Desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos en situaciones relacionadas con triángulos

(Los casos de los grados tercero y décimo de la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo)

Gabriel David Machado Moreno

Daniela Marín Gallego

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en educación básica con énfasis en Matemáticas

Tutor

René Alejandro Londoño, Doctor (PhD) Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Enseñanza de las Ciencias y las Artes

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Medellín, Antioquia, Colombia

2022

Dedicatoria

Ante todo, este trabajo se lo dedico a esos seres que me apoyaron en este recorrido en mi paso por la universidad, a todxs lxs que me vieron reír, llorar, desvelarme y hasta querer dejar la carrera por múltiples razones y que igual insistieron en no rendirme en este camino, alentándome a continuar. También, se lo dedico a mis niñxs, aquellxs que ya no están y a estos peluditos de largos bigotes que me acompañan en mis desveladas. Les prometo que todo esto no fue en vano y que de igual manera seguiré luchando por mis ideales. Como dice Emma Golman: "Si no puedo bailar, no quiero ser parte de la revolución"

-Azul

Este trabajo se lo dedico a mi familia, por estar siempre apoyándome y acompañándome desde que inicié mi carrera, siempre pendientes de mi salud emocional y física. También, va dedicado a aquellos amigos que siempre estuvieron brindándome su fortaleza y apoyo en aquellos momentos y situaciones difíciles en los que pensé que no lograría culminar mis estudios. Por último, a aquellos profesores (en especial al profesor René Alejandro Londoño Cano) que aportaron su granito de arena y motivaron nuestro proceso como estudiantes investigadores, mostrando que sí es posible construir nuevas ideas a partir de esos procesos y enseñanzas tan bonitos que la Facultad de Educación aportó a mi formación profesional.

"Quien enseña, aprende al enseñar y quien enseña aprende a aprender"

Paulo Freire.

Gabriel David Machado Moreno.

Agradecimientos

Muchas gracias a todxs lxs profes y maestras que estuvieron compartiendo sus saberes, sus ideas, sus ideales y demás para este proceso.

A lxs grandes pensadoras en lxs cuales me apoyé.

Al profesor René Alejandro Londoño Cano por su paciencia y dedicación para con este trabajo y su genial actitud para enseñarnos.

-Azul

Agradezco especialmente a mi madre, la señora Luz Marina Moreno, quien siempre estuvo conmigo en todo momento y nunca me dejó solo en este proceso tan importante de mi vida, a pesar de estar ejerciendo otras labores.

Agradezco al profesor René Alejandro Londoño Cano por todo su apoyo, sus consejos y su motivación al momento de asesorar nuestro proceso de prácticas y de trabajo de grado. Son pocos los maestros que muestran una entrega profunda a su profesión y que dejan una huella en el corazón de sus estudiantes.

Gabriel David Machado Moreno

Índice de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Siglas, acrónimos y abreviaturas

APA	American Psychological Association
AAA	Ángulo-Ángulo-Ángulo
DBA	Derechos Básicos de Aprendizaje
De	Caso del grado décimo
EBC	Estándares Básicos de Competencias
INEM	Instituto Nacional de Educación Media
LAL	Lado-Ángulo-Lado
LCM	Lineamientos Curriculares de Matemáticas
LLL	Lado-Lado-Lado
MEN	Ministerio de Educación Nacional
RAE	Real Academia Española
Te	Caso del grado tercero
UdeA	Universidad de Antioquia

Resumen

Esta investigación abordó el tema del desarrollo de la intuición para la comprensión en situaciones relacionadas con triángulos, en el marco de la práctica pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia; para ello, la pregunta de investigación que movilizó este estudio fue ¿Cómo se desarrolla el conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos en situaciones relacionadas con triángulos? En relación con este interrogante, el objetivo trazado fue el de analizar el desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos en situaciones relacionadas con triángulos.

La metodología utilizada se enmarca en el enfoque cualitativo y el método el estudio de casos de cuerdo a Stake (2007), del cual se tomaron dos casos para hacer el respectivo análisis, uno de tercer grado y otro de décimo grado, para ello, los casos fueron distribuidos en tres categorías con el fin de observar si el desarrollo de conocimiento intuitivo logrado da paso a la comprensión y si esta se va refinando o evolucionando.

Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes tanto de grado tercero como de décimo desarrollaron diferentes tipos de intuición, pasando de intuiciones primarias a intuiciones más refinadas. A su vez, se pudo percibir en los estudiantes los dos tipos de comprensión mencionados por Font (2007) en su investigación; la comprensión por representaciones y la comprensión por competencias, adquiriendo así nuevos conocimientos que se van transformando en intuiciones secundarias.

Palabras clave: Intuición, comprensión, triángulos, enseñanza.

Abstract

This research addressed the issue of the development of intuitive knowledge for understanding in situations related triangles, within the framework of the pedagogical practice of the bachelor's degree in Basic Education with emphasis in Mathematics at the University of Antioquia; for this purpose, the research question that mobilized this study was: How is intuitive knowledge developed for the understanding of geometric concepts in situations related to triangles? In relation to this question, the objective was to analyze the development of intuitive knowledge for the understanding of geometric concepts in situations related to triangles.

The methodology used is framed in the qualitative approach and the case study method according to Stake (2007), from which two cases were taken to make the respective analysis, one of third grade and another of tenth grade, for this, the cases were distributed in three categories in order to observe if the development of intuitive knowledge achieved gives way to understanding and if this is refined or evolving.

The results obtained show that students in both third and tenth grade developed different types of intuition, going from primary intuitions to more refined intuitions. At the same time, it was possible to perceive in the students the two types of comprehension mentioned by Font (2007) in his research; comprehension by representations and comprehension by competencies, thus acquiring new knowledge that is transformed into secondary intuitions.

Keywords: Intuition, understanding, triangles, teaching.

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas se ha ido transformando con el pasar del tiempo, dejando solo de ser una ciencia de números, así entendida por algunos, y, transformándose gracias a la implementación de diferentes recursos didácticos que proporcionan estrategias que permiten la mejoría de los procesos de enseñanza en diferentes pensamientos que integran el conocimiento matemático. En el contexto de la Educación Matemática, la geometría es una de esas ramas de la matemática que ha ido evolucionando gracias a los diferentes métodos utilizados por los docentes en el aula, bajo los cuales se ha ayudado a mejorar la comprensión de las propiedades de las figuras en el plano y el espacio. El triángulo, conocido como el más simple de los polígonos, es una de las primeras figuras que se estudian en el pensamiento espacial, y, de ella, se da paso al aprendizaje de otros polígonos y redes conceptuales más complejas.

La intuición o conocimiento intuitivo de acuerdo a Fischbein (2002), es entendida por algunos pensadores matemáticos como aquellas ideas iniciales que ayudan a formar o evolucionar el conocimiento en el hombre, ya que permite construir ideas a partir de algunas nociones o percepciones mentales que contribuyen a tener aprendizajes importantes y una mejor comprensión de diferentes situaciones en las que esos saberes se están construyendo. En los espacios de formación y gracias a los procesos de práctica pedagógica, se observó que los estudiantes de los grados tercero y décimo de la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo, al momento de adquirir nuevos saberes en relación con el uso del triángulo y sus propiedades, pasaron por una intuición y, a partir de esta, se generó una comprensión matemática acorde a su madurez cognitiva, que les permitió el desarrollo de un nuevo conocimiento.

Ahora bien ¿cómo se desarrolla el conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos en situaciones relacionadas con triángulos? Este trabajo de investigación, acompañado de las prácticas pedagógicas, tuvo como objetivo hacer un análisis al desarrollo del conocimiento intuitivo en diferentes actividades en las que el triángulo se encuentra inmerso, además, permitió observar cómo el uso de esa intuición da paso para que se genere una comprensión de los conceptos y propiedades del triángulo en el aula. Esto gracias a que, en los grados tercero y décimo de la Institución, se apreciaron algunas dificultades para la comprensión de los conceptos en relación con las experiencias previas. Ahora bien, para dar solución a la pregunta de investigación, fue necesario, primero, detectar esas dificultades que tuvieron los estudiantes al momento de utilizar la intuición para comprender conceptos geométricos, así como dar una posible categorización de qué tipo de intuición se utilizó y cómo se fue transformando a medida que el estudiante adquirió nuevos conocimientos.

Para lograr los objetivos y dar respuesta a la pregunta, se realizaron tres actividades correspondientes a tres fases distintas y cada una analizada desde tres categorías, lo que permitió realizar un análisis detallado a las respuestas generadas por los estudiantes. Estas actividades se recogieron en los instrumentos de recolección de datos, que, para nuestro caso, son diferentes tipos de entrevistas. Los resultados de esta investigación evidencian el uso de la intuición que posibilita el aprendizaje significativo de algunos conceptos y permite una comprensión más profunda en las diferentes situaciones en las que el triángulo se encuentra inmerso en las actividades; por último, se analizó cómo esa comprensión da paso a nuevos conocimientos y esos conocimientos generan nuevas intuiciones en el estudiante.

1. Contextualización del Estudio

Este capítulo aborda el problema de investigación propuesto durante el proceso de prácticas pedagógicas desarrolladas en la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo, en el que se plantea un objetivo y una pregunta de investigación, y a su vez, se enlaza el objeto de estudio (intuición y comprensión) con el objeto de saber específico (los triángulos), en el que se hace una revisión teórica, haciendo énfasis en los argumentos y definiciones propuestos por Fischbein (2002) acerca de la intuición y de las investigaciones enfocadas en la comprensión matemática.

1.1 Problema de Investigación

En el abordaje de algunas situaciones que implican un razonamiento geométrico intuitivo, el estudiante presenta dificultades para la construcción de conocimiento con conceptos que involucran el uso de triángulos y sus propiedades, lo que genera inconvenientes en el proceso de comprensión.

1.1.1 Justificación del Problema

A través de la historia, la humanidad ha avanzado y evolucionado, pasando de ser seres primitivos e individuales dominados por el instinto, a vivir en sociedades en las que la expansión de sus ideas permite nuevas prácticas que ayudan al crecimiento y desarrollo social en el transcurrir del tiempo. El constante uso de ciertas prácticas deja de lado aquellos procesos formados por el instinto y da paso a nuevas ideas intuitivas de proceder, en las que diferentes problemáticas surgen y permiten el uso constante de lo que ya se tiene interiorizado desde lo social y científico, siendo cada vez más frecuentes. Gracias a estos procesos intuitivos que pasan desapercibidos o que sencillamente no se tienen en cuenta, el ser humano ha dado paso al descubrimiento constante de nuevas ideas y desarrollos científicos y sociales, para los que la matemática juega un papel importante en esa transformación social (edificaciones, vías de acceso, sector comercial y la misma ciencia, entre otros).

Diferenciar la intuición del instinto no es trivial, es por eso que, para muchos, su significado es el mismo o son muy similares en su percepción. El instinto se define, desde la RAE, como conjunto de pautas de reacción que […] contribuyen a la conservación de la vida del individuo y de la especie; mientras tanto, la intuición toma diferentes perspectivas, según quien la trabaja (para algunos la intuición es vista como algo positivo que ayuda a la interiorización de nuevas ideas y para otros es vista como algo negativo, casi inexistente). Encontramos así, diferentes posturas relacionadas con el concepto y uso de la intuición. En las obras de Descartes y Espinosa, citado por Fischbein (2002), se expresa lo siguiente “in a world of misleading appearances and futile interpretations, intuition remains the ultimate reliable source of absolutely certain truths” (p.3). Al traducirlo, se expresa que, la intuición se concibe como la última fuente confiable de verdades absolutas, en tanto que otros autores, ven la intuición como algo más restringido o de poco uso; Fischbein (2002) habla sobre algunos detractores de la intuición que resaltan las ideas de Kant. Para este filósofo, la intuición está relacionada con la percepción sensorial y hablar de una intuición conceptual, no tiene ningún sentido.

De igual manera, hablar de intuición e instinto, desde los planteamientos de algunos matemáticos, filósofos u otros ilustres que se han acercado a estos conceptos, es encontrar siempre posturas dispersas, en los que se ven ciertos personajes que aceptan la intuición como parte importante del desarrollo del conocimiento, mientras que otros, simplemente la asocian a un aspecto más relacionado con el instinto que nada tiene que ver con lo conceptual.

En el campo científico y matemático, el desarrollo y avance del conocimiento para algunos investigadores, parece estar enlazado de alguna manera con procesos intuitivos. Los procedimientos lógicos y matemáticos están ordenados o debidamente estructurados, para que los teoremas sean demostrados las definiciones usadas, y los axiomas y elementos primitivos aceptados. Las matemáticas en sí trabajan en muchas ocasiones desde la abstracción y permiten crear modelos de simulación con lo cotidiano, dando lugar a resultados que son aplicados en contextos reales.

Si bien la matemática parece una estructura ordenada y con bases aceptadas por aquellos que la estudian y descubren nuevos procesos, es inevitable cuestionarse ¿Por qué se aceptan algunos elementos primitivos sin tener conocimiento alguno sobre sus demostraciones o saber siquiera su definición? ¿Qué nos da esa certeza de su uso en las matemáticas? Es aquí, cuando parece que la intuición toma su papel importante, dado que los procesos aprendidos en la escuela y algunas habilidades desarrolladas en nuestro proceso de formación brindan la certeza (desde una percepción intuitiva) de que los elementos primitivos y axiomas, funcionan por sí solos, de acuerdo con la experiencia vivida en entornos de aprendizaje cotidianos, lo que permite que sean aceptados de manera intuitiva.

El uso de algunos elementos primitivos como el punto, la recta y el plano, es un componente común del aprendizaje de la geometría en el contexto escolar. En el sistema educativo colombiano, los maestros se apropian de algunos elementos geométricos desde los grados escolares iniciales, para empezar a otorgarles cierta caracterización que, de alguna manera, facilita el acercamiento a su conceptualización. Sin embargo, los intentos para definirlos serán fallidos, toda vez que los elementos primitivos no poseen entes geométricos en los que se puedan descomponer y tan solo será posible disponer de algunas ideas, descripciones o acercamientos a sus propiedades, en relación con otros objetos matemáticos. Fischbein (2002) manifiesta lo siguiente "We mentally manipulate points, lines, geometrical figures as we manipulate objects, though we know very well that all of these are not objects. But they have, for us, subjectively, an intuitive meaning" (p. 21), lo que se traduce en que: "Manipulamos mentalmente puntos, líneas y figuras geométricas como manipulamos objetos, aunque sabemos muy bien que todos estos no son objetos. Pero tienen, para nosotros, un significado intuitivo"

Ahora bien, estos elementos primitivos desde lo geométrico toman un valor importante en la enseñanza de polígonos en el aprendizaje escolar colombiano. Al momento de trabajar en los grados escolares iniciales la construcción de polígonos, específicamente los triángulos, se hace necesario la puesta en escena de los elementos primitivos, axiomas, definiciones y teoremas que permitan una apropiación de las características para llevar a cabo procesos de identificación y clasificación, los cuales se encuentran implícitos en la versión 2 de los DBA de Matemáticas (2016). En este mismo sentido, en las evidencias de aprendizaje de los primeros años de escolaridad, se expone que los estudiantes deben reconocer las figuras geométricas según el número de sus lados, diferenciar los cuerpos geométricos, comparar figuras geométricas y establecer relaciones y diferencias. El MEN (2016) presenta el siguiente DBA y sus respectivas evidencias de aprendizaje:

Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales.

Evidencias de aprendizaje:

- Reconoce las figuras geométricas según el número de lados.
- Diferencia los cuerpos geométricos.
- Compara figuras y cuerpos geométricos y establece relaciones y diferencias entre ambos. (p.18)

En correspondencia con lo anterior, es posible observar la relación de los DBA y las evidencias de aprendizaje con uno de los EBC (2006) de Matemáticas del primer ciclo para el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el cual reza: Al terminar el tercer grado el estudiante debe ser capaz de realizar construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales (p.80).

Por otro lado, en los grados de la secundaria y media, en los que el estudiante tiene unas habilidades más desarrolladas, la enseñanza de los polígonos más elementales (triángulos) está acompañada de otras bases del conocimiento matemático como el álgebra y la trigonometría, que actuando en conjunto con los conocimientos previos y el proceso intuitivo que el estudiante posee, permiten que su red de relaciones se amplíe, estableciendo cada vez más, múltiples conexiones para comprender. A modo de ejemplo, algunos DBA se encuentran en estrecha relación con procesos de exploración y descripción de propiedades de lugares geométricos y transformaciones a partir de diferentes representaciones, en correspondencia con una de sus evidencias de aprendizaje descritas por el MEN (2016) “Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica” (p.76).

Sin embargo, en el aula de clase, es posible apreciar algunas dificultades en los estudiantes para la comprensión adecuada de conceptos y la formación de esquemas y experiencias que permitan hacer uso de su conocimiento intuitivo, al momento de resolver ejercicios en los que el uso de triángulos es necesario, es decir, desde el aula escolar, no parece que los estudiantes tengan un adecuado desarrollo del conocimiento intuitivo a través de la comprensión de procesos matemáticos. Es así como a raíz de esta investigación, se pretende realizar un estudio sobre el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión de conceptos geométricos involucrados en situaciones relacionadas con triángulos en el aula de clase.

1.1.2 Formulación del Problema

En los grados tercero y décimo de la Institución educativa INEM José Félix de Restrepo, se identifican algunas dificultades por parte de los estudiantes para la comprensión de los conceptos, en relación con las experiencias previas que den cuenta del desarrollo del conocimiento intuitivo al momento de trabajar situaciones relacionadas con triángulos.

1.2 Pregunta de Investigación

¿Cómo se desarrolla el conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos en situaciones relacionadas con triángulos?

1.3 Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos con los que se espera dar respuesta a la pregunta de investigación planteada en relación con las prácticas pedagógicas.

1.3.1 Objetivo General

Analizar el desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos involucrados en situaciones relacionadas con triángulos.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Detectar dificultades al momento de apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previas para desarrollar una comprensión en situaciones relacionadas con el uso del triángulo, sus propiedades y teoremas relacionados.
- Identificar el tipo de intuición utilizado según las ideas planteadas por Fischbein (2002) al momento de enfrentarse a diferentes situaciones que requieran el uso de las propiedades del triángulo.

1.4 Objeto de Estudio

Intuición para la comprensión.

1.5 Objeto de Saber Específico

Triángulos.

1.6 Antecedentes.

A continuación, se abordan algunos trabajos que permiten una mirada más amplia de las ideas y nociones sobre la comprensión de la enseñanza de las matemáticas, tomando apuntes de algunas teorías para la comprensión Matemática. De igual manera, se revisan diferentes ideas que se han desarrollado en torno a la intuición y su relación con el campo científico y matemático. Además, se abordan algunos trabajos e investigaciones acerca de la enseñanza de polígonos, en específico, de la enseñanza de triángulos, sus propiedades y situaciones enmarcadas en su aprendizaje.

1.6.1 Acerca de la Intuición.

La intuición ha sido abordada por diferentes pensadores, científicos, filósofos y matemáticos; a continuación, se analizan algunas ideas, definiciones y clasificaciones desarrolladas acerca de la intuición y su aplicación en la enseñanza de las matemáticas.

Fischbein toma algunas ideas sobre la intuición, en las que expone de una manera detallada diferentes perspectivas y campos en los que la intuición se ve relacionada con el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas, además, manifiesta diferentes argumentos en los que se observa tanto aceptación como rechazo frente a la intuición en el desarrollo y avance del conocimiento. En las obras de Descartes y Spinoza (1967), citadas por Fischbein (2002), se toma en cuenta la siguiente consideración acerca de la intuición: En un mundo de apariencias engañosas e interpretaciones inútiles, la intuición permanece como la última fuente confiable de verdades absolutamente ciertas. Para Kant (1980), citado por Fischbein (2002), se tiene la siguiente idea acerca de la intuición “intuition is simply the faculty through which objects are directly grasped in distinction to the faculty of understanding through which we achieve conceptual knowledge” (p.3). Al traducirla se entiende que: La intuición es simplemente la facultad a través de la cual los objetos se captan directamente, a diferencia, de la facultad de comprensión del cual logramos el conocimiento conceptual. Kant usa los términos intuiciones intelectuales y sensibles, pero en la práctica, es sólo el término intuición sensible el que tiene sentido para él. Fischbein (2002), resalta la siguiente idea de Kant: “An "intellectual intuition" would be necessary for knowing the "noumenon", the reality in itself - and this is impossible. Therefore, in Kant 's terminology intuition remains related to sensorial knowledge, while an "intellectual" intuition simply does not exist” (p. 4), que traduce “para una intuición intelectual" sería necesario conocer la realidad en sí misma, y esto es imposible. Por tanto, en la terminología de Kant, la intuición permanece relacionada con el conocimiento sensorial, mientras que una intuición intelectual simplemente no existe".

Sin duda alguna, muchos filósofos y pensadores han tratado de dar a la intuición una explicación concreta acerca de lo que significa, sin embargo, desde el campo científico, no hay una definición detallada o explicativa del término intuición o de su aplicación en la ciencia y matemática. Fischbein, concibe la intuición a partir de algunas percepciones e ideas que se encuentran al momento de utilizar conceptos matemáticos, ya sea porque se tenga o no acercamiento a estos. En ese orden de ideas, Fischbein (2002) entiende la intuición cómo "an idea which possesses the two fundamental properties of a concrete, objectively-given reality; immediacy - that is to say intrinsic evidence - and certitude (not formal conventional certitude, but practically meaningful, immanent certitude)" (p.21), lo que se traduce como: "Una idea que posee las dos propiedades fundamentales de una realidad concreta; inmediatez (evidencia intrínseca) y certeza (no certeza formal convencional, pero prácticamente significativa, o sea, certeza inmanente)".

Algunos científicos, matemáticos y físicos, ven la intuición como algo fundamental para el desarrollo de los conocimientos, y la dividen en categorías. Buteler y Coleoni (2012) hablan de la intuición física como: "los "principios" que los estudiantes utilizan para entender y resolver problemas, que no necesariamente coinciden con el conocimiento normativo" (p.437). Además, separan este conocimiento intuitivo en tres características:

a) no es conocimiento puramente normativo, ni puramente experiencial, ni necesariamente erróneo, sino una "mezcla" de éstos, b) es un conocimiento que poseen

> tanto novatos como expertos, ya que el experto no ha abandonado su intuición física, sino que la ha modificado, pudiendo ahora ser explicada en términos de conocimiento normativo, y c) es un conocimiento necesario para nuevos aprendizajes, es decir, es conocimiento útil. (p.437)

Por otra parte, Qués y Qués (2015) concluyen que: “la intuición sensible es primordial en la adquisición de conocimientos, por lo tanto, como educadores debemos hacer hincapié en este aspecto para facilitar el desarrollo del potencial intuitivo de los estudiantes y así poder lograr aprendizajes significativos en ellos” (p.508). De igual forma, ellos se expresan acerca de la enseñanza tradicional y concluyen lo siguiente:

> Es habitual que en la enseñanza tradicional se trabaje el rigor de la definición del concepto antes de una apropiada intuición de un objeto. Es decir que no se percibe que la claridad de un concepto está más ligada a la práctica de su correcto empleo, producto de una adecuada intuición antes que a su ajustada definición. (p.508)

Finalmente, Qués y Qués (2015) hablan de cómo la intuición se enfrenta a los procesos de información de carácter analítico con menor tiempo, mientras que el análisis racional requiere más tiempo y todos podemos llegar a resultados similares; la intuición da soluciones inmediatas y parece estar al alcance de los que no tienen miedo de ver la realidad de otro modo.

Si bien, la intuición no es aceptada por algunos investigadores, matemáticos y filósofos, es evidente que, para otros, la intuición cumple un papel importante en el aprendizaje, ya que toma algunas ideas o nociones intuitivas para entender y desarrollar nuevos conocimientos. En el campo del saber matemático, la intuición ayuda a organizar y estructurar ideas, que pueden ser de utilidad al momento de construir nuevos aprendizajes; si bien estas nociones intuitivas no representan un porcentaje de certeza significativo, son de apoyo para demostrar o transformar ideas iniciales al momento de producir nuevos conocimientos matemáticos, es decir, sirven de base para el desarrollo de las matemáticas y ayudan al proceso de transformación e innovación de nuevos saberes.

1.6.2 Acerca del Objeto del Saber Específico

Desde el sistema educativo colombiano en la enseñanza de las matemáticas de los grados de primaria, se incorporan en el currículo los triángulos desde los objetos primitivos de la geometría (puntos, rectas y planos) y, si bien estos objetos no se encuentran definidos, adquieren un significado intuitivo en el proceso de aprendizaje escolar. Un ejemplo de algunos significados para estos elementos es cuando se da la idea intuitiva de línea recta como una secuencia infinita de puntos en una misma dirección en el plano, o cuando vemos que el punto adquiere una representación intuitiva al visualizarlo como una pequeña marca de lápiz "tan pequeña como queramos", aunque sabemos que un punto es un concepto puro (en el sentido matemático) y que no existen tales objetos en la realidad. Otras ideas sencillamente conducen a dimensionar un punto como un punto y punto.

En el proceso de aprendizaje, manipulamos puntos, rectas y planos como si se tratara de otros objetos geométricos ya definidos, aunque sabemos que estos objetos (llamados primitivos) no son elementos geométricos, pero tienen para nosotros un significado intuitivo desde la geometría. El triángulo se define según Puertas y Vega (1991), citado por González et al. (2017), como “el más simple de todos los polígonos, su importancia radica en que sirve de base para el desarrollo de los polígonos y figuras planas” (p.3). Este se encuentra determinado por la unión de tres segmentos de recta en el plano, cumpliéndose el teorema de la desigualdad triangular o desigualdad de Minkowski (aunque no se enseña explícitamente acerca de este teorema en primaria, pero se debería). Además, se enseña su clasificación, ya sea por ángulos o por lados, y se hacen ejercicios relacionados con área y perímetro con sus respectivas propiedades, no obstante, rara vez se realizan ejercicios en relación con la enseñanza de triángulos en la vida cotidiana.

En primaria, al momento de realizar la clasificación de triángulos (por ángulos y por lados), ésta suele darse por separado, lo que genera poca interpretación y análisis de sus propiedades y semejanzas. Es importante resaltar el uso de un lenguaje acorde al nivel de comprensión del estudiante para la enseñanza de la geometría, ya que en algunos casos se genera dificultad en los estudiantes que suelen utilizar sus propios códigos y estilos de lenguaje, lo que conlleva a problemas conceptuales posteriores.

Otra falencia en la enseñanza de triángulos en primaria está relacionada con las rectas notables, ya se suele trabajar solo con la altura del triángulo y muchas veces se hace de manera parcial, como lo expresan Reyes y Rodríguez (2014):

> En quinto grado aparece el segmento altura, y se define como la menor distancia que hay entre un vértice y su lado opuesto o la prolongación de éste. Como ejercicios se enfatiza en el trazo de la altura en triángulos acutángulos y obtusángulos, trabajando poco el trazo de ella en triángulos rectángulos en la que no se halla la altura de todos los lados y el triángulo a su vez es generalmente representado con base horizontal, generando dificultades al momento de trabajar triángulos con otras perspectivas y posiciones. (p. 546)

Mientras tanto, en bachillerato, se enseñan los triángulos por medio de las razones trigonométricas a partir de su semejanza. Es importante tener en cuenta algunos conceptos geométricos básicos como la definición de semejanza y semejanza de triángulos para un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje, al momento de trabajar construcciones y demás actividades que involucren triángulos.

Al momento de definir semejanza, Guzmán (2014) expresa lo siguiente: "intuitivamente podemos decir que dos figuras son semejantes si una es un modelo a escala de la otra" (p.33). Por otro lado, el mismo autor define la semejanza de triángulos anunciando que: Dos triángulos [...] son semejantes […] si hay una correspondencia entre los lados y ángulos.

A partir de la definición de semejanza de triángulos, se empieza a definir una serie de teoremas y criterios de semejanza con los que el estudiante identifica propiedades y características al momento de realizar ejercicios que involucran triángulos. Algunos teoremas utilizados son: Teorema fundamental de la proporcionalidad, el cual indica que, si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, esta recta determina segmentos proporcionales en dichos lados. El teorema de Thales es expresado por Guzmán (2014) de la siguiente manera: "Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales en dichos lados" (p.34). Otro teorema utilizado es el teorema de Pitágoras, que establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

Otros elementos utilizados al resolver situaciones con triángulos son los llamados criterios de semejanza, en los que basta con analizar algunos elementos para determinar si dos triángulos son o no semejantes. Los criterios de semejanza trabajados son: Criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo (AAA), criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL), criterio Lado-Lado-Lado (LLL) y, finalmente, la semejanza de triángulos rectángulos. En los criterios de semejanza de triángulos, se analiza el tipo de correspondencia que tienen los triángulos y luego el criterio que se debe utilizar.

Otras competencias en las que el concepto de triángulo es abordado, se encuentran en el trabajo con las razones trigonométricas, en las que se utiliza la ley de senos como tema fundamental en el desarrollo escolar del grado décimo; con éste se muestra la relación en un triángulo oblicuángulo correspondiente a la razón entre el seno del ángulo y la longitud del lado opuesto a éste. De igual manera, se trabaja la ley de cosenos como otra importante propiedad para resolver triángulos (hallar las medidas de todos los lados y de todos los ángulos), dadas ciertas medidas específicas. En el caso específicos de los triángulos rectángulos, éstos se resuelven con el teorema de Pitágoras como caso particular de la ley del coseno.

Es pertinente que en los grados de bachillerato se continúe desarrollando ideas intuitivas de los elementos primitivos (recta, punto y plano), además, de manera continua se repasan otros temas geométricos aprendidos en grados anteriores, para garantizar un mejor y adecuado desarrollo de las actividades escolares.

Una dificultad que se presenta al momento de retomar algunos aprendizajes relacionados con triángulos y otros temas en la geometría, está relacionada con el hecho de que estos conceptos son vistos en ciertos grados no necesariamente consecutivos, ya que suele olvidarse gran parte de aquellos saberes y ralentizan el proceso de enseñanza de las matemáticas relacionadas con conceptos geométricos en los que se trabajan los triángulos y sus propiedades.

1.6.3 Acerca del Marco Teórico o Marco Conceptual

La comprensión ha sido abordada por diferentes investigadores en la enseñanza de las matemáticas, asociándose a diferentes factores. Antes de 1978, se asociaba con el conocimiento, teniendo entre ambos conceptos límites difusos en los cuales se quiso dar diferentes definiciones para la comprensión matemática, una de ellas, se precisa como el desarrollo de conexiones para la realización de operaciones y resolución de problemas, también, fue definida como la capacidad de actuar de manera inteligente frente una situación.

Una gran influencia acerca de la comprensión cognitiva fue el documento "Del Maestro de la Aritmética" cuyo autor es Skemp (1978), citado por Meel (2003), quien fragmentó en dos partes lo que se entendía por comprensión, como lo son la comprensión instrumental y la comprensión relacional (p.224). Para otros autores, tales comprensiones fueron descritas con otros nombres como: comprensión de procedimiento y concepto, relacionado con el saber hacer, y la comprensión concreta y simbólica, en relación con tener unas reglas intuitivas y formales relacionadas con las etapas del desarrollo conceptual. Estas categorías se quedaron cortas, lo que llevó a que luego se considerara una clasificación tetraédrica, generando así dos categorías más como lo son la comprensión lógica y la comprensión simbólica, con sus respectivas subcategorías reflexivas e inductivas, que permitieron comprender los procesos de metacognición que desarrollan los estudiantes.

Otros autores, continuaron con el desarrollo de ideas y de descripciones diversas, haciendo necesario el proceso de conexión entre el conocimiento y la comprensión como una red en la que se habla sobre la estructura del todo, debido a que la comunidad educativa no tenía una distinción unilateral entre ambos conceptos.

Se puede tomar de manera muy general los puntos de vista contemporáneos sobre la comprensión que, según lo expresa Londoño (2011):

> permiten establecer definiciones con elementos comunes, en especial debido a que la mayoría se derivan de la perspectiva constructivista subyacente, que considera que la comprensión del estudiante se construye mediante la formación de objetos mentales y de la realización de conexiones entre ellos (p.12)

En otras palabras, la comprensión puede concebirse como un proceso mental, en el que cada estudiante construye objetos mentales que le permiten una conexión entre estos. Por otro lado, se puede entender y expresar conocimientos y saberes a partir de ciertas evidencias que pueden partir desde un conocimiento primitivo o poco desarrollado, como bien lo afirman Thom y Pirie (2006), citado por Villa (2011), en el que se expresa lo siguiente en relación con nuestro trabajo como docentes:

> Como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona; sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia que se ponga a nuestra disposición a través de unas acciones físicas, verbales o escritas. (Pág. 45)

La comprensión es entonces un proceso mental en el que se construyen interpretaciones, a partir de los conocimientos expuestos en las aulas de clase, y que desarrolla unos niveles bajo unos parámetros dados según el autor con el que se apoye el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo constante acompañamiento entre profesores y estudiantes en los que se aclaran dudas y se avanza en los niveles mencionados y así promover que todos los estudiantes tengan diversas maneras de interpretar y apropiarse de las competencias que se desarrollan en el aula de clase.

Capítulo 2: Marco Referencial

Este capítulo presenta una contextualización de la institución educativa en la que se ha desarrollado la práctica pedagógica. Además, hace una exploración del marco legal al cual está sujeta la institución educativa, es decir, la normativa bajo la que se encuentra organizada la institución y las modalidades de estudio que ofrece a la población estudiantil. Finalmente, hace una exploración a las competencias matemáticas que se abordan en relación con el objeto de estudio y el objeto de saber específico, expuestos a lo largo de la investigación y el proceso de prácticas.

2.1 Marco Contextual

El presente trabajo de investigación se fundamenta en la práctica docente para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Este proceso de prácticas académicas se desarrolla en el Instituto Nacional de Educación Media-INEM José Félix de Restrepo (sede principal) y en la sede Guillermo Echavarría Misas (sede primaria), ambas ubicadas en la ciudad de Medellín, comuna 14 “el Poblado”, con estudiantes del grado décimo y del grado tercero de la institución educativa, respectivamente.

2.1.1 Historia y Contexto de la Institución

La Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo se fundó en el año 1970 por el presidente Carlos Lleras Restrepo y el Ministro de Educación Gabriel Betancourt Mejía, por medio del Decreto 1962, que creó un grupo de instituciones en todas las capitales departamentales llamadas INEM, con el propósito de que "los estudiantes de menos recursos en Colombia tuvieran acceso educativo en institutos iguales o mejores que las clases altas del país". Su misión inicial sigue vigente hasta la actualidad, la cual es la prestación de servicios de educación formal en los niveles de Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria, Media Técnica y Media Académica. Para esto, se cuenta con una propuesta curricular diversificada, flexible y abierta a la innovación pedagógica.

Es una institución educativa oficial con desempeño superior en las pruebas de estado y múltiples convenios con instituciones de educación superior. En 2012 y 2013 fue declarado el mejor colegio oficial de Antioquia. Ha sido laureado con el reconocimiento *Maestros para la Vida, Escudo Ana Madrid, Premios a la Calidad de la Educación de Medellín,* entre otros.

En 1994, la Institución Educativa se ajustó a los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN) planteados por la ley general de educación (Ley 155) y con el fin de conservar su estructura y alcanzar las funciones de una institución educativa, acogiendo las modificaciones necesarias para su adecuado funcionamiento.

La Institución Educativa agrupa a la población estudiantil en ramas y especialidades académicas. En estas ramas, se encuentran diferentes modalidades escolares. Además, el INEM José Félix de Restrepo prepara a su población estudiantil en rotación vocacional, en la que los estudiantes de grados sexto y séptimo hacen un recorrido general por todas las ramas ofrecidas en la institución. Luego de la rotación, los estudiantes de la institución realizan una exploración vocacional en los grados octavo y noveno; esta exploración, se realiza luego de que los estudiantes escogen una rama académica en la que se hace una exploración general por todas las modalidades escolares ofrecidas en la rama seleccionada. Después, al pasar al ciclo de los grados décimo y undécimo, los estudiantes seleccionan una modalidad e inician su orientación vocacional hasta finalizar sus estudios. Esta organización académica propuesta por la institución, ayuda al estudiante a tener mejores posibilidades al momento de escoger su futuro profesional.

Con respecto a sus ramas y modalidades, podemos clasificarlas de la siguiente manera:

Tabla 1

Clasificación de las ramas y modalidades propuestas en la oferta académica de la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo

Ramas y modalidades de estudio	
Artes	• Artes plásticas • Música
Académica	• Humanidades con énfasis en comunicación y medios • Humanidades con énfasis en inglés • Ciencias y matemáticas • Procesos matemáticos • Química industrial • Programación • Sistemas • Deportes
Comercial	• Administración • Contabilidad
Industrial	• Construcción civil • Electrónica • Diseño de modas
Promoción social	• Gestión social • Gastronomía • Recursos Humanos

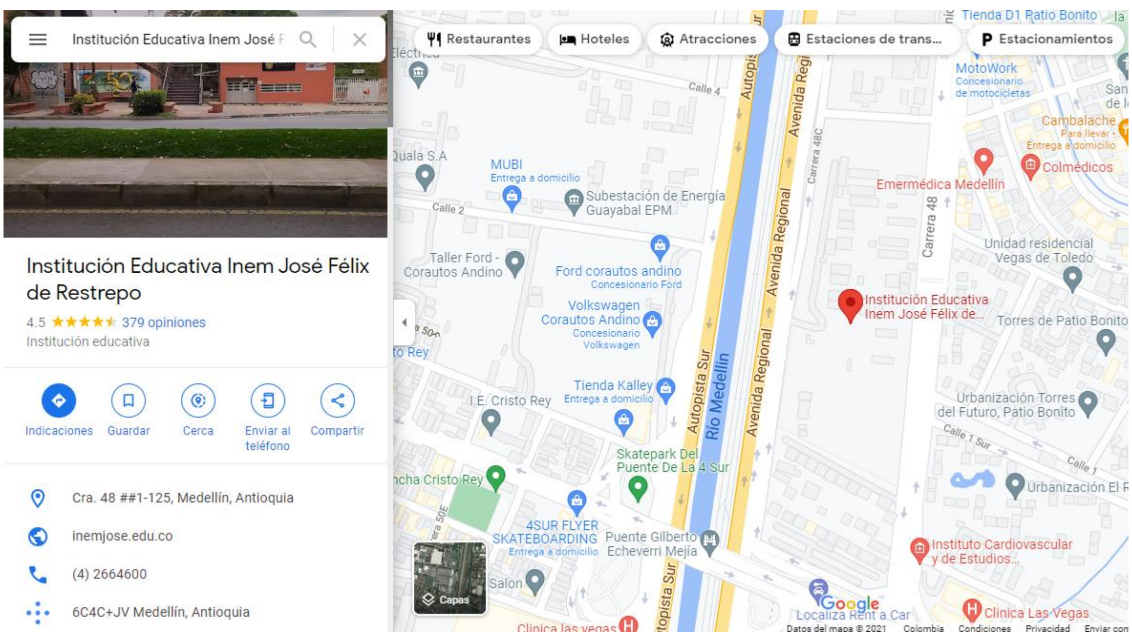
Nota. Datos tomados de https://inemjose.edu.co/colegio/index.php

El INEM José Félix de Restrepo en su sede principal, perteneciente a la Comuna 14 del municipio de Medellín, cuenta con ocho bloques: El Bloque 1 es el Departamento de Ciencias, el Bloque 2 corresponde al Departamento de Artes y al Departamento de Promoción Social, el Bloque 3 al Departamento de Comercial, el Bloque 4 al Departamento de Industrial, el

Bloque 5 al Departamento de Matemáticas y al Departamento de Sociales, el Bloque 6 al Departamento de Religión y Ética, el Bloque 7 al Departamento de Humanidades (Español e Inglés) y el Bloque 8 a la Administración, servicios de Informática y Biblioteca. Además, tiene seis canchas, un complejo de skate, una piscina semiolímpica, un gimnasio, dos coliseos, dos parqueaderos, cuatro porterías, quince cafeterías, una papelería, una microempresa, salas de proyecciones y auditorios, salas de cómputo y abundantes zonas verdes; la siguiente figura, muestra la ubicación exacta de la sede principal de la institución.

Figura 1

Ubicación satelital de la sede principal de la institución INEM José Félix de Restrepo.



Nota. La figura muestra la ubicación de la sede principal de la institución educativa INEM José Félix de Restrepo. Recuperado de: https://www.google.com/maps/place/Instituci%C3%B3n+Educativa+Inem+Jos%C3%A9+F%C3

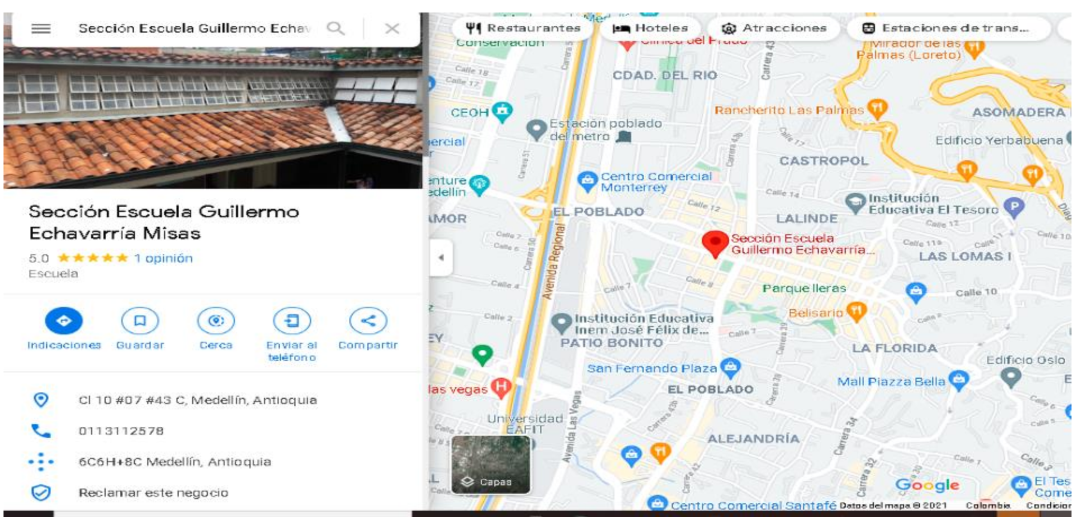
%A9lix+de+Restrepo/@6.2065288,75.5799444,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x8e46827f7a881345:0xdf94c4d13c76ebb!8m2!3d6.2065288!4d-75.5777557

Por otro lado, la sede de primaria llamada Guillermo Echavarría Misas está ubicada en el barrio Astorga de El Poblado. La institución tiene un modelo de educación tradicional, presta sus servicios desde el grado Preescolar hasta Básica primaria, y comprende lo que antes eran 3 escuelas:

- Guillermo Echavarría Misas que se fusionó al INEM con la resolución No. 16303 del 27 de noviembre de 2002.
- Jesús Restrepo Villa que se articuló al INEM por resolución No. 033 del 21 de abril de 2003.
- Santa Catalina de Siena que se articuló al INEM por resolución No. 033 del 21 de abril de 2003.

Figura 2

Ubicación satelital de la sede primaria Guillermo Echavarría Misas de la institución INEM José Félix de Restrepo.



Nota. Esta figura muestra la ubicación de la Sede Guillermo Echavarría Misas de la institución INEM José Félix de Restrepo. Recuperada de: https://www.google.com/maps/place/Secci%C3%B3n+Escuela+Guillermo+Echavarr%C3%ADa+Misas/@6.2108295,75.5714459,15z/data=!4m5!3m4!1s0x0:0xb08257c3c6bc4f8d!8m2!3d6.2108295!4d-75.5714459

2.1.2 Identificación de la Población

La Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo, por ser de carácter oficial, atiende a una población con diversos estratos socio económicos del Valle de Aburrá, además de que cuenta con diferentes niveles de formación, que inician desde el nivel de Preescolar y Básica Primaria en su sede Guillermo Echavarría Misas con aproximadamente 415 estudiantes entre la jornada de la mañana y de la tarde. Por otro lado, la sede principal de la Institución está conformada por 3400 estudiantes aproximadamente y 168 docentes de los cuales el 92% presta sus servicios en los niveles de educación Básica Secundaria, Media Académica, Técnica y por modalidades. La Institución cuenta con ocho directivos docentes, 27 administrativos y 16 funcionarios en servicios generales, dándole así el renombre de ser una de las Instituciones Educativas más grandes y diversas del Departamento de Antioquia.

2.2 Marco Legal

De acuerdo con la Ley 115 de 1994, conocida como Ley General de Educación, se dictaminan unas normas generales para regular el servicio público de la Educación en Colombia. En concordancia con esta ley, se expiden unos documentos rectores para diferentes áreas, entre ellas, Matemáticas, a través de los LC de 1998, Los EBC de Matemáticas de 2006 y los DBA, versión 2 de 2016.

2.2.1 Ley 115 de Febrero 8 del Año 1994

El MEN(1994), de manera muy precisa, desarrolla el alcance, objetivo y servicio de la educación a favor de una formación integral del estudiantado, como se menciona en el Artículo 5-numeral 9 de la Ley General de Educación, llamado "Fines de la educación":

> El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país (p.2).

2.2.2 Lineamientos Curriculares de Matemáticas

El documento de los LC de Matemáticas es definido por el MEN y la comunidad académica educativa en Colombia como las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que apoyan el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación en su artículo 23. Tiene como finalidad presentar un planteamiento sobre ideas básicas que sirvan de apoyo para los docentes en las propuestas referentes a los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) y al desarrollo curricular, en los que se busca fundamentar las relaciones pedagógicas que se establecen en el área de Matemáticas, al igual que el intercambio de experiencias y conocimientos en el aula.

Los LC de Matemáticas, describen el objeto de estudio de este trabajo de investigación (la intuición) desde la corriente del intuicionismo; el MEN (1998) describe lo siguiente "El principio básico del Intuicionismo es que las matemáticas se pueden construir; que han de partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que sólo existe lo que en ellas haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición". (p.11)

Por otro lado, el MEN (1998) hace la claridad de que la corriente intuicionista no se encarga de estudiar la manera como se realizan en la mente las construcciones y las intuiciones matemáticas, sino que supone que cada persona puede hacerse consciente de esos aprendizajes y saberes.

2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), Versión 2

Los DBA en Matemáticas, versión 2, son una herramienta dirigida a todas las personas asociadas a la comunidad educativa, en la que se pretende identificar los saberes básicos que todo estudiante debe aprender en cada grado de educación escolar, desde el grado 1° hasta el 11°. Son entendidos desde el MEN (2016), como "estructurantes en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se puede edificar el desarrollo futuro del individuo" (p.6). Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven el avance de los aprendizajes año por año, para que los estudiantes alcancen los EBC de Matemáticas propuestos para los grados escolares.

Algunos DBA en correspondencia con el trabajo propuesto en relación en la enseñanza de triángulos son:

- Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas.
- Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.

2.3 Marco Teórico

El siguiente marco teórico, permite conocer y comprender los conceptos básicos necesarios para el desarrollo del trabajo investigativo, para lo que será necesario establecer los conceptos de: intuición, comprensión y triángulos.

2.3.1 La Intuición

Podríamos entender la intuición, desde las palabras de Domínguez (2015) como "un proceso de aprendizaje que hacen los seres humanos a través de sus experiencias senso-perceptuales" (p.1). Estos procesos intuitivos enriquecen el aprendizaje racional y matemático por medio de las vivencias experimentales, que se fortalecen al momento de practicar y conceptualizar las matemáticas en el aula y los espacios formativos. Lo intuitivo, es un proceso cognitivo separado del razonamiento lógico, ya que se fundamenta en las ideas y conocimientos que los individuos tienen interiorizados a medida que crece y avanza en sus procesos educativos. Estos procesos intuitivos, ocurren como consecuencia de la estimulación sensorial que el individuo tiene al buscar en sus conocimientos las operaciones que le permiten dar solución a nuevos planteamientos (para nuestro caso los conceptos matemáticos). Einstein expresa en palabras de Domínguez (2015), que "la intuición no viene de la lógica o las matemáticas. Llegó, al igual que para los artistas, a partir de [...] la inspiración" (p.4).

La intuición ha sido tema de debate a lo largo de los años, no hay una definición precisa y única de lo que se entiende por intuición, hay por otro lado, formas de entenderla y, según el autor que se tome como referencia, la intuición puede ser útil para el proceso de enseñanza y aprendizaje de diversas áreas del conocimiento. Para algunos investigadores y matemáticos, la intuición es una forma de conocimiento, más allá de ser un simple método para alcanzarlo. (Fischbein, 2002) expresa: "an intuition is, essentially, a theory (even if it is only a mini-theory). We commonly think in terms of models because they provide the process of reasoning with the structuring and stimulating ingredients necessary to its creative course" (p.129).

En otras palabras, se entiende que una intuición es, esencialmente, una teoría, pensada en términos de modelos, porque proporcionan al proceso de razonamiento los ingredientes estructurantes y estimulantes necesarios para su curso creativo. La intuición toma entonces un papel importante para el hombre, complementando el conocimiento y potenciando los procesos de aprendizaje. Al momento de entender y expresar ideas acerca de la intuición y la enseñanza de las matemáticas, se podría tomar en cuenta las ideas de Peña y Mariño (2020), en las que se expresa que: "la intuición es un proceso, cuyos elementos constitutivos implican, el contexto real, los conocimientos previos de quien intuye y, finalmente, la necesidad de la lógica, como instrumento de validación matemática." (p.52).

De manera similar, Fischbein (2002) menciona en su obra que "the basic source of intuitive cognitions is the experience accumulated by a person in relatively constant conditions". (p.85), lo que en palabras de nuestro contexto se entiende que "la fuente que da lugar a los procesos intuitivos es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes". Se podría concluir entonces, que los procesos intuitivos cambian a medida que el sujeto va adquiriendo conocimientos y saberes, pues deja de tener intuiciones primitivas que se van transformando en unas intuiciones más refinadas.

En cuanto a la intuición matemática se refiere, existen investigaciones que hablan del tema y defienden su importancia al mencionarla como un elemento necesario de invención que no sería posible si solo se contara con los signos matemáticos o la lógica formal. Al respecto, Peña y Mariño (2020) argumentan que: "la intuición es necesaria para el proceso de invención en matemáticas, más aún, es la que permite elegir el mejor camino para alcanzar el objetivo final" (p.52). En pocas palabras, se podría expresar que sin intuición no hay procesos de innovación o de invención en matemáticas, es decir, no habría un proceso de transformación en las intuiciones primarias y no se daría paso a procesos intuitivos más refinados.

Hablar de la intuición como instrumento para la invención e innovación en matemáticas, es entender la idea de que la intuición es una base de conocimiento común, tal y como lo expresan Peña y Mariño (2020) al mencionar que:

> "la intuición matemática es un modo general de conocimiento, estrechamente relacionada con los conceptos usados para hacer referencia al mundo físico […] lo que implica que los símbolos son la forma de comunicar lo encontrado por la intuición, a su vez, que los preconceptos son necesarios para estructurar la intuición". (p.55)

Ahora bien, se han hecho varios intentos de clasificar la intuición, con el ánimo de entender la complejidad del término y con el ímpetu de validar su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los seres humanos. La clasificación que realiza Piaget para la intuición, genera dualidad en su manera de categorizar el término, ya que tiene una manera particular de clasificar las intuiciones según las etapas evolutivas del pensamiento lógico matemático de su teoría.

Piaget, en palabras de Fischbein (2002), menciona que: "Empirical intuitions refer to the evaluation of physical properties of objects (for instance, the weight of an object), or to real psychological experiences known by introspection (for instance, the intuition of duration)" (p.57), lo que al traducir, se entiende que: "Existen intuiciones empíricas que se refieren a la evaluación de las propiedades físicas de los objetos (por ejemplo, el peso de un objeto), o a experiencias psicológicas reales conocidas por introspección (por ejemplo, la intuición de la duración)".

Otra clase de intuiciones propuestas por Piaget son las operativas, que se refieren a aquellas acciones relacionadas con los objetos y fenómenos psicológicos, dividiéndolas en otras cuatro subcategorías: las intuiciones geométricas que son intuiciones acompañadas de imágenes, así como las que no poseen esta propiedad, es decir, con "operaciones de objetos discretos". Dentro de las intuiciones geométricas, se encuentran dos clasificaciones adicionales, las cuales son: las intuiciones homogéneas y las heterogéneas, que tienen que ver con la relación encontrada entre la representación del objeto (para nuestro caso los triángulos) y su similitud con la definición usada, es decir, que tan inmediato es posible relacionar la representación gráfica del triángulo con el concepto mismo. Piaget, en palabras de Fischbein (2002) expresa una idea relacionada con este acercamiento representativo y teórico, al intentar entender el círculo desde la forma y desde su definición, y demostrando su homogeneidad. Él menciona lo siguiente:

"Let us consider, for instance, the notion of the circle. The image of the circle (as a geometrical figure) and the concept of it are completely congruent. (There is nothing more in the circle, as a geometrical figure, than is expressed in the given concept)". (p.57), lo que traduce que: "La imagen del círculo (como figura geométrica) y su concepto son completamente congruentes. (No hay nada más en el círculo, como figura geométrica, que lo expresado en el concepto dado".

Otras dos clasificaciones expresadas por Piaget en las intuiciones operativas están relacionadas con las intuiciones pictóricas, es decir, expresadas por imágenes y las intuiciones que van en sentido estricto, en otras palabras, relacionadas con conceptos lógico-matemáticos.

Es importante mencionar que, para Piaget, en palabras de Fischbein (2002) cualquier actividad intelectual es intuitiva, es decir, casi todas las actividades que el niño es capaz de realizar antes del periodo operacional concreto pueden considerarse realizadas sobre una base intuitiva, dicho de otra forma, el niño usa sus conocimientos anteriores, para desarrollar intuitivamente su interacción con nuevas comprensiones.

Ahora bien, Fischbein (2002) propone otras maneras de categorizar la intuición. La primera basada en las funciones (denominada intuición por roles), en las que tienen cabida las intuiciones afirmativas, entendidas como aquellas representaciones de hechos aceptados, y las intuiciones conjeturales, tomadas de la experiencia y desarrolladas por una cantidad mínima de información. El autor expresa lo siguiente en relación con esta clasificación: "This classification considers the relationship between intuitions and solutions (p.58), lo que se traduce en que "Es una clasificación que considera la relación entre las intuiciones y las soluciones".

Por otro lado, se realiza una clasificación basada en los orígenes, es decir, aquellas que provienen de intuiciones afirmativas, Fischbein (2002) denota lo siguiente en relación con esta clasificación:

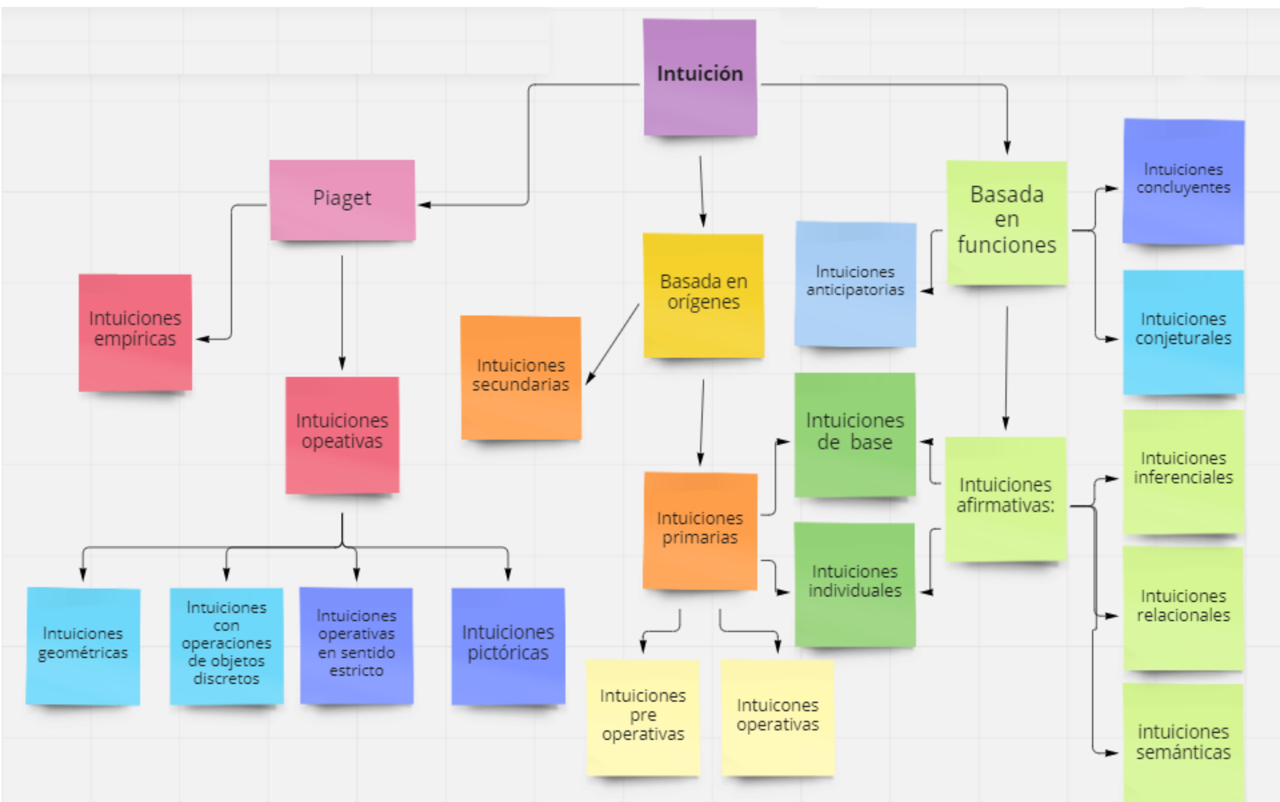
> The second basis of classification relates to the origins of intuitions. Primary intuitions are those which develop on the basis of normal everyday experience (which is of course subject to cultural variation). Secondary intuitions, by contrast, are those which are acquired, not through natural experience, but through sorne educational intervention. Often these are inconsistent with the corresponding primary intuitions relating to the same concepts (p.71).

Al traducir, se entiende que: "La segunda base de clasificación se refiere a los orígenes de las intuiciones. Las intuiciones primarias son las que se desarrollan a partir de la experiencia cotidiana normal (que, por supuesto, está sujeta a variaciones culturales). Las intuiciones secundarias, por el contrario, son las que no se adquieren a través de la experiencia natural, sino a través de la intervención educativa. A menudo son incompatibles con las correspondientes intuiciones primarias relativas a los mismos conceptos.”

La figura que se presenta a continuación ayuda a entender mejor la clasificación que propone Fischbein según las ideas de Piaget y sus ideas basadas en los roles y en los orígenes:

Figura 3.

Clasificación de intuición



Nota: Creación propia, a partir de la clasificación de Fischbein (2002).

2.3.2 La Comprensión

Se hace una separación de ideas acerca de la comprensión del conocimiento en los modelos constructivistas como lo es la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren, al igual que el modelo APOE de Dubinsky, en el que se incluyen los obstáculos cognitivos y los modelos epistemológicos, en los cuales, según las ideas compiladas de Wiske (1999) y citadas por Meel (2003): "el uso de un análisis epistemológico de un concepto matemático ayuda a determinar la comprensión lograda por un estudiante mediante la observación atenta de sus distintas maneras de percibir un concepto"(p. 228).

Al superar dicho obstáculo epistemológico, se abre la posibilidad de que el estudiante obtenga un mayor dominio sobre otros obstáculos, lo que le permite comprender nuevas formas de conocer; para ello se habla de la necesidad de la creación de imágenes del concepto y de su definición.

Font (2007), expresa que de acuerdo a las ideas que tiene en su investigación de comprensión, es posible hablar de 2 categorías, la primera como:

> "proceso mental", en la cual se entiende que un objeto matemático se ha comprendido en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas, que permitan producir representaciones externas adecuadas para la resolución de las tareas propuestas en las que dicho objeto sea determinante (p. 428).

Desde este punto de vista, se considera que la comprensión se encuentra relacionada con unas estructuras que se apoyan en las representaciones internas y con las cuales los estudiantes producen un dominio de sistemas de representaciones externas que le permiten resolver las tareas propuestas, con ello, nos insta a preguntarnos qué representación antecede a cuál, si las internas a las externas o viceversa; para ello un grupo grande de psicólogos cognitivistas consideran a las representaciones internas como básicas, constituyéndose éstas por esquemas, imágenes, símbolos, entre otros, debido a esto, se dice que pueden existir las representaciones internas sin duplicado público; mientras tanto, las representaciones externas han de ser expresadas por los estudiantes de manera mental.

De lo anterior, dentro de un constructivismo cognitivo, la comprensión se relaciona con el aprendizaje significativo, ya que este se genera en la medida en que se haya desarrollado la integración de un nuevo contenido en los esquemas cognitivos previos del estudiante.

Por otro lado, de acuerdo con las ideas de Font (2007), se nombra a la comprensión en una segunda categoría como competencia, él expresa que un sujeto comprende un objeto matemático cuando: "lo usa de manera competente en diferentes prácticas, lo cual implica concebir la comprensión como conocimiento y aplicación de las normas (p. 428).

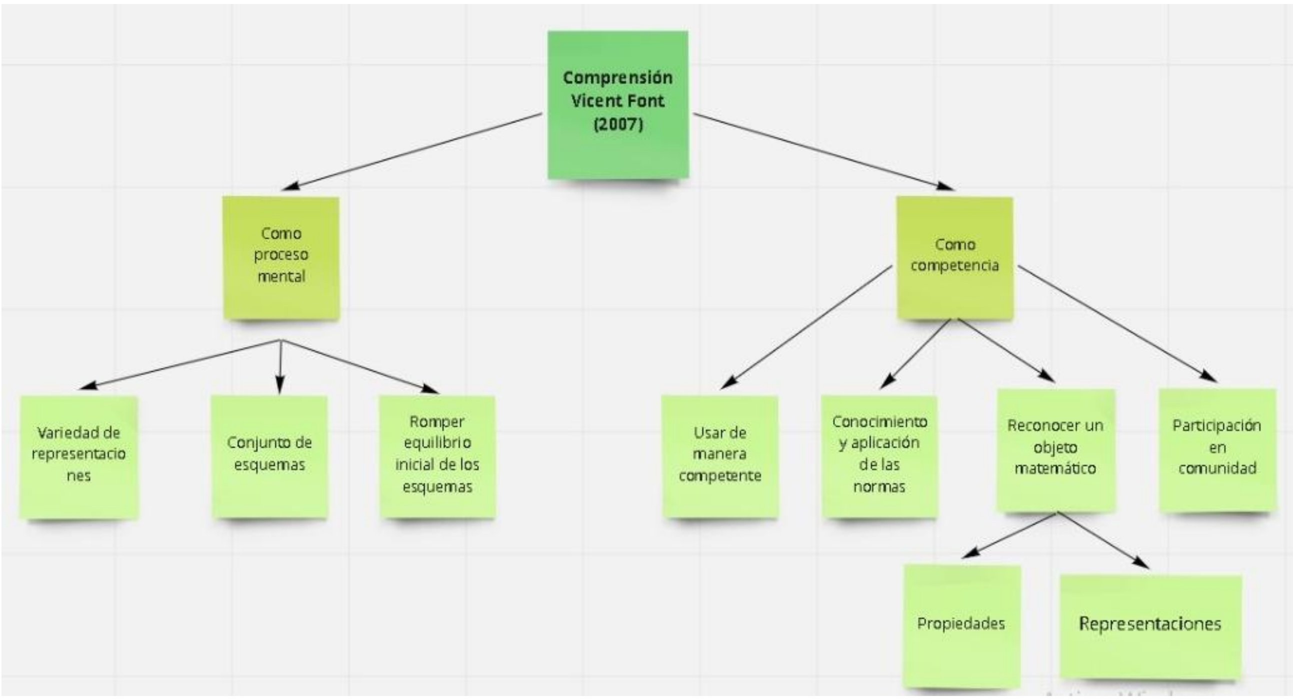
Por otro lado, el autor expresa que la comprensión o saber de un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas. (p. 430)

Se da a entender entonces que la comprensión es esa capacidad de utilizar un objeto matemático, reconociendo sus propiedades en diferentes situaciones relacionadas con el entorno, que posibilitan su interacción con otros saberes matemáticos. Podríamos además afirmar que la comprensión se da como un proceso basado en enfoques y también en teorías, asimismo, esta comprensión se da por medio de un aprendizaje significativo, dejando de ser considerada sólo como adquisición de conocimientos, que, a su vez, se construyen usándolos en contextos reales.

A continuación, se muestran en la figura 4, las dos categorías sobre la comprensión, de acuerdo a Font (2007).

Figura 4

Dicotomía de la comprensión según Font (2007)



Nota. Creación propia, según las ideas de Font (2007).

Para finalizar, se podría entender que en los rastros de la comprensión por competencias como lo son los registros, puede llegarse a considerar indicadores de uso de conocimiento matemático, ya que el docente al momento de interpretar esos rastros de comprensión, contrasta el trabajo realizado por medio de una negociación entre lo ejecutado por el estudiante y lo propuesto en el proceso aprendizaje.

2.4 Marco Conceptual

El triángulo "como el más simple de los polígonos" es una de las figuras planas que se abordan en los primeros años de escolaridad según las indicaciones de los EBC propuestos por el MEN (2006), de igual manera, desde lo curricular, el triángulo es uno de los conceptos matemáticos con mayor abordaje en grados escolares superiores, durante el aprendizaje de la trigonometría; ahora bien ¿Cómo se define el triángulo desde una perspectiva matemática y como se aborda en los procesos de enseñanza?

De acuerdo con múltiples definiciones encontradas en diferentes medios (libros de texto escolar, artículos y páginas de internet) de manera general, se menciona que un triángulo es una figura geométrica de tres lados y tres ángulos; definición que puede tener muchas implicaciones a la hora de hacer la transposición didáctica y desarrollar una comprensión global de esta, debido a la reducida concepción que se presenta. Ahora bien ¿qué es un triángulo o cómo podemos entenderlo? En la investigación realizada por Barroso (2000) se encuentran varias definiciones y propiedades con las que se define la palabra triángulo. Algunas de estas definiciones como la de la Gran Enciclopedia Larousse (1977), citada por Barroso (2000), dedican al término casi una página, indicando su etimología, del latín triangulum, y siendo su segunda acepción: "Figura formada por tres puntos no alineados, y por tres segmentos que los unen dos a dos (los tres puntos son los vértices, y los tres segmentos, los lados)" (p.288). Ahora bien, La Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana, de Espasa Calpe (1966), citada por el mismo autor, dice: "Triángulo, la, F., In., y C. Triangle, It. Triangolo, A. Dreleck, P. y E. Triángulo. (Etim. del latín triangulus), n. Geom. Figura formada por tres líneas que se cortan mutuamente". Esta obra dedicó 31 páginas a considerar múltiples propiedades y teoremas sobre el triángulo (p.288).

En otras enciclopedias exploradas por Barroso (2000), como la Encyclopædia Britannica de Benton Publisher (1982), se puede encontrar: "Triangle, geometrical figure formed by three points that are not on a line." (Triángulo, figura geométrica formada por tres puntos que no están alineados). Se hace inmediatamente distinción entre el triángulo plano y el esférico, siendo la única obra consultada que hace esta distinción en la definición, separando la geometría euclidiana de los otros tipos de geometría.

Dentro de otras acepciones de triángulo, tenemos a la RAE (2021), en la cual el término tiene tres acepciones; la segunda es la que nos interesa "2. m. Polígono de tres ángulos y tres lados". Esta definición es una de las pocas que incluye el hecho de formar tres ángulos, la cual subyace a la etimología de la palabra (tri-ángulo). De otro lado, en el Diccionario Básico de Matemáticas (Díaz, 1981) mencionado por Barroso (2000), se define como "polígono de tres lados o ángulos". (p.288)

Otras obras que usan un leguaje técnico de las matemáticas definen el triángulo desde una perspectiva más rigurosa. Cortázar (1884), en su obra *Tratado de geometría elemental,* define el triángulo como "polígono que tiene tres lados" (p.2), idea que se tiene planteada de igual manera por Bruño (1950), citado por Barroso (2000) en su libro *Tratado de Geometría de Tercer Grado.* Tal parece que la concepción intuitiva adoptada por algunos autores ha generado dificultades en los estudiantes a posteriori en el aula de clase, al momento de identificar propiedades y redes conceptuales más complejas.

En la institución educativa INEM José Félix de Restrepo, una de las dificultades de los estudiantes es establecer la posición en la que se encuentra la imagen de un triángulo, ya que, de manera generalizada, se trazan los triángulos de forma estándar con una base horizontal, esto se puede analizar gracias a lo que expresa Climent y Carrillo (2002) en su investigación, ellos mencionan que:

> Se observó una fuerte tendencia a hacer coincidir uno de los lados con una línea horizontal y en menor medida, con una línea vertical, y en particular, muchos

> estudiantes identificaron la base con una línea horizontal y la altura con una línea vertical. (P. 184)

Este tipo de evidencias en el aula de clase, es clave al momento de identificar dificultades para la identificación y uso de las propiedades geométricas al momento de utilizar triángulos en situaciones problemas que requieran el uso del conocimiento intuitivo, ya que de alguna manera, proporcionan información acerca de las limitaciones que se imponen en el interior del aula de clase y que impiden en el estudiante una visión más amplia de lo que sucede en el plano al momento de trabajar con los triángulos y otros polígonos.

Capítulo 3: Metodología

Este capítulo, presenta el tipo de investigación utilizado para el análisis de los objetivos planteados durante el desarrollo de las prácticas pedagógicas, abordando el proceso desde un enfoque cualitativo. Además, se muestra el diseño de los instrumentos utilizados para la recolección de datos y las intervenciones, así como la pertinencia y alcance de la propuesta investigativa. Por último, se hace una descripción y análisis con relación al procedimiento y curso de la investigación, utilizando el estudio de casos como método investigativo.

3.1 Paradigma o Enfoque Elegido y su Pertinencia

Esta propuesta investigativa se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, en el que todo el proceso de investigación (construcción teórica, revisión literaria, pregunta de investigación, objetivos, etc.) se fue estructurando y organizando a la par con el proceso de prácticas pedagógicas en la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo. Durante este proceso de práctica, la interacción continua con los estudiantes del grado tercero y décimo ayudó a construir estrategias de recolección de datos que identifican esas dificultades planteadas en la pregunta de investigación y en el objetivo de este trabajo, transformando así las ideas iniciales con las que se planteó la investigación. Monje (2011) menciona acerca de las investigaciones con enfoque cualitativo que: "No hay un único método a través del cual podamos alcanzar y dominar las sutiles variaciones del desarrollo y la experiencia" (p.33). Esto permite al investigador, organizar sus ideas iniciales y transformar herramientas de interacción e intervención a medida que se tiene contacto en el aula de clase con los estudiantes.

El enfoque cualitativo de la investigación no tiene como tal un esquema de pasos estructurado o un punto inicial predeterminado, y en caso de tenerlo, no siempre es el mismo para cada investigador, ya que el punto inicial de la investigación puede ser diferente según el contexto y según la fase en la que se quiera iniciar. Sin embargo, conviene organizar las ideas del enfoque cualitativo en fases, es decir, una estructura con la cual podamos tener unas ideas iniciales de como orientar la investigación. A continuación, se presenta el esquema representado por Monje (2011), que divide la investigación cualitativa en cuatro grandes fases, en las que los investigadores toman decisiones de manera continua en el proceso investigativo sobre las diferentes alternativas que allí se presentan.

Figura 5

Fases del enfoque cualitativo de la investigación

Nota. La figura muestra las cuatro fases de una investigación cualitativa. Fuente: Monje (2011).

El autor hace énfasis en que toda investigación cualitativa, debe ser guiada por un proceso continuo de decisiones y elecciones del investigador. Para un adecuado desarrollo del enfoque cualitativo de la investigación, se debe conocer en detalle el lugar en el que se desarrolla la investigación, las características de los participantes y los recursos disponibles que, para nuestro caso, se etiquetan como: Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo, participación de los estudiantes de la institución y recursos que se encuentran disponibles en el aula de clase, adicionales a los que proporcionan los investigados. Este tipo de enfoque permite entender cómo los participantes de la investigación perciben los acontecimientos, todo desde las metodologías que se lleven al aula y con el consentimiento de la población en la que se desarrolla el estudio, es decir, bajo la autorización de la población de estudiantes.

Conviene explorar varias metodologías con el fin de obtener información más detallada y resultados que den cuenta de la pertinencia, condiciones, disposición y contexto de los participantes. Con cualquier método que se utilice de investigación, el enfoque cualitativo tiene un fuerte carácter instrumental, pues se encuentra bajo el servicio de los interrogantes que se plantean en la investigación. Monje (2011), menciona lo siguiente en relación con el carácter instrumental y la metodología:

> Los interrogantes determinan los métodos: la etnografía, la fenomenología, la teoría fundamentada...etc., son todos métodos que presentan sus ventajas y limitaciones, cada uno descubre aspectos que otros mantienen velados; produce un tipo de resultados más adecuado que otros; y se ajusta mejor a un tipo de datos u otro. (p.41)

Para este trabajo, el método elegido fue el de estudio de casos de Stake (2007), ya que permite analizar desde la pregunta de investigación, esas situaciones particulares en el contexto escolar, además, a la hora de buscar una muestra poblacional, permite seleccionar un caso específico. Stake (2007) menciona lo siguiente en relación con el estudio de casos: "En cualquier estudio dado, nos concentramos en ese uno. Podemos pasar un día o un año analizando el caso, pero mientras estamos concentrados en él estamos realizando estudio de casos". (p.15)

Se escogen a partir de las ideas del autor, dos casos (un grupo del grado tercero y un grupo del grado décimo) en los que se puede hacer la exploración y análisis de los interrogantes de la investigación. Hay que resaltar que el propósito de esta investigación y del uso del método de estudio de casos, no es para buscar una generalización en los resultados, por el contrario, busca analizar esas particularidades que permiten el desarrollo del conocimiento intuitivo a través de la comprensión de conceptos geométricos con triángulos en cada caso seleccionado y qué se podría concluir de cada uno.

3.2 Diseño o Método y Pertinencia

Para el desarrollo de este trabajo, se acoge la idea de Stake (2007) en la que se habla de la población y selección de los casos; él expresa lo siguiente: "El caso puede ser un niño, puede ser un grupo de estudiantes, o un determinado movimiento de profesionales que estudian alguna situación de la infancia" (p. 15).

Esta idea expresada por el autor, permite el análisis detallado de un tema específico que, para el caso particular, se trata del desarrollo de la intuición para la comprensión de conceptos en el aula de clase en situaciones involucradas con triángulos, lo cual se llevará a cabo con una población estudiantil en la que, para cada caso, se busca analizar y dar una mirada a ese desarrollo del conocimiento intuitivo que de manera particular se adquiere en el aula de clase, además de interiorizar y comprender esos saberes y significados que se abordan en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el entorno escolar.

Para la selección de casos, se usa el estudio intrínseco sugerido por Stake (2007) del que menciona lo siguiente:

> "Si es posible, debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas, quizá aquellos en los que se pueda identificar un posible informador y que cuenten con actores (las personas estudiadas) dispuestos a dar su opinión sobre determinados materiales". (p.17)

Para el desarrollo de este trabajo, se seleccionan casos específicos, no con la intención de generalizar las observaciones de cada uno de ellos, sino con el objetivo de indagar en esas particularidades encontradas, es decir, para cada caso analizar la pregunta que orienta esta investigación ¿Cómo se desarrolla el conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos involucrados en situaciones relacionadas con triángulos? y a partir de ese análisis, hacer un comparativo entre las similitudes y diferencias de cada caso al momento de utilizar ese conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos, o por el contrario, establecer qué impide que ese conocimiento intuitivo se desarrolle al momento de comprender dichos conceptos.

Stake (2007), menciona que, por otro lado, en el caso instrumental (otro tipo de caso) se deben evaluar los casos elegidos para reconsiderar cambios si se requiere. Sin embargo, proponer cambios o plantear nuevas estrategias, no es el objetivo de este trabajo.

3.3 Selección de la Población Objeto de Estudio o Participantes

Los estudiantes elegidos para este estudio de casos se encuentran en ambas sedes de la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo. Por un lado, se tienen algunos estudiantes que cursan el grado tercero en la sede de primaria Guillermo Echavarría Misas (caso “Te”), por otro, estudiantes de un grupo del grado décimo de la sede principal del INEM José Félix de Restrepo (caso “De”). Se seleccionaron dos grados de escolaridad diferentes y separados en primaria y bachillerato, con la intención de analizar si esas posibles causas que desarrollan el conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos se dan de manera general durante el desarrollo escolar, o por el contrario, es algo particular para cada grado; además, se busca establecer qué tipos de intuición están inmersos en el desarrollo de las actividades, cuáles cambian y cuáles se mantienen o desaparecen en el proceso de aprendizaje escolar. En el caso del grado tercero, el criterio de selección se dio debido a que en un grupo de 8 estudiantes se pudieron apreciar diversos tipos de intuiciones, entre ellas las intuiciones anticipatorias. Mientras que en el caso del grado décimo, se seleccionó el grupo de la modalidad “procesos matemáticos” por su acercamiento al aprendizaje de las matemáticas y mayor disposición en las diferentes actividades de clase en las que el uso de la geometría y de la trigonometría están inmersas. Para este último caso, se seleccionaron ocho estudiantes en los que se apreciaron también varios tipos de intuición. Cada uno de los estudiantes fue tomado como una unidad de análisis.

Otros criterios de selección están enmarcados por el interés, la colaboración y la participación de los estudiantes en el transcurso de la práctica pedagógica. Se debe tener en cuenta que esta población estudiantil seleccionada, no representa de manera general a todo el estudiantado de los grados escolares en los que se está realizando la práctica, sin embargo, las observaciones que se hagan en ellos, son de suma importancia para el desarrollo de esta investigación, ya que permite el análisis y la recolección de información para entender mejor esos procesos de aprendizaje en el aula de clase que permiten el desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos relacionados con triángulos.

Teniendo en cuenta lo anterior, en los dos casos elegidos, se aplicó el primer instrumento de recolección de datos relacionado con los conocimientos previos, luego, al ejecutar todo el trabajo de implementación y construcción del segundo y tercer instrumento en el aula de clase, se pudo observar respuestas que proporcionaron y complementaron el desarrollo de los objetivos de la investigación. Es pertinente resaltar que, al ser un estudio de casos intrínseco, el estudio centró su atención únicamente en las observaciones y el trabajo de la población estudiantil seleccionada, sin pretender generalizar los resultados a otra población de estudiantes. Para el proceso de implementación del estudio de casos, se hace firmar un consentimiento, en el que el estudiante autoriza el proceso y trabajo durante el proceso de práctica escolar.

3.4 Diseño de los Instrumentos

Para el diseño de los instrumentos, entendiendo la necesidad de hacer la recolección de datos para el estudio de casos, se organizan una serie de entrevistas que permitieron observar esas particularidades al momento de analizar el desarrollo del conocimiento intuitivo en cada unidad de análisis. La entrevista, como instrumento, permite un acercamiento a esas ideas conceptuales intuitivas de los estudiantes y un análisis más detallado de la forma de pensar que plasman los estudiantes al momento de escucharlos. En palabras de Murillo (2006), la entrevista:

> permite un acercamiento directo a los individuos de la realidad. Se considera una técnica muy completa. Mientras el investigador pregunta, acumulando respuestas objetivas, es capaz de captar sus opiniones, sensaciones y estados de ánimo, enriqueciendo la información y facilitando la consecución de los objetivos propuestos. (p.3)

La entrevista, ayuda a procesos de investigación con metodología cualitativa, es decir, es un instrumento de recolección de datos que permite el planteamiento de preguntas que ayudan a visualizar ideas y realidades, tal como la observan los sujetos de un sistema social; para nuestro caso particular, ayuda a visualizar la manera como los estudiantes construyen y definen sus ideas en el contexto escolar, para analizar de qué manera desarrollan el conocimiento intuitivo de conceptos matemáticos al momento de enfrentarse a ejercicios y preguntas que involucran el triángulo y sus propiedades.

Ahora bien, al momento de construir la entrevista como instrumento, es necesario tener en cuenta la población estudiantil a la que está dirigida (estudiantes del grado tercero entre los 7 y 11 años, y estudiantes del grado décimo entre los 15 y 18 años) por lo que se tiene en consideración, algunos tipos de entrevistas específicos para cada grupo de estudiantes.

En el caso “Te” (ocho estudiantes) fue necesario complementar el instrumento con grupos de discusión, ya que un proceso de escritura y de redacción al momento de realizar la entrevista en estudiantes tan pequeños, dificultaría la expresión adecuada de sus conocimientos y limitaría la interpretación de sus formas de pensar. Del mismo modo, un espacio de discusión es fundamental para que los estudiantes puedan hablar sobre sus formas de percibir algunas propiedades geométricas, además, es importante para entender la manera en que construyen colectivamente el conocimiento intuitivo, a partir de sus propias ideas.

El tipo de entrevista aplicado a los estudiantes del grado tercero fue no estructurada o abierta, ya que en palabras de Murillo (2006), en la entrevista no estructurada:

“No se requiere la realización de ningún tipo de guion previo a la entrevista. La información que se obtiene de ella es el resultado de la construcción simultánea a partir de las respuestas del entrevistado” (p.9). Es decir, se genera una espontaneidad en las respuestas de cada uno de los entrevistados, exponiendo ideas y argumentos que permiten analizar el desarrollo intuitivo de los conceptos que tienen relación con los triángulos y de esta manera permite observar esas barreras u obstáculos que limitan el desarrollo adecuado del conocimiento.

En el caso “De”, es recomendable realizar una entrevista semiestructurada, en la cual, en palabras de Murillo (2006): “El investigador previamente a la entrevista lleva a cabo un trabajo de planificación de esta, elaborando un guion que determine aquella información temática que quiere obtener” (p.8). Este trabajo de planificación, está acompañado con preguntas pensadas a partir de actividades que ayuden a identificar la manera de interpretar los argumentos planteados en los ejercicios, es decir, a partir de una serie de actividades que involucren el triángulo como concepto, será ´posible realizar un análisis a los argumentos de los estudiantes e identificar el uso e interpretación de conocimientos previos de manera intuitiva, de tal manera que se permita al estudiante llegar a una respuesta adecuada para las situaciones propuestas.

Es importante tener en cuenta que el proceso de entrevistas se realiza en el primer periodo del año escolar y, antes de cada una de las actividades planteadas tanto para el caso “Te” como para el “De”, se hace una descripción de los enunciados, así como de sus objetivos, lo que permite al estudiante analizar qué conocimientos tienen relacionados con el concepto geométrico “triángulo” y que tipo de acercamiento han tenido con sus propiedades; esto, con el ánimo de orientar mejor las actividades previas a cada entrevista y tener información que propicie la construcción de los enunciados teniendo como criterio los conocimientos de cada grado escolar.

3.5 Recolección de la Información

La información obtenida será recolectada en las entrevistas, entendida en palabras de Corrales (2010) como: “la manera de obtener el recuento de historias, el estado actual y las perspectivas de los sujetos que son parte del grupo seleccionado” (p. 8).

Durante el proceso de entrevista para los estudiantes del caso “Te”, la información obtenida será recolectada en notas de voz y con ayudas audiovisuales, en las que se evidencia el trabajo de campo realizado. Estas notas de voz tendrán como finalidad, analizar las respuestas que tengan los estudiantes acerca de sus conocimientos sobre los triángulos e identificar en el contexto y en las construcciones geométricas que se desarrollan a lo largo del proceso escolar, aquellas propiedades que les permiten reconocer las formas geométricas; finalmente, será posible evidenciar que tan desarrollado tienen el concepto, aun sin conocer una definición precisa sobre los triángulos.

Para el caso “De”, lo primero que se debe tener en cuenta antes de recolectar datos relacionados con la entrevista, es el análisis de las actividades en las que se espera identificar los procesos matemáticos que el estudiante ha relacionado con el concepto geométrico, luego, en la entrevista semi estructurada, al momento de recolectar información, se espera analizar si el estudiante ha obtenido un adecuado desarrollo de conocimientos que le permitan usar de manera intuitiva esos saberes previos al momento de enfrentarse a las actividades. Esta recolección de información será de manera escrita, ya que las preguntas de la entrevista semi estructurada pensada para el caso “De”, será registrada (tipo encuesta), luego de las actividades.

Al finalizar los procesos de entrevista para ambos casos, se hará un análisis final en el que se revisará cada una de las grabaciones, notas de voz e información escrita de los estudiantes.

3.6 Consideraciones Éticas

Al momento de realizar la investigación cualitativa en el estudio de casos y teniendo en cuenta que se realiza en el ámbito escolar con niños y jóvenes menores de edad, se deben tener las siguientes consideraciones al momento de construir y realizar las entrevistas:

- Indagar sobre las condiciones posibles para realizar entrevistas a los estudiantes que conforman los casos, según el tema de análisis a investigar. Es necesario obtener permiso solicitando la firma por parte de los acudientes de los estudiantes, a través de un consentimiento informado, el cual se muestra en uno de los anexos. Si no se da la autorización por parte de los acudientes no es posible realizar el proceso de entrevistas.
- Emplear dispositivos electrónicos para registrar la entrevista, solo en caso de haber solicitado permiso a la persona entrevistada. Es fundamental respetar la decisión que se tome al respecto.
- Explicar, antes de iniciar con la entrevista, la investigación que se está realizando, los objetivos y alcances previstos. Iniciar con las preguntas más generales, con las que, poco a poco se pueda llegar a las más específicas.
- Comprometerse con salvaguardar la identidad de la persona que se entrevista.
- Realizar un análisis posterior y búsqueda de coincidencias en los temas tratados o perspectivas para el caso con diferentes entrevistas, o bien, en caso contrario, verificar la información inconsistente entre entrevistados en un segundo intento.

- Codificar cada informante y entrevista realizada dentro de un único sistema de registro de recolección de datos e información de la investigación, para que sea a partir de este mecanismo que se expresen y referencian las fuentes.
- Agradecer la oportunidad de acceso a la información brindada y el tiempo dedicado para ofrecer.

Capítulo 4. Análisis de la Información

En este capítulo, se analizan los datos recolectados a partir de los instrumentos diseñados, los cuales dieron cuenta de cómo se desarrolla el conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos en situaciones en las que el triángulo se encuentra involucrado. Además, busca clasificar algunos tipos de intuición utilizados por ambos casos.

4.1 Unidades de Análisis y Categorías

Con la finalidad de analizar el tipo de intuición observado al momento de resolver diferentes situaciones en las que el triángulo y sus propiedades se encuentren involucrados en el trabajo de campo, hemos implementado una variedad de instrumentos. Además, es importante saber cuáles de esas intuiciones cambian, desaparecen, se transforman o se perfeccionan, teniendo en cuenta las categorías de Piaget y Fischbein, lo que permite establecer una serie de unidades de análisis y categorización de los casos. Para ello, Durán (2012) expresa que la unidad de análisis:

> Tiene un propósito común: representar la realidad, transmitiendo una situación con todas sus complicaciones y asperezas (incluyendo irrelevancias, facetas, ideas equivocadas, poca o mucha información sobre ella). Se presenta de manera lógica y coherente, fluida pero inevitablemente involucra incertidumbre pues las situaciones reales consisten en alguna claridad, mucha o muy poca información, y muchas contingencias (p.124).

En estas unidades de análisis, se da una codificación, de acuerdo con el estudio de casos de manera cualitativa, a través de un proceso de indagación dirigido y una descripción detallada de algunos aspectos de la investigación. Para ello, se incorpora en el análisis, lo que sería el contexto (económico, espacial, político, temporal, etc.) permitiendo una mayor comprensión de su complejidad y, por lo tanto, el mayor aprendizaje del caso particular.

Por ende, durante la implementación de este trabajo, los estudiantes participantes respondieron a preguntas planteadas en una serie de situaciones en los instrumentos anteriormente mencionados. De ahí que, se hayan tomado ocho estudiantes de cada caso ("Te" y "De") como unidades de análisis, para enriquecer la información en el análisis del desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos en situaciones involucradas con triángulos; ahora bien, las categorías de análisis son:

- Categoría 1: A la que llamamos "Idea intuitiva sobre el concepto de triángulo y la desigualdad triangular". En esta, se busca, a través de una serie de actividades, analizar qué conocimientos previos acerca del triángulo y sus propiedades tienen los estudiantes (tanto en el caso del grado tercero, como en el caso del grado décimo). Se utiliza como técnica de recolección de información los grupos de enfoque y las entrevistas. Para ello, como instrumento se utilizan las entrevistas estructuradas y los grupos de discusión. Esta categoría inicial, tiene como propósito analizar el desarrollo conceptual y perceptivo que tienen los estudiantes al momento de utilizar el conocimiento intuitivo para la solución de problemas relacionados con el concepto del triángulo, para lo cual se plantean algunas actividades:

-Preguntas exploratorias acerca del triángulo.

-Actividad pre- diagnóstica en ambos grados, centrada en la categoría, pero diferenciada en la metodología aplicada según la población estudiantil.

Es importante mencionar, que el primer instrumento (de conocimientos previos) no se aplicó solo a las ocho unidades de análisis seleccionadas para cada caso (“Te” y “De"), si no a un grupo mayor de estudiantes, del que fueron seleccionadas las 16 unidades de análisis en total.

- Categoría 2: Llamada “Intuición para la comprensión del triángulo y sus propiedades”. Tiene como finalidad realizar un análisis comparativo que ayude a identificar el uso de la intuición, y cómo a partir de esta, se da paso para la comprensión y reconocimiento de propiedades al momento de trabajar con triángulos. Esta categoría utiliza las mismas técnicas e instrumentos de recolección de datos que la anterior, variando solo en el tipo de entrevista, ya que se utiliza la entrevista no estructurada. Sin embargo, teniendo en cuenta la población estudiantil a la que va dirigida (niños del grado tercero y jóvenes del grado décimo) las actividades varían un poco según el grado de madurez cognitivo que tienen los estudiantes. Para estas actividades, se plantean las siguientes ideas generales:

-Actividad acerca del uso e identificación de las propiedades del triángulo.

- ¿Cuántos triángulos en total existen en la figura?

Es necesario mencionar que, aunque las actividades varían un poco según la población estudiantil, las ideas generales se mantienen en el instrumento utilizado.

- Categoría 3: Esta categoría llamada “Intuición para la comprensión del teorema de Pitágoras” busca, gracias a los grupos de discusión y la entrevista semiestructurada, observar dificultades al momento de intentar apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previas para la comprensión y desarrollo de situaciones, en las que se encuentra inmerso el teorema de Pitágoras. Si bien, en el caso “Te'‘, el teorema de Pitágoras no se trabaja desde lo curricular, se pueden implementar actividades que permitan un acercamiento intuitivo a este. Para ello, se pretendió realizar una actividad con material concreto (uso del tangram) en el que se responda a la siguiente pregunta:

- ¿Qué relación hay entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo?

En los estudiantes del caso "De", la actividad tendría que responder a esta pregunta, pero, se plantea desde el reconocimiento y relación de diferentes áreas de figuras geométricas superpuestas o construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Cada una de las categorías, corresponde a una fase en trabajo de campo en el que se desarrolla la investigación.

4.2 Fases en el Trabajo de Campo en Correspondencia con las Categorías

La aplicación de los instrumentos para la investigación se dio en tres fases correspondientes al proceso de acompañamiento de la práctica pedagógica, las cuales están relacionadas con los espacios en los que se implementaron las actividades propuestas en las diferentes categorías.

Estas fases se dan en tres momentos diferentes: la primera fase fue la implementación del primer instrumento, que se dio antes de que los estudiantes tuvieran un acercamiento al concepto de triángulo y a sus propiedades, ya que se trataba de indagar acerca de qué conocimiento tenían en relación con el tema, sea porque hayan pasado por una enseñanza sistemática en grados anteriores o porque de manera intuitiva identifiquen sus propiedades. De esta forma, se implementa para ambos casos una serie de preguntas acompañadas de actividades en las que analizamos la idea intuitiva del concepto.

La segunda fase se dio en el momento que se enseña el concepto de triángulo y sus propiedades, ya que se buscó identificar el tipo de intuición que desarrollan los estudiantes sobre este concepto y su aplicación en diferentes situaciones problema, además de analizar si efectivamente hay comprensión en relación con el tema o, por el contrario, aún persisten algunas ideas intuitivas que, de alguna forma, dificultan ese proceso de comprensión o generan vacíos conceptuales. De esta manera, las actividades propuestas en esta fase y que corresponden a la segunda categoría, buscaron analizar si hay comprensión y uso de las propiedades geométricas en diferentes situaciones relacionadas con el uso del triángulo y la clasificación de este. Luego de esta actividad, se abre un espacio de diálogo en el que se permite el debate en relación con el desarrollo e identificación de propiedades, es decir, qué se tuvo en cuenta al momento de identificar triángulos y a partir de qué características.

La tercera fase, se da luego de que los estudiantes pasaran por una enseñanza sistemática del concepto de triángulo y sus propiedades, lo que permitió identificar si efectivamente la intuición antecede a la comprensión de los conceptos y permite al estudiante tener ideas intuitivas más refinadas al momento de enfrentarse a situaciones en las que el triángulo y sus propiedades están involucradas. Las actividades en esta fase se encuentran orientadas a que el estudiante indague en esa comprensión que tuvo de los conceptos relacionados con el triángulo y pueda responder intuitivamente a los cuestionamientos propuestos en la actividad. Al final de la actividad, se realizó un conversatorio en el que se habló acerca de las dificultades conceptuales al momento de analizar el ejercicio.

La siguiente figura muestra las fases y categorías en las que se desarrollan las diferentes actividades de los instrumentos, así como el propósito de cada actividad.

Figura 6

Fases y categorías de los instrumentos de recolección de datos

Nota. Creación propia

4.2.1 Primer Instrumento, Entrevista Inicial

Para el caso “Te", cada uno de los estudiantes dio respuesta a una actividad de conocimientos previos acerca del concepto de triángulo, realizando así un pequeño acercamiento a las ideas que tenían sobre estos, como se pueden ver en los anexos. Para la actividad, se realizaron 4 preguntas, la primera: ¿Qué es un triángulo? Esta pregunta ayudó a interpretar, según las respuestas dadas por los estudiantes, qué tipo de representación gráfica o idea ilustrativa del triángulo tenían en relación con sus conocimientos previos.

Respecto al segundo enunciado, se orientó a los estudiantes a dibujar 3 tipos diferentes de triángulos, donde se tiene como finalidad evidenciar si los estudiantes del caso “Te” identifican propiedades de los triángulos cuando se les presentan en diferentes posiciones, y si hay una idea intuitiva de qué es el triángulo y cuáles son sus características generales.

En la tercera pregunta ¿Qué más sabes sobre los triángulos? Señala con una X, de acuerdo con la fila en la que te encuentres, ¿cuáles de las figuras que se ubican en el tablero son triángulos?; se pretendió establecer un diálogo entre los estudiantes y el investigador, para entender qué concepción manejaban los estudiantes sobre los triángulos y la desigualdad triangular.

La cuarta pregunta estuvo orientada a responder el siguiente cuestionamiento ¿Todas las figuras señaladas representan un triángulo? De no ser así, entre todos discutan el porqué. En este punto se pretendía que algunos de los estudiantes dieran explicaciones del por qué algunas de las imágenes señaladas no corresponden a triángulos, para analizar qué tipo de comprensión tienen en relación con las propiedades del triángulo y cómo esa comprensión ayuda al desarrollo del conocimiento intuitivo en diversas situaciones.

Para el caso "De", en la aplicación del primer instrumento de recolección de datos, es decir, en la actividad pre diagnóstica, se realizaron cuatro preguntas a modo de entrevista estructurada, con el ánimo de debatir cuáles son los acercamientos que se han tenido en los grados escolares anteriores acerca del triángulo. Esta primera actividad se realizó durante el primer semestre de prácticas pedagógicas y sirvió de insumo para la realización de los posteriores instrumentos con los que se analizaría el uso de la intuición para resolver situaciones problema en las que los triángulos se encuentran involucrados.

En la primera pregunta de la actividad de conocimientos previos, se interroga acerca de ¿qué es un triángulo? La idea con esta pregunta inicial era observar a través de sus respuestas qué tipo de acercamientos han tenido en relación con el concepto y, de manera intuitiva, qué se entendía por triángulo.

Luego, en la segunda pregunta, se agregan tres segmentos de recta, uno de 9 cm, uno de 4cm y otro de 3 cm, y se planteó la pregunta ¿es posible construir un triángulo con estas medidas? argumenta tu respuesta. Este ejercicio desarrollado en el segundo punto de la actividad se dio con el ánimo de observar si se identifica el uso de la intuición al desarrollar ideas en relación con la desigualdad triangular, para determinar si hay o no comprensión del teorema. Para ello, se analizan las respuestas que los estudiantes comparten de manera intuitiva y las conjeturas a las que llegan sobre si es o no posible la construcción de un triángulo con las medidas de los segmentos dados.

Luego, en el punto tres de la actividad de conocimientos previos, se realizó una pregunta de selección múltiple, en la que se cuestionó nuevamente acerca de la desigualdad triangular. La pregunta que se realizó y sus opciones de respuesta fueron:

la suma de cualesquier dos lados de un triángulo es:

A. Siempre mayor que la medida del otro lado.
B. Siempre menor que la medida del otro lado
C. Menor o mayor que la medida del otro lado

Nuevamente, lo que se analizó es qué tan desarrollada está la intuición del estudiante a partir de la identificación de las propiedades de los triángulos (para este caso particular la desigualdad triangular) al momento de seleccionar las respuestas, además de observar si hay algún tipo de dificultad al marcar una opción de respuesta, dada la semejanza de los argumentos.

Finalmente, en la cuarta y última pregunta, se dibujó un triángulo en posición rotada (de tal forma que ningún lado esté en posición horizontal) y se hizo una pregunta en relación con la imagen del triángulo. La pregunta fue ¿cuál crees que sea la base del triángulo y por qué? Argumenta tu respuesta. Esta última parte de la actividad de conocimientos previos se dio con la intención de analizar si el estudiante tiene algún tipo de dificultad por la posición del triángulo que impida de alguna manera el uso del conocimiento intuitivo al momento de argumentar su respuesta.

Luego de la actividad pre diagnóstica, se hizo una pequeña entrevista escrita en la que se dio respuesta a diferentes interrogantes que ayudaron a tener un mejor análisis de los argumentos planteados por los estudiantes. Las preguntas de la entrevista tenían como propósito analizar el grado de dificultad que se tuvo al momento de responder a la actividad, así como analizar el tipo de propiedades conceptuales que el estudiante tuvo al momento de dar solución a las preguntas.

A continuación, se presentan las preguntas de la entrevista escrita:

1. Al momento de analizar la pregunta ¿Qué es un triángulo? describe cuáles propiedades o aspectos vistos en clase recordaste y cómo lograste argumentar tu respuesta.
2. ¿Qué reflexión te deja la construcción de un triángulo a partir de segmentos dados? ¿Es posible construir un triángulo con tres segmentos de recta cualesquiera?
3. ¿Cuándo fue la última vez que realizaste ejercicios relacionados con triángulos?
4. Al momento de realizar ejercicios geométricos y matemáticos en los que el triángulo está involucrado ¿Es importante la teoría vista en el aula de clase? Explica tu respuesta
5. Escribe una pequeña reflexión acerca de la actividad ¿Que propones para una próxima intervención de clase? ¿Qué aspectos mejorarías o cambiarías en la actividad?

4.2.2. Desarrollo del Segundo y Tercer Instrumento

Luego de aplicar la actividad de saberes previos para cada grado, se procedió a desarrollar lo que sería la categoría 2 y 3; al grupo de estudiantes del caso “Te” se le explicó previamente la dinámica, para posteriormente realizar la primera actividad.

En la primera parte de la actividad, se mostró una imagen con varios triángulos; luego, se dio un tiempo prudente para que la observaran y posteriormente dialogaran entre ellos, con el fin de que pudieran responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos triángulos rojos hay?

b) ¿Cuántos triángulos azules hay?

c) ¿Cuántos triángulos rosados hay?

d) ¿Cuántos triángulos anaranjados hay?

e) ¿Cuántos triángulos hay en total?

Después, en una segunda parte se distribuyeron a todos los estudiantes unos fósforos que debían organizar de la misma forma como se observó en la imagen de muestra; al cabo de ello, se les dio la indicación de quitar cuatro fósforos y dejar solo tres triángulos, esto con el fin de analizar cuáles propiedades, clasificaciones, ideas o nociones poseían intuitivamente sobre triángulos, ya que con cada uno de ellos, se hizo un acompañamiento para que evocaran ideas sobre los movimientos para llegar a diferentes resultados.

De igual manera, en un tercer momento se trabajó sobre la desigualdad triangular; para ello se utilizaron palillos con diferentes medidas y se pidió que construyeran triángulos con las siguientes especificaciones:

a) Un triángulo con los palillos de 3 cm, 4 cm y 9 cm.

b) Un triángulo con los palillos de 4 cm, 2 cm y 5 cm.

c) Un triángulo con los palillos de 3 cm, 4 cm y 7 cm.

La intención fue la de contrastar cuáles de esos triángulos eran posibles de construir y, un acercamiento al por qué era posible. De manera similar, se realizó un cuarto punto, en el que se buscaba por medio de unas preguntas orientadoras hacer una retroalimentación al punto anterior, tales como ¿pudiste construir todos los triángulos? ¿cuáles triángulos no pudiste construir? ¿Con 3 palillos cualquiera puedes construir un triángulo?

En el caso "De", la segunda categoría en la que se aplicó el segundo instrumento de recolección de datos se dio con una actividad de reconocimiento de triángulos y sus propiedades en una imagen. La actividad decía lo siguiente:

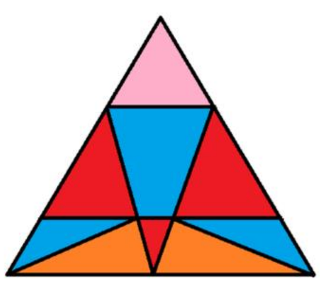
A continuación, se presenta la imagen de un triángulo con diferentes colores. De acuerdo con la imagen, responde la siguiente pregunta:

¿Cuántos triángulos en total hay en la imagen?

¿Qué tipo de triángulos reconoces?

Figura 7

¿Qué tipo de triángulos reconoces?



Nota. Creación propia.

El objetivo de la actividad era analizar intuitivamente cuántos triángulos se identificaban, luego de esto, observar cómo se daba paso a la comprensión de sus propiedades en relación a la identificación y clasificación de los triángulos. Para el cumplimiento de este objetivo, se realizó una entrevista no estructurada en un grupo de discusión, en la que se dio respuesta a los siguientes interrogantes:

1. ¿Cuántos triángulos en total se logró encontrar?

Se dieron 5 minutos para que los estudiantes iniciaran el espacio de diálogo, compartiendo sus ideas y analizando en total cuántas respuestas diferentes se encuentran en el espacio de clase.

2. ¿Qué elementos o propiedades se tuvieron en cuenta para encontrar la cantidad de triángulos?

Nuevamente, se dio un espacio para la discusión de las ideas intuitivas de los estudiantes y, a partir de allí, analizar la manera en que la intuición se reflejó al momento de explicar sus ideas en clase.

3. ¿Se tuvo en cuenta lo aprendido en grados anteriores? Explica tu argumento.

Se dio un espacio de 10 minutos, en el que se esperó que varios estudiantes expresaran si fue o no importante y por qué consideran relevante lo visto en grados anteriores, de esta manera se esperaba encontrar relación y pertinencia entre los saberes previos y el desarrollo de la intuición.

De acuerdo a la tercera categoría para el caso “Te”, se realizó una guía práctica con ayuda del tangram para tener un primer acercamiento a las ideas fundamentales del teorema de Pitágoras, con la finalidad de acercarse de manera intuitiva a algunas propiedades de este, debido a que rara vez se utiliza material concreto para analizar las relaciones que allí se establecen entre las áreas y los lados del triángulo. En el primer punto de esta guía se le entregó a cada pareja de estudiantes unos palillos de longitud 21.2 cm y otros de 15 cm aproximadamente.

Del mismo modo, se propuso a los estudiantes dibujar tres cuadrados en las hojas dadas de acuerdo con dichas longitudes y recortarlos, un cuadrado con la longitud mayor y los otros dos con la longitud menor; se esperaba que con los lados de los cuadrados formaran un triángulo. Allí, hubo una problemática debido a que los estudiantes no pudieron superponer en los cuadrados los dos tangram y establecer las relaciones entre las áreas que se esperaba, aunque gracias a la intuición anticipatoria, fueron capaces de concluir que todas las fichas del tangram podrían llenar los tres cuadrados.

Mientras tanto, en el caso "De" para el desarrollo del tercer instrumento en la tercera categoría, se procedió a realizar una actividad en relación con el teorema de Pitágoras. La aplicación del tercer instrumento se dio cuatro semanas después de haber trabajado el teorema en clase. El objetivo de esta actividad era observar dificultades al momento de apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previas, para desarrollar situaciones en las que se encuentra inmerso el teorema de Pitágoras. Para esta actividad, se desarrollaron dos preguntas; la primera pregunta relacionada con el análisis de algunas imágenes en las que se ve un triángulo rectángulo y algunas figuras geométricas semejantes construidas en sus catetos e hipotenusa, y con base a ese análisis responder a la pregunta ¿Qué relación se establece entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos y el área de la figura semejante a las anteriores construida sobre la hipotenusa? Por último, se pidió argumentar la respuesta.

Figura 8.

Relación entre las áreas de las figuras geométricas semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Nota. Esta imagen hace parte del tercer instrumento de recolección de datos correspondiente a la tercera categoría. Creación propia

La segunda pregunta va en relación con la primera. En este caso, se pidió al estudiante analizar una imagen en la que hay un triángulo rectángulo y sobre los lados del triángulo, unos elefantes. Luego se le pide responder a la pregunta ¿Crees que podría establecerse alguna relación entre las áreas de los elefantes sobre los lados del triángulo? Es importante mencionar que la idea era analizar si hay apropiación conceptual de algunas ideas del teorema de Pitágoras, favoreciendo la verbalización de la relación, mas no esperar una respuesta con cifras exactas.

Figura 9.

Relación entre las áreas de los elefantes semejantes construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Nota. Imagen utilizada en el tercer instrumento de recolección de datos. Recuperada de: [000444157.pdf (emb-japan.go.jp)]

Luego, al finalizar el encuentro, se procedió a la construcción de un grupo de discusión en el que se debatieron las siguientes preguntas:

- ¿Qué dificultades tuviste al momento de relacionar las figuras semejantes construidas sobre el triángulo?
- ¿Qué pasaría si utilizas otras figuras geométricas semejantes construidas sobre los lados del triángulo?
- ¿Es posible o no hallar el área de figuras irregulares?
- ¿Qué pasa si las dos figuras semejantes más pequeñas construidas sobre dos de los lados del triángulo son del mismo tamaño?

- Argumenta con tus propias palabras la relación que existe entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo.
- Ahora, ¿qué relación encuentras entre los lados del triángulo?

La intención con la aplicación de esta actividad fue la de realizar un análisis relacionado con la comprensión que los estudiantes tuvieron sobre el teorema de Pitágoras. Luego de este análisis, observar cómo se ve reflejada la comprensión en el desarrollo de ideas intuitivas al momento de responder a las preguntas.

4.3 Codificación y Análisis de los Datos

A continuación, se establece en detalle una descripción de cada caso (“Te” y “De”) así como de las unidades de análisis en cada una de las fases del trabajo de campo. Para ello, se recopilaron las respuestas en figuras que hacen relación entre las categorías y fases del trabajo investigativo con relación al caso “Te", además, se muestran las generalidades de las respuestas de manera escrita. Para el caso “De”, se recolectó la información de las respuestas a las actividades y entrevistas en tablas (una para la actividad y otra para la entrevista o grupo de discusión, respectivamente, en cada una de las categorías). Es importante aclarar que las respuestas fueron tomadas exactamente como los estudiantes las escribieron o como en las grabaciones se encuentran, por ello, se pueden apreciar fallas ortográficas y de redacción en algunas partes.

4.3.1 Categoría 1: Idea Intuitiva Sobre el Concepto de Triángulo y la Desigualdad Triangular

Solución a las actividades planteadas en la primera fase (Caso “Te”)

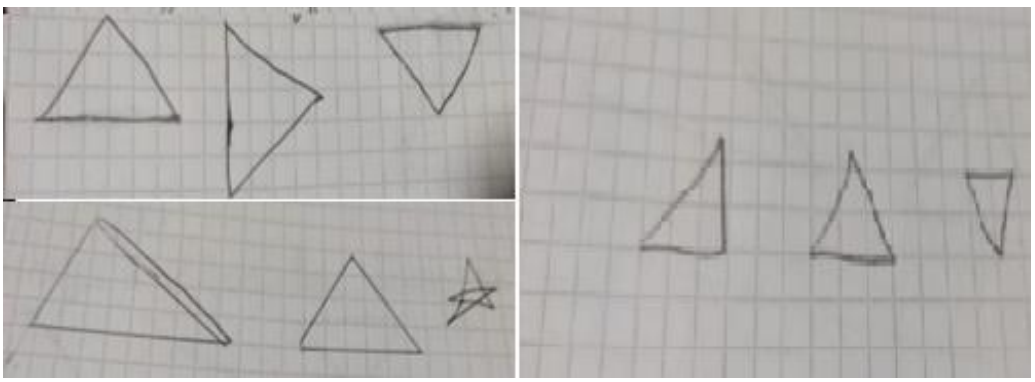
Las respuestas dadas a la primera pregunta se resumen en los siguientes 4 tipos de respuestas:

- Una pirámide.
- Una figura.
- 3 lados.
- Una pizza.

Respuestas a la pregunta 2:

Figura 10.

Solución a la segunda pregunta de las actividades del primer instrumento.



Nota. Tomada de la entrevista inicial realizada al grado tercero. Creación propia.

- Las respuestas a la pregunta 3 se resumen en los siguientes 5 tipos de respuestas:
- Todos son triángulos porque tienen 3 lados.
- El de la fila 2, el tercer dibujo no es un triángulo porque todos sus lados están separados.
- En la fila 3, el que está de tercero no es un triángulo… porque un lado tiene uhmm una curva.
- Profe si, para que sean triángulos todos sus lados deben estar juntos, no pueden tener curvas.
- Yo creo que la mayoría no son triángulos porque los triángulos son de manera horizontal.

Las respuestas a la pregunta 4 se resumen en los siguientes 3 tipos de respuestas:

- Yo hablo por todos y creo que ya que la fila 1, la figura 1 y el 3 son triángulos, de la dos, la figura 1 y el 2, de la tres si son triángulos el 2 y el 4, no estoy seguro si la figura 3, de la fila 4, la figura 2, 3 y 4 y de la fila 5, la figura 1 y 4.
- Profe, de la fila 3, el dibujo 3 no es porque mire que un lado tiene una curva y no está derecho.
- Si ponemos más largos los lados del triángulo, sí podemos formar más, entonces habrá más triángulos.

Solución a las actividades planteadas en la primera fase (Caso "De")

Tabla 2

Solución a las actividades planteadas en la primera fase, caso "De"

Idea intuitiva sobre el concepto de triángulo y la desigualdad triangular	
Pregunta	**Respuestas (los siguientes argumentos, generalizan las ideas de los estudiantes)**
1	• Los triángulos son conjuntos de ángulos que miden de forma distinta, depende de qué tipo de triángulo es. • Un triángulo es una figura geométrica que cuenta con 3 lados (hipotenusa, cateto adyacente y cateto opuesto) • Un triángulo es una figura geométrica que tiene 3 lados • Un triángulo es una figura compuesta por 3 ángulos interiores, 3 lados y es la base de la trigonometría. • Una figura de tres lados y 3 ángulos. • Es una figura geométrica con tres lados iguales o diferentes que cuando se juntan forman ángulos. • Es una figura geométrica con 3 lados y 3 ángulos diferentes y que sus ángulos suman 180°

2	• No se puede construir porque el triángulo quedaría incompleto. • Sé que no da porque al haber un valor tan largo como lo es el 9 a comparación del 4 y el 3 serían tan distintos que no unirían para hacer el triángulo. • Sí se puede hacer un triángulo, pero no sería equilátero porque sus lados no son iguales • No porque las medidas no son compatibles • No se puede, la suma de los dos lados debe ser mayor a la medida del tercer lado • Sí, la hipotenusa podría medir 9, el c.Ady 4 y el c.op 3 • Sí es posible, ya que se pueden juntar para hacer un triángulo, pero se saldría de este.
3	• A. siempre mayor a la medida del otro (La mayoría responde con la letra A) • B. Siempre menos a la medida del otro (Algunos responden la B) • C. Mayor o menor que la medida del otro (muy pocos la C)
4	Cada estudiante señala la respectiva base y argumenta de la siguiente manera: • Para mí la base de algo es en lo que está apoyado, independiente de la disposición del triángulo • Es el lado más largo • Es la que está al lado del ángulo de 90° • Podemos llamar base a cualquiera de los tres lados de un triángulo ya que en este triángulo no se define una base como tal. • Depende de en qué posición estuviera el triángulo, puede ser cualquiera, pero en este caso la que señalé porque los otros lados miden 6cm y creo que la altura de 90° da mejor • Porque la hipotenusa debe ser la más grande y sus catetos son los que conforman el triángulo. • Porque su lado más grande es el de abajo.

Nota. Primer instrumento de recolección de datos.

Tabla 3

Entrevista de la primera categoría para el caso "De"

Entrevista estructurada	
Pregunta	**Respuestas (los siguientes argumentos, generalizan las ideas de los estudiantes)**
1	• Recordé cuando me enseñaron que era una figura geométrica con tres lados y tres ángulos, eso fue lo que me ayudó a resolver • Una investigación al inicio del año escolar me ayudó a responder y argumentar la pregunta • Recordé cuando nos enseñaron qué era un triángulo y eso puse • Recuerdo que tiene distintos o iguales lados y ángulos distintos que forman un total de 180° • Recordé que la hipotenusa siempre es más grande que los catetos, también que la suma de todos los lados da 180° • Recordé los ángulos que conforman un triángulo, y recordé sus lados, como los catetos y la hipotenusa.
2	• De reflexión solo me deja que debo de repensar más y llevar a la práctica los conocimientos, y no, no se puede con cualquier medida de los segmentos, SIEMPRE y cuando éstas no cumplan con la propiedad de la medida de sus lados. • Pues es normal realizar actividades con segmentos dados la verdad, aunque a mí no me gusta mucho. • Me gustó y me ayudó a argumentar la lógica para construir un triángulo. • Al principio lo había dudado porque cuando lo imaginé se veía posible hacerlo con esas medidas, pero cuando lo dibujé sobraban varios centímetros y pude responder mejor. • Eso deja como reflexión que hasta lo más mínimo cuesta.

	• Se puede construir un triángulo con tres segmentos de recta cualesquiera mientras la hipotenusa sea mayor
3	• La última vez fue en una clase con la profesora, haciendo razones trigonométricas • Desde mi anterior colegio no hacía este tipo de actividades • Antes de este curso, hace cómo 2 años no hacía este tipo de actividades • En la última clase de matemáticas. • Hace poco realizando un taller planteado en clase
4	• Sí, porque nos muestran fórmulas que no cambian y que son importantes y exactas. • Sí porque de ahí sacamos las lógicas, bases y teorías • Sí porque si no sabes lo teórico cómo vas a pasar a lo práctico. • Sí, es importante porque en un examen o actividad trato de acordarme de lo visto en clase y hay muchas cosas que se quedan grabadas • Ayuda a reforzar en varios temas, pero no a todos • En realidad, nos puede ser útil en varios temas, pero no en todos porque todos los temas son diferentes • Demasiado, ya que ello nos ayuda a resolver las cosas un poco más rápido.
5	• La verdad no cambiaría o mejoraría algo ya que me parece increíble este tipo de actividades • Sería bueno también hacerlo en otras materias y más seguido para recordar lo visto en clase • Nada, me pareció muy buena la actividad • Me parece que la profe y el profe tienen unos muy buenos métodos de enseñanza y ojalá mejoraran los estudiantes con la escucha y el respeto. • La actividad está bien, pero, me parece que hay preguntas las cuales vimos hace mucho y no las repasamos cómo tal, entonces puede que en el momento quede claro pero después de un tiempo se olvida.

	• Más actividades recreativas para no tomar las matemáticas como algo malo. Es interesante ver cómo se hacen estas pruebas para averiguar, pero es increíble cómo se olvidan las cosas vistas.

Nota. Entrevista desarrollada luego de finalizar la actividad de conocimientos previos.

4.3.2 Categoría 2: Intuición para la Comprensión del Triángulo y sus Propiedades

Solución a las actividades planteadas en la segunda fase (Caso "Te")

Las respuestas dadas se resumen en los siguientes 4 tipos de respuestas:

- Los triángulos en total son 9, ya que si se suman 3+3+1+2 son 9
- Hay más triángulos, está el grande.
- También si cogemos los chiquitos se forman más grandes (empieza a señalar), entonces serían 11.
- Yo conté 13, con el rojo, azul y anaranjado se hace uno más grande y al otro lado hay otro igual.

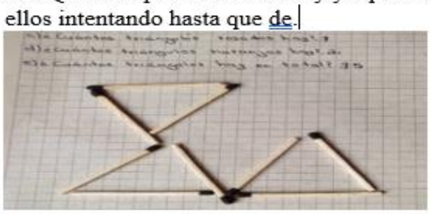
Las respuestas a la pregunta 2 se resumen en los siguientes 3 tipos de respuestas:

Figura 11.

Solución a la segunda pregunta de la segunda categoría

R1: Quedan 3 triángulos, el grande y los dos chiquitos.

R2: Quite los palitos de afuera y ya quedaron los 3, es que uno tiene que jugar con ellos intentando hasta que de.



R3: Yo la hice igual que los demás dele la vuelta y ahí están los 3 triángulos

Nota. Creación propia a partir de las respuestas de los estudiantes.

Las respuestas a la pregunta 3 se resumen en los siguientes tres tipos de respuestas:

Figura 12

Solución a la tercera pregunta de la segunda categoría

R1: El primero no se puede hacer, los palitos tienen que ser más grandes, el segundo si da porque todos los palitos se tocan y el tercer tampoco da.
R2: El primero no, el segundo sí y el tercero si, mire:

R3: Todos si se pueden hacer, pero las puntas no se tocan en el 1 y el 3, ¿podemos construir una pirámide con plastilina y fósforos?

Nota. Creación propia a partir de las respuestas de los estudiantes.

Las respuestas a la pregunta 4 se resumen en los siguientes 5 tipos de respuestas:

- Podemos construir todos si tenemos palitos más largos
- No se pueden construir todos
- Se puede construir el 2, pero si fuera a construir cualquier triángulo todos los palitos deben ser casi del mismo tamaño.
- Si se puede construir cualquier triángulo, un palito debe ser más largo y los otros más chiquitos, pero no tanto.
- Creo que se pueden construir muchos triángulos de muchas medidas, pero algunos no porque palitos chiquitos con grandes no dan para cerrar.

Solución a las actividades planteadas en la segunda fase (Caso "De")

Tabla 4

Solución a las actividades planteadas en la segunda fase, Caso "De"

Intuición para la comprensión del triángulo y sus propiedades.	
Pregunta	**Respuestas (las 8 unidades de análisis de generalizan en los siguientes argumentos)**
1	• Hay 10 triángulos en la imagen. • El triángulo tiene 15 triángulos • 9 triángulos rectángulo • Hay 14 triángulos • Hay 13 triángulos • Hay 12 triángulos
2	• Isósceles, rectángulo, equilátero, escaleno. • isósceles y escaleno • Equilátero, escaleno. isósceles • Equilátero, isósceles, obtusángulo, acutángulo, escaleno • Veo varios isósceles, algunos escalenos y creo que el 14 y 15 son triángulos rectángulos. El grande y el 1 son equiláteros. • Equilátero, isósceles. • La verdad no sé cuáles son sus nombres. • Triángulo isósceles, triángulo normal, triángulo cosecante, triángulo equilátero.

Nota. Actividad planteada en la segunda categoría de los instrumentos.

Tabla 5

Entrevista y grupo de discusión en relación con la segunda categoría, caso "De"

Pregunta	Respuestas (las 8 unidades de análisis se resumen en los siguientes argumentos)
1	• Yo encontré 14 porque conté también el triángulo grande donde están los otros • Solo encontré 9 porque no pensé en unir los demás colores de los triángulos. • Encontré 10 porque separé los colores y el triángulo grande. • Encontré 15 porque hay varios que se pueden unir por color • No pensé en contar los triángulos grandes y por eso encontré solo doce.
2	• Yo tuve en cuenta los lados y cuáles triángulos se podrían formar a partir de estos • A simple vista se ven los triángulos por el número de lados y las características de los tipos de triángulos que recordé. • No estoy seguro, pero si miramos los que están acostados parecen triángulos rectángulos y hay varios que son isósceles y equiláteros. • Yo no recuerdo los nombres, pero sí sabía que había unos con los lados del mismo tamaño y otros con lados muy diferentes. • Había rectos porque tenían un ángulo de 90° que está acostado, equiláteros porque están de lados iguales e isósceles porque tienen dos lados iguales. • Había varios, pero no recuerdo los nombres a pesar de que hace poco los vimos.
3	• Lo que vimos en clase me ayudó a recordar que el triángulo se clasifica en lados y ángulos y también por eso me ayudó a identificarlos. • Sí es importante lo que vimos en clase, pero la verdad no recordaba el nombre de los triángulos. • Sí, por eso me ayudó a saber qué tipos de triángulos había • Sí, pero no recordaba los nombres, pienso que antes de estas actividades se debería hacer un repaso.

- La verdad es importante pero no recordaba los tipos de triángulo, sé que se identifican por sus lados, pero no recordaba los nombres.
- Si, por eso encontré tantos triángulos y coloqué los tipos que pude ver.

Nota. Grupo de discusión, luego de finalizar las actividades del segundo instrumento.

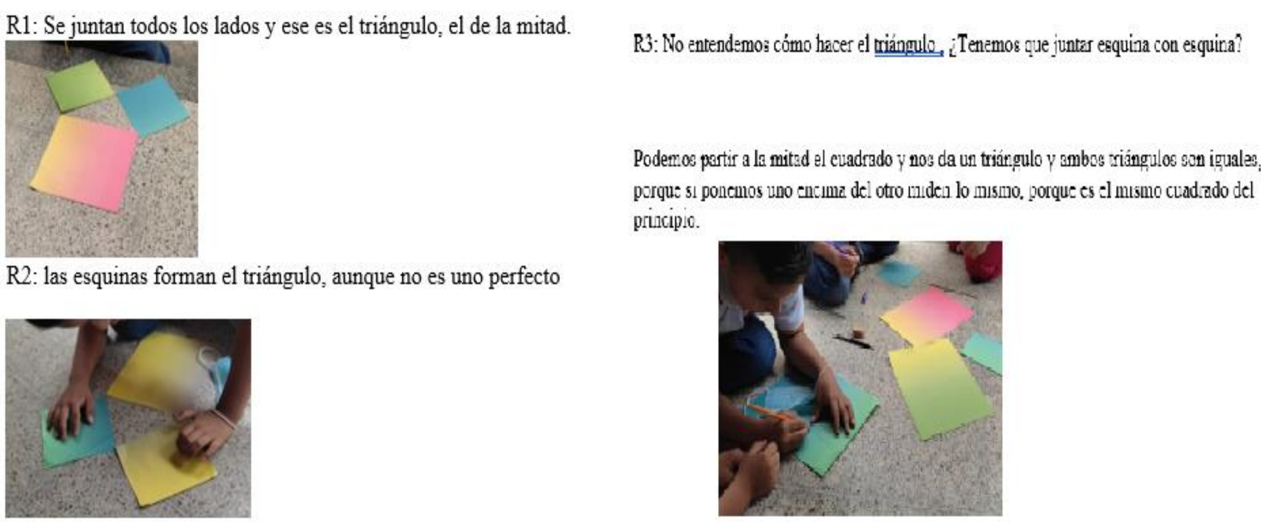
4.3.3 Categoría 3: Intuición para la Comprensión del Teorema de Pitágoras

Solución a las actividades planteadas en la tercera fase (Caso "Te")

Las respuestas a la pregunta 1 se resumen en los siguientes 3 tipos de respuestas, como se ve en la figura 13.

Figura 13

Solución a la primera pregunta de la tercera categoría.



Nota. Creación propia a partir de las respuestas de los estudiantes.

Las respuestas a la pregunta 2 se resumen en los siguientes 3 tipos de respuestas, como se muestra a continuación:

Figura 14

Solución a la segunda pregunta de la tercera categoría.

2	R1: Si tenemos dos tangram podemos con los triángulos más grandes llenar los dos cuadritos pequeños y con las piezas que sobran del cuadro más grande, pero no sabemos cómo. R2: Entonces los dos cuadrados más pequeños son iguales, el cuadrado grande es más enorme que los otros.  R3: El grande es como 2 más grande que uno chiquito, pero no todas las fichas de los tangram caben, yo creo que sobran, a mí no me dio.

Nota. Creación propia a partir de las respuestas de los estudiantes.

Las respuestas a la pregunta 3 se resumen en los siguientes 3 tipos de respuestas:

- Nada, todo me gustó mucho, aunque nunca había visto un tangram.
- Aprendí cosas nuevas.
- No fui capaz de poner todas las piezas del tangram, pero sé que todas caben.

Solución a las actividades planteadas en la tercera fase (Caso "De")

Tabla 6

Solución a las actividades planteadas en la tercera fase, caso "De"

Intuición para la comprensión del teorema de Pitágoras	
Pregunta	**Respuesta (las 8 unidades de análisis se resumen en los siguientes argumentos)**
	• La relación que yo pienso que se establece es que el área de una de las figuras sale de la suma de las otras dos. • La suma del área de los catetos es igual al área de la hipotenusa y todas las áreas se encuentran en un mismo vértice.

1	• Todas se juntan en un vértice concreto y la suma de los catetos es igual a la hipotenusa. • Principalmente se busca la ley hipotenusa, resolviendo el cateto o hipotenusa • La relación que yo veo es que la suma de dos áreas que serían los catetos da el resultado de la tercera que sería la hipotenusa. • La relación que yo veo es que para calcular cualquier lado del triángulo es necesario conseguir el área (en este caso un círculo) que se representa como al cuadrado.
2	• No, consiguiendo las áreas de los elefantes, quedarían espacios del área de los cuadrados y los rectángulos. • La relación que podría ser es que el tamaño de los elefantes se basa en el tamaño de los lados del triángulo. • Sí, por lo mismo del ejercicio anterior. • Sí, porque en el ejemplo anterior ya nos habían explicado que se podía sacar las medidas de cualquier figura como se hace en la imagen encerrada en el cuadrado y contando el largo, los ángulos, etc. • Sí, porque se está aplicando el teorema al triángulo. • Como en el ejercicio anterior, las áreas de los elefantes pueden ayudarnos a hallar el cateto o la hipotenusa de un triángulo rectángulo. • Se relacionan en que parten de una misma base. • Sí, pero solo si la forma de los elefantes es la misma, o sea, si todos los elefantes tienen en común una medida de crecimiento.

Nota. Actividad planteada en la tercera categoría de los instrumentos.

Tabla 7

Entrevista y grupo de discusión en relación con la tercera categoría, caso "De"

Pregunta	Respuestas (las 8 unidades de análisis se resumen en los siguientes argumentos)
1	• La verdad no recordaba que el teorema de Pitágoras se podría con otro tipo de figuras • Si se sumaban las dos áreas más pequeñas daba la más grande en las figuras, entonces lo relacione con el teorema de Pitágoras. • El área más grande de las figuras era el resultado de la suma de las dos más pequeñas y esto pasó en todos los casos. • Se me dificulta relacionarlo con el teorema de Pitágoras porque no entendía las figuras. • La verdad pensé que si sumaba las cantidades pequeñas me daría la grande porque en el triángulo rectángulo esa es una propiedad. • Yo vi que se lograba lo de la relación de la hipotenusa y los catetos. • Que con el valor de los catetos se podía encontrar la hipotenusa y que con la hipotenusa se podía encontrar los catetos.
2	• Si están relacionadas con las medidas de los catetos y la hipotenusa se podría cumplir nuevamente el teorema de Pitágoras. • Depende de las áreas que nos den, si estas no se relacionan con la hipotenusa podría no dar. • Si están en relación con las imágenes entonces se cumpliría nuevamente el teorema de Pitágoras. • Se establecería otra vez la ley del teorema porque habría relación entre las figuras.
3	• Con las figuras irregulares se puede también, siempre que haya relación en las medidas de las áreas. • Supongo que se podría dar siempre que la suma de los catetos al cuadrado sea igual a la hipotenusa. • Es probable, siempre y cuando haya relación en la longitud de las medidas de las figuras.

	• Lo importante es que las figuras tengan relación con las áreas así que pasaría lo mismo
4	• No lo sé, podría dar, aunque depende del tamaño de la hipotenusa • No se dará porque sería más grande la suma que la hipotenusa. • No lo sé, de pronto es más grande que la hipotenusa, entonces no daría la relación de las longitudes. • Es probable que no dé, pero también puede que sí, hay que ver la que está en la hipotenusa y ahí sumar. • No pensé que podríamos encontrar un caso así.

Nota. Grupo de discusión, luego de finalizar las actividades del tercer instrumento.

4.4 Análisis de las actividades y entrevistas realizadas en los casos.

A continuación, se muestran los hallazgos encontrados en los dos casos (caso “Te” y caso “De”) durante el desarrollo de las tres categorías en las que se implementaron las diferentes actividades y entrevistas, con el ánimo de evidenciar el proceso y desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos durante los diferentes ejercicios. Los ejercicios dieron cuenta de cómo se construye este conocimiento intuitivo y cómo se da paso a la comprensión que cada estudiante, en particular, tienen de los conceptos y propiedades que se deben tener en cuenta al momento de buscar resolver las diferentes situaciones.

Caso “Te”

Para el Caso “Te” en la Categoría 1. Entrevista Inicial. Se puede evidenciar en la primera pregunta que los niños hacen uso de saberes previos, tales como la asociación de elementos de su entorno con el concepto de triángulo, ya que hacen alusión al triángulo como una pirámide, una figura que posee tres lados o una pizza; esto refleja que los estudiantes se apoyan en unos conocimientos previos para poder caracterizar un triángulo, con lo que se evidencia por parte de los estudiantes el uso de intuiciones primarias, ya que éstas se adquieren directamente de la experiencia y el trabajo con su entorno. Mientras tanto, en la segunda pregunta, podemos evidenciar en las respuestas que el común de los estudiantes no son capaces de representar el triángulo diferente a la forma estándar que ha sido enseñada, aquella que de manera general acomoda a la base del triángulo de forma horizontal, lo que posiblemente conlleva de manera visual a imaginarios del concepto.

De igual forma, en la manera que se expresan los estudiantes en las respuestas a las preguntas 3 y 4, podemos evidenciar que la gran mayoría de estudiantes comparten la idea de que un triángulo es una figura que posee tres lados solamente, lo cual evidencia que no hay una compresión global de algunas propiedades que poseen los triángulos como ser una figura cerrada o cumplir la desigualdad triangular. De hecho, algunos estudiantes identifican figuras no cerradas que poseen tres segmentos de recta como un triángulo.

Para el Caso “Te” en la segunda categoría, la primera pregunta evidencia que los estudiantes no tienen una comprensión por competencias sobre los 3 elementos que posee un triángulo (lado, ángulo y vértice), ya que en palabras de Font (2007), se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (p.428). En el caso “Te”, solo se enfocan en algunos triángulos de manera local y no miran toda la imagen en conjunto, es decir, no desglosan sus partes para poder evidenciar la cantidad de triángulos que se aprecian en la figura.

Igualmente, en el punto 2 se propuso a los estudiantes hacer inferencias lógicas, favoreciendo conclusiones basadas en premisas iniciales, ayudándose de sus habilidades de forma que, quitando cuatro fósforos formen únicamente tres triángulos. Se logra apreciar así diferentes respuestas que se dan gracias a una previa estimulación sensorial a través de la dinámica propuesta y la exploración de los materiales por parte de los estudiantes. Esta actividad puso en evidencia el uso de intuiciones afirmativas inferenciales y cómo estas dan paso a una comprensión por representaciones según las ideas de Font (2007).

Por otro lado, en la pregunta 3 y 4 se logra evidenciar un tipo de intuición anticipatoria, en el que los estudiantes lograron predecir cuáles son las posibles conclusiones sin realizar el ejercicio. Esto se evidencia en las respuestas que se analizaron de los estudiantes, en las que describían que si tenían un palillo muy pequeño y los otros dos palillos eran muy grandes, al querer formar un triángulo con los extremos de los tres palillos no podrían hacerlo, debido a que el palillo más pequeño no alcanzaba a cerrar la figura y si esto sucedía, entonces no era un triángulo; de esto, se puede apreciar que los estudiantes tienen unas ideas intuitivas de la desigualdad triangular, así como también se hace evidente que hay una comprensión por representaciones, ya que el estudiante comprende a partir de una representación interna en relación con las figuras formadas por los palillos.

En la categoría 3 para el caso “Te”, de manera muy general, hubo una aproximación al teorema de Pitágoras por medio del uso del Tangram; para ello, primero se le propuso al grupo de estudiantes realizar una pequeña aproximación de manera empírica al concepto de área, del cual ellos apenas poseían algunas ideas intuitivas , con lo que procedimos a desarrollar la actividad correspondiente al tercer instrumento; primero se les pidió que por medio de medidas dadas de unos chuzos construyeran unos cuadrados , y que formaran con los lados de estos cuadrados los catetos de un triángulo rectángulo; a su vez, con los dos tangram que tenía cada estudiante se les pidió que rellenaran el área de los cuadrados, para ello, los estudiantes notaron que con un solo tangram rellenaban todo el área del cuadrado más grande, mientras que usando el otro tangram rellenaban el área de los otros dos cuadrados más chicos. Por lo anterior, se denota que los estudiantes pudieron hacer una comparación entre áreas, aproximándose a algunas ideas en relación con el teorema de Pitágoras, usando su intuición a través de material concreto.

Caso “De”

Para el caso “De”, se alcanza a evidenciar algunas situaciones relacionadas con la comprensión de los conceptos geométricos y cómo a partir de esta, se desarrolla un conocimiento intuitivo al momento de resolver las diferentes actividades distribuidas en las tres categorías. De igual manera, se evidencian diferentes tipos de intuición al momento de resolver las situaciones planteadas en las actividades y que, gracias a las diferentes entrevistas y debates realizados en los grupos de discusión, se pudo llegar a entender los procesos por medio de los cuales los estudiantes construyen este tipo de intuiciones. A partir de allí, fue posible entender cómo se da paso a una comprensión (ya sea por representaciones, al momento de realizar una visualización mental, o por competencias, al ser capaz de reconocer objetos matemáticos usándolos en diferentes situaciones problema). Finalmente, se logra hacer un pequeño análisis relacionando el caso “De" con el caso “Te”, en el que se logra visualizar algunos tipos de intuición utilizados en ambos casos, así como otras que surgen al momento de fortalecer el proceso de aprendizaje y que refinan los conocimientos iniciales de cada estudiante.

A continuación, se muestran algunos hallazgos en relación con la comprensión que los estudiantes tuvieron al momento de contestar las preguntas y su complemento con las ideas de Font (2007), expresadas en el proceso de implementación de las diferentes actividades, y de igual manera, se presenta cómo esta comprensión ayuda a la construcción y clasificación del conocimiento intuitivo basado en las ideas de Piaget y presentadas por Fischbein.

Para el Caso "De", en la primera categoría: "Idea intuitiva sobre el concepto del triángulo y la desigualdad triangular", al momento de resolver el primer enunciado, es claro que los estudiantes utilizan aquellos conocimientos previos que tienen en relación con la pregunta sobre la definición de triángulo. Sin embargo, parece que no en todas las respuestas se logra observar un adecuado acercamiento a esos saberes que han adquirido en grados anteriores. Esto no impide un desarrollo intuitivo del conocimiento, ya que se evidencia una intuición basada en orígenes de carácter secundario, al utilizar ideas ya vistas con anterioridad, pero, también se observan intuiciones primarias, ya que al parecer algunos estudiantes no recuerdan con facilidad aquellas ideas y conocimientos previos acerca del reconocimiento de las relaciones interfigurales e intrafigurales las cuales permiten clasificaciones y otras relaciones de inclusión y de pertenencia para argumentar sus respuestas a la pregunta inicial, lo que puede traer dificultades al estudiante en otras situaciones en las que el triángulo esté involucrado y que impidan la construcción y adecuada comprensión de nuevos conceptos.

En relación con la segunda y tercera pregunta, los estudiantes presentan algunas dificultades al momento de responder a la situación presentada en relación con la desigualdad triangular. Es probable que esta dificultad esté relacionada con la falta de comprensión que se tiene respecto a la situación, sin embargo, hay una notoria intuición operativa, más específicamente, una intuición geométrica, ya que los estudiantes recurren a la forma, las medidas y el espacio para tratar de hacer la construcción allí planteada en la pregunta, y así argumentar una respuesta en relación con lo que observaron.

En cuanto a la última pregunta de esta actividad inicial, hay una intuición basada en orígenes de carácter primario, muy marcada con la posición en la que se encuentra el triángulo, lo que permite inferir que no hay una comprensión en relación con las propiedades del triángulo y aquellas partes que lo componen. El estudiante en este caso orienta su respuesta a unas ideas intuitivas marcadas por la posición, dejando de lado la comprensión por competencias, que, para este caso es poco evidente. Hay una intuición operativa geométrica, puesto que los estudiantes tienen en cuenta la posición del triángulo en el plano para determinar cuál es la que consideran la base y así dar una solución; sin embargo, no siempre se tiene una respuesta certera que dé cuenta de la comprensión de las propiedades del triángulo y sus partes.

- En relación con la entrevista escrita que se da luego de la primera actividad, los estudiantes hablan de aquellos conocimientos previos en relación con el triángulo, que vieron en grados anteriores, lo que confirma el uso de intuiciones basadas en orígenes secundarias al momento de responder a los diferentes cuestionamientos, ya que son ideas construidas a partir de unas bases conceptuales ya estructuradas, sin embargo, este conocimiento reflejado en este tipo de intuiciones, no garantiza una comprensión por parte de todos los estudiantes, puesto que las ideas iniciales presentadas por algunos de ellos no son correctas, reflejando una conceptualización errónea en relación al triángulo y sus propiedades. Por ejemplo, el siguiente argumento escrito por unos de los estudiantes del caso “De”: Recordé que la hipotenusa siempre es más grande que los catetos, también que la suma de todos los lados da 180°. La actividad lleva a los estudiantes del caso "De" a reflexionar en relación con las ideas que se tienen en cuanto a los conceptos geométricos relacionados con el uso de triángulos y de cómo estas ideas o conocimientos tienen una tendencia a ser olvidados con el transcurrir del tiempo. Así mismo, los estudiantes expresan en la entrevista que se debe llevar a la práctica aquellos conocimientos vistos en el aula de clases y espacios de formación, para fortalecer aquellas bases de conocimiento que ayudan a desarrollar intuiciones más refinadas.

En relación con la segunda categoría "Intuición para la comprensión del triángulo y sus propiedades", los estudiantes del caso "De" tienen cierta facilidad para recordar las propiedades del triángulo y sus características, lo que les permite encontrar el total de estas figuras geométricas en la imagen. Esta facilidad al momento de recordar las propiedades, se da gracias a que, durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes estaban repasando temas en relación con el uso de triángulos en el aula de clase, lo que permitió que sus bases intuitivas de conocimiento se encontraran menos olvidadas. Algunas intuiciones que se perciben al momento del desarrollo de la actividad están muy marcadas en cuanto a lo espacial y geométrico, es decir, se notan intuiciones operativas, ya que el estudiante hace uso de la forma, espacio y posición de los triángulos para seleccionar cuántos hay y las diversas posiciones en las que se presentan las figuras. Hay claramente unas intuiciones semánticas según las ideas de Fischbein (2002), las que concibe así: "Semantic intuitions are those referring to the meaning of concepts". (p.58), lo que traduce que: "Las intuiciones semánticas son las que se refieren al significado de conceptos" refiriéndose a los procesos lógico-matemáticos, es decir, que hay una relación de objetos e imágenes con las propiedades de los triángulos. En relación con la compresión, algunos estudiantes no parece que desarrollen representaciones internas y externas que den paso a la comprensión basada en las ideas de Font (2007), ya que algunas de las soluciones presentadas no muestran claridad en cuanto a la clasificación que realizan de los triángulos, mientras que otros, mencionan algunos tipos de triángulos que hasta el momento no se han definido; de aquí, se puede inferir que lo que comprende en clase puede ser malinterpretado por el estudiante, debido a que no se hacen preguntas que ayuden a corregir aquella comprensión relacionada con lo conceptual en los cursos de matemáticas.

Sin embargo, se observa que otros estudiantes dan paso a una comprensión por competencias, ya que reconocen el triángulo como objeto matemático e identifican sus propiedades y representaciones para usarlos en situaciones problema en las que se encuentre involucrado (para este caso, el análisis de la figura 7).

En cuanto a la entrevista realizada en el grupo de discusión de la segunda categoría, los estudiantes mencionan que su atención se centró en el número de lados al momento de seleccionar el total de triángulos, lo que evidencia que existe una intuición afirmativa, ya que hay unas representaciones aceptadas (para este ejercicio en particular, que el triángulo es una figura de tres lados) y que se dan cómo certeras, lo que permite al estudiante encontrar una solución.

La tercera categoría "Intuición para la comprensión del teorema de Pitágoras" se dió luego de que los estudiantes del caso "De" pasaran por un proceso de aprendizaje en el aula. Al analizar las actividades, se evidencia que este proceso de aprendizaje reciente permitió un desarrollo más rápido de algunas ideas intuitivas que ayudaron en el proceso de reflexión de los estudiantes al momento de dar solución a las dos preguntas de la actividad. La parte inicial de la actividad muestra una serie de figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo; estas imágenes estaban acompañadas de una pregunta que expresa lo siguiente (se tenía como hipótesis que las figuras son semejantes): ¿Qué relación se establece entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos y el área de la figura semejante a las anteriores construida sobre hipotenusa del triángulo? Al momento de argumentar las respuestas, los estudiantes recurrieron a esos conocimientos conceptuales vistos en clase, lo que permitió evidenciar intuiciones afirmativas, ya que el estudiante hace una relación entre lo teórico y lo práctico, argumentando así la solución a la pregunta. Luego, en la segunda parte de la actividad, los estudiantes tenían una situación similar a la de la primera parte, con la particularidad de que las figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo eran elefantes (semejantes). Los estudiantes argumentaron sus respuestas de manera similar a la primera parte, en la que, además de percibir unas intuiciones afirmativas, también se observó una comprensión competitiva, ya que hay un uso competente del objeto matemático (para este caso el triángulo rectángulo), sus propiedades en diversas prácticas, además, se observa una comprensión por representaciones, ya que se observó a través de sus argumentos que hay representaciones internas que ayudan a construir las externas que dan paso a la adecuada comprensión.

Además, según las ideas de Font (2007), estas intuiciones secundarias que utilizan un conocimiento previo dan paso a un aprendizaje significativo ya que él menciona que:

> Aprender significativamente quiere decir poder atribuir significado al material que es objeto de aprendizaje; esta atribución solamente se puede efectuar a partir de aquello que ya se conoce mediante la actualización de esquemas de conocimiento pertinentes para la situación estudiada; estos esquemas no se limitan a asimilar la nueva información, sino

que el aprendizaje significativo siempre conlleva la revisión, la modificación y el enriquecimiento estableciendo nuevas conexiones y relaciones (p.429)

Finalmente, en el grupo de discusión desarrollado en la tercera entrevista, los estudiantes mencionan que recurrieron al teorema de Pitágoras visto en clase y que, además, recordaron algunos ejercicios que se realizaron, lo que permitió el fortalecimiento de la comprensión conceptual en aquellos espacios y facilitó el desarrollo de la tercera actividad. Como reflexión, los estudiantes hablan sobre la importancia de realizar este tipo de actividades, que ayuda a mejorar procesos de comprensión y a relacionar los conceptos geométricos con situaciones más contextualizadas.

Capítulo 5: Conclusiones

En este apartado, se encuentran las consideraciones finales para esta investigación, desarrolladas en el proceso e implementación de los instrumentos durante el transcurso de prácticas pedagógicas y que dieron forma a la propuesta de trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Además, presenta las conclusiones y reflexiones en relación con los objetivos generales y específicos, así como las posibles contribuciones, aportes y herramientas que permitan el fortalecimiento y continuidad de otros trabajos de investigación afines con ideas asociadas a la intuición para la comprensión en situaciones relacionadas con triángulos. Por último, se realiza un análisis en relación con la intuición utilizada por los estudiantes de los dos casos (“Te” y “De”), según las categorías y clasificación propuesta por Fischbein (2002).

5.1 Consecución de los Objetivos: General y Específicos

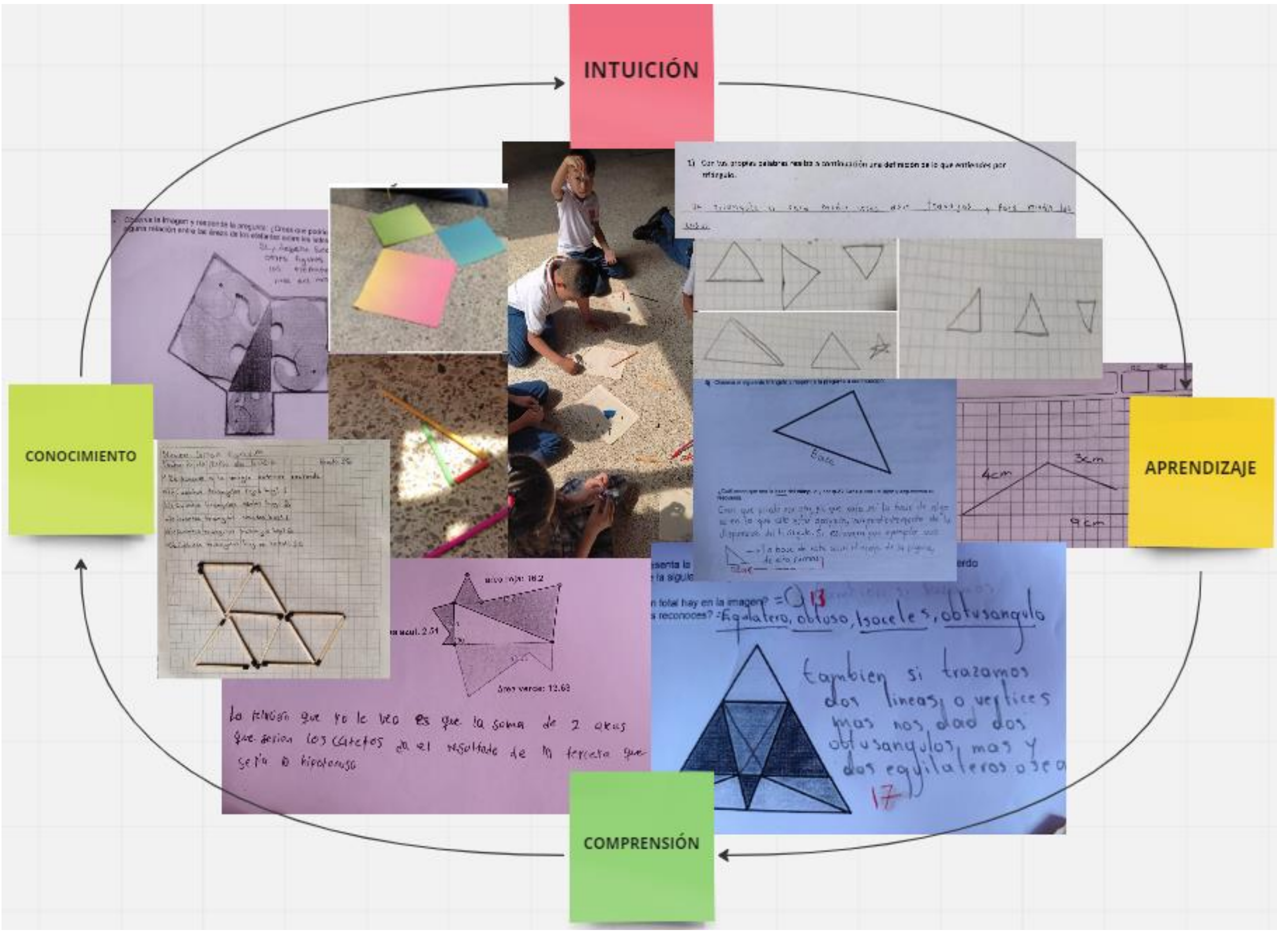
Durante el proceso de esta investigación, es notoria la fuerte influencia de la intuición y de la comprensión durante el desarrollo de las actividades, ya que los estudiantes pertenecientes a los dos casos seleccionados en el trabajo de campo plasman en sus respuestas esos conocimientos intuitivos relacionadas con esas ideas que tienen sobre los triángulos en las diferentes situaciones problema presentadas en las fases de los instrumentos.

Esta fuerte influencia de la intuición en los casos estudiados, permite además identificar el tipo de intuiciones, según las categorías propuestas por Fischbein (2002), y generan un aprendizaje significativo según las ideas de Font (2007) al momento de utilizar conocimientos previos (intuiciones secundarias) para el desarrollo de nuevos conocimientos matemáticos; él menciona que: "La significatividad del aprendizaje se refiere a la posibilidad de establecer vínculos sustantivos y no arbitrarios entre aquello que hay que aprender –el nuevo contenido– y lo que ya se sabe" (p.429), idea que también se comparte desde la investigación de Peña y Mariño (2020) cuando mencionan que: "la intuición matemática es un modo general de conocimiento, estrechamente relacionada con los conceptos usados. (p.55) De igual manera, es posible analizar cómo esa intuición utilizada para la solución de las diferentes situaciones involucradas con triángulos y que genera un aprendizaje significativo, facilita la comprensión matemática (sea por representaciones o por competencias), entendida además, en palabras de Font (2007): "como una capacidad que tiene el estudiante y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático" (p.430), lo que permite dejar de lado aquellas intuiciones primitivas y desarrollar intuiciones secundarias. Además, se produce un nuevo conocimiento, ya que en palabras del autor mencionado "Esta manera de entender la comprensión implica concebirla como conocimiento y aplicación de las normas que regulan la práctica" (p.431), de igual manera, él describe que: "los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales" (p. 432).

La siguiente figura, producto del trabajo de campo de la investigación y resultado destacable en la presente investigación, da claridad a esa relación entre intuición, aprendizaje, comprensión y conocimiento, que se pudo observar al momento de analizar las diferentes actividades planteadas en los instrumentos de recolección de datos de cada uno de los casos.

Figura 15

Relación entre intuición, aprendizaje y comprensión según los resultados en los instrumentos.



Nota. Creación propia.

Lo anterior, se logró gracias a la experiencia en el momento de realizar diferentes ejercicios en el que el triángulo es trabajado en diversas situaciones problema propuestas en las actividades, para los cuales la intuición logra vincularse con un aprendizaje significativo y así dar paso a los procesos de comprensión que benefician a los estudiantes en la generación de nuevos conocimientos y saberes por medio de la experiencia.

Aunado a esto, se tiene la comprensión unida a la intuición como sinergia central de la investigación, las cuales se hacen presentes en la resolución de problemas presentados en las distintas fases de los instrumentos, reconociendo la importancia de la comprensión como un proceso mental que permite establecer ciertas relaciones que, a su vez, ayudan a instaurar nuevos conocimientos; también, permite darle ese grado de importancia a la intuición y a la categorización que tiene, basada en las ideas de Fischbein (2002) y que fueron presentadas en este trabajo. Lo anterior, ayuda a determinar cómo esos saberes intuitivos se mantienen, se perfeccionan o se van transformando para dar paso a otros nuevos.

En respuesta al primer objetivo específico, el cual reza: "Detectar dificultades al momento de apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previas para desarrollar una comprensión en situaciones relacionadas con el uso del triángulo, sus propiedades y teoremas relacionados", se puede afirmar que efectivamente, durante la aplicación de los instrumentos se detectaron dificultades en ambos casos ("Te" y "De").

En el caso "Te" se encontraron dificultades en relación con el reconocimiento de propiedades del triángulo, ya que algunos de los estudiantes de las unidades de análisis relacionaron el triángulo con otros objetos (como pirámides, montañas, pizzas, etc.) De igual forma, hay una dificultad al momento de identificar triángulos con otras figuras bidimensionales de tres lados (como líneas poligonales abiertas). Finalmente, al hacer el acercamiento al teorema de Pitágoras, los estudiantes no alcanzaron a establecer la relación entre las áreas de cuadrados construidos sobre los catetos y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

En el caso "De", hubo inconvenientes al tratar de definir el triángulo, ya que algunos estudiantes expresaban ideas específicas relacionadas con la forma en la que se clasifica (por ángulos y por lados) al momento de tratar de construir una definición (por ejemplo, al mencionar que un triángulo es una figura geométrica de tres lados y tres ángulos iguales). Otro obstáculo importante, se dio con la desigualdad triangular, ya que algunos estudiantes, no recordaban las ideas principales en relación con este teorema, por lo cual no pudieron expresar sus ideas respecto a las construcciones geométricas planteadas en las actividades. Por último, los estudiantes del caso "De" presentaron falencias en relación con la comprensión del teorema de Pitágoras, ya que, en un inicio, algunos expresaban que solo había relación con las figuras semejantes construidas sobre los catetos y la hipotenusa, si esta figura era un cuadrado (con otras figuras construidas, no encontraban relación al principio de la actividad)

En algunos casos, estas dificultades conceptuales reflejadas al momento de representar sus aprendizajes de manera intuitiva, puede darse porque algunos conceptos y conocimientos vistos en la escolaridad, tardan demasiado en volver a retomarse en grados más avanzados, lo que genera algunos vacíos conceptuales en relación con las propiedades y teoremas que limitan en el estudiante la construcción de nuevos conocimientos en concordancia con los triángulos. Como consecuencia, el estudiante de manera intuitiva retoma estas ideas reducidas por los vacíos conceptuales, generando una escasa comprensión de lo que está observando en las diferentes actividades propuestas.

Por otro lado, existen situaciones en las que el estudiante no entiende de manera adecuada ciertos conceptos matemáticos (ángulo, vértice, cateto, hipotenusa, base, etc.) y no parece que exista un proceso idóneo de aprendizaje, ya que no se despejan las dudas del estudiante por diferentes situaciones (timidez o dificultades al preguntar en frente de otros estudiantes), lo que con fundamento en las ideas de Font (2007), parece que no se da un verdadero proceso de comprensión, ya que no usa de manera competente los conceptos relacionados con el triángulo en diversas prácticas, y por consiguiente, entorpece o dificulta esa apropiación intuitiva de los conceptos y propiedades relacionadas con triángulos.

Ahora bien, en cuanto al segundo objetivo específico el cual reza "Identificar el tipo de intuición utilizado según las ideas planteadas por Fischbein (2002), al momento de enfrentarse a diferentes situaciones que requieran el uso de las propiedades del triángulo", se podría concluir que efectivamente hubo una identificación de la intuición basada en las categorías planteadas por Piaget, según algunas características determinadas por lo teórico, lo espacial y lo abstracto. En el caso "Te", se identificaron diferentes procesos intuitivos de conocimiento durante el desarrollo de los tres instrumentos, como lo son, de acuerdo con lo planteado por Fischbein (2002), intuiciones basadas en orígenes primarias, ya que están acentuadas por experiencias cotidianas que el estudiante ha tenido con relación a las propiedades de los triángulos y algunos objetos de su cotidianidad; otra categoría en la que se ve muy marcada la intuición utilizada por los estudiantes del caso "Te" son las anticipatorias, ya que se observa una visión preliminar y global que precede a lo analítico, al momento de resolver situaciones en las que el triángulo está involucrado; por otro lado, encontramos intuiciones afirmativas, dado que hay una interpretación de los hechos que dan unas soluciones explícitas y marcadas por lo espacial y geométrico, al tener relación con propiedades del triángulo y el entorno.

En el caso "De", se reflejan algunas de esas categorías al igual que en el caso "Te", ya que también se observan unas intuiciones afirmativas, en las que se encuentran las intuiciones relacionales y semánticas, ya que se visualiza esa relación de las propiedades con el contexto y los planteamientos de las diferentes actividades. Además, se observan intuiciones operativas geométricas, ya que se establece una relación de objetos al analizar algunas de las imágenes planteadas en las actividades y una relación de conceptos y propiedades geométricas con los ejercicios planteados en los instrumentos. Desde las ideas planteadas por el autor, encontramos unas intuiciones basadas en orígenes de carácter secundario, debido a que hay desarrollo de nuevas intuiciones a partir de algunos conocimientos previos muy marcados al momento de resolver las diferentes situaciones en las que el triángulo se encuentra involucrado.

En relación al objetivo general, el cual expresa "Analizar el desarrollo del conocimiento intuitivo para la comprensión de conceptos geométricos involucrados en situaciones relacionadas con triángulos" se concluye que, en efecto se logra visualizar en los dos casos ("Te" y "De") el cumplimiento del propósito principal mencionado, ya que en ambos, se evidencia que durante el desarrollo de las diferentes actividades planteadas en los tres instrumentos de recolección de datos, la intuición cumple un papel importante en cuanto al desarrollo de la comprensión que, a su vez, genera nuevos conocimientos en los estudiantes (comprensión de otros polígonos, razones trigonométricas, ley de senos y cosenos, etc.). Tales conocimientos se utilizan para refinar esas intuiciones que van generando aprendizajes significativos, como lo son una conceptualización más clara del triángulo, comprensión de la desigualdad triangular y una aproximación a la comparación entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo; en este sentido, se reafirma lo mencionado por Peña y Mariño (2020) en su investigación: "el proceso dinámico en matemáticas tiene lugar entre la intuición y la formalización, es decir, entre lo que podemos entender y lo que podemos expresar y comunicar, o formalizar matemáticamente de la manera habitual" (p.53). Lo anterior tiene lugar y se demuestra al analizar las respuestas de los estudiantes, puesto que plasman en sus escritos aquello que entienden y pueden expresar en las diferentes situaciones problemas de los instrumentos. Se concluye además lo expresado por los mismos autores: “la intuición es un proceso, cuyos elementos constitutivos implican, el contexto real, los conocimientos previos de quien intuye y, finalmente, la necesidad de la lógica como instrumento de validación matemática.” (p.52). En esos conocimientos previos en los que la comprensión tiene un papel importante, las ideas subyacentes se fundamentan en la manera en la que los estudiantes razonan intuitivamente sobre ciertos conceptos y propiedades relacionadas con los triángulos.

Por otro lado, Font (2007) también afirma que: “la comprensión o el saber de un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas” (p.430), lo que da lugar a que los estudiantes relacionen las propiedades del triángulo y sus características con situaciones problema en las que otros objetos matemáticos se encuentran inmersos. Finalmente, se confirma lo expresado por Fischbein (2002), cuando plantea que los procesos intuitivos cambian a medida que el sujeto va adquiriendo conocimientos y saberes, puesto que deja de tener intuiciones primitivas y se van transformando en unas intuiciones más refinadas, las secundarias.

5.2 Nuevas Perspectivas Encontradas (Posible Generación de Nuevo Conocimiento)

Partiendo de la experiencia adquirida en esta investigación y los diálogos entre todas las partes involucradas en el desarrollo de la propuesta, producto de la práctica pedagógica llevada a cabo en la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo, fue posible identificar algunas posibilidades de nuevas perspectivas en la dirección de la presente investigación.

Una primera posibilidad está en la exploración del duo intuición-comprensión como estrategia eficaz en la solución de situaciones involucradas con triángulos, ya que gracias al estudio de casos basados en las ideas de Stake (2007), fue factible fortalecer el desarrollo del conocimiento intuitivo y de la posterior comprensión.

La segunda posibilidad va de la mano con el diseño y aplicación de instrumentos, ya que gracias a las entrevistas se pudo establecer un diálogo entre los diferentes actores de la investigación y colaboradores para entender diversos procesos en los que tanto la intuición como la comprensión son estratégicamente vinculados para alcanzar el propósito general del presente estudio.

5.3 Futuras Líneas de Investigación

De acuerdo con todo el proceso que conllevó a la realización de este trabajo en la línea de investigación *intuición matemática,* a futuro se podría continuar con la ejecución de nuevas propuestas en las que se involucre tanto la intuición como la comprensión, pero desde una perspectiva diferente a la de Font; por ejemplo, se podría relacionar la intuición con la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren como marco teórico, creando así nuevo contenido investigativo que enlace las diferentes categorías de la intuición presentadas por Fischbein con los diferentes niveles de la comprensión. Por otro lado, se podría relacionar la Intuición para la comprensión con la teoría APOE de Dubinsky mediante la abstracción reflexiva para describir como un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado.

También, se puede implementar la relación de la intuición para la comprensión de objetos matemáticos con otro tipo de estudio de casos, como el caso instrumental de Stake, en el cual se tendría en cuenta un caso particular con un objetivo diferente a conocerlo, es decir, se podría comprobar si efectivamente en ese caso, se afirma que el conocimiento intuitivo da paso a la comprensión de conceptos matemáticos, y si es posible generalizarlo.

Este estudio también puede hacerse en relación con otros objetos de saber específico, por ejemplo, se podría analizar el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión de cuadriláteros, de funciones cuadráticas, de razones trigonométricas, de ecuaciones de tercer grado, que generen nuevas perspectivas, lo que podría complementarse analizando el tipo de comprensión que desarrolla el estudiante según otros autores, como Skemp. Por otro lado, las líneas de investigación relacionadas con la intuición y la comprensión en la enseñanza de las matemáticas, incentivan la participación en diferentes espacios, como congresos, grupos de investigación, etc., así como la construcción y divulgación de artículos, de los cuales se pueden recoger nuevas experiencias en diferentes espacios de formación.

5.4 Discusión

Para finalizar, se hizo una comparación entre los casos “Te” y “De”, bajo los que se categorizan los tipos de intuición utilizados, cuáles logran permanecer y cuáles se refinan a medida que se avanza en los grados escolares. De igual manera, se analiza el tipo de comprensión que utilizan los estudiantes de ambos casos.

En el grado tercero (caso “Te”), se logra percibir a través de las actividades que, existen en mayor medida, una intuición afirmativa en relación con intuiciones primarias de carácter global, en las que los estudiantes tienen ciertas certezas de razonamiento lógico adquiridas a través de una vía de secuencias inferenciales, tal como lo muestra la afirmación: si un triángulo tiene tres lados, con dos triángulos puedo formar un cuadrado. De igual manera, en este mismo caso se puede apreciar que hacen uso de sus experiencias previas relacionadas con la comparación del entorno y las propiedades de los triángulos, para dar respuesta a diferentes situaciones propuestas, en las que se perciben características propias de una intuición primaria y anticipatoria, tal como lo es la certeza intrínseca, que ayuda a que se reconozca que algo es evidente por sí mismo. De otro lado, se puede distinguir tres aspectos principales, como lo son: las intuiciones de base, las cuales hacen referencia a esos elementos comunes a toda la experiencia humana, las intuiciones relacionadas con la causalidad, que son experiencias vinculadas a la cultura y al contexto en el cual cada persona vive y, finalmente, las experiencias particulares propias de la vida de una persona, las cuales serían intuiciones empíricas; estos tipos de intuiciones pueden apreciarse para el caso "Te"

De igual forma, se aprecia que en mayor medida el caso "Te" hace uso de la comprensión por representaciones, debido a que se les hace mucho más fácil dar solución a los diferentes problemas por medio figuras, imágenes y uso del material concreto, pues les cuesta más verbalizar lo que entienden.

En cambio, para el grado décimo (caso "De"), hay mayor uso de intuiciones basadas en

> orígenes secundarias, en las que se refleja el desarrollo de nuevas intuiciones a partir de conocimientos adquiridos en grados escolares anteriores, gracias a la experiencia y práctica de situaciones en las que se fortalecen esos conocimientos. Existen además algunas intuiciones anticipatorias que tienen relación con la visión preliminar que tienen los estudiantes ante ciertas situaciones problema, así

como algunas intuiciones concluyentes, relacionadas con esas ideas básicas a las que el estudiante recurre para dar solución a ciertos problemas. Se evidencian también, intuiciones operativas, de la mano con aquellas intuiciones espaciales y geométricas, pues el estudiante recurre al análisis de la forma y las propiedades del triángulo cuando trata de resolver situaciones en las que este se encuentra involucrado. Por último, al igual que en el caso "Te", hay unas intuiciones basadas en orígenes y empíricas que tienen relación con las experiencias del entorno y contexto en que se desarrollan ciertos aprendizajes.

Por otro lado, los estudiantes del caso "De" muestran una comprensión tanto por representaciones como por competencias, ya que hay una evidente construcción estructurada de representaciones internas, que le permiten al estudiante resolver las actividades escolares propuestas, además de observar que hay un reconocimiento de las propiedades del triángulo que es utilizado en situaciones en las que otros conceptos matemáticos interactúan.

Ahora bien, ya habiendo aludido a las diferentes intuiciones que se perciben en ambos casos, se podría concluir que hay algunas intuiciones que permanecen, cómo lo son las intuiciones individuales, las de base, las afirmativas y basadas en orígenes primarias; hay unas que evolucionan o se transforman, como lo son las operativas geométricas; pero también hay unas que aparecen nuevas y son todas aquellas que tienen relación con la comprensión de aquellos conocimientos previos, como lo son las basadas en orígenes secundarias o conocidas también como intuiciones más refinadas, además de las intuiciones afirmativas inferenciales, relacionales y semánticas. Ambos casos nos permiten visualizar que, desde los primeros años en los que los seres humanos se enfrentan a procesos de enseñanza y aprendizaje, es notorio que la intuición o conocimiento intuitivo, como lo describe Fischbein (2002), tiene un papel importante en la generación de conocimientos y que en términos de lo mencionado por Peña y Mariño (2020), es necesaria para la construcción de nuevos conocimientos matemáticos, puesto que sin ella se dificultaría visualizar en la mayoría de las ocasiones, nuevas situaciones que permitan el avance y desarrollo de las matemáticas y de las ciencias.

Referencias Bibliográficas

Barroso, R. (2000). El proceso de definir en matemáticas. Un caso: El triángulo. Enseñanza de las ciencias, 285-295.

Buteler, L., & Coleoni, E. (2012). El conocimiento físico intuitivo, la resolución de problemas en física y el lugar de las ecuaciones matemáticas. *Investigações em Ensino de Ciências – V17(2*, 435-452.

Climent, N., & Carrillo, J. (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: Los triángulos, una situación de primaria. *Revista EMA*, 171-205.

Corrales, M. (2010). Métodos de recolección para enfoques cualitativos. *Universidad Estatal a Distancia*, 1-12.

Cortázar, J. (1884). Tratado de Geometría Elemental. *Madrid: Librería de Hernando*.

Díaz, M. (1981). *Diccionario Básico de Matemáticas.* Madrid: Anaya.

Domínguez, J. (2015). *La intuición como parte de la actividad científica.* Aragua: Universidad Politécnica Territorial del estado Aragua.

Durán, M. (2012). *El estudio de caso en la investigación.* Obtenido de Revistas uned: https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477

Fischbein. (2002). *Intuition in Science and Mathematics An Educational Approach.* Ramat Aviv, Israel: Mathematics Education Library.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *LA GACETA DE LA RSME*, 427-442.

González, G., Delgado, F., & Aguayo, L. M. (2017). Los conceptos geométricos sobre el triángulo en los libros de texto de primaria vigentes. (págs. 1-13). San Luis Potosí: XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa- COMIE.

Guzmán, M. (2014). *Las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 221-278.

MEN (1994). *Ley 115, ley general de educación.* Obtenido de Ministerio de Educación Nacional Ley_115_1994.doc (mineducacion.gov.co).

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Obtenido de Ministerio de Educación Nacional https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje, versión 2.* Obtenido de Colombia aprende la red del conocimiento: DBA_Matematicas-min.pdf (colombiaaprende.edu.co)

Monje (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica.* Neiva: Universidad Surcolombia.

Murillo, J. (2006). La entrevista. *Metodología de Investigación Avanzada*, 1-20.

Peña, L. M., & Mariño, O. (2020). La importancia de la intuición matemática en los procesos de enseñanza. *Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, 51-59.

Qués, F., & Qués, H. (2015). Física por intuición. *Revista de enseñanza de la Física*, 505-509.

RAE. (2021). *Real Academia Española*. Obtenido de: triángulo | Definición | Diccionario de la lengua española | RAE - ASALE

Reyes, L. E., & Rodríguez, F. M. (2014). Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico. *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 543-551.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Editorial Morata.

Stone Wiske, M. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión, vinculación entre la enseñanza y la práctica.* PAIDÓS.

Villa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Anexos

Anexo 1: Participación en congresos de investigación


II Jornada de Investigación
Institución Universitaria Escolme
2021 / virtual

escolme
Institución Universitaria
Desde 1970

Otorga la presente constancia a:

Gabriel David Machado Moreno
Daniela Marín Gallego   René Alejandro Londoño

Por haber participado como ponentes en su **II Jornada de Investigación**
"La transformación digital para el desarrollo económico y social"

Proyecto: Estudio sobre el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión de conceptos geométricos relacionados con triángulos utilizando Geogebra como herramienta de apoyo en el aula de clase.

Para constancia se firma el día 12 de noviembre de 2021.

Coordinadora Centro de Investigación

Revista CIES — cies Centro de Investigaciones Escolme

25.° Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

Universidad Pedagógica Nacional

Universidad del Rosario

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Universidad

22, 23 y 24 de junio

Universidad Pedagógica Nacional

(Sede: Instituto Pedagógico Nacional) Bogotá, Colombia

La Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad del Rosario
y la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Certifican que

Gabriel David Machado Moreno

participó como **ponente** en el 25.° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones
realizado en la ciudad de Bogotá, D.C., del 22 al 24 de junio de 2022, con la **comunicación**

Posibles causas que impiden el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión de conceptos en el aula de clase, en situaciones involucradas con triángulos

25.° Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

Universidad Pedagógica Nacional

Universidad del Rosario

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito Universidad

22, 23 y 24 de junio
Universidad Pedagógica Nacional
(Sede: Instituto Pedagógico Nacional) Bogotá, Colombia

La Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad del Rosario
y la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Certifican que

Daniela Marín Gallego

participó como **ponente** en el 25.° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones
realizado en la ciudad de Bogotá, D.C., del 22 al 24 de junio de 2022, con la **comunicación**

Posibles causas que impiden el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión de conceptos
en el aula de clase, en situaciones involucradas con triángulos

ENCUENTRO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
EDUMATH 25 AÑOS
Diálogos, formación de maestros y prospectivas

Medellín, agosto 17, 18 y 19 de 2022

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas
Facultad de Educación

Hacemos constar que

Daniela Marín, Gabriel Machado, René Londoño

Participaron con presentación del Póster:

Dificultades en el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión del concepto triángulo en el aula de clase

en el II Encuentro de Educación Matemática Diálogos, formación de maestros y prospectivas
Realizado en modalidad ONLINE los días 17, 18 y 19 de agosto de 2022

Para constancia se firma en Medellín, el 19 de agosto de 2022

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ
Coordinadora Académica del Encuentro

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
Director Grupo EDUMATH

Red de Matemáticas Medellín | mova | Alcaldía de Medellín

Anexo 2: Consentimiento informado

Medellín, Fecha:

Consentimiento informado

Yo, __________________________________ con cédula Nro. _________________, como representante legal del estudiante ________________________ con tarjeta de identidad Nro. ____________________ declaro que he sido informado e invitado a participar en el trabajo de investigación "Posibles causas que impiden el desarrollo del conocimiento intuitivo en la comprensión de conceptos en el aula de clase en situaciones involucradas con triángulos." Proyecto desarrollado por estudiantes universitarios para optar el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Este trabajo de investigación se desarrolla en la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo, en el municipio de Medellín.

Estoy en conocimiento de que los datos no me serán entregados y que no habrá retribución por la participación en este estudio. Esta investigación puede beneficiar de manera indirecta aportando beneficios para la sociedad, Asimismo, sé que puedo negar la participación o retirarme en cualquier etapa de la investigación, sin expresión de causa ni consecuencias negativas para mi apoderado.

En caso de aceptar voluntariamente hacer participe a mi apoderado de este estudio, favor diligenciar los siguientes datos:

Nombre completo del acudiente:

Firma:

Documento de identidad C.C.

Si tiene alguna pregunta durante cualquier etapa del estudio puede comunicarse con cualquiera de estos dos correos:

gabriel.machado@udea.edu.co y daniela.marin5@udea.edu.co

Anexo 3: Instrumentos

Instrumentos, Grado Tercero

Fecha:	**Grado: Tercero**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

¿Qué sabes de los triángulos?

Primera guía

Categoría: Idea intuitiva sobre el concepto de triángulo y la desigualdad triangular.

Objetivo general:

Analizar el desarrollo conceptual y perceptivo que tienen los estudiantes al momento de utilizar el conocimiento intuitivo para la comprensión de problemas relacionados con el concepto del triángulo.

Objetivos específicos:

1) Registrar cómo los estudiantes de grado tercero representan los triángulos.
2) Identificar cómo los estudiantes representan espacialmente al triángulo y si lo dibujan de la manera convencional (con su base horizontal)

Hipótesis:

Los estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo poseen dificultades para acercarse conceptualmente al concepto, propiedades y elementos de un triángulo.

Nota: Se grabará cada sesión y en atención a la ley vigente relacionada con la reserva de identidad y el anonimato, algunos del video serán editados para ocultar las caras de los niños.

Tiempo estimado: 40 minutos.

Se comenzará con la pregunta abierta:

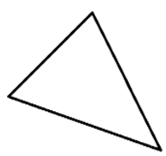
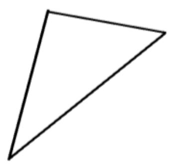
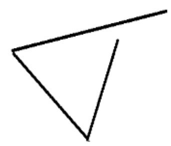
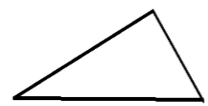
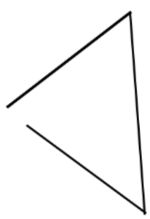
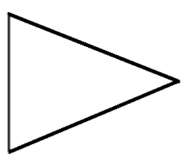
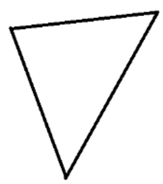
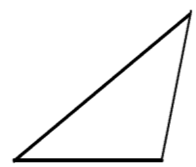
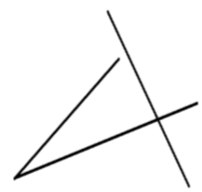
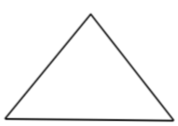
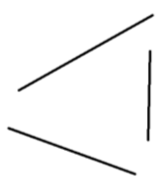
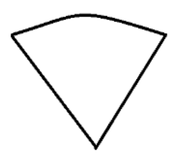
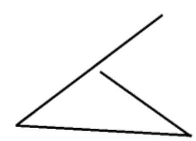
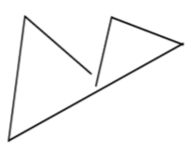
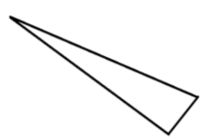
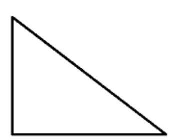
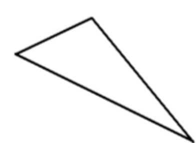
1) ¿Qué es un triángulo?

Nota: Se otorgará un espacio de 10 minutos para que los niños puedan dar sus respuestas y tracen en hojas la imagen que para ellos representan triángulos.

2) Dibuja tres diferentes tipos de triángulos, para ello utiliza regla o algún objeto que te permita trazar líneas rectas.

3) ¿Qué más sabes sobre los triángulos?

Señala con una X, de acuerdo a la fila en la que te encuentres, cuáles de las figuras que se ubican en el tablero son triángulos.

Fila 1	**Fila 2**	**Fila 3**	**Fila 4**	**Fila 5**
				
				
				
				

Observación: Se organizará por filas a los estudiantes y de cada una de ellas saldrá alguien a señalar con una X una figura que represente un triángulo.

Se propone la siguiente pregunta:

4) ¿Todas las figuras señaladas representan un triángulo? De no ser así entre todos discutan el porqué.

Fecha:	**Grado: Tercero**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

¿Cuántos triángulos son?

Segunda guía

Categoría: Intuición para la comprensión del triángulo y sus propiedades.

Nota: Se realizará una entrevista no estructurada al caso de grado Tercero, para ello, nos apoyaremos de la observación y toma de notas en la prueba pre-diagnóstica que se realizó con anterioridad.

Objetivo general:

Realizar un análisis comparativo al momento de identificar el uso de la intuición para la comprensión de propiedades al momento de trabajar con triángulos.

Objetivos específicos:

Identificar cómo los estudiantes son capaces de comprender la desigualdad triangular a través del uso de material concreto.

Hipótesis:

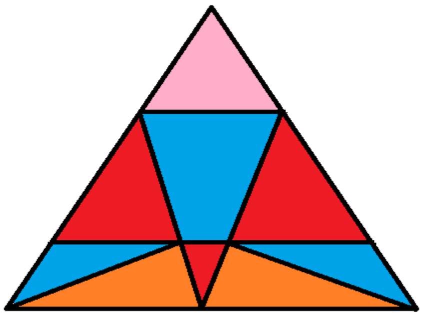
A los estudiantes de grado tercero se les dificulta comprender intuitivamente algunas de las propiedades de los triángulos, debido a que no hay un acercamiento previo a los elementos geométricos básicos que conforman un triángulo.

Tiempo estimado: 1 hora.

Materiales:

-Palillos de diferentes tamaños.
-Hojas de block con la imagen de triángulos a color.
-Hojas de respuesta.
-Fósforos

1)

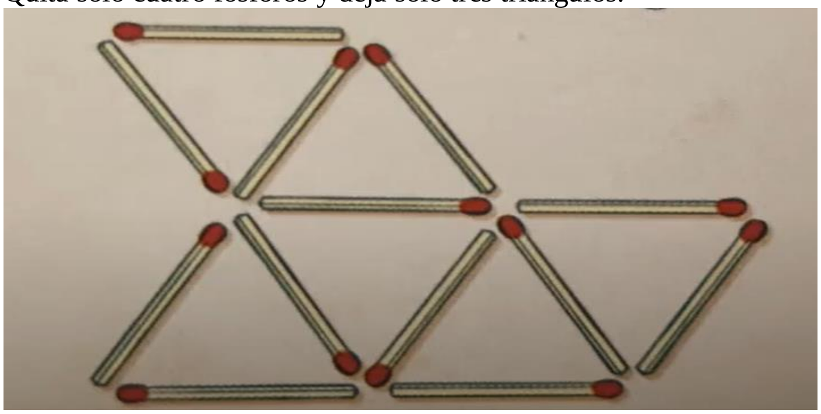


Se otorgan 7 minutos para que los estudiantes inicien el espacio de diálogo, compartiendo sus ideas y analizando en total cuántas respuestas diferentes se dan en el espacio de clase. Luego de que los estudiantes compartan sus respuestas, se proponen las siguientes preguntas, de acuerdo a la imagen anterior:

a) ¿Cuántos triángulos rojos hay?
b) ¿Cuántos triángulos azules hay?
c) ¿Cuántos triángulos rosados hay?
d) ¿Cuántos triángulos anaranjados hay?
e) ¿Cuántos triángulos hay en total?

Nota: Se darán hojas de respuesta para las preguntas anteriores, de acuerdo a la imagen que se presenta.

2) Quita solo cuatro fósforos y deja solo tres triángulos.



3) Con un grupo de palillos de diferentes tamaños construir:

Referencias para los palillos:

- Rosado de 9 cm, Amarillo 7 cm, naranja 5 cm, verde 4 cm, azul 3 cm y rojo 2 cm.

a) Un triángulo con los palillos de 3 cm, 4 cm y 9 cm.
b) Un triángulo con los palillos de 4 cm, 2 cm y 5 cm.
c) Un triángulo con los palillos de 2 cm, 4 cm y 7 cm.

4) **Retroalimentación:**

En esta sesión se socializarán las respuestas dadas por los estudiantes en el punto 3 y se realizarán preguntas como:

a) ¿Pudiste construir todos los triángulos?
b) ¿Cuáles triángulos no pudiste construir?
c) ¿Con 3 palillos cualesquiera podemos construir un triángulo?

Fecha:	**Grado: Tercero**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

Teorema de Pitágoras con Tangram

Tercera guía

Categoría: Intuición para la comprensión en el teorema de Pitágoras.

Objetivo general:

Observar dificultades al momento de apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previas, para desarrollar situaciones en las que se encuentra involucrado el teorema de Pitágoras.

Objetivos específicos:

Examinar la comprensión por parte de los estudiantes del grado tercero, en relación al concepto de triángulo, sus propiedades y los elementos que han reconocido.

Los estudiantes no logran acercarse correctamente de manera intuitiva al teorema de Pitágoras, debido a que rara vez se utiliza material concreto para analizar las relaciones que allí se establecen entre las áreas y lados del triángulo.

Tiempo estimado: 50 minutos.

Materiales:

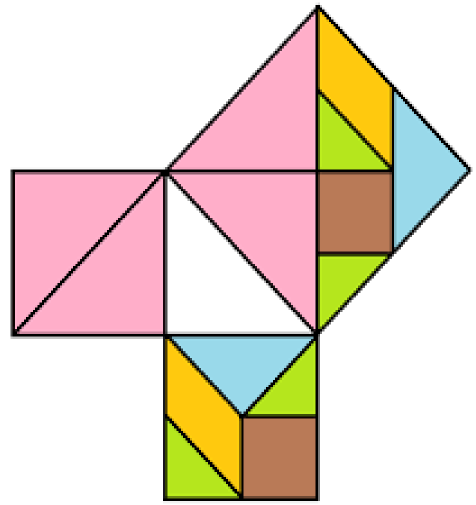
- 2 tangram por grupos de tamaño 21,2 cm x 21,2 cm aproximadamente.
- Hojas blancas tamaño carta.
- Palillos

1) Se proporciona a cada grupo unos palillos de longitud 21.2 cm y 15 cm aproximadamente.

a) Dibujar los cuadrados en las hojas dadas de acuerdo a dichas longitudes y recortarlos.

b) Unir dichos cuadrados de manera que en su interior formen un triángulo, tal como lo sugiere la figura siguiente:

Encima de dichos cuadrados se dará la indicación a los estudiantes de usar los dos tangram para encajar todas las piezas de un solo tangram en los dos cuadrados más pequeños y las piezas de un solo tangram en el cuadrado más grande, tal como se muestra en la figura de la derecha.



Nota: Se hará una breve explicación del concepto de área de un cu la respectiva entrega de los tangram.

2) Las áreas de los cuadrados serán de 450 cm² y 225 cm² aproximadamente, con el fin de superponer todas las piezas sobre ellos y otro tangram para llenar todo el cuadrado mayor.

Responde las siguientes preguntas en una hoja:

a) A partir de la actividad, ¿puedes explicar qué es el área de un cuadrado?
b) ¿Cuál es la relación que encontraste entre el área de los cuadrados haciendo uso del tangram?
c) ¿Encontraste alguna relación entre las longitudes de los lados del triángulo con el área de los cuadrados? Explica tu respuesta

Retroalimentación:

En la misma hoja, comenta lo que aprendiste el día de hoy, además, escribe si te fue fácil encajar las piezas del tangram en los cuadrados. ¿Qué crees que se pueda mejorar?

Fecha:	**Grado: 10**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

Triángulos: Definiciones y características

Primera guía

Categoría:

Idea intuitiva sobre el concepto de triángulo y la desigualdad triangular.

Objetivo:

Analizar el desarrollo conceptual y perceptivo que tienen los estudiantes al momento de utilizar el conocimiento intuitivo para la comprensión de problemas relacionados con el concepto del triángulo.

Objetivos específicos:

- Analizar el uso de los elementos de los triángulos (lados, vértices, ángulos)
- Evaluar procesos de comparación entre el triángulo como figura geométrica y como concepto.

Hipótesis:

El estudiante presenta dificultades para establecer relaciones entre los conocimientos previos acerca del triángulo y sus propiedades, al momento de expresar con sus propias palabras lo que entiende sobre este concepto.

Responde las siguientes preguntas según tus ideas y conocimientos (no es necesario el uso del celular, cuaderno o calculadoras).

1) Define con tus propias palabras el concepto de triángulo.

2) Se tienen 3 segmentos de recta con las siguientes medidas: 9 cm, 4 cm y 3 cm. ¿Se puede construir un triángulo con estos segmentos? Argumenta tu respuesta

9 cm

4 cm

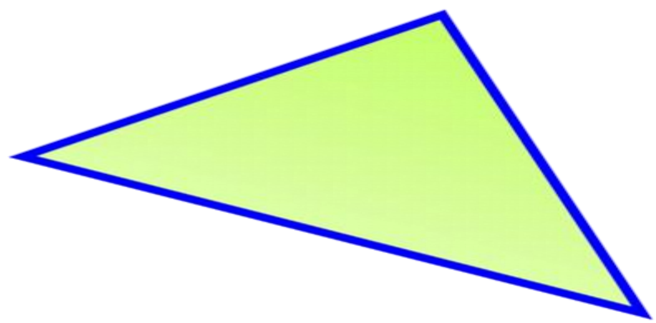
3 cm

3) Selecciona la respuesta correcta, de acuerdo a la siguiente afirmación:

La suma de las medidas de cualesquier dos lados de un triángulo es:

- **A.** Siempre mayor que la medida del lado restante
- **B.** Siempre menor que la medida del lado restante
- **C.** Igual que la medida del lado restante

4) Observa el siguiente triángulo y responde la siguiente pregunta:



¿Cuál crees que sea la base del triángulo y por qué? Señala con un lápiz y argumenta tu respuesta.

Fecha	**Grado: 10**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

Entrevista de la primera guía

Objetivo: La siguiente encuesta tiene como finalidad identificar los recursos visuales y memorísticos, así como el procedimiento y paso a paso que se utilizó para resolver la actividad propuesta en el aula de clase sobre los triángulos y sus propiedades.

Contesta las siguientes preguntas con la mayor veracidad y responsabilidad ética.

1. Al momento de analizar la pregunta ¿qué es un triángulo? Describe cuáles propiedades o aspectos vistos en clase recordaste y cómo lograste argumentar tu respuesta.

2. ¿Qué reflexión te deja la construcción de un triángulo a partir de segmentos dados? ¿Es posible construir un triángulo con tres segmentos de recta cualesquiera?

3. ¿Cuántos triángulos rectángulos lograste identificar y qué otros tipos de triángulo observaste en la pregunta número tres?

4. En la cuarta pregunta, se mencionan los tipos de triángulos según sus lados y según sus ángulos ¿Cuántos tipos de triángulos se conocen según estos criterios de clasificación?

5. ¿Cuándo fue la última vez que realizaste ejercicios relacionados con triángulos?

6. Al momento de realizar ejercicios geométricos y matemáticos en los que el triángulo está involucrado ¿es importante la teoría vista en el aula de clase? Explica tu respuesta

7. Escribe una pequeña reflexión acerca de la actividad. ¿Qué propones para una próxima intervención de clase? ¿Qué aspectos mejorarías o cambiarías en la actividad?

Observación y análisis de la actividad:

Fecha:	**Grado: 10**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

Clasificación de triángulos a partir de sus propiedades.

Segunda guía

Categoría: Intuición para la comprensión del triángulo y sus propiedades.

Objetivo: Realizar un análisis comparativo al momento de identificar el uso de la intuición para la comprensión de propiedades al momento de trabajar con triángulos.

Objetivos específicos:

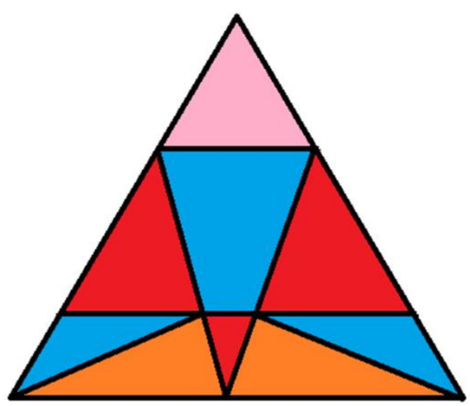
- Identificar el uso de las propiedades del triángulo para reconocer la mayor cantidad posible de estos en la imagen.
- Evaluar el uso de propiedades para clasificar diferentes tipos de triángulos al momento de seleccionarlos en la imagen.

Hipótesis: Los estudiantes presentan dificultades al clasificar los triángulos, ya que falta mayor apropiación de sus propiedades y de la clasificación según sus lados y ángulos.

Tiempo estimado: 20 minutos.

A continuación, se presenta la imagen de un triángulo con diferentes colores. De acuerdo a la imagen, responde la siguiente pregunta:

¿Cuántos triángulos en total hay en la imagen?
¿Qué tipo de triángulos reconoces?



Fecha:	**Grado: 10**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

Entrevista segunda guía.

Objetivo: A través de un conversatorio en clase, se busca analizar el uso de la intuición al momento de identificar propiedades relacionadas con el triángulo, para luego seleccionar la cantidad total de triángulos que se ven en la imagen.

Nota: Se grabará toda la sesión de video y audio, protegiendo la integridad personal de los estudiantes según lo estipulado en la ley de identidad y anonimato. Se editan los rostros, incentivando la seguridad personal del estudiante.

Tiempo estimado: 30 minutos.

Desarrollo de la actividad:

Luego de finalizar la actividad en la que los estudiantes seleccionan la cantidad total de triángulos en la imagen, se procede a realizar un conversatorio, en los cuales se tendrán en cuenta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos triángulos en total se lograron encontrar?
Se dan unos 5 minutos para que los estudiantes inicien el espacio de diálogo, compartiendo sus ideas y analizando en total cuántas respuestas diferentes se encuentran en el espacio de clase. Luego de que los estudiantes compartan sus respuestas, se procede a realizar la siguiente pregunta.

2. ¿Qué elementos o propiedades se tuvieron en cuenta para encontrar la cantidad de triángulos?
Nuevamente, se da un espacio para la discusión de las ideas intuitivas de los estudiantes, y a partir de allí, poder analizar qué tan profundo es el uso de la intuición al momento de explicar sus ideas en clase. Luego de escuchar las palabras de los estudiantes, se procede a la siguiente pregunta.

3. ¿Se tuvo en cuenta lo aprendido en grados anteriores? Explica tu argumento.
Se da un espacio de 10 minutos, en el que se espera que varios estudiantes expresen si fue o no importante y por qué consideran relevante lo visto en grados anteriores, de esta manera, se espera encontrar relación y pertinencia entre los saberes previos y el desarrollo de la intuición.

Fecha:	**Grado: 10**	
Nombre:	**INEM José Félix de Restrepo.**	

Teorema de Pitágoras

Tercera guía

Objetivo: Observar dificultades al momento de apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previos, para desarrollar situaciones en las que se encuentra involucrado el teorema de Pitágoras.

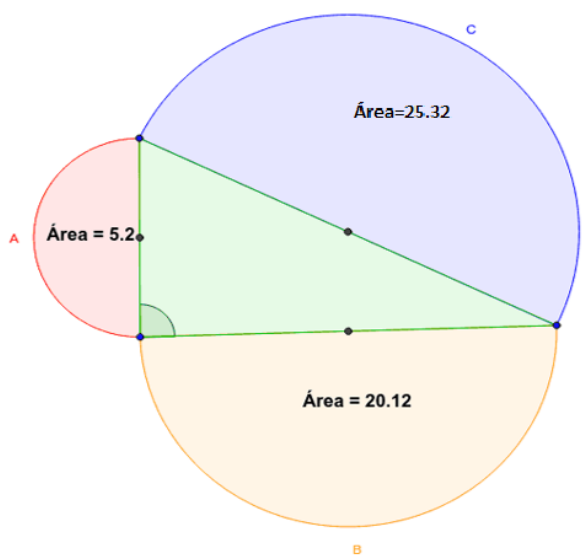
Objetivo específico:

Examinar la relación que hacen los estudiantes al momento de comparar las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo.

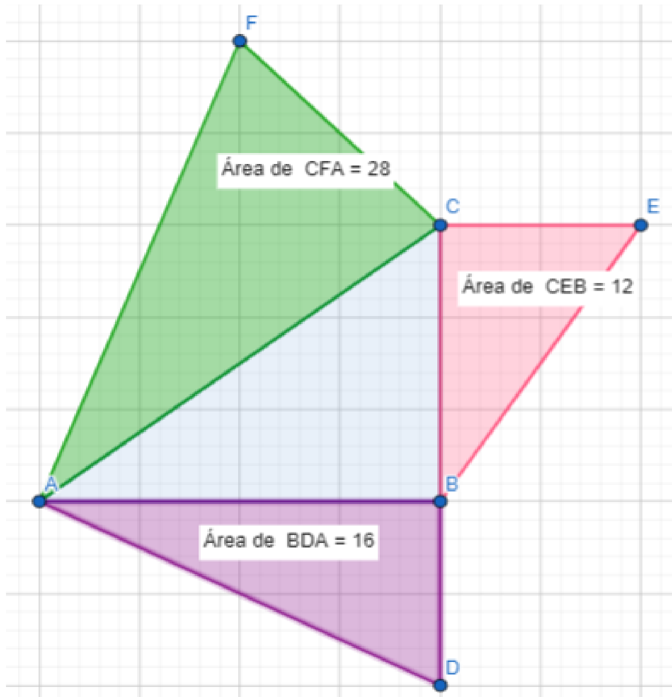
Hipótesis: Los estudiantes del grado décimo, no establecen la relación entre los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo, debido quizás a la poca profundidad que se le otorga a la comprensión del concepto de área de figuras semejantes construidas sobre los lados mencionados.

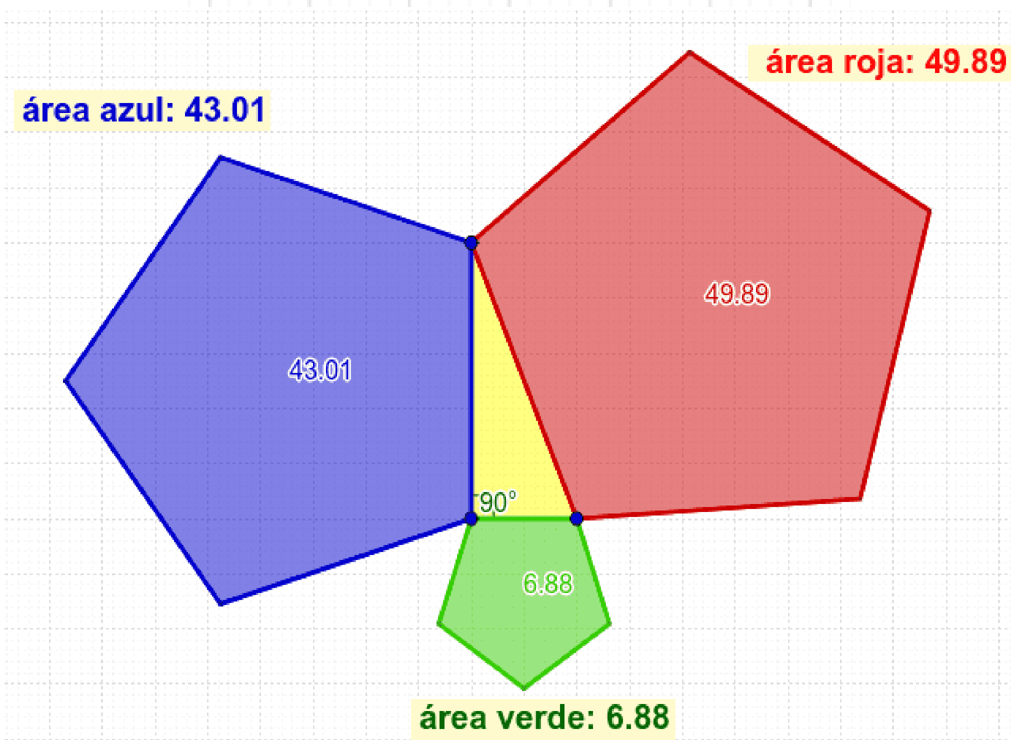
Tiempo estimado: 30 minutos.

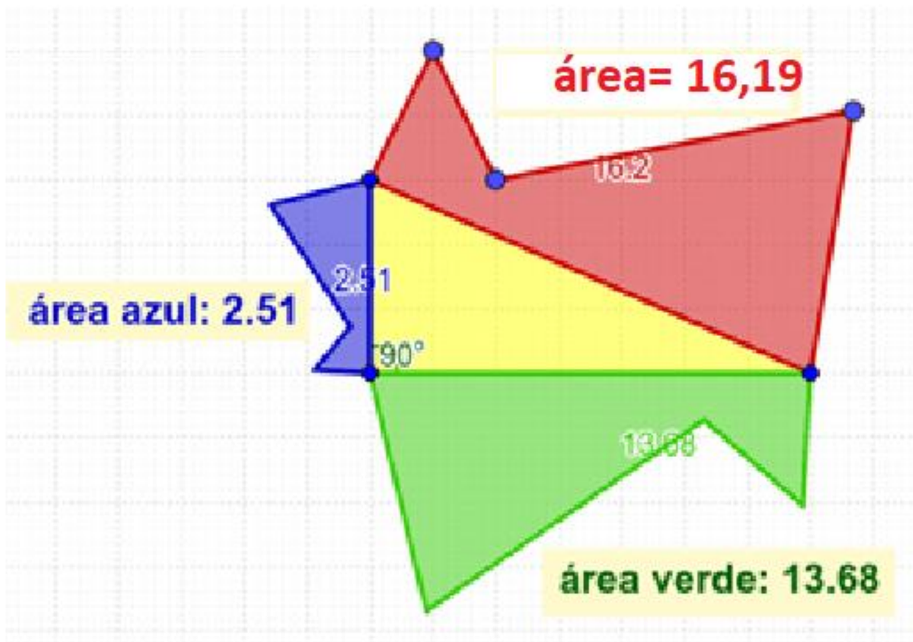
- Analiza las siguientes imágenes y responde: ¿Qué relación se establece entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos y el área de la figura semejante a las anteriores construidas sobre la hipotenusa? Argumenta tu respuesta



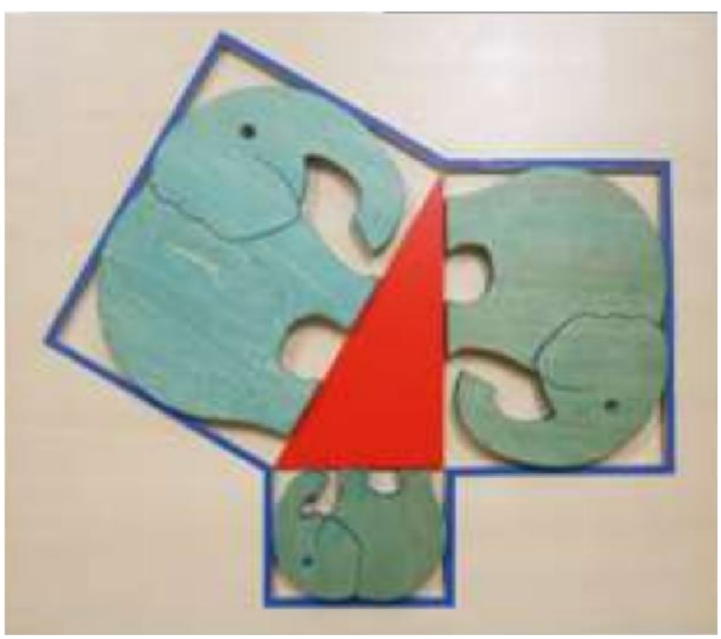
.


F
Área de CFA = 28
C
E
Área de CEB = 12
A
B
Área de BDA = 16
D


área roja: 49.89
área azul: 43.01
49.89
43.01
90°
6.88
área verde: 6.88



- Observa la imagen y responde la pregunta: ¿Crees que podría establecerse alguna relación entre las áreas de los elefantes semejantes construidos sobre los lados del triángulo?



Fecha:	Grado: 10
Nombre:	INEM José Félix de Restrepo.

Entrevista tercera guía

Objetivo: A través de un conversatorio en clase, se busca explorar esas dificultades al momento de apropiarse intuitivamente de conceptos e ideas previas, para desarrollar situaciones en las que se encuentra inmerso el teorema de Pitágoras.

Tiempo estimado: 20 minutos.

Luego de finalizar la actividad en la que los estudiantes establecen la relación entre las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo, se procede a realizar un conversatorio fundamentado en las siguientes preguntas:

- ¿Qué dificultades tuviste al momento de relacionar las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo?
- ¿Qué pasaría si utilizas otras figuras geométricas semejantes construidas sobre los lados del triángulo?
- ¿Es posible o no hallar el área de figuras irregulares?
- ¿Qué pasa si las dos figuras semejantes más pequeñas construidas sobre dos de los lados del triángulo son del mismo tamaño?