ilustra a sus compañeros en una hoja formas cuadradas, triangulares, circulares, haciendo alusión a la forma de las conchas acústicas del parque de los deseos</i> ], al desplazarse... al llegar el sonido en forma de triángulo, o sea ¿qué pasaría ahí?

Este episodio nos muestra cómo en este grupo se discutieron algunas ideas en torno a la experiencia tenida con el medio, con las conchas acústicas. Carolina en (3), hizo evidente el uso de instrumentos psicológicos tales como: técnicas mnemotécnicas (por ejemplo, mover sus brazos formando figuras, que al mismo tiempo dibujaba) y dibujos (ella dibujó en su cuaderno triángulos, cuadrados, círculos). Estos instrumentos, en compañía del lenguaje, le posibilitaron expresar sus percepciones, fruto de las experiencias anteriores, realizar razonamientos y establecer conjeturas acerca de cómo debía ser la forma de las conchas.

Para Vygotski (1995), el lenguaje y los signos son tomados como mediadores, en el sentido de que éstos son instrumentos psicológicos que “poseen una orientación interna que transforma las aptitudes y destrezas de la naturaleza humana en funciones mentales superiores” (Vygotski, 1995, 18). En este sentido, en el desarrollo de sus funciones mentales superiores, Carolina, requirió del uso de signos, de recursos simbólicos en el desarrollo de la actividad, posibilitándole, en palabras de Radford, mediatizar y materializar el pensamiento.

En el episodio anterior, las significaciones e interpretaciones elaboradas por Carolina no hubiesen sido posibles sin las discusiones con sus compañeros, generadas al interior de su grupo, a partir de la actividad propuesta. Vygotski (1978), al hablar de las funciones mentales, menciona que “cada función aparece dos veces: primero, a nivel social y, después, a nivel individual; primero entre personas (nivel interpsicológico) y, después, dentro del niño (nivel intrapsicológico)” (p.57). Un elemento esencial del aprendizaje es el papel de la otra persona como mediador de significados. En el caso de Carolina, fueron las discusiones con sus compañeros de equipo, a partir de las experiencias vividas por ellos, en la visita a las conchas acústicas, que les posibilitaron cuestionarse acerca de la forma que debían tener las antenas parabólicas. En la actividad de modelación de los rayos de luz, le preguntamos a Carolina, después de haber realizado su construcción con sus compañeros de equipo de investigación, por la relación entre esta construcción y su pregunta de investigación. Esto es expresado en el siguiente episodio.

**Episodio 10:** videograbación, julio 8 de 2010

	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Cruz	Si seguimos prolongando la construcción, ¿qué figura se va formando?
2	Carolina	Pues, de acuerdo a esta cuestión [ <i>la estudiante señala su construcción</i> ] se haría un ovalo, o un círculo.
3	Alejandra	Una parábola
4	Cruz	¿Qué relación tiene esa palabra con lo que hemos venido viendo, con tu investigación?
5	Carolina	Solamente se puede dar esa proyección de ondas mediante una parábola. O sea la forma que debe tener la construcción para la transmisión de rayos debe ser una parábola.
6	Cruz	¿Qué se puede decir de esta modelación frente a la pregunta de investigación que han formulado?
7	Alejandra	Primero que todo, si lo que se va a reflejar es la luz o el sonido tienen que estar paralelamente, o sea reflejando el objeto. Si cambiamos lo que lo detiene [ <i>la estudiante mueve los radios de su construcción, que simbolizan segmentos de rectas tangentes en cualquier punto de la parábola, haciendo formas cuadradas,</i>



*triangulares, poligonales], si se hace cuadrada, triangular [la estudiante hace con sus manos figuras cuadradas, triangulares y parabólicas, simulando la forma de la superficie reflectora] no va a ser lo mismo. Tiene que ser en forma de parábola.*

Cada vez que en el transcurso de la investigación cuestionábamos a Carolina sobre las conjeturas que tenía acerca de su pregunta de investigación, ella mencionaba su preocupación por la forma que debían tener los reflectores parabólicos para que se produjera la transmisión de ondas. Las conjeturas e interpretaciones de Carolina siempre estuvieron mediadas por las significaciones de sus compañeros de equipo, quienes le posibilitaron (re)significarlas continuamente, como ocurrió en el episodio anterior en (2), (3) y (4). Las preguntas que como investigadoras le hacíamos a Carolina fueron intencionadas; esto con el fin de que ella fuera estableciendo más relaciones desde su modelación en *Geogebra* que le posibilitaran ir objetivando el concepto de parábola y al mismo tiempo responder a su pregunta de investigación.

Cuando Carolina, a partir de las significaciones de sus compañeros y las preguntas nuestras, iba (re)significando las interpretaciones de su construcción en *Geogebra*, hacía uso de signos, gestos, mímicas, que le posibilitaban materializar su pensamiento, como ocurrió en (7) cuando ella expresó, “*si cambiamos lo que lo detiene [la estudiante mueve los radios de su construcción, que simbolizan segmentos de rectas tangentes en cualquier punto de la parábola, haciendo formas cuadradas, triangulares, poligonales], si se hace cuadrada, no va a ser lo mismo. Tiene que ser en forma de parábola*”.

Al igual que para Carolina, para Víctor y Estefanía el uso de instrumentos psicológicos formó parte de su proceso de objetivación del concepto de parábola. Cuando Víctor expresó en el episodio I “...de ahí la simple deducción de que las

*antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica*” daba indicios del desarrollo de las funciones mentales superiores mediadas, en este caso, por lo social, por la cultura. Estas funciones fueron mediadas, por el uso de los símbolos gráficos apoyados en el lenguaje, las cuales le posibilitaban a Víctor, pensar cada vez en forma más compleja y (re)significar los objetos de la cultura.

Del mismo modo, Estefanía, al descubrir la forma que debían tener las antenas parabólicas, en el episodio 7, dijo *“sí, porque mira que la forma es la que hace que lleguen a un punto y se abran otra vez así [abre las manos representando la situación del modelo], mientras que así [gesticula con las manos] el rayo como que se pierde, o sea que la forma es la que hace que como que se esparzan [sigue asombrada]”*. Durante la actividad de modelación en *Geogebra*, especialmente en lo que se menciona en el episodio 7, Estefanía siempre se mostró sorprendida de las relaciones que iba descubriendo. Cuando le hacíamos preguntas intencionadas, ella, al responder, siempre sonreía cuando se mostraba sorprendida, además acompañaba sus sonrisas con gestos y movimientos muy marcados en sus manos. El empleo de instrumentos psicológicos por parte de Estefanía le posibilitó, al igual que a Víctor y a Carolina, orientar y materializar su pensamiento, validar sus hipótesis, interpretar su modelación en *Geogebra*, estableciendo relaciones entre las antenas parabólicas y el experimento de los rayos de luz. Además, les posibilitó objetivar el concepto de parábola a partir de las nuevas significaciones que iban teniendo de su construcción en *Geogebra*.

Evidenciamos así que en los procesos de objetivación son importantes los objetos y signos culturales. Importancia que, para Radford (2006), radica en que, además de proveer significaciones culturales, ellos alteran el funcionamiento cognitivo. En este sentido, Vygotski anota que:

al ser incluido en el proceso del comportamiento, la herramienta psicológica altera el curso entero y la estructura de las funciones mentales. La herramienta psicológica determina la estructura de un nuevo acto instrumental de la misma forma que una herramienta técnica altera el proceso natural de adaptación al determinar la forma de las operaciones de trabajo. (Vygotski, 1981, p. 137)

En la misma línea, Radford (2008), citando a Geertz, sugiere que, el pensamiento no debe ser visto como una actividad meramente intracerebral, ya que “el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales para su propio razonamiento; y aquellos recursos son, consecuentemente, no adjuntos, pero sí constituyentes, de la actividad mental” (Radford, 2008 p.217).

### **Consideraciones generales**

Las discusiones presentadas en los tres apartes de este capítulo nos permitieron mostrar según, Wertsch (1993), cómo los artefactos no solo facilitan la acción, sino que también alteran las estructuras cognitivas. Según este autor “al centrarse en los instrumentos mediadores, la mente va más allá de la piel en otro importante sentido: el agente de la acción mediada se concibe como el individuo o los individuos que actúan en conjunción con instrumentos mediadores” (Wertsch, 1993, p.50). Así, consideramos que al proponer a los estudiantes actividades diseñadas desde la *teoría de la actividad*, su aprendizaje fue producto de las interacciones con los artefactos culturales; es decir, en el proceso de objetivación del concepto de parábola de

Carolina, Víctor y Estefanía, los artefactos no solo fueron mediadores, ni simples ayudas, sino que fueron constituyentes de su pensamiento.

Para Radford (2006; 2008), el pensamiento se produce en una región externa que llama, parafraseando a Volosinov (1973), *el territorio del artefacto*. Según Radford (2006) “es en este territorio donde la subjetividad y la objetividad cultural se imbrican mutuamente y en el que el pensamiento encuentra su espacio de acción y la mente se extiende mas allá de la piel” (p.107). De acuerdo con la *teoría de la objetivación*, el pensamiento de Estefanía, Carolina y Víctor no solo se dio en el plano cerebral, sino también en el plano social, desde el *territorio del artefacto*. O sea, el *software Geogebra*, las conchas acústicas, el experimento de los rayos de luz, los gestos, el lenguaje y los signos matemáticos fueron artefactos que mediatizaron y materializaron el pensamiento de los estudiantes. En palabras de Radford, el papel de los artefactos es más que materializar el pensamiento, es pensar con y a través de los artefactos.

El uso de los artefactos a través de las diferentes actividades, como medio para acercarse al objeto de conocimiento, nos permitió pensar que, de una u otra manera, se ha mostrado una dialéctica entre sujeto y objeto, inmersos en un contexto, y de esta forma, los artefactos son considerados como constituyentes en el proceso de objetivación. En este sentido, Wertsch (1993), al referirse al papel mediador de los instrumentos expresa: “una propiedad definitoria de las funciones mentales superiores, exclusiva de los humanos, es el hecho de que estén mediadas por herramientas y sistemas de signos, tales como el lenguaje natural” (p. 38). En esta investigación, Carolina, Estefanía y Víctor fueron transformados cognitivamente por

los artefactos, hecho que les permitió la formación de sus funciones mentales superiores; por ejemplo, la objetivación del concepto de parábola.

## **CAPÍTULO IV**

# **(RE)CONSTITUCIÓN DE SUBJETIVIDADES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS**

### **A modo de presentación**

Ha sido nuestro interés en los anteriores capítulos ilustrar cómo, desde el uso de diferentes artefactos, entendidos éstos como constituyentes en la actividad mental y no apenas como mediadores, se posibilitó la objetivación del concepto de parábola por parte de los estudiantes. En ese proceso de objetivación, a la vez, ellos se fueron subjetivando, desde esas múltiples interacciones con el objeto.

En este capítulo nos centraremos, precisamente, en cómo el uso de los artefactos, a partir de las actividades propuestas, posibilitó la subjetivación enunciada por Radford (2010) dentro de la *teoría de la objetivación*. Sin embargo, antes de centrarnos en este aspecto, queremos hacer explícitas algunas de nuestras consideraciones epistemológicas acerca del conocimiento; ello, porque asumimos que dichas consideraciones inciden en el trabajo en la clase de matemáticas en cuanto al tipo de actividades propuestas, en el tipo de relaciones que se tejen con los estudiantes y, las relaciones que se tejen entre los estudiantes y el objeto de conocimiento.

Para esta investigación el enfoque histórico-cultural de Vygotski es muy importante por cuanto en él se propone recuperar la subjetividad del ser humano, donde el sujeto ya no es concebido sólo como cuerpo, sino, como un ser histórico que se constituye en relación con el otro. De este modo, el conocimiento no lo asumimos como algo externo al individuo, sino como algo que surge del interior de él, por lo tanto el estudiante ya no posee un papel pasivo en la construcción del conocimiento ni frente a su contexto; el sujeto transforma la realidad y es transformado por ella.

Así, en nuestra investigación, consideramos la matemática en el sentido de Oliveira (2003), por cuanto él la piensa como una forma de generar conocimiento y no como un cuerpo de conocimientos acabados e inmutables. En este sentido, entendemos el aula de clase de matemáticas como espacio epistemológico, es decir, un espacio donde se generen relaciones dialógicas que posibilitaban la producción de conocimiento. Posición en la que estamos de acuerdo con Freire (1970) al rechazar la llamada educación bancaria, definida por él como:

...el acto de depositar, de transferir, de transmitir valores y conocimientos...el educador es el que sabe, los educandos los que no saben; el educador es el que piensa, los educandos los objetos pensados; el educador es el que habla, los educandos los que escuchan dócilmente... (p.52)

Desde lo anterior, la metodología de clase las “*Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase*” propuesta por Ponte, Brocardo, y Oliveira (2003), es acorde con nuestra posición epistémica ya que dicha metodología de clase nos posibilitó generar nuevas interacciones entre alumno-profesor en torno al conocimiento matemático, posibilitando el debate en el aula de clase, además de una participación más activa del estudiante y más orientadora del maestro, donde el estudiante pudo desarrollar un

espíritu investigativo que lo llevó a la objetivación del conocimiento, en nuestro caso el concepto de parábola.

### (Re)constitución de subjetividades

En el capítulo III, titulado “los artefactos como constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola”, presentamos, en la figura 12, un esquema en el cual ilustramos el proceso de objetivación y subjetivación propuesto por Radford (2010). A continuación, presentamos este esquema con algunas transformaciones, las cuales se fueron presentando en nuestro proceso de (re)constitución como investigadoras.



*Figura 15: (re)construcción del proceso de objetivación y subjetivación.*

Como el lector puede darse cuenta, en la figura 14 aparecen otras palabras propias del discurso de Bajtín (2009): excedente de visión, dialogía, ética y estética. Estas palabras, desde nuestra mirada, alimentan nuestra concepción de conocimiento y de



sujeto, y que son eje central dentro del proceso de objetivación. A continuación explicaremos cómo, desde los planteamientos de Bajtín pudo evidenciarse el proceso de subjetivación en los estudiantes investigados.

Uno de los planteamientos básicos de Bajtín (2009) es la dialogía. Para el autor, ésta debe ser hallada de tal manera que los enunciados de un hablante se pongan en contacto con los enunciados de otro, o sea cuando dos o más voces se ponen en contacto: la voz de un oyente, responde a la voz de un hablante; ello debido a que se produce una significación entre las voces en un contexto determinado. En la misma línea de Bajtín, Voloshinov, citado por Wertsch (1993), dice:

Comprender el enunciado de otra persona significa orientarse con respecto a él, encontrar el lugar concreto para él en el contexto correspondiente. Para cada palabra del enunciado que estamos en proceso de comprender, proponemos, por así decir, un conjunto de palabras nuestras como respuesta. Cuando mayor su número y su importancia, más profunda y sustancial deberá ser nuestra comprensión... Toda comprensión verdadera es dialógica por naturaleza. La comprensión es para el enunciado como una línea de diálogo para la siguiente. (p.73)

A la luz de lo anterior, compartiendo los planteamientos de Bajtín, en una visión dialógica reconocemos al otro, aceptando que nuestra palabra no es la única, que no hay absolutos sino multiplicidad de puntos de vista, siendo conscientes de la alternancia de voces, de la heterogeneidad simultánea en el tiempo y el espacio. A partir de esto, la palabra ajena se transforma en bivocal, ambivalente y polisémica.

En la misma línea, Freire (1997) plantea cómo el ser humano no puede pensarse solo, sin los otros. Sólo desde el diálogo puede el ser humano ir conociéndose como ser en permanente reconstitución en el mundo, el cual, al mismo tiempo también permanece en constante transformación. Siempre se precisa del otro para aprender la propia (re)constitución como sujetos. No existe un "Yo" si no existe un "Tú".

Cuando propusimos a los estudiantes realizar “*Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase*”, de alguna manera, pretendíamos posibilitar la dialogía en las clases de matemáticas. A través de las investigaciones realizadas por los estudiantes y de las actividades diseñadas desde *la Teoría de la Actividad*, se generaron nuevas interacciones entre ellos, la profesora, las investigadoras y el conocimiento matemático. A continuación presentamos dos episodios que nos posibilitaron ilustrar la dialogía

**Episodio 11:** entrevista, Estefanía, octubre 15 de 2010

Autor	Discurso
1 Yolanda	¿Cómo ves el desarrollo de las clases de matemáticas en el grado 11° este año?
2 Estefanía	Fueron mucho mejores, porque los estudiantes se mostraban más interesados en las clases. Decíamos algo así: que bueno que nos toque matemáticas. Mientras que antes era, ¡Ah, que pereza matemáticas otra vez!
3 Yolanda	Y de todas estas actividades que desarrollaron en clase, ¿tú crees que se generaron relaciones entre el conocimiento matemático, las profesoras y los estudiantes?
4 Estefanía	Sí, porque todo el mundo... todos interactuábamos más, entre los mismos compañeros, y entre los compañeros con las profesoras. Se desarrolló mucho más el interés por las matemáticas, porque antes uno no interactuaba tanto, uno simplemente estaba como, Ah que pereza; mientras que así se interactuaba más con el área en sí. Uno quería saber más a fondo todo lo que tiene la matemática. Sí había más interacción.
5 Yolanda	¿Según tu mirada, cómo debe ser el papel del profesor a la hora del trabajo en grupo?
6 Estefanía	Es como el de guiarnos. El trabajo de ellas fue muy bueno, porque todo el tiempo nos estaban guiando. Si veían que estábamos haciendo algo que no era, no nos decían esto no es así, sino que nos decían “pero piensen en esto o piensen en lo otro”; y así como que nos hacían caer en cuenta del error pero sin estrictamente decir está mal. Entonces el papel de ellas fue de guía, de apoyo y de explicarnos las cosas, pero no así como de darnos el concepto, sino como tratando de que nosotros llegáramos a él.

**Episodio 12:** entrevista, Carolina, octubre 15 de 2010

<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1 Yolanda	¿Tú crees que se pueden establecer relaciones entre la profesora, los estudiantes y el conocimiento matemático?
2 Carolina	Bastantes, porque cada persona conforma su pedacito, entonces, digamos, el estar en grupo y aprender del conocimiento todos se ayudan entre sí, el profesor ayuda, eso hace que sea sólida las relaciones o el aprendizaje
3 Yolanda	¿Tú crees que se pueden establecer relaciones entre los conceptos que aprendiste, en el proyecto, con el entorno?
4 Carolina	Sí, porque a veces somos de aprender varios temas, y bacano poderle explicarle al otro cómo funciona, que lo vea uno, que pueda sostener una conversación. Así, uno puede tener un diálogo y saber más a fondo del mundo, uno puede explicar más concretamente como ocurren los fenómenos y por qué ocurren.
5 Yolanda	¿Según tu mirada, cómo debe ser el papel del profesor a la hora del trabajo en grupo?
6 Carolina	Fue excelente, de estar pendientes de qué llevábamos, de asesorías. Ellas decían: que miren esto lo pueden hacer, que miren esto yo se los presto para que tengan. Ellas nos ayudaron bastante.

En estos episodios, vemos cómo la clase de matemáticas pudo convertirse en un espacio social, donde los estudiantes al tiempo que iban objetivando el concepto de parábola, al tiempo asumían una actitud más crítica, investigadora, respetuosa de la palabra del otro, y, sobre todo se iban (re)constituyendo como sujetos.

En lo que expresaron Estefanía en (4) del episodio 11 y Carolina en (2) del episodio 12, pudimos evidenciar como a partir de las interrelaciones generadas desde las actividades y las investigaciones, el diálogo entre profesora, investigadoras y estudiantes se dio en condiciones de igualdad; bajo una relación horizontal, donde los estudiantes se tornaron sujetos activos dentro de su proceso de aprendizaje. Al respecto Freire (1997) dice:

...lo fundamental es que profesor y alumnos sepan que la postura que ellos, profesor y alumnos, adoptan es dialógica, abierta, curiosa, indagadora y no pasiva, en cuanto

habla o en cuanto escucha. Lo que importa es que profesor y alumnos se asuman como seres epistemológicamente curiosos. (p. 83)

De esta manera, la dialogía, parte del sentido común, del respeto por otro, por su palabra, por sus saberes. Desde esta postura, pensamos, que la actividad del profesor debe posibilitar la actividad del estudiante (la actividad en el sentido que hemos venido explicitando desde la teoría de la actividad), la formación de su pensamiento teórico, pero también la formación como sujeto histórico y social que se constituye en relación con los otros.

Según Freire (1997), cuando en nuestras clases posibilitamos la dialogía, estamos desafiando al autoritarismo, la intolerancia y la homogeneización, al tiempo que estamos posibilitando que la pedagogía pueda convertirse en liberadora, en encauzadora de la expresión y elaboración humana de la realidad.

De esta manera, dentro de la dialogía, propuesta por Bajtín (2009), se rechaza la concepción de un “yo” individualista, pues el “yo” es esencialmente social. Cada individuo se va constituyendo como un colectivo de numerosos “yoes” que ha asimilado a lo largo de su vida, a través de sus experiencias o de esas “voces” habladas por otros (personas, el arte, la religión, su familia, su comunidad, sus profesores, entre otros). Estas “voces” no son sólo palabras sino que vienen cargadas de un conjunto de significados y sentidos que el individuo va construyendo.

De esta manera, en el episodio 11 y en el episodio 12, tanto Estefanía como Carolina, cuando hablaban no se referían solo a ellas, en el sentido de Bajtín, hablaban desde varias voces. Cuando ellas expresan “interactuábamos más...nos estaban guiando”, podríamos hacernos la pregunta bajtiniana, ¿Quién está hablando? Frente a esta

pregunta diríamos, de forma superficial, “pues Carolina y Estefanía”, pero al analizarlo más detalladamente, vemos cómo aparecen unas voces individuales pero al mismo tiempo unas voces sociales; es decir, consideramos que en la producción de significados dados por Carolina y Estefanía, aparecen involucradas múltiples voces, las voces de sus compañeros de equipo de investigación, de los compañeros de clase, de la profesora, de las investigadoras. Podríamos decir que estas voces todas se unieron desde su encuentro dialógico, a través de la voz de Estefanía y Carolina.

Así, para Bajtín (2009), las múltiples voces producen multiplicidad de sentidos y significados, comprendidos éstos al interior de un contexto, de una cotidianidad. Sentidos que se dependen, a su vez, del enunciado y de la enunciación misma. Por ejemplo, cuando Víctor decía “de ahí la simple deducción de que las antenas parabólicas deben tener una forma parabólica y no ovalada o elíptica”; en realidad no era una simple deducción, en el sentido literal de su interpretación; fue una palabra producto de sus experiencias, de sus debates con sus compañeros y de sus reflexiones continuas en cada una de las actividades. Al respecto Clark y Holquist (1984), citados por Werstch (1993), dicen

Un enunciado, oral o escrito, se expresa siempre desde un punto de vista [una voz], que para Bajtín es más un proceso que una localización. El enunciado que establece diferencias en los valores. En un nivel elemental, por ejemplo, las mismas palabras pueden significar cosas diferentes según la entonación particular con que se emiten en un contexto específico: la entonación es el sonido que el valor realiza. (p.71)

Las palabras de Víctor cobran sentido a partir sus experiencias, de su contexto específico, de la entonación con la que lo expresó. Estas palabras tomaban importancia, para él, porque había otro sujeto hablante que lo escuchaba, que le interrogaba, que sonreía con él mientras él hablaba, estas palabras estaban dirigidas a

alguien. Para evidenciar lo anterior, retomamos el episodio 6, en el cual se le preguntó a Víctor sobre cómo fue su proceso de apropiación de los conceptos, él respondió

En realidad esos conceptos yo no los tenía bien claros, yo los vine a comprender ya cuando trabajamos con las antenas. Yo si me preguntaba como hacían las antenas para captar esos rayos y todo, porque siempre me ha causado curiosidad los pequeños detalles; ya en la vida, ya cuando ando por la calle y miro cualquier luz o un rayo, digo, esto aplica tal regla, la ley de reflexión o esto funciona de tal forma, por ejemplo la caja registradora que tienen los láser en la parte de abajo funciona con base a eso... ya como teniendo claro muchos conceptos, ya entiendo muchas cosas. (Entrevista, Víctor, octubre 15 de 2010)

De esta manera, los enunciados de Víctor no solo reflejan su voz sino también las voces a quienes se dirige. La voz de Víctor, respondía a unos enunciados previos y daba luces para posteriores enunciados. Según Bajtín, citado por Werstch (1993), “el enunciado involucra, entonces, tanto el interés por quien produce el discurso —el hecho de que el enunciado tenga un autor— como el interés por quién se dirige” (p.73). Así, desde la perspectiva de Bajtín, en los enunciados están asociados siempre por lo menos dos voces: la voz de Víctor con respecto a la de voz de cada uno de sus compañeros y, la voz de Víctor con respecto a cada una de las investigadoras.

Cuando Víctor decía “*ya en la vida, ya cuando ando por la calle... ya entiendo muchas cosas*”, ahí, él le encontraba sentido a los conceptos matemáticos y el objetivar el concepto de parábola, en las interacciones con el objeto, le permitió cambiar la forma como él interpretaba los fenómenos de su entorno, además de asumir una posición crítica frente a ellos.

En Víctor percibimos las ideas de Bajtín (2009), en el sentido de que vimos en los enunciados de él una relación entre la actividad humana y la comunicación: el vínculo del lenguaje con la vida. Según Bajtín (2009), el lenguaje se explicita en la

vida a través de los enunciados, así “cada enunciado separado, es por supuesto, individual, pero cada esfera del uso de la lengua elabora sus tipos relativamente estable de enunciados a lo que denominamos géneros discursivos”. (p. 248)

En Víctor, Estefanía y Carolina, pudimos ver cómo los enunciados reflejan las condiciones de los contextos, donde lo importante no es la palabra sino lo que refleja la palabra. Lo anterior es un ejemplo visible de la expresión de Bajtín (1999) “*el lenguaje nos constituye*”. Al ser los enunciados reflejo de los contextos, no solo están conformados por enunciados orales o escritos, en ellos también podemos incorporar elementos, como gráficos o gestos, que pertenecen al contexto de los participantes.

Así, pudimos observar en Estefanía cómo en la actividad de la representación del experimento de los rayos de luz en *Geogebra*, al preguntársele acerca de la construcción realizada por ella en relación a la forma de las antenas parabólicas, ella utilizó tanto el lenguaje oral como el gestual, veamos

**Episodio 13:** videograbación, julio 8 de 2010

	<b>Autor</b>	<b>Discurso</b>
1	Cruz	¿Cómo podríamos relacionar el funcionamiento de las antenas parabólicas con la modelación que estás realizando en <i>Geogebra</i> ?
2	Estefanía	[ <i>Señalando el foco</i> ] ¿Esto no es como el foco que tiene la antena parabólica ahí adelante? [ <i>Representando con la mano izquierda abierta la antena y con la mano derecha representa el foco</i> ] acá está la antena y acá tiene el foquito, entonces yo digo que los rayos llegan en forma paralela [ <i>acercando las manos una a otra</i> ], chocan con el foco y ahí es que se esparcen a las antenas de las casas.
3	Cruz	Modifiquemos un poco la modelación de la antena parabólica que observas en el computador, ¿cómo lo haríamos?
4	Estefanía	¿A esta curva? [ <i>señala las rectas que representan los espejos</i> ]
5	Cruz	Sí.
6	Estefanía	Ummmm. El punto o laaaa ...
7	Cruz	El punto, el espejo.
8	Estefanía	[ <i>Estefanía mueve el rayo</i> ]

- 9 Cruz ¿Qué pasa?
- 10 Estefanía Ya los rayos no llegan al foco, no hay la forma como aparecía antes, porque ya los rayos se pierden [*sonríe con asombro, como aquellos momentos que causan felicidad por haber descubierto algo*]
- 11 Cruz [*Percibe la expresión de la estudiante y pregunta*] ¿Estás descubriendo en este momento algo?
- 12 Estefanía [*sigue sonriendo*] Sí, porque mira que la forma es la que hace que lleguen a un punto y se abran otra vez así [*abre las manos representando la situación del modelo*], mientras que así [*gesticula con las manos*] el rayo como que se pierde, o sea que la forma es la que hace que como que se esparzan [*sigue asombrada*]
- 13 Cruz Listo, gracias.

Así, en (2), Estefanía en sus gestos con las manos y en la expresión de su rostro nos mostró que los signos hechos por ella al mismo tiempo que eran enunciados, eran signos que tenían una entonación ya que tenían una intencionalidad definida. En Estefanía, dichas expresiones lingüísticas y gestuales hacían percibir un tono valorativo dando a saber que su discurso estaba cargado de sentidos y significados.

Así mismo, el contenido, el estilo y la composición, o sea, la temática de esos enunciados de Estefanía, el estilo verbal en cuanto a las palabras pronunciadas y la forma como las entonó, al tiempo que hacía gestos con sus manos y su rostro, hacían que la composición de todo ese discurso se viesen reflejados en esa cultura escolar, en ese contexto de clase donde se representaba el experimento de los rayos de luz, experimento que a su vez estaba relacionado con la visita al Parque de los Deseos donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de experimentar con antenas parabólicas.

Bajtín (2009) nos expresa, también, que los horizontes de los individuos no coinciden debido a las subjetividades de éstos, y es allí donde se hace necesario empezar a comprender al otro entendiendo que el horizonte, o sea lo que el otro ve,



lo que el otro percibe, no es lo que yo percibo en el sentido literal de las palabras y de las expresiones corporales.

Dichos aspectos son importantes en nuestra investigación, en el sentido de que son ellos los que posibilitan la fluencia del diálogo entre los participantes de la investigación, como sucedió en (4, 6, 8 y 10) del episodio anterior, en el cual Estefanía trataba de responder lo que sucedía si en la representación de los rayos de luz en Geogebra la figura ya no tuviese forma parabólica. Allí, vemos como Estefanía trataba de comprender lo que se le estaba pidiendo, dudando por momentos debido a que no comprendía los enunciados de Cruz, produciéndose así una especie de ruptura en el diálogo.

En (10) cuando Estefanía logra leer lo que Cruz le pregunta, sonrío; ante lo cual Cruz, en (11) lee en Estefanía una expresión de asombro en su rostro que le mostraba alegría. Ante ello Cruz le preguntó ¿estás descubriendo en este momento algo?. Estefanía en (11) así lo ratifica al afirmar, aún con cara de asombro, *“Sí, porque mira que la forma es la que hace que lleguen a un punto y se abran otra vez así, mientras que así el rayo como que se pierde, o sea que la forma es la que hace que como que se esparzan”*.

En (10, 11 y 12) pudimos ver, como investigadoras, que cuando se analiza y percibe al sujeto investigado, cuando se excede su visión<sup>18</sup> frente a él, en este caso sobre

---

<sup>18</sup> Bajtín (2009), define el excedente de visión como “...un retoño en el cual duerme la forma y desde la cual ésta se abre como una flor. Pero, para que el retoño realmente se convierta en la flor de la forma conclusiva, es indispensable que el excedente de mi visión complete al horizonte del otro contemplado sin perder su carácter propio. Yo debo llegar a sentir a ese otro, debo ver su mundo desde dentro, evaluándolo tal como él lo hace, debo colocarme en su lugar y luego, regresando a mi propio lugar, completar su horizonte mediante aquel excedente de visión que se abre desde mi lugar,

Estefanía, se pudo percibir en el momento de la realización de la actividad que Estefanía estaba objetivando el concepto de parábola desde los sentidos y significados generados por la actividad misma y por los interrogantes planteados por Cruz. Así, Estefanía, durante el diálogo sostenido con la investigadora logró encontrar otros sentidos y significados a la actividad realizada, gracias al excedente de visión de ambas.

Así, “abrirse en flor” para el caso de Estefanía le significó a las investigadoras completarle su horizonte sin quitarle su originalidad, aspecto que también pudo ser pensado a partir del proceso que posibilitó guiarla hacia una resignificación de su proceso de objetivación de la parábola, en el marco de la actividad que desarrollaba en el momento, en unión de las otras actividades realizadas previamente. Allí, la extra-posición<sup>19</sup> de las investigadoras le posibilitó a su vez a Estefanía su propia extra-posición, lo que a su vez le llevó a una resignificación del sentido de la actividad. Dicha resignificación la reitera Estefanía en actividad del 14 de septiembre cuando expresa que:

...a través de Geogebra fue que descubrimos que la forma debía ser una parábola, porque experimentamos con varias formas y con la única que lográbamos reflejar los rayos de luz en el foco era con la parábola, con las otras la señal se desviaba. Gracias a esta forma era que se lograba reflejar los rayos paralelos y dar directamente en el foco. (Videograbación, Estefanía, septiembre 14 de 2010)

---

que está fuera del suyo, debo enmarcarlo, debo crearle un fondo conclusivo del excedente de mi visión, mi conocimiento, mi deseo y sentimiento” (p. 30).

<sup>19</sup> En el sentido de Bajtín (2009), la extraposición significa entender al otro desde su postura personal, entender al otro desde su esencia, así: “cuando observo a un hombre íntegro, que se encuentra afuera y frente a mi persona, nuestros horizontes concretos y realmente vividos no coinciden, es que en cada momento dado, por más cerca que se ubique frente a mí el otro, que es contemplado por mí, siempre voy a ver y a saber algo que él, desde su lugar y frente a mí no puede ver ... Cuando nos estamos mirando, dos mundos diferentes se reflejan en nuestras pupilas. Para reducir al mínimo esta diferencia de horizontes, se puede adoptar una postura más adecuada, pero para eliminar la diferencia es necesario que los dos se fundan en uno, que se vuelvan una misma persona. (Bajtín, 2009. p. 28)

Estefanía en ese discurso, al incluir a sus compañeros de equipo, nos mostró que el sujeto se constituye en las interrelaciones con el otro, en la extra-posición del yo y del otro, en el acontecimiento de la comunicación dialógica en el marco de la actividad humana. Así mismo, nos mostró como redescubrir sus sentidos producidos al no resistirse a encerrar el “yo” en una única postura emocional y cognoscitiva del mundo.

Estefanía, en la entrevista realizada por Yolanda, también nos mostró que ese “otro” no solo es referido a otros sujetos sino también a actividades anteriores a la de la representación de los rayos de luz en Geogebra, por ejemplo, la visita a las conchas acústicas del Parque de los Deseos y al experimento de los rayos de luz. Ello nos lo hizo saber al preguntársele acerca de las actividades que más recuerda, respondiendo:

Una de las actividades más significativas fue la de los espejos, porque era muy curioso que uno al ir poniendo el espejo así en la formita de la parábola y reflejándolo con el láser, él se reflejaba en ese punto, porque estábamos iniciando y eso era como: ah!!, por qué pasa eso. También cuando fuimos al parque de los deseos, porque normalmente uno sí lo visita, pero uno no le presta como mucha atención a cómo funcionan las conchas y esas cosas; pero fue ahí donde nos dimos cuenta de cómo funcionaba y qué transmitía el sonido. (Transcripción grabación, 14 de septiembre de 2010)

Desde esta mirada, pensamos que el aula de clase debe ser un espacio simbólico, posibilitador de encuentros dialógicos, en el que el estudiante se subjetive en las interacciones con el objeto, donde haya una negociación continua de significados.

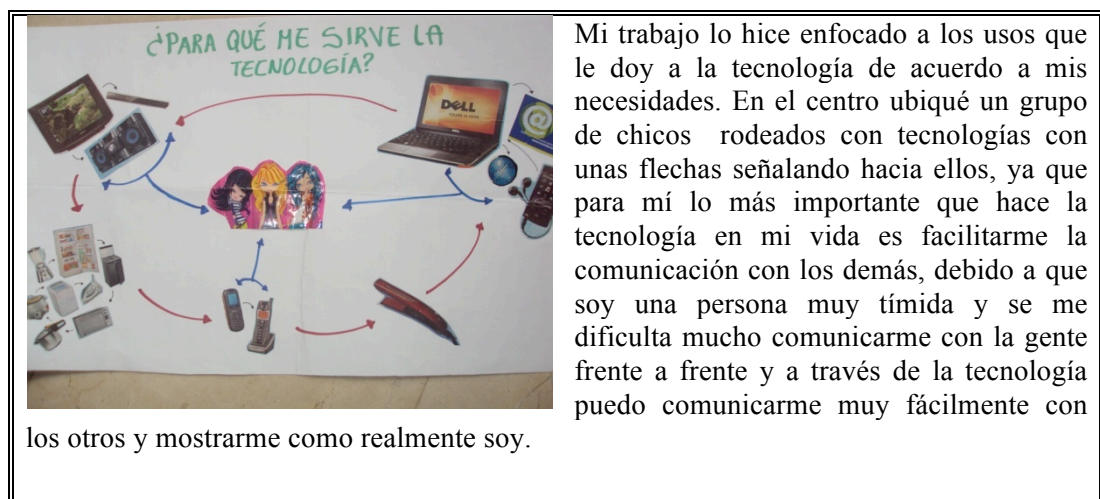
Un espacio simbólico donde al estudiante se le posibilite la apropiación de valores culturales construidos. Según Radford (2008)

La objetivación que permite este encuentro no es un proceso individual sino social. La sociabilidad del proceso, sin embargo, no puede ser entendida como un simple negocio “negociación” durante la cual cada actor invierte algo de capital (por ejemplo, algunos significados) con la esperanza de acabar con más de él. Aquí, la sociabilidad, es el proceso de la formación de la conciencia que Leontiev (1978), parafraseando a Vygotski, caracterizaba como co-sapientia, es decir, como saber en común o saber-con los demás. (p.227)

Así, en esta investigación, la subjetivación juega un papel transcendental dentro de la objetivación del concepto de parábola, ya que dentro de ésta, no sólo buscábamos la interacción con el objeto de conocimiento, sino también pretendíamos que, a través de las actividades, se propiciara un espacio para el debate, la reflexión y la crítica, donde los estudiantes se (re)constituyeran como sujetos.

Fue así como en una de las primeras actividades, propusimos a los estudiantes que elaboraran un ideograma, en el cual expresaran su relación con la tecnología.

Estefanía, presentó el ideograma que mostramos en la figura 15 y expresó:



*Figura 16: producción escrita, Estefanía, abril 6 de 2010*

Para Estefanía, la tecnología le permitió, en ese momento, comunicarse con sus compañeros, socializar, ya que en el aula de clase ella sentía que no podía expresar sus ideas. A lo largo de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, Estefanía y su grupo se destacaron por su compromiso y dedicación. Ya Estefanía no era la estudiante tímida y con dificultades comunicativas que ella decía tener, ahora

ella era una líder en el aula de clase, que posibilitaba el debate y la reflexión. Al respecto Víctor, al preguntarle sobre el trabajo en los equipos de investigación, respondió:

Hubo algunos grupos que estuvieron muy comprometidos, que tuvieron trabajos excelentes. Por ejemplo el grupo de la compañera Estefanía Pulgarín fue un grupo también excelente; también hubo otros que no se les notó el interés por descubrir nuevas cosas...Pero en general, considero que en general, de todos los grupos sí hubo buenos trabajos. Yo diría que excelente todo, porque todos pusieron de su parte. (Entrevista, Víctor, octubre 15 de 2010)

Al final de las investigaciones, Estefanía ya no era la misma que había hablado en su ideograma, ella estaba aprendiendo a interactuar con los demás; ella se dio la posibilidad de escuchar otras voces y al mismo tiempo escucharse ella misma, de creer en sus capacidades y transformar sus debilidades en potencialidades. Ella misma, después de haber concluido su trabajo investigativo, expresó:

Mi desempeño, fue muy bueno, excelente, yo trabajé mucho, yo me esforcé mucho por esa actividad, porque me pareció muy interesante, porque me ocasionaba mucho interés descubrir. Cuando nos hicimos la pregunta yo era pensando, ¿pero cómo voy a descubrir eso?, ¿cómo voy hacer para solucionarla? Fue muy bueno para mí, entonces puse mucho interés en el trabajo porque me gustaba mucho descubrir la respuesta de lo que me había preguntado. (Entrevista, Estefanía, octubre 15 de 2010)

De esta manera, con el diseño de cada una de las actividades, pretendíamos promover el concepto de autonomía pero dentro del respeto por el otro, donde cada estudiante aprendiera a vivir en su aula, parafraseando a Radford (2008), a que cada uno de ellos trabajará en la creación de oportunidades que les llevaran a su realización personal, a su (re)constitución como sujetos, a la crítica y la comprensión mutua, entendiendo que mi palabra no es la única, que existen múltiples voces y múltiples significados.

Así, los estudiantes fueron aprendiendo a escucharse, a entender los argumentos del otro, a darle sentido y significado a los enunciados de sus compañeros. Al respecto

Víctor dijo:

Por ejemplo, en el equipo eran cuatro personas, y cuatro cabezas piensan mejor que una. Se comparten las ideas, se socializan y, así, se crea un concepto ya en general, se resuelven muchas más dudas. Mientras que si uno trabajando solo, de pronto sí se va a aprender más porque uno está más comprometido, uno no tiene que preocuparse por los demás, pero también van a ver muchas dudas que otro compañero se las pueda resolver. (Entrevista, Víctor, octubre 15 de 2010)

Víctor era un estudiante que propendía en las clases de matemáticas por un trabajo individual más que grupal. Él que en este episodio deja ver todavía esta inclinación, empezó a valorar la palabra del otro, a cómo el otro también puede enseñarle y a ayudar en su constitución como sujeto.

Consideramos que en esta investigación posibilitamos a través de las actividades diseñadas desde las actividades orientadoras de enseñanza y, desde la metodología de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, la multiplicidad de voces de los estudiantes, dándoles la oportunidad de producir sentido y significado sobre el trabajo o investigación que llevaban a cabo al interior de la sala de clase de matemáticas. En cada clase aconteció un encuentro dialógico que posibilitó el respeto por el otro, por su historia y por su diversidad. En palabras de Bajtín (2009) dar sentido, valorar al otro como hombre libre, desde su dimensión ética y estética.

## CONCLUSIONES

En este trabajo pretendimos dar respuesta a la pregunta, ¿cómo es el proceso de objetivación de la parábola desde el uso de artefactos en estudiantes de grado once? Siendo el objetivo de la investigación analizar el proceso de objetivación de la parábola desde el uso de artefactos en estudiantes de grado once. Para realizar este análisis tuvimos como referente el enfoque sociocultural de la educación, y desde allí, nos apoyamos en presupuestos teóricos como: *la teoría de la actividad, la teoría de la objetivación, las Actividades Orientadoras de Enseñanza y las Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*. Para el análisis de las producciones de los estudiantes, partimos de los episodios obtenidos al interior de las actividades plateadas bajo *las actividades orientadoras de enseñanza*; episodios, que desde nuestra mirada, nos posibilitaron dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Las actividades que propusimos, desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, posibilitaron que los estudiantes pudieran realizar el procedimiento de ascensión de lo abstracto a lo concreto, a través de las abstracciones y generalizaciones que los llevaron a la objetivación del concepto de parábola. Además, estas actividades, posibilitaron, a los estudiantes, la comprensión de fenómenos del medio, específicamente, el funcionamiento de las antenas parabólicas. Las actividades también viabilizaron el uso de artefactos que mediaron en cada una de las acciones de los estudiantes y posibilitaron su desarrollo psíquico.

De esta manera, la ascensión de lo abstracto a lo concreto, en Carolina, Estefanía y Víctor se fue posibilitando en cada acercamiento de ellos al objeto, a través de las abstracciones establecidas durante cada actividad. Abstracciones que dependieron, a su vez, de los diferentes artefactos que estuvieron presentes en cada una de las actividades propuestas, de las acciones ejercidas sobre los artefactos por los estudiantes e investigadoras y, de las relaciones entre las diferentes actividades, relaciones que se fueron tejiendo a lo largo del proceso investigativo, y que les permitió, a los estudiantes, ir objetivando el concepto de parábola.

El proceso de objetivación del concepto de parábola, en los protagonistas de la investigación, se fue dando en cada una de las acciones mediatizadas por artefactos, presentados éstos al interior de las diferentes actividades; acciones que les fueron posibilitando la producción de sentidos y significados del concepto de parábola ocurridos durante el transcurso de cada una de las actividades. Así, cada uno de los artefactos utilizados fue parte constitutiva de los sujetos investigados. De esta manera, en cada aproximación de Carolina, Estefanía y Víctor al concepto de parábola, cada uno de los artefactos, como constituyentes, les permitió a los estudiantes la producción de otros sentidos y significados que les fueron llevando, paulatinamente, a la objetivación del concepto de parábola. Así, cada *descubrimiento* de Carolina, Estefanía y Víctor fue, de hecho, producto de sus significados culturales e interpretaciones que, mediados por los diferentes artefactos, en el desarrollo de cada actividad, les iba posibilitando establecer relaciones entre los elementos de la parábola e ir objetivando dicho concepto.



Así, los artefactos se tornaron como constituyentes del pensamiento en la dialéctica sujeto-objeto, ya que en esas interacciones de los estudiantes con el concepto de parábola, Víctor, Carolina y Estefanía transformaban al objeto y, al mismo tiempo, ellos mismos se transformaban. En cada uno de los acercamientos entre los protagonistas y el concepto de parábola, se produjo una reconstitución de ambos. Proceso llamado por Radford como objetivación y subjetivación.

El *software Geogebra* se convirtió en uno de los artefactos que posibilitó la objetivación del concepto de parábola, ya que, mediante la modelación del experimento de los rayos de luz, los estudiantes establecieron relaciones desde los sentidos y significados de sus experiencias con actividades anteriores, como las referidas a las antenas parabólicas. Desde estas relaciones, los estudiantes pudieron establecer las condiciones para que se produjese la reproducción del sonido o reflexión de la luz según el caso.

*Geogebra* se convirtió en uno de los artefactos que posibilitó a los estudiantes la objetivación del concepto de parábola, ya que, les posibilitó descubrir —a través del dinamismo proporcionado por *Geogebra*, por medio del modo de arrastre y de las experiencias y las actividades propuestas anteriores a la de la modelación— las relaciones entre los elementos constituyentes de la parábola desde su construcción en *Geogebra*. Estas relaciones le posibilitaron, a su vez, la objetivación del concepto de parábola, mientras iban dando respuesta a su pregunta de investigación.

En esta investigación, la (re)constitución de subjetividades jugó un papel importante dentro de la objetivación del concepto de parábola, ello debido a la creación de espacios, durante el desarrollo de las diferentes actividades, para el debate, la

reflexión y la crítica. Estos espacios posibilitaron en los estudiantes ir (re)constituyéndose como sujetos. Así, durante el transcurso de la investigación no sólo se logró la interacción de los estudiantes con el objeto de conocimiento, en este caso el de parábola, sino también la (re)constitución de los estudiantes como sujetos. Durante el transcurso de la investigación los estudiantes fueron transformado el objeto matemático investigado a la vez que se (re)constituían como sujetos. De este modo, estudiante y concepto de parábola, se iban transformando mutuamente.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of computer for Mathematical Learning*, 7(3), pp. 245-274.
- Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Siglo XX.
- Bajtín, M. (1986). *Problemas de la poética de Dostoievkil*, España.
- Bagazgoitia, A. (2003). Geometría con cabri. *Revista de Matemáticas Sigma*, 22. 83-98.
- Balacheff, N. y Kaput, J. (1996), Computer-Based environments in mathematics. En Bishop, A. et al (eds). *International Handbook of Mathematical Education*, (pp. 469-501). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Caraça, B.J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Livraria sá da costa editora. Lisboa.
- CEDRO, W. O. (2008). *O motivo e a atividade de aprendizagem do professor dematemática: uma perspectiva histórico-cultural*. São Paulo: s.n.
- Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica y teoría experimental*. Moscú: Editorial Progreso.
- Freire, P. (1992). *Pedagogía del oprimido*. Madrid: Siglo XXI.
- Freire, P. (1997). *Pedagogía de la Autonomía, saberes necesarios para la práctica educativa*. México: Siglo XXI.
- Moura (2010). *A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília-DF: Liber Livro Editorial Ltda.
- Hernández, R. Fernández, C. & Batista, P. (2008). *Metodología de la investigación* (4ta Ed). México: McGraw-Hill.
- Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

- Leontiev, A. N. (1978). *Desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário.
- Leontiev, A. N. (1981). *Actividad, conciencia, personalidad*. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Ministerio De Educacion Nacional. (1995). *Ley General de Educación. Ley 115 del 8 de Febrero de 1994*. Bogotá, Colombia: Empresa Editorial Universidad Nacional.
- Ministerio De Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá, Colombia: Creamos Alternativas Soc Ltda.
- Ministerio De Educación Nacional. (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y fundamentales*. Bogotá, Colombia: Punto Exe Editores.
- Moreno, L. (2002a). Evolución y tecnología. En MEN 2002. *Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Serie Memorias. Obtenido el 5 de Marzo de 2009, en [http://www.oei.es/tic/articles-81040\\_archivo.pdf#page=82](http://www.oei.es/tic/articles-81040_archivo.pdf#page=82)
- Moura, M. O. (2002). *A atividade de Ensino como Ação Formadora*. In: Castro, Amélia Domingues e Carvalho, Ana Maria Pessoa de (org.) *Ensinar a ensinar*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda. pp.143-162
- Osi, E. (2004). *Aprendiendo cónicas con un texto interactivo*. Tesis de maestría. Universidad Nacional del Comahue. Provincia de Río Negro, Argentina. Obtenido el 1° de junio de 2009, en <http://www.soarem.org.ar/Documentos/36%20Osiio.pdf>
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Radford, L. (1996). *Lizcano y el problema de la creación matemática*. Mathesis 12.
- Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. Conferencia plenaria dada en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp. 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of being an knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (1 ed., Vol. 1, pp. 215-234). Rotherdam: Sense Publishers.

Recio, T. (2009). *Geometría dinámica*. Colección Lemniscata. No. 7.

Reyes, M. E. (2001). *Evaluación de un programa computarizado basado en visual basic 5.0 y cabri géomètre II para reforzar el aprendizaje de las secciones cónicas a nivel de segundo año de ciencias del ciclo diversificad*. Tesis de maestría. UCLA-UNEXPO-UPEL IP. Obtenido el 15 de Marzo de 2009 en [http://bibcyt.ucla.edu.ve/cgi-win/be\\_alex.exe?Acceso=T070300011278/0&Nombrebd=BIBCYT&Destacar=evaluacion;educativa](http://bibcyt.ucla.edu.ve/cgi-win/be_alex.exe?Acceso=T070300011278/0&Nombrebd=BIBCYT&Destacar=evaluacion;educativa)

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la Investigación Educativa*. Santa Fe de Bogotá: Cdooperativa Editorial Magisterio.

Stalin (Eds), *Cuestiones del leninismo*, pp. 849-890. Pekín: Edición de lenguas extranjeras. Obtenido el 12 de junio de 2010 en: <http://www.marxismoeducar.cl/stalin01.htm>

Vasilachis de Gialdino, I. (coord.) (2006) *Estrategias de investigación cualitativa*, 23-64. Barcelona: Gedisa.

Vygotski, L.S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotski, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. En: J. V. Wertsch (ed.) *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, New York: Sharpe.

Vygostki, L.S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la Mente*. Madrid: Visor Distribuciones.

## ANEXO

### ENTREVISTA A ESTUDIANTES

#### PROYECTO DE INVESTIGACIÓN “El Conocimiento Matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”

#### DERROTERO

Fecha de la entrevista: Octubre 15 de 2010

Nombre del entrevistado:

Institución: Institución Educativa Comercial Antonio Roldán Betancur

Grado Escolar: 11°

Edad:

Nombre de la profesora de matemáticas:

#### **Sobre el conocimiento matemático**

1. Recuerdas durante el proyecto ¿qué conceptos matemáticos se abordaron en la clase de matemáticas?
2. ¿Cómo te apropiaste de estos conceptos? (parábola, propiedad reflexiva, foco) menciona algunos ejemplos abordados en clase y otros.

3. En esta investigación se hicieron varias actividades, unas dentro del aula, otras fuera del aula, de esas actividades hay una particular que fue la que llamamos modelación en Geogebra, ¿qué recuerdas de esa actividad?. De acuerdo el desarrollo de las actividades que tu hiciste en clase, ¿qué pasó con este episodio?.

### **Sobre las actividades de clase**

4. De las actividades que hicieron en el aula de clase, ¿cuáles recuerdas más y por qué?

5. De las que hicieron fuera del aula, ¿cuáles recuerdas?

6. Si por ejemplo, te dijéramos en este momento, te vamos a poner de profesor de matemáticas de un grado 11º, para que le enseñes a los muchachos ese concepto de parábola y todos estos temas que trabajaron ustedes, ¿qué actividades harías para trabajar con unos otros estudiantes de grado 11º, para que comprendieran ese concepto de parábola, en todo ese proceso de investigación?, ¿qué actividades harías, las mismas, las cambiarías?

7. ¿Cómo venían siendo tus clases de matemáticas hasta el grado décimo?

8. ¿Cómo te parecieron esas clases, particularmente en el proyecto de investigación?

9. ¿Cómo crees que se aprende mejor?

10. Ustedes en el proyecto trabajaron en equipo, damos una opinión de trabajar en equipo

**Sobre las interrelaciones (relaciones de él con el cto, con los compañeros, con el profesor, con la clase toda).**

11. ¿Qué opinión tienes frente al trabajo en equipo realizado por tu grupo?
12. ¿Cómo fue tu desempeño en dicho trabajo?
13. ¿Cómo viste el trabajo en los otros grupos?
14. ¿Estar interactuando con otros compañeros favoreció tu aprendizaje y apropiación de los conceptos abordados?
15. ¿Cuál fue el papel del profesor a la hora del desarrollo del trabajo en equipo?
16. Desde las actividades desarrolladas en clase, ¿qué relaciones crees que se generaron entre el conocimiento matemático, tú, tus compañeros y tu profesora?
17. ¿Qué relaciones puedes establecer entre estos conceptos aprendidos en clase y tu entorno?