Relaciones estructurales elementales de la aritmética y sus relaciones con el lenguaje*

Orlando Monsalve Posada **

1. Importancia de las estructuras

Partamos de lo que nos dice Jesús Palacios al presentamos la Teoría Educativa de Jerome Bruner, en la Revista *Infancia y Aprendizaje* No. 7 p. 13-14.

---

* Ponencia presentada en el Sexto Encuentro regional de Semiología aplicada. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación 1991

** Profesor Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Actualmente dedicado a investigar la relación entre matemáticas y lenguaje

"La estructura fundamental de las materias—las ideas básicas—debe ocupar el primer puesto y el corazón de lo que se enseña a los alumnos".

"Cada asignatura tiene unos núcleos básicos, una serie de ideas centrales y un modo particular de razonar".

Lo que el estudiante debe asimilar ante todo, es ese núcleo, esa forma particular de pensar. Las ideas básicas que radican en el corazón de todas las ciencias y los temas básicos que dan forma a la vida y a la literatura son tan sencillos como poderosos.

El dominar esas ideas básicas, usarlas eficazmente, requiere de una continua profundización del entendimiento de ellos por uno mismo que proviene del enseñar a usarlas en formas progresivamente más complejas.

La idea fundamental es sencilla: lo que más importa que el niño domine es el núcleo central, la estructura básica de cada materia; a medida que el niño avanza en el aprendizaje de las respectivas materias, el núcleo central va siendo profundizado y ampliado.

¿Por qué la insistencia de Bruner en las estructuras fundamentales?

1.1. La comprensión de éstas hace a una materia mucho más asequible para el niño, pues le proporciona un cuadro general en cuyo interior los detalles son más comprensibles y las relaciones entre ellas se hacen más claras.

1.2. Dados los límites de la memoria humana para retener todos los detalles con que la inteligencia tropieza, es imprescindible dar al alumno unas representaciones simplificadas que le sirvan de patrones estructurales en las que articule la información; tales representaciones simplificadas tienen un "carácter regenerativo que permite posteriormente la reconstrucción de los elementos que abarca; Lo que hace el aprendizaje de los principios generales o fundamentales es asegurar que la pérdida de memoria no signifique una pérdida total, sino que lo restante nos permita reconstruir los detalles cuando se necesiten".

Como lo anota el mismo Bruner, una buena teoría permite no sólo entender un fenómeno sino también recordarlo en el futuro.

1.3. El aprendizaje de las estructuras básicas permite mejor que ninguna otra cosa, una transferencia adecuada y efectiva; cuando algo se aprende como ejemplo de una cosa más general (y entender los principios o estructuras elementales no es otra cosa) se ha aprendido, además, una cosa concreta: un modelo para entender otras cosas similares que después se pueden encontrar. "Captar la estructura de un asunto es entenderlo de una forma que permita a muchas otras cosas relacionarse significativamente con él. Aprender estructuras en resumen, es aprender cómo están relacionadas las cosas".

1.4. "De otro lado, hay ideas que aparecen reiteradamente en todas las áreas de la ciencia; aprenderlas en una u otra forma general facilitará enormemente la tarea de aprenderlas después, en diferentes formas, en otra parte de la ciencia".

1.5. "Por último, la comprensión de la estructura fundamental de cualquier materia es un requisito para la aplicabilidad del saber, para hacer que el conocimiento se refleje en los problemas que uno encuentra en las aulas a los que llevará el curso de la formación; para que una persona esté en condiciones de reconocer la aplicabilidad o inaplicabilidad de una idea a una nueva situación y de aplicar su aprendizaje respectivo, debe tener claramente presente la naturaleza del fenómeno del que se está ocupando".

"Cuando más fundamental o básica sea la idea aprendida, casi por definición, tanto mayor será su alcance de aplicabilidad a nuevos problemas."

2. Relaciones interdisciplinarias

Se colige entonces que una concepción estructural de la enseñanza implica tener claro las relaciones al interior de cada materia tomada en forma autónoma, de un lado, y unas relaciones con las demás asignaturas del currículo escolar, por el otro; implica, además, el que los profesores dialoguemos no sólo en el terreno personal de camaradería o colegaje, sino también en el campo teórico de las formaciones profesionales para resolver problemas escolares que necesitan un abordaje multidisciplinario; sólo intercambiando saberes nos es fácil entender que la Biología, la Geografía, por ejemplo, tienen mucho en común; la Geografía y la Historia, lo mismo; las Matemáticas y el área de Español tienen mucho sobre qué conversar, y así sucesivamente con las demás áreas del pénsum escolar.

3. Algunas relaciones sencillas entre el lenguaje natural y el ***lenguaje de las matemáticas***

Sólo nos ocuparemos de algunas relaciones elementales y prácticas entre la Lengua y las Matemáticas respectivamente.

El éxito o el fracaso escolares están centrados en estas dos áreas; pero si analizamos más de cerca el asunto todo depende, en últimas, del rendimiento en el sector del Lenguaje.

La dificultad para la solución de un problema matemático no radica tanto en la aplicación de los algoritmos pertinentes sino en la dificultad para entender el enunciado lingüístico que el problema plantee: la relación que establecen las oraciones al interior del tallo —o enunciado— del problema y la clase de operaciones matemáticas que es preciso realizar para dar con la solución: dicho de otra manera, la solución de un problema matemático pasa primero por la comprensión del respectivo enunciado lingüístico.

El profesor Lancelot Hogben en su interesante libro *La Matemática en la vida del hombre* plantea una íntima conexión entre los conceptos del lenguaje natural y los del lenguaje artificial de las Matemáticas; veamos algunas de ellas:

Lengua natural	Lengua artificial
Nombres	Números
Nombres propios	Números enteros, fraccionarios, etc.
Nombres comunes	Cuentas: miden la magnitud de un grupo de objetos. Estimación.
Nombres abstractos — colectivos	x — y — z, etc.
Pronombres	ji e
Verbos	+ , x , + , V
Sinónimos	**7^2 = 49 : V49 = 7**
Oraciones	Ecuaciones: A = 1.a
Diccionarios	Tablas: de multiplicar, de logaritmos, de fórmulas, la periódica.

(Continuación)

Lengua natural	Lengua artificial
Sintaxis	Orden de las operaciones; las oraciones matemáticas tienen la misma estructura; contienen siempre el mismo verbo obtener, que se escribe =, y divide a la oración en dos partes llamadas miembros de la ecuación. $x + a = y + a$ $x - a = y - a$
Analogías: $\dfrac{\text{fundir}}{\text{fundido}} = \dfrac{\text{escribir}}{?}$	$\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{?}}$
Adjetivos	$\dfrac{B + b}{2} . h$
Adverbios	^{n}V El índice modifica la significación del radical
Elipsis	V; el 1 se suprime en muchos casos.
Redundancia	Reducción de términos semejantes; acá se concreta el carácter económico de todo sistema.

Mientras en la lengua natural hay unas relaciones significante/significado fáciles de captar dado el carácter concreto de los referentes, en el lenguaje artificial de las Matemáticas ya no es tan fácil ver la relación porque los referentes son abstracciones más refinadas a través de la historia; así, una oración como tome el lápiz y dibuje un gato es mucho más fácil de comprender inicialmente que calcule el área de un triángulo de base 4 y altura 3; o cuál es la tangente del ángulo de 45®, porque las Matemáticas se mueven en un campo relativamente autónomo con respecto al mundo de lo concreto real, ya que ella trabaja con magnitudes, cantidades y relaciones desde un principio.

Como un ejercicio de aplicación, permítanme proponerles lo siguiente: traducir el enunciado lingüístico al lenguaje matemático; intentar primero resolverlo por tanteos aritméticos y luego pasarlo al lenguaje más general del Algebra.

> Una bandada de palomas pasa junto a un gavilán quien muy coquetonamente se dirige a ellas diciéndoles: ¿Para dónde van mis cien palomas? La líder del grupo le responde: nosotras no somos cien; pues nosotras más otro tanto, más la mitad, más la cuarta parte y usted, apenas somos cien. ¿Cuántas palomas iban en la bandada?

4. El signo lingüístico

Otro aspecto importante a considerar con relación al punto anterior es que en el lenguaje hablado, el signo lingüístico es un sustituto de la realidad hablada; un sustituto de un sustituto que ha pasado por las siguientes etapas: a. símbolo como pintura directa, b. pictograma; c. ideograma, d. fonograma, e. silabario, y finalmente f. letras.

Sobre la base de esta evolución del símbolo al signo, procedieron las Matemáticas, por analogía con la lengua natural, a confeccionar su propia simbología y su propia gramática; éstas se convirtieron así, a su vez, en un sustituto de un sustituto, de un sustituto, lo cual creo yo, es una de las explicaciones para esas dificultades iniciales con las cuales tropezamos en la escuela en las clases de Aritmética.

5. *Una tabla de multiplicar dinámica*

Para no alargamos demasiado, miremos rápidamente las interesantes relaciones operatorias que se pueden establecer en la tabla de multiplicar y cuyo dominio es pilar fundamental para todas las demás áreas de las mismas: Aritmética, Geometría Plana, Espacial y Analítica, Algebra, Trigonometría, Cálculo, Física.

Todas las Tablas conocidas —las de multiplicar, la de logaritmos, la periódica, las de fórmulas, etc.— son recopilaciones o registros de los saberes acumulados por una cultura determinada a lo largo de los siglos con miras a evitar su olvido y no tener que reconstruirlos a cada momento y además para que sirvieran de consulta rápida; son pues ayudas visuales o nemotécnicas que no necesitan ser repetidas en forma mecánica, sino reconstruidas en forma lógica cada vez que se necesite recurrir a ellas.

El cuerpo humano proporcionó la base para diversos sistemas de numeración y medida: el geme, la cuarta, una mano, la braza, la pulgada, el pie.

La primera ayuda para el cálculo que el hombre adecuó fue su propia mano ala cual recurrió constantemente para ayudarse en sus cuentas; si es una herramienta tan antigua y tan natural ¿por qué diablos se la impedimos utilizar a nuestros niños cuando están aprendiendo a contar?

Para lo que nos ocupará a continuación, partimos del supuesto de que el alumno ya conoce en forma adecuada la tabla de multiplicar, sin detrimento, obviamente, de que indaguemos nuevas alternativas para automatizarlas, diferentes a la simple memorización mecánica de las mismas; además que se haya asimilado conscientemente el sistema decimal.

La primera etapa será entonces la del conteo.

En la tabla tal como la presentamos en forma integral y no por tablas de números aislados, es posible lograr los siguientes aprendizajes complementarios, desde el punto de vista aritmético y por analogía aplicar las fórmulas algebraicas pertinentes.

5.1. Como tiene líneas y columnas con una razón constante, es posible ejecutar algunas sumas en forma rápida.

5.2. Para el descubrimiento de los números primos comprendidos entre 1 y 100.

5.3. Para calcular el perímetro de algunas figuras geométricas.

5.4. Para saber el área de una figura que tiene cuatro ángulos rectos: b x h (rectángulo).

5.5. Para calcular el área de una figura que tiene los lados opuestos y paralelos: b x h (paralelogramo).

5.6. Para calcular el área de una figura que tiene tres lados:

b x h (triángulo)

~~2

5.7. Para sacar el área de una figura que tiene dos lados paralelos:

$$\frac{B + b}{2} \cdot h \text{ (trapecio)}$$

5.8. Para calcular el área de una figura que tiene cuatro lados iguales: b x h (rombo).

5.9. Observemos ahora la diagonal de izquierda a derecha; allí aparece una clase muy particular de multiplicación: los cuadrados del 1 al 9; observemos su simetría parcial tomando al 5 como eje.

5.10. Miremos la razón de esa diagonal: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 etc.; ahora restemos los cuadrados de números consecutivos. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos?

5.11. Ahora sumemos los cuadrados consecutivos. ¿A qué es igual la suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos?

5.12. Observemos cómo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, es una fórmula que permite elevar al cuadrado en forma rápida, un número de dos cifras (potenciación). Ejemplo:

$48^2 = 2304$, veamos por qué.

8 = 64, escribo el 4 y llevo 6

Dos veces un factor por el otro: 2(8 x 4) = 64

64 + 6 que llevo = 70; escribo el 0 y llevo 7. 04

$4^2 = 16$; 16 + 7 que llevo del paso anterior = 23 2304

Por lo tanto, el cuadrado de 48 = 2304.

6. El tacuaritmo

El Tacuaritmo es una tabla que permite extraer en forma rápida las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos de los números comprendidos entre el 0 y el 99.

TA = abreviatura de tabla

TAC = prefijo griego que significa rápido

CUA = por ser una tabla de cuadrados

ARITMO = Número

Para su aplicación partimos del conocimiento previo de los cuadrados de los números del 0 al 9.

Se puede organizar en forma secuencial —tal como aparece a continuación, pero recomendamos confeccionarla en desorden para evitar el aprendizaje memorístico y por ende no se asimile el proceso lógico mental que ella implica.

100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

6.1 Metodología

Realicemos primero tres ejercicios prácticos y luego derivemos la metodología subyacente a éstos.

Extraigamos la raíz cuadrada a los siguientes números

Vl69 V841 Vi296

Por la Aritmética sabemos que el número de cifras de la raíz cuadrada de un número es igual a la mitad de las cifras del radicando, o una más si la mitad no es exacta; así, un número de siete cifras tendrá una raíz cuadrada de cuatro, pues se aproxima por exceso, uno de cuatro cifras tendrá una raíz de dos cifras.

Por lo anterior, los tres ejercicios propuestos van a tener raíces de dos cifras.

6.1.1. Deduzcamos la cifra de las unidades de la raíz cuadrada de cada uno de los ejemplos.

Vó9:como termina en 9, la cifra de las unidades va a ser 3 o 7.

V841:como termina en 1, la cifra de las unidades va a ser 1 o 9.

Vl296:como termina en 6, la cifra de las unidades va a ser 4 o 6.

6.1.2. Para el paso siguiente, tendremos en cuenta la cifra de las centenas, para los cuadrados de tres cifras—1,8, respectivamente—; para los de cuatro cifras, se consideran las dos primeras —12, en este caso—.

6.1.3. Ahora pensemos números, entre el 0 y el 9, que al multiplicarlos por sí mismos, el resultado sea igual o se acerque por defecto a las cifras mencionadas en el numeral anterior.

Estos números son —1,2,3; en esta forma obtenemos las dos posibles raíces de los tres ejemplos:

	13		21		34
Vl69		V84 1		Vi 296	
	17		29		36

6.1.4. A continuación, elevemos al cuadrado las cifras de las decenas de las raíces ya detectadas —1, 2, 3—; restémoslos de las cifras, de las centenas de los números de tres cifras o de las dos primeras de los radicandos de cuatro cifras.

1 centenas de 169	8 centenas de 841
-1 cuadrado de 1	-4 cuadrado de 2
0 diferencia	4 diferencia

12 dos primeras cifras de 1296
-9 cuadrado de 3
3 diferencia

6.1.5. Esta diferencia puede ser mayor, igual, o menor que la primera cifra, ya calculada, del par de raíces. Si esta diferencia es mayor, o igual, la raíz cuadrada será la mayor de la pareja.

Si la diferencia es menor, la raíz cuadrada será la menor de la pareja.

En los ejemplos que venimos analizando, tenemos entonces:

	13	
V169		La diferencia es 0, 0 < 1, por tanto Vi69= 13
	19	
	21	
V841		La diferencia es **4, 4** > 1, por tanto **V841=29**
	29	
	34	
V1296		La diferencia es 3, 3 = 3, por tanto Vl296=36
	36	

Precédase en idéntica forma para los radicandos terminados en 0 o 5.

6.1.6. Una vez dominado el mecanismo de estos ejercicios de cálculo mental rápido y preciso se pueden proponer ejercicios un poco más complejos, por ejemplo, agregarles a los cuadrados de la tabla, dos, cuatro, seis, ocho o más ceros a la derecha; y finalmente ejecutar ejercicios para la extracción de raíces inexactas o por aproximación.

6.2 Sugerencias

6.2.1. Como acabamos de ver, es bueno hacer ejercicios paralelos que aligeren el cálculo mental rápido; la tabla de multiplicar suministra la posibilidad de adecuar algunos de ellos para efectos prácticos.

6.2.2. Sería igualmente provechoso el incremento de ejercicios que impliquen la traducción de la lengua natural a la artificial y viceversa.

7. Conclusiones

Aunque no haya novedades teóricas en el campo de las Matemáticas escolares, en el terreno de la Didáctica de la misma sí queda mucho campo abonado para las iniciativas pedagógicas individuales; cualquier aporte que tienda a la mejora de la misma, será bienvenido en nuestra Facultad de Educación.