Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora

Propuestas y experiencias

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Compiladores

Mónica Marcela Parra-Zapata
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo
César Lau Mego
María Leonor Vélez Aramburo

Los autores

Mónica Marcela Parra-Zapata
César Lau Mego
Mónica Mercedes Zapata Jaramillo
John Alexander Alba Vásquez
Alexander Castrillón-Yepes
Jhony Alexander Villa-Ochoa
Edwin Enrique Correa Carmona
Lorena Mena Mena
Paula Andrea Barrientos Tascón
Jeyson Emilio Palacio Vásquez
Jorge León Echeverri Echeverri
Johan Andrey Salazar Piedrahita
Javier Orlando Marín Sánchez
Luisa Fernanda Marín Ramírez
Edgar Daniel Sánchez Londoño

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
CASIO ClassWiz LAX
STATUR Group DON'T STOP

Año 2022

Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora

Propuestas y experiencias

Compiladores
Mónica Marcela Parra-Zapata
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo
César Lau Mego
María Leonor Vélez Aramburo

Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora.
Propuestas y experiencias

Este libro es un producto colectivo entre el *grupo de investigación Mathema-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia* y el *Grupo Statur con el proyecto Gakuhan de Casio Calculadoras* durante los años 2021 y 2022.

Compiladores — Mónica Marcela Parra-Zapata, Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo, César Lau Mego y María Leonor Vélez Aramburo

Autores — © Mónica Marcela Parra-Zapata, © César Lau Mego, © Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo, © John Alexánder Alba Vásquez, © Alexánder Castrillón-Yepes, © Jhony Alexánder Villa-Ochoa, © Edwin Enrique Correa Carmona, © Lorena Mena Mena, © Paula Andrea Barrientos Tascón, © Jeyson Emilio Palacio Vásquez, © Jorge León Echeverri Echeverri, © Johan Andrey Salazar Piedrahita, © Javier Orlando Marín Sánchez, © Luisa Fernanda Marín Ramírez y © Edgar Daniel Sánchez Londoño

Editor — Wilson Antonio Buriticá
Dirección General — Julián Fernando Gómez López
Coordinación — María Leonor Vélez Aramburo, Grupo Statur
Diseño y diagramación — Ana Milena Gómez Correa (amigoco17@hotmail.com)
Corrección de estilo — Juan Carlos Rodas Montoya
Normas técnicas — Sebastian Aguirre Duque (sadw621@gmail.com)
Contribución para la organización — Maria Camila Patiño Heno

Edición: 1
ISBN: 978-628-7592-60-5

Facultad de Educación Universidad de Antioquia
Fondo de publicaciones
Teléfono: 2195708
Correo electrónico: edicioneducacion@udea.edu.co
Calle 67 No. 53-108 Bloque 9 Oficina 120

En el marco del Proyecto CODI 2020-34799 titulado “La modelación matemática escolar como eje de integración interdisciplinar en un currículo basado en las áreas STEM+H: un camino para la transformación educativa de la básica primaria en la ciudad de Medellín”.

Grupo de investigación Mathema-Formación e Investigación en Educación Matemática
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia

Contenido

Presentación

Este libro presenta las reflexiones de maestros y maestras de la Secretaría de Educación de Medellín, en relación con su experiencia y en situaciones didácticas con calculadora, donde la modelación matemática escolar, la integración curricular y STEM+H fueron los ejes para el desarrollo curricular las cuales se han presentado como un producto colectivo entre el grupo Mathema-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y el *Grupo Statur con el proyecto Gakuhan de Casio Calculadoras* en diferentes instituciones educativas de la ciudad de Medellín.

El Proyecto *Gakuhan* es una iniciativa de Casio Japón, liderada en Colombia por el Grupo Statur que, en convenio con el grupo de investigación Mathema-FIEM en el Proyecto CODI 2020-34799, propusieron una estrategia de formación de maestros y maestras con el objetivo de invitar a la reflexión, principalmente sobre la relevancia que cobra el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y las múltiples maneras en las que se pueden diseñar y potenciar varias situaciones didácticas en el aula y que están mediadas con esta tecnología. La estrategia se materializó en algunos momentos en el Centro de Innovación del Maestro-MOVA de la Secretaría de Educación de Medellín.

Para el diseño de las situaciones se consultaron previamente las diferentes propuestas del Ministerio de Educación Nacional-MEN de Colombia, así como posturas investigativas en Educación Matemática en los ámbitos nacional e internacional. Posteriormente, se rescataron algunos aprendizajes esperados en matemáticas, de tal suerte que se proporciona una muestra amplia de actividades y aprendizajes en las que, en el marco de la integración disciplinar desde la modelación matemática y el STEM+H, se puede usar la tecnología, en este caso la calculadora científica de la Serie Classwiz fx-991LA X.

Es pertinente manifestar que la propuesta de usar la calculadora en las clases de matemáticas no tiene la intención de sustituir al aprendizaje de los algoritmos y procesos que son necesarios para el aprendizaje de los estudiantes, sino que, en ciertas situaciones o problemas, se requieren cálculos algorítmicos que posiblemente desvíen la atención de estudiantes de la situación que pretende resolver. Por ello, la calculadora se concibe como una herramienta que permite direccionar la atención hacia la interpretación, el análisis, el diseño de estrategias y la toma de decisión ante distintas situaciones.

El libro se estructura de la siguiente manera:

a. **Capítulo introductorio.** Escrito en conjunto por uno de los formadores y dos profesoras asistentes al Programa de formación. En él se presenta la experiencia de formación de maestros y maestras y se hace una discusión sobre las situaciones experimentadas dentro de la formación.
b. **Dos capítulos teóricos.** Escritos por dos profesores formadores y colegas de sus grupos de investigación. En ellos se discuten algunos componentes teóricos del pensamiento matemático y de la inclusión de la calculadora en el aula.
c. **Capítulos de maestros y maestras.** Escritos por 11 maestros y maestras que participaron del Programa de formación. En ellos se presentan las experiencias en sus instituciones educativas con el uso de la calculadora y se ponen en escena el pensamiento matemático y el aprendizaje de los estudiantes.

Todas las capturas de pantalla de la calculadora y sus distintas funcionalidades se realizaron con el emulador para computador Casio Classwiz fx-570/991LA X con Licencias proporcionadas por el proyecto Gakuhan de Casio Calculadoras o con la App de uso libre CASIO EDU +. Por su parte en las tablas de caracterización de los capítulos de maestros y maestras los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje-DBA son producciones del Ministerio de Educación Nacional del 2006 y 2016 respectivamente.

El proyecto contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín. En el proceso se sistematizaron 11 experiencias para hacer realidad este libro. A Edwin, Javier, Jeyson, Johan, Jorge, Lorena, Luisa, Mónica, Paula, Mónica y Edgar, les agradecemos profundamente su entrega y dedicación en este proyecto y la posibilidad de reflexionar,

construir, deconstruir y reconstruir sus prácticas a través de la crítica, la reflexión y el ejercicio constante de la escritura, la puesta en escena, la actividad matemática y la investigación.

Además, queremos agradecer a MOVA por la posibilidad de desarrollar el proyecto en su escenario físico. A la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, en cabeza del decano Wilson Antonio Buriticá y al grupo de investigación Mathema-FIEM por permitir que este Programa de formación se materializara y por unir recursos para la publicación de las experiencias de los maestros y maestras. A los rectores y las rectoras de las instituciones educativas participantes por facilitar el espacio y el tiempo para la puesta en marcha de las experiencias. A las y los estudiantes, quienes aportaron todo su conocimiento y disposición para implementar las propuestas y contribuir con sus cuestionamientos al mejoramiento de nuestras prácticas educativas. Agradecemos, también, a María Leonor Vélez A., Directora del proyecto Gakuhan de Casio Calculadoras en Colombia, del Grupo Statur, por su constante apoyo con el proceso de formación y los diferentes recursos que se necesitaban para un buen trabajo. A los profesores formadores César Lau Mego, John Alexánder Alba Vásquez y Jhony Alexánder Villa-Ochoa, por compartir sus valiosas experiencias y desarrollos teóricos e investigativos. A las profesoras de la Secretaría de Educación de Medellín: Mónica Marcela Parra-Zapata y Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo, por su disposición para dialogar con los participantes y materializar la propuesta. A los integrantes del grupo de investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA-FIEM), de la Universidad de Antioquia, por la evaluación y las lecturas realizadas a versiones iniciales de este libro y sus significativos aportes.

Esperamos que las situaciones propuestas en este libro sean de utilidad para docentes en el diseño y planeación de sus clases de matemáticas y que se constituyan en un punto de partida para crear otras actividades con el uso de la calculadora para proveer a estudiantes de diversos escenarios de discusión y argumentaciones de las matemáticas centradas en la resolución de problemas.

Compiladoras y Compilador

La calculadora como herramienta didáctica en el aula.
Una experiencia de formación de maestros y maestras

Mónica Marcela Parra-Zapata[1]
César Lau Mego[2]
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo[3]

Introducción

En este capítulo, y como introducción a lo que encontraremos en el presente libro, presentamos los alcances y las limitaciones de algunas situaciones didácticas con calculadora dentro de un proceso conjunto entre el Grupo de Investigación *Mathema Fiem de la U. de A.* y el *Programa Gakuhan de Casio Calculadoras*. Con el desarrollo de las situaciones se promovió la integración y el uso de la calculadora en clase de matemáticas hacia el análisis y la reflexión como centro de la actividad matemática en el aula.

1 Magíster en Educación-Educación Matemática. Profesora y Tutora PTA Institución Educativa Villa Flora-Secretaría de Educación de Medellín. Profesora Universidad de Antioquia. monikampz@gmail.com.
2 Director de la división académica de Casio para América Latina. cesar.slmg@gmail.com
3 Licenciada en Educación Básica Matemáticas. Profesora Institución Educativa Barrio Olaya Herrera-Secretaría de Educación de Medellín. monizapata25@gmail.com

El Proyecto es una iniciativa de la división académica de Casio Latinoamérica y grupo Statur que, en convenio con el grupo de investigación *Mathema-FIEM* de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, propuso una estrategia de formación de maestros y maestras que tuvo como objetivo el mejoramiento de la práctica docente con el objeto de diseñar y crear espacios reflexivos para el planteamiento de nuevas alternativas y la integración de situaciones para el desarrollo del pensamiento matemático con el apoyo de la calculadora. El proyecto contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín y se llevó a cabo durante los años 2021 y 2022.

Desde la invención de la calculadora esta ha evolucionado hasta la producción de nuevas calculadoras con multiplicidad de funciones, que posibilitan, entre otros asuntos, el cálculo, la verificación y la graficación. Esta transformación ha sido de tipo funcional y ha incluido la pregunta de su uso en la escuela y las oportunidades que deben proporcionar los profesores para usarlas en la clase.

La inclusión de las calculadoras en el currículo escolar ha producido un debate amplio en la comunidad académica en tanto se reportan opiniones encontradas en aspectos negativos y positivos de su inclusión. Algunas de las personas que se resisten a la incorporación de la calculadora en la edad escolar, sostienen algunas creencias que indican que: **i.** la calculadora no desarrolla el razonamiento matemático puesto que, para utilizarla, basta con seguir exactamente las instrucciones de funcionamiento, y **ii.** la calculadora limita la adquisición de las habilidades de cálculo numérico de los estudiantes (Conti et al., 2017).

Sin embargo, otros autores sostienen que la interacción con la calculadora en la clase de matemáticas con un uso intencionado puede ser ventajosa y posibilitaría el desarrollo del pensamiento matemático (Campbell y Stewart, 1993; Albergaria y Ponte, 2008). Por su parte, el MEN (1998) destaca la importancia de usar las tecnologías, entre ellas, la calculadora, en la enseñanza y el aprendizaje. El MEN considera que su uso potencia el desarrollo del pensamiento matemático. Selva y Borba (2010) insisten en el uso de este instrumento en el aula porque prepararía a los estudiantes para su uso futuro en diferentes esferas de la sociedad y su amplio uso en diversas situaciones fuera del aula.

Las calculadoras como herramienta didáctica en el aula

La inclusión de la calculadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha permitido un amplio debate sobre las posibles consecuencias, negativas y positivas, que su uso puede tener y sobre cuál es la edad más adecuada para su uso. Aunque existen documentos diversos sobre los beneficios de usar la calculadora, se encuentran también opiniones que indican no usarlas, pues consideran que podría perjudicar las habilidades matemáticas de los estudiantes.

Por su parte, algunas investigaciones reportan el papel que debe jugar la calculadora y de su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático (Campbell y Stewart, 1993; Albergaria y Ponte, 2008; Selva y Borba, 2010; MEN, 1998, 2006; Carmona-Mesa et al., 2018). En este sentido, el informe Cockcroft (1985) afirma que la investigación ha demostrado que los estudiantes que se habitúan al uso de la calculadora mejoran su actitud hacia las matemáticas, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas.

En este capítulo, y a lo largo del despliegue de la formación, se asume que la calculadora es una herramienta didáctica en el aula, que permite ejercitar determinados cálculos que favorecen una selección de estrategias apropiadas. A partir de ello, se intenta una reflexión acerca de la importancia que adquiere el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y la manera de diseñar y potenciar algunas situaciones didácticas en el aula mediadas con esta tecnología.

En una perspectiva del aprendizaje, la calculadora funge como una tecnología que puede mejorar la actitud y disposición de los estudiantes hacia las matemáticas, al adquirir destrezas en los cálculos mentales y en la comprensión de conceptos y en la adquisición de estrategias adecuadas para la resolución de problemas. Usar calculadoras en clase permite el trabajo individual, las investigaciones reportan que promueven la interacción entre estudiantes y maestros y entre los estudiantes.

En términos de la enseñanza, la calculadora es una herramienta valiosa que enriquece las comprensiones matemáticas. Además, su uso permite que se ocupe más tiempo y esfuerzos en la comprensión de los conceptos, el análisis de situaciones y el pensamiento crítico. Resaltamos aquí que la calculadora por sí misma no es un elemento que garantice un manejo más estructural de los conceptos, sino que contribuye a que haya cambios en las instrucciones, en el diseño curricular y en las visiones que el profesor tiene de su actividad y de las matemáticas.

Por último, se concibe que la tecnología, en este caso las calculadoras, complementan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero no son la base del mismo. En esta medida, los cambios se deben producir a través de la incorporación de la calculadora en el aprendizaje y se deben integrar sin sacrificar la profundidad de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, cuando se trata de leer y comprender una situación problemática, escribir una apropiada ecuación a un problema, elegir las operaciones que hay que usar, interpretar correctamente la solución que aparece en el visor de la calculadora, y determinar si la respuesta es coherente o no con la situación. Las calculadoras, junto con las destrezas mentales, el lápiz y papel, y la estimación, cuando son apropiadas, componen las herramientas que ayudan a los estudiantes a resolver problemas (Ortiz, 2006).

Una experiencia de formación de maestros y maestras

Con miras a determinar posibilidades de transformaciones prácticas para la formulación y desarrollo de currículos pertinentes e interdisciplinares que acojan la perspectiva STEM+H; esta experiencia de formación de maestros y maestras de matemáticas de la ciudad de Medellín se consolidó en el marco del proyecto CODI 2020-34799: "La modelación matemática escolar como eje de integración interdisciplinar en un currículo basado en las áreas STEM+H: un camino para la transformación educativa de la básica primaria en la ciudad de Medellín" en vínculo con la división académica de Casio Latinoamérica y su Proyecto Gakuhan.

En la formación se propendió por un mejor desempeño en estudiantes y maestros con el ánimo de apoyar y fortalecer las habilidades matemáticas mediante la discusión y apropiación de nuevas maneras de, competencias matemáticas con el uso de tecnología, en especial, con la calculadora. Así, la formación motivó el uso de la calculadora como herramienta que concibe una nueva cultura de enseñanza y aprendizaje y, como consecuencia, el abandono de la concepción de saberse una fórmula de memoria para entender y aplicar, de manera coherente, la fórmula; es decir, una enseñanza y un aprendizaje que se centran en el desarrollo del pensamiento matemático.

En este sentido, la experiencia de formación fomentó la discusión en torno a algunos elementos conceptuales que fundamentan la propuesta de los documentos de referencia del país en matemáticas (MEN, 1998; 2006; 2016). De igual modo, se promovió la reflexión de los maestros y maestras de matemáticas sobre su práctica y su relación entre ella y la propuesta del MEN, además del fomento de situaciones didácticas mediadas con calculadora. Por estas razones se infiere que existen reflexiones acerca de cómo pueden evaluar los docentes el uso de la herramienta en la generación de conocimiento en las aulas.

La experiencia de formación reconoció que, como profesionales de la educación colombiana, los maestros y maestras deben mantenerse en la búsqueda y perfeccionamiento de diferentes estrategias educativas que permitan mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Así mismo, es muy importante reflexionar sobre el impacto de las múltiples herramientas tecnológicas diseñadas o adaptadas para apoyar la Educación Matemática y, por esta razón, no es recomendable que el profesor se aleje de dichos recursos por causa del desconocimiento de la herramienta o del potencial pedagógico que puede tener. De esta manera, se espera crear espacios de reflexión sobre la práctica educativa en los que se amplíe el saber del maestro en diversos aspectos.

La experiencia de formación se consolidó en dos cohortes y contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín. Para lograr los objetivos propuestos la experiencia de formación se orientó metodológicamente en siete momentos que se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Orientación metodológica de la experiencia de formación.

MOMENTOS	DESCRIPCIÓN
1	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento numérico.
2	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento variacional.
3	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento métrico.
4	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento espacial.
5	Asesoría.
6	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento aleatorio.
7	Presentación experiencia de maestros y maestras.

Fuente: los autores.

Algunas situaciones de aula propuestas

En esta formación los maestros y maestras fueron partícipes de situaciones de aprendizaje en las que pudieron hacer uso de sus conocimientos matemáticos y reflexionar sobre su sentido en diferentes contextos. Las situaciones fueron propuestas en el marco de la formación descrita en el apartado anterior y en ellas se empleó en todo momento la calculadora científica como herramienta.

En las situaciones la calculadora se empleó como una herramienta que facilita la exploración de ideas y modelos, y que valida resultados obtenidos previamente con lápiz y papel. En este sentido, la calculadora apoyó la realización rápida de cálculos que son muy tediosos y repetitivos para la mente humana. Sin embargo, su uso en la escuela debe enfatizar más la comprensión de los procesos matemáticos más que la verificación de la mecánica de rutinas operativas.

De acuerdo con lo anterior, a continuación, se presentan cuatro situaciones desarrolladas por los maestros en la experiencia de formación y se discutieron aspectos matemáticos y de su desarrollo y algunas de las apreciaciones de los maestros y las maestras.

Situación 1: El mayor número primo

Esta situación se propone para el desarrollo del pensamiento numérico. En ella se propuso formar parejas, se tenía a la mano lápiz, papel y calculadora. La situación propuso dar un número primo mayor que el del compañero.

El estudiante que inicia escribe un número primo y lo lee al compañero, quien deberá, primero, verificar que el número que le dan es primo y, si lo es, escribir uno mayor con los recursos brindados (lápiz, papel y calculadora). La actividad continúa y puede terminar de varias formas:

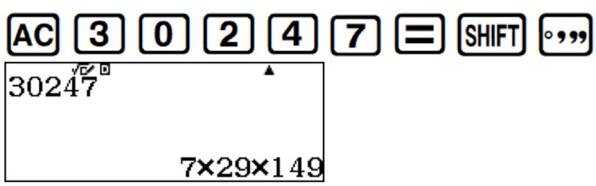
- cumplido un tiempo previamente acordado.
- cuando uno de los dos jugadores devuelve un número que no es primo.
- cuando uno de los jugadores ya no pueda hallar un número primo mayor.

Durante las sesiones los maestros y maestras reconocieron que no tenían disponible un algoritmo preestablecido para “ganar” el juego, esto los llevó a pensar sobre los números primos, criterios de divisibilidad, operaciones elementales de multiplicación y división, descomposición de números en factores con el uso de la calculadora para la exploración.

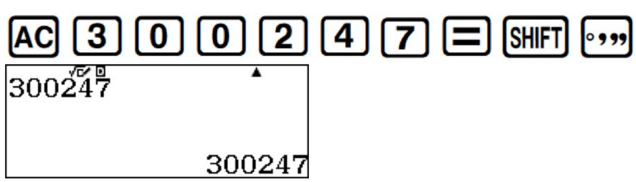
Una función que los profesores descubren al manipular la calculadora para buscar números primos es FACT., con la que pueden no solamente verificar si un número es primo o no, sino que es una manera de obtener números primos en los factores del número ingresado.

Observen cómo se puede factorizar un número cualquiera, por ejemplo 30247.

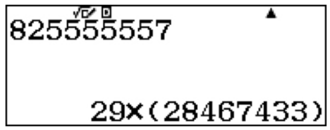
Para lograrlo se ingresa al modo 1 desde el MENU.



Ahora, veamos qué sucede al ingresar un número primo: 300247



Observe qué sucede cuando la calculadora no puede determinar si un factor es primo o no, lo presenta entre paréntesis, como en el siguiente ejemplo:



Veamos un ejemplo de cómo se desarrolla una partida:

- Jugador 1: 103
- Jugador 2: cómo 103 no es par, tampoco es divisible por 3, 5, 7 entonces es primo y te doy el número 127.
- Jugador 2: 127 es primo. Te doy el número 1003
- Jugador 1: 1003 no es primo.
- Gana Jugador 1

Situación 2: Racional o Irracional

Esta situación se propone para el desarrollo del pensamiento numérico, en ella se sugiere indicar cuántos de los siguientes números son irracionales. Justificar la respuesta.

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{B} = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$
$$\boldsymbol{C} = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

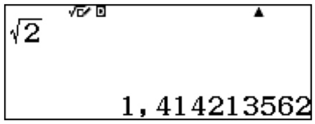
Esta situación tiene como objetivo reflexionar en torno a la manera como los docentes reconocen los números irracionales y qué aprenden los estudiantes con respecto a ellos. Algunas preguntas: ¿Qué es un número irracional? ¿Cómo reconocer un número irracional? ¿Cómo usar la calculadora para identificar números irracionales? ¿Es posible reconocer si un número es irracional con el apoyo de la calculadora?

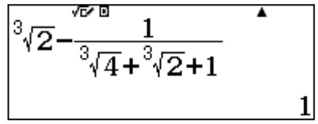
Es curioso que, a pesar de tener una calculadora a mano, algunos estudiantes clasifican los números como irracionales por su representación, sin efectuar operación alguna. Al preguntar por qué son irracionales, las respuestas son:

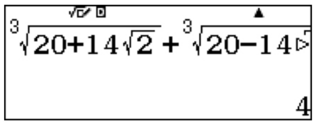
- "...son irracionales porque hay raíces que no se pueden simplificar".
- "...cuando se tienen raíces, los números son irracionales". (Comentarios de los maestros).

Desarrollo de la situación:

Cuando se usa la calculadora, los profesores encuentran los siguientes resultados:







Con estos resultados se advierten tres reacciones de los profesores:

- Aceptar los resultados y clasificar los números se acuerdo con ellos.
- Aceptar los resultados, pero reflexionar sobre las concepciones que se tienen sobre los números irracionales y qué información se brinda a los estudiantes.
- Negar la veracidad de resultados en la calculadora con razones como redondeo o truncamiento de cifras.

Posteriormente, se proponen rutas de verificación con lápiz y papel para comprobar el resultado obtenido en la calculadora porque algunos participantes no estaban seguros de que el resultado mostrado por la calculadora era correcto.

Hallemos el valor de B

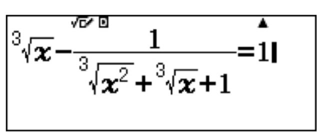
$$B = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

Sea $a = \sqrt[3]{2}$

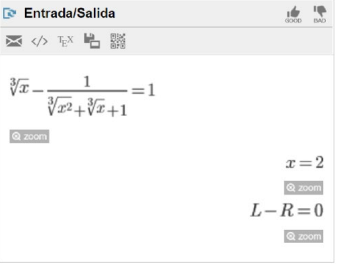
Entonces: $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{1}{a^2 + a + 1}$

Efectuando: $a - \frac{1}{a^2 + a + 1} = a - \frac{a-1}{(a^2 + a + 1)(a-1)} = a - \frac{a-1}{a^3-1} = a - \frac{a-1}{1} = a-(a-1) = 1$

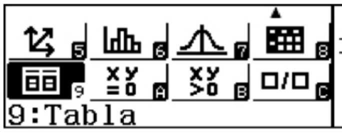
Otra manera para verificar el valor es resolver la siguiente ecuación en la calculadora:

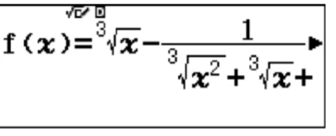


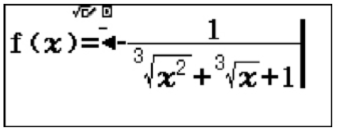
Con el uso de la función SOLVE, se le puede pedir a la calculadora que resuelva la ecuación:

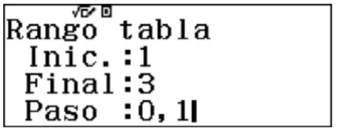


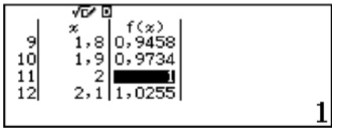
O, también, se puede acudir a una tabla





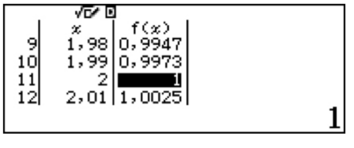






Aquí observamos que cuando x es 2 el valor de la función es 1.

Haciendo una tabla con un paso de 0.01 desde 1.9 hasta 2.1



Hallemos el valor de C:

$$C=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3}+\sqrt[3]{(\mathrm{a}-\mathrm{b})^3}$$

Entonces:

$$20+14\sqrt{2}=(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

Si hacemos $b = \sqrt{2}$

$$20 + 14\sqrt{2} = \left(a + \sqrt{2}\right)^3 = a^3 + \sqrt{2}^3 + 3a^2\sqrt{2} + 3a\sqrt{2}^2$$

$$20 + 14\sqrt{2} = a^3 + 2\sqrt{2} + 3a^2\sqrt{2} + 6a$$
$$20 + 14\sqrt{2} = a^3 + 6a + (2 + 3a^2)\sqrt{2}$$

$$a^3 + 6a = 20 \ \wedge 2 + 3a^2 = 14 \Rightarrow a = 2$$
$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$$

Preguntas:

- ¿Qué es un número irracional?
- ¿Podemos identificar un número irracional por su representación?
- ¿Cuáles son las "reglas" prácticas que suelen usarse para identificar un número que puede producir una concepción errada sobre ellos?

Situación 3: Pirandelas

Esta es una situación que tiene como objetivo poner en juego el pensamiento variacional de los estudiantes.

Consiste en formar pirámides con arandelas. La situación propone formar grupos de cuatro personas y construir los arreglos, según los siguientes gráficos.

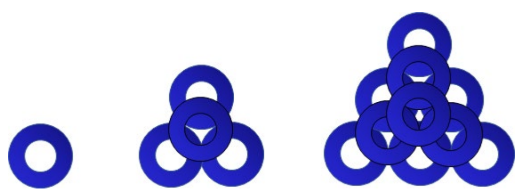


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Actividad 1. Construye la *pirandela* 4.

Actividad 2. Construye la *pirandela* 5.

Actividad 3. Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué está cambiando en la secuencia de las *pirandelas*?
2. ¿Cómo está cambiando esta característica de una *pirandela* a la siguiente en la secuencia?
3. Completa el siguiente cuadro con la cantidad de arandelas en cada caso.

Tabla 2. Registro de arandelas.

	Pirandela 1	Pirandela 2	Pirandela 3	Pirandela 4	Pirandela 5	Pirandela 6
Lado de la base						
Borde de la base						
Total en la base						
Total en la pirandela						

Fuente: los autores.

4. ¿Cuántas arandelas son necesarias para construir la secuencia de *pirandelas* desde la primera hasta la sexta?

Actividad 4. Con las arandelas de las primeras 6 pirandelas ¿cuál es la pirandela de mayor volumen que se puede formar?

Actividad 5. Determina cuántas *pirandelas*, como mínimo, se pueden formar con el uso de 1130 arandelas.

Posibles resoluciones para las actividades

Actividad 1. Construir la pirandela 4. A continuación, se presenta una imagen en la que se pueden observar los cuatro primeros arreglos.

Actividad 2.

a. ¿Qué está cambiando? El propósito de esta pregunta es que los estudiantes logren identificar varias características que cambian en la secuencia cuando se pasa de una pirandela a la siguiente. Algunas de las características que podrían ser identificadas, son:

- El volumen de la pirandela
- La altura de la pirandela
- El peso de la pirandela
- La cantidad total de arandelas
- La cantidad de arandelas en la base
- La cantidad de arandelas en el borde de la base
- La altura de la pirandela

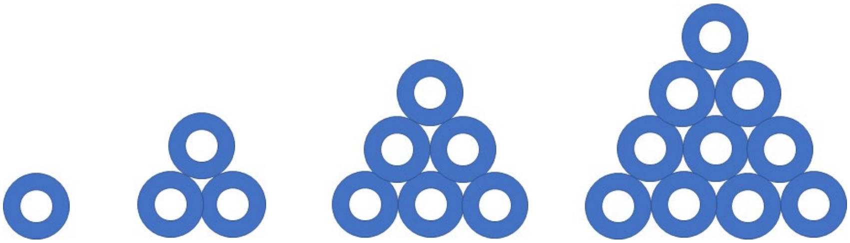
Es importante orientar al estudiante mediante preguntas, por ejemplo, si el estudiante dice: "el lado", usted puede decir: "ayúdame a entender, ¿a qué lado te refieres? ¿El lado de qué figura?" y luego se puede agregar: "¿qué es lo que cambia de ese lado? Lo que deseamos es que la descripción sea precisa, por ejemplo, se puede afirmar: "cambia la cantidad de arandelas en el lado de la base".

Los atributos que identifique el estudiante no necesariamente deben ser cuantitativos, también podría identificar cambios cualitativos, de acuerdo con la situación planteada. En todos los casos, el propósito es ayudar al estudiante a identificar el cambio y no obtener una respuesta "correcta" porque lo que se debe lograr es que el estudiante piense en el cambio.

b. ¿Cómo está cambiando?

Con respecto a la cantidad de arandelas en el lado de la base de la pirandela está aumentando en 1.

Con respecto a la cantidad de arandelas totales en la base



La cantidad de arandelas en la base de la siguiente pirandela se obtiene agregando a la cantidad actual una cantidad de arandelas igual al lugar que ocupa la siguiente pirandela. Estudiantes más avanzados podrán decir que la cantidad es igual a la suma de los n primeros números naturales, donde n es el lugar de la pirandela.

En cualquier caso, el propósito es identificar el patrón de cambio por lo que se debe guiar al estudiante para que identifique cómo es que cambian las cantidades o atributos definidos anteriormente.

c. Completa la siguiente tabla:

Tabla 3. Tabla de registro pirandelas.

	Pirandela 1	Pirandela 2	Pirandela 3	Pirandela 4	Pirandela 5	Pirandela 6
Lado de la base	1	2	3	4	5	6
Borde de la base	0	3	6	9	12	15
Total en la base	1	3	6	10	15	21
Total en la pirandela	1	4	10	20	35	56

Fuente: los autores.

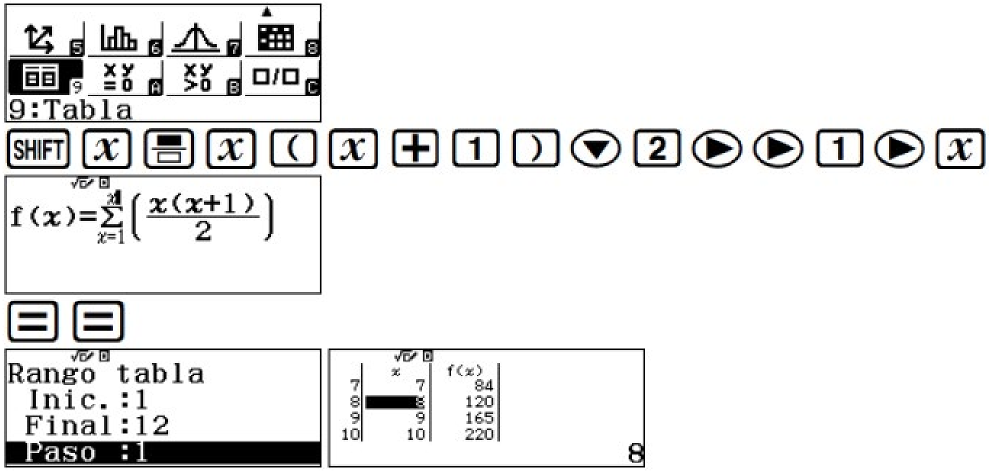
d. ¿Cuántas arandelas son necesarias para construir la secuencia de *pirandelas* desde la primera hasta la sexta?

Podemos hallar el valor directamente de nuestra tabla:
$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$

Actividad 3. Con las arandelas de las primeras 6 pirandelas, ¿cuál es la pirandela de mayor volumen que se puede formar?

La pirandela de mayor volumen es la que tiene más arandelas. Es preciso explorar cuántas arandelas se usan en cada pirandela.

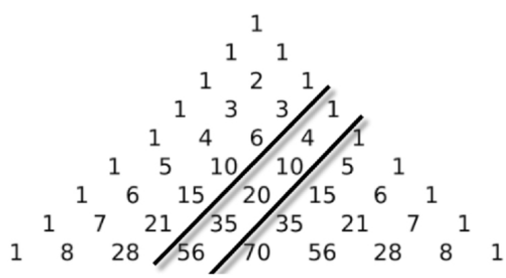
Como el número de arandelas en la pirandela n es igual a la suma de los números desde 1 hasta n, se sugiere hacer una tabla de valores en la que se evalúe la suma de los n primeros números enteros positivos, que representan la cantidad total de arandelas en cada caso.



La pirandela de mayor volumen que se puede formar es la pirandela 8

Otra ruta disponible para hallar la pirandela de mayor volumen es con una inecuación, considerando que la cantidad de arandelas debe ser menor o igual que 126. Es preciso determinar la expresión para la cantidad de arandelas en una pirandela definida. Se muestra cómo hacerlo con números combinatorios y el triángulo de Pascal:

Observe que la cantidad de arandelas totales son los elementos resaltados:



Donde cada uno de los números seleccionados es un número combinatorio.

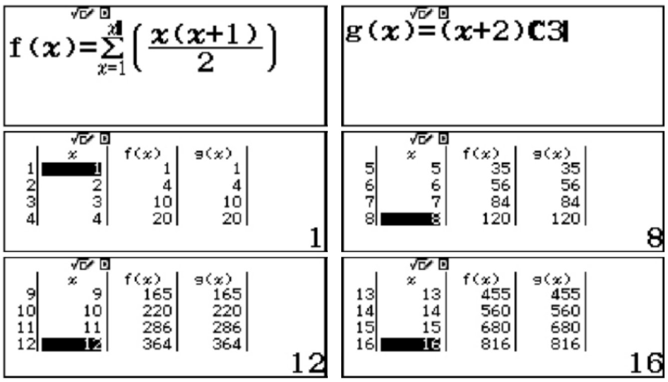
$$C_3^3 = 1; C_3^4 = 4; C_3^5 = 10; C_3^6 = 20; C_3^7 = 35;\ C_3^8 = 56$$

Pirandela	1	2	3	4	5	6
Cantidad de arandelas total	C_3^3	C_3^4	C_3^5	C_3^6	C_3^7	C_3^8

Entonces, podemos preguntarnos: ¿Cuál es la expresión correspondiente para la pirandela de lugar *x*, según la tabla?

Pirandela	x
Cantidad de arandelas total	C_3^{x+2}

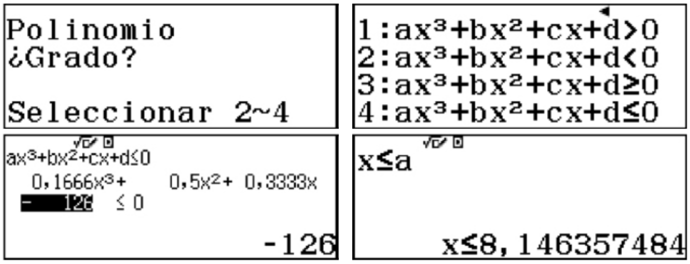
Antes de resolver la inecuación se comprueba que los valores coinciden si se ponen en una tabla de valores y se comparan con los obtenidos mediante suma de consecutivos usada anteriormente:

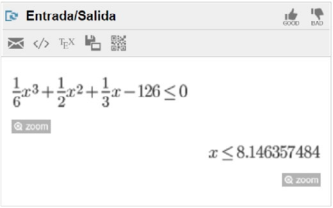


Entonces, la inecuación que se debe resolver es:

$$
\begin{gathered}
C_3^{x+2} \leq 126 \\
\Rightarrow \frac{(x+2)!}{3!\,(x+2\text{-}3)!} \leq 126 \\
\Rightarrow \frac{(x+2)(x+2\text{-}1)(x+2\text{-}2)(x+2\text{-}3)!}{3!\,(x+2\text{-}3)!} \leq 126 \\
\Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)(x)}{3!} \leq 126 \\
\Rightarrow \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x \leq 126
\end{gathered}
$$

En la calculadora esto se resuelve en el modo Desigualdad: MENU B





Se puede observar que la pirandela de mayor volumen que se puede construir es la pirandela 8.

Actividad 4. Determina cuántas *pirandelas*, como mínimo, se pueden formar con 1130 arandelas.

Situación 4: ¿Qué tan rápido es Usain Bolt? (Alba y Angulo, 2018)

Ver el video: https://youtu.be/3nbjhpcZ9_g, solamente 15 primeros segundos

Figura 1. Captura de pantalla video de youtube.

Fuente: captura de pantalla de los autores.

Durante el desarrollo de la sesión se utilizó la rutina de pensamiento veo-pienso-me pregunto.

Después de ver el video se pregunta a los profesores-estudiantes **¿Qué ven?**

Algunas respuestas fueron (Intervenciones de participantes):

velocidad esfuerzo alegría un cronómetro tiempo
atletas números camisetas líneas sobre la pista
una cámara de color negro

No todas las palabras listadas anteriormente son respuestas “correctas”, en el sentido de que no todas representan algo que se pueda “ver” en el video. En esta etapa de la sesión, se permite que los participantes expresen sus ideas con respecto a lo que otros “ven”, y se crea una oportunidad para discutir si lo que unos dicen que “ven” realmente se ve o es su percepción solamente. Por ejemplo, fue común tener profesores que afirmaban que podían ver la velocidad, después de discutirlo en grupo llegaban a la conclusión de que la velocidad no se puede ver, pero sí se puede ver cómo cambian de posición los atletas.

Otra discusión interesante fue sobre “el cronómetro” que algunos vieron y se llegó a la conclusión de que lo que se puede ver es un espacio en la pantalla en el que hay números que cambian de valor y que algunos profesores interpretaron como un cronómetro.

En esta primera parte se puede generar discusión en torno a lo que los profesores ven o creen ver y lo que no es posible ver, como siempre la idea central es brindar una oportunidad para reflexionar cómo llevar esta experiencia y enriquecer el aprendizaje en el aula.

Una segunda pregunta, que está relacionada con la primera es: **¿En qué piensa?**

Por ejemplo (Intervenciones de participantes):

- Un docente que vio en la pantalla “números que cambian de valor”, dijo que piensa en el tiempo…
- El docente que vio “atletas corriendo”, dijo que eso le hace pensar en la velocidad.
- El docente que vio “líneas en la pista”, dijo que pensó en “paralelismo”.

La tercera pregunta en la rutina es: **¿Qué se pregunta?**, en relación con lo que vio y pensó.

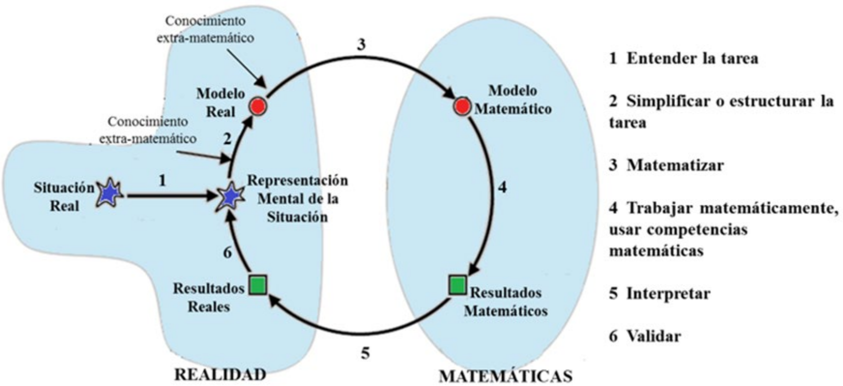
Por ejemplo (Intervenciones de participantes):

- Veo: atletas corriendo, Pienso: en velocidad, Me pregunto: ¿Cuál es la máxima velocidad lograda en la carrera?

- Veo: números que cambian, Pienso: tiempo, Me pregunto: ¿Qué tiempo duró la carrera?

El ciclo de la modelación fue utilizado para solicitar a los profesores ubicar las tareas que realizaban durante la sesión.

Figura 2. Ciclo de modelación matemática para el aula.



Fuente: Blum y Borromeo-Ferri (2009).

Después de observar esta tabla, se hace la pregunta: ¿Qué tan rápido es Usain Bolt? Se presenta una función que describe la rapidez de Usain Bolt.

$$u(t) = \frac{1331(1 - e^{-0,8t})}{110 + 12,1e^{-0,8t}}$$

y se solicita a los profesores que respondan a las siguientes situaciones problemáticas:

a. ¿En qué unidades está expresada la rapidez $u(t)$?
b. Calcule, con el modelo, la duración de la carrera.
c. Confeccione una tabla con los valores de la rapidez de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,...,9$.
d. Confeccione una tabla del espacio recorrido por Usain Bolt, en cada intervalo de un segundo durante la carrera comenzando desde $t = 0$.
e. Confeccione una tabla con los valores de la aceleración de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,...,9$ durante la carrera.
f. ¿En qué instante la rapidez de Usain Bolt fue de 9 m/s?
g. ¿En qué instante la aceleración instantánea es de 0,5 m/s^2?

Resolución de las preguntas:

a. La rapidez está expresada en m/s. La pregunta no es trivial y durante las sesiones algunos profesores justificaron su elección de la siguiente manera:

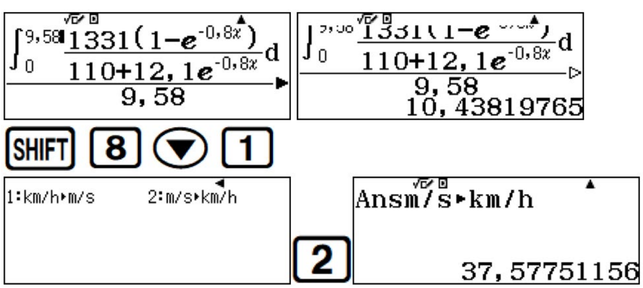
- La rapidez está metros por segundo porque la carrera es de 100 metros.
- Kilómetros por hora, la velocidad generalmente se expresa en kilómetros por hora.
- Metros por segundo, porque la carrera dura casi 10 segundos, entonces el tiempo debe estar en segundos.

Cabe resaltar que en las anteriores justificaciones el modelo funcional no fue utilizado y, tampoco, la información que brinda el video.

Una manera de justificar o averiguar las unidades de la velocidad usadas en el modelo podría ser determinar la velocidad media y comparar este valor con un valor que se encuentra en el video.

Figura 3. Pantallazo del video de youtube.

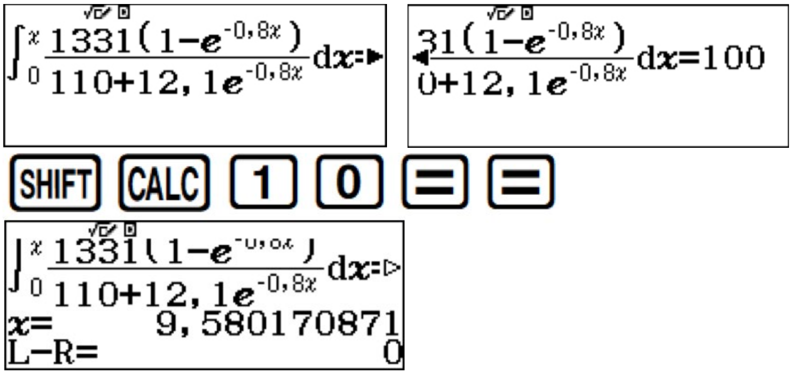
Fuente: captura de pantalla por los autores.



Con lo que podemos verificar que las unidades son m/s.

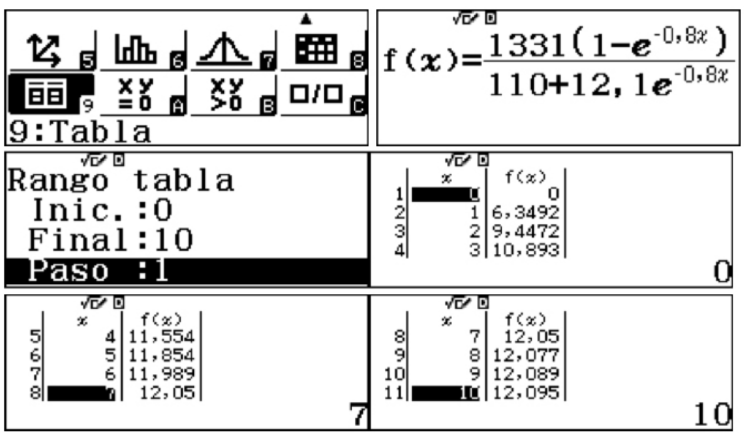
b. Calcule, con el modelo, la duración de la carrera.

Para determinar cuánto dura la carrera con el uso del modelo, se debe determinar en qué tiempo Usain Bolt recorre los 100 m. Para ello, se usa la función Solve.

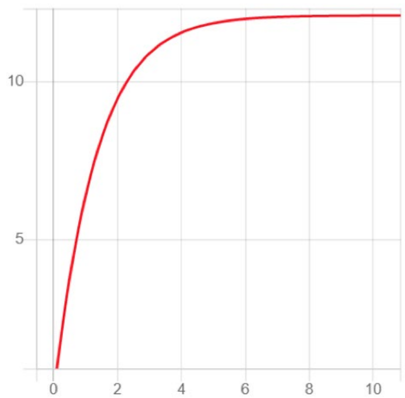


Según el modelo, el tiempo para recorrer los 100 m es 9,58 s.

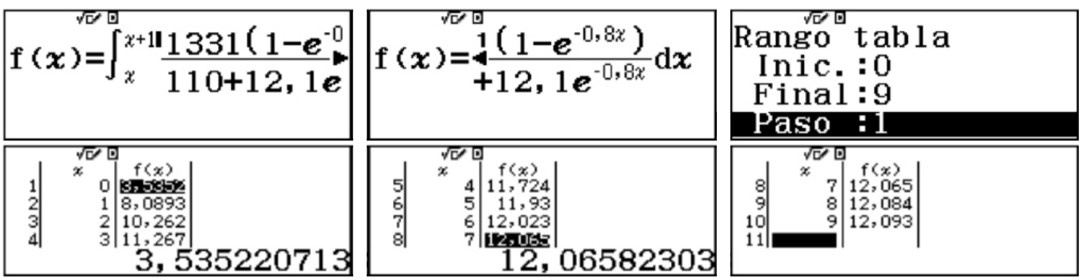
c. Confeccione una tabla con los valores de la rapidez de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,\ldots,9$ s.



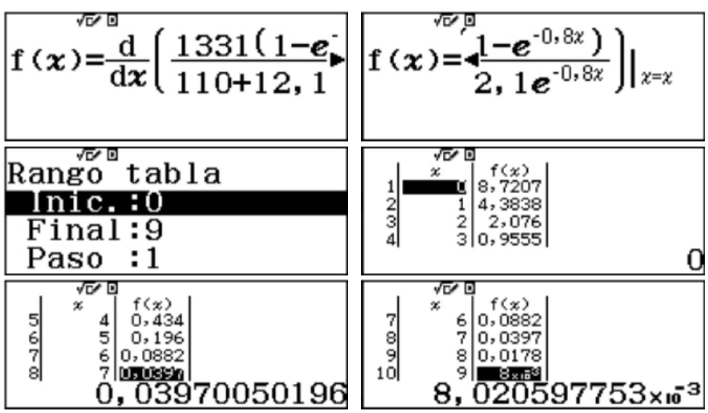
La representación gráfica de la rapidez:



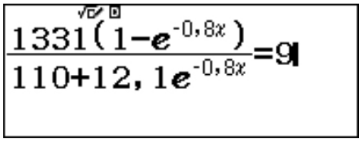
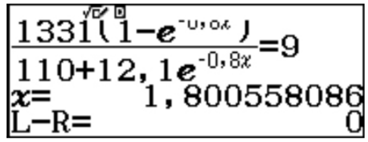
d. Confeccione una tabla del espacio recorrido por Usain Bolt, en cada intervalo de un segundo durante la carrera comenzando desde $t = 0.$



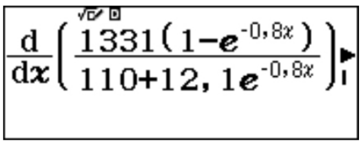
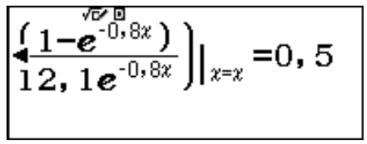
e. Confeccione una tabla con los valores de la aceleración de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,...,9$ durante la carrera.



f. ¿En qué instante la rapidez de Usain Bolt fue de 9 m/s?

g. ¿En qué instante la aceleración instantánea es de 0,5 m/s^2?

Reflexiones en torno a la experiencia de formación

Esta experiencia de formación permitió que, a través de situaciones para el desarrollo del pensamiento matemático, con el uso de las calculadoras, los maestros y maestras pudieran realizar trabajo colaborativo por medio de la aplicación con la que cuenta la herramienta e incluir dinámicas tecnológicas que propician un espacio más amigable para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La participación en esta experiencia aportó elementos para reconocer el uso de las tecnologías para el desarrollo del pensamiento matemático, teniendo presente que su éxito depende del tipo de actividades que diseñe el docente y la manera cómo las implemente en la clase. En esta medida, los maestros reflexionaron en torno al desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes a partir de la toma consciente y fundamentada de decisiones sobre actividades, métodos, recursos, técnicas y formas de trabajo que pondrá en juego en el aula.

Por último, los maestros y las maestras reconocieron que la mejora de su práctica requiere de un análisis sistemático, continuo y profundo de la manera de planeación de secuencias de aprendizaje, la implementación en el aula de las tareas diseñadas, la evaluación de la efectividad y pertinencia de las tareas diseñadas y la reflexión de las transformaciones y comprensiones logradas.

Bibliografía

Alba, J. y Angulo, A. (2018). *Diseño de actividades de modelación y análisis con el uso de calculadora de pantalla gráfica.* Universidad de la Sabana.

Albergaria, I. y Ponte, J. (2008). Cálculo mental e calculadora. En A. Canavarro, D. Moreira y M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). SEM-SPCE

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Campbell, P. y Stewart, E. (1993). Calculators and computers. En R. Jensen (Org.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 251-268). Macmillan.

Carmona-Mesa, J. Salazar, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad, 18*(1), 13-24.

Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017). ¿Qué piensan los futuros profesores sobre el uso de la calculadora en la educación primaria? *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 2*(1), pp. 4-14 .

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan* (W, Cockcroft, traducción). Ministerio de Educación y Ciencia (Original publicado en 1982).

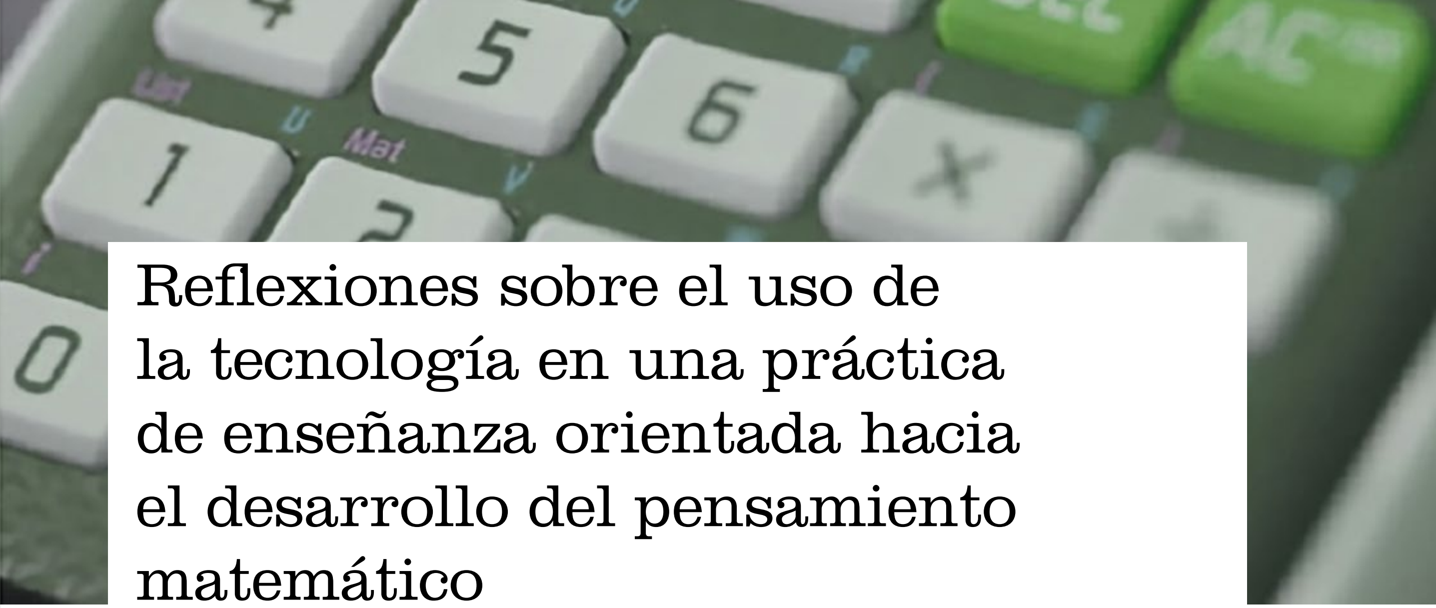
MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas.* Panamericana Formas E Impresos S.A.

Ortiz, J. (2006). Incorporación de la calculadora gráfica en el aula de matemática. Una discusión altual hacia la transformación de la práctica. *Sapiens, 7*(2), 139-157.

Selva, A. y Borba, R. (2010). *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental.* Autêntica.



Reflexiones sobre el uso de la tecnología en una práctica de enseñanza orientada hacia el desarrollo del pensamiento matemático

John Alexánder Alba Vásquez
Universidad de La Sabana
john.alba@unisabana.edu.co

En 2006 el Ministerio de Educación Nacional propuso como reto a los educadores matemáticos del país efectuar o llevar a cabo una práctica de enseñanza que ayudara a ***"potenciar el pensamiento matemático"*** de los estudiantes (MEN, 2006). En el mismo texto, invita al profesor a diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con base en estructuras curriculares dinámicas, que sean el producto de la reflexión permanente sobre su propio quehacer. De igual forma, dentro de esta lógica de un currículo matemático dinámico, los invitó para que se apropiaran y usaran los recursos tecnológicos e informáticos para la configuración y diseño de situaciones de aprendizaje contextualizadas y significativas.

16 años después, estas ideas permanecen, pero requieren de una reflexión por parte de la comunidad de educadores matemáticos. Por estas razones, este texto desplegará estas ideas sin pretensiones de discurso teórico y, más bien, con la intención de exponer unos puntos de discusión con el objetivo de retomar un diálogo académico sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas.

¿Qué se entiende por pensamiento matemático?

Si el reto que propone el Ministerio es desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, una pregunta inicial como educador matemático es: ¿Qué se entiende por pensamiento matemático? En este momento es oportuno invitar al lector para que piense por un minuto qué respuesta daría a esta pregunta y, de ser posible, que escriba algunas de las ideas que le suscita este cuestionamiento.

Un segundo ejercicio que propondría sería hacer esta pregunta:¿Cómo creo yo que se puede potenciar/desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes? O, en otras palabras, ¿qué deben hacer ellos (los estudiantes) para desarrollar su pensamiento matemático? Y, en consecuencia, ¿qué actividades se deben proponer para ayudarlos a potenciar su pensamiento matemático?

Las respuestas a los anteriores cuestionamientos no son sencillas ni únicas. De una parte, cada educador matemático las responderá desde sus creencias, concepciones y experiencias sobre lo que son las matemáticas, la forma como se aprenden y los fines que persigue su enseñanza. (Ernest, 1989; Pehkonen, 1994; Gascón, 2000).

De otra parte, hablar de pensamiento y, específicamente, de pensamiento matemático, se convierte en un asunto polémico por la complejidad del concepto. Son múltiples los enfoques teóricos desde los que se puede buscar una respuesta a la pregunta: ¿Qué es el pensamiento matemático? Por ejemplo, Molina (2006) considera tres posturas desde las que se puede comenzar la discusión sobre la naturaleza del pensamiento: la lingüística, la filosófica y la psicológica. También es posible ubicar posturas de tipo neurobiológico (Radford y André, 2009), sociocultural (Álvarez, 2011), entre otras, que permiten explicar la acción humana de pensar.

Por ello, es necesario establecer un punto de partida para la discusión. Se toma la definición de pensamiento propuesta por Molina (2006):

> Pensamiento es la actividad (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende y dota de significado a lo que le rodea; la cual consiste, entre otras acciones, en formar, identificar, examinar, reflexionar y relacionar ***ideas o conceptos***, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia; permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar medios para alcanzar una meta. (p. 52)

Desde esta perspectiva, el pensamiento se asume como actividad humana esencial que nos diferencia de las demás especies. La conciencia reflexiva de sí mismo y de lo que lo rodea, propia de la especie humana, le permite interactuar con su entorno para apropiarlo y transformarlo. Por lo tanto, asumir el reto de potenciar el pensamiento de los estudiantes es asumir la responsabilidad de contribuir en su crecimiento y en la búsqueda de perfectibilidad humana.

De igual forma, no es menor la afirmación del carácter interno del pensamiento. Comprender que este acto en sí mismo no es observable de manera directa por otro ser humano y que es a través de sus actos, declaraciones, creaciones y actitudes que se puede evidenciarlo e interpretar sus transformaciones. Es por esto que, si la acción de enseñanza busca el desarrollo intencionado del pensamiento de los estudiantes, se requieren estrategias que permitan "visibilizarlo" (Perkins, 1992; Ritchhart et al., 2011).

Finalmente, la definición da pistas del tipo de actividades que pueden promover el desarrollo del pensamiento. Actividades que inviten a los estudiantes a identificar, examinar y comparar diferentes ideas o conceptos y que, adicionalmente, les rete a buscar, interpretar y explicar diferentes relaciones entre ellos con el fin de que, a partir de estas reflexiones, propongan nuevas ideas y conceptos. Pero la acción no se limita al ejercicio conceptual sobre las ideas, se debe buscar, con la actividad, que las comprensiones logradas permitan a los estudiantes tomar decisiones y posturas, resolver problemas, plantear nuevas preguntas y buscar sus posibles respuestas.

Pero hasta aquí se ha hecho alusión al pensamiento de manera general. Cabe interrogarse sobre qué es lo particular del pensamiento matemático. Una aproximación sería asociarlo con la naturaleza de **las ideas o conceptos** sobre los cuales se realizan las acciones descritas anteriormente. En este sentido, cuando esta acción de pensar se realiza sobre o utilizando objetos de naturaleza matemática, se hace referencia al pensamiento matemático del sujeto.

Como lo hemos manifestado, es preciso asumir una definición de ***objeto matemático*** para establecer un lugar común para avanzar en esta reflexión. De las muchas aproximaciones que se han dado se ha optado por la presentada por Godino (2002) citada por D´Amore (2006*) "Objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas"* (p. 181).

Como complemento a la definición, D'Amore (2006), proponen una tipología que permite la organización de estos objetos.

- "lenguaje" (términos, expresiones, notaciones, gráficos ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...).
- "situaciones" (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...).
- "acciones" (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...).
- "conceptos" (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media función, ...).
- "propiedades o atributos de los objetos" (enunciados sobre conceptos, ...).
- "argumentos" (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo,...).
- A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías"(pp. 28-29).

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) propone orientar la formación matemática escolar hacia el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes mediante la interacción y apropiación de ciertos sistemas matemáticos. Desde esta perspectiva, se desprende la posibilidad de hablar de una nueva subdivisión del pensamiento matemático si se relaciona con la interacción cognitiva del sujeto con un determinado sistema matemático. De esta forma, cuando el sujeto interactúa con sistemas numéricos se alude a pensamiento numérico, con sistemas métricos de pensamiento métrico y así con cada uno de los sistemas matemáticos establecidos. En la tradición escolar colombiana se han reconocido cinco sistemas matemáticos básicos (Vasco, 2006): numéricos, geométricos, métricos, estocásticos y analíticos, es decir, la interacción cognitiva de un sujeto con cada uno de ellos provee un modelo de interpretación y planeación asociado con cinco tipos de pensamiento matemático.

Desde esta apuesta, los sistemas matemáticos se ubican como herramientas que ayudan a refinar el pensamiento y no como el propósito central de la clase. Es decir, el propósito de las matemáticas escolares no es dominar los objetos, sus transformaciones, las relaciones y las operaciones que componen un determinado sistema matemático, sino que, a través de la interacción con las diferentes representaciones de sistema trabajado, potenciar la habilidad para resolver problemas, modelar la realidad, argumentar procedimientos y decisiones, comunicar ideas, procesos y conceptos.

Lo anterior brinda pistas para responder la segunda pregunta que se planteó al inicio del apartado: ¿Cómo potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes? Cuando se propone a los estudiantes actividades que los inviten y reten a interactuar de manera diversa con diferentes representaciones de los objetos matemáticos, se estará promoviendo una acción de pensamiento en el que los objetos y sistemas matemáticos se convierten en herramienta (vehículo) para describir, interpretar, comunicar y comprender situaciones cotidianas, teorías y conceptos asociados con diferentes disciplinas y con las mismas matemáticas.

Finalmente, si se adopta este modelo de sistemas y pensamientos como base de interpretación y planeación de la acción de enseñanza-aprendizaje, el profesor no debe olvidar que el pensamiento es uno y que esta tipología es simplemente una herramienta de análisis. Pensar matemáticamente implica la asociación y relación entre diferentes sistemas matemáticos y la vida cotidiana.

Un currículo orientado hacia el desarrollo del pensamiento matemático

Lo discutido hasta aquí plantea la necesidad de hacer un ejercicio reflexivo sobre la forma en la cual se está bordando la enseñanza de las matemáticas en las aulas. Preguntas acerca de: ¿Qué estamos enseñando? ¿Para qué y por qué lo estamos enseñando? ¿Cómo lo estamos enseñando?, ubican al docente en el plano curricular de la acción. Al igual que en el apartado anterior, es preciso hacer una invitación al lector para que piense en cuáles serían sus respuestas ante estos cuestionamientos.

Cuando se intenta responder a estas preguntas, quizás las respuestas estén más cerca a la idea de la enseñanza de un conjunto de contenidos, temas y procedimientos matemáticos que responden a una estructura curricular externa en la que "alguien" ha decidido qué temas se deben trabajar y desplegar en cada periodo y año académico. Es por esto por lo que las respuestas a qué estamos enseñando, generalmente, están asociadas con un objeto matemático particular: "los números del 1 al 100", "suma de fraccionarios homogéneos", "operaciones con enteros", "los casos de factorización", "el teorema de Pitágoras", "las cónicas", "las medidas de tendencia central", "la regla de la cadena", entre otras.

En relación con las respuestas asociadas con las razones que justifican la enseñanza de estos temas (¿el por qué y para qué?), generalmente, se recurre a explicaciones que delegan la responsabilidad a agentes externos como el "colegio", "la universidad" o "el Estado", que han adoptado esta estructura de contenidos para ser enseñados y, por ende, es responsabilidad propia "cubrir o ver esos temas" en un tiempo determinado. Pocas veces nuestros argumentos justifican el trabajo de aula desde una óptica de desarrollo de habilidades o competencias matemáticas de los estudiantes porque este enfoque requiere de "mucho tiempo y es precisamente eso lo que no tenemos en la escuela".

En consecuencia, la respuesta al cómo enseñar matemáticas se ajusta, en muchos casos, a una estructura rígida que trata secuencialmente un objeto matemático. Se parte de la presentación (por parte del profesor) de una definición del objeto, incluso, a veces, se definen objetos que, por su naturaleza, son indefinibles, como, por ejemplo, el punto; luego, el profesor realiza algunos ejercicios operativos de tratamiento o transformación sobre el objeto. Posteriormente, se proponen algunos “problemas” que se pueden resolver con aplicación, de manera mecánica, de las operaciones o definiciones anteriormente explicadas.

Si el lector lo permite, hay que detenerse en el tono en el que se presenta la secuencia curricular descrita en el párrafo anterior. Las acciones sobre los objetos son, en su mayoría, ejecutadas por el profesor. Los profesores son quienes presentan la definición, el desarrollo del ejercicio operativo y la resolución de los primeros problemas, mientras que los estudiantes adoptan una postura pasiva en la que toman notas y reproducen en sus libretas o cuadernos los símbolos y gráficos que los profesores ejecutan en el tablero o pizarra. Es solo hacia el final de esta estructura curricular, en la evaluación, en la que el estudiante adopta el papel protagónico cuando intenta resolver un cuestionario con un conjunto de preguntas relacionadas con las definiciones, las operaciones y los problemas asociados con los objetos matemáticos trabajados durante el periodo de tiempo que “cubre el tema a evaluar en el examen”.

Esta radiografía no pretende juzgar la acción de enseñanza que los educadores matemáticos realizan puesto que la intención es invitar al lector a reflexionar si esta estructura de enseñanza realmente contribuye o no al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Estas reflexiones han promovido en los últimos años un viraje en las propuestas curriculares para la enseñanza de las matemáticas. La literatura reporta que vienen migrando de propuestas centradas en el aprendizaje de contenidos a propuestas focalizadas en el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los alumnos. (Font, 2011). Este giro conceptual no es fácil por cuanto demanda un cambio de concepción profundo y una aproximación a estrategias y herramientas nuevas de enseñanza.

Un posible punto de partida para esta reflexión es considerar que para aprender matemáticas

> …no basta haber construido un concepto (matemático), sino que es necesario saberlo usar para efectuar cálculos o dar respuesta a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para resolver problemas; es necesario saber explicar a sí mismo o a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permite pasar de una representación a otra. (Fandiño, 2010, p. 15)

Es por esto que orientar el currículo de matemáticas al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes requiere de un diseño consciente y fundamentado de tareas o actividades que inviten a los estudiantes a formular y resolver problemas, modelar o matematizar fenómenos de la realidad, comunicar sus ideas con un lenguaje matemático, argumentar sus decisiones y procedimientos, proponer, comparar y ejercitar diferentes procedimientos y algoritmos (MEN, 2006).

En este orden de ideas, las preguntas sobre ¿qué enseñar? ¿Para qué enseñar? ¿Cómo enseñar?, migran también su foco. Quizás si las respuestas a la pregunta ¿qué enseño?, sean "estrategias para la formulación y resolución de problemas, "estrategias y técnicas de modelación y matematización de situaciones y fenómenos de la realidad", "a construir y decodificar distintas manifestaciones de "textos matemáticos" (tablas, gráficas, fórmulas…) "a proponer, validar y refutar diferentes conjeturas utilizando las matemáticas como medio de razonamiento" etc., estemos cambiando la orientación del currículo.

De igual forma, las razones desde las que se justifica el para qué y el por qué de la acción de enseñanza se pueden enfocar de manera consciente al desarrollo del pensamiento y competencias de los estudiantes. Si estos argumentos giran alrededor de ideas como ayudar a los estudiantes a "la toma consciente, fundamentada y documentada de decisiones", "mejorar sus comprensiones de la realidad", "promover habilidades para aprender a lo largo de sus vidas" y "brindar herramientas para la solución estructurada de problemas"…

En este orden de ideas, las respuestas a la pregunta: ¿Cómo enseño?, necesariamente cambiarán. Quizás de acciones centradas en el protagonismo del docente a acciones diseñadas por el docente para que los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje.

El uso de recursos tecnológicos e informáticos como herramientas para potenciar el pensamiento matemático

La última idea propuesta en la introducción de este capítulo hace alusión a la apropiación y utilización, por parte del profesor de matemáticas, de recursos tecnológicos e informáticos en la configuración y diseño de situaciones de aprendizaje contextualizadas y significativas.

En la misma línea discursiva que llevamos hasta aquí, antes de plantear algunas ideas al respecto, se propone al lector preguntarse acerca de su postura frente al uso de la tecnología en el aula de matemáticas. Algunas preguntas que pueden orientar la reflexión pueden ser: ¿Qué tipo de tecnología utilizo en mis clases de matemáticas? ¿Con qué frecuencia? ¿Para qué se usa la tecnología en el aula? ¿Permito el uso de esta tecnología en los exámenes?

Una vez planteadas estas preguntas, quizás el lector ha pensado en una serie de recursos tecnológicos como el computador, las tabletas, los teléfonos celulares y las calculadoras. Además de diferentes programas de cómputo comerciales y libres, aplicaciones para móviles y plataformas de contenidos. Sin embargo, las respuestas a las preguntas del uso de estos recursos en el aula no son tan variadas y, en algunos, no hay ninguna evidencia tangible de su uso en las clases de matemáticas.

Lo anterior puede tener explicación en una postura de enseñanza de las matemáticas enfocada en los contenidos. Si la clase de matemáticas se centra en la memorización de algunas definiciones y fórmulas o en la ejercitación de algoritmos, la tecnología no tiene cabida en el aula porque "no le permitirá al estudiante aprender matemáticas" en la medida en que es la máquina quien efectúa las acciones que el profesor espera ejecute el estudiante como parte de su aprendizaje.

Desde esta óptica, se espera que el estudiante memorice algunas "definiciones" o fórmulas para el cálculo de atributo de objetos matemáticos que se consideran aprendidos en la medida en que el estudiante las repita o reproduzca en una prueba o examen. Es por esto que permitir el uso de una computadora o el teléfono móvil en la clase y, especialmente, en el momento de los exámenes, se convierte en un obstáculo para el aprendizaje por cuanto, con la acción de teclear "ok Google" en su teléfono celular, el estudiante recibirá respuesta a preguntas como: ¿Qué es una bisectriz? ¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro? ¿Cuál es la definición formal de límite? ¿Cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento?... etc. Solo como un ejercicio de reflexión, se invita al lector a tomar su teléfono y pedirle que dé respuesta a algunas de estas preguntas o las que formula frecuentemente en clase a sus estudiantes.

Del mismo modo, cuando se considera que un sujeto ha aprendido matemáticas si logra aplicar una fórmula o realizar una serie de pasos para una operación o tratamiento de un objeto en un mismo registro de representación, la tecnología "dificulta el aprendizaje" porque los sistemas algebraicos de cómputo (CAS por sus siglas en inglés) o los sistemas graficadores realizan este tipo de tareas y devuelven en detalle el paso a paso.

Software comercial como Derive, MatLab o Mathematica, calculadoras que contienen estos paquetes, software libre como Geogebra o Wolfran Alpha y la cada vez más creciente oferta de Apps para celulares y tabletas, realizan este tipo de tarea de manera rápida y eficiente. Por dar un ejemplo, aplicativos como Photomath permiten tomar una foto de un ejercicio escrito en el cuaderno y devuelven el procedimiento y la respuesta. De igual forma, como ejercicio de reflexión, se invita al lector a descargar en su teléfono la aplicación y tomar algunas fotos de los ejercicios propuestos a los estudiantes en el último examen.

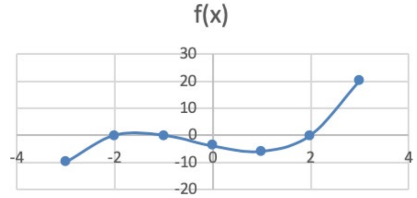
Lo anterior plantea que un posible obstáculo para la inclusión de tecnología en el aula es nuestra concepción acerca de lo que significa aprender matemáticas. Surge entonces la pregunta: ***¿Qué significa que un estudiante ha aprendido o comprendido un objeto matemático?***

Para intentar responder a esta pregunta, se hace referencia a las ideas propuestas en el marco de la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2004). Desde esta perspectiva, se entiende ***la naturaleza conceptual*** de los objetos matemáticos, es decir, un objeto matemático existe en el mundo de las "ideas", nadie ha visto una recta o un punto. Es un constructo mental. Pero para apropiar este objeto matemático se hace necesario "materializarlo" a través de una representación semiótica.

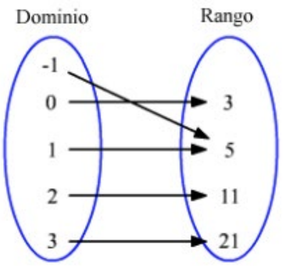
Para ilustrar esta idea se acude al ejemplo presentado por Iori (2014)

Si se le pregunta a un estudiante de escuela secundaria: ¿Qué es una función?, podemos obtener como respuesta:

- un dibujo, por ejemplo:



- un símbolo, por ejemplo: «f(x)»
- una definición
- un diagrama, por ejemplo:



- una frase interlocutoria: «No sé»

…

En los cuatro primeros casos «las respuestas son representaciones semióticas del objeto pedido, no son el objeto al cual se hace referencia». (p. 28-29)

En varios casos, estudiantes y profesores tienden a confundir el objeto matemático (no accesible perceptiva o instrumentalmente) con la representación semiótica usada para materializarlo (Iori, 2014).

Por causa de esta confusión, se le dedica gran parte del ejercicio en el aula a la producción de representaciones de objetos matemáticos o a tareas de transformaciones de estas representaciones en un mismo registro (tratamiento) o en otro registro (conversión) para generar nuevos registros del objeto y se deja de lado el ejercicio de búsqueda de relaciones entre los diferentes registros y la apropiación conceptual del objeto representado.

Un estudiante puede dedicar un tiempo considerable en la producción de una gráfica de una función trigonométrica, en la construcción de un dibujo de un triángulo equilátero con regla y compás, en la factorización de un polinomio o en la elaboración de una tabla de medidas de tendencia central asociadas con un conjunto de datos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la tarea termina allí y no se dedica tiempo para la lectura e interpretación del registro generado o a la búsqueda de relaciones entre el registro inicial y el final o la interpretación de las características del objeto que pueden ser observadas en uno u otro registro.

Desde este punto de vista, una práctica de enseñanza orientada al desarrollo del pensamiento matemático debería buscar, como lo mencionamos en el primer apartado, una interacción "enriquecida" con la mayor cantidad de registros semióticos de un objeto de tal manera que el estudiante esté en condiciones de:

> **Elegir un registro de representación** y una representación del objeto en dicho registro **para destacar propiedades** del objeto **en una situación dada.**
>
> **Transformar dicha representación** en el mismo registro (tratamiento) o en otro (conversión) **de forma adecuada**, reconociendo el mismo objeto en las representaciones transformadas del objeto dado. (Iori, 2014, pp. 39-40)

En este apartado se ve la utilidad de los recursos tecnológicos en el aprendizaje de las matemáticas. Los diferentes recursos tecnológicos especializados brindan, a profesores y estudiantes, la posibilidad de generar representaciones de diversos objetos matemáticos y realizar transformaciones de tratamiento y conversión de manera rápida y confiable.

Un ejemplo para graficar lo dicho hasta ahora. Piensen en una acción como la generación de una representación numérica de una función cuadrática (construir una tabla de valores que muestre la relación), en un contexto tradicional de aula. A un estudiante promedio le puede tomar entre 5 y 10 minutos hacer una tabla con 10 datos que no puede modificar o transformar, en otras palabras, es un registro estático.

Mientras que, si se usa una hoja de Excel, puede hacer una tabla con 100 registros con menos de la mitad del tiempo. Además, la representación es modificable, es decir, puede cambiar datos, ampliar o disminuir el número de datos y con una acción sencilla realizar una transformación de conversión que produce una nueva representación del objeto en un registro gráfico. Por si fuera poco, las dos representaciones del objeto función en los dos registros semióticos (tabular y gráfico) están vinculadas, de tal manera que un cambio en el registro tabular automáticamente transforma el registro gráfico.

Lo anterior le da al registro de representación digital un papel central en el ejercicio de apropiación conceptual de los objetos matemáticos ya que el sujeto puede dedicar más tiempo a la interacción cognitiva con la representación y no centrar su esfuerzo en el la generación del registro o en el tratamiento o conversión para hacer una nueva representación- Además, tendrá la posibilidad de apropiar conceptualmente el objeto. En palabras de Duval (2004), acercarse a la "Noesis del objeto".

Finalmente, un ejercicio de apropiación conceptual por parte del sujeto de un objeto matemático, le permitirá utilizarlo para resolver problemas, modelar situaciones, realizar conjeturas y razonamientos, comunicar sus ideas e, incluso, crear nuevos objetos de naturaleza matemática.

Bibliografía

Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la Educación Matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 59-66.

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,9*(1), 177-196.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Ernest, P. (27 de julio a 3 de agosto de 1989). T*he impact of beliefs on the teaching of mathematics* [Conferencia]. 6th International Congress of Mathematical Education-ICME, Budapest.

Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática.* Magisterio.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista iberoamericana de educación matemática, 7*(26), 9-25.

Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario. En C Mosquera (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos clave para el debate* (pp. 27-44). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Magisterio.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Pehkonen, E. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik, 15*(3/4), 177–209.

Perkins, D. (1992). *Smart schools: Better thinking and learning for every child*. The Free Press.

Radford, L. y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,12*(2), 215-250.

Ritchhart, R., Church, M. y Morrison, K. (2011). *Making thinking visible: How to promote engagement, understanding, and independence for all learners*. John Wiley & Sons.

Vasco, C. (2006). *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos.* Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Integración de tecnologías en clase de matemáticas. Experiencias con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

Alexánder Castrillón-Yepes
alexander.castrillony@udea.edu.co
Jhony Alexánder Villa-Ochoa
jhony.villa@udea.edu.co
Mónica Marcela Parra-Zapata
monica.parra@udea.edu.co
Universidad de Antioquia. MATHEMA-FIEM

Resumen

En este documento se presentan y analizan dos experiencias derivadas de los proyectos de investigación y de formación que desarrollan integrantes del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia. Estas experiencias se preguntaron por las posibilidades que ofrecen las calculadoras como recurso en el desarrollo del pensamiento matemático. Para ello, se exponen consideraciones teóricas que orientan el diseño de ambientes para el trabajo matemático en el aula. En conjunto, las experiencias evidencian posibilidades para trascender un uso de las calculadoras como sustituto de los cálculos y para disminuir la carga operatoria. Finalmente, se realizan algunas reflexiones y sugerencias para su integración en clases de matemáticas.

El uso de la calculadora en clases de matemáticas

A lo largo de las últimas décadas se han desarrollado investigaciones y programas de formación que buscan la integración de las tecnologías digitales en la cotidianidad escolar. En Colombia, los programas *Computadores para Educar*, *Tablet para Educar* y el *Plan TESO* son ejemplos de iniciativas que buscan trascender el compromiso de proporcionar dotación de equipos y dispositivos, para buscar estrategias que contribuyan al desarrollo de prácticas de los profesores que permitan promover pensamiento matemático en los estudiantes.

En la actualidad, las investigaciones relacionadas con la integración de tecnologías en clase de matemáticas muestran un amplio espectro de sus contribuciones. Se destaca, por ejemplo, el uso de redes y plataformas para la formación, dispositivos para promover la producción de conocimiento a través de otras experiencias sensoriales (Realidad aumentada, realidad virtual) y la integración de dispositivos móviles. Así, la necesidad de integrar computadores y calculadoras sigue siendo vigente en el aula (Medina y Ortiz, 2013; Conti et al., 2017a, 2017b; Carmona-Mesa et al., 2018 y Villa-Ochoa et al., 2020).

Los temas de acceso, distribución y portabilidad para algunas comunidades continúan siendo argumentos para pensar en la calculadora como una herramienta en el desarrollo del pensamiento matemático. Existen estudios que muestran diversidad de oportunidades, de usos y comprensiones tanto en profesores, como en estudiantes y padres de familia (Selva y Borba, 2014; Carmona-Mesa et al., 2018). Por un lado, existen usuarios que afirman que el uso de las calculadoras puede obstaculizar el aprendizaje de los estudiantes. Esta visión de obstáculo se sustenta en una comprensión de la tecnología como un sustituto del cálculo y del desarrollo de procedimientos. Por otro lado, existen otros actores que han argumentado la posibilidad de comprensión conceptual, de resolución de problemas, de creación de estrategias, entre otros (Selva y Borba, 2014; Conti et al., 2017a; 2017b).

En relación con los obstáculos, el estudio de Del Puerto y Minnaard (2002) informa que el rechazo al uso de la calculadora por parte de padres y educadores se fundamenta en creencias de un uso solo para seguir instrucciones y de las limitaciones en el desarrollo de habilidades de cálculo numérico. Por otro lado, superar la visión de obstáculo requiere transcender la visión de *sustituto del cálculo* y aprovechar el recurso para el diseño de ambientes para promover el pensamiento matemático. Como ejemplos de este propósito, los trabajos de Selva y Borba (2014) y Carmona-Mesa et al. (2018) ofrecen ejemplos de tareas en los que la calculadora básica numérica permite a los estudiantes el estudio de los algoritmos de las operaciones básicas, el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas, el uso de las propiedades de los números naturales, y a su vez ofrecen insumos para promover la comprensión de la variación en progresiones aritméticas y geométricas.

En relación con otras calculadoras numéricas, Yerbes y Pacheco (2017) presentan tareas con la ClassWiz fx-991EX que son cercanas al mundo cotidiano de las personas y sirven para interpretar, analizar y tomar decisiones. Los autores justifican el uso de la calculadora en estas tareas porque, en ciertas ocasiones, se requieren cálculos algorítmicos que pueden desviar la atención de los estudiantes frente a la pregunta o problema que se desea resolver, así que la calculadora "es una herramienta que permite direccionar la atención hacia la interpretación, análisis, generar estrategias y toma de decisión ante diversas situaciones" (Yerbes y Pacheco, 2017, p. 5). Esta justificación demarca el rol de reducir la carga operatoria intrínseca en las tareas que proponen los autores. No obstante, a partir de este trabajo, se crea la necesidad de construir experiencias que promuevan un uso de la calculadora que trascienda el cálculo y la obtención de resultados.

Con base en las anteriores consideraciones, en las investigaciones desarrolladas por el Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia se entiende que la integración de tecnologías en la cotidianidad escolar no se reduce a la presencia de un dispositivo para "hacer lo mismo" que se hace con otras tecnologías, entre ellas, el lápiz y el papel. Más allá de ello, se busca que sea un ambiente en el que se tenga en cuenta:

- Las ideas fundamentales de las matemáticas escolares y su relación con los medios, sus significados y procedimientos.
- El diseño de tareas que les permita a los estudiantes matematizar; es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
- La configuración de ambientes de clase que promuevan la participación, la discusión, el razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el ambiente.
- La promoción de la *experimentación*, la formulación y la validación de conjeturas. Además de un discurso en el aula que incluya argumentos y que se fundamenta en ideas y procedimientos matemáticos.
- La evaluación debe, a su vez, promover el aprendizaje de los contenidos matemáticos y una valoración de las habilidades y procesos desarrollados con la tecnología disponible.

En el siguiente apartado se presentan dos experiencias de los trabajos realizados tanto en las clases de matemáticas en el nivel de Educación Básica, como en un programa de formación de profesores.

Experiencias con el uso de la calculadora en Educación Básica

Se han llevado a cabo en instituciones educativas de la ciudad de Medellín experiencias de integración de tecnología, entre ellas, el uso de la calculadora Classwiz fx-991LA X. En ellas la calculadora en clase de matemáticas promueve la interpretación, el análisis, la creación de estrategias y la toma de decisiones ante diversas situaciones que se presentan.

Usar la calculadora en la Educación Básica ha implicado la configuración de ambientes que consideren:

- **Exploración de la herramienta:** los estudiantes se familiarizan con el manejo de la calculadora por medio de retos en los que se reconocen las teclas y sus funcionalidades.
- **Práctica y conceptualización:** se llevan a cabo situaciones en torno a un o unos conceptos matemáticos, en los que el uso de la calculadora posibilita la solución de problemas y la discusión sobre algún componente conceptual.
- **Comunicación y discusión:** se discuten las soluciones ofrecidas por la calculadora y se problematizan en relación con el problema inicial.

Un uso de la calculadora en Básica Secundaria

A continuación, se presenta una de las experiencias con estudiantes del grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

La experiencia inició con una exploración y familiarización con las funciones básicas de la calculadora Classwiz fx-991LA X: prender y apagar, formatear, cambiar el idioma, usar teclas básicas y especiales. Posteriormente, se les pidió a los estudiantes realizar las siguientes tareas con la calculadora.

- Indicar el resultado de la expresión matemática: $5 - 7 + 3 \cdot [(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)] + 3 =$
- Dada la expresión $3 + 4 - 6 + 9$, calcular todos los resultados posibles al ubicar un par de paréntesis para agrupar de diferentes maneras
- Aumentar 2500 en un 15%.

Para el desarrollo de la primera tarea, los estudiantes propusieron diferentes estrategias en las que se pudo explorar el teclado de la calculadora y realizaron cálculos con las cuatro operaciones básicas. Además, quitar y poner algunos signos de agrupación, observar el resultado y explicar el cambio que genera en la expresión y las operaciones su presencia o ausencia. Al comprobar los resultados en sus calculadoras, los estudiantes pudieron reconocer por ejemplo que $(5 - 7)$ es equivalente a $5 - 7$, pero que en el caso de $3 \cdot [(-7 -3) - 2 \cdot (2 + 56)]$ no es equivalente a $3 \cdot (-7-3) - 2 \cdot (2 + 56)$, dado que los paréntesis indican el orden y la prioridad de las operaciones en el enunciado en particular, por ejemplo allí, en el primer caso se efectúa un producto donde el primer factor es 3 y el segundo factor es $[(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)]$, mientras que en el segundo caso se efectúa una resta donde el primer término es $3 \cdot (-7 - 3)$ y el segundo término es $2 \cdot (2 + 56)$.

En la segunda tarea, los estudiantes calcularon todos los posibles resultados de la expresión $3 + 4 - 6 + 9$, al ubicar un par de paréntesis que agruparan de diferentes maneras. Entre las respuestas, los estudiantes propusieron expresiones como:

$$(3 + 4 - 6 + 9) =$$
$$(3 + 4) - 6 + 9 =$$
$$3 + 4(- 6 + 9) =$$
$$3 + 4(- 6) + 9 =$$
$$3 + 4 - (6 + 9) =$$
$$3\ (+ 4 - 6 + 9) =$$

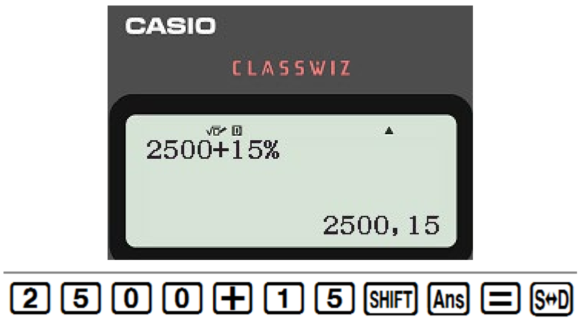
Dado que en todos los casos se obtenían respuestas diferentes, los estudiantes manifestaron la necesidad de crear una estrategia para agrupar términos de la expresión, según el orden y el tipo de agrupación que se quisiese realizar. Luego, comenzaron a tomar de a dos términos con el fin de introducir la multiplicación y la propiedad distributiva. Más tarde, hicieron lo mismo agrupando con el paréntesis tres términos de la expresión. En la parte final, y como una manera de evaluar el trabajo de los estudiantes, se les pidió que propusieran sus propios retos para identificar el uso de los signos de agrupación. A manera de ejemplo, uno de los grupos creó la tarea:

Tome la siguiente operación: $3 + 5 - 2$ ubique diferentes signos de agrupación para obtener como resultados los números 6, 9, -16. ¿Se pueden construir más números?

Esto y otras reflexiones les permitieron a los estudiantes reconocer la importancia del uso de signos de agrupación y el orden de aplicación de los signos para no alterar los resultados de las operaciones. De esta manera, la calculadora apoyó la construcción de estas características de los símbolos y las convenciones matemáticas.

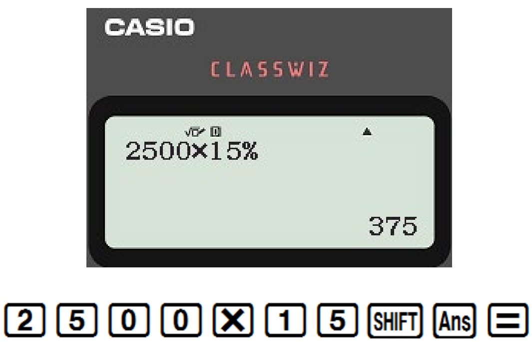
En el caso de la tarea del aumento porcentual, en el momento de aumentar 2500 en un 15%, se encontraron dos estrategias de solución.

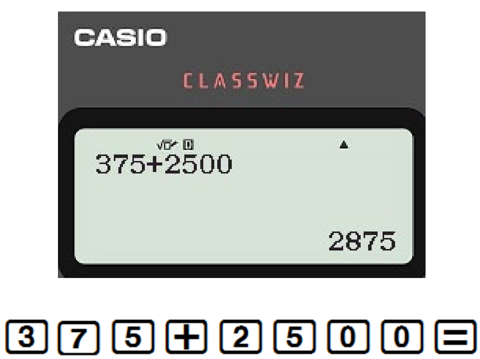
Tabla 1. Estrategias de solución de los estudiantes.



Caso 1

Uno de los equipos de trabajo indicó que *"sumamos 2500 y 15%, porque nos dicen que aumentemos y vemos qué nos da en la calculadora, el resultado es dos mil quinientos punto quince".*





Caso 2

Uno de los equipos de trabajo mencionó que era *"necesario sacar primero el quince por ciento, esto se hace multiplicando el número por 15%. Luego sumamos el resultado con el número inicial".*

Fuente: los autores con producciones de los estudiantes.

En la estrategia propuesta en el **caso 1**, los estudiantes interpretaron el incremento como una suma de cantidades, sin reconocer el significado del porcentaje de un número. En este caso, el hecho de que la calculadora ofreciera un resultado se convierte en un obstáculo para la comprensión del cálculo del porcentaje, puesto que los estudiantes interpretan este resultado como una manera de validar su razonamiento. Por su parte, en el **caso 2** los estudiantes reconocen que el 15% se determina en relación con otra cantidad, en este caso 2500.

Un uso de la calculadora en Básica Primaria

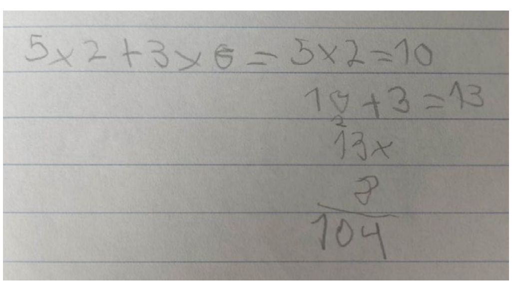
Se presenta una de las experiencias con estudiantes del grado cuarto de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

La experiencia inició con una exploración y familiarización con las teclas para operaciones básicas con la calculadora Classwiz fx-991LA X: prender y apagar, teclas numéricas, teclas para operaciones +, -, x y ÷. Posteriormente, se les pidió a los estudiantes realizar las siguientes tareas con la calculadora.

- Realizar el cálculo $5 \times 2 + 3 \times 8 =$ a lápiz y papel y luego con calculadora científica.
- La profesora Gabriela tenía en clase 87 stickers para repartir en partes iguales entre sus 9 estudiantes. Antes de repartirlos quiso saber ¿cuántos sobrarían? e hizo cuentas con la calculadora. Indicar ¿qué operación hizo la profesora en la calculadora? ¿es posible saber cuántos stickers sobran?

Para el desarrollo de la primera tarea un estudiante propuso realizar a lápiz y papel:

Figura 1. Desarrollo de estudiante.



$$5 \times 2 + 3 \times 8 = 5 \times 2 = 10$$

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 13 \times \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

Fuente: trabajo de estudiante.

Esta solución fue validada por el grupo.

Otro estudiante realizó las operaciones en la calculadora obteniendo:

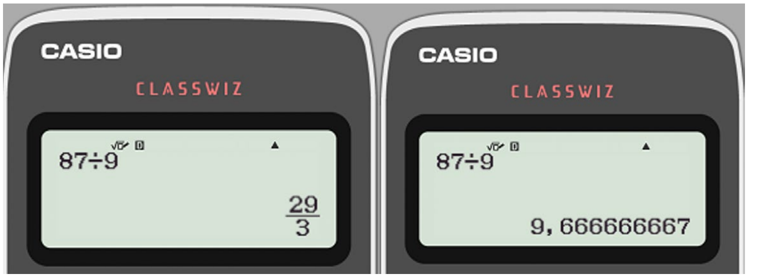
$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

Ante lo anterior la profesora pregunta *¿Cómo explican que se obtengan diferentes resultados? ¿Cuál es correcto y por qué?* A lo anterior gran parte del grupo responde que *debe ser correcto el resultado de la calculadora*, pero no logran dar un argumento matemático más allá de indicar que *las calculadoras no se equivocan.*

Frente a la tarea recordemos que frente al cálculo $5 \times 2 + 3 \times 8$ realizado a lápiz y papel se realizaron los cálculos a medida que se incorporan, es decir $5 \times 2 = 10$, luego se consideró $10 + 3 = 13$ y finalmente $13 \times 8 = 104$, evidentemente resultado incorrecto. En cambio, la calculadora frente a ese mismo cálculo contempla la jerarquía de las operaciones, es decir que realizó $5 \times 2 = 10$ y $3 \times 8 = 24$ resultados que luego sumó, arrojando un resultado diferente, en este caso 34.

Lo anterior pone de manifiesto que el estudiante no conoce la jerarquía de las operaciones, es decir que opera por orden de escritura sin tener en cuenta la separación en términos. La calculadora en cambio sí tiene en cuenta la separación de los términos. Además en este caso el trabajo enfrentó a los estudiantes a conocimientos matemáticos que aún no tienen disponibles, y que evidentemente requerirán de otros problemas y tiempos para su adquisición. Sin embargo, los estudiantes pudieron interactuar con los mismos aun cuando no dominen sus significados (Rodríguez y Juárez, 2019).

En la solución de la segunda tarea los estudiantes indicaron que *sí era posible* de resolver el procedimiento con la calculadora y que la profesora Gabriela había realizado una división de *87 entre 9* para saber el total de stickers que le quedaban, así que procedieron a realizar dicha operación.

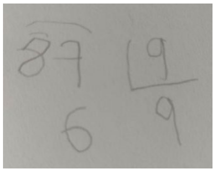


La calculadora arrojó como resultado de la división 9,666666667. Dadas las cifras decimales en ese número no es muy sencillo encontrar con cuántos stickers se quedó la profe Gabriela. Reconstruir el resto de la división implicará despreciar la parte decimal, "quedarse" con el 9, multiplicar luego 9×9 y calcular que si había 87 y usó 81 se quedó con 6 globos para ella haciendo 87 - 81.

Este problema puede ser planteado a los estudiantes con la finalidad de ampliar los significados de la división y la relación entre cociente, divisor, resto y dividendo, pero aun cuando dicho conocimiento matemático esté ya disponible, este problema permite investigar un *límite* de la calculadora la cual no permite obtener el resto de una división con números naturales.

En este caso un estudiante indicó que era más sencillo realizar la división *como siempre la hacían* en el cuaderno, así:

Figura 2. Solución de un estudiante.



Fuente: trabajo de un estudiante.

Finalmente, se destaca el conocimiento que debe tener el profesor a la hora de promover este tipo de tareas en el aula y cómo utilizarlo para promover discusiones que requieran razonamientos y argumentos matemáticos; por ejemplo, si los estudiantes de Educación Secundaria del **caso 1** hubiesen realizado el mismo procedimiento en una calculadora básica el resultado que esta arrojaría es 375. Esto podría promover discusiones alrededor de la idea de "incremento" y sobre la manera en que la calculadora está configurada para responder a las indicaciones que el usuario realiza. Así mismo para el caso del trabajo con los estudiantes de primaria se hizo necesario conocer en profundidad el uso de la calculadora lo que involucra conocer su teclado, sus funciones, pero sobre todo sus límites.

Experiencias con el uso de la calculadora en la formación de profesores

Otras experiencias en relación con el uso de la calculadora simple y la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X se han llevado a cabo en diferentes cursos de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. La estructura general de las implementaciones en estos cursos ha sido:

- La consolidación de un espacio de discusión alrededor del uso que los futuros profesores de matemáticas hacen de la calculadora y sobre su potencial integración en sus futuras prácticas como docentes.
- La exploración y familiarización con el manejo de la calculadora. Se proponen espacios para conocer las teclas y sus funcionalidades, en vista de que no todos los estudiantes tienen experiencias previas con el uso de este dispositivo. En ellos se busca que los estudiantes consideren elementos básicos para el manejo de esta tecnología.
- La exploración conceptual y de resolución de problemas con la calculadora.
- La reflexión final del uso de las calculadoras, sus posibilidades y limitaciones en el aula. En ocasiones, se busca reconocer algún cambio en sus visiones sobre el uso de la calculadora.

Estos cuatro momentos de las implementaciones se configuran con el propósito de comprender que la calculadora puede, más allá de reducir la carga operatoria, asumir otros roles en la formación de profesores de matemáticas como ser una condición de posibilidad para la creación de estrategias en la resolución de problemas y para el diseño de tareas que promuevan un uso diferenciado de las tecnologías. A continuación, se presentan percepciones de los futuros profesores frente al uso de la calculadora, la exploración conceptual y los aportes que reconocieron en esta experiencia.

Percepciones de los futuros profesores

En un curso introductorio al álgebra lineal en un programa de futuros profesores de matemáticas se presentó una discusión frente al uso que ellos hacen de la calculadora y de la posible incorporación en su ejercicio profesional. Para algunos estudiantes el uso de esta herramienta debe estar presente porque permite simplificar procesos, en palabras de un estudiante:

> la educación nunca se queda estancada y el propósito de cuando sale algo nuevo, más que todo en el ámbito tecnológico, es tratar de integrar lo nuevo con la educación. Yo personalmente considero que es pertinente y debería ser pertinente permitir el uso de la calculadora en el aula de clases. Eso no es un aparato que se hizo simplemente por capricho, eso simplifica muchos procesos [...]. (Carlos)

La idea de simplificar procesos estuvo presente en diferentes intervenciones de los futuros profesores; no obstante, existen diferencias frente al momento en el cual consideran prudente emplear dicha tecnología (en adelante se usan pseudónimos para aludir a los comentarios de los estudiantes):

—Profesor: [...] ¿la usarías [la calculadora] como estudiante para qué?
—Carlos: pues yo no sé decir específicamente para qué, eso lo determina la situación.
—Profesor: ¿Alguien no la usaría?
—Susana: [...] yo digo que todo es un proceso y si el niño sabe de dónde viene la multiplicación, para qué se utiliza la multiplicación y cómo llega a un resultado, después de que tenga eso claro yo le permitiría el uso de la calculadora.

Frente a estas evidencias vale la pena resaltar que para Carlos las calculadoras simplifican procesos, pero que su uso depende de la situación que se esté estudiando. La intervención del profesor permitió dar cuenta que dicho estudiante aludía a los usos como las operaciones necesarias para resolver las tareas, es decir, a emplear esta tecnología para reducir la carga operatoria y simplificar los algoritmos. Esta visión y la de Susana coinciden con las concepciones que tienen otros profesores frente al uso de la calculadora y que diferentes investigadores han estudiado (P. Ej. Conti et al., 2017a; Selva y Borba, 2014). Carlos y Susana manifiestan sus percepciones del uso de la calculadora, pero también sus preocupaciones de que al usarla se deja de promover el aprendizaje de las operaciones. En ese sentido, reconocer otras maneras de incluir esta herramienta en las clases puede ser potente para que los futuros profesores decidan incorporarlas.

Más tarde, el profesor preguntó directamente a otra estudiante (María) sobre su percepción, ella indicó que no la usaría en todo momento, sino que debe haber un balance, por ejemplo, “tengo el vicio cuando estoy estudiando yo sola no utilizar nada de eso [calculadoras] como para ir aumentando un poquito más el cálculo y no dejar los procesos, a mí me parece que es de parte y parte" (María). Llama la atención que en este primer momento el uso de la calculadora para los futuros profesores se limita a la obtención de resultados numéricos y a la simplificación de procesos algorítmicos, es decir, al ámbito de las operaciones básicas en los números reales. Esto se convirtió en una oportunidad para que el profesor mostrara otros usos de la calculadora en este curso, por ejemplo, para la exploración conceptual.

Uso de la calculadora para la exploración conceptual

En la experiencia, primero se destinó un espacio para que los estudiantes se familiarizaran con el manejo de la calculadora, reconocieran sus teclas y la manera de operar con ellas. Luego, se propuso iniciar una exploración con las matrices, cómo definirlas, generar hipótesis sobre el tipo de operaciones que se pueden realizar, ponerlas a prueba e identificar patrones en esos resultados. Se esperaba que los futuros profesores lograran percibir la manera en que se realizan algunas operaciones a través del uso de la calculadora; esta fue la primera aproximación que los estudiantes tuvieron en el curso con las operaciones entre matrices. Como uno de los propósitos del curso tiene que ver con el reconocimiento de las estructuras algebraicas y reflexionar sobre las operaciones, por ello se discutió con los estudiantes sobre los resultados obtenidos. El profesor realizó preguntas como: ¿Cuál es el resultado de operar dos matrices? ¿Qué relación existe entre el resultado obtenido y las matrices operadas? ¿Qué transformaciones se hicieron para llegar a ese resultado?

Frente a la familiarización con la calculadora, los estudiantes hicieron preguntas relacionadas con cómo se define o re-define una matriz, cómo se cambia el orden de la matriz y si los signos "+" y "-" que usan para operar números reales, también se pueden usar para operar las matrices. Así, los estudiantes definieron matrices en la calculadora y realizaron la adición entre dos de ellas. Se encontraron dos respuestas diferentes: por un lado, la calculadora mostró en la pantalla el mensaje "Dimensión error"; por otro lado, un grupo de estudiantes observó en la pantalla una nueva matriz. Esta situación produjo preguntas en relación con las razones por las cuales se había llegado a cada respuesta; en ese momento, un estudiante mencionó que la primera se debe a que las marices no tienen el mismo orden. Luego, se plantearon preguntas con otras matrices diferentes, allí los estudiantes generalizaron esa hipótesis y plantearon que, en la adición de matrices, estas deben tener el mismo orden, pero también identificaron que cada entrada de la matriz resultante es la suma de las entradas correspondientes de las matrices operadas. Después de este proceso, estudiantes y profesor discutieron la definición de adición y sustracción entre matrices de orden *m* x *n*, tal y como se evidencia en el siguiente diálogo:

—Profesor: Ahora, la suma de dos matrices, en términos generales, me daría como resultado qué
—Sofía: Una matriz
—Profesor: Llamémosla, ¿cómo?
—Carlos: C
—Profesor: De qué orden
—Carlos: $m \times n$
—Profesor: ¿y con entradas cómo?
—Sebastián: c_{ij}
—Profesor: ¿ c_{ij} es igual a?
—Sebastian: $(a_{ij} + b_{ij})$
—Profesor: ¿y para la resta?
—Pedro: Primero que tiene que ser $m \times n$ todas dos [se refiere a las matrices que se opera], deben tener lo mismo [alude al orden de la matriz], y término por término se debe hacer la diferencia.

Otras exploraciones que se realizaron en esta sesión estuvieron relacionadas con la multiplicación de un escalar por una matriz y del concepto de combinación lineal. De manera similar los estudiantes identificaron aspectos relacionados con la definición de dicha operación o concepto, sus condiciones de posibilidad y los momentos en que podrían trabajar con la calculadora. Por ejemplo, frente al producto de un real por una matriz se reconoció el tipo de operación con la cual se estaba trabajando:

—Profesor: Ahora vamos a hacer esta operación, tengo un número real y lo voy a multiplicar por una matriz y vamos a ver cuáles son los efectos. Háganlo con la calculadora y me cuentan qué pasa [...] ¿Qué resultado nos arroja?
—Carlos: Una matriz del mismo orden [...] una ley de composición externa.

De manera similar a como se hizo con la adición y sustracción, se definió la operación multiplicación de un número real por una matriz.

Frente al concepto de combinación lineal se propusieron dos tareas y se pidió a los estudiantes desarrollarlas con o sin el uso de la calculadora, pero, en cualquier caso, se debía describir cómo se hizo y justificar el porqué de esa manera. La primera tarea consistía en calcular una matriz D definida por el profesor como una combinación lineal dada de otras tres matrices, mientras que la segunda tarea trataba de determinar si una matriz E dada, se podía expresar o no como combinación lineal de las mismas matrices anteriores. En estas tareas llamó la atención que la mayoría usó la calculadora para la primera porque era mucho más rápido; solo un estudiante lo hizo a papel y lápiz para verificar si obtenía el mismo resultado que con la calculadora. En la segunda tarea no se usó la calculadora porque no sabían cómo hacerlo; no obstante, un estudiante mencionó que si podían resolver ecuaciones lineales en la calculadora, entonces la usarían.

En esta experiencia también se generaron discusiones entre los estudiantes que fueron mediadas por el profesor, quien problematizó algunos de los resultados. Se observaron en este trabajo posibilidades de explorar conceptos y operaciones con las calculadoras, de generar hipótesis sobre los resultados y de identificar estructuras subyacentes en los procedimientos realizados. En ese sentido, el uso de la calculadora, el tipo de tarea propuesta y la orientación del profesor son elementos que deben ser considerados en el ambiente de clase para promover el pensamiento matemático.

Aportes y discusiones sobre el uso de la calculadora

La clase continuó con algunas reflexiones frente a los usos de la calculadora que los futuros profesores identificaron en esta sesión. Al respecto, se destaca la reducción de la carga operatoria, la verificación de resultados, el planteamiento de hipótesis, la identificación de relaciones y patrones, la exploración y la apropiación conceptual. Asimismo, se reflexionó sobre el hecho de que no todo problema se resuelve con el uso de la calculadora, es necesario identificar cuándo es posible y recomendable su uso o cuándo es preferible hacer uso de otras tecnologías como el lápiz y el papel.

Una estudiante mencionó que el uso de la calculadora y la manera en que se orientó la sesión (con el uso del tablero para escribir las matrices y promover discusiones) le ayudó a reconocer las filas y columnas en una representación algebraica, en sus palabras: "a mí personalmente me ayudó como para analizar más lo de columna y fila a la hora de ponerlo, pues es que yo me confundo mucho con eso" (Carolina).

Finalmente, se propuso una tarea abierta que buscó usar las limitaciones de la calculadora como una posibilidad de promover el trabajo matemático y el diseño de estrategias por parte de los estudiantes. Esta tarea se propone como una alternativa para establecer relaciones entre la cantidad de matrices que se pueden definir en la calculadora (máximo cuatro matrices) y el orden de cada una de ellas (la calculadora permite trabajar con matrices de máximo 4 x 4). La tarea está relacionada con construir una estrategia que permita realizar operaciones entre matrices (adición, multiplicación de un escalar por una matriz y combinación lineal) que tengan un orden de $m \times n$ donde $m > 4$ y $n > 4$, haciendo uso de la calculadora. Esta serie de experiencias con la calculadora, junto con otras que reporta la literatura y las que desarrolla el grupo MATHEMA-FIEM han logrado generar reflexiones sobre las intenciones en que diferentes actores usan la calculadora, sus potencialidades y algunas sugerencias para los profesores.

Consideraciones finales

Este documento se propuso presentar y analizar dos experiencias derivadas de los proyectos de investigación y de formación que desarrollan integrantes del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM (cfr. Castrillón-Yepes et al., 2020; Villa-Ochoa et al., 2020 y García-Cuéllar et al., 2019). En particular, ha buscado ofrecer variedad de comprensiones y usos de la calculadora. En la Tabla 2 se sintetizan algunos de los aspectos que se han recogido en los diferentes estudios y experiencias de formación, junto con algunas sugerencias para el ambiente de clase.

Tabla 2. Uso de la calculadora en Educación Matemática.

Intenciones al usar la calculadora	Potencialidades	Sugerencias para el profesor
Reducir la carga operatoria	- Permite reducir los algoritmos y centrar la atención en la relación entre los datos y lo que estos representan en un contexto o situación determinada.	- Se debe tratar de no limitar la acción de los estudiantes a obtener un valor, se pueden promover preguntas sobre lo que representan los resultados obtenidos. - No basta con hacer cálculos, es necesario que los estudiantes y el profesor conozcan la herramienta y los factores que pueden conducirlos a cometer algún error.
Cambiar concepciones sobre su uso	- Permite que los profesores, futuros profesores, estudiantes y padres de familia reconozcan la importancia del uso de la calculadora.	- Es necesario trascender los usos domésticos de la calculadora en educación (limitados a ser un sustituto del lápiz y papel). - Plantee situaciones problemáticas. Algunas se pueden encontrar en el trabajo Selva y Borba (2014). - Realice preguntas sobre lo que hacen los participantes y promueva la interacción entre ellos.
Resolver problemas	- Reduce la carga operatoria. - Posibilita dotar de significado los valores con los que se trabaja. - Desarrolla habilidades matemáticas.	- Es posible utilizar diferentes registros semióticos o representaciones sobre los datos que se obtienen con la calculadora. - Incorpore otras tecnologías como softwares y simulaciones.
Exploración conceptual	- Construir conjeturas, plantear hipótesis, verificar y refutar. - Favorece la construcción de argumentos. - Posibilita la interacción entre el estudiante y el profesor.	- Requiere diseñar preguntas previas y considerar otras en relación con lo que pueda suceder en el aula.

Fuente: los autores.

Es importante mencionar que los elementos que se presentaron en la tabla no deben verse como propuestas aisladas y absolutas, sino, por el contrario, como un insumo para pensar la intención con la cual se usa la calculadora en diferentes espacios formativos. Además, que las acciones que se desarrollen en estos escenarios están condicionadas por elementos como: participantes (estudiantes de educación básica o media, futuros profesores, padres de familia, etc.), tipos de tareas y medios disponibles (calculadora simple, calculadora gráfica, etc.) y contextos específicos.

Bibliografía

Carmona-Mesa, J., Salazar, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad*, *18*(1), 13-24. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.18.1.02

Castrillón-Yepes, A., Carmona-Mesa, J. y Villa-Ochoa, J. (2020). Technology integration in a course for prospective mathematichs teachers. En A. Rocha, C. Ferrás, C. Montenegro y V. Medina (eds.). *Advances in intelligent systems and computing* (pp. 501-510). Springer.

Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017a). Uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental: concepções dos futuros professores. *Cadernos de Pesquisa*, *24*(esp.), 53-67.

Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017b). ¿Qué piensan los futuros profesores sobre el uso de la calculadora en la educación primaria?. *RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa*, *2*(1), 4-14. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/257

Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2002). *La calculadora como recurso didáctico.* Universidad Caece.

García-Cuéllar, D., Parra-Zapata, M., Martínez-Miraval, M. y Sostenes, H. (2019). Una propuesta didactica para la ensenanza y el aprendizaje de la funcion lineal afin con el uso de la calculadora Classwiz. *Acta latinoamericana de matemática educativa-ALME, 32*(1), 658-667.

Medina, J. y Ortiz, J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. *Uni-pluriversidad, 13*(3), 14-28.

Selva, A. y Borba, R. (2014). *El uso de la calculadora en los primeros grados de educación básica.* Sello Editorial Universidad de Medellín.

Villa-Ochoa, J., Carmona-Mesa, J. y Castrillón-Yepes, A. (2020). Conocimientos promovidos a través de tareas que involucran el uso de la calculadora simple. Un estudio con futuros profesores de matemáticas. En A. Acevedo, J. Villa-Ochoa y L. Solano (Eds.). *Formación de profesores de matemáticas: reflexiones, conociminetos y recursos* (pp. 63-79). Sello Editorial Universidad de Medellín.

Yerbes, J. y Pacheco, S. (2017). *Ejemplos de situaciones matemáticas con el uso de la calculadora CLASSWIZ fx-991 EX.* Reliable & Durable.

Medidas de dispersión “Edad de nuestros padres”

Edwin Enrique Correa Carmona
ecorrea556@gmail.com
Institución Educativa Mater Dei -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Resumen:
La estadística descriptiva es de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas, en la que, desde el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, se despliegan competencias generales y específicas, como el desarrollo de inferencias a partir de información estadística. Con la actividad sobre las medidas de dispersión se busca que los estudiantes reconozcan el sentido del análisis de datos estadísticos diferentes a la mediana y moda, aplicando cálculos estadísticos para comparar e inferir en situaciones cotidianas. Para las medidas de dispersión se requieren cálculos largos que, con el uso de la calculadora, son fáciles y el estudiante, a partir de la comprensión e interpretación de los valores, puede sacar conclusiones porque compara distintos grupos. La actividad presentada se realizó con estudiantes de grado décimo.

Palabras clave:
Medidas de dispersión, inferencia, estadística.

Introducción

Las medidas de dispersión son de gran utilidad en la estadística, por lo que es importante que los estudiantes puedan leer esta información con el propósito de que analicen y saquen conclusiones con estas medidas de dispersión. Para lograr este aprendizaje se aplicó esta actividad en estudiantes de grado décimo, entre 14 y 16 años, de la Institución Educativa Mater Dei.

La pregunta inicial y problematizadora fue:

"Si ustedes se encuentran en el mismo rango de edad, entre 14 y 16 años, ¿estarán sus padres también en un mismo rango de edades?". A partir de las respuestas de los estudiantes, se propuso una reflexión y discusión donde el docente actuó como mediador, sin brindar respuestas directas pero orientando el proceso para alcanzar el conocimiento matemático en cuestión y pensar la situación problemática. Después de este momento inicial se realizará el análisis de las medidas de dispersión del grupo en el aula con el objetivo de comparar las edades de padres y madres.

En las clases de estadística siempre se realiza el cálculo de las medidas de tendencia central, luego esta actividad se complementa con la determinación de las medidas de dispersión. En este caso, el propósito es comparar e inferir, desde la información estadística, las características de una muestra o población que se estudia. Además, permite a los estudiantes comprender el carácter relativo que tienen las medidas de dispersión frente a las de tendencia central para caracterizar estudios estadísticos.

Esta actividad involucra al estudiante y su familia para que haya comprensión de las medidas de dispersión y su utilidad y, sobre todo, motivar a los estudiantes a realizar la tarea y brindar oportunidad de organizar información estadística fuera del aula.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Comprende y explica el carácter relativo de las medidas de tendencias central y de dispersión, junto con algunas de sus propiedades, y la necesidad de complementar una medida con otra para obtener mejores lecturas de los datos.	• Encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión, usando, cuando sea posible, herramientas tecnológicas. • Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos. • Usa algunas de las propiedades de las medidas de tendencia central y de dispersión para caracterizar un conjunto de datos. • Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.

Eje central: Medidas de dispersión

Objetivo: Reconocer las medidas de dispersión aplicadas a una situación cotidiana.

Conocimientos previos: Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	Tres horas de clase
Recursos:	Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X Cuaderno de clase

Medidas de dispersión

A continuación, se presentan los conceptos en torno a las medidas de dispersión, los cuales fueron el centro de desarrollo de esta experiencia. El objetivo del estudio de los parámetros estadísticos es obtener información resumida del conjunto de datos en los que se está interesado. Para analizar los resultados se necesitan parámetros que midan la variabilidad, llamadas medidas de dispersión. Al hacer uso de las medidas de dispersión se deben tener presentes conceptos previos sobre las medidas de tendencia central, además la importancia de la lectura de gráficos y tablas que permitan inferir y obtener conclusiones. Las medidas de dispersión pueden definirse como los valores numéricos cuyo objeto es analizar el grado de separación de los valores de una serie estadística con respecto a las medidas de tendencia central consideradas (Mendenhall et al., 2010).

En esta experiencia se usaron los parámetros rango o recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación. A continuación se presenta una definición de estos, la cual se extrajo de Fernández (s.f.).

- **Rango o Recorrido:** Es la diferencia entre el mayor valor de los datos y el menor.

$$Re = Max\ \{xi\} - Min\ \{xi\}$$

- **Desviación Media:** Es la media de la distancia de los valores de los datos (en valor absoluto) a la media.

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}{N} \qquad Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{N} \qquad donde \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

Datos sin agrupar   datos agrupados

- **Varianza:** La varianza se define como el cociente entre la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable y el número de datos del estudio. Matemáticamente, se expresa como:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

- **Desviación Típica:** La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza: La desviación típica se representa por σ.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \qquad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2} \qquad donde \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

- **Observación sobre la desviación típica:** Cuanto más pequeña sea la desviación típica mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

- **Coeficiente de Variación (De Pearson):** el coeficiente de variación que se expresa tanto de forma decimal como en tanto por ciento, expresará la desviación típica como porcentaje con respecto a la media.

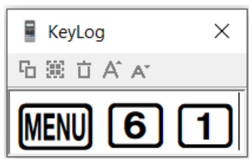
$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

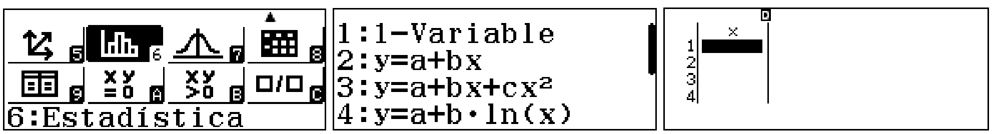
El coeficiente de variación permite comparar las dispersiones de dos distribuciones distintas, siempre que sus medias sean positivas. Se calcula para cada una de las distribuciones y los valores que se obtienen se comparan entre sí. La mayor dispersión corresponderá al valor del coeficiente de variación mayor.

Uso de la calculadora en estadística

Para el cálculo de las medidas de dispersión en la calculadora fx-991LA X, en el MENÚ se selecciona el modo 6 (Estadística) y se elige una sola variable, para luego obtener todas las variables estadísticas.

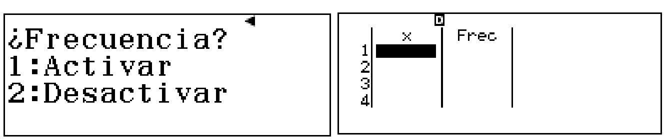
La secuencia de teclas es:





Para esta actividad se necesitan tablas estadísticas en las que cada dato tiene una frecuencia asociada. Para activar la frecuencia en la calculadora, de la siguiente manera:

Usted verá lo siguiente en la calculadora::

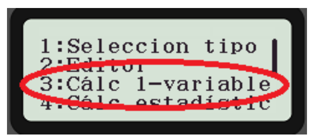


En esta tabla se ingresan los datos recopilados por los 27 estudiantes. Vea, como ejemplo, la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

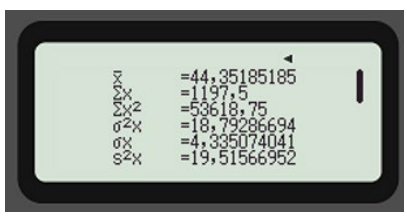
Tabla 1. Tabla de distribución de frecuencias.

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia
[35;40>	37,5	4
[40;45>	42,5	12
[45;50>	47,5	8
[50;55>	52,5	3

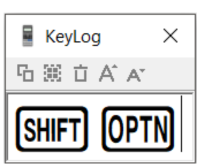
Fuente: el autor.



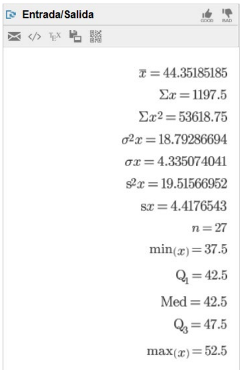
Una vez ingresado el conjunto de datos, se obtienen los estadísticos correspondientes en el menú que se obtiene después de presionar OPTN 3

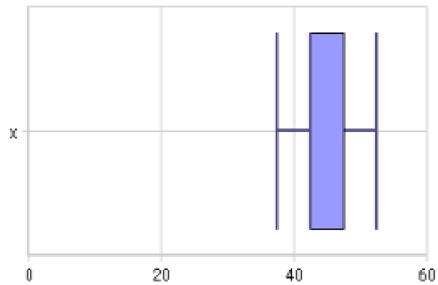


Para crear un código QR en la calculadora, presione las teclas:

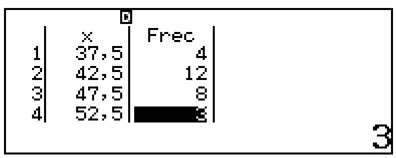


Con un Smartphone y la aplicación gratuita CASIO EDU+, deberá escanear el código QR. A continuación se presenta lo que obtiene.

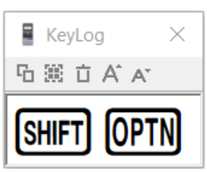




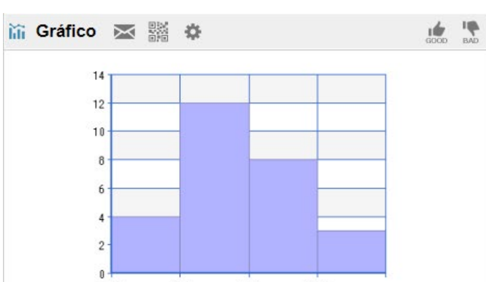
Para ver el histograma que representa estos datos, con un Smartphone y la aplicación gratuita CASIO EDU+, deberá escanear el código QR cuando la calculadora presenta la tabla en la pantalla. Vea la siguiente imagen.



Enseguida deberá presionar



Y escanear el código QR, para obtener:



	x	Freq
1	37.5	4
2	42.5	12
3	47.5	8
4	52.5	3

Actividad 1

Los estudiantes se organizarán en equipos de tres personas.

a. Se realiza la encuesta a los compañeros de clase y se pregunta a cada uno la edad de sus madres y padres.
b. Con los datos obtenidos se realiza una tabla de frecuencia para la edad de las madres y otra los padres. Es preciso tener presente cómo organizar la información, es decir, como datos sin agrupar o agrupados, pero, en todos los casos, con un rango de clase adecuado para los datos obtenidos.

Tabla 2. Tabla de frecuencias para diligenciar.

Edad	Marca de clase	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i	Frecuencia relativa acumulada H_i	Porcentaje (%)

Fuente: el autor.

c. Realizar un gráfico estadístico de la anterior información.
d. Hallar las medidas de tendencia central más importantes: media, mediana y moda, con la calculadora.
e. Escribir al menos 3 conclusiones sobre las edades de padres y madres de los estudiantes del grado décimo.

Actividad 2

Con los datos obtenidos en la anterior actividad, calcular y responder:

a. Calcular las siguientes medidas de dispersión:
   - Rango
   - Varianza
   - Desviación típica
   - Coeficiente de variación

   Comentario. En la calculadora se pueden obtener los valores de la varianza y desviación típica, tanto muestrales como poblacionales. Por ello, es tarea del docente guiar el uso e interpretación de los valores de acuerdo con la situación. El coeficiente de variación tendrá que calcularlo dividiendo la desviación típica entre la media.

b. Comparar las medidas anteriores y realizar 4 conclusiones.

Comentario. La gestión y socialización de lo que escribieron los estudiantes es más importante que obtener la "conclusión correcta". En clase se debe brindar el tiempo adecuado para la lectura grupal y discusión de los resultados. Por estas razones, se recomienda escuchar las intervenciones y permitir que otros estudiantes hagan preguntas y comentarios para promover el pensamiento aleatorio y la de comunicación

Experiencia de aula

La actividad se desarrolló con estudiantes del grado décimo A y B, en las clases de estadística en la Institución Educativa Mater Dei. Inicialmente se realizó una explicación magistral de las medidas de dispersión puesto que en clases anteriores se había desplegado el tema de las tablas de frecuencia, los gráficos estadísticos y las medidas de tendencia central. Después, se les planteó la pregunta problematizadora: "Si ustedes se encuentran en el mismo rango de edad, entre 14 y 16 años, ¿estarán sus padres también en un mismo rango de edades?". Algunos estudiantes afirmaban que el rango de edades debe tener similar comportamiento, pero otros creían que no había relación alguna, se produjo el interés por despejar esta duda y quisieron hacer la encuesta entre ellos para llegar a una conclusión.

En la segunda clase se organizaron en equipos y cada uno salía al tablero y escribía la edad de su madre y padre, si la edad ya estaba escrita se marcaba con un palito para hacer la contabilidad total al final. Luego de que cada uno marcó la edad de sus padres, se realizó la tabulación.

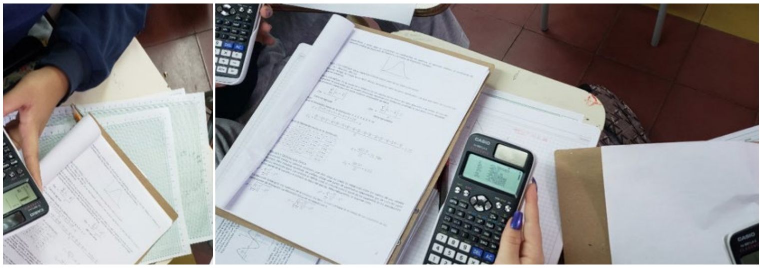
Figura 1. Trabajo en clase.

Fuente: Archivo del autor.

Se agruparon los datos en intervalos adecuados y se obtuvieron las marcas de clase con sus respectivas frecuencias. Estos datos fueron ingresados a la calculadora en la función Estadística, lo que arrojó las medidas de tendencia central y de dispersión.

Después, con el código QR, se obtuvieron las gráficas.

Figura 2. Trabajo con la calculadora en clase.



Fuente: Archivo del autor.

En la tercera clase se analizaron los datos y se sacaron algunas conclusiones:

- Los padres son mayores que las madres.
- Las edades son muy similares, poco dispersas sobre todo en el caso de las madres.
- Los padres presentan mayor dispersión.

Reflexión pedagógica

Con esta actividad se evidenció en los estudiantes una actitud positiva, interés por aprender y responsabilidad para realizarla.

Por ser una encuesta sobre su familia, estuvieron interesados y, al usar la calculadora, que les facilita el cálculo de los parámetros, hicieron conclusiones que permitieron un espacio de discusión para promover la comprensión.

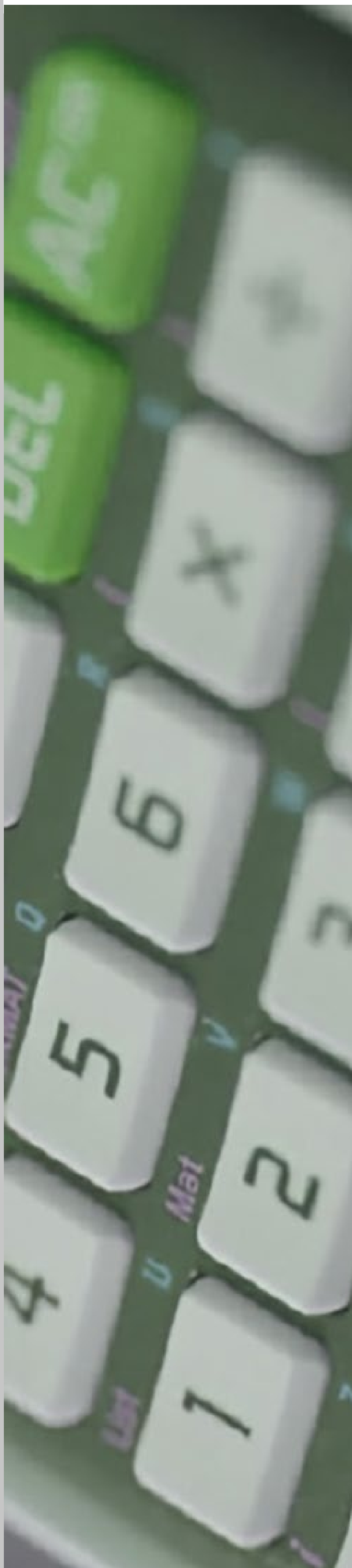
Bibliografía

Fernández, J. (s.f.). *Rango y desviación media.* Proyecto Descartes. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/IntroduccionEstadisticaProbabilidad/3ESO/6_1RangoyDesviacionMedia.html#:~:text=Se%20define%20el%20rango%20o,los%20datos%20de%20la%20distribuci%C3%B3n

Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística.* CENGAGE Learning.

Reconocimientos
A los estudiantes partícipes de este trabajo.

Guía **estudiante**



Medidas de dispersión "Edad de nuestros padres"

Edwin Enrique Correa Carmona
ecorrea556@gmail.com
Institución Educativa Mater Dei -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Comprende y explica el carácter relativo de las medidas de tendencias central y de dispersión, junto con algunas de sus propiedades, y la necesidad de complementar una medida con otra para obtener mejores lecturas de los datos.	• Encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión, usando, cuando sea posible, herramientas tecnológicas. • Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos. • Usa algunas de las propiedades de las medidas de tendencia central y de dispersión para caracterizar un conjunto de datos. • Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.

Eje central: Medidas de dispersión

Objetivo: Reconocer las medidas de dispersión aplicadas a una situación cotidiana.

Conocimientos previos: Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Medidas de dispersión

A continuación, se presentan los conceptos en torno a las medidas de dispersión, como centro de desarrollo de esta experiencia. El objetivo del estudio de los parámetros estadísticos es obtener información resumida del conjunto de datos en los que se está interesado. Para analizar los resultados se necesitan parámetros que midan la variabilidad, llamadas medidas de dispersión. Al hacer uso de las medidas de dispersión se deben tener presentes conceptos previos sobre las medidas de tendencia central, además la importancia de la lectura de gráficos y tablas que permitan inferir y obtener conclusiones (Mendenhall et al., 2010)[1].

1 Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística.* CENGAGE Learning.

A continuación, se presenta una definición de estos parámetros.

- Rango o Recorrido: Es la diferencia entre el mayor valor de los datos y el menor.

$$Re = Max\ \{xi\} - Min\ \{xi\}$$

- Desviación Media: Es la media de la distancia de los valores de los datos (en valor absoluto) a la media.

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}{N} \qquad Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{N} \qquad donde \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

Datos sin agrupar   datos agrupados

- Varianza: La varianza se define como el cociente entre la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable y el número de datos del estudio. Matemáticamente, se expresa como:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

- Desviación Típica: La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza: La desviación típica se representa por σ.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \qquad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2} \qquad donde \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

- Observación sobre la desviación típica: Cuanto más pequeña sea la desviación típica mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

- Coeficiente de Variación (De Pearson): El coeficiente de variación que se expresa tanto de forma decimal como en tanto por ciento, expresará la desviación típica como porcentaje con respecto a la media.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

El coeficiente de variación permite comparar las dispersiones de dos distribuciones distintas, siempre que sus medias sean positivas. Se calcula para cada una de las distribuciones y los valores que se obtienen se comparan entre sí. La mayor dispersión corresponderá al valor del coeficiente de variación mayor.

Actividad 1

Los estudiantes se organizarán en equipos de tres personas.

a. Se realiza la encuesta a los compañeros de clase y se pregunta a cada uno la edad de sus madres y padres.
b. Con los datos obtenidos se realiza una tabla de frecuencia para la edad de las madres y otra los padres. Para ello, es preciso tener presente cómo organizar la información, ya sea como datos sin agrupar o agrupados, con un rango de clase adecuado para los datos obtenidos.

Edad	Marca de clase	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i	Frecuencia relativa acumulada H_i	Porcentaje (%)

c. Realizar un gráfico estadístico para presentar la información anterior.
d. Determinar las medidas de tendencia central más importantes: media, mediana y moda.
e. Escribir al menos 3 conclusiones sobre las edades de padres y madres de los estudiantes del grado décimo.

Actividad 2

Con los datos obtenidos en la anterior actividad, calcular y responder:

a. Escriba los valores de las siguientes medidas de dispersión:

- Rango
- Desviación media
- Varianza
- Desviación típica
- Coeficiente de variación

b. Comparar las medidas anteriores y realizar 4 conclusiones.

Una carrera de caballos. Exploración del concepto de probabilidad con estudiantes de séptimo grado

Mónica Marcela Parra-Zapata
monikampz@gmail.com
Institución Educativa Mariscal Robledo - Secretaría de Educación de Medellín y Universidad de Antioquia, Colombia, CO.

Resumen:

Presento una experiencia de enseñanza en la que se hizo uso de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X para introducir el concepto de probabilidad. El trabajo se llevó a cabo con 40 estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Villa Flora de la ciudad de Medellín. La experiencia surgió después de la formación Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio. Entre los resultados obtenidos, destaco el reconocimiento de la calculadora como una herramienta que promueve la comprensión del concepto de la probabilidad y un uso con sentido de esta herramienta para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras clave:

Probabilidad, calculadora, comprensión.

Introducción

En el presente documento presento los resultados de una experiencia con estudiantes de séptimo grado para trabajar el concepto de probabilidad. El objetivo de la experiencia fue asignar la probabilidad a un evento con el apoyo en la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad. El tema central es el de probabilidad frecuencial y laplaciana.

En esta experiencia se generó un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes discutieron las ideas situadas en el contexto del juego y del uso de la tecnología en el contexto escolar. En este ambiente los y las estudiantes tomaron posturas críticas frente al contexto estudiado y frente a los diferentes roles de las matemáticas.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Séptimo	Pensamiento aleatorio. Pensamiento variacional	• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
DBA 3. De grado Décimo Asigna probabilidades a eventos compuestos y los interpreta a partir de propiedades básicas de la probabilidad.	• Diferencia experimentos aleatorios realizados con remplazo, de experimentos aleatorios realizados sin remplazo. • Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, combinaciones, permutaciones, regla de la multiplicación, etc.). • Justifica la elección de un método particular de acuerdo al tipo de situación. • Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.

Eje central: concepto de probabilidad

Objetivo:	Asignar la probabilidad a un evento, con el apoyo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad.

Conocimientos previos:	De la herramienta: • Prender la calculadora • Formatearla • Cambiar el idioma • Hacer análisis estadístico • Simular lanzamiento de dados De matemáticas: • Espacio muestral • Sucesos • Casos favorables

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	4 semanas. 2 horas semanales
Recursos:	• Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X • Computador • Video beam • Marcador • Tabla carrera de caballos • Fichas • Lápiz, lapiceros

Esta experiencia tuvo como propósito asignar la probabilidad a un evento, con apoyo en la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X. La probabilidad tiene que ver con las posibilidades de que ocurra un evento o suceda al azar. Para entender este concepto propuse la siguiente experiencia que consta de cuatro momentos:

- **Momento 1. Indagación y exploración:** manejo de la calculadora y repaso de experimentos aleatorios. En este momento se recordaron algunos componentes centrales del uso de la calculadora y se discutieron en torno a los tipos de sucesos estadísticos.

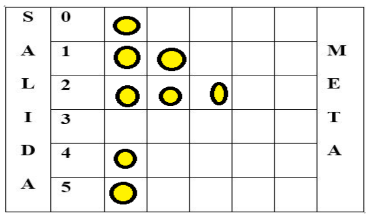
- **Momento 2[1]. Conceptualización I:** carrera de caballos. Los estudiantes se dispusieron en grupos y cada equipo recibió una hoja en la que registran su carrera (se puede ver en la guía del estudiante). Para jugar, cada uno le va a apostar a un número y va a poner allí su ficha. Empiezan a lanzar los dados (con la calculadora) y restan los resultados, siempre el menor del mayor. El número resultado de la resta indica la posición y ficha

1 Esta situación es una adaptación de la propuesta de Hans, J., Muñoz, J. y Fernández-Aliseda, A. (2006). La carrera de caballos. Grupo Alquerque de Sevilla. Suma, 51, 61-63.

que se va a mover. La ficha se mueve solo una casilla. En la casilla debe marcarse con un punto cada movimiento realizado.

Luego de posibilitar el juego por varios minutos, se revisan los puntos marcados en la ficha de juego y se escribe numéricamente el número de casillas que se desplazó cada jugador.

Figura 1. Ejemplo de avance en la carrera de caballos.



Fuente: la autora.

Posteriormente, se escriben los datos en el cuaderno y se presentan en la calculadora en su modo estadístico. Una vez vinculados los datos, se aplica el análisis estadístico con OPTN y se comenta sobre el significado del análisis arrojado por la calculadora. Luego, se obtiene el código QR y, con la App CASIO EDU+ en el celular, se envía la información a la Clase. En la Clase se determina el consolidado de las frecuencias de los lanzamientos realizados por los estudiantes y se analiza qué se encuentra allí.

En esta tarea se analiza cuál es el número con mayor frecuencia y, a partir de ello, se determina la probabilidad de ocurrencia del evento. En este caso, la probabilidad frecuencial o empírica es la que se fundamenta en los datos obtenidos por encuestas, preguntas o por una serie larga de realizaciones de un experimento. Para indicar la probabilidad frecuencial, se repite el experimento aleatorio un número determinado de veces, se registran los datos, se grafican y se observa la frecuencia con más repeticiones.

- **Momento 3: Conceptualización II:** carrera de caballos. Se calcula la probabilidad y se aplica directamente la fórmula de Laplace. Para ello, se determinan los casos favorables para los números del 0 al 5 (que son los posibles resultados de la resta) y los casos posibles para el lanzamiento de dos dados en los que restamos el resultado.

  En este momento se observa que coincide lo que se hace por medio de la tabla de frecuencias con la calculadora y si se aplica directamente la fórmula.

- **Momento 4: Aplicación:** Un juego de dados, otros contextos de aplicación. En este momento se realiza un sorteo para aplicar lo aprendido, se simula el lanzamiento de dados en la calculadora. Los estudiantes deben elegir un número del 0 al 10. Para elegir los ganadores, se lanzan los dados en la calculadora y se suman los dos números que salgan, el resultado de la suma determinará el ganador.

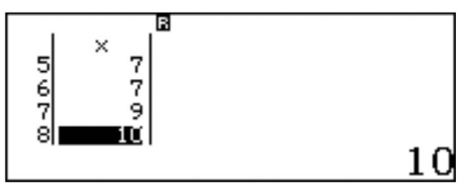
  La situación se desarrolla completamente en la guía del estudiante, en esta misma publicación.

Experiencia de aula

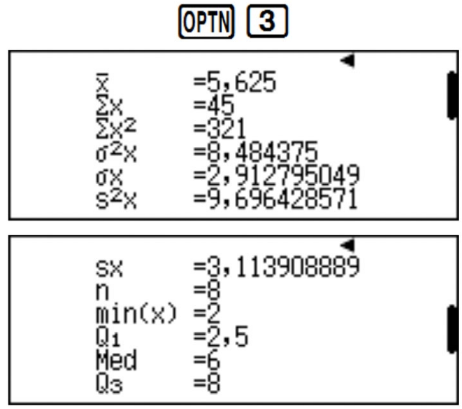
La experiencia se desarrolló durante un periodo académico (13 semanas), con 40 estudiantes de Séptimo Grado de Básica Secundaria (12 a 14 años) de la Institución Educativa Villa Flora (Medellín, Colombia). La experiencia permitió el estudio y la comprensión del concepto de la probabilidad.

En el momento 1, los estudiantes se familiarizaron con el manejo de la calculadora y el repaso de experimentos aleatorios. Allí el énfasis lo realizamos (estudiantes y profesora) en el reconocimiento de las funcionalidades centrales del modo estadístico de la calculadora y discutimos en torno a los tipos de sucesos estadísticos. Para esto se pidió al grupo obtener con calculadora los estadísticos para un grupo de datos. En la Tabla 1 se observa el trabajo realizado por algunos estudiantes.

Tabla 1. Procedimiento para familiarización con la calculadora.

Tarea propuesta	Procedimiento efectuado en la calculadora
Determinar los estadísticos para el siguiente grupo de datos: Las edades de 8 niños que van a una fiesta son: 2, 2, 3, 5, 7, 7, 9, 10.	MENU 6 1 2 = 2 = 3 = 5 = 7 = 7 = 9 = 1 0 = 

Continúa

Tarea propuesta	Procedimiento efectuado en la calculadora
	

Fuente: la autora.

De acuerdo a lo realizado, los estudiantes valoraron la inclusión de la calculadora a las clases y pudieron reconocer que esta les permitía ir más allá de la sola respuesta para analizar otros asuntos, así algunos estudiantes manifestaron asuntos como *"profe, ahora que la calculadora nos dice el resultado de los datos, nos toca a nosotros pensar eso qué quiere decir"* [2] *"profe que bueno que ahora podemos tener la calculadora en clase y usarla para apoyarnos en nuestros trabajos"*. Allí es importante que como profesores reconozcamos que en la misma familiarización los estudiantes pueden discutir otros asuntos matemáticos que trascienden el conocimiento de teclas y que la calculadora es un apoyo para los procesos matemáticos que se desarrollan al interior del aula. En la imagen 2 se presentan algunos estudiantes en diálogo con la profesora reconociendo las funcionalidades de la calculadora.

En el momento 2 se dio inicio a la conceptualización del concepto de probabilidad, para ello los estudiantes efectuaron una carrera de caballos en la que analizaron cuál es el número con mayor frecuencia y, a partir de ello, determinaron la probabilidad de ocurrencia de un evento.

2 Estos y todos los fragmentos citados en el artículo corresponden a producciones de los estudiantes, realizadas en el desarrollo de la propuesta.

Figura 2. Estudiantes explorando, con la profesora, las funcionalidades de la calculadora[3].

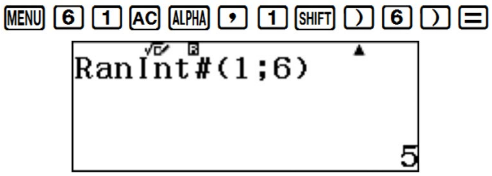
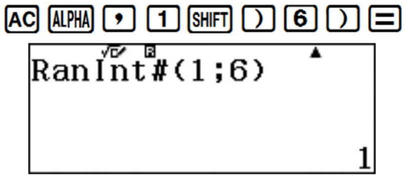
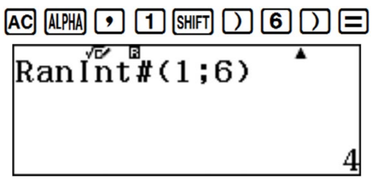
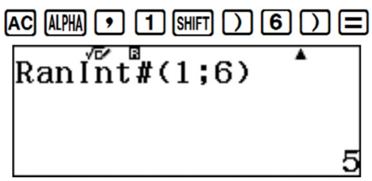
Fuente: estudiantes grado séptimo.

Para jugar cada estudiante eligió un número y puso allí su ficha. Para ello tuvieron que ponerse de acuerdo en el caso que fueran menos de seis estudiantes, si podrían dos estudiantes elegir el mismo número o si cada uno debía elegir un número diferente. Así, los estudiantes manifestaron asuntos como“juguemos cada uno con su número para que ninguno se quede vacío y le podamos hacer el punto a todos los números” “que cada quien decida, si repetimos no importa, pero de pronto pensamos lo mismo es mejor repetir”. El llegar a acuerdos y el trabajo en equipo posibilitó que se optimizaran y agilizara el desarrollo de las tareas, pues los estudiantes compartieron tareas y responsabilidades y cada uno aportó desde su conocimiento específico. Por otro lado, mejoró las relaciones entre los estudiantes, ya que las acciones se convirtieron en retos compartidos que los llevaron a trabajar en armonía a la vez que compartían vivencias y experiencias día tras día.

Posteriormente se dio inicio al lanzamiento de los dados (con la función Ranint de la calculadora). Los estudiantes obtenían dos números de este lanzamiento, los cuales debían restar, siempre el menor del mayor. El número resultado de la resta indicaba la ficha que debía moverse solo una casilla. Los equipos empezaron a hacer lanzamientos y un registro manual de los números arrojados por la calculadora, para proceder a realizar mentalmente la resta de ambos números, este se presenta en la Tabla 2.

3 En la Institución Educativa al momento de la matrícula, los acudientes firmaron autorización para el uso de imágenes de sus acudidos, con fines académicos.

Tabla 2. Lanzamiento de dados con la calculadora.

Proceso de lanzamiento de dados en la calculadora	Resta de los dos números
 	5 - 1 = 4
 	4 - 5 Restamos: 5 - 4 = 1

Fuente: la autora.

Sin embargo, como profesora problematicé y pregunté cómo podíamos restar estos números de manera directa en la calculadora. Inicialmente a los estudiantes les costó comprender la indicación, pero pasado un tiempo uno de los estudiantes propuso *"Qué tal si para ponerlos en la calculadora hacemos Ranint del primer números menos Ranint del segundo número".* El grupo avaló la propuesta e iniciaron pruebas en la calculadora. En ello un grupo de estudiantes reportó *"pero tenemos un problema si el primer número que sale es menor que el segundo número, porque entonces nos da un número negativo, y no se puede"* otro estudiante mencionó *"claro es que la profe nos había dicho que siempre restáramos el menor del mayor y para restar nosotros acomodábamos el número, pero la calculadora no sabe hacer eso".* En la figura 3 se presentan algunos estudiantes explicando al grupo de compañero el proceso propuesto.

Figura 3. Estudiantes presentando sus ideas al grupo.

Fuente: estudiantes grado séptimo.

La profesora preguntó cómo podría resolverse esta problemática en la calculadora, varios de los estudiantes consideraron que no se podría hacer porque no había manera de que *"la calculadora pensara y escogiera entre ambos números"*, de acuerdo a ello la profesora aprovechó la oportunidad para explicar el valor absoluto, como una función que permitía realizar este procedimiento. El procedimiento con la calculadora se ilustra en la Tabla 3.

Tabla 3. Valor absoluto con la calculadora.

Proceso valor absoluto con la calculadora
AC SHIFT (ALPHA , 1 SHIFT) 6) − ALPHA , 1 SHIFT) 6)) = |RanInt#(1;6)−Ran▷   0
SHIFT (ALPHA , 1 SHIFT) 6) − ALPHA , 1 SHIFT) 6)) = |RanInt#(1;6)−Ran▷   1

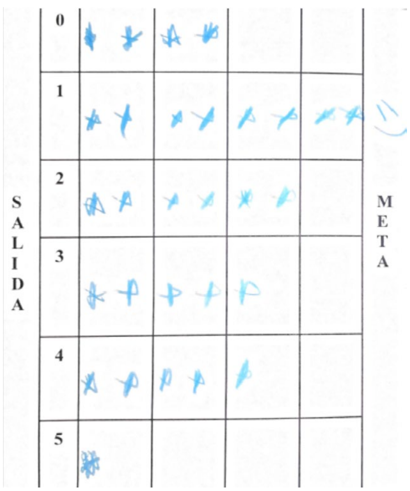
Fuente: la autora.

En el proceder anterior observé cómo la discusión fortalece el desarrollo de conceptos matemáticos. Y cómo los obstáculos para el desarrollo de una tarea de clase, puede aprovecharse como una oportunidad para el aprendizaje.

Luego de posibilitar el juego por varios minutos, marcando en las casillas los puntos en los que se realiza el movimiento, se revisaron los puntos marcados en la ficha de juego y se escribieron numéricamente la cantidad de casillas que se desplazó cada jugador. En la figura 4 se visualizan los trabajos realizados por dos de los equipos de estudiantes con los puntos marcados.

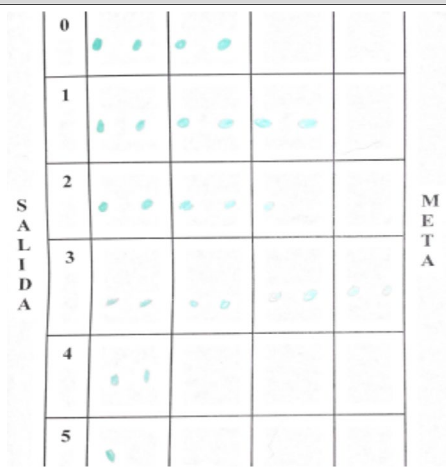
Figura 4. Trabajo de los estudiantes con relación a las casillas.

Equipo los poderosos



0	4
1	8
2	6
3	5
4	5
5	1

Equipo Cristina y Lily



0	4
1	6
2	5
3	8
4	2
5	1

Fuente: la autora.

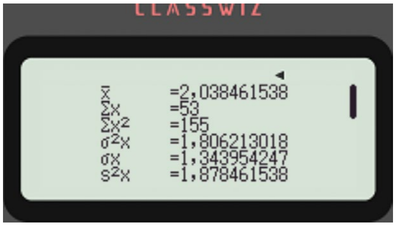
En la figura 5 se presentan algunos estudiantes jugando y lanzando los dados con sus calculadoras.

Figura 5. Estudiantes realizando el juego en la calculadora.

Fuente: la autora.

Posteriormente, se escribieron los datos en el cuaderno y se presentaron en la calculadora en el modo estadístico de la misma. Una vez vinculados los datos, se aplicó el análisis estadístico con OPTN y se discutió en torno a los resultados arrojados por la calculadora, comprendiendo su significado. En la tabla 4 vemos los resultados de un grupo de estudiantes quienes al exponer su trabajo al grupo reconocieron asuntos propios del concepto de probabilidad. Los estudiantes recurrieron a la comparación de resultados obtenidos con los demás grupos y así pudieron diferenciar qué técnica se estaba utilizando y cuál era la respuesta apropiada según la tarea propuesta. Los estudiantes pudieron mostrar sus habilidades para comunicarse matemáticamente por medio de la expresión de ideas, la interpretación y la evaluación de las soluciones, la descripción de las relaciones y el modelamiento de situaciones cotidianas, también dieron cuenta de desarrollo del razonamiento matemático, a partir de la manipulación (en este caso en la calculadora científica), la formulación de conjeturas (donde se proponían afirmaciones que pueden ser razonables), y en algunos casos generalizaciones (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella); finalmente observé la argumentación (explicar el por qué, estructurando argumentos válidos para sustentar las generalidades, sometiéndolas a prueba y explorando nuevos caminos).

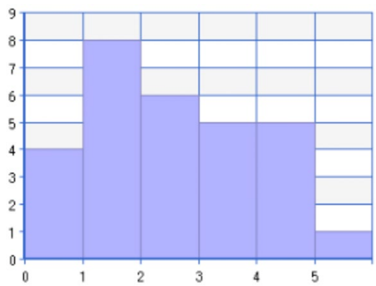
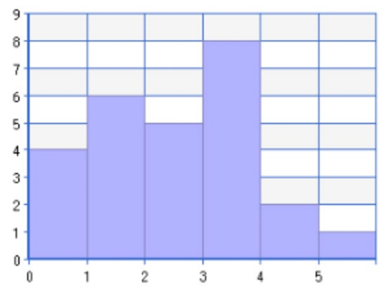
Tabla 4. Análisis de los datos en la calculadora.

Trabajo realizado por equipo los poderosos	Trabajo realizado por equipo cristina y Lily
0 = 1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▶ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ 4 = 8 = 6 = 5 = 5 = 	0 = 1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▶ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ 4 = 6 = 5 = 8 = 2 = 
OPTN 3 	OPTN 3 

Fuente: la autora.

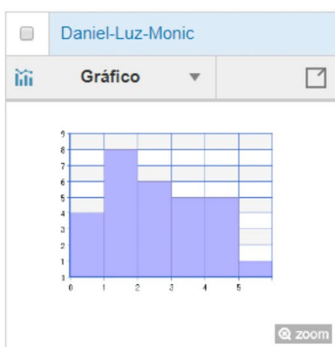
Luego, se obtuvo el código QR y, con la App CASIO EDU+ en el celular (Tabla 5), se envió la información a la Clase (Tabla 6). En la Clase se determinó el consolidado de las frecuencias de los estudiantes y se analizó qué se encuentra allí. En este caso se analizó cuál es el número con mayor frecuencia y, a partir de ello, se determinó la probabilidad de ocurrencia del evento. En este caso, la probabilidad frecuencial se calculó a partir de los datos obtenidos por una serie larga de realizaciones de un experimento. Para determinarla, se repitió el experimento aleatorio un numero determinado de veces, se registraron los datos, se graficaron los datos y se observó la frecuencia con más repeticiones. En la tabla 5 se visualiza el trabajo consolidado de los estudiantes.

Tabla 5. Trabajo en la aplicación de CASIO EDU+.

Trabajo realizado por equipo los poderosos	Trabajo realizado por equipo cristina y Lily
	
	

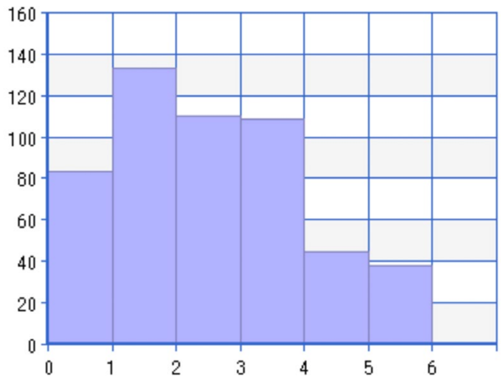
Fuente: la autora.

Tabla 6. Trabajo vinculado con la Clase.

Datos en la Clase, App CASIO EDU+		
		

Continúa

Datos en la Clase, App CASIO EDU+



Fuente: la autora.

Al ver el consolidado los estudiantes mencionaron asuntos como *"ah es que el número que más se repite es 1" "el número con la barra más alta es el 1" "Si vemos la barra más alta sabemos el que más veces se repite y es el número 1".*

En la figura 6 se presentan algunos estudiantes tomando el QR de la Clase.

Figura 6. Estudiantes analizando el QR.

Fuente: la autora.

En el momento 3 se calculó la probabilidad aplicando directamente la fórmula de Laplace. Para ello, se determinaron los casos favorables para los números del 0 al 5 (que son los posibles resultados de la resta) y los casos posibles para el lanzamiento de dos dados en los que restamos el resultado. En este momento se observó que coincide lo que se hace por medio de la tabla de frecuencias con la calculadora y si se aplica directamente la fórmula.

En el momento 4 realizamos un juego de dados para ver otros contextos de aplicación. En este momento se realizó un sorteo para aplicar lo aprendido, se simuló el lanzamiento de dados en la calculadora. Los estudiantes eligieron un número del 0 al 10. Para elegir los ganadores, se lanzaron los dados en la calculadora y se sumaron los dos números que salieron, el resultado de la suma determina el ganador. En este momento fue posible incentivar a los estudiantes a cerca de la importancia que tiene la teoría básica de probabilidad en la solución de problemas de la vida cotidiana, utilizando las técnicas respectivas, a través de estas el estudiante reconoce la variedad de eventos que conforman un universo.

Reflexión pedagógica

En el aula se debe estimular y realizar constantemente trabajos que involucren diversidad de conocimientos, contextos y relaciones con otras áreas (Villa-Ochoa, 2013). La experiencia permitió reconocer que cuando los estudiantes realizan experimentos aleatorios, llevando algún tipo de registro de datos pueden generar cierto tipo de conclusión o inferencia probabilística. En cuanto al uso de la calculadora fue posible identificar que esta permite el acercamiento a otros procesos en el aula, lo que lleva al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Medina y Ortiz, 2013; García-Cuellar et al., 2019).

El desarrollo de esta experiencia deja ver la necesidad de evaluar constantemente el diseño y la gestión de los resultados de las clases; para avanzar en el alcance de los objetivos propuestos. Así mismo muestra como a partir de la interacción con las calculadoras y las diferentes herramientas tecnológicas vinculadas, fue posible un acercamiento diferente al conocimiento matemático en el cual los estudiantes se involucraron en las decisiones de la clase y fueron participes activos en su proceso de aprendizaje. A pesar de las potencialidades de la experiencia, descritas en los párrafos anteriores, su realización en el aula puede crear dificultades, como el poco conocimiento de la herramienta, la falta del recurso y el tiempo distribuido para el currículo lo que, a su vez, se convierte en desafíos para el profesor.

Es importante también reflexionar sobre las dificultades que enfrenta el profesor de matemáticas al momento de evaluar el proceso de aprendizaje de sus estudiantes; el docente debe contemplar aspectos relacionados con el estudiante y su capacidad matemática, su avance cognitivo, el dominio de la herramienta, entre otros.

Bibliografía

Chamorro C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria. Parte 1, fundamentación. Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas.* Pearson.

García-Cuéllar, D., Parra-Zapata, M., Martínez-Miraval, M. y Sostenes, H. (2019). Una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Classwiz. *Acta latinoamericana de matemática educativa-ALME, 32*(1), 658-667.

Medina, J. y Ortiz, J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. *Uni-pluriversidad, 13*(3), 14-28.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Editorial Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Editorial Magisterio.

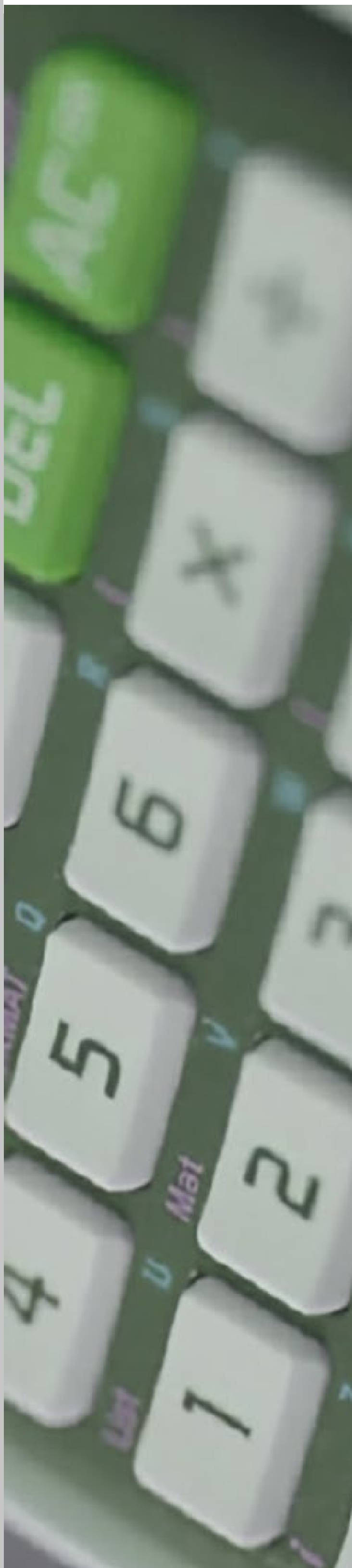
MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizajes en Matemáticas.* Panamericana Formas E Impresos S.A..

Villa-Ochoa, J. (5 al 7 de junio de 2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase [taller]. *VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática,* Santa Maria-RS, Brasil.

Reconocimientos

Agradezco a la Institución Educativa Villa Flora-Medellín-Colombia, en especial a Carlos Alberto Mazo Loaiza (rector), por posibilitar que esta experiencia se llevara a cabo y a las y los estudiantes participantes (Séptimo grado) por aceptar participar, por su compromiso, entrega y dedicación en cada una de las acciones que emprendimos en el desarrollo de esta experiencia de aula.

Al programa Gakuhan Casio y al proyecto CODI 2020-34799 de la Universidad de Antioquia por hacer posible esta formación y a MOVA por materializar el proceso en la entrega de calculadoras científicas Casio Classwiz fx-991LA X para la institución educativa.



Una carrera de caballos. Exploración del concepto de probabilidad con estudiantes de séptimo grado

Mónica Marcela Parra-Zapata
monikampz@gmail.com
Institución Educativa Mariscal Robledo -
Secretaría de Educación de Medellín
y Universidad de Antioquia,
Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Séptimo	Pensamiento aleatorio. Pensamiento variacional	• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
DBA 3. De grado Décimo Asigna probabilidades a eventos compuestos y los interpreta a partir de propiedades básicas de la probabilidad.		• Diferencia experimentos aleatorios realizados con remplazo, de experimentos aleatorios realizados sin remplazo. • Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, combinaciones, permutaciones, regla de la multiplicación, etc.). • Justifica la elección de un método particular de acuerdo al tipo de situación. • Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.

Eje central: concepto de probabilidad

Objetivo: Asignar la probabilidad a un evento, con el apoyo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad.

Conocimientos previos: De la herramienta:

- Prender la calculadora
- Formatearla
- Cambiar el idioma
- Hacer análisis estadístico
- Simular lanzamiento de dados

De matemáticas:

- Espacio muestral
- Sucesos
- Casos favorables

Desarrollo de la situación de aprendizaje

En esta situación nos proponemos asignar la probabilidad a un evento, con apoyo en la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad.

Para alcanzar el objetivo anterior vamos a llevar a cabo 4 momentos.

Momento 1. Indagación y exploración: manejo de la calculadora y repaso de experimentos aleatorios

En este momento recordaremos algunos componentes centrales del uso de la calculadora y discutiremos en torno a los tipos de sucesos estadísticos.

Frente al uso de la calculadora. Indiquemos en los cuadros a continuación, los pasos a seguir para realizar las siguientes funciones:

- Prender y apagar la calculadora

- Formatear la calculadora

- Cambiar el idioma

- Hacer un análisis estadístico

- Simular el lanzamiento de dados

- Ahora recordemos lo que sabemos de los tipos de sucesos estadísticos:

- ¿Qué tipos de sucesos estadísticos existen y cómo los definimos?

____

____

____.

- ¿Lanzar un dado es un suceso determinista o aleatorio? ¿por qué?

____

____

____.

- ¿En un suceso aleatorio es posible anticipar lo que va a ocurrir?

____

____

____.

Momento 2. Conceptualización I: carrera de caballos

En este momento exploraremos el concepto de probabilidad a partir de un juego llamado *carrera de caballos*.

- ¿Qué ideas tienen sobre probabilidad?

____
____
____.

- ¿Cómo podemos determinar la probabilidad de un suceso?

____
____
____.

¡Vamos ahora a jugar una carrera de caballos![1]

Antes de empezar a jugar se abren las apuestas: ¿quién crees que ganará? Cada uno de los jugadores del equipo elige el caballo por el que apuesta. Además, deben ponerse de acuerdo en si se admiten apuestas por el mismo caballo o no.

____
____
____.

En la siguiente tabla deben escribir el nombre de cada jugador y el número del caballo por el que apuesta en cada una de las carreras. (Recibirás una hoja anexa para cada carrera).

NOMBRES	CARRERA 1	CARRERA 2	CARRERA 3	CARRERA 4

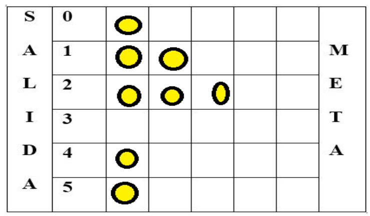
Hechas las apuestas, se ponen los caballos (fichas de parqués o caballos construidos previamente) en posición y comienza el juego. Se lanzan sucesivamente los dados (simulamos su lanzamiento con la función RanInt de la calculadora. En el anexo podrás ver el procedimiento) y se mueve el caballo (una casilla por cada lanzamiento) que ocupa la

1 Esta situación es una adaptación de la propuesta de Hans, J., Muñoz, J. y Fernández-Aliseda, A. (2006). La carrera de caballos. Grupo Alquerque de Sevilla. Suma, 51, 61-63.

posición de la **resta** obtenida.

En la hoja correspondiente a la carrera 1 van a registrar con un punto por casilla cada uno de los movimientos. Así hasta que uno de los caballos llegue a la meta.

El siguiente es un ejemplo de cómo marcar la pista de carreras.



- Una vez termine el juego registramos los datos obtenido en la siguiente tabla.

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- Ahora, usando el modo estadístico vamos a representar en nuestras calculadoras los resultados obtenidos (En el anexo podrás ver el procedimiento).

- Ahora vamos a sacar el código QR del trabajo realizado. (En el anexo podrás ver el procedimiento).

  ¿Qué información puedes visualizar a partir del código QR?
  ____
  ____
  _______________________________________.

- Usando la App de CASIO EDU+ en tu celular, vamos a enviar la información a la Clase creada previamente por tu docente (En el anexo podrás ver el procedimiento).

- Una vez en la Clase vamos a analizar aspectos de cada gráfica realizada.

Interpreta las gráficas que se visualizan

____.

Describe los elementos comunes y los no comunes de las gráficas que se visualizan

____.

- Observa en la Clase la gráfica que consolida el trabajo de todo el grupo. (En el anexo podrás ver el procedimiento).

Interpreta las gráficas que se visualizan

____.

¿Cuál es el número con mayor frecuencia? ¿Qué significa?

____.

En este caso, ¿cuál es el número con mayor probabilidad de salir?

____.

Momento 3. Conceptualización II: carrera de caballos

Esta probabilidad también podemos hacerla aplicando directamente la fórmula de Laplace, la cual nos dice que:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

- ¿Cuál es el número de casos posibles en este experimento?

____.

- Determinemos los casos favorables para el lanzamiento de dos dados en los que restamos el resultado. Indica la estrategia utilizada.

____.

- Una manera de determinar ordenadamente los casos favorables para el lanzamiento de dos dados es una tabla de doble entrada. Diligenciémosla según la información de este experimento aleatorio.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Completemos la siguiente tabla a partir de los datos calculados antes.

Resultado posible	Número de veces	Probabilidad

En este caso, ¿cuál es el número con mayor probabilidad de salir? ¿Por qué?

____

____

____.

Escribe una conclusión frente a los dos procedimientos realizados.

____

____

____

____

____

____

____.

En este caso, ¿a cuál número conviene apostarle? ¿Por qué?

____

____

____

____

____.

¿Qué significa que el número 1 es el número con mayor probabilidad de salir?

____

____

____.

Momento 4. Aplicación: Un juego de dados, otros contextos de aplicación

- Se rifará un dulce en un sorteo simple. Cada participante elegirá un número del 1 al 10.

  ¿Qué número recomiendas elegir? ¿Por qué?

  ____

  ____

  ____.

- Ahora pensemos en qué situaciones del contexto podríamos hacer uso de la probabilidad bien sea que la calculemos mediante frecuencias o mediante la fórmula de Laplace. Pensemos en nuestro contexto cercano (casa, colegio).

  ____

  ____

  ____

____

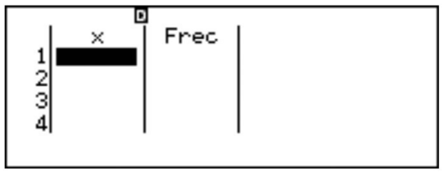
____

____.

Simular lanzamiento de dados. Función RanInt

Ingresar al modo estadístico con frecuencias activas.

MENU 6 1 SHIFT MENU ▼ 3 1

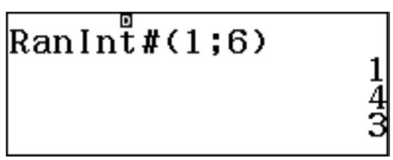


Poner la calculadora en pantalla inicial de trabajo estadístico.

AC

Activar la función **RanInt** para simular el lanzamiento de dados. Una vez activada la función, presiona igual, la calculadora alojará un número aleatoriamente entre 1 y 6.

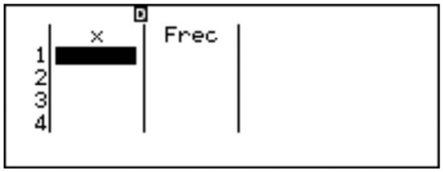
ALPHA , 1 SHIFT) 6) =



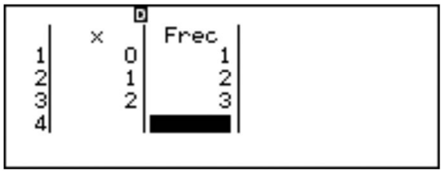
Ingreso de datos en tablas estadísticas

Ingresar al modo estadístico con frecuencias activas.

MENU 6 1 SHIFT MENU ▼ 3 1

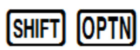


Ingresar los datos y su respectiva frecuencia. Los datos se fijan con la tecla igual y con las flechas se desplaza su respectiva frecuencia.



Código QR del trabajo realizado

Obtener el código **QR** del trabajo realizado.



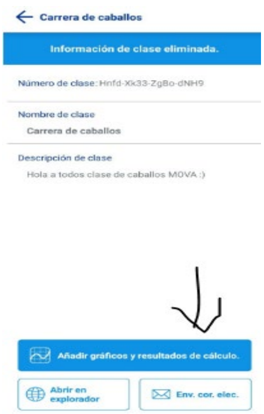
Clase en App CASIO EDU+

a. Ingresa a la opción Clase en la App en tu celular

b. Selecciona la clase previamente creada por tu docente

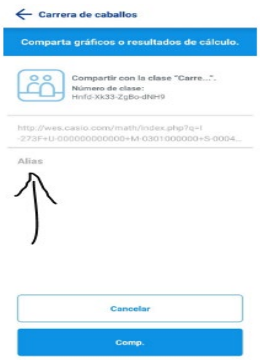
Si aún no estás en la Clase ingresa el código QR
o el código que te administre tu docente

c. Vincula tu trabajo a la Clase

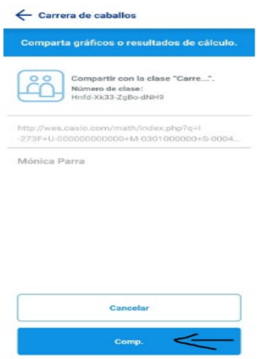


d. Digitaliza el código QR de tu trabajo en tu calculadora

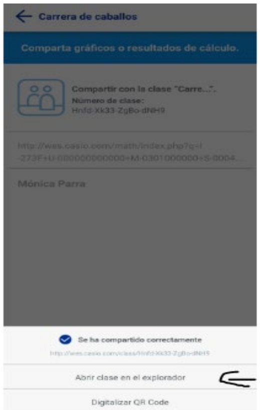
e. Vincula tu nombre al trabajo



f. Comparte el trabajo



g. Abre el trabajo en el explorador

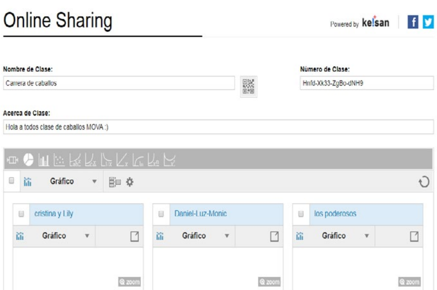


h. Visualiza los trabajos del grupo en la Clase

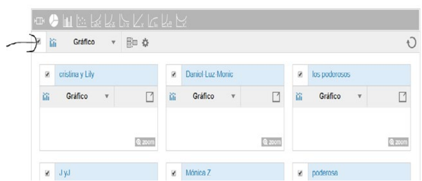
Fuente: la autora.

Consolidar gráficos en la clase

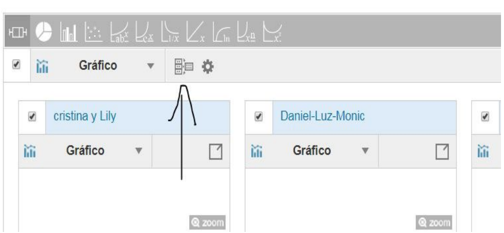
a. Abre la Clase en un navegador de internet



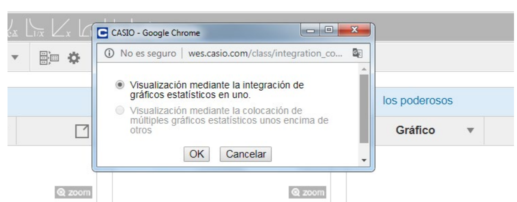
b. Selecciona todos los gráficos



c. Selecciona consolidar gráficos



d. Elige la visualización mediante integración



Si tu navegador bloquea las ventanas emergentes debes realizar desbloqueo

Fuente: la autora.

Anexo

Pistas para cuatro carreras de caballos

Carrera 1

SALIDA	0						META
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Carrera 2

SALIDA	0						META
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Carrera 3

SALIDA	0						META
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Carrera 4

SALIDA	0						META
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Nairo Quintana: Giro de Italia. Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X para abordar el concepto de función

Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo
monizapata25@gmail.com
Institución Educativa Barrio Olaya Herrera -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Resumen:
En este documento se presenta una experiencia de aula en la que se usó la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X para desplegar teórica y prácticamente el concepto de función. La experiencia se llevó a cabo con 36 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Barrio Olaya Herrera como parte del proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia - Gakuhan. Entre los resultados obtenidos, se destaca el uso de la calculadora como herramienta que posibilita que los estudiantes centren su atención en la comprensión del concepto, la generalización y la formulación de hipótesis y conjeturas.

Palabras clave:
Magnitudes, variación, relación funcional, calculadora, aprendizaje.

Introducción

En este documento se presenta una experiencia de aula con estudiantes de grado décimo en la que se abordó el concepto de función. Los objetivos de la experiencia fueron reconocer la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada e interpretar y expresar la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones, con apoyo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X.

En la experiencia los estudiantes identificaron las variables y reconocieron las magnitudes de las medidas de las cantidades asociadas. La experiencia cobró sentido y significado para ellos pues establecieron conexiones con su contexto y encontraron aplicabilidad de los conceptos estudiados en la clase de matemáticas en situaciones de la cotidianidad.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento variacional. Sistemas algebraicos y analíticos.	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
DBA 3. De grado Décimo Resuelve problemas que involucran el significado de medidas de magnitudes relacionales (velocidad media, aceleración media) a partir de tablas, gráficas y expresiones algebraicas.	• Reconoce la relación funcional entre variables asociadas con problemas. • Interpreta y expresa magnitudes definidas como razones entre magnitudes (velocidad, aceleración, etc.), con las respectivas unidades y las relaciones entre ellas. • Utiliza e interpreta la razón de cambio para resolver problemas relacionados con magnitudes como velocidad y aceleración.

Eje central:	Funciones
Objetivos:	• Reconocer la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada. • Interpretar y expresar la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones.
Conocimientos previos:	Magnitudes Conversión de unidades de medida Gráficas en Plano Cartesiano Uso de la calculadora

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	4 sesiones de clase de 2 horas cada una
Recursos:	Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, celular con aplicación, CASIO EDU+, computador, video beam, hojas cuadriculadas, lápiz y lapiceros

En esta experiencia se tuvo como propósitos reconocer la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada e interpretar y expresar la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones. Para cumplir los propósitos se planteó una experiencia en la que se realizó una adaptación a la actividad de aprendizaje: "¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración?", diseñada por Contenidos para Aprender del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) y se propuso el uso de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X como herramienta para esta experiencia.

Para abordar el concepto de función se propuso la siguiente experiencia que consta de cuatro momentos.

Exploración[1]

En este momento se exploraron las nociones de distancia y desplazamiento, a partir de la animación realizada por el MEN con base en un video de Nairo Quintana cuando ganó, en el año 2014, el Giro de Italia. En la animación también se muestra el mapa de la ruta de la carrera y una tabla de las 10 últimas etapas de la competencia con los respectivos tiempos y distancias de cada etapa.

En la tabla se presentan los datos de la velocidad media (en la que se supone que Nairo Quintana recorrió las etapas con velocidad constante) y, luego, se les entregó una serie de interrogantes a los estudiantes para que los resolvieran en pequeños grupos de discusión:

¿?

- ¿Cómo identificamos que un objeto está en movimiento?
- ¿Qué variables debemos tener en cuenta para describir el movimiento de un cuerpo?
- ¿Cuántas etapas había en la competencia?
- ¿Cuántos kilómetros recorrió Nairo en total?
- ¿Cuánto tiempo se demoró Nairo en todo el recorrido?
- ¿Cómo podemos calcular la velocidad con la que Nairo recorrió toda la carrera?

1 Los momentos propuestos son una adaptación de: MEN (2015). *¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme* [video]. Colombia

Estructuración y práctica

Elaboración de tablas y gráficas sobre distancia - tiempo.

Teniendo en cuenta el video y el mapa de la competencia del Giro de Italia, se les pidió a los estudiantes tomar nota de la distancia de las últimas 10 etapas de esta carrera y usar la calculadora para completarla.

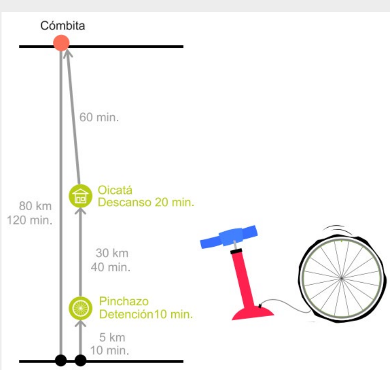
- ¿A qué hace referencia el tiempo acumulado en la tabla?
- ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 17?
- ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 16?
- Determina el tiempo que tardó Nairo en hacer el recorrido de la etapa 17.
- ¿Cuánto tardó Nairo en la *Contrarreloj de subida* de la etapa 19?
- ¿Qué parte de la distancia total del Giro de Italia recorrió Nairo en las últimas 10 etapas?
- Elaboremos una tabla en la que se relacione la distancia, el tiempo y la velocidad de Nairo en las últimas 10 etapas de esta carrera.

Transferencia

Situación de entrenamiento.

A continuación, se les pidió a los estudiantes realizar un gráfico que relacionara los desplazamientos y los tiempos dados en la siguiente situación:

Figura 1. Un entrenamiento de Nairo Quintana.



Fuente: MEN (2015).

En uno de los entrenamientos Nairo Quintana hizo el siguiente recorrido: Salió en su bicicleta del municipio de Cómbita. Tardó 120 minutos en recorrer 80 km, inmediatamente se devolvió y a los 10 minutos después de haber recorrido 5 km se le pinchó una rueda. Luego de 10 minutos en la reparación, continuó su regreso. Recorrió 30 km en 40 minutos, descansó 20 minutos en el municipio de Oicatá, y luego de una hora regresó a Cómbita.

Valoración

Conclusiones y reflexiones frente a la experiencia.

Finalmente, se les pidió a los estudiantes que en los grupos de trabajo plantearan cinco conclusiones que giraran en torno a la construcción de conocimientos acerca del movimiento como un cambio de posición según un sistema de referencia; también acerca de las magnitudes relacionadas en una situación de movimiento rectilíneo uniforme, las similitudes y diferencias entre desplazamiento, distancia, rapidez y velocidad, así como del tipo de función que relaciona la distancia con el tiempo.

Experiencia de aula

La experiencia se llevó a cabo durante cuatro sesiones de clase, con 36 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Barrio Olaya Herrera. Este trabajo fue producto de las reflexiones y aprendizajes logrados en el curso de formación "Diseño de situaciones didácticas mediadas por calculadora para el desarrollo del pensamiento matemático".

Como se indicó en el apartado anterior, la experiencia se efectuó en cuatro momentos, a saber: exploración, estructuración y práctica, transferencia y valoración.

En el momento de exploración, se motivó a los estudiantes hacia el nuevo aprendizaje para reconocer sus saberes previos frente a la temática que se abordó. Para esto se les presentó el video-animación *"Nairoman, el escarabajo tricolor".* Apoyados en la información proporcionada por la animación, los estudiantes identificaron los datos correspondientes a las distancias y los tiempos involucrados en cada etapa del Giro de Italia; se estableció una discusión en torno a los siguientes cuestionamientos: ¿Cuáles cantidades aparecen en esta situación? ¿Cuántos kilómetros recorrió durante las 10 últimas etapas? ¿Qué tipo de relación se establece entre la distancia y el tiempo?

Figura 2. Tiempos y distancias de Nairo Quintana.


Imagen: Freepik


NAIRO QUINTANA

ETAPA	TIEMPO ACUMULADO	DISTANCIA
21	88:14:32	169 Km
20	83:50:25	167 Km
19	79:03:45	26.8 Km contrareloj subida
18	77:58:08	171 Km
17	73:05:32	204 Km
16	68:11:44	139 Km
15	63:29:19	217 Km
14	57:55:55	162 Km
13	53:18:35	158 Km
12	49:41:32	46,4 Km contrareloj subida

Fuente: MEN (2015).

A partir de la identificación de las magnitudes involucradas en el movimiento, que se presentó en el Momento de Exploración, los estudiantes pudieron aproximarse también al significado de los números en los contextos específicos. Por ejemplo, para establecer los tiempos manifestaron asuntos como: "Profe, como un minuto tiene 60 segundos y una hora tiene 3600 segundos, entonces podemos hacer las horas, minutos y segundos, convertidas en horas". Otros estudiantes señalaron: "Profe, nosotros sumamos las distancias en cada etapa porque si el tiempo que presentan es acumulado en toda la carrera, entonces las distancias también deben estar acumuladas".

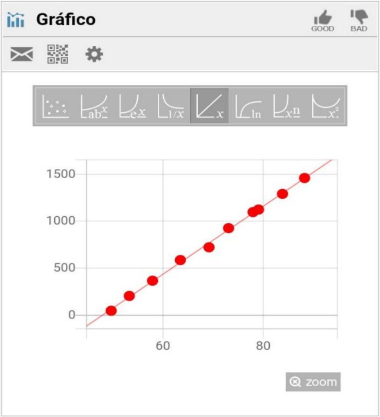
En el momento de Estructuración y práctica, luego de las discusiones anteriores, los estudiantes, por grupos, realizaron las tablas de valores en las que se relacionan la distancia y el tiempo y a calcular las velocidades; después de ello, a seguir las instrucciones presentadas en el momento de exploración para elaborar las gráficas y la regresión con el uso de la calculadora.

Figura 3. Estudiantes trabajando con la calculadora.

Fuente: archivo de la autora.

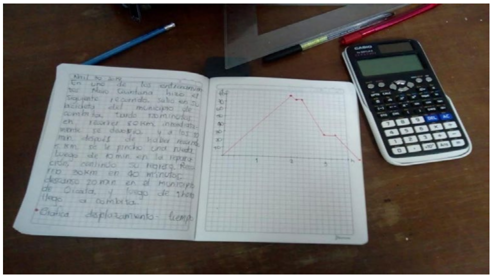
Tabla

	x	y
1	49.69	46.4
2	53.3	204.4
3	57.93	366.4
4	63.48	586.4
5	69.19	722.4
6	73.09	926.4
7	77.96	1097.4
8	79.06	1124.2
9	83.84	1291.2
10	88.24	1460.2



En el momento de Transferencia, los estudiantes elaboraron gráficas en las que se muestran las variaciones de los desplazamientos en relación con el tiempo, presentados en la situación en la que se describe uno de los entrenamientos realizados por Nairo Quintana. En la Construcción los estudiantes reconocieron las diferencias entre la rapidez y la velocidad y asumieron el tiempo máximo que se tardó en el recorrido. En sus argumentos tuvieron en cuenta el punto de referencia desde el cual debían iniciar la gráfica, así como los instantes en los que la velocidad fue igual a cero.

Figura 4. Gráfica realizada por un estudiante.



Fuente: archivo de la autora.

Para las conclusiones planteadas por los estudiantes en la valoración, ellos debieron salir al frente a compartirlas con sus compañeros. En este momento centraron sus argumentos en las discusiones y datos que tuvieron en la exploración. Los procedimientos realizados para encontrar los valores numéricos de la distancia, el desplazamiento, el tiempo y la velocidad, constituyeron una oportunidad para reflejar algunas concepciones de los estudiantes en las que ponen en juego su conocimiento. En este momento los estudiantes reconocieron que las diferentes representaciones no se usan de manera arbitraria y que no se concentran simplemente en dar información sobre dos datos, sino que muestran la manera en la que varía una magnitud en relación con la otra.

Reflexión pedagógica

El desarrollo de experiencias en las que se lleve a explorar los conocimientos previos y hacer la conexión con los nuevos, en los que se contextualice y se relacione con otras áreas, se debe realizar constantemente en el aula. En esta situación, el objetivo fue lograr la comprensión e identificación de variables y relaciones para modelar el cambio mediante funciones. Los estudiantes comprendieron que las funciones relacionan magnitudes que cambian, más allá de su tratamiento simbólico y analítico, y se logró potenciar en ellos procesos de pensamiento como la observación, la comparación y la indagación, entre otros.

Las experiencias que involucren contextos reales y cercanos para los estudiantes con representaciones como gráficas, tablas, y expresiones algebraicas, promueve el fortalecimiento del pensamiento matemático y las competencias ciudadanas, el trabajo colaborativo y la reflexión acerca del uso de los procedimientos y de sus interpretaciones.

El uso de la calculadora facilitó la exploración en tanto que el centro de la actividad no estuvo en la ejecución de operaciones complejas o tediosas. En este sentido, su uso proporcionó más tiempo para concentrar el esfuerzo y la atención en la comprensión de conceptos y en el pensamiento crítico. La comprensión fue el resultado de entender qué era lo que se estaba presentando en la situación, diseñar un plan para resolver el problema, decidir qué acciones, operaciones y argumentos serían adecuados y determinar si los resultados obtenidos tenían sentido o no en el contexto de la situación.

Bibliografía

MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* MEN.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* MEN.

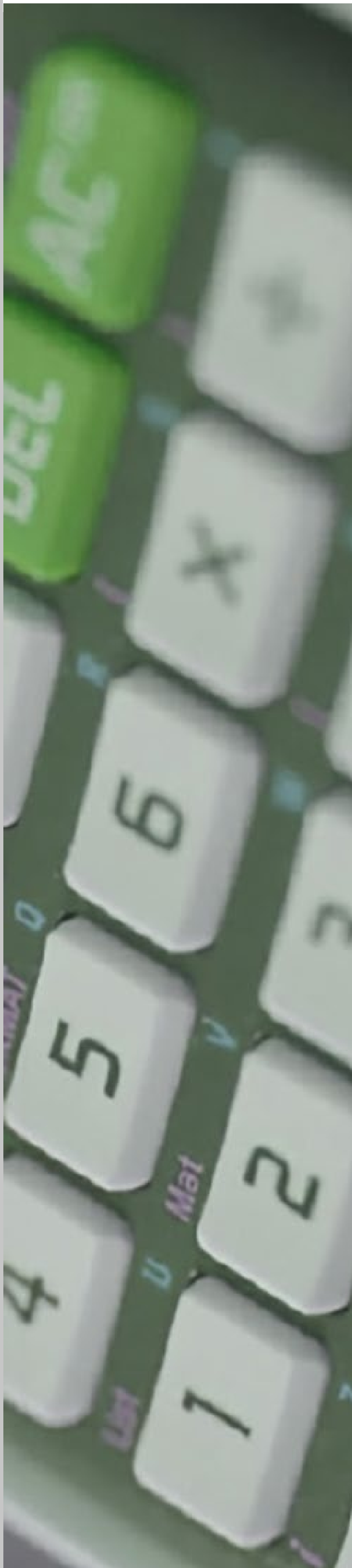
MEN. (2017). *Derechos básicos de aprendizaje.* MEN.

MEN. (2015). *¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme* [video]. Colombia Aprende.

Reconocimientos

A la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, a Gakuhan- Casio, al grupo de investigación MATHEMA-FIEM, a la Institución Educativa Barrio Olaya Herrera y a los estudiantes que hicieron parte de esta grata experiencia.

Guía **estudiante**



Nairo Quintana: Giro de Italia. Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X para abordar el concepto de función

Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo
monizapata25@gmail.com
Institución Educativa Barrio Olaya Herrera -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento variacional. Sistemas algebraicos y analíticos.	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
DBA 3. De grado Décimo Resuelve problemas que involucran el significado de medidas de magnitudes relacionales (velocidad media, aceleración media) a partir de tablas, gráficas y expresiones algebraicas.		• Reconoce la relación funcional entre variables asociadas con problemas. • Interpreta y expresa magnitudes definidas como razones entre magnitudes (velocidad, aceleración, etc.), con las respectivas unidades y las relaciones entre ellas. • Utiliza e interpreta la razón de cambio para resolver problemas relacionados con magnitudes como velocidad y aceleración.
Eje central: Funciones		
Objetivos:	• Reconocer la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada. • Interpretar y expresar la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones.	
Conocimientos previos:	Magnitudes Conversión de unidades de medida Gráficas en Plano Cartesiano Uso de la calculadora	

Desarrollo de la situación de aprendizaje[1]

Momento 1

Veamos el video: "Nairoman, el escarabajo tricolor", al que se puede acceder desde el enlace: https://n9.cl/pvbl1 o desde nuestro celular con el siguiente código QR.

Reunirse en grupos de no más de cuatro estudiantes y responder las siguientes preguntas según el video visto:

1 Los momentos propuestos son una adaptación de: MEN (2015). *¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme* [video]. Colombia Aprende.

¿?

- ¿Cómo identificamos que un objeto está en movimiento?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Qué variables debemos tener en cuenta para describir el movimiento de un cuerpo?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Cuántas etapas había en la competencia?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Cuántos kilómetros recorrió Nairo en total?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Cuánto tiempo se demoró Nairo en todo el recorrido?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Cómo podemos calcular la velocidad con la que recorrió Nairo toda la carrera?

  ____
  ____
  ____.

- Exploraremos ahora las nociones de distancia y desplazamiento, a partir del mapa de la ruta que se presenta en la imagen 1.

- Toma el mapa y calcula la distancia entre puntos de cada etapa y los respectivos desplazamientos realizados.

  ____
  ____
  ____.

Figura 1. Ruta Giro de Italia 2014.

LAS 21 ETAPAS

Stage	Date	Start en finish	Length	Type
1	Fr 9 May	Belfast (N-Irl) – Belfast	21.7 km	team time trial
2	Sa 10 May	Belfast – Belfast	219.0 km	flat
3	Su 11 May	Armagh (N-Irl) – Dublin (Irl)	187.0 km	flat
	Mo 12 May	rest day / transport		
4	Tu 13 May	Giovinazzo – Bari	112.0 km	flat
5	We 14 May	Tarente – Viggiano	203.0 km	mountains
6	Th 15 May	Sassano – Montecassino	247.0 km	hilly
			257.0 km	
7	Fr 16 May	Frosinone – Foligno	211.0 km	flat
8	Sa 17 May	Foligno – Montecopiolo	179.0 km	mountains
9	Su 18 May	Lugo – Sestola	172.0 km	mountains
	Mo 19 May	rest day		
10	Tu 20 May	Modena – Salsomaggiore Terme	173.0 km	flat
11	We 21 May	Collecchio – Savona	249.0 km	hilly
12	Th 22 May	Barbaresco – Barolo	41.9 km	ITT
13	Fr 23 May	Fossano – Rivarolo Canavese	157.0 km	flat
14	Sa 24 May	Agliè – Oropa	164.0 km	mountains
15	Su 25 May	Valdengo – Plan di Montecampione	225.0 km	flat/summit finish
	Mo 26 May	rest day		
16	Tu 27 May	Ponte di Legno – Val Martello	139.0 km	mountains
17	We 28 May	Sarnonico – Vittorio Veneto	208.0 km	flat
18	Th 29 May	Belluno – Rifugio Panarotta	171.0 km	mountains
19	Fr 30 May	Bassano del Grappa – Cima Grappa	26.8 km	ITT (mountain)
20	Sa 31 May	Maniago – Monte Zoncolan	167.0 km	mountains
21	Su 1 June	Gemona del Friuli – Trieste	172.0 km	flat

Fuente: MEN (2015).

Momento 2

En el video nos presentan una tabla con los tiempos acumulados de Nairo en las últimas 10 etapas. Exploremos algunas relaciones que aparecen allí.

- ¿A qué hace referencia el tiempo acumulado en la Tabla?

____

____

____.

¿?

- ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 17?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 16?

  ____

  ____

  ____.

- Determina el tiempo que tardó Nairo en hacer el recorrido de la etapa 17.

  ____

  ____

  ____.

- ¿Cuánto tardó Nairo en la *Contrarreloj de subida* de la etapa 19?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Qué parte de la distancia total del Giro de Italia recorrió Nairo en las últimas 10 etapas?

  ____

  ____

  ____.

- Elaboremos una tabla en la que se relacione la distancia, el tiempo y la velocidad de Nairo en las últimas 10 etapas de esta carrera.

¿?

- Ahora, utilicemos el modo “Estadística” de la calculadora y determina la regresión lineal a partir de los 10 puntos generados en la tabla anterior. (Puedes ver las indicaciones para hacer este proceso al final de esta guía).

- Presenta las diferentes representaciones de la función que resultó de los tiempos y distancias acumulados.

____

____

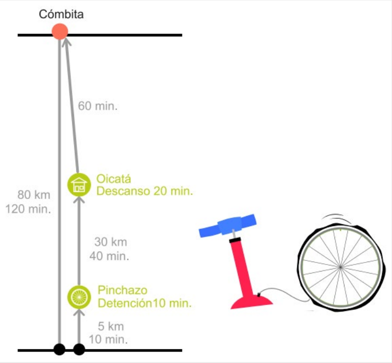
____.

Momento 3

Realiza un gráfico que relacione los desplazamientos y los tiempos dados en la siguiente situación:

En uno de los entrenamientos Nairo Quintana hizo el siguiente recorrido: Salió en su bicicleta del municipio de Cómbita. Tardó 120 minutos en recorrer 80 km, inmediatamente se devolvió y a los 10 minutos después de haber recorrido 5 km se le pinchó una rueda. Luego de 10 minutos en la reparación, continuó su regreso. Recorrió 30 km en 40 minutos, descansó 20 minutos en el municipio de Oicatá, y luego de una hora regresó a Cómbita.

Figura 2. Un entrenamiento de Nairo Quintana.



Fuente: MEN (2015).

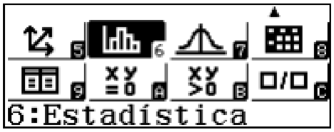
Momento 4

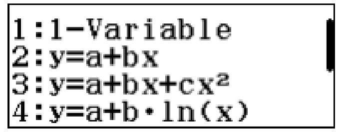
Planteemos cinco conclusiones en torno al trabajo realizado.

Proceso para hallar la regresión lineal con la calculadora

Ingresamos al modo "Estadística" de la calculadora:

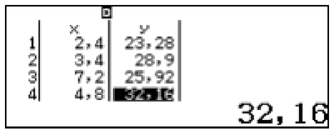
MENU 6 2





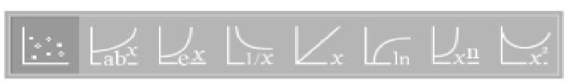
Seleccionamos la opción 2 (regresión lineal) e ingresamos los datos de la tabla:

MENU 6 2

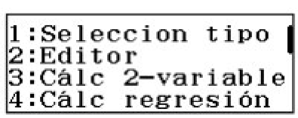


Para explorar el gráfico presionamos SHIFT OPTN y accedemos mediante el código QR al gráfico con la Aplicación CASIO EDU+, desde nuestro celular:

Aproximamos nuestro gráfico a una línea recta



Ahora, presionando la tecla "OPTN". Luego, seleccionando "Cálc regresión" obtenemos una expresión lineal de la forma y=ax+b



Apuestas en dos movimientos. Una experiencia pedagógica en torno al movimiento parabólico

Lorena Mena Mena
lmm1509@hotmail.com
Institución Educativa Villa Flora -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Resumen:
En esta experiencia se plasma el trabajo realizado con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Villa Flora. En ella se reporta cómo se puede enseñar a los estudiantes el movimiento en dos dimensiones desde la verificación de lo enseñado en clase y la construcción de materiales, lo que permite que el estudiante desarrolle sus habilidades en el uso de la calculadora para demostrar este movimiento y sus competencias ciudadanas en el trabajo colaborativo. Además, el trabajo realizado permite que el estudiante se encuentre a la par con su docente y haya una mejor relación entre ambos.

Palabras clave:
Movimiento, enseñanza, calculadora y trabajo colaborativo.

Introducción

El trabajo permitió que los estudiantes determinaran previamente el movimiento de un cuerpo en marcos inerciales de referencia estudiando la conservación de la energía mecánica. Se permitió también que determinaran relaciones físicas desde la toma de datos y el estudio de las gráficas de predicción de movimiento. Se calcularon otras medidas como: la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración en función del tiempo con el propósito de brindar solución a la pregunta de investigación de acuerdo con el plan de área de la institución, la cual es: ¿Cómo construir un modelo que permita comprender el movimiento?

De acuerdo con lo anterior, se realizó la sistematización de la experiencia como una posibilidad de verificar y demostrar los saberes aprendidos en la experiencia y pensar sus potencialidades en el desarrollo del pensamiento crítico y analítico.

Relación con los documentos nacionales

<table>
<tr><th>Grado</th><th>Pensamientos matemáticos relacionados</th><th>Estándares básicos de competencias relacionados:</th></tr>
<tr><td>Décimo</td><td>Numérico, métrico, espacial y variacional.
Entorno físico: procesos físicos.
Ciencia, tecnología y sociedad.</td><td>• Establezco relaciones entre las diferentes fuerzas que actúan sobre los cuerpos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme y establezco condiciones para conservar la energía mecánica.
• Modelo matemáticamente el movimiento de objetos cotidianos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DBA relacionados:</th><th>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ciencias naturales: Comprende que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas.</td><td>Describe el movimiento de un cuerpo (rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado, en dos dimensiones – circular uniforme y parabólico) en gráficos que relacionan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. q Predice el movimiento de un cuerpo a partir de las expresiones matemáticas con las que se relaciona, según el caso, la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. q Identifica las modificaciones necesarias en la descripción del movimiento de un cuerpo, representada en gráficos, cuando se cambia de marco de referencia.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Eje central: Cinemática (Movimiento parabólico)</td></tr>
<tr><td>Objetivo:</td><td colspan="2">Comprender que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos previos:</td><td colspan="2">Razones trigonométricas de ángulos agudos
Ecuaciones
Funciones
Cinemática (Movimiento rectilíneo uniforme, Movimiento acelerado)</td></tr>
</table>

Desarrollo de la situación de aprendizaje

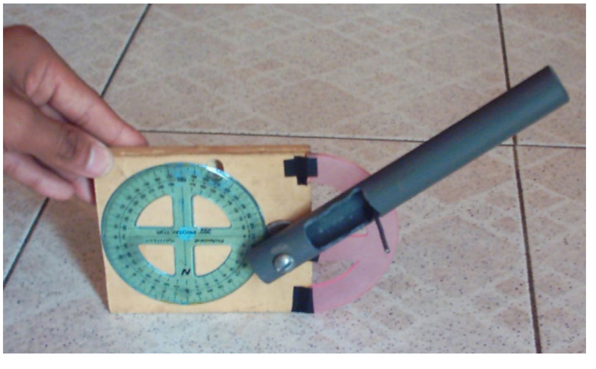
Tiempo de duración:	Dos horas
Recursos:	Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X Tubo de plástico Trozo de cuerda elástica Un resorte Una puntilla Transportador Una esfera de plástico o madera de 2cm de diámetro, aproximadamente Una tabla de madera de 30cm x 60cm aprox Calculadora fx-991LA X Marcador, lápiz, lapiceros, regla, cronómetro y Smartphone.

a. Formar equipos de trabajo de cuatro o cinco estudiantes
b. Registrar en la tabla los valores obtenidos después de los lanzamientos
c. Registrar los resultados en la hoja milimetrada
d. Entregar al docente la guía con las operaciones y los resultados

Actividad previa

Con los integrantes de tu equipo diseñen y construyan un lanzapelotas, como el de la figura 1. Este lanzaproyectil será utilizado en la siguiente actividad.

Figura 1. Diseño de lanzapelotas.



Fuente: Cabellos (2007).

Movimiento parabólico[1]

Fórmulas de movimiento parabólico

Distancia horizontal

$$D = V_x . T$$

Altura

$$h = V_y . t \pm \frac{g\,t^2}{2}$$

Velocidad final

$$V_f = V_y \pm g.t \quad V_f^2 = V_y^2 \pm 2gh$$

Velocidad resultante

$$V_r = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

Velocidad en y

$$V_y = V_0 \sin \alpha$$

Velocidad en x

$$V_x = V_0 \cos \propto$$

Tiempo de vuelo

$$T_v = \frac{2V_0 \sin\propto}{g} = \frac{2V_y}{g}$$

Altura máxima

$$H_{max} = \frac{V_0^2 \sin \alpha^2}{2g} = \frac{V_y^2}{2g}$$

Alcance horizontal $D = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Relación entre H y D $\tan \alpha = \frac{4H}{D}$

Actividad 1

En clase los estudiantes ubican el lanzaproyectil en el suelo y disparan el balín varias veces. Cada vez con distinto ángulo de inclinación respecto a la horizontal.

Registre sus observaciones en la siguiente tabla.

1 Las fórmulas presentadas a continuación fueron extraídas de: Franco, Á. (s.f.). Alcance máximo en un plano inclinado. *Física con ordenador- Curso Interactivo de Física en Internet.* http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/parabolico/alcance1/alcance1.htm

Tabla 1. Tabla de registro de observaciones.

Ángulo (°)	Alcance horizontal(m)	Tiempo(s)

Fuente: la autora.

Para cada caso en la tabla calcula la velocidad inicial y la altura máxima.

Tabla 2. Tabla de registro de velocidad.

Ángulo (°)	Alcance horizontal(m)	Tiempo(s)	Velocidad inicial (m/s)	Altura máxima (m)

Fuente: la autora.

¿Cómo calcular la velocidad inicial y la altura máxima?

Cuando realizamos los lanzamientos podemos obtener, midiendo, el ángulo de lanzamiento, el alcance horizontal y el tiempo; las expresiones que relacionan estas magnitudes con la velocidad inicial y la altura máxima son:

$$D = \frac{{V_0}^2 sen 2\alpha}{g}$$

$$H_{max} = \frac{{V_0}^2 (sen\alpha)^2}{2g}$$

Donde:

D es el alcance horizontal.

α es el ángulo de lanzamiento.

g es la aceleración de la gravedad.

V_0 es el módulo de la velocidad inicial.

H_{max} es la altura máxima.

Calculemos la velocidad inicial:

Como: $D = \frac{{V_0}^2 sen2\alpha}{g}$

La velocidad inicial es: $V_0 = \sqrt{\frac{D \cdot g}{sen2\alpha}}$

Considerando $g = 10\frac{m}{s^2}$

La velocidad inicial quedaría expresada de la siguiente manera:

$$V_0 = \sqrt{\frac{10D}{sen2\alpha}}$$

Donde D es el alcance horizontal en metros.

Uso de la calculadora:

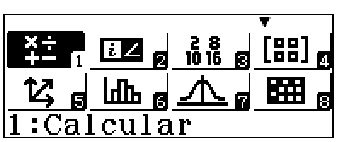
Como ejemplo de las actividades a realizar, determinemos el valor del módulo la velocidad inicial para los siguientes valores de D y α

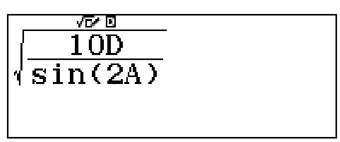
Tabla 3. Determinación del módulo de velocidad.

D	α	V_0
3m	27°	
4m	35°	
5m	55°	

Fuente: la autora.

En la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X o similar, utilizaremos el modo 1 y la función CALC que permite evaluar expresiones que dependen de varios parámetros.

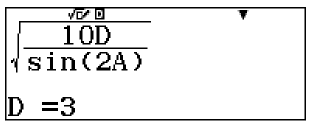




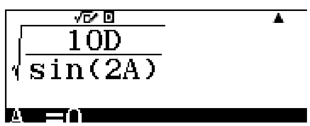
Estamos utilizando A, para representar el ángulo de lanzamiento.

Una vez ingresada la expresión presionamos la tecla CALC y observaremos una pantalla similar a la siguiente.

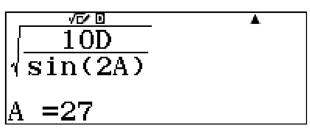
El valor mostrado de D, es el valor que la calculadora tiene en la memoria, resultado de alguna operación anterior, debemos ingresar el nuevo valor de D para efectuar el cálculo, en este caso ingresaremos $D = 3$



en seguida presionamos la tecla =

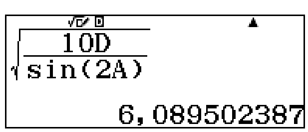


Este valor mostrado de A es un valor que tiene en memoria, debemos ingresar el nuevo valor.

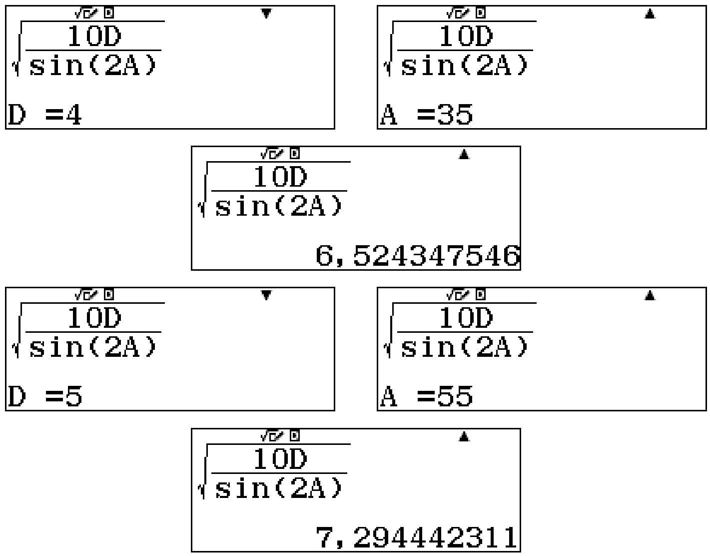


Presionar = =

Obtenemos el valor del módulo de la velocidad inicial



Presionamos = y realizamos la misma operación con los valores restantes de la Tabla 3.



La Tabla 4 quedaría así:

Tabla 4. Información de la velocidad diligenciada.

D	α	V_0
3m	27°	6.09
4m	35°	6.52
5m	55°	7.29

Fuente: la autora.

Calculemos de la altura máxima:

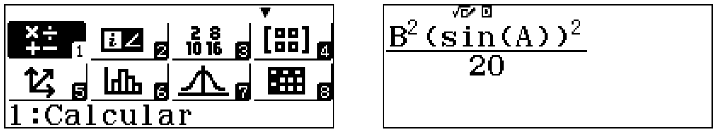
Tabla 5. Cálculo de la altura máxima.

D	α	V_0	H_{max}
3m	27°	6.09	
4m	35°	6.52	
5m	55°	7.29	

Fuente: la autora.

Para el cálculo de la altura máxima utilizaremos la siguiente fórmula:

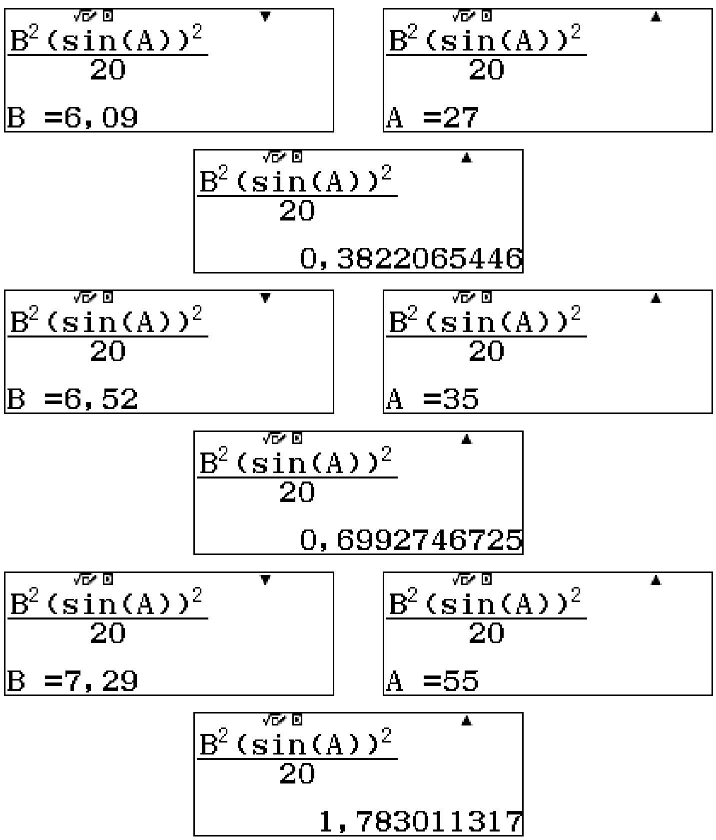
$$H_{max} = \frac{V_0{}^2(sen\alpha)^2}{2g}$$



Donde:

B representa el módulo de la velocidad inicial
A el ángulo de lanzamiento

Utilicemos CALC para determinar los valores de la altura máxima en la tabla 3.



Con los valores calculados la tabla 3 quedaría así, recuerde que en la calculadora hemos representado con B, al módulo de la velocidad inicial y con A al ángulo de lanzamiento α:

Tabla 6. Cálculo de la altura máxima diligenciado.

D	α	V_0	H_{max}
3m	27°	6.09	0.38
4m	35°	6.52	0.70
5m	55°	7.29	1.78

Fuente: la autora.

Actividad 2

Con tu equipo de trabajo efectúa varios lanzamientos con los ángulos indicados y completa la tabla.

Tabla 7. Alcance horizontal y tiempos.

Ángulo (°)	Alcance horizontal(m)	Tiempo(s)
10		
15		
30		
45		
60		
70		
80		

Fuente: la autora.

- ¿Cuál tiene mayor altura? ¿Por qué?
- ¿Cómo influye el ángulo en la altura?
- ¿Cómo influye el ángulo en el alcance horizontal?

Recomendaciones para el profesor:

En esta actividad, los estudiantes realizan lanzamientos con distintos ángulos, para medir el alcance horizontal en metros y el tiempo en segundos. Sabemos que el alcance horizontal es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es 45°, pero esto está condicionado a mantener el módulo de la velocidad de lanzamiento V_0 constante, por lo tanto, es necesario que los estudiantes planteen una estrategia para mantener esa rapidez inicial constante o mantener valores de rapidez lo más próximos posible al realizar la experiencia para completar la tabla 5.

Con la calculadora se puede explorar el comportamiento de la altura máxima y del alcance máximo utilizando el modo 9, que permite ingresar una función y devuelve los valores correspondientes de la misma para los valores de la variable x ingresados.

Altura máxima en función del ángulo de lanzamiento:

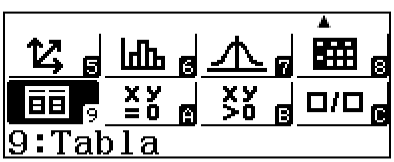
Exploremos el comportamiento de la altura máxima, cuando el módulo de la velocidad V_0 se mantiene constante y variamos el ángulo de lanzamiento.

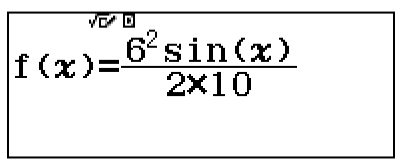
$$H_{max} = \frac{{V_0}^2 (sen\alpha)^2}{2g}$$

Utilizaremos $V_0 = 6\frac{m}{s}$; $g = 10\frac{m}{s^2}$

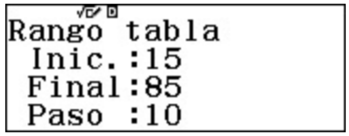
$$H_{max} = \frac{6^2 (sen\alpha)^2}{2 \times 10}$$

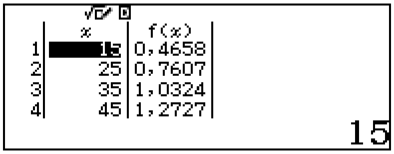
Para ingresar la función en la calculadora, consideraremos α, como la variable independiente x, y H_{max} como $f(x)$.

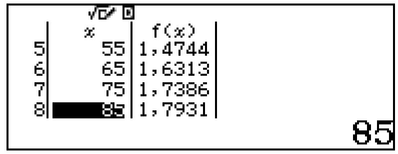




representamos los ángulos desde 15° hasta 85°, con un paso de 10°



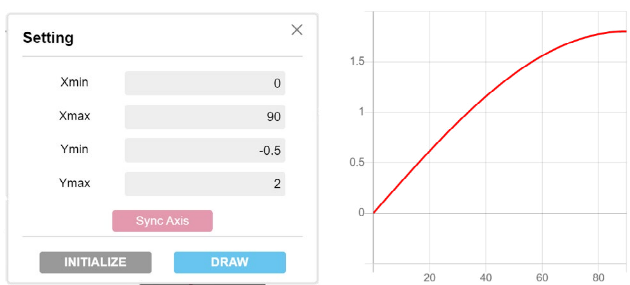




Presionando SHIFT OPTN

Se obtiene el siguiente código QR, que puede escanear con la aplicación gratuita CASIO EDU+, para obtener el gráfico de la función.

Configure la ventana de visualización de manera adecuada para observar la representación de la función.



Lo que podemos observar en la tabla y su gráfica es que a medida que el valor del ángulo aumenta, manteniendo constante la rapidez inicial, la altura máxima también aumenta. Es importante establecer el dominio de la función para el experimento que estamos realizando, Podemos orientar nuestros estudiantes con preguntas:

¿?

- ¿Cuáles son los valores de los ángulos de lanzamiento, en este experimento?
- ¿Podrían lanzar el proyectil con un ángulo de 290°?
- ¿Podrían lanzar el proyectil con un ángulo de 375°?
- ¿Podrían lanzar el proyectil con un ángulo de 230°?

Alcance máximo en función del ángulo de lanzamiento:

Exploremos el comportamiento del alcance máximo, cuando el módulo de la velocidad V_0 se mantiene constante y variamos el ángulo de lanzamiento.

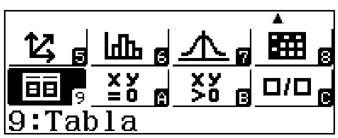
La fórmula para el alcance máximo es:

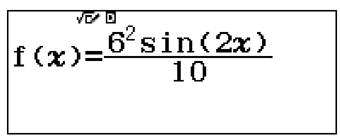
$$D = \frac{{V_0}^2 sen2\alpha}{g}$$

Utilizaremos $V_0 = 6\frac{m}{s}$; $g = 10\frac{m}{s^2}$

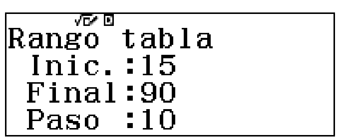
$$D = \frac{6^2 sen2\alpha}{10}$$

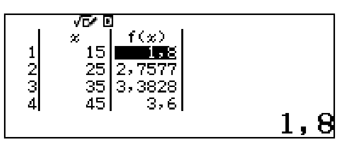
Para ingresar la función en la calculadora, consideraremos , como la variable independiente x, y D como $f(x)$.

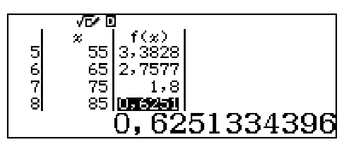




representamos los ángulos desde 15° hasta 85°, con un paso de 10°



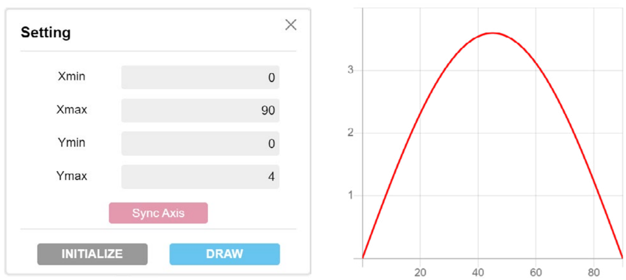




Explorando esta tabla, se puede observar que el mayor valor obtenido del alcance es 3.6 m y ocurre cuando el ángulo de lanzamiento es 45°. Otra característica que se puede explorar es que para ángulos complementarios el valor del alcance es el mismo.

Veamos la gráfica de esta función, utilizando la aplicación CASIO EDU+:

Configure la ventana de visualización de manera adecuada para observar la representación de la función.



El alcance aumenta a medida que el ángulo se aproxima a 45°, obtenemos el máximo valor del alcance para un ángulo de 45° y después vuelve a disminuir, esto se cumple siempre que la rapidez inicial se mantenga sin variación.

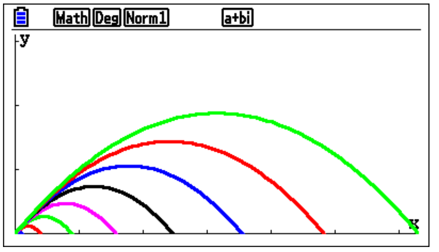
Altura máxima y alcance en función de la rapidez

Es sencillo para los estudiantes mantener constante el ángulo de lanzamiento y lanzar la bala con distinta rapidez en cada intento, de este modo se pueden recolectar valores del alcance.

La altura máxima en cada lanzamiento varía con la velocidad, la altura será mayor si es mayor la rapidez inicial, cuando se mantiene un mismo ángulo de lanzamiento.

Observe la siguiente gráfica generada en una calculadora Casio fx-CG50.

Figura 2. Gráfica en Calculadora Casio fx-CG50.



Fuente: la autora.

Las parábolas se generaron para un ángulo de lanzamiento constante igual a 50° y variando la velocidad en ms^{-1}, desde 1 hasta 7. Se puede observar que, a mayor alcance, mayor la altura máxima del tiro parabólico.

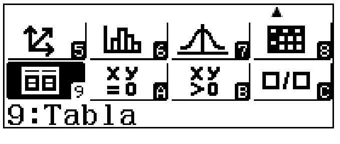
Podemos continuar explorando el movimiento parabólico, planteando las siguientes preguntas: ¿Cómo varía la altura máxima del tiro parabólico con respecto a la rapidez inicial, cuando se mantiene el ángulo de lanzamiento constante? ¿Es esta relación una función lineal? ¿Es una función cuadrática? Elabore una tabla de valores y grafique.

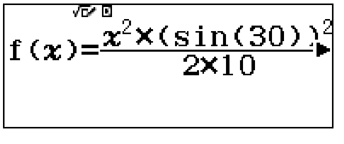
$$H_{max} = \frac{{V_0}^2(sen\alpha)^2}{2g}$$

Utilizaremos $\alpha = 30°$; $g = 10\,\frac{m}{s^2}$

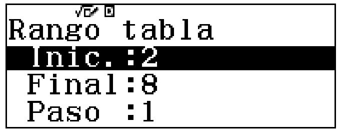
$$H_{max} = \frac{{V_0}^2(sen30)^2}{2 \times 10}$$

Para ingresar la función en la calculadora, consideraremos , como la variable independiente x, H_{max} y como $f(x)$.

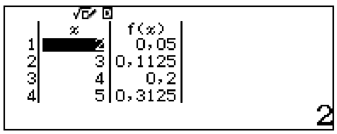


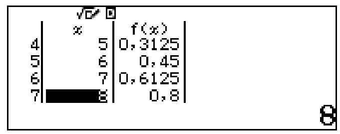


Los valores de la velocidad (x) que utilizaremos para elaborar la tabla son valores desde 2 hasta 8 con un paso de 1

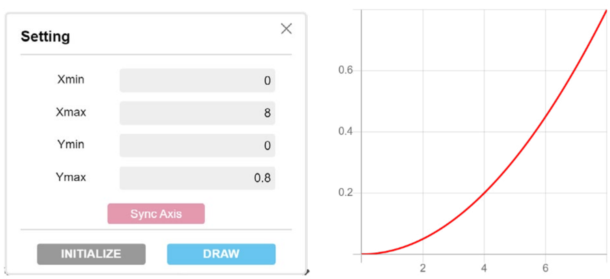


Los valores obtenidos son:





Utilizando la aplicación CASIO EDU+ y configurando la ventana de visualización con los siguientes valores, se podrá observar la gráfica que representa la variación cuadrática de a altura máxima en función de la rapidez inicial, para un ángulo de lanzamiento constante e igual a 30°.



Experiencia de aula

La experiencia se realizó con los grados décimos de la Institución Educativa Villa Flora, los estudiantes se organizaron en grupos de laboratorios (cuatro a cinco integrantes). Para la demostración y el cálculo de la altura máxima de un cuerpo con movimiento parabólico, se hicieron varios registros en una tabla con el valor de ángulos diferentes y los lanzamientos se realizaron en la cancha de la institución.

Figura 3. Estudiantes lanzando el proyectil.

Fuente: Archivo de la autora.

El objetivo de esta experiencia fue comprender que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas, fortalecer el trabajo colaborativo y la importancia de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X en la verificación de los resultados; se pudo observar el compromiso de los estudiantes, la motivación del uso de la calculadora y la construcción de material concreto.

Figura 4. Estudiantes desarrollando la experiencia.

Fuente: Archivo de la autora.

Reflexión pedagógica

Durante la experiencia se puedo evidenciar el trabajo colaborativo, la importancia de la verificación de la información con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, en la que los estudiantes observaron cómo queda la gráfica de una función cuadrática y la relación de la física con las matemáticas.

Además, si hizo evidente el interés de los estudiantes por manipular el celular junto con la calculadora para motivar la curiosidad de aprender y saber en qué más se pueden utilizar la calculadora y el celular.

También es importante para el docente para buscar estrategias e implementar en la enseñanza de las ciencias exactas, fundamentadas en las siguientes teorías:

De acuerdo con Viera (2003) David Ausubel propone la teoría del aprendizaje significativo, que parte del enfoque histórico cultural de Vygotsky, cuyo postulado central alude a la adquisición de aprendizajes a través de la relación entre los conocimientos previos (conocimientos que ya posee el estudiante), con los nuevos conocimientos (conocimientos que se espera aprenda el estudiante). Desde este punto de vista, los conocimientos deben relacionarse sistemáticamente y no pueden ser aislados. Para que se produzcan los aprendizajes significativos debe existir una predisposición por aprender, que se crea cuando los conocimientos que se deben adquirir tienen utilidad práctica. La adquisición de aprendizajes significativos no se da de manera espontánea porque es el resultado de un proceso de enseñanza activo que atraviesa por tres fases.

También se puede potenciar el desarrollo cognitivo de la mediación que constituye el apoyo que un par más experimentado o un docente o tutor brinda al estudiante para que adquiera un nuevo conocimiento. A partir de la mediación Vygotsky desarrolla el concepto de zona de desarrollo próximo, potencial y real. La zona de desarrollo real está conformada por aquellos conocimientos que el individuo posee de manera permanente como parte de su estructura mental, es decir, es la distancia entre la zona de desarrollo real y potencial y los posibles conocimientos que el individuo es capaz de adquirir a través de la mediación. La zona de desarrollo potencial involucra todos los conocimientos que podrá lograr a lo largo de su vida (Coello, 2016).

Para un docente es importante el trabajo colaborativo y el uso de la calculadora facilita el trabajo a los estudiantes para verificar las operaciones realizadas y la construcción de las gráficas con las calculadoras y el código QR es un motivador. Además, con este trabajo se logró la interacción entre el docente y el estudiante para cumplir con la ejecución del plan de área y la evaluación del estudiante se hace más formativa.

Bibliografía

Cabellos, M. (7 de junio de 2007). La física y la ingeniería de la mano... http://fisicamalkairina.blogspot.com/2007/06/

Coello, M. (2016). Material didáctico concreto para la enseñanza aprendizaje de sistemas de conversión de unidades, para estudiantes de bachillerato [trabajo de grado]. Universidad Técnica de Machala, Machala.

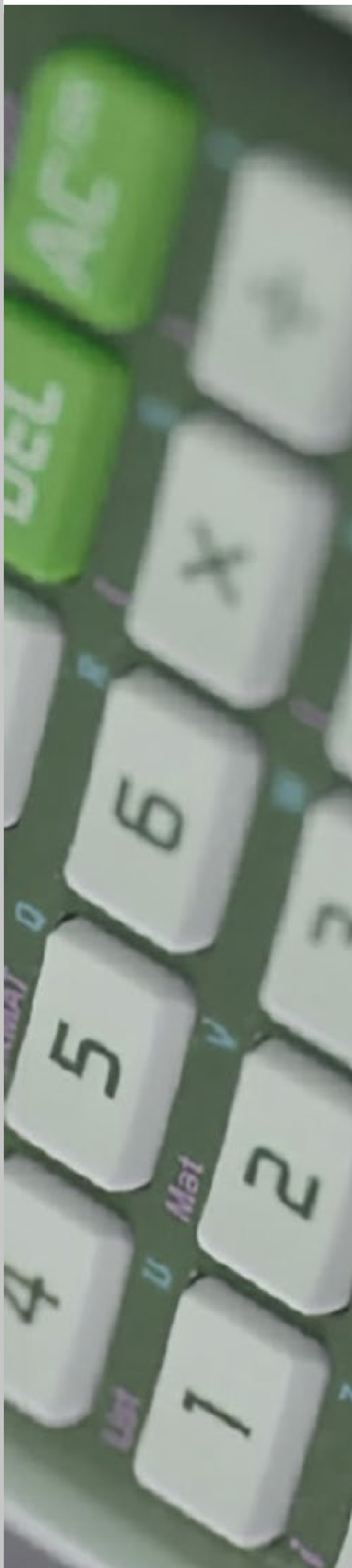
Reconocimientos

Al rector Carlos Alberto Mazo de la Institución Educativa Villa Flora y a los estudiantes participantes.

A mi familia por su apoyo incondicional, mi esposo Yamil, a mis hijos Darwin y Dahiana.

A la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia por la oportunidad de presentar este proyecto.

A Casio por su proyecto Gakuhan con el apoyo de César Lau y María Leonor Velez.



Apuestas en dos movimientos. Una experiencia pedagógica en torno al movimiento parabólico

Lorena Mena Mena
lmm1509@hotmail.com
Institución Educativa Villa Flora -
Secretaría de Educación de Medellín Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Numérico, métrico, espacial y variacional. Entorno físico: procesos físicos. Ciencia, tecnología y sociedad.	• Establezco relaciones entre las diferentes fuerzas que actúan sobre los cuerpos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme y establezco condiciones para conservar la energía mecánica. • Modelo matemáticamente el movimiento de objetos cotidianos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Ciencias naturales: Comprende que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas.	Describe el movimiento de un cuerpo (rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado, en dos dimensiones – circular uniforme y parabólico) en gráficos que relacionan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. q Predice el movimiento de un cuerpo a partir de las expresiones matemáticas con las que se relaciona, según el caso, la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. q Identifica las modificaciones necesarias en la descripción del movimiento de un cuerpo, representada en gráficos, cuando se cambia de marco de referencia.

Eje central: Cinemática (Movimiento parabólico)	
Objetivo:	Comprender que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas.
Conocimientos previos:	Razones trigonométricas de ángulos agudos Ecuaciones Funciones Cinemática (Movimiento rectilíneo uniforme, Movimiento acelerado)

Desarrollo de la situación de aprendizaje

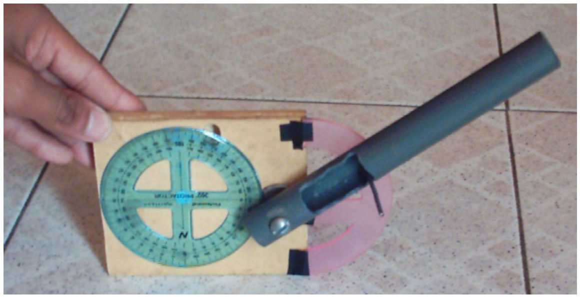
Para iniciar el trabajo es importante:

a. Formar equipos de trabajo de cuatro o cinco estudiantes
b. Registrar en la tabla los valores obtenidos después de los lanzamientos
c. Registrar los resultados en la hoja milimetrada
d. Entregar al docente la guía con las operaciones y los resultados

Actividad previa

Con los integrantes de tu equipo diseñen y construyan un lanzapelotas, como el de la figura 1. Este lanzaproyectil será utilizado en la siguiente actividad.

Figura 1. Diseño de lanzapelotas.



Fuente: Cabellos (2007).

Movimiento parabólico[1]

Fórmulas de movimiento parabólico

Distancia horizontal

$$D = V_x . T$$

Altura

$$h = V_y . t \pm \frac{g\,t^2}{2}$$

Velocidad final

$$V_f = V_y \pm g.t \quad V_f^2 = V_y^2 \pm 2gh$$

Velocidad resultante

$$V_r = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

Velocidad en y

$$V_y = V_0 \sin \alpha$$

Velocidad en x

$$V_x = V_0 \cos \propto$$

Tiempo de vuelo

$$T_v = \frac{2V_0 \sin\propto}{g} = \frac{2V_y}{g}$$

Altura máxima

$$H_{max} = \frac{V_0^2 \sin \alpha^2}{2g} = \frac{V_y^2}{2g}$$

1 Las fórmulas presentadas a continuación fueron extraídas de: Franco, Á. (s.f.). Alcance máximo en un plano inclinado. *Física con ordenador. Curso Interactivo de Física en Internet.* http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/parabolico/alcance1/alcance1.htm

Alcance horizontal $$D = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \ \cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Relación entre H y D $$\tan\alpha = \frac{4H}{D}$$

Actividad 1

En clase los estudiantes ubican el lanzaproyectil en el suelo y disparan el balín varias veces. Cada vez con distinto ángulo de inclinación respecto a la horizontal.

Registre sus observaciones en la siguiente tabla.

Ángulo (°)	Alcance horizontal(m)	Tiempo(s)

Para cada caso en la tabla calcula la velocidad inicial y la altura máxima.

Ángulo (°)	Alcance horizontal(m)	Tiempo(s)	Velocidad inicial (m/s)	Altura máxima (m)

Actividad 2

Con tu equipo de trabajo efectuén varios lanzamientos hasta responder las siguientes preguntas de acuerdo con lo observado en los distintos lanzamientos.

¿?

- ¿Cuál tiene mayor altura? ¿Por qué?
- ¿Cómo influye el ángulo en la altura?
- ¿Cómo influye el ángulo en el alcance horizontal?
- ¿Cuál de los lanzamientos se demora más en caer?
- ¿Qué pasa cuando los ángulos son complementarios?

¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? y ¿por qué llegas tarde al mismo?

Paula Andrea Barrientos Tascón
pbarrientos1028@yahoo.es
Institución Educativa San Pablo -
Secretaría de Educación de Medellín
Colombia, CO.

Resumen:
En esta guía el docente encontrará una forma contextualizada de aplicar la ley de seno y la del coseno, con la estimación, la modelación y la calculadora para representar recorridos con ayuda de objetos matemáticos como el triángulo y herramientas tecnológicas como el servidor Google Maps y la calculadora científica. Esta situación didáctica le permitirán al estudiante desarrollar habilidades matemáticas y potenciar el trabajo cooperativo entre pares. La metodología que se propone es partir de los saberes previos de los estudiantes y se realizará con un documento taller asignado para cada equipo de trabajo, el cual es fundamental para los avances de la clase. En este apartado es menester tener la participación individual del estudiante y su participación colectiva.

Palabras clave:
Triángulos, Google Maps, ley de seno, ley de coseno, calculadora científica Casio Classwiz fx-991LA X.

Introducción

La presente guía de aprendizaje surgió de la necesidad de contextualizar las aplicaciones de la trigonometría en el grado décimo y hacer uso de las herramientas tecnológicas que la mayoría de las personas poseen en su ordenador o, incluso, en el celular.

El tema que se despliega en la guía es “Las aplicaciones de las funciones trigonométricas”, temática que está relacionada en los Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje-Versión 2 (MEN, 2006; MEN, 2016), para el grado décimo. Además, se contempla dentro del PEI de la Institución Educativa San Pablo en la malla curricular en el segundo periodo.

El objetivo es que el estudiante formule, compare y ejercite una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con el uso de la ley de seno y la del coseno con ayuda de la calculadora.

El anterior objetivo le permitirá al estudiante realizar abstracciones de las matemáticas y saber que las situaciones que puede modelar por medio de triángulos, las resuelve con los conceptos trigonométricos trabajados en clase. Además, se vincula con su vida cotidiana porque le mostrará al estudiante cómo hacer el uso adecuado de la tecnología, en este caso los GPS y optimizar el tiempo en situaciones que se les puedan presentar.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Pensamiento métrico y sistemas de medidas.	• Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real con relaciones y funciones trigonométricas. • Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. Con otras áreas: • Con Lengua Castellana: Produzco textos argumentativos que evidencian mi conocimiento de la lengua y el control sobre el uso que hago de ella en contextos comunicativos orales y escritos. • Con Tecnología: Propongo, analizo y comparo diferentes soluciones para un mismo problema y explico su origen, ventajas y dificultades. • Con Ciencias (componente Físico): Utilizo las matemáticas para modelar, analizar y presentar datos y modelos en forma de ecuaciones, funciones y conversiones.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.	• **Interpretar:** Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones. • **Formular:** Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas. • **Argumentar:** Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos.

Eje central: Aplicaciones de las funciones trigonométricas

Objetivo:	Es que el estudiante formule, compare y ejercite una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con el uso de la ley de seno y la del coseno con ayuda de la calculadora.
Conocimientos previos:	Razones, proporciones, medición y clasificación de ángulos, velocidad, conversión de unidades, ley de seno y ley de coseno.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	4 horas
Recursos:	• Calculadoras Classwiz - fx 991LA X • Fotocopia (taller-guía) • Fotocopias (Google Maps) • Regla, transportador, lápiz, borrador, hojas cuadriculadas. • Cuaderno con notas de clase. • Un computador con internet (docente)

Se inicia la clase indagando a los estudiantes por sus saberes previos, en torno a la clasificación de triángulos que le permitirán al docente evidenciar los aprendizajes anteriores y necesarios para la clase.

Luego, se explicará detalladamente la guía y se les recuerda a los estudiantes asignar los roles para que cada uno evidencie la importancia del trabajo cooperativo. Con anterioridad a la clase, se solicitará a los estudiantes los materiales necesarios para el desarrollo de la clase.

La actividad central de la guía propone que los estudiantes, en su grupo de trabajo, escojan el compañero que más a menudo llega tarde al colegio (pregunten la dirección de su casa y un punto estratégico por el que realiza el recorrido para llegar al colegio). Para trazar el triángulo ABC (con anterioridad se formaron los grupos y se escogió el compañero) en el Google Maps se ubica la Institución Educativa San Pablo y la dirección de la casa del estudiante que se eligió; se selecciona el modo de desplazamiento, en el caso de mis estudiantes fue caminando, para realizar la impresión con el tiempo de recorrido y la distancia en metros que brinda el Google Maps. Los anteriores puntos corresponden a dos vértices del triángulo y el tercero es un punto estratégico que escoge el estudiante por donde realiza su recorrido para trazar el triángulo ABC.

Con la información de cada grupo se imprime el mapa de cada situación a una escala de 100 m y se incluye la escala de conversión establecida, posteriormente, cada grupo recibe tres copias idénticas de la situación con los dos puntos estratégicos.

Después de resolver las situaciones con las tres formas planteadas que se describen en la guía del estudiante, al final de este libro, se espera que los estudiantes redacten una situación problema que podría ser resuelta con los cálculos y medidas encontrados en el desarrollo de esta actividad y socialicen dos conclusiones que den cuenta del propósito u objetivo planteado para la clase.

Finalmente, se les propone replicar la actividad en cada una de sus casas que corresponde a la evaluación individual y tiene como propósito involucrar a sus familias en el aprendizaje de los estudiantes.

A continuación, se plantea el compromiso para la clase siguiente:

a. Con uno de tus padres o familiares realiza la actividad desarrollada en clase, para determinar la velocidad y la distancia que existe entre tu casa y su lugar de trabajo.
b. Indaga por las rutas que toma y los medios que utiliza para llegar diariamente a cumplir sus labores y el tiempo en realizar este desplazamiento.
c. Formula, compara y ejercita la situación descrita por tus padres o familiares y traza el triángulo ABC.
d. Determina los lados y los ángulos con la ley de seno y la del coseno.
e. Después de realizados los cálculos, determina la velocidad y compara con la obtenida en Google Maps.
f. Redacta un enunciado o contexto para la situación.
g. Escribe dos conclusiones sobre la actividad realizada.

Experiencia de aula

En una de las clases anteriores a esta práctica planteo la situación para mi dirección como ejemplo de clase:

En primer lugar, se realizó la proyección en el tablero y se midió con regla y transportador.

Contexto: la profesora Paula diariamente se desplaza desde su casa, ubicada en la calle 25 del Barrio Cabañas, en el municipio de Bello, a su lugar de trabajo; la Institución Educativa San Pablo está ubicada en la dirección Cl. 97 #36-38, pero toma de ruta del Puente de la Madre Laura, para llegar, según ella, mucho más rápido. La siguiente imagen corresponde al recorrido realizado por la docente.

Figura 1. Triangulación de la ruta hacia la Institución Educativa.

Fuente: elaborado con Google Maps.

¿?

Responde:

a. ¿Qué distancia hay entre la calle 25 y el Puente de la Madre Laura? Utiliza la regla
b. ¿Cuál es la mediad del ángulo A? Utiliza el transportador
c. ¿Cuál es la mediad del ángulo B? Utiliza el transportador
d. Utiliza la ley de seno para determinar la distancia de la calle 25 y la Institución Educativa San Pablo (la longitud del lado a).
e. Utiliza la misma situación y aplica la ley de coseno.

Esta guía se desarrolla en los grados 10º de la Institución Educativa San Pablo con tres grupos que tienen un promedio de estudiantes de 32 a 40 , con edades que oscilan entre los 14 y 18 años. Decidí documentar esta actividad para la evaluación docente que se nos realiza y de una vez aprovechar la experiencia y aplicarla en el proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio, que me ha permitido diseñar y aplicar estrategias con la calculadora Classwiz, estrategia que busca que los estudiantes adquieran aprendizajes significativos y se apropien de las nuevas herramientas, por lo tanto, en las clases se permite el uso de esta herramienta.

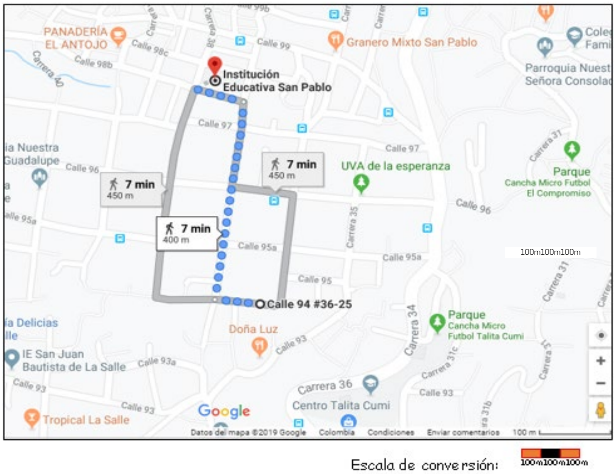
Esta estrategia ha permitido que la mayoría de los estudiantes muestre interés por el conocimiento matemático y, cuando se les presenta una dificultad, indagan soluciones.

En la actividad planteada anteriormente, la dificultad inicial fue establecer la escala para comprobar la velocidad entregada por el servidor Goolge Maps. La solución que se le dio a la dificultad fue establecer las imágenes impresas a escala de 100 m y a cada copia se le adjuntó la escala para realizar la conversión.

Se propone la actividad grupal y la actividad individual con los lugares en los que laboran los padres de los estudiantes.

Ejemplo de las imágenes de Google Maps entregada a uno de los equipos:

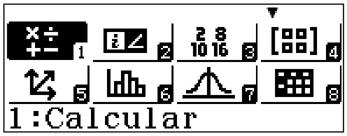
Figura 2. Ruta a la Institución Educativa.



Fuente: elaborado con Google Maps.

Recordar para uso de la calculadora:

Modo 1:

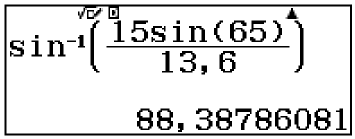


Para calcular ángulos:

$$\frac{sen\ 65°}{13{,}6} = \frac{sen\ B}{15} \quad realizando\ el\ despeje\ B = sen^{-1}\left(\frac{15\ sen\ 65°}{13{,}6}\right)$$

Pasos internos:

Entrada y salida en la pantalla:

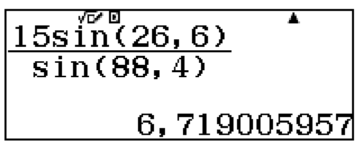


Para calcular distancias:

$$\frac{sen\ 88{,}4°}{15} = \frac{sen\ 26{,}6}{a} \quad \textit{realizando el despeje para el lado } a = \frac{15sen\ 26{,}6}{sen\ 88{,}4}$$

Pasos internos:

Entrada y salida en la pantalla:



Evidencias de aula

Inicio de clase y explicación de la guía:

Figura 3. Estudiantes leyendo la situación.

Fuente: archivo de la autora.

Distribución en equipos y desarrollo de la guía:

Figura 4. Estudiantes solucionando la experiencia.

Fuente: archivo de la autora.

Se finaliza la socialización con las intervenciones de cada equipo, con el propósito de que cuenten aciertos y desaciertos durante la puesta en escena de la actividad propuesta.

Reflexión pedagógica

Pensar en situaciones que les permitan a mis estudiantes adquirir aprendizajes significativos, de una forma directa, deja entrever la aplicación de conocimientos adquiridos y resolver situaciones que, al inicio, consideraba que no iban a tener dificultad ni para mí ni para ellos, pero, en el momento de ser planteadas pueden encontrarse situaciones que me lleven a pensar en qué hacer. Aunque los desplazamientos planteados en la actividad no sean rectos, se pueden realizar aproximaciones que permiten que los cálculos sean aproximados y se ajusten para aplicar la ley de seno y la del coseno en situaciones contextualizadas en la vida de los estudiantes.

Esta clase inició con el momento saber (conocer sus saberes previos sobre la clasificación de triángulos). Para el desarrollo de la clase se tuvieron en cuenta los saberes previos de los estudiantes, su participación individual y en grupo. Normalmente en mis clases siempre hay trabajo individual y trabajo grupal para aumentar la eficacia del aprendizaje, la restructuración cognitiva y reducir el temor del grupo. Además, para que cada estudiante mejore su autoestima y aprenda a adquirir la crítica constructiva.

Para alcanzar el propósito se utilizó el documento taller que va guiando a los estudiantes en el trabajo propuesto para afianzar la ley de seno y la del coseno y la determinación de la velocidad, conocida la distancia y el tiempo transcurrido en hacer el desplazamiento.

Ahora bien, participar en el proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio con el diseño y la aplicación de estrategias con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, me ha permitido ver la calculadora como una herramienta que mis estudiantes pueden utilizar para comprobar y optimizar el tiempo en procedimientos que ya saben usar y que tienen estructurados en sus mentes.

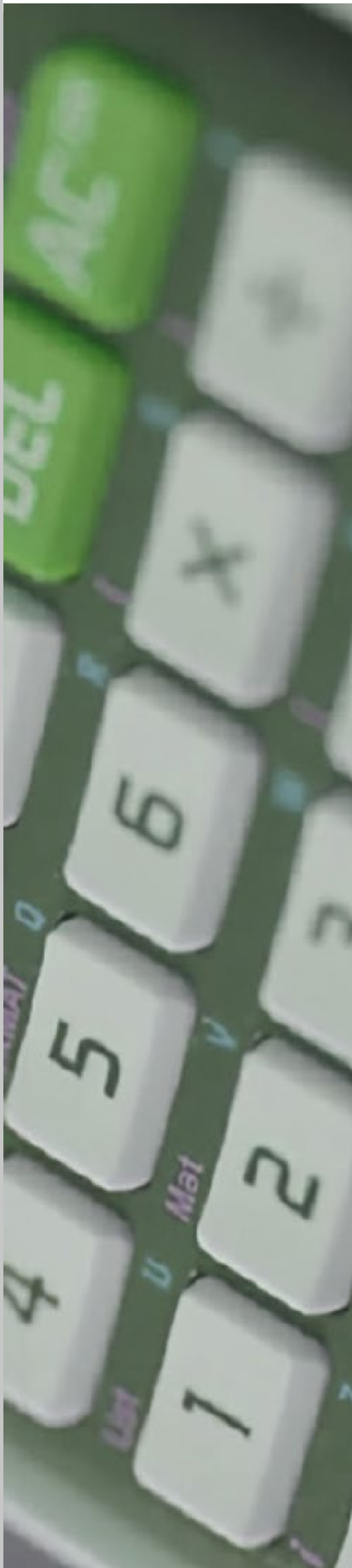
Finalmente, surgieron situaciones especiales en la clase: los estudiantes realizaron muy bien sus roles, aunque con las dificultades propias para determinar la velocidad para relacionarla con la velocidad brindada por la aplicación Google Maps; por las conversiones y la escala a la que fue presentada el mapa. Esta clase les sirvió a los estudiantes para quitar los temores que tienen por el área y ver que las matemáticas es aplicable en sus vidas. Además, a optimizar sus tiempos en desplazamientos y lo aprendido lo pueden aplicar con sus familias.

Bibliografía

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Magisterio.
MEN. (2016). *Derechos básicos competencias en matemáticas.* Panamericana formas e impresiones S.A..

Reconocimientos
A mi familia, por su paciencia cuando estoy en las planeaciones para implementar en mi labor docente y a mis estudiantes por realizar las actividades que les propongo.

Guía **estudiante**



¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? y ¿por qué llegas tarde al mismo?

Paula Andrea Barrientos Tascón
pbarrientos1028@yahoo.es
Institución Educativa San Pablo -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Pensamiento métrico y sistemas de medidas.	• Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real con relaciones y funciones trigonométricas. • Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. Con otras áreas: • Con Lengua Castellana: Produzco textos argumentativos que evidencian mi conocimiento de la lengua y el control sobre el uso que hago de ella en contextos comunicativos orales y escritos. • Con Tecnología: Propongo, analizo y comparo diferentes soluciones para un mismo problema y explico su origen, ventajas y dificultades. • Con Ciencias (componente Físico): Utilizo las matemáticas para modelar, analizar y presentar datos y modelos en forma de ecuaciones, funciones y conversiones.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.	• Interpretar: Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones. • Formular: Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas. • Argumentar: Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos.

Eje central: Aplicaciones de las funciones trigonométricas

Objetivo:	Es que el estudiante formule, compare y ejercite una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con el uso de la ley de seno y la del coseno con ayuda de la calculadora.
Conocimientos previos:	Razones, proporciones, medición y clasificación de ángulos, velocidad, conversión de unidades, ley de seno y ley de coseno.
Recursos:	Calculadoras Fotocopia (taller-guía) 3. Fotocopias (Google Maps) Regla, transportador, lápiz, borrador, hojas cuadriculadas. Fotocopia (rúbrica de evaluación). Cuaderno con notas de clase. Un computador con internet (docente).

Desarrollo de la situación de aprendizaje

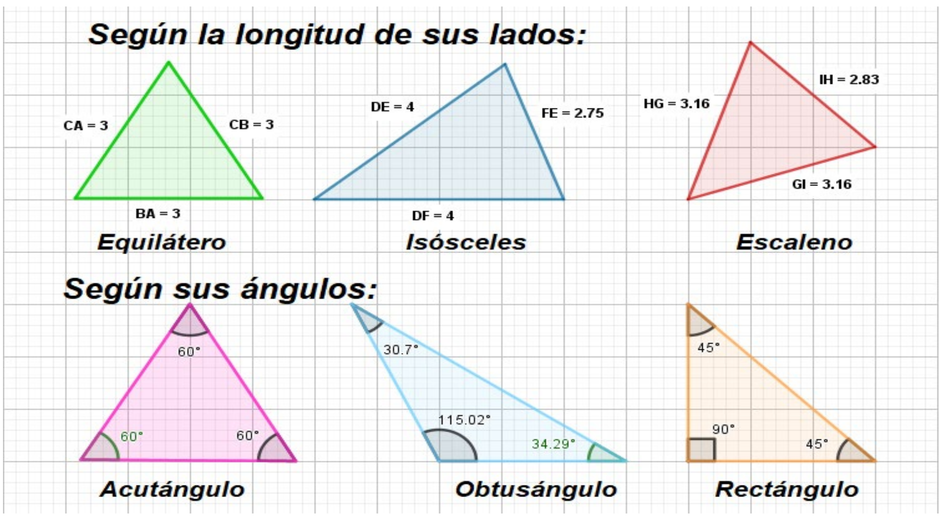
Actividad 1. Aprendizajes previos

¿A qué familia pertenezco, según mis lados y según mis ángulos?

- **Objetivo:** Reconocer las características de los triángulos y su clasificación, según sus lados y sus ángulos.
- **Materiales:** fotocopia, regla, transportador y lápiz.

Conceptos para afianzar

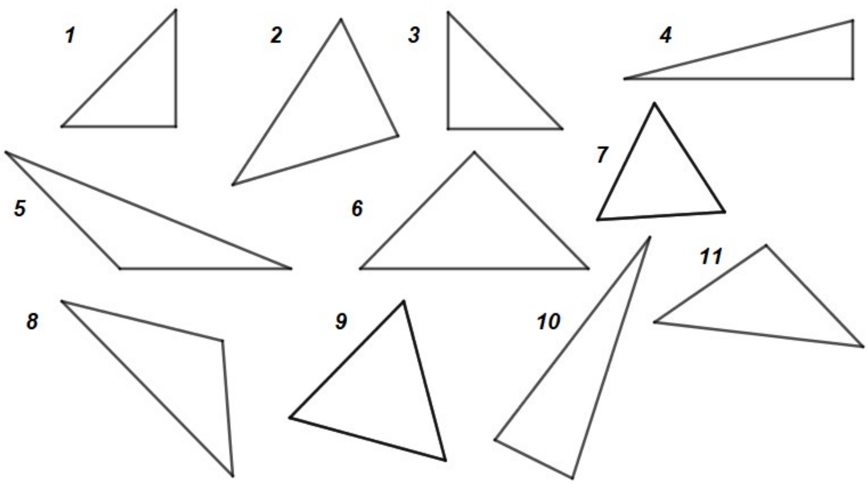
Figura 1. Clasificación de los triángulos.



Fuente: la autora diseñando en Geogebra.

Mide los lados y los ángulos de los siguientes triángulos y clasifícalos según sus lados y sus ángulos:

Figura 2. Clasificación de los triángulos.



Fuente: la autora diseñando en Geogebra.

Completa la tabla con la anterior información:

Triángulo	Clasificación según sus lados	Clasificación según sus ángulos
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

Actividad 2. Guía de aprendizaje

¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? Y ¿por qué llegas tarde al mismo?

- **Objetivo:** Formular, comparar y ejercitar una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con la ley de seno y la del coseno con ayuda de la calculadora.
- **Materiales:** fotocopia, regla, transportador, calculadora y lápiz.

Reconozcamos la herramienta Google Maps

Es una aplicación que ofrece imágenes de mapas que se pueden deslizar en la pantalla, **Google Maps obtiene esas imágenes desde satélites al rededor del mundo.** Asimismo, también se apoya en una herramienta integrada conocida como Street View para generar imágenes de calle.

Google Maps permite que se tracen rutas de viaje siguiendo un mapa real o cartográfico de forma online. En estos casos, los usuarios **pueden visualizar los kilómetros recorridos**, al mismo tiempo que se incluye el tiempo del viaje, rutas alternativas y el tipo de transporte a utilizar. Pero, también tiene otras funcionalidades como la facilidad de compartir una localización exacta. Google Maps ofrece la capacidad de hacer acercamientos o alejamientos para mostrar el mapa. El usuario puede controlar el mapa con el mouse o las teclas de dirección para moverse a la ubicación que desee. Los usuarios pueden ingresar una dirección, una intersección o un área en general para buscar en el mapa. Además de visualizar mapas callejeros, de satélite o de relieve de cualquier parte del mundo, se puede crear nuestros propios mapas personalizados y almacenarlos en nuestra cuenta, de manera que se consulten en diferentes tiempos o compartirlos con nuestros contactos. A los elementos que se incluyen en los mismos se pueden incorporar textos, imágenes, videos o cualquier componente multimedia. A esto se le llama Geolocalización de contenidos.

Tomado de: APPYWEB, Agencia de marketing online. (s.f.). *Google Maps.*
https://www.appyweb.es/diccionario/google-maps/

Propongo desarrollar la guía en el siguiente orden:

a. Distribución en equipos de cuatro estudiantes.
b. Asignar rol a cada uno de los compañeros: (líder, secretario, facilitador y el cronometrador).
c. Lectura y comprensión de la guía de aprendizaje.
d. Desarrollo de las actividades planteadas en la guía.

e. Redactar un contexto para la situación planteada.
f. Conclusiones de la guía de aprendizaje.
g. Rúbrica de evaluación.
h. Socialización de la guía.

Desarrollo de la guía

Actividades

a. En tu grupo de trabajo escoge el compañero que más a menudo llega tarde al colegio (pregunta la dirección de su casa y un punto estratégico por el que realiza el recorrido para llegar al colegio), luego, en la primera de las fotocopias de Google Maps proporcionadas por el docente, marca los puntos ABC y traza el triángulo.

   El punto A será la ubicación de la Institución Educativa, el punto B será la dirección de su casa y el punto C será un punto estratégico cualquiera del recorrido que realiza para llegar al colegio.

b. Mide dos ángulos con el trasportador y un lado del triángulo con la regla. Luego, calcula el tercer ángulo con el teorema fundamental de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y, para finalizar, calcula los dos lados restantes, con la ley de seno y con el uso de la calculadora.

c. En la segunda fotocopia de Google Maps traza de nuevo el triángulo ABC, mide un ángulo con el transportador y los dos lados que forman el ángulo y calcula el lado faltante y los dos ángulos restantes aplicando la ley de coseno haciendo uso de la calculadora.

d. En la tercera fotocopia de Google Maps, nuevamente, traza el triángulo ABC, realiza las medidas con el transportador para todos los ángulos y para todos los lados con la regla.

   Luego de haber realizado cada una de las anteriores actividades , compara los resultados obtenidos en las tres fotocopias y responde:

   - ¿Qué diferencia existe entre utilizar la ley de seno y la ley de coseno?
     ____
     ____
     ____
     ____.

- ¿Los lados tienen el mismo valor al utilizar ambas leyes?

____
____
____
____.

- ¿Los ángulos tienen el mismo valor al utilizar ambas leyes?

____
____
____
____.

- ¿Qué diferencias encuentras entre utilizar las leyes, la regla y el transportador en los resultados obtenidos?

____
____
____
____.

e. Determina la velocidad a la que transcurrió el recorrido. (Solicita al docente el tiempo y la distancia que proporciona el servidor Google Maps para tu recorrido y realiza la conversión de unidades).

   ¿Qué diferencia encuentras entre este valor y el determinado por el GPS de Google Maps?

____
____
____
____.

f. Redactar una situación problema contextualizada para el triángulo anterior trabajado.

____
____
____
____.

g. Redacta dos conclusiones que den cuenta del objetivo del taller.

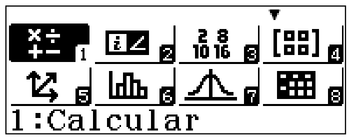
____
____
____
____.

h. Socializar la actividad.

____
____
____
____.

Recordar para uso de la calculadora:

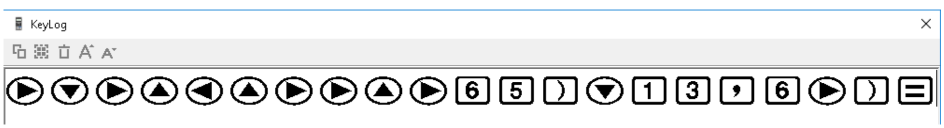
Modo 1:



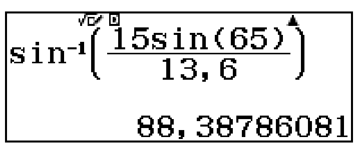
Para calcular ángulos:

$$\frac{sen\ 65°}{13{,}6} = \frac{sen\ B}{15} \quad realizando\ el\ despeje\ B = sen^{-1}\left(\frac{15\ sen\ 65°}{13{,}6}\right)$$

Pasos internos:



Entrada y salida en la pantalla:

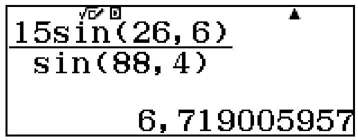


Para calcular distancias:

$$\frac{sen\ 88{,}4°}{15} = \frac{sen\ 26{,}6}{a} \quad realizando\ el\ despeje\ para\ el\ lado\ a = \frac{15 sen\ 26{,}6}{sen\ 88{,}4}$$

Pasos internos:

Entrada y salida en la pantalla:



Compromiso individual para la siguiente clase:

a. Con uno de tus padres o familiares realiza la actividad de la clase para determinar la velocidad y la distancia que existe entre tu casa y su lugar de trabajo.
b. Indaga por las rutas que toma y los medios que utiliza para llegar diariamente a cumplir sus labores y el tiempo de este desplazamiento.
c. Modela la situación descrita por tus padres o familiares y traza el triángulo ABC.
d. Determina los lados y los ángulos con la ley de seno y la de coseno.
e. Después de realizados los cálculos, determina la velocidad y compara con la obtenida en Google Maps.
f. Redacta un enunciado o contexto para tu situación.
g. Escribe dos conclusiones sobre la actividad realizada.

Análisis del crecimiento de una planta

Jeyson Emilio Palacio Vásquez
jeysonemilio@gmail.com
Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Resumen:
Para mejorar el aprendizaje en el aula se propone a los estudiantes un trabajo teórico práctico en el que hay uso de tecnología. Los estudiantes siembran una planta para realizar un análisis variacional del número de hojas, altura y grosor del tallo durante su crecimiento. Se enseña el manejo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X para realizar gráficos con el propósito de analizar y observar la variación del crecimiento de la planta con respecto al tiempo. Los participantes son del grado 11-4 y pertenecen a la técnica de Recursos Naturales de la Institución Educativa Antonio Derka.

Palabras clave:
Crecimiento, análisis, datos, variables.

Introducción

El propósito del trabajo es que los estudiantes realicen la observación del crecimiento de una planta y recopilen datos (altura, grosor del tallo y número de hojas) durante un periodo de tiempo para realizar una descripción y análisis de los cambios de estas características en el tiempo. Se utilizó una calculadora científica como medio para procesar, presentar y visualizar las relaciones entre las variables, para luego interpretar y analizar los cambios de dichas variables en el tiempo. Esta actividad se realizó con estudiantes de grado Once de la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. • Uso comprensiblemente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.		• Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.)
Eje central: Estudio del crecimiento de una planta.		
Objetivo:	Modelar el crecimiento de una planta a través de la regresión lineal.	
Conocimientos previos:	• Saber sembrar una planta y cultivarla. • Matemáticas grado noveno. • Concepto de función. • Ubicación de datos en el plano cartesiano. • Nociones de correlación de variables en estadística. • Gráfica de funciones en un Plano Cartesiano. • Interpretación de una gráfica en el Plano Cartesiano. • Manejo del calibrador pie de rey	

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	Con el grupo de estudiantes se realizó la recolección de datos durante 3 meses. Desarrollo en clase: 6 horas.
Recursos:	Espacio para plantar Lápiz, borrador, saca punta y papel Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X Semillas de orégano

Como se indica en la Guía del estudiante, los estudiantes sembraron las semillas de orégano y siete días después la germinación de estas, los estudiantes midieron la altura y el grosor, además se contó el respectivo número de hojas.

A continuación, se presentan las tablas de los registros de datos que los estudiantes presentaron en este proyecto.

Tabla 1. Toma de datos 1.

Proceso de germinación	Cantidad (semillas)	Fecha de germinación	Sustrato de siembra	Fecha de siembra	Firma de quien registra
Semillas	15	26/02/16	Tierra abonada	14/02/19	Brahian

Alto	Grosor	Número de hojas
1.5	0	2
4	0.3	3
6.3	0.84	8
9.7	1.2	11
11	2.7	13

Fuente: el autor.

Tabla 2. Plantilla de orégano #1.

Monitoreo	Fecha	Altura (cm)	Grosor tallo (cm)	# De hojas
1	1/03	0.5 cm	×	2
2	12/03	1	×	2
3	22/04	1.5	×	2
4	29/04	2,5	×	4
5	11/06	35	1,2	12

Fuente: el autor.

Tabla 3. Plantilla de orégano #2.

Monitoreo	Fecha	N. De datos	Altura (cm)	Grosor tallo (cm)	# De hojas
1	1/03	1	0.5 cm	×	2
2	12/03	2	1	×	2
3	22/04	3	1.5	×	2
4	29/04	4	2,5	×	4
5	11/06	5	16	0.9	8

Fuente: el autor.

Tabla 4. Toma de datos 4.

Fecha	Día	Altura (cm)	Grosor tallo (cm)	# De hojas
22/03	0	7	0.5	4
29/03	7	13	1	5
5/04	14	16	2.5	10
19/04	28	20	2.5	18
26/04	35	22	3	20
17/05	56	30	3	27
31/05	70	33	3.5	30

Fuente: el autor.

Como se puede observar en las tres primeras imágenes, los datos recopilados no están completos, es importante realizar el seguimiento y controlar que los estudiantes registren toda la información durante el crecimiento de la planta. A pesar de la toma incompleta de datos, es posible relacionar los datos que sí fueron registrados y pedirles el modelo de regresión, por ejemplo, entre el número de hojas y la altura. En esta propuesta relacionaremos cada una de las variables con el tiempo, pero también se pueden relacionar entre sí las otras magnitudes.

En la tabla 4 se presentan cuatro variables que se pueden relacionar: tiempo (fecha), altura, grosor y número de hojas. Se construyen gráficas para observar el comportamiento de cada una de ellas a medida que transcurre el tiempo. Se puede analizar altura de la planta con tiempo, grosor de la planta con tiempo y número de hojas con respecto al tiempo.

Actividad 1

Sembrar las semillas de la planta orégano.

Tan pronto la planta germine tome la fecha y espere siete días para la toma de datos por primera vez, y en adelante, cada siete días, aproximadamente.

Los datos que se van a recolectar son: número de hojas, altura de la planta y grosor del tallo. La tabla que vamos a utilizar en la toma de datos es la siguiente:

Tabla 5. Registro de datos tomados.

Fecha	Altura de la planta (cm)	Grosor del tallo (cm)	Número de hojas
22/03	7	0.5	4
29/03	13	1	5
5/04	16	2.5	10
19/04	20	2.5	18
26/04	22	3	20
17/05	30	3,2	27
31/05	33	3.5	30

Fuente: el autor.

Actividad 2

Con los datos de la tabla 5 asigne el número de día correspondiente a cada fecha, y complete la tabla 6. Por ello, deberá contar o calcular la cantidad de días entre las dos fechas. Asigne valor cero a la fecha en que realizó la primera observación.

Tabla 6. Registro de datos 2.

Fecha	Día #
22/03	0
29/03	7
5/04	14
19/04	28
26/04	35
17/05	56
31/05	70

Fuente: el autor.

Actividad 3

Con los datos de la tabla 5 y la tabla 6 complete la siguiente tabla 7 con los correspondientes valores, según los valores registrados.

Tabla 7. Registro de datos.

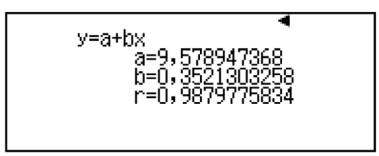
Día # (x días)	Altura de la planta (y cm)
0	7
7	13
14	16
28	20
35	22
56	30
70	33

Fuente: el autor.

Determinaremos la ecuación de la recta de regresión lineal para la altura y tiempo.

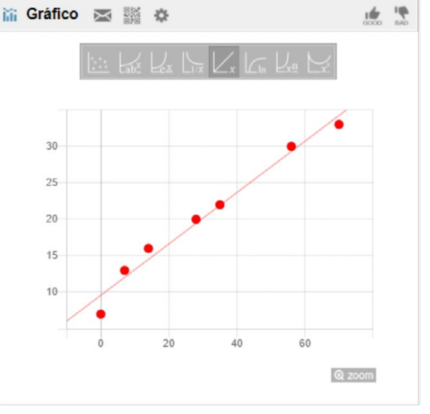
Esto se puede realizar en el modo Estadística de la calculadora.

Cálculo de regresión de altura vs tiempo



Función de altura: $h(t) = 9,58 + 0,35t$

Gráfica de dispersión y recta de regresión altura vs tiempo
por medio de la aplicación CASIO EDU+



La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es $y = a + bx$

a. Escriba el valor de a
   9,58

b. Escriba el valor de b
   0,35

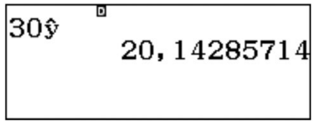
c. Escriba el valor de r
   0,99

d. Interprete el valor de r
   Correlación positiva perfecta, a mayor valor del tiempo mayor altura, el incremento de la altura es proporcional al tiempo transcurrido en días, en este caso cada día la planta crece 0,35 cm

e. Escriba la ecuación de la recta de regresión.

$$y = 9.58 + 0.35x$$

f. Estime la altura de la planta el día 30



Este cálculo se puede hacer

$$y = 9.58 + 0.35 \times (30)$$

La altura de la planta el día 30 es 20,14 cm

Actividad 4

Con los datos de la tabla 5 y la tabla 6 complete la siguiente tabla 8 con los correspondientes valores, según los valores registrados.

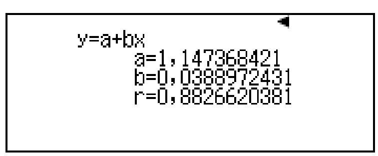
Tabla 8. Datos diligenciados.

Día # (x días)	Grosor del tallo (y cm)
0	0.5
7	1
14	2.5
28	2.5
35	3
56	3,2
70	3.5

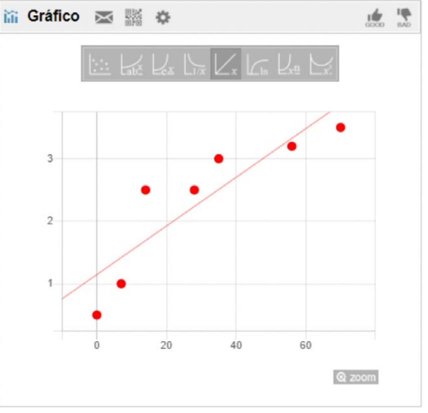
Fuente: el autor.

Determinaremos la ecuación de la recta de regresión lineal para el grosor y tiempo. Esto se puede realizar en el modo Estadística de la calculadora,

Cálculo de regresión de grosor vs tiempo



Gráfica de dispersión y recta de regresión altura vs tiempo por medio de la aplicación CASIO EDU+



La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es $y = a + bx$

a. Escriba el valor de a
   1,15

b. Escriba el valor de b
   0,04

c. Escriba el valor de r
   0,88

d. Interprete el valor de r

   Correlación positiva considerable, a mayor valor del tiempo mayor altura; el incremento de la altura no es estrictamente proporcional al tiempo transcurrido en días, en este caso cada día la planta crece 0,04 cm en promedio.

e. Escriba la ecuación de la recta de regresión

$$y = 1{,}15 + 0{,}04x$$

Estime el grosor en cm correspondiente al día 45

```
45ŷ
          2,897744361
```

Según el modelo de regresión el grosor es 2,90 cm

$$y = 1{,}15 + 0{,}04 \times 45$$

Actividad 5

Con los datos de la tabla 5 y la tabla 6 complete la siguiente tabla 9 con los correspondientes valores, según los valores registrados.

Tabla 9. Registro de datos.

Día # (x días)	Número de hojas
0	4
7	5
14	10
28	18
35	20
56	27
70	30

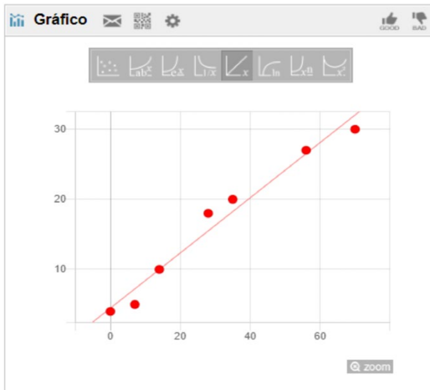
Fuente: el autor.

Determinaremos la ecuación de la recta de regresión lineal para el grosor y tiempo. Esto se puede realizar en el modo Estadística de la calculadora,

Cálculo de regresión de número de hojas vs tiempo

```
y=a+bx
  a=4,473684211
  b=0,3937343358
  r=0,9850856083
```

Gráfica de dispersión y recta de regresión número de hojas vs tiempo por medio de la aplicación CASIO EDU+



La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es $y = a + bx$

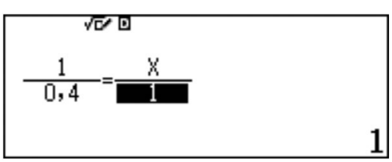
a. Escriba el valor de a
   4,47

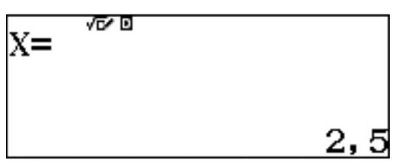
b. Escriba el valor de b
   0,40

c. Escriba el valor de r
   0,99

d. Interprete el valor de r

e. Correlación positiva perfecta, a mayor valor del tiempo mayor altura, el incremento de la cantidad de hojas es proporcional al tiempo transcurrido en días, en este caso cada día la cantidad de hojas de la planta aumenta en 0,4. En este caso necesitamos una mejor interpretación porque el número de hojas es siempre un valor entero, entonces podríamos decir que aumenta una hoja cada 2,5 días.

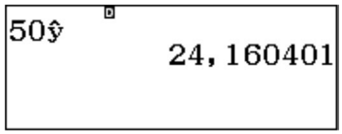




f. Escriba la ecuación de la recta de regresión

$$y = 4{,}47 + 0{,}40x$$

g. Estime el número de hojas correspondiente al día 50



$$y = 4{,}47 + 0{,}40 \times 50$$

Experiencia de aula

En la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo se encuentra implementada la media técnica de Recursos Naturales; a partir de sus propósitos se les plantea a los estudiantes hacer un análisis variacional observando el crecimiento de una planta y analizar los cambios que en el tiempo, con el modelo de regresión lineal para las variables.

Para el desarrollo de la clase se dispone de un salón con computador y televisón para ver las gráficas que se producen en el computador y el promedio de asistencia de los estudiantes es de 20 a 25.

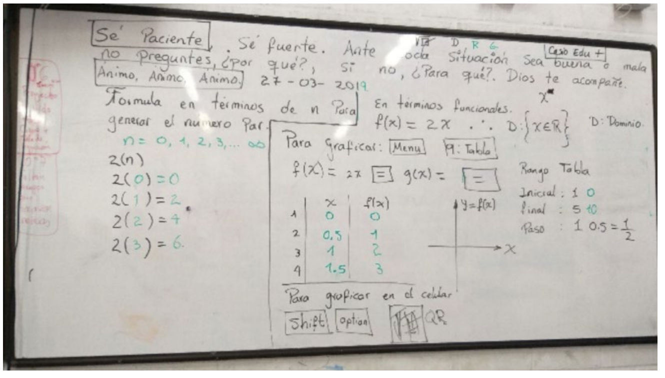
Se hace una siembra de plantas para las que se les tomará las medidas. Se les explica a los estudiantes el manejo del pie de rey como regla de medida para la toma de datos. Se les pide que tomen medidas cada siete días sobre altura, número de hojas y grosor de la planta.

Se le enseña al grupo el manejo elemental de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X como una alternativa para efectuar procedimientos matemáticos. Se hacen gráficas lineales, cuadráticas, cúbicas, exponenciales y logarítmicas en papel y hoja con énfasis en su comportamiento y lectura, luego se hacen las gráficas con medios tecnológicos, en este caso, con el apoyo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X y un Smartphone con la Aplicación de CASIO EDU+ o computador que permiten no solamente hacer regresión lineal sino, además, cuadrática, logarítmica, exponencial y potencial cuya exploración sobre el diagrama de dispersión toma unos segundos.

Los estudiantes muestran interés en el manejo de la calculadora y exploran las diferentes propiedades que tiene por cuanto el manejo de la calculadora es un saber técnico previo y necesario para lograr el desarrollo de las actividades propuestas.

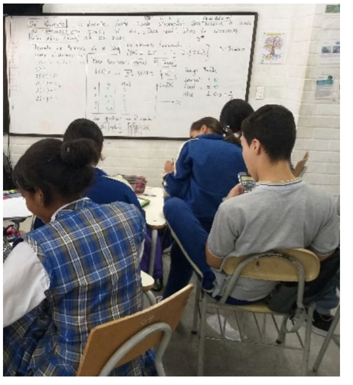
Con las clases para aprender el manejo de la calculadora se toman en detalle temas que los estudiantes ven con otros profesores y esto les ayuda a entender y mejorar la adquisición de conocimiento.

Figura 1. Explicación teórica en la clase.



Fuente: archivo del autor.

Figura 2. Estudiantes en la clase.



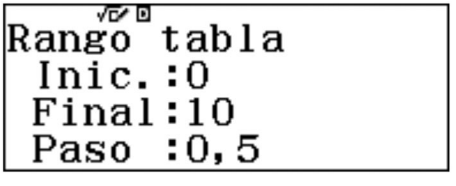
Fuente: archivo del autor.

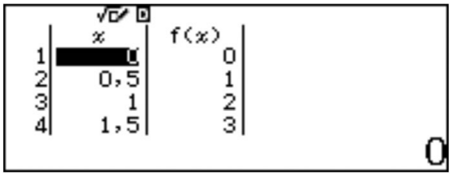
Como ejercicio para explorar el manejo de la calculadora, en la fotografía de la clase se enseña a generalizar una expresión matemática para llevarla a una expresión funcional.

En esta situación se plantea encontrar la generalización de cualquier número par y, para ello, se expresa en términos de n, teniendo como resultado $2n$. Luego, se expresa en términos funcionales con la expresión $f(x) = 2x$.

La secuencia de teclas para crear la tabla en la calculadora es:

[MENU] [9] [2] [x] [=] [=] [0] [=] [1] [0] [=] [,] [5] [DEL] [DEL] [0] [,] [5] [=] [=] [SHIFT] [OPTN]





Gráfica hallada en el Smartphone, después de leer el código QR
en la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

Reflexiones pedagógicas

Las tecnologías motivan a los estudiantes y permite un avance a mayor velocidad de la adquisición de conocimiento.

El uso de tecnología permite combinar la teoría con la práctica en la enseñanza.

Los estudiantes se muestran más interesados y más curiosos porque se pueden presentar preguntas que los motive a explorar los diferentes modos de la calculadora. Se necesita hacer más acompañamiento en la toma de datos para que le den más relevancia.

Los estudiantes mostraron interés en los temas aprendidos y en el uso de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X y se volvieron más participativos en las clases.

Bibliografía y webgrafía

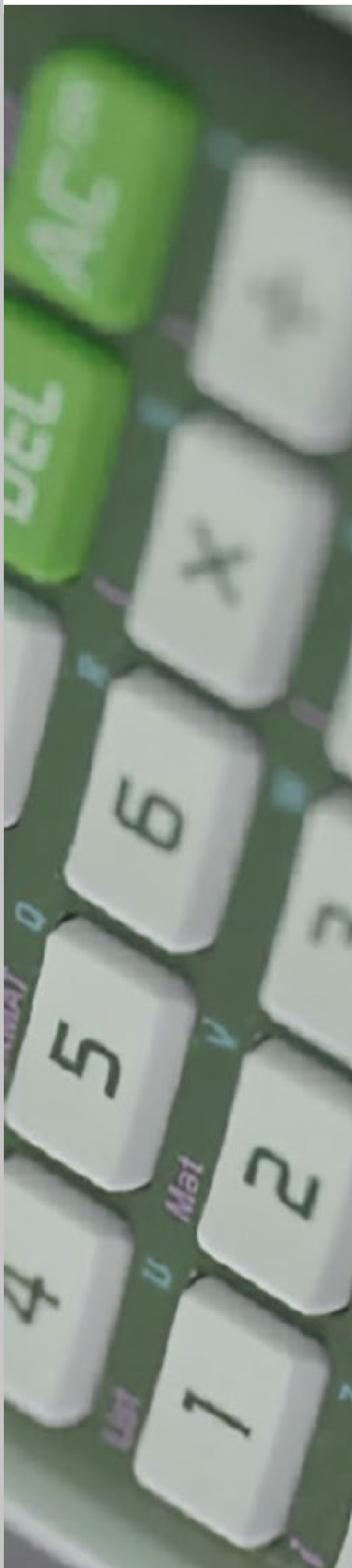
Barajas, C., Parada, S. y Molina, J. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación matemática, 30*(3), 297-323.

Thompson, P. y Carlson, M. (2018). Variation, covariation and functions: foundational ways of mathematical thinking. En J. Cai (ed.). *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston.

Vasco, C. (2006). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco (ed.). *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (134-148). Universidad Pedagógica Nacional.

Reconocimientos
Agradezco al Proyecto Facultad de Educación
de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio.

Guía **estudiante**



Análisis del crecimiento de una planta

Jeyson Emilio Palacio Vásquez
jeysonemilio@gmail.com
Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. • Uso comprensiblemente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.		• Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.)
Eje central: Estudio del crecimiento de una planta.		
Objetivo:	Modelar el crecimiento de una planta a través de la regresión lineal.	
Conocimientos previos:	• Saber sembrar una planta y cultivarla. • Matemáticas grado noveno. • Concepto de función. • Ubicación de datos en el plano cartesiano. • Nociones de correlación de variables en estadística. • Gráfica de funciones en un Plano Cartesiano. • Interpretación de una gráfica en el Plano Cartesiano. • Manejo del calibrador pie de rey	
Recursos	• Espacio para plantar. • Lápiz, borrador, saca punta y papel. • Calculadora fx-991LA X • Semillas de orégano.	

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Actividad 1

Sembrar las semillas de la planta orégano

Tan pronto la planta germine tome la fecha y espere siete días para la toma de datos por primera vez, y en adelante, cada siete días, aproximadamente.

Los datos que se van a recolectar son: número de hojas, altura de la planta y grosor del tallo. La tabla que vamos a utilizar en la toma de datos es la siguiente:

Toma de datos de la planta orégano

Fecha	Altura de la planta (cm)	Grosor del tallo (cm)	Número de hojas

Actividad 2

Con los datos de la tabla anterior asigne el número de día correspondiente a cada fecha, y complete la siguiente tabla. Además, deberá contar o calcular la cantidad de días entre las dos fechas. Asigne valor cero a la fecha en que realizó la primera observación.

Fecha	Día #
	0

Actividad 3

Con los datos de las tablas de la actividad 1 y 2 complete la siguiente tabla con los correspondientes valores, según los valores registrados.

Día # (x días)	Altura de la planta (y cm)
0	

La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es $y = ax + b$

a. Escriba el valor de a
b. Escriba el valor de b
c. Escriba el valor de r
d. Interprete el valor de r
e. Escriba la ecuación de la recta de regresión
f. Estime la altura de la planta el día 30

Actividad 4

Con los datos de las tablas de la actividad 1 y 2 complete la siguiente tabla 4 con los correspondientes valores según los valores registrados.

Día # (x días)	Grosor del tallo (y cm)
0	

La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es $y = ax + b$

a. Escriba el valor de a
b. Escriba el valor de b
c. Escriba el valor de r
d. Interprete el valor de r
e. Escriba la ecuación de la recta de regresión
f. Estime el grosor en cm correspondiente al día 45

Actividad 5

Con los datos de las tablas de la actividad 1 y 2 complete la siguiente tabla 5 con los correspondientes valores según los valores registrados.

Día # (x días)	Número de hojas
0	

La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es $y = ax + b$

a. Escriba el valor de a
b. Escriba el valor de b
c. Escriba el valor de r
d. Interprete el valor de r
e. Escriba la ecuación de la recta de regresión
f. Estime el número de hojas correspondiente al día 50

Creemos con Pixeles. Conversión entre sistemas de numeración

Jorge León Echeverri Echeverri,
Mónica Marcela Parra-Zapata y César Lau Mego
jorge.echeverri@iefhb.edu.co, monikampz@gmail.com
y cesar.slmg@gmail.com
Institución Educativa Félix Henao Botero, Institución
Educativa Mariscal Robledo y Gakuhan -
Secretaría de Educación de Medellín y Casio
Colombia, CO.

Resumen:
Reportamos una situación de aprendizaje cuyo propósito es repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas. Hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles. Esta reflexión es relevante porque, además de ser una parte del álgebra y de la lógica, es el sistema de representación de la información en la electrónica digital e informática. El sistema binario permite a la lógica computacional contabilizar en bits, los cuales representa con dos valores (0 y 1).

Palabras clave:
Conversión de sistemas de numeración, sistema binario, sistema decimal, número decimal, número binario.

Introducción

Los métodos de enseñanza juegan un papel decisivo en la forma en que producen significado matemático en los estudiantes quienes involucran factores con los que pueden interactuar y lograr una interiorización de los conceptos en diálogo y un uso de los mismos en el diario vivir.

Es por ello que se considera útil trabajar por medio de esta estrategia de aprendizaje en la que se ponen a prueba los conocimientos básicos para convertir un sistema binario a uno decimal o viceversa. El sistema binario y el sistema decimal se utilizan en diversos campos. La expresión de un mismo número en cada uno de los sistemas numéricos (binario y decimal) se realiza con reglas distintas. Para convertir un número de binario a decimal o viceversa, es menester conocer, primero, cómo funcionan estos sistemas, la representación y sus reglas para la conversión. Para aplicar los conceptos antes repasados se propone el siguiente ejemplo y se realiza con el apoyo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X.

Para la comprensión de las reglas de los sistemas de numeración, se recomienda que los estudiantes sean partícipes de situaciones en las que deban reconocer cantidades con bases diferentes y en donde se identifique la equivalencia de las mismas, esto por medio de agrupaciones en conjuntos según las bases.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	El pensamiento numérico y los sistemas numéricos.	Comprende la importancia de los diferentes sistemas de numeración y realiza conversiones entre ellos.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.		Describe las diferencias y similitudes de los sistemas numéricos en diferentes bases tanto posicionales como aditivas.

Es oportuno aclarar que esta situación se propone para grado undécimo como un repaso del contenido por las particularidades de la media técnica de la Institución Educativa en la que se espera se lleve a cabo. Sin embargo, los DBA y Estándares (MEN, 2006; MEN, 2016) en cuestión corresponden al grado sexto de la Educación Básica.

Eje central: realizar la conversión de números del sistema binario a sistema numérico decimal y viceversa	
Objetivo:	Repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas. Hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles.
Conocimientos previos:	Sistema de numeración.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	Cuatro horas
Recursos:	Cuaderno Hojas cuadriculadas Lápiz o lapiceros Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

En esta situación nos proponemos repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas. Hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles.

Para alcanzar el objetivo llevamos a cabo cuatro momentos.

Momento 1. ¿Qué es un sistema de numeración?

A partir de varias preguntas exploraremos algunas características de los sistemas de numeración a partir de la discusión de los siguientes interrogantes. Vamos a concentrarnos en los sistemas de numeración posicionales en los que cada símbolo tiene un valor absoluto y, además, tomará un valor de acuerdo con la posición que ocupe dentro del numeral.

Se propone que se discutan los elementos centrales de los tres principios que deben seguirse para representar números en un sistema de numeración posicional, el orden de una cifra, la base y las cifras.

Momento 2. Juguemos con los sistemas binario y decimal

Conoceremos algunas características que tienen los sistemas de numeración binario y decimal, comparándolos entre sí e identificando las características de cada uno de ellos. Para ello se propone una exploración de las reglas de cada sistema y la realización de agrupaciones de elementos que permitan su comprensión.

Momento 3. Creemos con pixeles

Ejercitaremos la conversión de números del sistema binario al sistema decimal y viceversa. Esta conversión es sencilla puesto que en el primer caso simplemente se requiere de divisiones sucesivas entre dos hasta llegar al 1 indivisible.

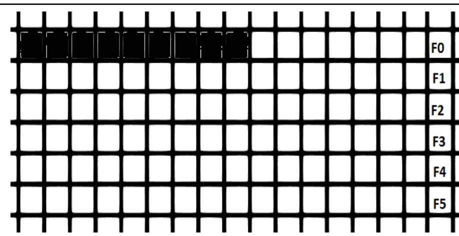
Para este momento proponemos construir juntos una imagen, que se realizará en una hoja cuadriculada. Se parte de una tabla en la que se encuentran números con base decimal, los cuales debes pasar a base binaria con ayuda de la calculadora científica. Posteriormente, se grafica cada número hallado en la hoja cuadriculada (adjunta como anexo en la Guía del estudiante). Para ello, inicia con la cifra de menor orden. Se tiene presente que la cifra 1 representará casillas para colorear y la cifra 0 serán casillas vacías.

En el siguiente ejemplo puede verse la indicación

Figura 1. Ejemplo de indicación.

Número en fila o → 65408
en decimal

Número en fila o → 1111111110000000
en binario



Fuente: los autores.

Ver la Guía del estudiante para encontrar el procedimiento y lograr el cambio de base con la calculadora y la cuadrícula para el desarrollo de las imágenes con pixeles.

Momento 4. Practiquemos lo aprendido

Se pide a los estudiantes que elijan una imagen con pixeles y realicen el código decimal correspondiente que permita que uno de sus compañeros realice la imagen sin conocerla inicialmente. En este momento el estudiante deberá detectar primero el número en binario a partir de la representación de los pixeles, luego convertirá estos números a sistema decimal y serán estos números los que dará a conocer a sus compañeros.

Experiencia de aula y reflexión pedagógica

Un sistema numérico puede asumirse como el modo o estructura que puede usarse para representar las cantidades numéricas. Todo sistema operacionalmente funcional de numeración consta de: a) Un número que sirve de base, b) Guarismos que sirven para representar las unidades en su valor absoluto (Terigi, 1992). En este sentido, su construcción depende de símbolos y un conjunto de reglas que hacen posible la correcta representación de los números. Por estas razones, existen diversos sistemas de numeración.

La elaboración histórica de los sistemas de numeración puede entenderse como una búsqueda sostenida de economía en la representación que ha desembocado en la elaboración de un sistema por el cual, con un pequeño número de símbolos, es posible representar infinidad de complejas operaciones.

El estudio de los sistemas de numeración posibilita, según Terigi y Wolman (2009):

- La utilización de agrupamientos, que permite superar la mera notación por correspondencia uno-a-uno, que es sólo la traducción de una enumeración que anuncia un grupo de objetos sin implicar para ello el desarrollo de la noción de cuantificación. La idea de agrupar las cantidades constituye un primer paso en la economía de la representación.
- La utilización del principio de la base, que convierte los agrupamientos en regulares. Este principio permitió superar la dificultad de tener que recordar, para comprender cada nivel de agrupamiento, el principio de agrupamiento utilizado. Los sistemas de base son sistemas de agrupamientos regulares, donde el número de elementos que se agrupa es igual al número de símbolos utilizados en la escritura.
- El valor posicional de las cifras: esta creación ha sido el principio fundamental para la economía en la notación numérica, en tanto permitió eliminar en la escritura la representación de los exponentes de las potencias

Los sistemas de numeración, ofrecen numerosas oportunidades de interacción porque son un objeto cultural que tiene la particularidad de estar sumamente presente en el mundo social. Para corroborarlo basta con pensar en algunas de las situaciones cotidianas en las que aparecen numerales: en los casos del dinero, las rutas de los buses, los precios y los teléfonos, entre otros. La consideración de los sistemas de numeración como instrumentos sociales implica que el análisis de este objeto que se requiere para diseñar su enseñanza no se agota en el conocimiento de sus aspectos matemáticos; requiere poner en juego otros saberes que no son los del especialista en el campo matemático.

Es así como este trabajo se propone fomentar las habilidades de entender y manejar adecuadamente la conversión en los sistemas de numeración decimal y binario. Propiedades y sus relaciones (los sistemas numéricos decimal y binario). Los estudiantes, una vez realizadas las actividades y la utilización de la calculadora, podrán acercarse a la comprensión de cómo se representan los sistemas numéricos binarios y decimal. Lo anterior permite un análisis de las prácticas sociales que involucran la numeración escrita y de los intercambios que tienen lugar a propósito de esas prácticas.

Se espera que estas actividades puedan llevarse a cabo en las Instituciones Educativas de los autores como introducción a las clases de media técnica con el grado undécimo para su aplicación en el sistema binario en el proceso interno de los computadores.

Bibliografía

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Magisterio.

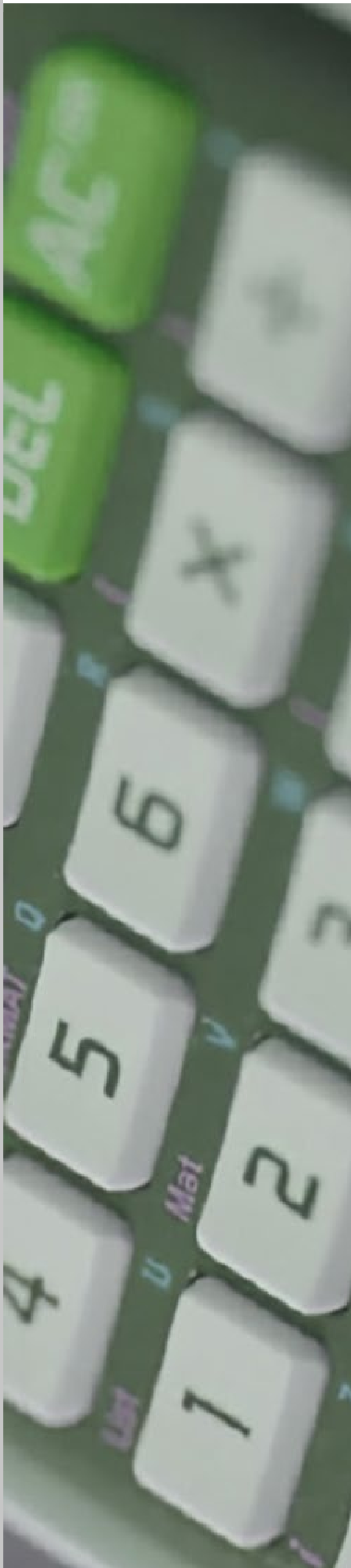
MEN. (2016). *Derechos básicos competencias en matemáticas.* Panamericana formas e impresiones S.A..

Terigi, F. (1992). En torno a la psicogénesis del sistema de numeración: estado de la cuestión, perspectivas y problemas. *Revista Argentina de Educación, 43*(17), 23-41.

Terigi, F. y Wolman. S. (2009). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. *Enseñanza de la matemática/Ensino da matemática, 43,* 1-10.

Reconocimientos

A los estudiantes por la participación y permanecer interesados, motivados y receptivos en las actividades realizadas. A los docentes de matemáticas que, con actividades de su área, mostraron otra forma de compartir y transferir conocimiento.



Creemos con Pixeles. Conversión entre sistemas de numeración

Jorge León Echeverri Echeverri,
Mónica Marcela Parra-Zapata y César Lau Mego
jorge.echeverri@iefhb.edu.co, monikampz@gmail.com
y cesar.slmg@gmail.com
Institución Educativa Félix Henao Botero, Institución
Educativa Mariscal Robledo y Gakuhan -
Secretaría de Educación de Medellín y Casio
Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	El pensamiento numérico y los sistemas numéricos.	Comprende la importancia de los diferentes sistemas de numeración y realiza conversiones entre ellos.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.		Describe las diferencias y similitudes de los sistemas numéricos en diferentes bases tanto posicionales como aditivas.
Eje central: realizar la conversión de números del sistema binario a sistema numérico decimal y viceversa		
Objetivo:	Repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas. Hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles.	
Conocimientos previos:	Sistema de numeración.	
Recursos:	Cuaderno Hojas cuadriculadas Lápiz o lapiceros Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X	

Desarrollo de la situación de aprendizaje

En esta situación nos proponemos repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas.

Para alcanzar el objetivo vamos a llevar a cabo cuatro momentos.

Momento 1. ¿Qué es un sistema de numeración?

Exploraremos algunas características de los sistemas de numeración a partir de la discusión de los siguientes interrogantes.

¿?

- ¿Qué elementos conforman los sistemas de numeración?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Qué clasificación podemos hacer de los sistemas de numeración? Defínelos

  ____
  ____
  ____.

Presenta dos ejemplos para cada uno de los tipos de sistemas de numeración

Ahora vamos a concentrarnos en los sistemas de numeración posicionales en los que cada símbolo tiene un valor absoluto y tomará un valor de acuerdo con la posición que ocupe dentro del numeral.

Para representar números en un sistema de numeración posicional se siguen tres principios. Reflexionemos sobre ellos.

Del orden de una cifra

- ¿A qué hace referencia el orden de una cifra?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Cómo se da el incremento del orden de una cifra?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Existen diferencias entre el orden y el lugar de una cifra?

  ____
  ____
  ____.

De la base

- ¿Puede construirse un sistema en base 1?

____

____

____.

- ¿Qué indica la base de un sistema?

____

____

____.

- Agrupemos las unidades siguientes usando bases diferentes

De las cifras

- ¿Puede construirse un sistema de numeración de base 24 con 32 cifras distintas? Justifica

____

____

____.

- ¿Pueden ser los números -1, -2 cifras de un sistema de numeración?

____

____

____.

Momento 2. Juguemos con los sistemas binario y decimal

Conoceremos algunas características que tienen los sistemas de numeración binario y decimal, comparándolos entre sí e identificando las características de cada uno de ellos.

Exploremos el sistema binario

- ¿Por qué es un sistema de numeración?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Qué cifras emplea el sistema binario?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Cuál es el valor de posición del sistema binario?

  ____

  ____

  ____.

- Agrupemos las unidades siguientes usando base binaria y escribamos el número que representa

Exploremos el sistema decimal

- ¿Por qué es un sistema de numeración?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Qué cifras emplea el sistema decimal?

  ____

  ____

  ____.

- ¿Cuál es el valor de posición del sistema decimal?

  ____

  ____

  ____.

- Agrupemos las siguientes unidades usando base decimal y escribamos el número que representa

Momento 3. Creemos con pixeles

Ejercitaremos la conversión de números del sistema binario al sistema decimal y viceversa. Esta conversión es sencilla puesto que en el primer caso simplemente requiere de divisiones sucesivas entre dos hasta llegar al 1 indivisible.

Vamos a construir juntos una imagen, que se realizará en una hoja cuadriculada.

- En la columna izquierda de la tabla 1 encontrarás números en base decimal, que debes pasar a base binaria con ayuda de la calculadora científica. Luego, escribe los números obtenidos en la tabla 2.
- Grafica cada número hallado en la hoja cuadriculada (adjunta como anexo). Para ello, inicia con la cifra de menor orden. Ten presente que la cifra 1 representará casillas para colorear y la cifra 0 serán casillas vacías. Grafica los números de derecha a izquierda.

Tabla 1. Números en representación decimal.

65408	Fila 0
1048572	Fila 1
1048574	Fila 2
2097151	Fila 3
1048568	Fila 4
1048572	Fila 5
2097148	Fila 6
2097150	Fila 7
4194302	Fila 8
3710926	Fila 9
3673614	Fila 10
3670030	Fila 11
3145742	Fila 12
3145734	Fila 13
3145734	Fila 14
3145732	Fila 15
1556596	Fila 16
1172420	Fila 17
1090240	Fila 18
0	Fila 19
0	Fila 20
0	Fila 21
0	Fila 22
0	Fila 23
15360	Fila 24
65280	Fila 25
130944	Fila 26
71808	Fila 27
0	Fila 28
0	Fila 29
65536	Fila 30
32768	Fila 31
31744	Fila 32

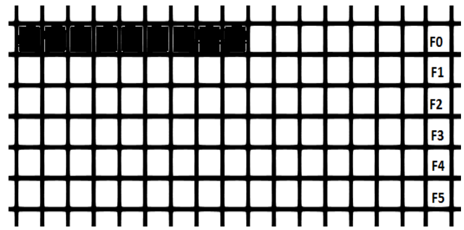
Fuente: los autores.

Tabla 2. Números en representación binaria.

	Fila 0
	Fila 1
	Fila 2
	Fila 3
	Fila 4
	Fila 5
	Fila 6
	Fila 7
	Fila 8
	Fila 9
	Fila 10
	Fila 11
	Fila 12
	Fila 13
	Fila 14
	Fila 15
	Fila 16
	Fila 17
	Fila 18
	Fila 19
	Fila 20
	Fila 21
	Fila 22
	Fila 23
	Fila 24
	Fila 25
	Fila 26
	Fila 27
	Fila 28
	Fila 29
	Fila 30
	Fila 31
	Fila 32

Fuente: los autores.

- En el siguiente ejemplo puedes ver la indicación

Número en fila o → 65408 en decimal Número en fila o → 1111111110000000 en binario	

- ¿Qué imagen resulta al finalizar el procedimiento?

____
____
____.

Momento 4. Practiquemos lo aprendido

Elige una imagen con pixeles y realiza el correspondiente código decimal con el propósito de que uno de tus compañeros realice la imagen sin conocerla inicialmente. Puedes incluir el número de filas que desees.

Cambio de base con la calculadora

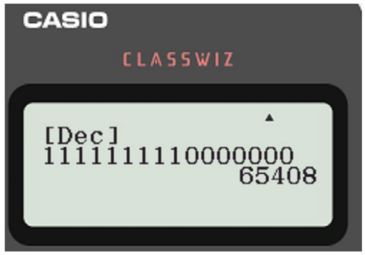
De binario a decimal

- Poner la calculadora en Modo Base N y activar el sistema binario.

MENU 3 log■□

- Ingresar el número en binario. Presionar igual y pasar a decimal con la función de la calculadora.

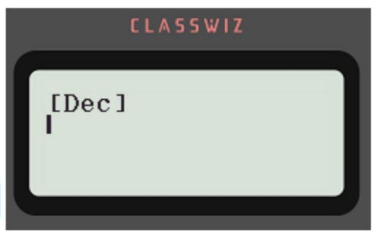
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 = x^2



De decimal a binario

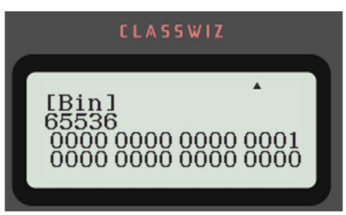
- Poner la calculadora en Modo Base N, se activará automáticamente el modo decimal.

MENU 3



- Ingresar el número en decimal. Presionar igual y pasar a binario con la función de la calculadora.

MENU 3 6 5 5 3 6 = $\log_{\blacksquare}\square$



Anexo

Cuadrícula para desarrollo de la imagen con pixeles

																							F0
																							F1
																							F2
																							F3
																							F4
																							F5
																							F6
																							F7
																							F8
																							F9
																							F10
																							F11
																							F12
																							F13
																							F14
																							F15
																							F16
																							F17
																							F18
																							F19
																							F20
																							F21
																							F22
																							F23
																							F24
																							F25
																							F26
																							F27
																							F28
																							F29
																							F30
																							F31
																							F32

Fuente: los autores.

Cálculos parciales como estrategia en la resolución de volúmenes compuestos

Johan Andrey Salazar Piedrahíta
jasp87@msn.com
Institución Educativa la Independencia,
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Resumen:
Esta propuesta de aula brinda posibilidades de trabajo con la resolución de problemas para el desarrollo de habilidades matemáticas y mediando el método de George Polya y la estrategia *cálculos parciales* para hallar el volumen de cuerpos compuestos. Se emplean las calculadoras Casio Classwiz fx-991LA X como medio tecnológico que favorece este proceso. La experiencia se efectuó en la Institución Educativa la Independencia, de la comuna 13 de la ciudad de Medellín, con los estudiantes de 9°3. Las diferentes actividades tuvieron como eje central el trabajo cooperativo y compartir entre pares, lo que permitió que resultados como el cálculo de volúmenes compuestos, el trabajo cooperativo, la asimilación del método de Polya y la estrategia cálculos parciales, fueran comprendidos por los integrantes del grupo.

Palabras clave:
Sólidos, cuerpos redondos, poliedros, Polya, cálculos parciales, resolución de problemas

Introducción

La resolución de problemas en el área de matemáticas es una de las habilidades que mayor dificultad presenta en su enseñanza y aprendizaje porque los estudiantes presentan resistencia y apatía frente a un problema y, más, cuando no se les han brindado estrategias en este campo; la actividad de aula que se presenta en esta Guía alude a una estrategia conocida por muchos docentes, pero no muy aplicada, además de crear un impacto en los estudiantes en tanto se hace referencia a las emociones como eje principal del aprendizaje, de acuerdo con la experiencia que he vivido, como docente, en los últimos años.

En la Institución Educativa la Independencia, se viene trabajando con los estudiantes del grado 9°3, con didácticas académicas que involucran elementos de las metodologías activas, en las que el estudiante se involucra en el aprendizaje. Para ello, se definió trabajar el desarrollo de la práctica de aula en tres momentos, como se describen a continuación:

El **primer momento** fue una actividad realizada entre pares, enfocada en comprender la estrategia resolución de problemas “cálculos parciales” o “descomponer el problema en partes” y recordar algunos elementos de la metodología de Polya, que se enfoca en la resolución de problemas.

El **segundo momento** es la dinámica de clase que se centra en el trabajo cooperativo y se aplican los conocimientos adquiridos.

El **tercer momento** consiste en realizar un *feedback* de los diferentes retos que se les plantea, realizada a través de la técnica grupal plenaria, los estudiantes evalúan la clase, los aprendizajes adquiridos, las herramientas tecnológicas usadas y el nivel de compromiso y motivación al iniciar y terminar la propuesta de aula.

En cada uno de los momentos los estudiantes tuvieron actividades con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, que les permitió, en un primer momento, solucionar los diferentes problemas propuestos y adquirir habilidades en el manejo de dicha herramienta tecnológica.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
9°	• Pensamiento geométrico. • Pensamiento numérico. • Pensamiento variacional.	• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. • Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y resolver problemas. • Justifica la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) en relación con las situaciones escolares y extraescolares.		Explica la pertinencia o no de la solución de un problema de cálculo de área o de volumen, de acuerdo con las condiciones de la situación.
Eje central: Cuerpos geométricos		
Objetivo:	Utilizar algunos elementos del método de George Polya y la estrategia *hacer cálculos parciales* para hallar el volumen de cuerpos compuestos..	
Conocimientos previos:	• Poliedros • Fórmulas para hallar el volumen de los poliedros y cuerpos redondos • Jerarquía de las operaciones • Manejo básico de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X	

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	Tres semanas de clase (6 horas de clase)
Recursos:	Guía del estudiante Presentación en Power point Video "El museo más famoso del mundo" Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

Momento 1. Trabajo en pares

En este componente se trabaja lo relacionado con la contextualización de la propuesta y el trabajo con el docente y los estudiantes, las actividades propuestas en este momento se pueden llevar a cabo en dos clases y su propósito es que los estudiantes interpreten, asimilen y utilicen algunos elementos del método de George Polya, como estrategia para la resolución de problemas y la estrategia de cálculos parciales para la resolución de problemas con sólidos geométricos. Es importante aclararle a los estudiantes que en la resolución de problemas en matemáticas no existe un conjunto de métodos o procedimientos que, aplicándolos en orden, conducen a la resolución del mismo; sin embargo, (Polya, 1984), propone cuatro etapas esenciales para la resolución de problemas:

> Este conjunto de mecanismos constituye los llamados procesos "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es el objeto de la resolución de problemas, y esto permite que sea una facultad posible de "enseñar" y perfeccionar con la práctica. (Educarchile, s.f. p. 1)

La actividad inició presentándole a los estudiantes la temática y el objetivo de la clase, posteriormente se realizó la contextualización con el video "El museo más famoso del mundo" (Alanxelmundo, 2013), en el que se presenta el Museo de Louvre, seguidamente se complementó el trabajo con algunas preguntas relacionadas con la temática como: ¿Por qué los museos son importantes en las grandes ciudades? ¿Qué sólidos se observan en el video? ¿Qué datos se necesitan para calcular el volumen de la pirámide del Museo de Louvre y, si en vez de una pirámide fuese una esfera, qué datos necesitaríamos?

En esta parte, también, se les solicitó a los estudiantes que en equipos y con los datos que nos presenta la página de Wikipedia sobre las dimensiones de la pirámide de Louvre, complementarán la siguiente tabla:

Tabla 1. Registro de dimensiones.

	Lado	Alto	Volumen
Dimensiones reales	35 m	20,1 m	
Dimensiones si se duplican			
Dimensiones si se triplican			

Fuente: el autor.

¿?

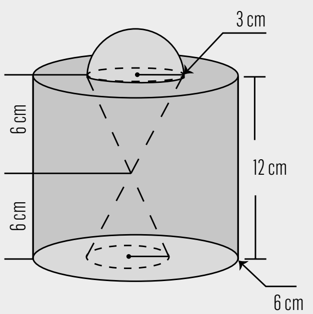
- ¿Qué pueden concluir del volumen en cada uno de los casos?
- ¿Es posible construir una pirámide con las dimensiones reales en la cancha de la institución?

Seguidamente como repaso se les presentó a los estudiantes las diferencias entre los cuerpos geométricos denominados poliedros y los no poliedros o cuerpos redondos, para esto se usaron diferentes materiales que se encuentran en su entorno, tales como pelotas, gorros de piñatas, envases de leche, envases en forma cilíndricas, cajas, entre otras, con el fin de aclarar las características de cada uno de los cuerpos y hacer la diferenciación entre cada uno.

Reto I

Apliquemos la estrategia hacer cálculos parciales

Figura 1. Cilindro de vidrio para estudiar.



Fuente: MEN (2017).

El envase de un perfume se elaboró con la extracción de un cilindro de vidrio dos porciones iguales en forma de cono y se adicionó una semiesfera como tapa. (Observe la figura).

¿Cuál es el volumen de la estructura?

Los estudiantes analizaron la situación que se les planteó con el objeto de que cada uno se enfrentara a la situación con los datos que se presentaban y comprendieran qué se estaba solicitando.

Posteriormente, se hicieron las preguntas pertinentes con el fin de detectar si el grupo comprendió la situación, para esto se propuso seguir el método de Polya, como se describe a continuación,

Tabla 2. Método de Polya.

Comprender el problema. Leerlo varias veces.	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar? Preguntas como las siguientes pueden ayudar a entender mejor el problema. ¿Cuánto mide el radio de la base y la altura del cilindro? ¿Cuáles son las medidas del radio de la base y la altura?
Crear un plan	Cuando trabajamos la estrategia de hacer cálculos parciales calculamos el volumen de los sólidos que componen la estructura, y analizamos si debemos sumar cada uno de los volúmenes o restar de acuerdo con el problema planteado. (Esta explicación se les presenta a los estudiantes y se pueden realizar ejemplos más sencillos o con materiales concretos).
Ejecutar el plan	Se ejecuta el plan planteado anteriormente.
Verifica la respuesta	Se analiza que la respuesta sea coherente, que las unidades sean coherentes.

Fuente: el autor.

Al iniciar la actividad, se analiza la situación con los estudiantes, se les da un tiempo prudente para que analicen el problema y, después de haber analizado el problema y haber construido una estrategia para la resolución de este, se ejecuta con el uso de la calculadora científica Casio Classwiz fx-991LA X. En un primer momento con el fin de mostrarles que se debe hacer un uso adecuado de la jerarquización de las operaciones a la hora de hacer los cálculos; segundo, con el fin de expresar los resultados en diferentes formatos, por ejemplo, expresar el resultado en función de pi (π) y expresarlo como números decimales:

Cálculo del volumen de la semiesfera de radio 3:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$$

Cálculo del volumen del cilindro de radio 6:

$$V_2 = \pi R^2 \times H = \pi 6^2 \times 12 = 432\pi$$

Cálculo de cono de radio 3 y altura 6:

$$Vcono = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi 3^2 \times 6 = 18\pi$$

Como son dos conos semejantes el volumen que debemos considerar es el doble:

Momento 2. Trabajo cooperativo (dos sesiones de clase)

Para este segundo momento se dividió el grupo en equipos de cuatro estudiantes con el fin de trabajar de forma cooperativa. Es oportuno aclarar que esta agrupación es la más recomendable para implementar esta metodología, cuyo objetivo principal es que todos los estudiantes asimilen, comprendan y desarrollen los contenidos por lo que es necesario que cada uno tenga un rol definido (coordinador, portavoz, vigía del tiempo, moderador); los roles son asignados por el docente de acuerdo con las característica de sus aprendices, pero luego de un tiempo, una o dos semanas, estos pueden rotar. Se le entregó la hoja de situaciones al coordinador de equipo y este con su equipo inician el trabajo, teniendo en cuenta que para hacer uso de la calculadora como medio para hallar el resultado final, todo el equipo debió comprender el problema que se planteó, aplicar los pasos del método de Polya y la estrategia que se está implementando.

En esta parte de la actividad los estudiantes contaron con una ayuda adicional: el uso de emoticones, que se encontraban en cada una de sus mesas (recortados), con el fin de que los equipos manifestaran cómo se estaba llevando a cabo el trabajo. A continuación, se presentan los tres emoticones usados:

Figura 2. Emoticones empleados en la situación.

Vamos bien | Tenemos una duda | Requerimos ayuda

Fuente: Freepik.

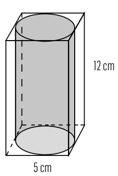
Reto II

Situaciones planteadas[1] a los estudiantes como reto en grupo

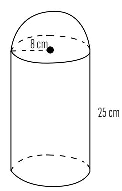
Los siguientes ejercicios buscaron desarrollar agilidad en los estudiantes en el momento de usar la calculadora por eso se les pidió que utilizaran algunos elementos del método de Polya y la estrategia de cálculos parciales para la su resolución.

Figura 3. Cálculos de volumen para realizar.

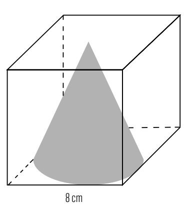
- Halla el volumen de un prisma cuadrangular, de lado de la base 5 cm y altura 12 cm. Calcula también el volumen del cilindro inscrito en el prisma.



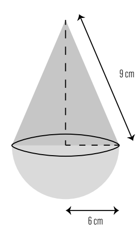
- Teniendo en cuenta las medidas señaladas, calcula el volumen de esta figura.



- Halla el volumen entre el cono y el cubo.



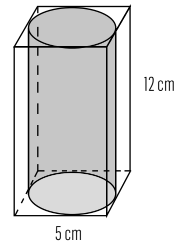
- Calcular el volumen del siguiente cuerpo.



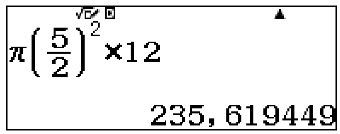
Fuente: Libro del estudiante MEN (2017).

1 Las situaciones son adaptaciones de Brainly (2020).

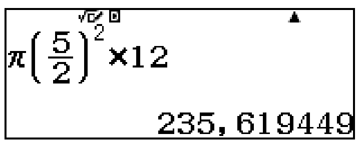
- Halla el volumen de un prisma cuadrangular, de lado de la base 5 cm y altura 12 cm. Calcula también el volumen del cilindro inscrito en el prisma.

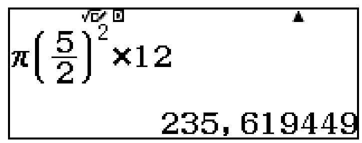


Volumen del prisma:

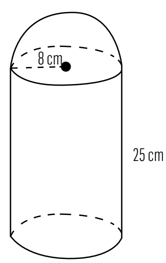


Volumen del cilindro:

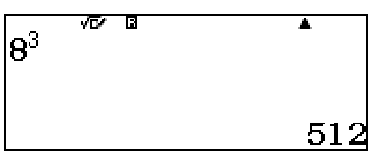


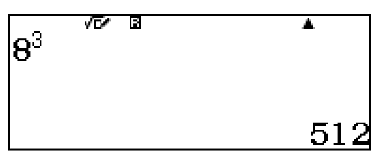


- Teniendo en cuenta las medidas señaladas, calcula el volumen de esta figura:

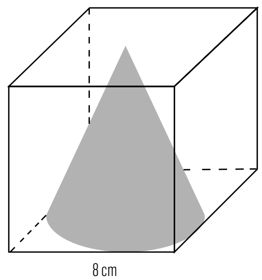


Volumen de la semiesfera + Volumen del cilindro:

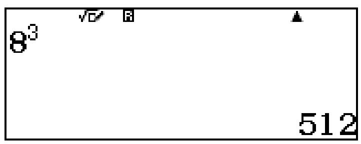


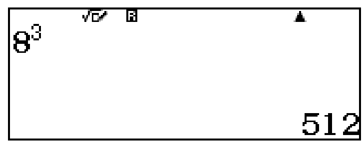


Halla el volumen entre el cono y el cubo.

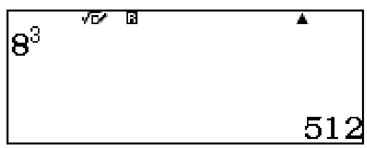


Volumen del cono

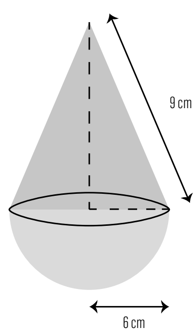




Volumen del cubo

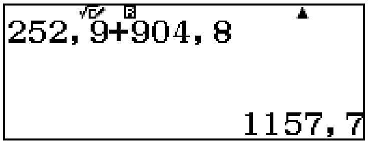


- Calcular el volumen del siguiente cuerpo.

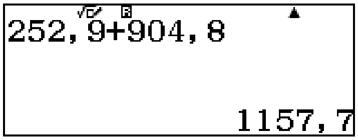


V total= Volumen del cono + Volumen de la semiesfera

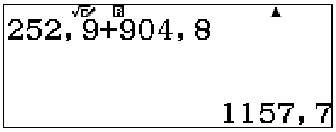
Necesitamos determinar el valor de h, en el triángulo rectángulo de hipotenusa 9 y cateto 6

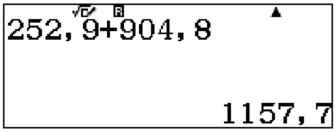


Luego, el volumen del cono es:

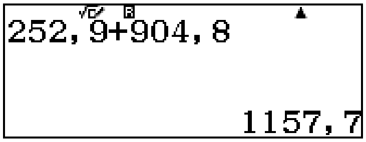


El volumen de la semiesfera es:





V_{total}



Reto final

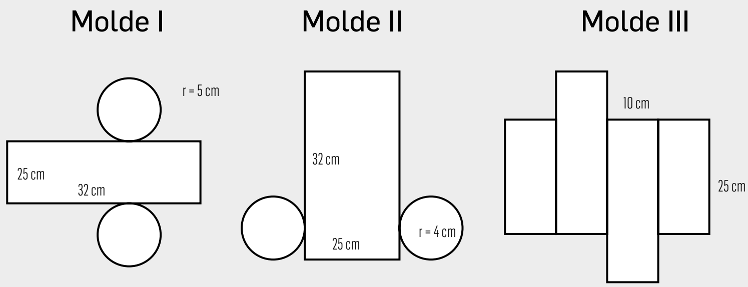
Para finalizar esta parte del trabajo se les presenta la siguiente situación final a los estudiantes para que usen cada uno de los pasos del método de George Polya.

Una empresa comercializa termos con las características que muestra la imagen al final.

Figura 4. Termo para comercializar.

Fuente: @mrsiraphol - freepik.

La empresa tiene los siguientes modelos de caja para empacar los productos



Nombre del producto: Termo 1/2 litro
Perímetro de la base: 31,415 cm
Radio de la base: 5 cm
Altura: 25 cm

Y se les solicitó completar las siguientes cuestiones:

a. ¿En cuál o cuáles moldes se puede empacar el termo?
   En el molde I y el molde III

b. Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la (s) variable (s) que cambian. ¿Qué puedes concluir con respecto al volumen?

Tabla 3. Modelo I.

Modelo I Si solo cambia el radio	
Radio	**Volumen**
Triplica	Por 9
Duplica	Por 4
Cuadruplica	Por 16
Quintuplica	Por 25

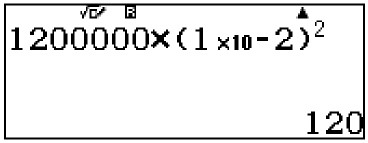
Fuente: el autor.

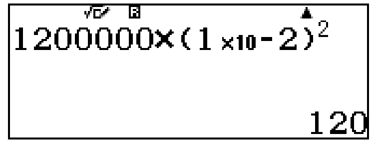
Tabla 4. Modelo II.

Modelo II Si no cambia el radio, pero se modifican las medidas del rectángulo	
Dimensiones	**Volumen**
Duplican	Por 4
Triplican	Por 9
Cuadruplican	Por 16
Sextuplican	Por 36

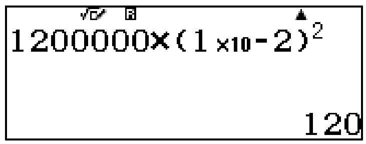
Fuente: el autor.

c. Si se desea construir 1.000 cajas, como el molde III para empacar los termos ¿qué cantidad de material es necesario para dicho trabajo?





1200000 cm^2 que es equivalente a



120 m^2

Momento 3. Evaluación

La evaluación, como un proceso continuo, se mantuvo durante todas las sesiones y con el uso de instrumentos de evaluación como la observación, el *feedback*, la coevaluación entre equipos y grupo, con el propósito de potenciar algunas habilidades requeridas en el siglo XXI, tales como la comunicación y el trabajo cooperativo, en las que la participación constante es fundamental para el trabajo realizado. Al finalizar la práctica de aula los estudiantes compartieron sus dificultades, retos y aprendizajes adquiridos durante los diferentes momentos, tales como la aplicación consciente del método de Polya. Además, comprendieron cada uno de los pasos y se confundieron cuando debían hallar una potencia para calcular un dato. Varios equipos sumaron los datos en vez de multiplicarlos. De ello se infiere que es menester hacer más énfasis en este tipo de ejercicios o problemas y no en ejercicios mecánicos.

Experiencia de aula

La práctica de aula se efectuó con 36 estudiantes del grado noveno-tres, de la Institución Educativa la Independencia, comuna 13, del municipio de Medellín, y se buscó desarrollar el pensamiento matemático a través de la resolución de problemas y la estrategia de hacer cálculos parciales para resolver actividades que involucraran el uso de los cuerpos geométricos. El grupo viene trabajando desde hace más de un año con la metodología de trabajo cooperativo; sin embargo, es desde el mes de febrero del presente año cuando se ha involucrado dicha metodología en el área de matemáticas y en otras, por lo que durante esta actividad se ha visto reflejado el adelanto.

Los estudiantes han comprendido y asimilado lo que conlleva un trabajo con esta metodología. Es preciso aclarar que, aunque la tecnología está inmersa en todos los procesos de la sociedad y, por ende, permea a los aprendices que no tienen claridad en el uso de las herramientas tecnológicas en el ámbito educativo, por lo que se hace necesario empezar a trabajar con elementos que los lleve luego a resolver situaciones más complejas. De otro lado, se buscó que los estudiantes más que utilizar la calculadora como un fin se apoyaran en ella para hacer cálculos más rápidos, analizaran los resultados de acuerdo con la jerarquización de las operaciones teniendo en cuenta que no es lo mismo un resultado positivo que uno negativo y que asimilaran la importancia del uso de herramientas tecnológicas como medio y no como un fin.

Figura 5. Estudiantes realizando la experiencia.

Fuente: Archivo del autor.

Los estudiantes manifestaron estar motivados con el uso de la calculadora como herramienta para desarrollar la actividad y solicitaron implementarla para otras didácticas en las que se involucren temas de estadística y matemáticas.

Reflexión pedagógica

Uno de los grandes desafíos con el que nos encontramos los docentes en la sociedad actual es el uso de las tecnologías en el aula porque seguimos debatiendo si permitir el celular en las aulas, nos cuestionamos si utilizar las calculadoras en el área de matemáticas es una opción viable debido a que las pruebas estandarizadas (ICFES) no permiten emplear dicha herramienta; sin embargo, vivimos en una sociedad en la que estas tecnología están inmersas en todos los procesos cotidianos básicos. Para citar algunos ejemplos: el señor de la tienda usa la calculadora para decirnos el costo del mercado, los ingenieros implementan la calculadora y otros programas para realizar los diferentes cálculos, nuestros estudiantes utilizan los celulares para casi todas las actividades que desarrollan a diario (leer, observar y escribir).

Desde este punto de vista, es importante que la escuela, como un ente activo de la sociedad, se cuestione sobre la forma correcta de implementar dichas tecnologías y no, por el contrario, prohibirlas, pues se evidencia que la herramienta como tal es un medio y no el fin. En el caso de la calculadora los estudiantes pueden llegar a un resultado, pero ¿qué pasa si el resultado obtenido es negativo? ¿Para qué casos servirá un resultado como este, si se está preguntando por un volumen, una distancia o un área? ¿Cómo debe ser el resultado? El instrumento como tal es un medio para hacer un procedimiento, pero el análisis de lo obtenido le corresponde hacerlo a los estudiantes, que, en última instancia, es lo que denomina Polya como verificación de la respuesta para que podamos evaluar qué tanto han logrado comprender los aprendices el concepto que se despliega.

Es importante resaltar que el uso de herramientas tecnológicas en las diferentes actividades de clase, en este caso la calculadora, motiva a los estudiantes y les permite utilizar nuevas estrategias a la hora de resolver situaciones problémicas e, inclusive, lograr resultados que, de forma escrita, no son posibles, por eso, como docentes, debemos estar a la vanguardia de nuevas estrategias, metodologías y propuestas que en vez de prohibirlas, puedan incluirlas dentro de los diferentes procesos escolares.

Bibliografía

Alanxelmundo. (28 de agosto de 2013). *El museo más famoso del mundo - AXM Paris #6* [video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=YZzydHgojMc&t=71s&ab_channel=alanxelmundo

Brainly. (3 de abril de 2020). *Nuevas preguntas de matemáticas.* Brainly. https://brainly.lat/tarea/14635452

Decreto 230 de 2002 [con fuerza de ley]. Por medio del cual se dictan normas en materia de currículo, evaluación y promoción de los educandos y evaluación institucional. 11 de febrero de 2002.

Educarchile. (s.f.). *Pasos a considerar en la resolución de problemas*. http://ww2.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=181701

Los tres editores . (2017). *Estrategias Saberes Matemáticas.* Los tres editores S.A.S..

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Magisterio.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Competencias en Matemáticas.* Panamericana Formas E Impresos S.A.

MEN. (2017). *Vamos a aprender matemáticas, libro del estudiante 9.* Ediciones SM S.A..

MEN. (2017). Matriz de referencia de Matemáticas. Panamericana Formas E Impresos S.A..

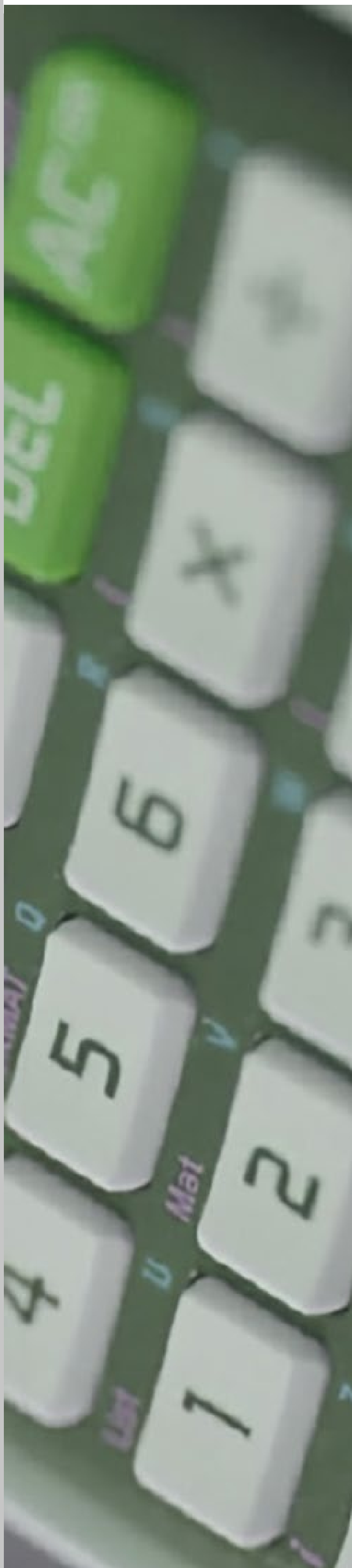
MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas, libro del estudiante, 7.* Bogotá, D.C., Colombia.: SM, S.A.

Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Reconocimientos

Un reconocimiento muy especial a mis peripatéticos de 9°3 por aventurarse en todas mis locuras y permitirme experimentar con ellos.

Guía **estudiante**



Cálculos parciales como estrategia en la resolución de volúmenes compuestos

Johan Andrey Salazar Piedrahita
jasp87@msn.com
Institución Educativa la Independencia - Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Noveno	• Pensamiento geométrico. • Pensamiento numérico. • Pensamiento variacional. • Pensamiento aleatorio.	• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. • Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas, y para resolver problemas. • Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.	Explica la pertinencia o no de la solución de un problema de cálculo de área o de volumen, de acuerdo con las condiciones de la situación.

Eje central: Cuerpos geométricos.	
Objetivo:	Utilizar el método de George Polya y la estrategia “hacer cálculos parciales” para hallar el volumen de cuerpos compuestos y aplicar el concepto de regresión para identificar relaciones de proporcionalidad.
Conocimientos previos:	• Poliedros • Fórmulas para hallar el volumen de los poliedros y cuerpos redondos • Jerarquía de las operaciones • Manejo básico de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X
Recursos	Guía del estudiante Video “El museo más famoso del mundo” Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Misión I

Para esta primera misión debes observar el video “El museo más famoso del mundo” (desde el minuto 0:58 hasta 4:20), presta atención a cada uno de los detalles que allí se observan en relación con los cuerpos geométricos. Luego, con tu equipo de trabajo, completa el Reto I.

El video lo puedes observar en el siguiente enlace:

https://cutt.ly/2wyWU3K

O escaneando el código QR que aparece a continuación con tu celular

Reto I: El Museo más famoso del mundo

Figura 1. Museo de Louvre.

Fuente: Marco Santiago en Pixabay.

Se comenzó a construir en 1546 cuando Francisco I era el rey de Francia, pero a medida que transcurrieron los años y los reinados, fueron realizándose restauraciones. En el siglo XVII, cuando Enrique IV estaba en el poder, se terminó la grande Galería y cuando Napoleón III fue emperador se agregó un ala en la zona norte. A mediados del siglo XIX se terminó de construir este gran complejo. En 1793 fue inaugurado como museo público y en 1848 pasó a manos del Estado. El ala norte del palacio del Louvre se transformó en una sala de exposiciones; con esto concluyó la segunda fase que incluía la construcción de un auditorio, una pirámide de cristal, muestras sobre la historia del Louvre, galerías para exposiciones temporales y la excavación de los fosos del Louvre medieval, además de tiendas, restaurantes y estacionamientos[1].

¿?

- ¿Por qué son importantes los museos en las grandes ciudades?

  ____
  ____
  ____.

- ¿Qué museos conoces? ¿Cuál es el que más te gusta? Haz una pequeña descripción del mismo.

  ____
  ____
  ____.

- Escribe los nombres de los cuerpos geométricos que se observan en la imagen 1 del Museo de Louvre

  ____
  ____
  ____.

1 Tomado de: Paris City Vision. (s.f.). El Louvre: historia de un palacio que se convirtió en museo. https://www.pariscityvision.com/es/paris/museos/museo-louvre/louvre-palacio-convertido-museo

¿?

- Escribe el nombre de los cuerpos geométricos que se observan en el video
____
____
____.

- ¿Qué datos se necesitan para calcular el volumen de la pirámide del Museo de Louvre?
____
____
____.

- Si en vez de una pirámide fuese una esfera la que aparece en el museo ¿qué datos necesitas para calcular el volumen?
____
____
____.

Reto II: calculando el volumen de la pirámide del Museo de Louvre

Figura 2. Pirámide del Museo de Louvre.

Fuente: Wikipedia.

a. Completa la siguiente tabla y varía la altura de la pirámide. Es preciso mantener el lado de la base constante.

Lado	Altura	Volumen
35		
35		
35		
35		

- ¿Qué relación se puede identificar entre la altura y el volumen de la pirámide?
____
____.

b. Completa la siguiente tabla, variando el lado de la pirámide, manteniendo la altura de la pirámide constante.

Altura	Lado de la pirámide	Volumen
20,1		
20,1		
20,1		
20,1		

- ¿Qué relación se puede identificar entre el lado de la base y el volumen de la pirámide?

  ____

  ____.

c. Completa la siguiente tabla y luego responde

	Lado	Alto	Volumen
Dimensiones reales			
Dimensiones si se duplican			
Dimensiones si se triplican			

- ¿Cómo cambia el volumen?

  ____

  ____.

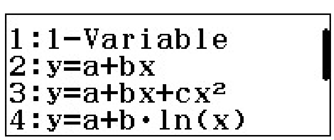
- ¿Es posible construir una pirámide con las dimensiones reales en la cancha de tu institución?

  ____

  ____.

Reto III

Utilizando la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, ingresa en el modo Estadística y utilizando una regresión lineal, opción dos en la siguiente figura:



1. Obtenga el modelo lineal correspondiente a los datos de cada tabla 1 utilizando los datos de la altura y el volumen.
2. Obtenga el modelo cuadrático correspondiente a los datos de cada tabla 2 utilizando los datos de la altura de la base y el volumen.
3. Completa la siguiente tabla y calcula la regresión correspondiente.

Altura	Área de la base de la pirámide	Volumen
20,1		
20,1		
20,1		
20,1		

Misión II. Resolución de problemas

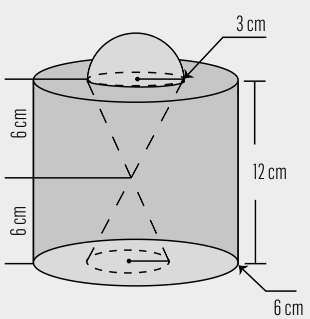
Hacer cálculos parciales

Con la ayuda de tu profesor y tus compañeros analicen la siguiente situación, utilicen las preguntas orientadoras del cuadro para completar los datos.

El envase de un perfume se elaboró con la extracción de un cilindro de vidrio dos porciones iguales en forma de cono y adicionando una semiesfera como tapa. (Observen la figura). ¿Cuál es el volumen de la estructura?

<table>
<tr>
<td rowspan="4">

Figura 3. Cilindro de vidrio para estudiar.



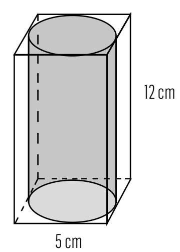
Fuente: MEN, 2017.

</td>
<td>Comprender el problema y leerlo varias veces.</td>
<td>¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Preguntas como las siguientes pueden ayudar a entender mejor el problema
¿Cuánto mide el radio de la base y la altura del cilindro?
¿Cuáles son las medidas del radio de la base y la altura de la tapa?</td>
</tr>
<tr>
<td>Crear un plan</td>
<td>Cuando trabajamos la estrategia de hacer cálculos parciales calculamos el volumen de los sólidos que componen la estructura, y decidimos si debemos sumar o restar cada uno de los volúmenes hallados, de acuerdo con la situación planteada.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ejecutar el plan</td>
<td>Se efectúan las operaciones necesarias con los volúmenes parciales para determinar el volumen total.</td>
</tr>
<tr>
<td>Verifica la respuesta</td>
<td>Se verifica que el volumen obtenido sea coherente con la situación planteada.</td>
</tr>
</table>

a. En la situación anterior se aplicó la estrategia de resolución de problemas por “cálculos parciales” ¿a qué crees que hace referencia?
b. ¿En qué tipo de problemas o situaciones se pueden implementar los cálculos parciales como una estrategia?

Con tu equipo de trabajo resuelve los siguientes ejercicios[2].

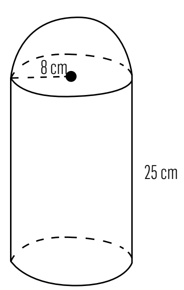
Reto I: Halla el volumen de un prisma cuadrangular, de lado de la base 5 cm y altura 12 cm. Calcula también el volumen del cilindro inscrito en el prisma.



Fuente: MEN, 2017.

Comprender el problema Leer varias veces el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

Reto II: Teniendo en cuenta las medidas señaladas, calcula el volumen de esta figura:

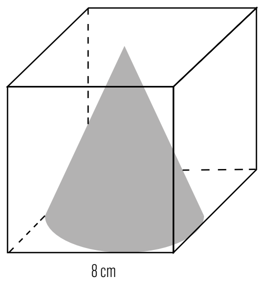


Fuente: MEN, 2017.

Comprender el problema Leer varias veces el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

2 Las situaciones son adaptaciones de Brainly (2020).

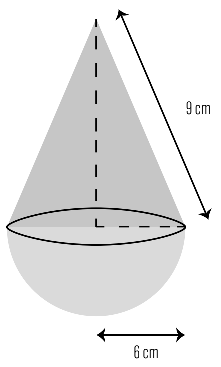
Reto III: Halla el volumen entre el cono y el cubo.



Fuente: MEN, 2017.

Comprender el problema Leer varias veces el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

Reto IV: Calcular el volumen del siguiente cuerpo.



Fuente: MEN, 2017.

Comprender el problema Leer varias veces el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

Misión final

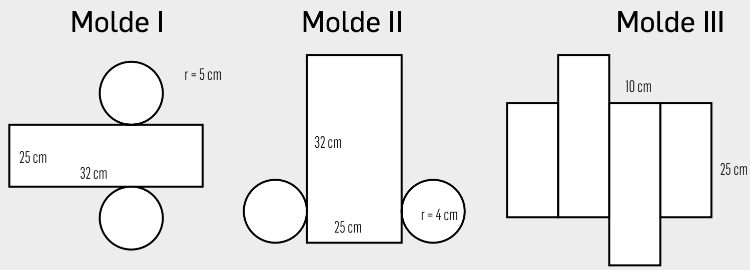
Reto final

Una empresa comercializa termos con las características que muestra la imagen:

Figura 4. Termo para comercializar.

Fuente: @mrsiraphol - freepik.

La empresa tiene los siguientes modelos de caja para empacar los productos



Nombre del producto: Termo 1/2 litro
Perímetro de la base: 31,415 cm - Radio de la base: 5 cm - Altura: 25 cm

a. ¿En cuál o cuáles moldes se puede empacar el termo?
b. Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la (s) variable (s) que cambian. ¿qué puedes concluir con respecto al volumen? ¿Qué tipo de relación encuentras entre cada uno de los casos?

Tabla 1. Modelo I.

Modelo I Si solo cambia el radio	
Radio	Volumen
Triplica	Por 9
Duplica	Por 4
Cuadruplica	Por 16
Quintuplica	Por 25

Tabla 2. Modelo II.

Modelo II Si no cambia el radio, pero se modifican las medidas del rectángulo	
Dimensiones	Volumen
Duplican	Por 4
Triplican	Por 9
Cuadruplican	Por 16
Sextuplican	Por 36

Fuente: el autor.

Si se desea construir 1.000 cajas, como el molde III para empacar los termos ¿qué cantidad de material es necesario para dicho trabajo?

La calculadora, ¿mayor que o menor que tu conocimiento? Uso en las inecuaciones

Javier Orlando Marín Sánchez
javiermarin1975@hotmail.com
Institución Educativa San Juan Bosco -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO

Resumen:
En este trabajo se pretende profundizar en la solución de inecuaciones con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, como parte de un trabajo general cuyos objetivos son: utilizar las propiedades de orden de los números reales para la solución de inecuaciones y resolver ejercicios y problemas que se pueden presentar en la vida cotidiana, con la aplicación de las inecuaciones. Para lograr esta actividad se debe conocer previamente la parte explicativa de la simbología: ¿Cómo se define el grado, cómo se despeja y cómo se escriben los conjuntos e intervalos para las desigualdades, en las que la calculadora sea una herramienta?.

Palabras clave:
Inecuación, intervalo, pensamiento variacional y números reales.

Introducción

En este texto se encuentra la actividad desplegada, a manera de profundización en el estudio de las inecuaciones con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, que permite solucionar inecuaciones de grados dos, tres y cuatro y se propone que se lleve a cabo por fases como: exploración, estructuración, práctica, transferencia y valoración. Cada uno de estos momentos está descrito en el trabajo de acuerdo con lo realizado en una práctica de aula, pero podrá ser modificado o enriquecido por el maestro.

Los objetivos que se pretenden aplicar son: utilizar las propiedades de orden de los números reales para la solución de inecuaciones y resolver ejercicios y problemas que se pueden presentar en la vida cotidiana, con la aplicación de las inecuaciones. Lo ideal es que para garantizar el cumplimiento de estos objetivos se complemente lo descrito con actividades que promuevan una participación más activa de los estudiantes y que ellos diseñen ejercicios y problemas, en lo posible, contextualizados para sus actividades cotidianas.

La sistematización de esta experiencia permite tener la base de un trabajo que no termina en su simple aplicación, ya que cada vez que se haga, sea posible encontrar nuevas experiencias de aula que fortalezcan un conocimiento colaborativo entre los estudiantes y el maestro e incrementar el aprovechamiento de la calculadora como herramienta de trabajo.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Once	Pensamiento matemático en sus diversas formas, especialmente numérico y variacional.	• Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. • Establezco relaciones y diferencias entre distintas notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. • Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
DBA relacionados:		**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones.		• Utiliza propiedades del producto de números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones. • Interpreta las operaciones en diversos dominios numéricos para validar propiedades de ecuaciones e inecuaciones.
Eje central: Luego de la explicación magistral referida a la solución de inecuaciones de grados 1 y 2, y la correcta interpretación de su resultado, por parte de las estudiantes, que se puede evidenciar al expresarlo como intervalo o como conjunto solución, la explicación sobre el uso de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, preferiblemente con el respectivo emulador y mostrar que esta herramienta permite solucionar, de manera rápida, las inecuaciones de grados 2, 3 o 4 y cómo se interpretan los resultados.		

Objetivo:	Solucionar inecuaciones de grados 2, 3 y 4 con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X e interpretar sus resultados.
Conocimientos previos:	• Concepto de desigualdades y sus símbolos • Grado de una inecuación • Despeje de inecuaciones • Intervalos • Solución operativa de inecuaciones de grados 1 y 2

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	Cuatro horas.
Recursos:	Docente Documento guía Computador Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X Emulador de la calculadora Video beam

La clase deberá tener varios momentos

Exploración[1]

Se debe realizar la socialización de los saberes previos, preferiblemente con participación activa de las estudiantes y que sean ellas las que den respuestas con temas ya mencionados de: concepto de desigualdades y sus símbolos, grado de una inecuación, despeje de inecuaciones, intervalos y solución operativa de inecuaciones de grados 1 y 2.

Estructuración

En esta etapa se pueden solucionar, por parte del profesor o con la participación de las estudiantes, inecuaciones de primer y segundo grado. No olvidar los pasos: agrupar términos semejantes, factorizar, análisis de casos, graficar, analizar y escribir el conjunto solución.

1. Los momentos propuestos son una adaptacion de: MEN (2015). *¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme* [video]. Colombia Aprende.

Algunos ejercicios propuestos son:

$X - 5 < 0$	C.S. $X < 5$ $(-\infty,5)$. C.S. significa el Conjunto Solución.
$X + 2 \geq 4$	C.S. $X \geq 2$ $[2,\infty)$
$3X + 5 < X - 7$	C.S. $X < -6$ $(-\infty,-6)$
$X^2 + 11X + 18 > 0$	C.S. $X \in (-\infty,-9)\ U\ (-2,\infty)$
$X^2 + 2X \geq X + 6$	C.S. $X \in (-\infty,-3]\ U\ [2,\infty)$
$X^2 - 3X - 10 < 0$	C.S. $X \in (-\infty,-2]\ U\ [5,\infty)$

El docente podrá complementar con los ejercicios que considere necesarios.

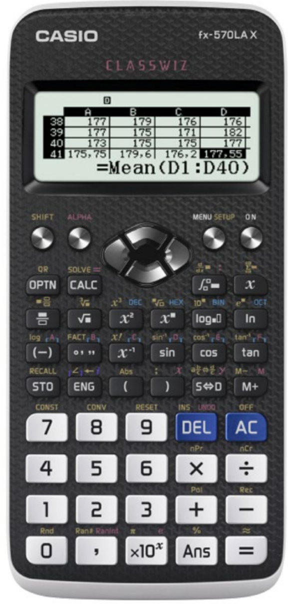
Práctica

Se realiza el trabajo con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X. En este paso el profesor, con la ayuda del computador, el video beam y el emulador fx-991LA X, con explicaciones a la par que las estudiantes realizan el trabajo en la calculadora para que adquieran el dominio de la misma. En este punto se debe resaltar el aspecto de interpretación de la respuesta que da la calculadora, y esto se puede evidenciar escribiéndola como el conjunto solución con sus respectivos intervalos.

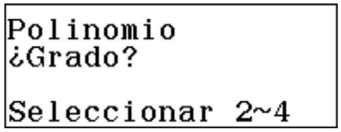
Ejercicios propuestos para resolver con la calculadora

$X^2 + 6X + 12 > 0$	Todos los reales $(-\infty,\infty)$
$6X^2 - 7X - 3 \leq 0$	$X \in (-\infty,-1/3]\ U\ [3/2,\infty)$
$2X^2 - 5X + 2 < 0$	$X \in (1/2,2)$
$-X^2 + 5X \geq 4$	$X \in [1,4]$
$2X^3 - 3X^2 + 11X + 6 < 0$	$X \in (-\infty, -0.467333358)$
$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \leq 0$	$X \in (-\infty, 1]\ U\ [2, 3]$
$2X^4 + X^3 - 8X^2 - X + 6 \geq 0$	$X \in (-\infty, -2]\ U\ [-1, 1]\ U\ [3/2, \infty)$
$-X^4 + 5X^2 - 4 < 0$	$X \in (-\infty, -2)\ U\ (-1, 1)\ U\ (2, \infty)$

El docente podrá complementar con los ejercicios que considere necesarios.



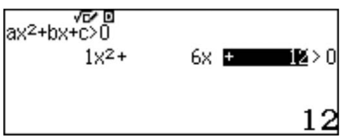
La solución de inecuaciones en calculadora se realiza en el modo Desigualdad.

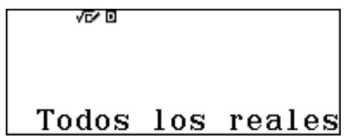


Ud. deberá seleccionar el grado de la inecuación, además identificar el tipo de desigualdad.

A continuación, se presentan imágenes sobre la solución de algunos de los ejercicios planteados

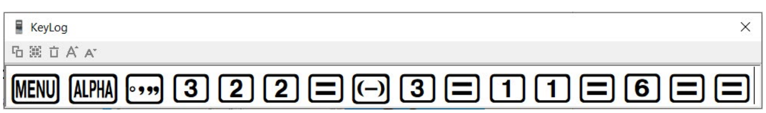
Para: $X^2 + 6X + 12 > 0$





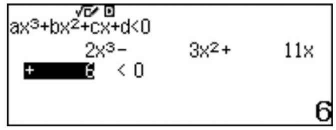
Es muy importante la interpretación del resultado y escribirlo como intervalo, lo que da cuenta de su correcta interpretación.

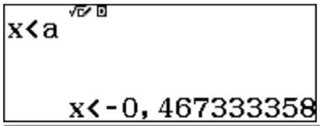
La secuencia de teclas es:

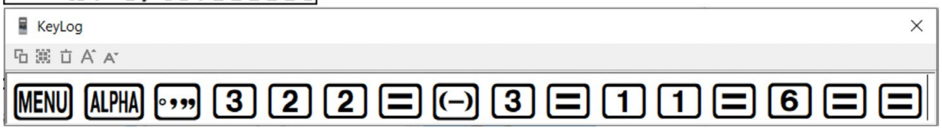


Para acceder nuevamente a las inecuaciones y modificar el grado, una vez obtenida la respuesta en la calculadora.

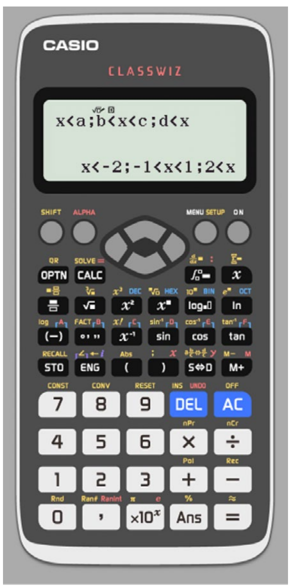
Para: $2X^3 - 3X^2 + 11X + 6 < 0$

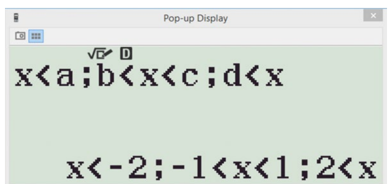


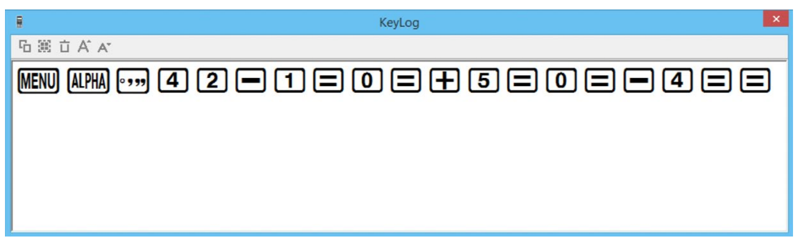




Para: $-X^4 + 5X^2 - 4 < 0$







En esta última imagen, por ejemplo, la respuesta debe ser representada por la unión de tres intervalos.

Transferencia

Es oportuno que las estudiantes consulten y creen sus propios ejercicios para solucionar con la calculadora y socializar las respuestas obtenidas. En esta etapa se puede evidenciar si efectivamente las estudiantes han logrado entender el tema y cómo es el manejo de la calculadora, pues ellas deberán solucionar ejercicios propuestos por el profesor y crear los propios.

Se debe aclarar que, desde el momento anterior de práctica, el docente deberá observar y valorar los aportes individuales y colectivos que, en su medida, realiza cada estudiante.

Valoración

Luego de solucionar y aclarar cualquier duda que se tenga sobre el tema y el manejo de la calculadora, se pueden plantear, como una evaluación, la solución de algunos ejercicios de inecuaciones de grados 1 y 2 con la realización del proceso y de grados 2, 3 y 4 con la calculadora, y en el que la interpretación de los resultados es fundamental.

Experiencia de aula

La práctica se realiza en la Institución Educativa San Juan Bosco, en el primer periodo académico, con las estudiantes del grado Once, en la que se realizó una contextualización sobre el tema de las inecuaciones, repasando algunos saberes previos, posteriormente, con una explicación magistral y solución de ejercicios, en tablero y cuaderno, de inecuaciones de primer y segundo grados.

Una vez comprendido el tema se procede al uso de la calculadora (con una previa familiarización) para resolver los ejercicios planteados y el análisis e interpretación de las respuestas y, inmediatamente después, solucionar nuevos ejercicios planteados por el profesor y las estudiantes, teniendo en cuenta que en la calculadora se pueden solucionar ejercicios de inecuaciones de grados dos, tres y cuatro.

Los elementos descritos anteriormente pretendieron direccionar a los estudiantes a la utilización de propiedades de orden de los números reales, las cuales se aplicaron en la solución de inecuaciones. Estos asuntos teóricos se ilustraron también en situaciones de la vida cotidiana. Por todas estas razones, aprender el manejo de la calculadora y la correcta interpretación de sus resultados permite mejorar notablemente los tiempos de respuesta y es satisfactorio observar que las estudiantes logran un manejo adecuado de la herramienta en corto tiempo y su percepción de que la calculadora efectivamente minimiza los tiempo, pero se advierte que es de vital importancia una correcta interpretación de los resultados, lo que se pudo evidenciar en la escritura de los mismos como un conjunto solución de uno o varios intervalos.

Es preciso añadir que no todas las estudiantes obtuvieron la apropiación de la herramienta en los mismos tiempos o una correcta interpretación de los resultados, pero, por medio de la práctica, se percibe que de una u otra forma todas los logran hacer, incluso comentarios en la parte final como “profesor, todo lo que teníamos que hacer al inicio y la calculadora nos da la respuesta de una” o “con la calculadora es más fácil”. Estas afirmaciones hacen evidente el uso de la calculadora como herramienta de apoyo.

Reflexión pedagógica

Sin dejar de lado el desarrollo operativo de los ejercicios, ya que en lo personal considero fundamental el saber cómo se llega a una respuesta y no obtener la misma simplemente, podemos mostrar a las estudiantes que las herramientas tecnológicas permiten minimizar tiempos y facilitan algunas actividades.

Para las estudiantes es importante tener un conocimiento amplio sobre el manejo de la calculadora y qué opciones de solución tienen con esta herramienta, pero esto debe ir de la mano con evidencias claras de que se entiende correctamente la interpretación de los resultados.

En este caso se trabajó con una calculadora por pareja y sería importante que cada estudiante tuviese la oportunidad manipular su propia calculadora para aumentar la apropiación de la misma.

La contextualización de problemáticas relacionadas con la vida cotidiana se facilita más en inecuaciones de grado uno porque no tienen opción de solución en la calculadora, pero su proceso es relativamente sencillo y no requiere de la misma, aunque sí es de gran utilidad para las inecuaciones cuadráticas, cúbicas y de grado cuatro.

El uso del emulador de la calculadora fx-991LA X es una gran ayuda durante la explicación de manejo de la herramienta porque permite una mejor visualización de los pasos y los resultados arrojados.

La evaluación del trabajo se realiza de manera permanente durante la actividad y para el inicio de la sección siguiente el docente propondrá encontrar las respuestas con la ayuda de la calculadora de tres inecuaciones, de grados dos, tres y cuatro para que las estudiantes hallen su respectiva respuesta y la escriban en forma de conjunto e intervalo y la grafiquen.

Bibliografía

Anzola, J. y Abril, P. (2013). *Saber matemático 11.* Didáctica y matemáticas LTDA.

MEN. (2017). *Vamos a aprender matemáticas, libro del estudiante, 11*. Larousse.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Competencias en Matemáticas.* Panamericana Formas e Impresos S.A.

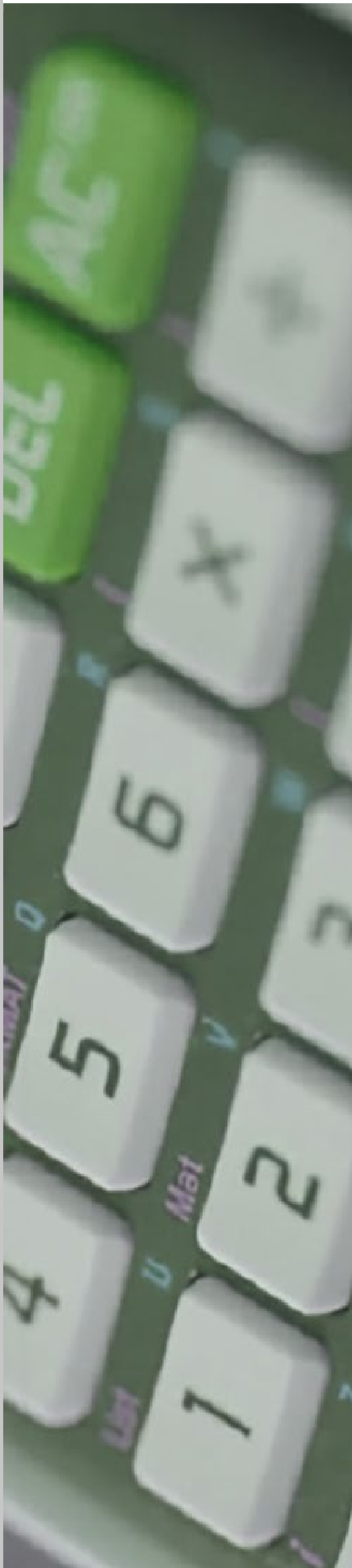
MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Magisterio.

Quintero, L. (2017). *Estrategias de mejoramiento de competencias curriculares matemáticas.* Los tres Editores S.A.S..

Reconocimientos

Para la elaboración de este trabajo se brinda un reconocimiento muy especial a las personas del proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio y de la comunidad educativa de la Institución Educativa San Juan Bosco, quienes intervinieron en esta propuesta didáctica.

Guía **estudiante**



La calculadora, ¿mayor que o menor que tu conocimiento? Uso en las inecuaciones

Javier Orlando Marín Sánchez
javiermarin1975@hotmail.com
Institución Educativa San Juan Bosco -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Once	Pensamiento matemático en sus diversas formas, especialmente numérico y variacional.	• Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. • Establezco relaciones y diferencias entre distintas notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. • Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones.	• Utiliza propiedades del producto de números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones. • Interpreta las operaciones en diversos dominios numéricos para validar propiedades de ecuaciones e inecuaciones.

Eje central: Luego de la explicación magistral referida a la solución de inecuaciones de grados 1 y 2, y la correcta interpretación de su resultado, por parte de las estudiantes, que se puede evidenciar al expresarlo como intervalo o como conjunto solución, se explicación sobre el uso de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, preferiblemente con el respectivo emulador y mostrar que esta herramienta permite solucionar, de manera rápida, las inecuaciones de grados 2, 3 o 4 y cómo se interpretan los resultados.

Objetivo:	Solucionar inecuaciones de grados 2, 3 y 4 con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X e interpretar sus resultados.
Conocimientos previos:	• Concepto de desigualdades y sus símbolos • Grado de una inecuación • Despeje de inecuaciones • Intervalos • Solución operativa de inecuaciones de grados 1 y 2
Recursos:	• Docente • Documento guía • Calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Actividad 1

El profesor realiza una serie de preguntas enfocadas en la contextualización de saberes previos, que permitirán una mejor comprensión, lo importante es que participes, aclares dudas y dejes el temor a equivocarte, pues de lo errores se aprende.

Actividad 2

El profesor explicará el proceso operativo para la solución de inecuaciones de primer y segundo grado y es muy importante tu participación y que aclares cualquier duda que se presente, para que puedas solucionar los ejercicios propuestos a continuación y determines el grado de cada inecuación.

$$X - 5 < 0$$

$$X + 2 \geq 4$$

$$3X + 5 < X - 7$$

$$X^2 + 11\,X + 18 > 0$$

$$X^2 + 2X \geq X + 6$$

$$X^2 - 3X - 10 < 0$$

Actividad 3

El profesor explicará el proceso de solución de inecuaciones con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, con la calculadora que tienes debes realizar los pasos que te indique el profesor a la par y aclarar cualquier duda que se presente. La calculadora Casio Classwiz fx-991LA X te da una respuesta que deberás interpretar y saber escribir como conjunto solución con sus respectivos intervalos. Luego de la explicación deberás solucionar los siguientes ejercicios.

$$X^2+6X+12>0$$

$$6X^2-7X-3 \leq 0$$

$$2X^2-5X+2 <0$$

$$-X^2+5X \geq 4$$

$$2X^3 - 3X^2 + 11X + 6 < 0$$

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \leq 0$$

$$2X^4 + X^3 - 8X^2 - X + 6 \geq 0$$

$$-X^4 + 5X^2 - 4 < 0$$

Solución a la vuelta de la esquina

Luisa Fernanda Marín Ramírez
luisa.marin@udea.edu.co
Institución Educativa El Corazón -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO

Resumen:
El presente trabajo hace parte de la formación Diseño de situaciones didácticas mediadas por herramientas tecnológicas para el desarrollo del pensamiento matemático, la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X, dirigida a maestros de matemáticas de Básica Secundaria y Media, de la Secretaría de Educación de Medellín. Es una propuesta didáctica de aula dirigida a los estudiantes del grado undécimo de la Institución Tomás Carrasquilla n° 2 de la Ciudad de Medellín, caracterizada por analizar una situación real de la ciudad respecto a la dificultad para la movilidad y el desplazamiento de los estudiantes en el área cercana a la institución educativa por la imprecisión en los cálculos de un conductor de un tractocamión para dar la vuelta de una calle a una carrera. Se plantea una alternativa de solución a la situación, en la que los estudiantes, por medio del uso de la calculadora científica como apoyo, logren poner en diálogo sus saberes matemáticos.

Palabras clave:
Punto crítico, máximo, dominio.

Introducción

La escuela es el espacio propicio para aprovechar los recursos en la solución de problemas que, si bien pedagogizan los sucesos del entorno, permiten que la tecnología apoye el desarrollo de destrezas en los estudiantes en la interacción entre el saber y la realidad. Por este motivo, es pertinente llevar a las aulas propuestas pedagógicas del área de matemáticas de situaciones del entorno del estudiante que vinculan conceptos que precisan comprender.

La presente propuesta se acerca reflexivamente a los conceptos, así: se plantea a los estudiantes del grado Once de la Institución Educativa Tomás Carrasquilla n°2 de la ciudad de Medellín, la situación problema de movilidad en zona aledaña a la institución educativa por el manejo inadecuado de los corredores viales calle-carrera con la descripción y las medidas reglamentarias. En la segunda parte, se plantea la pregunta: ¿Cuál es el ancho que debe tener la carrera para que el tractocamión pueda doblar la esquina en el primer intento?, es preciso, para ello, tener en cuenta las condiciones en contexto para ser desplegada a través de los conceptos geométricos y algebraicos. La tercera parte ofrece oportunidades para que el estudiante describa procedimientos matemáticos para hallar información tanto de la situación problema como su posible solución. Además de las operaciones matemáticas, el principal apoyo y estrategia para responder será el uso de la calculadora.

Luego se hace referencia al concepto de derivada como estrategia conceptual directa para la solución de la situación. La última parte, se enfoca en el proceso y la reflexión pedagógica en torno a la situación problema y el actuar del estudiante en condiciones específicas con el apoyo de la calculadora científica.

Con el propósito de diseñar estrategias concretas del pensamiento matemático desde la perspectiva del uso de la calculadora, se construye una propuesta didáctica que implique una experiencia para los estudiantes en tanto se involucra su situación particular para intentar soluciones o hallar las causas de dificultades que se pueden resolver con el saber matemático.

Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
11°	Pensamiento espacial. Pensamiento variacional.	• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. • Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. • Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. DBA 3-V2. Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.	• Explica las respuestas y resultados en un problema con las expresiones algebraicas y la pertinencia de las unidades utilizadas en los cálculos. • Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

Eje central:	punto crítico, máximo de una función
Objetivo:	Hallar el valor del máximo de la función que permite el paso de un tractocamión de una calle a una carrera con las unidades reglamentarias.
Conocimientos previos:	Semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, despeje de variables, función, dominio, punto crítico, máximo de una función, primera derivada
Recursos:	La función, calculadora científica, cuaderno, datos reglamentarios de calles, carreras y tractocamiones.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

La situación de aprendizaje se llevó a cabo teniendo en cuenta las siguientes actividades que permitieron una secuencia de reflexión, análisis de las condiciones iniciales, planteamientos de los pensamientos pertinentes para la búsqueda de la solución, relaciones entre la situación y los saberes previos de los estudiantes, de tal manera que se construyó una base teórica para resolver con los estudiantes. Se aclaró que las actividades orientan un mecanismo de solución, pero existen otras alternativas. Así, se logró reconocer las oportunidades que ofrece el uso de la calculadora científica Casio Classwiz fx-991LA X a través de sus funciones, precisamente en el caso de hacer una tabla de valores de una función específica de la que se logró inferir y graficar con ayuda de otro recurso complementario: CASIO EDU+.

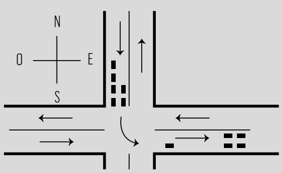
Actividad 1

Lee la siguiente situación:

Durante las últimas semanas una cantidad considerable de estudiantes de una institución educativa ha llegado tarde. Al indagar sobre las razones de tal fenómeno se halló la causa: cerca de la institución se está llevando a cabo una obra de construcción de viviendas y, en el momento en el que algunos vehículos se desplazan por la vía, encuentran como obstáculo un tractocamión. El conductor debe maniobrar en repetidas ocasiones para realizar el cambio vial de calle de 8 metros de ancho a carrera, lo que, en ocasiones, le toma más de 10 minutos. La carrera parece no contar con el ancho suficiente para que el conductor logre pasar en un solo intento y carga unas vigas que superan el largo del auto en 9 metros más. Además, es la única vía de acceso tanto para la obra como para la institución educativa.

Actividad 2

Figura 1. Insumos para desarrollar la actividad 2.



El Departamento Administrativo de Planeación de la Alcaldía de Medellín (2011) regula que cada carril debe tener un mínimo de 7 metros para dos carriles.

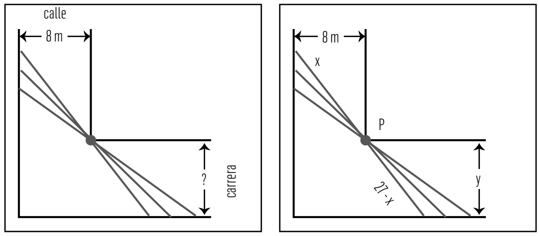
Fuente: freepick.

Con esta información responde: ¿Qué anchura debe tener la carrera para que el tractocamión pueda doblar la esquina en un solo intento? (No tener en cuenta el ancho del tractocamión).

a. Completa la gráfica con las condiciones iniciales: P, punto de “apoyo” en el que el tractocamión dobla de la calle a la carrera, y el ancho mínimo de la carrera para hacer un giro y x o $27 - x$ la variable del largo del tractocamión más la carga en la calle y carrera.

   Es necesario orientar al estudiante para que la gráfica sea la misma para todos y la información quede ubicada de manera concreta.

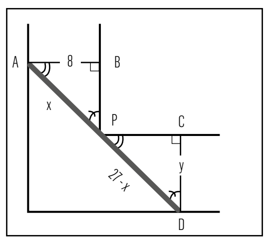
Figura 2. Gráficas del proceso.



Fuente: kjpargeter - freepik.

b. Considerando la posición del tractocamión en el momento de doblar en P, se forman dos triángulos rectángulos. Añade a la gráfica los puntos A y B como los extremos del segmento del ancho de la calle (8 metros), y C y D los extremos del segmento y.

Figura 3. Gráficas del proceso.

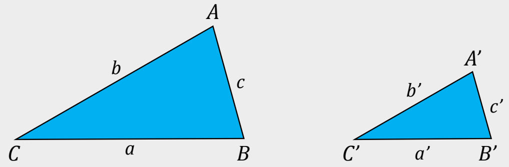


Fuente: kjpargeter - freepik.

El docente debe reorientar la construcción de la gráfica para que todas las indicaciones se ubiquen correctamente. Además, debe hacer alusión a los criterios de semejanza de los triángulos y se añaden los ángulos de igual medida.

c. Los triángulos ABP y PCD son semejantes por tener los ángulos respectivos congruentes. Establece las relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.



$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{B'A'} \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Además, por el criterio de semejanza ángulo y ángulo, es suficiente verificar que dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente a dos ángulos de otro triángulo. Adaptado de: www.aegeometria.com

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PC}|} = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PD}|}$$

d. Escoge solo las dos razones que relacionen las variables x y y a través de las condiciones iniciales y el teorema de Pitágoras.

$$\frac{|\overline{BP}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PD}|}$$

$$|\overline{BP}| = \sqrt{x^2 - 64} \qquad |\overline{CD}| = y \qquad |\overline{AP}| = x \qquad |\overline{PD}| = 27 - x$$

El propósito es orientar a los estudiantes para que deduzcan estas relaciones a través de la gráfica de los triángulos rectángulos que se presentan en el problema.

e. Reemplaza en las razones para que toda la expresión quede en términos de x y y. Despeja a la y.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 64}}{y} = \frac{x}{27 - x}$$

$$y = \frac{(27 - x)\sqrt{x^2 - 64}}{x}$$

La expresión de esta forma puede ser analizada como una función.

f. Halla el dominio de la función obtenida.

Las variables que se están analizando son longitudes, por lo tanto, sus valores son positivos: $y > 0$ y $x > 0$

Así, $\frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{x} > 0$

Como $x>0$, $(27-x)\sqrt{x^2-64} > 0$, por lo tanto,

$$(27-x) > 0 \qquad x < 27$$
$$\sqrt{x^2-64} > 0 \qquad x^2 - 64 > 0$$
$$x<-8 \text{ o } x>8,\ x>8$$

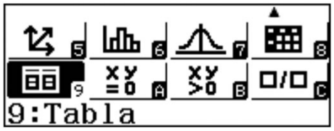
Se concluye que el dominio es la intersección entre $x > 0$, $x < 27$ y $x > 8$
(8,27), es decir, el dominio de la función.

Para precisar el valor del ancho de la calle se realiza la siguiente actividad.

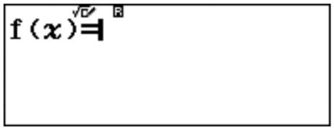
Actividad 3

Con la anterior información, halla el máximo valor de y (ancho de la calle), para que el tractocamión pueda voltear en un sólo intento.

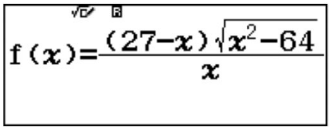
a. Utiliza la calculadora científica Casio Classwiz fx-991LA X, opción 9 para hacer la tabla con una función específica en el caso.



Cuando se accede a esta opción aparece:

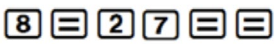


b. Se añade la función.

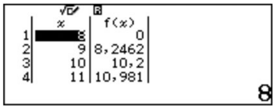


c. Aparece la función *g(x) y* nuevamente .

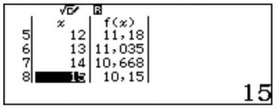
d. Introduce los valores del dominio de la función separados por una unidad.



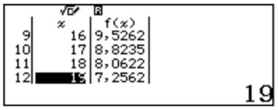
En este caso se puede analizar la tabla con diferencias en el valor de x con diferencia de una unidad. Se despliega la tabla con los siguientes valores:



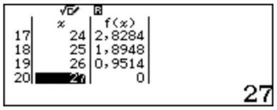
	x	f(x)
1	8	0
2	9	8,2462
3	10	10,2
4	11	10,981
		8



	x	f(x)
5	12	11,18
6	13	11,035
7	14	10,668
8	15	10,15
		15



	x	f(x)
9	16	9,5262
10	17	8,8235
11	18	8,0622
12	19	7,2562
		19



	x	f(x)
17	24	2,8284
18	25	1,8948
19	26	0,9514
20	27	0
		27

Donde el valor de $x = 12$ arroja el mayor resultado en $f(x) = y$.

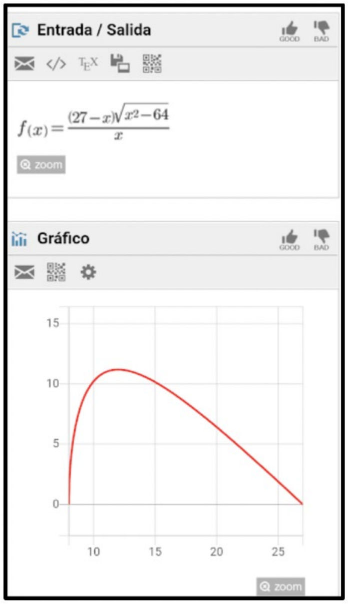
e. Analiza el valor x=12 en el intervalo del rango y comprueba si se trata del valor máximo.

Se puede utilizar separando el dominio entre (8, 12) y (12, 27).

f. Grafique la función utilizando la aplicación del Smartphone CASIO EDU+ con el QR de la calculadora para verificar el anterior punto.

Se busca el QR para analizar $x = 12$ desde la gráfica. El resultado obtenido es:

SHIFT OPTN



La gráfica demuestra que en el punto $x = 12$ se ubica un máximo.

g. Sustituye el valor $x = 12$ en la fórmula inicial.

$$y = \frac{(27 - 12)\sqrt{144 - 64}}{12}$$

$$y = 5\sqrt{5}$$

h. Concluye.

Por lo tanto, el ancho de la carrera debe ser mínimo despejada de $5\sqrt{5}$ metros.

Actividad 4

Existe otra estrategia para resolver la situación problema a través de la derivada de la función en el dominio.

$$y = \frac{(27 - x)\sqrt{x^2 - 64}}{x}$$

para x en (8, 27)

a. Halle la primera derivada de la función.

$$\boldsymbol{y' = \frac{1728 - x^3}{x^2\sqrt{x^2 - 64}}}$$

b. Use el criterio de la primera derivada para hallar los valores críticos:

$$\boldsymbol{y' = 0 \quad \rightarrow 1728 - x^3 = 0}$$

$$\boldsymbol{1728 = x^3}$$

$$\boldsymbol{12 = x}$$

$$\text{y}'\text{no existe en } \boldsymbol{x = 0} \text{ y } \boldsymbol{x = 8}$$

Pero ambos valores no existen en el dominio de la función, el único punto crítico es $x = 12.$

El estudiante debe analizar el valor $\boldsymbol{x = 12}$, con el criterio entre (8, 12) y (12, 27).

Aquí se puede remitir a la tabla de valores previamente realizada con la calculadora.

c. Analiza cómo se comporta la función en los puntos críticos dentro del dominio.

De nuevo, el estudiante puede utilizar la gráfica obtenida en CASIO EDU+ y observar que a la izquierda de $\boldsymbol{x = 12}$ la función es creciente (primera derivada positiva) y a la derecha decreciente (primera derivada negativa). Concluir con los estudiantes que en $\boldsymbol{x = 12}$ se da un valor máximo. Y volver a los resultados obtenidos en la Actividad 3, por lo tanto, el ancho de la carrera necesario para que el tractocamión, cargando la viga, pueda voltear en un solo intento "apoyado" en P es de $\boldsymbol{5\sqrt{5}}$ metros, es decir, mayor a 11.19 metros.

Experiencia de aula

En la búsqueda de experiencias prácticas para el desarrollo del pensamiento matemático en el aula encontré la situación particular en el grado octavo del grupo A, con quienes inició la jornada regularmente, llegaban tarde entre 14 y 18 estudiantes. Al indagar las razones, normalmente no tenían una respuesta concreta, solo expresaban "es por el transporte", refiriéndose al transporte escolar. Con el tiempo una estudiante en particular argumentó que su llegada tarde se debía a la obra cercana y expuso la situación problema que se planteó en la propuesta didáctica.

A partir de ese momento consulté en algunos libros de texto o situaciones problema en la red para el planteamiento del problema con lógica y conexión a saberes matemáticos escolares. Logré reconocer situaciones semejantes, pero fue necesario relacionar conceptos geométricos y variacionales que no suelo vincular.

Apareció el primer reto: a la fecha (segundo periodo escolar) ¿con cuál grupo podría trabajar la propuesta de tal manera que contaran con saberes previos pertinentes? A pesar de hallar la situación problema en el grado 8°, decidí desarrollarla con el grado 11° por razones tales como:

- Los estudiantes probablemente contaban con los saberes previos para el desarrollo de la propuesta.
- La práctica me permitía darle continuidad a la planeación para el siguiente periodo por los saberes trabajados.
- Los estudiantes del grado undécimo pronto se embarcarán en la experiencia universitaria y es importante que vinculen sus saberes a la comunidad.
- El uso de la calculadora y el dominio de los comandos se dan en el grupo.

El entusiasmo inicial de los estudiantes al plantearles la situación problema por poco se disipó cuando requerí de ellos los saberes geométricos, se escucharon expresiones como "¡profe, otra vez geometría, a mí eso ya se me olvidó todo!", pero fue sorprendente lo fácil que vincularon las actividades de la guía del estudiante con los saberes, aunque la guía inicial era menos concreta y se fue modificando por las sugerencias de los estudiantes.

Solo una estudiante notó la condición del punto P de apoyo y sostuvo que un tractocamión no se podía apoyar, razón por la cual se hizo la aclaración de tomar a P como un punto de referencia para no transgredir el espacio calle-carrera en la rotación del vehículo.

Los estudiantes, desde meses previos, han dado uso a la calculadora y es sorprendente lo fácil que es para ellos utilizar los comandos con indicaciones verbales de mi parte. Además, disfrutan con la herramienta porque agiliza los procesos, en el caso, para completar una tabla. Una actividad alternativa del momento consistió en dar cuatro números dentro del rango a cuatro estudiantes para que llevaran a cabo la sustitución sin ayuda de la calculadora para comprobar los resultados; otros tres estudiantes recibieron como tarea verificar tres valores fuera del dominio. Se demostró la precisión en la tabla.

Por cuestiones de tiempo y planeación periódica la Actividad 4 no se llevó a cabo, razón por la cual aparece como sugerencia y estrategia alterna.

El tiempo para la propuesta inicialmente fue de dos bloques de clase, es decir, dos encuentros de 110 minutos cada uno, pero no fueron suficientes.

Al finalizar la propuesta y hallar el valor propuesto como incógnita, los estudiantes demostraron desconcierto al descubrir que, a pesar de cumplirse la norma vigente respecto a los corredores viales, no es suficiente y se debería replantear el tránsito y uso de vehículos con carga que excede su tamaño, incluidas las horas pertinentes para tal función. Conclusión: "profe, seguiremos llegando tarde".

Reflexión pedagógica

El uso de calculadoras en las aulas no requiere convertirse en un modelo pedagógico, se constituye en un mecanismo de construcción de ambientes de aprendizaje con herramientas de apoyo para el desarrollo del pensamiento matemático. Implica el diseño de estrategias que orienten el análisis, la reorganización de los saberes, el diseño y despliegue de alternativas de solución para mejorar o sustituir un sistema de representación por otro.

Un estudiante que apoya sus procesos de pensamiento matemático en el uso de la calculadora científica, tiene el potencial de adquirir métodos y estrategias alternativas de representación que permiten trabajar a un nivel de complejidad matemática que no alcanzaría de otra forma.

La propuesta didáctica permite la conexión de experiencias reales con saberes matemáticos por usar una combinación de toma y procesamiento de datos reales y la forma de organizarlos y representarlos gráficamente para ser interpretados con mayor precisión.

Bibliografía

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas.* Prentice Hall.

Departamento Administrativo de Planeación. (2011). Plan Parcial Pajarito Polígono 22_de_4. Esquema - Jerarquización y secciones viales. Alcaldía de Medellín. https://www.medellin.gov.co/irj/go/km/docs/wpccontent/Sites/Subportal%20del%20Ciudadano/Planeaci%C3%B3n%20Municipal/Secciones/Informaci%C3%B3n%20General/Documentos/POT/7)%20ESQUEMA%20JERAQUIZACION%20Y%20SECCIONES%20VIALES.pdf

Ministerio de Transporte. (2004). *Ministerio de Transporte.* http://www.icesi.edu.co/blogs/pregradoeconomialogistica/files/2008/11/medidas-camiones.pdf

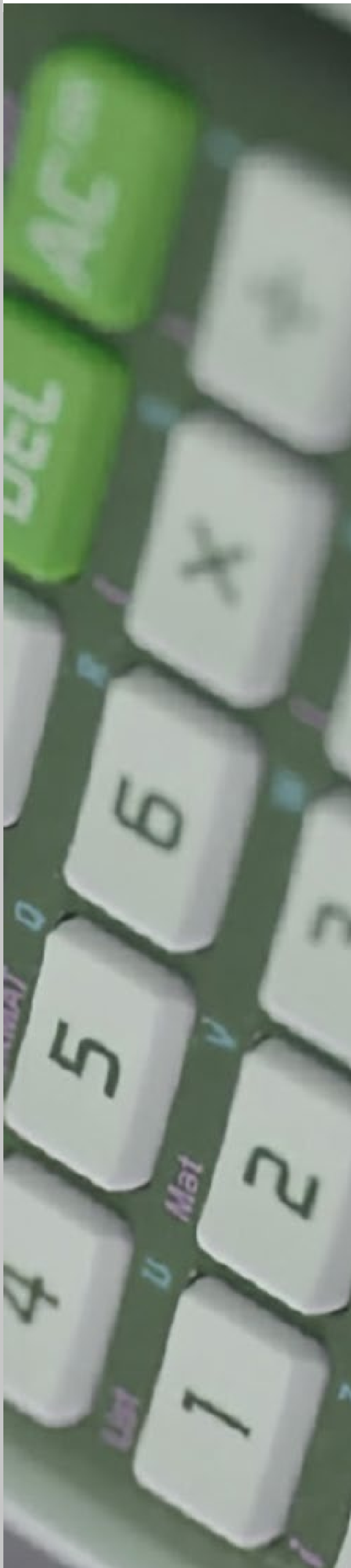
Uribe, J. (2005). *Matemática Experimental.* Uros Editores Ltda.

Reconocimientos

A quienes posibilitaron el desarrollo de la propuesta didáctica por su aporte en los distintos encuentros de capacitación con estrategias pedagógicas pertinentes al aula.

Se agradece a los estudiantes del grado Once por su cooperación y participación en las actividades con atención, disposición y disciplina de trabajo que permitió el desarrollo exitoso de la propuesta didáctica.

Guía **estudiante**



Solución a la vuelta de la esquina

Luisa Fernanda Marín Ramírez
luisafdamr@gmail.com
Institución Educativa El Corazón -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
11°	Pensamiento espacial. Pensamiento variacional.	• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. • Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. • Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

DBA relacionados:	**Evidencias de aprendizaje relacionadas:**
Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. DBA 3-V2.	• Explica las respuestas y resultados en un problema con las expresiones algebraicas y la pertinencia de las unidades utilizadas en los cálculos.

Eje central: punto crítico, máximo de una función

Objetivo:	Hallar el valor del máximo de la función que permite el paso de un tractocamión de una calle a una carrera con las unidades reglamentarias.
Conocimientos previos:	Semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, despeje de variables, función, dominio, punto crítico, máximo de una función, primera derivada
Recursos:	La función, calculadora científica, cuaderno, datos reglamentarios de calles, carreras y tractocamiones.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

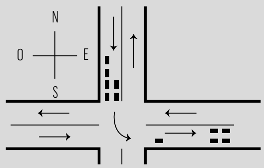
Actividad 1

Lee la siguiente situación:

Durante las últimas semanas una cantidad considerable de estudiantes de una institución educativa ha llegado tarde. Al indagar sobre las razones de tal fenómeno se halló la causa: cerca de la institución se está llevando a cabo una obra de construcción de viviendas y en el momento en el que algunos trasportes escolares se desplazan por la vía, encuentran como obstáculo un tractocamión. El conductor debe maniobrar en repetidas ocasiones para realizar el cambio vial de calle de 8 metros de ancho a carrera, lo que, en ocasiones, le toma más de 10 minutos. La carrera parece no contar con el ancho suficiente para que el conductor logre pasar en un solo intento y carga unas vigas que superan el largo del auto en 9 metros más. Además, es la única vía de acceso tanto para la obra como para la institución educativa.

Actividad 2

Figura 1. Insumos para desarrollar la actividad 2.



El Departamento Administrativo de Planeación de la Alcaldía de Medellín (2011) regula que cada carril debe tener un mínimo de 7 metros para dos carriles.

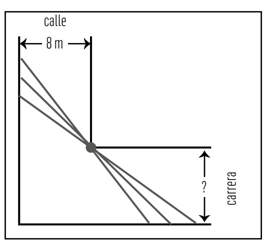
Fuente: freepick.

Con la anterior información , responde:

- ¿Qué anchura debe tener la carrera para que el tractocamión pueda doblar la esquina en un solo intento? (No tener en cuenta el ancho del tractocamión).
  ____
  ____
  ____
  ____
  ____.

a. Completa la gráfica con las condiciones iniciales: P, punto de "apoyo" en el que el tractocamión dobla de la calle a la carrera, y el ancho mínimo de la carrera para hacer un giro y x o $27 - x$ la variable del largo del tractocamión más la carga en la calle y carrera.

Figura 2. Gráficas del proceso.

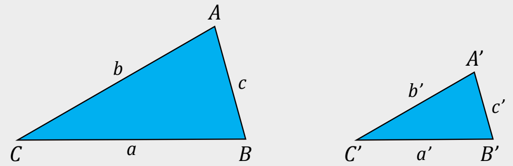


Fuente: kjpargeter - freepik.

b. Considera la posición del tractocamión en el momento de doblar en P, se forman dos triángulos rectángulos. Añade a la gráfica los puntos A y B como los extremos del segmento del ancho de la calle (8 metros), y C y D los extremos del segmento y.

c. Los triángulos ABP y PCD son semejantes por tener los ángulos respectivamente congruentes. Establece las relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño



$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{B'A'} \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Además, por el criterio de semejanza ángulo y ángulo, es suficiente verificar que dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente a dos ángulos de otro triángulo. Adaptado de: www.aegeometria.com

d. Escoge solo las dos razones que relacionen las variables x y y a través de las condiciones iniciales y el teorema de Pitágoras.

e. Remplaza en las razones para que toda la expresión quede en términos de x y y. Despeja a la y. La expresión de esta forma puede ser analizada como una función.

f. Halla el dominio de la función obtenida.

Actividad 3

Con la anterior información, halle el máximo valor de y (ancho de la calle) para que el tractocamión pueda voltear en un solo intento.

a. Utilice la calculadora científica Casio Classwiz fx-991LA X, opción 9 para hacer la tabla con una función específica en el caso.

b. Añade la función $f(x) = \frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{X}$

Recurre al siguiente proceso en tu calculadora

c. Aparece la función $x = 1$ y nuevamente .

d. Introduce los valores del dominio de la función separados por una unidad.

e. Analiza el valor del punto crítico en el intervalo del rango y comprueba si se trata del valor máximo.

f. Grafica la función con la aplicación del Smartphone CASIO EDU+ con el QR de la calculadora para verificar el punto anterior.

g. Sustituye el valor $x = 12$ en la fórmula inicial.

h. Concluye.

Actividad 4

Existe otra estrategia para resolver la situación problema a través de la derivada de la función en el dominio.

1. Halle la primera derivada de la función.

2. Use el criterio de la primera derivada para hallar los valores críticos.

    - **Definición:** si f está definida en $x = c$, decimos que c es un valor crítico de f si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.
    - **Teorema:** si f está definida en un intervalo abierto que contine a c y f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, es decir $x = c$ es un valor crítico

    Analiza cómo se comporta la función en los puntos críticos dentro del dominio.

Una aplicación de Probabilidad y Estadística mediada por la tecnología de la calculadora CASIO fx-991LA X

Edgar Daniel Sánchez Londoño
edgasalo@gmail.com
Institución Educativa San José Obrero -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Resumen:
Esta es una propuesta para la enseñanza de la probabilidad y la estadística que usa como eje el juego de los dados, tiene como objetivo contribuir a la construcción de los objetos mentales relacionados con Probabilidad y Estadística, basados en las situaciones didácticas cotidianas que se puedan resolver matemáticamente. La experiencia se llevó a cabo con estudiantes de grado 9 A de la I.E. San José Obrero. Además, involucra el uso de la tecnología con la Calculadora Casio fx-991LA X y busca la adquisición de conceptos por parte de los estudiantes por medio de experiencias o laboratorios de matemáticas.

Palabras clave:
Azar, probabilidad, espacio muestral, experimento aleatorio. Tablas de distribución de frecuencia.

Introducción

Esta es una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la estadística que usa como eje el juego de los dados tiene como objetivo contribuir a la construcción de los objetos mentales relacionados con Probabilidad y Estadística, basados en las situaciones didácticas cotidianas comunes en la enseñanza de la probabilidad que se puedan resolver matemáticamente.

Su puesta en escena involucra el uso de la tecnología con la calculadora Casio fx-991LA X y busca la construcción de conceptos por parte de los estudiantes por medio de experiencias o laboratorios de matemáticas. Como se trata de una propuesta, puede ser adaptada y complementada por la experiencia y contextos de los profesores que la usen por cuanto acude a los dados, pero no de manera exclusiva y se puede utilizar otros elementos como monedas y tomatodos, lo que facilita que los alumnos participen y busquen estrategias para ganar en un juego de azar vinculadas con la probabilidad y la estadística en relación con ambas ramas de las matemáticas que permita a los estudiantes tomar decisiones como un propósito de estudio del componente aleatorio.

Se recomienda evaluar el trabajo de grupo de los estudiantes al realizar las actividades propuestas y reflexionar sobre las conclusiones a las que puedan llegar, asociadas con probabilidad y estadística.

Relación con los documentos nacionales

Grado:	Pensamientos matemáticos relacionados:	Estándares básicos de competencias relacionados:
Noveno	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas y selecciono información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples con diversos métodos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
DBA asociado # 10. Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.	• Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio. • Construye diagramas de caja y, a partir de los resultados representados en ellos, describe y compara la distribución de un conjunto de datos. • Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización. • Elabora conclusiones para responder el problema planteado.
Eje central: Variables aleatorias y distribuciones	
Objetivo:	Posibilitar la construcción de objetos mentales relacionados con Probabilidad y Estadística en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa San José Obrero, basados en las situaciones didácticas cotidianas que se puedan resolver matemáticamente.
Conocimientos previos:	Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Tiempo de duración:	Dos semanas de clase. Ocho horas.
Recursos:	Dados, monedas, tabla para escribir los datos, proyector, computador con el emulador de la calculadora, red Wifi, las calculadoras Casio fx-991LA X.

Juegos de dados[1]

Esta es una propuesta que integra la probabilidad y la estadística y parte de situaciones típicas en el estudio de la probabilidad con tecnología de la calculadora Casio fx-991LA X, se hacen las tablas de distribución de frecuencia y los gráficos que permiten tomar decisiones respecto al juego que se propone.

Se espera que pueda ser enriquecida con las experiencias y contextos educativos de los docentes que la usen, quienes pueden acudir a otros elementos como monedas, tomatodos o múltiples combinaciones.

1 La situación propuesta fue tomada de manera literal de Godino et al. (2004).

Figura 1. Parqués para desarrollar el juego.

Fuente: Google.

Imaginen que van a jugar parqués con un compañero. Para comenzar a mover las fichas se requiere sacar un cinco al tirar uno de los dados, resulta que tu compañero prefiere salir sacando un tres, piensa que con ese número tiene alguna ventaja.

¿Qué opinas de lo que piensa tu compañero? ¿Tiene en realidad alguna ventaja?

Otro compañero sugiere que se haga un experimento de probabilidad. Piensa que de este modo se puede saber quién tiene la ventaja.

Siguiendo a Godino et al. (2004), se trata de llenar la siguiente tabla. Tratando de adivinar cuántas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuántas el 5 si se lanza un dado 24 veces. Los estudiantes deben escribir este número en la columna *Número esperado de veces*.

* El número de veces que sale cada cara del dado es su *frecuencia absoluta*. Si dividimos dicho número por el total de lanzamientos (en este caso, 24), obtenemos la *frecuencia relativa*.

Calcula la frecuencia relativa para obtener 5 y la otra para obtener 3 y 15 en el dado y completa todas las columnas de la tabla.

Tabla 3. Registro de lanzamientos.

Resultado	Veces que sale el número al tirar el dado.	Frecuencia absoluta. *	Frecuencia relativa *	Número esperado de veces
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total		24	1	24

Fuente: Zweigmedia (2018).

a. En la calculadora Casio fx-991LA X.
b. Usa el menú Estadística.
c. 1: Variable.
d. En la columna x se ingresan los valores que puede caer el dado {1,2,3,4,5,6}.
e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas.
f. Con SHIFT + QR.
g. Usa el celular con el App Casio EDU+ para escanear el código QR.
h. Observar en la aplicación el diagrama de barras de la distribución de frecuencias.
i. Con la función Clase se pueden integrar todos los resultados de los diferentes equipos para tomar una decisión.

Si queremos medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1, al cual llamamos probabilidad. Asignamos una probabilidad de 0 a un suceso que nunca puede ocurrir, por ejemplo, que salga un nueve. Asignamos un 1 a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento. Por ejemplo, que salga un número menor que siete. A cualquier otro suceso distinto del imposible de probabilidad 0 y del seguro de probabilidad 1 se le asigna un número entre 0 y 1 (Zweigmedia, 2018).

¿? ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera cuando lanzamos un dado?

- La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6.
- La probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3.
- La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 6.
- La probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3.
- La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 1/2.
- La probabilidad de obtener un 1 es menor que la de obtener un 1/2.

Lanzamiento de dos dados

Variables aleatorias

Definir una variable aleatoria en un experimento aleatorio consiste en asociar un valor numérico con cada suceso elemental del experimento. Interesa fundamentalmente asignar probabilidades a dichos valores numéricos.

En ocasiones los sucesos elementales de un experimento aleatorio son números. En esta situación esos números coinciden con el valor de una variable aleatoria.

Se presentan a continuación ejemplos y definiciones extraídos de Zweigmedia (2018).

Ejemplos

a. Tira un dado; el número hacia arriba.
   Valores de $\{1,2,3,4,5,6\}$

b. Elige un futbolista; el número de goles marcados por el futbolista durante la temporada.
   Valores de: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

c. Lanza una moneda tres veces; el número de veces que salen caras
   Valores de: $0, 1, 2, 3$

Tipos de Variable aleatoria

- **Variable aleatoria discreta.** Puede tomar únicamente valores numéricos específicos aislados, como el resultado de tirar un dado.
  - *Variable aleatoria finita discreta.* Las variables aleatorias discretas que pueden tomar solo un número finito de valores (como el resultado de un tiro de un dado).
  - *Variable aleatoria infinita discreta.* Las variables aleatorias discretas que pueden tomar un número efectivamente ilimitado de valores (como el número de pasos en un procedimiento) son variables aleatorias infinitas discretas.
- **Variable aleatoria continua.** Puede tomar cualquier valor dentro de un rango continuo o un intervalo, como la temperatura en Medellín o la altura exacta de un compañero en metros.

Ejemplos

Tabla 4. Tipos de variables y ejemplos.

Variable aleatoria	Valores	Tipo
Tirar un dado. El número de la cara superior	{0,1,2,3,4,5,6}	Finita Solo hay seis valores posibles.
Elige un futbolista. El número de goles marcados por el jugador durante la temporada.	0, 1, 2, 3, 4, ...	Infinita discreta No hay un límite máximo establecido para el número de goles.
Peso de tu montón de ropa sucia. El peso exacto en kg	Todos los números reales no negativos	Continua. El peso puede ser cualquier número no negativo en un rango continuo.

Fuente: Zweigmedia (2018).

La probabilidad simple se define como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, su valor siempre resulta entre cero y uno.

$$\boldsymbol{Probabilidad = \frac{Número\ de\ casos\ favorables(\ que\ cumplen)}{Número\ de\ casos\ posibles\ (\ todos\ los\ del\ espacio\ muestral)}}$$

Lanzamiento de dos dados

Analicemos ahora el lanzamiento de un par de dados.

Figura 2. Lanzamiento de dados.

Fuente: Google imágenes.

Tabla 5. Combinaciones posibles para las caras superiores al tirar un par de dados.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabla 6. Suma de las caras superiores.

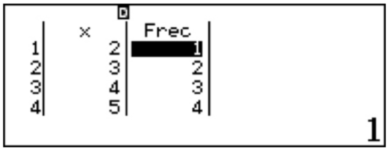
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

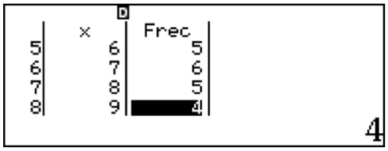
Fuente: el autor.

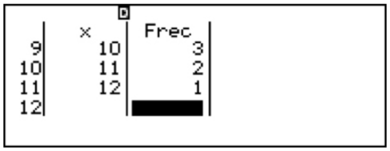
Se puede utilizar la calculadora para mostrar la distribución de la suma de los valores obtenidos al lanzar los dos dados haciendo uso de la aplicación Casio EDU+ y su calculadora.

Modo estadística

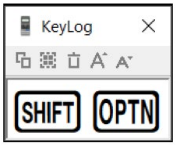
Ingresamos los valores de la variable y su frecuencia respectiva en la calculadora.



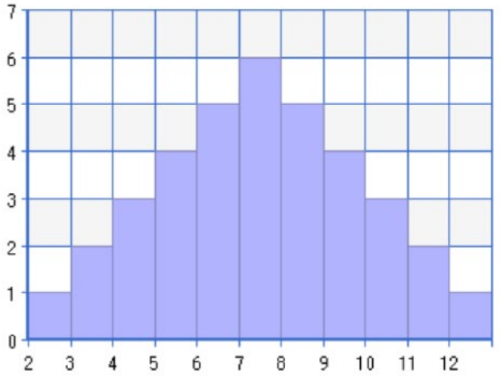




Para crear el código QR, presionar:



La gráfica de la distribución de frecuencias es:



Tabla

	x	Freq
1	2	1
2	3	2
3	4	3
4	5	4
5	6	5
6	7	6
7	8	5
8	9	4
9	10	3
10	11	2
11	12	1

Respuestas a las preguntas.

a) ¿Cuántos resultados posibles hay? 36
b) ¿Cuántos suman par? 18
c) ¿Cuántos suman impar? 18
d) ¿Cuántos suman siete? 6
e) ¿Por qué creen que las caras contrarias de un dado suman siete? Varía según los estudiantes.
f) ¿Cuántas sumas son números primos? 5
g) ¿Cuántas sumas son números múltiplos de tres? 4
h) ¿Cuántas sumas son números múltiplos de cinco? 2

Cada vez que se tiran los dos dados se obtiene una suma, esto es un evento. Calculemos la probabilidad de estos eventos:

$$P(sacar\ 2) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{1}{36}$$

$$P(sacar\ 3) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(sacar\ 4) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(sacar\ 5) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(sacar\ 6) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{5}{36}$$

$$P(sacar\ 7) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(sacar\ 8) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{5}{36}$$

$$P(sacar\ 9) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P\ (\ sacar\ 10) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(sacar\ 11) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(sacar\ 12) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{1}{36}$$

Tabla 7. Probabilidad con la suma de caras.

Suma de las caras superiores	Probabilidad
2	1/36
3	1/18
4	1/12
5	1/9
6	5/36
7	1/6
8	5/36
9	1/9
10	1/12
11	1/18
12	1/36

Fuente: el autor.

Usa la calculadora para pasar de fracción a número decimal tomando cuatro cifras después de la coma, para cada suceso.

a. En la calculadora Casio fx-991LA X.
b. Usa el menú Estadística.
c. 1-Variable.
d. En la columna x se ingresan los valores en los que puede caer el dado.
e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas.
f. Con SHIFT + QR.
g. Usa el celular con el App Casio EDU+ para visualizar el histograma correspondiente.

Tira los dados 50 veces y usa la tabla para escribir cuándo sale cada suma.

Puedes dibujar una raya oblicua cada vez que salga una suma en la columna Veces que sale una suma al tirar los dados.

Tabla 8. Registro de procedimientos.

Resultado	Veces que sale una suma al tirar los dados.	Frecuencia absoluta.	Frecuencia relativa.
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
Total		50	1

Fuente: el autor.

a. En la calculadora Casio fx- 991 LA X.
b. Usa el menú Estadística.
c. 1: Variable.
d. En la columna x se ingresan los valores posibles de la suma de los dos dados.
e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas absolutas y relativas.

f. Con SHIFT + QR.
g. Usa el celular con el App Casio EDU+ para escanear el código QR.
h. Observa en la App el diagrama de barras de la distribución de frecuencias.
i. Con la función Clase se pueden integrar todos los resultados de los diferentes equipos para establecer conclusiones.

Para compartir resultados en la clase, desde el celular seleccione la clase que previamente debe haber creado.

Para crear clase

Clase previamente creada

Para compartir resultados en la clase use:

Escanee el código QR creado en su calculadora

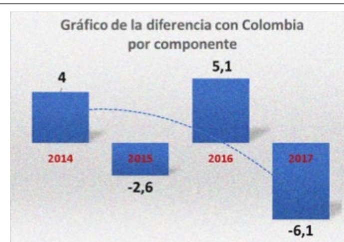
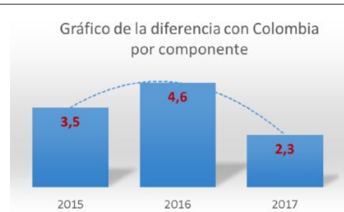
Escribir nombre o alias

Compara la gráfica que resulta de todos los grupos con la gráfica inicial de probabilidades y escribe las apreciaciones al respecto ____
____
____
____
______________________.

Experiencia de aula

Los datos de la Figura 3 corresponden al documento Siempre Día E. 7 Informe por colegio del cuatrienio; análisis histórico y comparativo para la Institución Educativa. San José Obrero 2018. Las gráficas ejemplifican las líneas de tendencia. En los tres ítems correspondientes al componente aleatorio de aprendizajes de las matemáticas en grado noveno, se nota un decrecimiento con respecto a resultados nacionales, lo que exige hacer una intervención en lo pedagógico que recupere los niveles que antes se tuvieron y los fortalezca.

Figura 3. Resultados Siempre Día E 2018.

PRUEBAS SABER GRADO NOVENO									
Aprendizajes de la competencia comunicación Matemáticas									
	PORCENTAJA DE RESPUESTAS INCORRECTAS				DIFERENCIA CON COLOMBA				GRÁFICOS
Aprendizajes de la competencia comunicación Aprendizajes	2014	2015	2016	2017	2014	2015	2016	2017	
Reconocer relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos y analizar la pertinencia de la representación. (Aleatorio).	31,0	39,6	41,1	62,6	4,0	-2,6	5,1	-6,1	
Comparar, usar e inerpretar datos de situaciones reales y traducir entre diferentes representaciones de un conjunto de datos. (Aleatorio).		56,2	56,2	55,2		3,5	4,6	2,3	

Reconocer la posibilidad o la imposibilidad de ocurrencia de un evento a partir de una información dada de un fenómeno. (Aleatorio)	60,4		56,7	17,5	-5,6	

Fuente: ICFES (2018).

La experiencia se desarrolló con el grupo 9A de la sede San José de la Institución Educativa San José Obrero, jóvenes entre 13 y 16 años que pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3, y que viven en la Vereda San José o en las urbanizaciones que recientemente se han construido en el Corregimiento de San Antonio de Prado. Es un grupo trabajador y receptivo. Realizar experiencias de este tipo en clase es un reto, hay pocos recursos disponibles, resistencia para aceptar propuestas innovadoras y la necesidad de desarrollar, de manera continua, las clases. En la actualidad el uso del teléfono celular con posibilidades de conexión a internet es común y masivo, lo que se busca es aprovechar estos recursos y brindar a los estudiantes oportunidades para pensar y desarrollar su pensamiento.

Reflexión pedagógica

De acuerdo con De Zubiria (2014), usamos mucho tiempo para enseñar algoritmos que hoy en día los estudiantes pueden hacer en un segundo con el apoyo de la calculadora. Hay que desarrollar en los estudiantes competencias transversales para pensar, convivir, interpretar, leer y escribir. Colombia invierte el 4 % del PIB en educación, no existen muchas herramientas para la enseñanza, salvo la creatividad y el esfuerzo que se haga para mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas, al participar del proyecto de la facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio, un proceso de formación y oportunidad de crecimiento profesional permanente y, sobre todo, compartir experiencias y vivencias con los pares y los instructores, hace reflexionar sobre el quehacer como maestro, de esa continua búsqueda de encontrar la manera para que las clases se vuelvan agradables, que reten al estudiante, que lo motiven y que los docentes dejen, poco a poco, de plantear situaciones irrelevantes, en algunos casos sin sentido, que promueven la mecanización operativa, más que el desarrollo del pensamiento. La propuesta es incluir las tecnologías en la clase, de las TIC, de usar el celular como herramienta pedagógica, las Tablet, pero hay que volver a lo básico, a lo que siempre hemos tenido en el aula: las calculadoras científicas. Estas calculadoras eran herramienta fundamental de los estudiantes de ingeniería y matemáticas no hace mucho tiempo, con algunas mejoras, en la actualidad, permiten presentar gráficos en el celular, manejar muchas más variables, conversiones y matrices. Contamos con el apoyo de un elemento de tecnología más cercano a ellos, que podrán usar en su vida como estudiantes de educación superior. Creo que es menester brindar a nuestros estudiantes el goce y la satisfacción de resolver un problema de la vida real que implique pensar, preguntar, verificar, hacer y volver a hacer.

Bibliografía

De Zubiría, J. (6 de noviembre de 2014). ¿Cómo mejorar la educación en Colombia? Las2Orillas. https://www.las2orillas.co/como-mejorar-la-educacion-en-colombia/

Díaz, J., Batanero, M. y Cañizares, M. (1991). *Azar y Probabilidad.* Sintesis.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

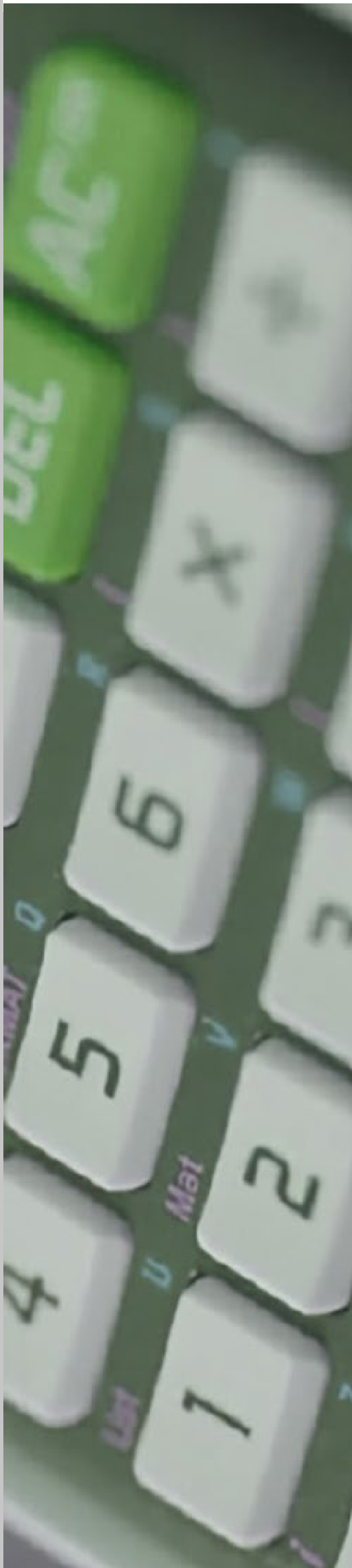
ICFES. (2018). *Resultados Siempre Día E-2018.* Institución Educativa San José Obrero. Medellín.

Lipschutz, S. (1972). *Matemáticas Finitas.* Seri Compendios Schaum.

Waner, S. y Costenoble, S. (16 de abril de 2019). Matemáticas finitas y cálculo aplicado: ¡todo!. https://www.zweigmedia.com/tcpage.php?book=combo&lang=es&ed=7

Zweigmedia. (2018). Teaching Better Math (versión may 2018) [software]. Zweigmdia. www.zweigmedia.com

Guía **estudiante**



Una aplicación de Probabilidad y Estadística mediada por la tecnología de la calculadora CASIO fx-991LA X

Edgar Daniel Sánchez Londoño
edgasalo@gmail.com
Institución Educativa San José Obrero -
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia, CO.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Noveno	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.

DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
DBA asociado # 10. Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.	• Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio. • Construye diagramas de caja y a partir de los resultados representados en ellos describe y compara la distribución de un conjunto de datos.

Eje central: Variables aleatorias y distribuciones

Objetivo: Posibilitar que los alumnos de grado 9 A de la Institución Educativa San José Obrero elaboren los objetos mentales relacionados con Probabilidad y Estadística, basados en las situaciones didácticas cotidianas que se puedan resolver matemáticamente.

Conocimientos previos: Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.

Recursos: Dados, monedas, tablas para anotar los datos, la calculadora y el emulador de los gráficos para agrupar todos los datos.

Desarrollo de la situación de aprendizaje

Actividad 1. Lanzamiento de un solo dado[1]

Los estudiantes trabajarán en equipos de dos personas.

No existe un reglamento oficial del parqué y en las diferentes regiones del país hay diferentes variantes, que se enunciarán más adelante. Todos los jugadores comienzan con sus fichas en las respectivas cárceles. El primer turno se escoge por medio de los dados: el jugador que saque el mayor número es el que comienza el juego. A continuación, tiene tres oportunidades para sacar sus fichas de la cárcel y arrastrarlas a la casilla de salida. Se sacan fichas con los pares, es decir, cuando ambos dados tienen el mismo valor. Por ejemplo, 1 - 1 y 3 - 3 son pares, Los pares 1 - 1 o 6 - 6 sacan todas las fichas de la cárcel; las restantes, como 3 - 3, sacan sólo dos. Existe una variación a esta regla, que debe ser acordada al comienzo del juego: Si el jugador obtiene 1 - 1 o 6 - 6 en los dados, podrá sacar de la cárcel, si quiere, dos fichas y en este caso tendrá de opción de mover una de las fichas el valor que tenga un dado, es decir, mover 1 o mover 6.

Para juego parqués se puede sacar alguna ficha se tiene que lanzar de nuevo, mover y pasar el turno. Para mover las fichas sólo hay que arrastrarlas a su posición de destino contando las casillas que hay que mover. Si se está en la salida y se saca 5 - 2, por ejemplo, se puede avanzar una ficha hasta la casilla de seguro o se puede mover 5 con una y 2 con la otra. A continuación, se pasa el turno. La única forma de obtener un turno extra es sacando pares. Si se sacan tres pares el jugador tienen derecho a sacar a una ficha del juego la que él quiera.

El turno se pasa al jugador por la derecha. Después de que haya salido de la cárcel, el juego continúa de la manera descrita anteriormente. La mecánica del juego continúa de esta manera hasta que algún jugador lleve todas sus fichas hasta la casilla final. En este momento, habrá ganado el juego.[2]

1 La situación propuesta fue tomada de manera literal de: Godino et al. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Universidad de Granada.

2 Las reglas del juego del Parqués fueron tomadas de XVIII Juegos Deportivos Nacionales y V Juegos Internacionales para Adultos Mayores (2018). Disponible en: https://confa.co/wp-content/uploads/2018/03/parques.odt.pdf.

Figura 1. Lanzamiento de dados.

Fuente: Google.

Como ilustra la imaginen, debes lanzar los dados del Parqués con un compañero. Para comenzar a mover las fichas se requiere sacar un cinco al tirar uno de los dados. Resulta que tu compañero prefiere salir sacando un tres, porque piensa que con ese número tiene alguna ventaja.

¿? ¿Qué opinas de lo que piensa tu compañero? ¿Tiene en realidad alguna ventaja?

____.

Otro compañero sugiere que se haga un experimento de probabilidad, que consiste en lanzar un dado y registrar los resultados. El piensa que de este modo se puede averiguar quién tiene la ventaja.

Para el desarrollo de esta actividad debes lanzar un dado y anotar los resultados en la tabla. Antes de lanzar el dado, trata de adivinar cuántas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuántas el 5 si lanzas un dado 24 veces, deben escribir este número en la columna "Número esperado de veces".

*El número de veces que sale un número en la cara superior del dado es su *frecuencia absoluta*. Si dividimos dicho número por el total de lanzamientos (en este caso, 24), obtenemos la *frecuencia relativa.*

Completa todas las columnas de la tabla.

Tabla 1. Registro de lanzamientos.

Resultado	Veces que sale el número al tirar el dado.	Frecuencia absoluta. *	Frecuencia relativa. *	Número esperado de veces.
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total		24	1	24

Fuente: MEN, 2018.

a. En la calculadora CASIO fx- 991LA X.
b. Usa el menú Estadística.
c. 1-Variable.
d. En la columna x se entran los valores que puede caer el dado {1,2,3,4,5,6}.
e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas.
f. Con SHIFT + QR.
g. Usa el celular con el App CASIO EDU+.
h. Observa en la App el diagrama de barras de la distribución de frecuencias.
i. Con la función Clase de pueden integrar todos los resultados de los diferentes equipos para tomar una decisión.

Para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le corresponde un número entre 0 y 1, llamado su probabilidad. le damos una probabilidad de 0 a un suceso que nunca puede ocurrir (evento imposible), por ejemplo, que salga un nueve. Asignamos 1 a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento (evento seguro). Por ejemplo, que salga un número menor que siete. A cualquier otro suceso distinto del imposible de probabilidad 0 y del seguro de probabilidad 1 se le corresponde un número entre 0 y 1.

Preguntas

Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas

- La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6.
- La probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3.
- La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 6.
- La probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3.
- La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 1/2.
- La probabilidad de obtener un 1 es menor que la de obtener un 1/2.

Actividad 2. Lanzamiento de dos dados

Introducción teórica

Variables Aleatorias.

Definir una variable aleatoria en un experimento aleatorio consiste en asociar un valor numérico a cada suceso elemental del experimento. Interesa fundamentalmente asignar probabilidades a dichos valores numéricos.

En ocasiones, los sucesos elementales de un experimento aleatorio son números, en esta situación esos números coinciden con el valor de una variable aleatoria.

Ejemplos.

a. Tira un dado; el número hacia arriba.
   Valores de {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b. Elige un futbolista; el número de goles marcado por el futbolista durante la temporada.
   Valores de: 0, 1, 2, 3, 4, ...

c. Lanza una moneda tres veces, el número de veces que salen caras
   Valores de: 0, 1, 2, 3

Tipos de variable aleatoria.

1. **Variable aleatoria discreta.** Puede tomar sólo valores numéricos específicos aislados, como el resultado de tirar un dado.
   a. *variable aleatoria finita discreta.* Las variables aleatorias discretas que pueden tomar solo un número finito de valores (como el resultado de un tiro de un dado)
   b. *variable aleatoria infinita discreta.* Las variables aleatorias discretas que pueden tomar un número efectivamente ilimitado de valores (como el número de pasos en un procedimiento) son variables aleatorias infinitas discretas.

2. **Variable aleatoria continua.** Puede tomar cualquier valor dentro de un rango continuo o un intervalo, como la temperatura en Medellín o la altura exacta de un compañero en metros.

Ejemplos.

Tabla 2. Tipos de variables y ejemplos.

Variable aleatoria	Valores	Tipo
Tirar un dado. El número de la cara superior	{0,1,2,3,4,5,6}	Finita. Solo hay seis valores posibles.
Elige un futbolista. El número de goles marcados por el jugador durante la temporada.	0, 1, 2, 3, 4, ...	Infinita discreta. No hay un límite máximo establecido para el número de goles.
Peso de tu montón de ropa sucia. El peso exacto en kg	Todos los números reales no negativos	Continua. El peso puede ser cualquier número no negativo en un rango continuo.

Fuente: Zweigmedia (2018).

La probabilidad simple se define como la división entre el número de casos favorables entre el número de casos posibles y debe estar entre cero y uno.

$$\boldsymbol{Probabilidad = \frac{Número\ de\ casos\ favorables(\ que\ cumplen)}{Número\ de\ casos\ posibles\ (\ todos\ los\ del\ espacio\ muestral)}}$$

Lanzamiento de dos dados

Analicemos ahora el lanzamiento de un par de dados

Figura 2. Lanzamiento de dados.

Fuente: Google imágenes.

Tabla 3. Combinaciones posibles para las caras superiores al tirar un par de dados.

(1,1)	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabla 4. Suma de las caras superiores.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Fuente: el autor.

¿? Preguntas

a) ¿Cuántos resultados posibles hay? (Espacio muestral del lanzamiento de dos dados) _________.
b) ¿Cuántos suman par? _________.
c) ¿Cuántos suman impar? _________.
d) ¿Cuántos suman siete? _________.
e) ¿Por qué creen que las caras contrarias de un dado suman siete? _________
____
____
____
____.

f) ¿Cuántas sumas son números primos? _________.
g) ¿Cuántas sumas son números múltiplos de tres? _________.
h) ¿Cuántas sumas son números múltiplos de cinco? _________.

Tabla 5. Registro de la probabilidad.

Suma de las caras superiores	Probabilidad
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Fuente: el autor.

Usa la calculadora para pasar de fracción a número decimal tomando cuatro cifras después de la coma, para cada suceso

a. En la calculadora CASIO fx- 991 LA X.
b. Usa el menú Estadística.
c. 1: Variable.
d. En la columna x se ingresan los valores que puedes obtener al lanzar el dado {1,2,3,4,5,6}.
e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas.
f. Para generar un código QR, presionar SHIFT + QR.
g. Usa el celular con el App CASIO EDU+ para visualizar el histograma correspondiente.

Ahora realizaremos un experimento lanzando los dados 50 veces y usa la tabla siguiente para anotar cuando sale cada suma.

Puedes colocar una raya oblicua cada vez que salga una suma en la columna Veces que sale una suma al tirar los dados.

Tabla 6. Registro de resultados.

Resultado	Veces que sale una suma al tirar los dados	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
Total		50	1

Fuente: el autor.

Ahora ingresaremos los datos en nuestra calculadora

a. En la calculadora CASIO fx- 991 LA X.
b. Usa el menú Estadística.
c. 1- Variable.
d. En la columna x se ingresan los valores que puede la suma de los dos dados {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11.12}.
e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas.
f. Con SHIFT + QR.
g. Usa el celular con el App CASIO EDU+ para escanear el código QR.
h. Mira en el celular el diagrama de barras de la distribución d frecuencias.
i. Con la función Clase se pueden integrar todos los resultados de los diferentes equipos para observar el comportamiento de la distribución con una cantidad mayor de datos.

Compara la gráfica que resulta de todos los grupos con la gráfica inicial de probabilidades y anota tus conclusiones ____

____

____

____

____

____.

Sobre autores

Mónica Marcela Parra-Zapata es candidata a Doctora en Educación, Magister en Educación-Línea Educación Matemática y Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. La Profesora ejerce su profesión hace 13 años, en la actualidad es docente del área de matemáticas y tutora del Programa Todos a Aprender (MEN) en la Institución Educativa Villa Flora. Es también profesora de catedra de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, allí orienta cursos en Pregrado y Maestría. Es integrante del grupo de investigación MATHEMA-FIEM, y miembro fundadora de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM), miembro y vocal por Sudamérica del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-CLAME y de Juventud Clame. Ha participado en diferentes proyectos de investigación y docencia con la Universidad de Antioquia, la Secretaría de Educación de Medellín y el Ministerio de Educación Nacional. Es coautora de los Derechos Básicos de Aprendizaje y las Mallas de aprendizaje para el área de matemáticas y de otras producciones académicas. Sus intereses en la educación son en particular la docencia a partir del trabajo por proyectos y la investigación en Educación Matemática especialmente la modelación matemática, la Educación Matemática en las infancias y el aprendizaje basado en proyectos. Ha realizado publicaciones académicas en revistas, libros y eventos nacionales e internacionales. Su información académica está disponible en: http://scienti.colciencias.gov.co:8081/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001349413.

César Lau es economista, realizó sus estudios doctorales en la universidad Nacional Mayor de San Marcos en Lima-Perú en la especialidad de Economía de Gestión Global, es director de la división académica de Casio en América Latina y lidera procesos de formación de docentes de matemáticas, en instituciones educativas públicas y privadas de países de América Latina, en congresos internacionales de Educación Matemática, organizaciones educativas de ámbito nacional o internacional, tiene 25 años de experiencia como educador matemático.

Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo es Licenciada en educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Actualmente adelanta su formación como Magister en Educación. La Profesora ejerce su profesión hace 13 años, en la actualidad es docente de Matemáticas en los grados décimo y undécimo de la Institución Educativa Barrio Olaya Herrera. Ha sido profesora en colegios públicos y privados de la ciudad de Medellín y del departamento de Antioquia y hace parte del grupo de

Investigación MATHEMA-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Sus intereses en la educación y en investigación son la Educación Matemática y la Modelación Matemática en Educación Primaria.

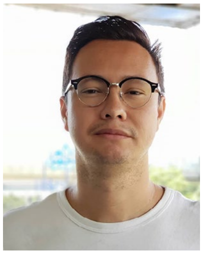
Maria Leonor Vélez Aramburo es odontóloga de profesión, ha dedicado parte de su vida profesional al desarrollo del sector educativo. Persiguiendo su pasión, desde hace varios años ha trabajado como líder del proyecto GAKUHAN, de apoyo a la enseñanza de las matemáticas con tecnología CASIO, en Colombia. Durante este tiempo, ha hecho contribuciones en el desarrollo de este, a la cabeza de colaboraciones con secretarías de educación e instituciones educativas públicas y privadas. De su labor profesional se destaca el haber organizado talleres de formación y eventos académicos para un significativo número de maestros de matemáticas en Colombia; entre otras, colaboraciones con la Universidad de la Sabana, Secretaría de Educación de Medellín y la Universidad de Antioquia.

John Alexánder Alba Vásquez es Ingeniero Químico de la Universidad Nacional de Colombia, Magíster en Pedagogía de la Universidad de La Sabana. Jefe de Gestión Curricular Universidad de La Sabana, miembro del Consejo de la World Association of Lesson Studies (WALS), investigador vinculado a los grupos "Educación y Educadores" y "Pedagogía de los saberes y disciplinas", profesor del seminario de Teoría de la Evaluación en las Maestría en Pedagogía y de Evaluación del aprendizaje de la Maestría en educación Médica de la misma Universidad. Por varios años fue el director de la Maestría en Pedagogía de la Universidad de La Sabana, docente de los seminarios de investigación, Enseñabilidad de la Matemática y Estrategias Didácticas para el desarrollo del Pensamiento Matemático de la maestría en Pedagogía. Cuenta con una amplia experiencia como docente de pregrado, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de La Sabana, en las áreas de Matemáticas, Química y Operaciones Unitarias; docente de la Escuela Internacional de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de La Sabana, en las áreas de matemáticas y cálculo aplicado, a nivel de educación secundaria; jefe del departamento y docente de matemáticas.

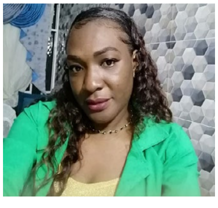
Alexánder Castrillón-Yepes Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. Estudiante del programa Doctorado en Educación en la línea Educación Matemática de la misma Universidad. Ha sido investigador en proyectos de investigación e innovación en educación, ha participado en diferentes eventos nacionales e internacionales y cuenta con publicaciones frente al uso de las tecnologías, la modelación, el trabajo interdisciplinario y la formación de profesores de matemáticas.

Ha promovido y participado de la estrategia de Semilleros de Investigación en la Universidad de Antioquia, donde coordinó la Red de Semilleros de Investigación (RedSIN UdeA) durante los periodos 2018-2019 y 2019-2020. Actualmente, es coordinador del Semillero de Investigación MATHEMA, miembro de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM), de Juventud CLAME y del grupo de investigación MATHEMA-FIEM.
Su información académica está disponible en: https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001632433.

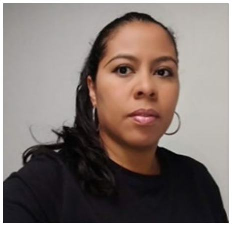
Jhony Alexánder Villa-Ochoa es Licenciado en Matemáticas y Física, Magister y Doctor en Educación-Línea Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. Es profesor titular de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, allí orienta cursos en Pregrado, Maestría y Doctorado. En la actualidad es el editor de la Revista Uni-pluriversidad de la Universidad de Antioquia. Ha participado en diferentes proyectos de investigación y docencia con la Universidad de Antioquia, la Secretaria de Educación de Medellín y El Ministerio de Educación Nacional así como en proyectos internacionales. Es integrante del grupo de investigación MATHEMA-FIEM, y miembro fundador de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM). Sus intereses en la investigación son la modelación matemática, el uso de las tecnologías y la formación de profesores. Ha realizado publicaciones académicas en revistas, libros y eventos nacionales e internacionales. Su información académica está disponible en: https://jhonyvilla.wordpress.com/



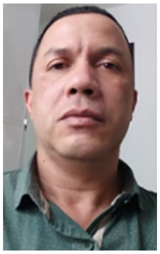
Edwin Enrique Correa Carmona es Ingeniero Químico de la Universidad de Antioquia, Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. El profesor ejerce su profesión hace once años, en la actualidad es docente de matemáticas en los grados noveno, décimo y once de la Institución Educativa Mater Dei. Como docente se ha interesado en el uso de las herramientas tecnológicas en el aula, tratando de explotar al máximo el vínculo estudiante–tecnología. Sus intereses en la educación y en la investigación son mejorar la percepción de los estudiantes hacia las matemáticas y las ciencias exactas, haciendo un uso adecuado de las herramientas tecnológicas.



Lorena Mena Mena es licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica del Chocó “Diego Luis Córdoba”, Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Colombia. La Profesora ejerce su profesión hace 21 años, en la actualidad es docente del área de física y matemáticas en la Institución Educativa Villa Flora. Como docente investigadora busca que el estudiante construya su conocimiento, basada en la teoría de Ausubel con el aprendizaje significativo, relacionando el conocimiento previo con el nuevo conocimiento, porque sabemos que los conocimientos se relacionan de forma sistemática. Ser docente le permite desarrollar las habilidades de los estudiantes, en las competencias básicas, científicas y laborales y le permite aprender cada día más de sus estudiantes, lo cual la lleva a diseñar propuestas metodológicas acorde a las necesidades que ellos presentan.



Paula Andrea Barrientos Tascón es Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Magister en La Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. La profesora ejerce su profesión hace 12 años, en la actualidad es docente del área de Matemáticas y Física en los grados 10° y 11° de la Institución Educativa San Pablo. Los 5 años de Formación inicial le permitieron manejar conceptos de las asignaturas que debe presentar a sus estudiantes, pero 12 años en el aula la han motivado a repensarse como docente y cada que encuentra dificultades conceptuales y procedimentales en sus estudiantes, busca estrategias para ayudarlos a alcanzar las competencias básicas de aprendizaje. El uso adecuado de la calculadora (ClassWiz) dentro del aula de clase le permitió avanzar en la enseñanza de conceptos y procedimientos que en ocasiones son tediosos para los estudiantes. Su interés en la educación es encontrar una estrategia eficaz para nivelar los estudiantes que lleguen en cualquier momento a su aula, sin importar las condiciones particulares de cada uno de ellos y de acuerdo con los documentos rectores del país. Durante los últimos 6 años se ha dedicado a enseñar estrategias a jóvenes de grado 11° para abordar la Prueba Saber y sus ingresos a las universidades públicas, además a desarrollar preguntas por competencias en el área de matemáticas y capacitar a otros docentes en la elaboración y abordaje en la evaluación por competencias.



Jeyson Emilio Palacio Vásquez es Ingeniero Mecánico de la Universidad Nacional Sede Medellín. El profesor ejerce su profesión hace 13 años, en la actualidad es docente del área de matemáticas en la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo. Es un docente interesado por despertar el talento y el interés de los estudiantes por el amor al conocimiento e infundirles que el estudio es la base para cambiar su vida y transformar su futuro. Así como en aprender y aplicar pedagogía en lo posible práctica que permite que el estudiante se interese por adquirir conocimiento. La educación es el eje transformador de una nación y le interesa ser parte de esta transformación apoyando a los estudiantes en la investigación y profundización de los conocimientos.

Jorge León Echeverri Echeverri es Ingeniero de Sistemas de la Universidad de Antioquia, Especialista en Gerencia Integral del Politécnico Jaime Isaza Cadavid. Es profesor hace 22 años en diversas instituciones educativas públicas y privadas, en la actualidad es docente de Media Técnica en Sistemas en los grados decimo y undécimo en la Institución Educativa Félix Henao Botero. Una vez termino su formación inicial y en vínculo con la docencia (hace cinco años) se dedicó a compartir sus experiencias y conocimientos con los estudiantes de su actual institución educativa. Lo más importante es poder orientar a los jóvenes, no solo en los conocimientos técnicos y de las diferentes asignaturas en las que imparte, sino acompañarlos a afianzar sus principios y valores como seres humanos cada vez mejores.

Johan Andrey Salazar Piedrahita es Licenciado en matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Magister en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. El profesor ejerce su profesión hace 12 años, en la actualidad es docente de Matemáticas en los grados séptimo de la Institución Educativa la Independencia. Ha trabajado en proyectos de investigación que buscan potenciar la vinculación de las herramientas tecnológicas en los procesos educativos con la universidad EAFIT y el Centro de innovación y Desarrollo (CID) de Envigado, además, adelanta un proceso investigativo en la institución donde labora articulando diferentes asignaturas con enfoque STEM y pensamiento computacional. Sus intereses en la educación y en investigación son buscar nuevas estrategias enfocadas a metodologías activas que potencien el aprendizaje en los estudiantes y mejoren las prácticas de aula, al igual que fortalecer la investigación escolar como eje de los procesos institucionales.

Javier Orlando Marín Sánchez es Tecnólogo Químico de la Universidad de Antioquia; Ingeniero en Alimentos de la Corporación Universitaria Lasallista; Abogado de la Universidad de Antioquia, Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. El Profesor ejerce su profesión hace 12 años y medio, en la actualidad es docente de Matemáticas en los grados decimo y once de la Institución Educativa San Juan Bosco, ubicada en el barrio Campo Valdés. Se ha desempeñado como docente de matemáticas y física, constantemente se capacita en diferentes actividades que aportan a su formación como maestro, con la finalidad de integrar estos conocimientos a las clases. Sus intereses en la educación y en la investigación se han enfocado en generar un pensamiento crítico con respeto por la diferencia, desde el estudio de las ciencias exactas como un entrenamiento para la mente, concatenado con la parte social, en pro de que seamos mejores personas como fin primordial y de esta manera poder llegar a ser grandes profesionales, para quienes así lo deseen.

Luisa Fernanda Marín Ramírez es licenciada en matemáticas y física y Magister en Educación de la Universidad de Antioquia. La Profesora ejerce su profesión hace 17 años, en la actualidad es docente de matemáticas en los grados séptimo y noveno de la Institución educativa El Corazón. Trabaja como docente desde el año 2004 en el área de matemáticas en los grupos de secundaria y en algunas oportunidades en el área de física. Su interés en la educación y en investigación consiste en potenciar en los estudiantes a través de los saberes matemáticos y los recursos tecnológicos, el reconocimiento y liderazgo de la realidad que se les presenta en permanente transformación. Realizó su trabajo de investigación en la maestría acerca de las competencias digitales de los estudiantes de secundaria cuando se reconocen como ciudadanos digitales en el aula, el cual se tituló "Perspectiva de la ciudadanía digital, una experiencia desde el aula".

Edgar Daniel Sánchez Londoño es Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, Magíster en La Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. El profesor ejerce su profesión hace 18 años, en la actualidad es docente del área de matemáticas, ciencias naturales y física en los grados sexto, octavo, décimo y once en la Institución Educativa San José Obrero. Allí orienta un Proyecto experimental tendiente a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la mecánica newtoniana en la escuela primaria. Participó en el III Congreso Nacional de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología- EDUCYT- Universidad de Nariño en el año 2012. Sus intereses en la educación y en la investigación son la enseñanza de las ciencias para niños y niñas y la preparación de los estudiantes para pruebas externas y de selección universitario, los proyectos educativos ambientales PRAE articulados al P.E.I. mediante ejes temáticos. Publicó un artículo de divulgación para la revista TEXTOS de la Universidad Pontificia Bolivariana para la formación inicial de maestros.

Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora. Propuestas y experiencias, presenta las reflexiones de maestros y maestras de la Secretaría de Educación de Medellín en relación con su experiencia y en situaciones didácticas con calculadora, las cuales se han presentado dentro del Proyecto CODI 2020-34799 del grupo de investigación Mathema-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y el Grupo Statur con el proyecto Gakuhan de Casio Calculadoras durante los años 2021 y 2022, en diferentes instituciones educativas de la ciudad de Medellín.

El proyecto Gakuhan de Casio Calculadoras es una iniciativa de Casio Japón, liderada en Colombia por Grupo Statur que, en convenio con la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, propuso una estrategia de formación de maestros y maestras con el objetivo de invitar a la reflexión, principalmente sobre la relevancia que cobra el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y las múltiples maneras en las que se pueden diseñar y potenciar varias situaciones didácticas en el aula, como la modelación matemática o STEM+H y que están mediadas con esta tecnología.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación
CASIO CLASSWIZ LAX
STATUR GROUP DON'T STOP