



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Introducción a la teoría de estabilidad no lineal

Daniel Antonio Gómez Oviedo

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Medellín, Colombia
2022

Introducción a la teoría de estabilidad no lineal

Daniel Antonio Gómez Oviedo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Asesor:

Jairo Eloy Castellanos Ramos
Profesor del Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Medellín, Colombia
2022

Dedicado a mi padre y a mi madre.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios, a mi madre, a mi hermano y en especial a mi padre que ya no se encuentra con nosotros, pero que fue un gran pilar y motivación para alcanzar este logro en mi vida.

Resumen

En este trabajo, presentamos una introducción a teoría de la estabilidad, así como a la teoría de la estabilidad avanzada para sistemas dinámicos no lineal. Nosotros nos basamos sobre todo en teoría de la estabilidad de Lyapunov y por tanto presentamos los principales resultados de estabilidad necesarios para su desarrollo.

Palabras clave: Teoría de estabilidad, sistemas dinámicos no lineal, estabilidad de Lyapunov, Método directo de Lyapunov, método indirecto de Lyapunov.

Abstract

In this work, we present an introduction to stability theory, as well as advanced stability theory for nonlinear dynamical systems. We rely mainly on Lyapunov stability theory and therefore present the main stability results necessary for its development.

Keywords: Stability theory, nonlinear dynamical systems, Lyapunov stability, Lyapunov direct method, Lyapunov indirect method

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1. Preliminares	3
1.1. Sistemas dinámicos	3
1.2. Teoremas de Tópologia	6
1.3. Puntos límite, conjuntos límite y atractores	7
2. Teoría de la estabilidad de Lyapunov	19
3. Teoremas de estabilidad de conjuntos invariantes	29
4. Construcción de funciones de Lyapunov	35
5. Teoremas de Lyapunov inversos	45
6. Teoremas de inestabilidad de Lyapunov	51
Bibliografía	55

Capítulo 1

Preliminares

En el contexto de las ecuaciones diferenciales sería ideal poder calcular explícitamente todas las soluciones, sin embargo esto no siempre es posible, aún en los casos más simples tales como son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. De acuerdo con lo anterior, se ve la necesidad de obtener información sobre las soluciones sin conocerlas. En este sentido, la teoría cualitativa nos permite conocer el comportamiento dinámico, es decir, las propiedades cualitativas de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales.

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la teoría cualitativa para ecuaciones diferenciales con el fin de entender los capítulos posteriores.

1.1. Sistemas dinámicos

Definición 1.1. *Un sistema dinámico en \mathcal{D} es la tripleta $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, s)$, donde $s : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es tal que se cumplen los siguientes axiomas:*

- i) (Continuidad): $s(\cdot, \cdot)$ es continuo en $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$, $s(\cdot, x)$ es continuamente diferenciable en \mathcal{D} .
- ii) (Consistencia): $s(0, x_0) = x_0$ para todo $x_0 \in \mathcal{D}$.
- iii) (Propiedad del grupo): $s(\tau, s(t, x_0)) = s(t + \tau, x_0)$ para todo $x_0 \in \mathcal{D}$ y $t, \tau \in \mathbb{R}$.

De ahora en adelante, denotamos el sistema dinámico $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, s)$ por \mathcal{G} y nos referimos a la aplicación $s(\cdot, \cdot)$ como el **flujo o trayectoria** de \mathcal{G} correspondiente a $x_0 \in \mathcal{D}$, y para un $s(t, x_0)$ dado, $t \geq 0$, nos referimos a $x_0 \in \mathcal{D}$ como una **condición inicial** de \mathcal{G} . Dado $t \in \mathbb{R}$ denotamos la aplicación $s(t, \cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ por $s_t(x_0)$ o s_t . Por lo tanto, para $t \in \mathbb{R}$ el conjunto de asignaciones definidas por $s_t(x_0) = s(t, x_0)$ para cada $x_0 \in \mathcal{D}$ da el flujo de \mathcal{G} . En particular, si \mathcal{D}_0 es una colección de condiciones iniciales tales $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, entonces el flujo $s_t : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ no es más que el movimiento de todos los puntos $x_0 \in \mathcal{D}_0$ o, de manera equivalente, la imagen de $\mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ bajo el flujo s_t , es decir, $s_t(\mathcal{D}_0) \subset \mathcal{D}_0$ (vea la Figura 1.1(a)). Alternativamente, si la condición inicial $x_0 \in \mathcal{D}$ está fijo y dejamos $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, entonces el mapeo $s(\cdot, x_0) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{D}$ define la **curva solución o trayectoria** del sistema dinámico \mathcal{G} . Por lo tanto, el mapeo $s(\cdot, x_0)$ genera una gráfica en $[\alpha, \beta] \times \mathcal{D}$ identificando la

trayectoria correspondiente al movimiento a lo largo de una curva C a través del punto x_0 en un subconjunto \mathcal{D} del espacio de estados (ver 1.1(b)). Dado $x \in \mathcal{D}$ denotamos la aplicación $s(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$ por $s^x(t)$ o s^x .

Si pensamos en un sistema dinámico \mathcal{G} como describiendo el movimiento de un fluido, entonces el flujo de \mathcal{G} describe el movimiento de todo el fluido y es consistente con una descripción euleriana del sistema dinámico en el que el movimiento se analiza en un medio continuo (volumen de control). Alternativamente, el La trayectoria de \mathcal{G} describe el movimiento de una partícula individual en el fluido y es consistente con una formulación lagrangiana del sistema dinámico que describe el movimiento (posición) de una partícula en función del tiempo.

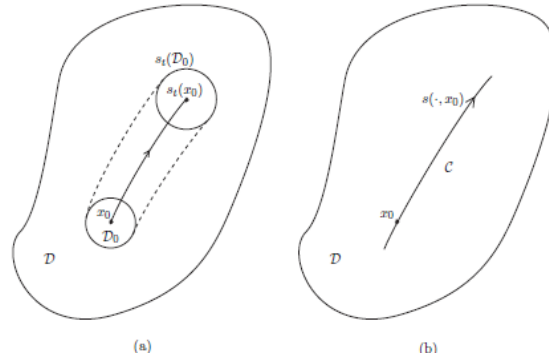


Figura 1.1: (a) Flujo de un sistema dinámico. (b) Curva de solución de un sistema

En términos de la aplicación $s_t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ los Axiomas *ii*) y *iii*) pueden ser equivalentes escrito como *ii*)' $s_0(x_0) = x_0$ y *iii*)' $(s_\tau \circ s_t)(x_0) = s_\tau(s_t(x_0)) = s_{t+\tau}(x_0)$. Tenga en cuenta que de *i*) y *iii*) se deduce que la aplicación $s_t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es un función con una inversa continua s_{-t} . Por lo tanto, s_t con $t \in \mathbb{R}$ genera una familia un-parámetro de homeomorfismos en \mathcal{D} formando un grupo conmutativo bajo la composición. Para ver que s_t es uno a uno, tenga en cuenta que si $s(t, y) = s(t, z)$, entonces $y = z$ se sigue de

$$\begin{aligned}
 y &= s(0, y) \\
 &= s(-t + t, y) \\
 &= s(-t, s(t, y)) \\
 &= s(-t, s(t, z)) \\
 &= s(-t + t, z) \\
 &= s(0, z) \\
 &= z.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

También tenga en cuenta que si $y \in \mathcal{D}$, entonces $s_t(x) = y$ para $x = s(-t, y)$, y por lo tanto, s_t es sobre. Finalmente, para ver que s_t tiene una inversa continua, solo necesitamos mostrar que s_{-t} es la inversa de s_t . Para ver esto, tenga en cuenta que para dos flujos cualesquiera s_t y s_τ , $s_t \circ s_\tau = s_{t+\tau}$ ya que, para todo $x \in \mathcal{D}$,

$$(s_t \circ s_\tau)(x) = s_t(s_\tau(x)) = s_t(s(\tau, x)) = s(t + \tau, x) = s_{t+\tau}(x). \tag{1.2}$$

Además, note que para cada $x \in \mathcal{D}$, $s_0(x) = s(0, x) = x$ es la identidad operador en \mathcal{D} . Por lo tanto, $s_{-t} \circ s_t = s_{t-t} = s_0$, lo que establece que s_{-t} es el inverso de s_t .

Dado que un sistema dinámico \mathcal{G} involucra la función $s(\cdot, \cdot)$ que describe el movimiento de $x \in \mathcal{D}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, este genera una ecuación diferencial en \mathcal{G} . En particular, la función $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) := \left. \frac{d}{dt} s(t, x) \right|_{t=0} \quad (1.3)$$

define un **campo vectorial** continuo en \mathcal{D} . Para $x \in \mathcal{D}$, $f(x)$ pertenece a \mathbb{R}^n y corresponde al vector tangente a la curva $s_t(x)$ en $t = 0$. Por tanto, para $s_t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ satisfaciendo los axiomas *i) – iii)* de la definición 1.1, haciendo $x(t) = s(t, x_0)$ y definiendo $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como en (1.1) se sigue que

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Usaremos la notación $s(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$ y $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, indistintamente para denotar la solución del sistema dinámico no lineal (1.1) con la condición inicial $x(0) = x_0$.

Ya vimos que un sistema dinámico no lineal \mathcal{G} como se definió por la definición 1.1 da lugar a una ecuación diferencial no lineal. Ahora estudiar algunos resultados de estabilidad sobre sistemas dinámicos no lineales caracterizado por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathcal{I}_{x_0}, \quad (1.5)$$

donde $x(t) \in \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{I}_{x_0}$, \mathcal{D} es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n con $0 \in \mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo en \mathcal{D} , y $\mathcal{I}_{x_0} = (\tau_{min}, \tau_{max})$ es el *intervalo máximo de existencia* para la solución $x(\cdot)$ de (1.5). Una función continuamente diferenciable $x : \mathcal{I}_{x_0} \rightarrow \mathcal{D}$ se dice que es una *solución* de (1.5) en el intervalo $\mathcal{I}_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$, si $x(t)$ satisface (1.5) para todo $t \in \mathcal{I}_{x_0}$.

Las siguientes definiciones proporcionan varias clasificaciones del sistema dinámico no lineal. Sea

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.6)$$

donde $f : [t_0, t_1] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo por partes en t y continuo en x en $[t_0, t_1] \times \mathcal{D}$.

Definición 1.2. Considere el sistema dinámico no lineal (1.6). Si $f(t, x) = f(t_0, x)$ para todo $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}$, entonces (1.6) se llama **sistema invariante en el tiempo o autónomo**.

Definición 1.3. Considere el sistema dinámico no lineal (1.6) con $f : [t_0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si existe $T > 0$ tal que $f(t, x) = f(t + T, x)$ para todo $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathcal{D}$, entonces (1.6) se denomina **sistema periódico**. Además, el tiempo mínimo $T > 0$ para el cual $f(t, x) = f(t + T, x)$ es llamado el **período**.

Definición 1.4. Considere el sistema dinámico (1.6) con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. Si $f(t, x) = A(t)x$, donde $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es continuo a trozos en $[t_0, t_1]$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces (1.6) se llama un **sistema dinámico lineal variable en el tiempo**. Si, alternativamente, para todo $t \in [t_0, \infty)$ existe $T > 0$ tal que $A(t) = A(t + T)$, entonces (1.6) se llama **sistema dinámico periódico lineal**. Finalmente, si $f(t, x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces (1.6) se llama **sistema dinámico autónomo lineal**.

A continuación, presentamos el concepto de punto de equilibrio de una sistema dinámico.

Definición 1.5. *Considere el sistema dinámico no lineal (1.6) con $f : [t_0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que un punto $x_e \in \mathcal{D}$ es un **punto de equilibrio** de (1.6) en el tiempo $t_e \in [t_0, \infty)$ si $f(t, x_e) = 0$ para todo $t \geq t_e$.*

Note que en el caso de los sistemas autónomos y los sistemas periódicos, $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio en el tiempo t_e si y solo si x_e es un punto de equilibrio en todo momento. Además, si x_e es un punto de equilibrio en el tiempo t_e , entonces definiendo $\tau := t - t_e$ y $\tau_0 := t_0 - t_e$ tenemos

$$\dot{x}(\tau + t_e) = f(\tau + t_e, x(\tau + t_e)), \quad x(\tau_0 + t_e) = x_0, \quad \tau \in [\tau_0, \infty), \quad (1.7)$$

donde $\dot{x}(\cdot)$ denota diferenciación con respecto a τ , y por tanto x_e es un punto de equilibrio de (1.7) en $\tau = 0$ ya que $f(\tau + t_e, x_e) = 0$ para todo $\tau \geq 0$. Por lo tanto, asumimos sin pérdida de generalidad que $t_e = 0$. Además, si $f(\cdot, \cdot)$ tiene al menos un punto de equilibrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_e = 0$ de modo que $f(t, 0) = 0$, $t \geq 0$. Para ver esto, definia $x_s := x - x_e$ y note que

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) = \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) = f(t, x(t) + x_e) := f_s(t, x_s(t)), \\ x_s(t_0) &= x_0 - x_e, \quad t \in [t_0, \infty). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ahora, la afirmación sigue al notar que $f_s(t, 0) = f(t, x_e) = 0$, $t \geq t_0$. Finalmente, observamos que si $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio de (1.6) y $x(t_0) = x_e$, entonces $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$, es una solución a (1.6).

1.2. Teoremas de Tópologia

Teorema 1.6. (Bolzano-Weierstrass). *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado que contiene infinitos puntos. Entonces existe al menos un punto $p \in \mathbb{R}^n$ que es un punto de acumulación de S .*

Prueba. Ver [14].

Teorema 1.7. (Bolzano-Lebesgue). *Sea $D_c \subset \mathbb{R}^n$. Para cada secuencia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_c$ existe una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D_c$ si y sólo si D_c es compacto.*

Prueba. Para mostrar la necesidad, sea D_c compacto, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_c$, y Sea $\mathcal{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Tenga en cuenta que \mathcal{Q} es un conjunto infinito contenido en D_c . Ahora, dado que D_c está acotado, \mathcal{Q} está acotado, y por lo tanto, por el Bolzano-Weierstrass teorema (Teorema 1.6), \mathcal{Q} tiene un punto de acumulación x . Como D_c es cerrado, x es también un punto de acumulación de D_c , y por lo tanto, $x \in D_c$. Así, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ podemos encontrar un $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in D_c$.

Para mostrar suficiencia, suponga que cada secuencia contenida en D_c tiene un subsucesión convergente y supongamos, por el absurdo, que D_c no está acotada. Entonces existe

una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_c$ tal que $\|x_n\| \geq n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, y existe una subsecuencia convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in D_c$. Ahora, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n_k > 1 + \|x\|$,

$$\|x_{n_k} - x\| \geq \|x_{n_k}\| - \|x\| \geq n_k - \|x\| > 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, D_c es acotado.

Ahora, suponga, por el absurdo, que D_c no es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_c$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \notin D_c$. Por suposición, existe una subsecuencia $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y \in D_c$. Ahora, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ sigue que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$, $n \geq N$. Además, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n_k \geq N$, lo que implica que $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Ahora de la unicidad de los límites de las sucesiones se sigue que $x = y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, D_c es compacto. \square

1.3. Puntos límite, conjuntos límite y atractores

En esta sección, presentamos la noción de invariancia con respecto al flujo $s_t(x_0)$ de un sistema dinámico no lineal. Considere la dinámica no lineal sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

donde $x(t) \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}$, \mathcal{D} es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , y $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz continua en \mathcal{D} . Recuerde que (1.9) define un sistema dinámico en el sentido de la Definición 1.1 con flujo $s : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Además, recuerde que para $x \in \mathcal{D}$, la aplicación $s(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$ define la curva solución o trayectoria de (1.9) a través del punto x en \mathcal{D} . Identificando $s(\cdot, x)$ con su gráfico, la trayectoria u *órbita* de un punto $x_0 \in \mathcal{D}$ se define como el movimiento a lo largo de la curva

$$\mathcal{O}_{x_0} \triangleq \{x \in \mathcal{D} : s(t, x_0), t \in \mathbb{R}\} \quad (1.10)$$

Para $t \geq 0$, definimos la *órbita positiva* a través del punto $x_0 \in \mathcal{D}$ como la movimiento a lo largo de la curva

$$\mathcal{O}_{x_0}^+ \triangleq \{x \in \mathcal{D} : s(t, x_0), t \geq 0\} \quad (1.11)$$

De manera similar, la *órbita negativa* que pasa por el punto $x_0 \in \mathcal{D}$ se define como

$$\mathcal{O}_{x_0}^- \triangleq \{x \in \mathcal{D} : s(t, x_0), t \leq 0\} \quad (1.12)$$

Por tanto, la órbita \mathcal{O}_x de un punto $x \in \mathcal{D}$ viene dada por $\mathcal{O}_x^+ \cup \mathcal{O}_x^- = \{s(t, x) : t \geq 0\} \cup \{s(t, x) : t \leq 0\}$.

Definición 1.8. Un punto $p \in \mathcal{D}$ es un punto límite positivo de la trayectoria $s(\cdot, x)$ de (1.9) si existe una secuencia monótona $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números positivos, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $s(t_n, x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Un punto $q \in \mathcal{D}$ es un punto límite negativo de la trayectoria $s(\cdot, x)$ de (1.9) si existe una sucesión monótona $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números negativos, con $t_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $s(t_n, x) \rightarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$. El conjunto de todos puntos

límite positivos de $s(t, x)$, $t \geq 0$, es el conjunto límite positivo $\omega(x)$ de $s(\cdot, x)$ de (1.9). El conjunto de todos los puntos límite negativos de $s(t, x)$, $t \leq 0$, es el conjunto negativo límite $\alpha(x)$ de $s(\cdot, x)$ de (1.9).

Una definición equivalente de $\omega(x_0)$ y $\alpha(x_0)$ que es geoméricamente más fácil de ver es $\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{O_{x_0}^+}$ y $\alpha(x_0) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{O_{x_0}^-}$. En la literatura, el conjunto límite positivo a menudo se denomina conjunto ω -límite mientras que el conjunto límite negativo se denomina conjunto α -límite. Note que si $p \in \mathcal{D}$ es un punto límite positivo de la trayectoria $s(\cdot, x)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ y tiempo finito $T > 0$ existe $t > T$ tal que $\|x(t) - p\| < \epsilon$. Este se sigue del hecho de que $\|x(t) - p\| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y algún $t > T > 0$ es equivalente a la existencia de una secuencia $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Una observación análoga vale para negativo puntos límite.

Definición 1.9. Un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto invariante positivo con respecto al sistema dinámico no lineal (1.9) si $s_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \geq 0$, donde $s_t(\mathcal{M}) \triangleq \{s_t(x) : x \in \mathcal{M}\}$. Un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto invariante negativo con respecto al sistema dinámico no lineal (1.9) si $s_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \leq 0$. Un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ es un conjunto invariante con respecto al sistema dinámico (1.9) si $s_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En el caso donde $t \geq 0$ en (1.9), observe que un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ es un conjunto invariante negativo con respecto al sistema dinámico no lineal (1.9) si para todo $y \in \mathcal{M}$ y todo $t \geq 0$ existe $x \in \mathcal{M}$ tal que $s(t, x) = y$ y $s(\tau, x) \in \mathcal{M}$ para todo $\tau \in [0, t]$. Por lo tanto, si \mathcal{M} es invariante negativo, entonces $\mathcal{M} \subseteq s_t(\mathcal{M})$ para todo $t \geq 0$; el recíproco, sin embargo, no es generalmente verdad. Además, un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ es un conjunto invariante con respecto a (1.9) (definida sobre $t \geq 0$) si $s_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ para todo $t \geq 0$. Note que un conjunto \mathcal{M} es invariante si y solo si \mathcal{M} es invariante positivo y negativo.

Proposición 1.10. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \subset D$ un conjunto convexo, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que f' existe y es continua en D . Si existe $L > 0$ tal que $\|f'(x)\| \leq L$ para todo $x \in C$, entonces f es uniformemente continua Lipschitz en C .

Prueba. Se sabe que la existencia y la continuidad de f' en D implica que f es continuamente diferenciable en D . Ahora, sigue que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in C,$$

lo que implica el resultado ya que L es independiente de x e y . □

Ahora, proporcionamos condiciones necesarias y suficientes para que una función f sea globalmente continua Lipschitz.

La siguiente definición introduce el concepto de continuidad Lipschitz.

Definición 1.11. Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ y sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces f es Lipschitz continua en $x_0 \in \mathcal{D}$ si existe una constante de Lipschitz $L = L(x_0) > 0$ y una vecindad $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ de x_0 tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in \mathcal{N}. \quad (1.13)$$

f es Lipschitz continua en D si f es Lipschitz continua en cada punto de \mathcal{D} . f es uniformemente continua Lipschitz en \mathcal{D} si existe $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in \mathcal{D}. \quad (1.14)$$

Finalmente, f es globalmente Lipschitz continua si f es uniformemente Lipschitz continuo en $\mathcal{D} = \mathbb{R}^m$.

Proposición 1.12. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n . Entonces f es globalmente Lipschitz continua si y solo si existe $L > 0$ tal que $\|f'(x)\| \leq L$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Prueba. La suficiencia es una consecuencia directa de la Proposición 1.10 con $C = \mathbb{R}^n$. Para mostrar la necesidad, suponga que f es globalmente continua Lipschitz con la constante de Lipschitz L . Ahora, dado que $f(\cdot)$ es continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n , de la Definición de derivada y de que f es continuamente diferenciable en D si y sólo si sus derivadas parciales existen y son continuas en D se sigue que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| f(y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)(y - x) \right\| \leq \epsilon \|y - x\|, \quad y \in B_\delta(x).$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x)(y - x) \right\| &\leq \|f(y) - f(x)\| + \left\| f(y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)(y - x) \right\| \\ &\leq (L + \epsilon)\|y - x\|, \quad y \in B_\delta(x), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x)z \right\| \leq (L + \epsilon)\|z\|, \quad z \in B_\delta(0).$$

Por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right\| = \max_{z \in B_\delta(0)} \frac{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x)z \right\|}{\|z\|} \leq (L + \epsilon),$$

donde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es la norma matricial equi-inducida inducida por la norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Finalmente, como ϵ es arbitrario se sigue que $\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right\| \leq L$, lo que prueba el resultado. \square

Nótese que $\|f'(x)\| \leq L$, $x \in \mathbb{R}^n$, es equivalente a decir que f' es uniformemente acotada, es decir, la cota es independiente de x en \mathbb{R}^n .

Ahora, veremos una proposición que muestra que la solución de un sistema no lineal que satisface una condición de continuidad uniforme de Lipschitz está acotada exponencialmente por arriba y por abajo.

Proposición 1.13. *Considere el sistema dinámico no lineal*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathcal{I}_{x_0}, \quad (1.15)$$

donde $x(t) \in \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{I}_{x_0}$, \mathcal{D} es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente Lipschitz continua en \mathcal{D} con constante Lipschitz L y $f(0) = 0$. Entonces la solución $x(t)$ de (1.15) sobre el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$ satisface

$$\|x_0\| e^{-L|t-t_0|} \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 e^{L|t-t_0|}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.16)$$

Prueba. Dado que $\|x\|_2^2 = x^T x$ se sigue que

$$\frac{d}{dt} x^T(t)x(t) = 2x^T(t)\dot{x}(t) = 2x^T(t)f(x(t)), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.17)$$

Ahora, dado que $f(0) = 0$ y $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua Lipschitz en \mathcal{D} se sigue que $\|f(x)\|_2 \leq L\|x\|_2$. Por lo tanto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\left| \frac{d}{dt} x^T(t)x(t) \right| = 2\|x(t)\|_2 \|f(x(t))\|_2 \leq \|x(t)\|_2^2, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.18)$$

Ahora, definiendo $q(t) := x^T(t)x(t)$ y $q_0 := q(0) = x_0^T x_0$, se sigue de (1.18) que

$$-2Lq(t) \leq \dot{q}(t) \leq 2Lq(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.19)$$

lo cual implica que

$$- \int_{t_0}^t 2L ds \leq \int_{q_0}^q \frac{dq}{q} \leq \int_{t_0}^t 2L ds. \quad (1.20)$$

Por lo tanto,

$$q_0 e^{-2L|t-t_0|} \leq q(t) \leq q_0 e^{2L|t-t_0|}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.21)$$

El resultado ahora es inmediato al notar que $q(t) = \|x(t)\|_2^2$. \square

Las siguientes proposiciones dan varias propiedades de conjuntos invariantes positivos, conjuntos invariantes negativos y conjuntos invariantes.

Proposición 1.14. *Considere el sistema dinámico no lineal \mathcal{G} dado por (1.9). Sea $\{\mathcal{M}_i : i \in \mathcal{I}\}$ una colección de conjuntos invariantes positivos (respectivamente, invariante negativo o invariante) con respecto a \mathcal{G} . Entonces $\mathcal{M} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{M}_i$ conjuntos invariantes positivo (respectivamente, invariante negativo o invariante) con respecto a \mathcal{G} .*

Prueba. Sean los conjuntos \mathcal{M}_i invariantes positivos. Para todo $x \in \mathcal{N}$, se sigue que $x \in \mathcal{M}_i$ para algún $i \in \mathcal{I}$. Como \mathcal{M}_i invariante positivo, $s(t, x) \in \mathcal{M}_i$ para todo $t \geq 0$. Así, como $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$, $s(t, x) \in \mathcal{N}$ para todo $t \geq 0$, y por lo tanto, \mathcal{N} es invariante positivo. Luego, sea $x \in \mathcal{M}$. En este caso, $x \in \mathcal{M}_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ y como cada \mathcal{M}_i invariantes positivos, $s(t, x) \in \mathcal{M}_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$ y cada $t \geq 0$. Por lo tanto, $s(t, x) \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ para cada $t \geq 0$, lo que prueba la invariancia positiva de \mathcal{M} . Las pruebas para la invariancia negativa e invariancia son análogas. \square

Proposición 1.15. *Considere el sistema dinámico no lineal \mathcal{G} dado por (1.9). Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ un conjunto invariante positivo (respectivamente, invariante negativo o invariante) con respecto a \mathcal{G} . Entonces $\overline{\mathcal{M}}$ es invariante positivo (respectivamente, invariante negativo o invariante) con respecto a \mathcal{G} .*

Prueba. Sea \mathcal{M} invariante y sea $x \in \overline{\mathcal{M}}$ y $t \in \mathbb{R}$. En este caso, existe una secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como \mathcal{M} es invariante, $s(t, x_n) \in \mathcal{M}$ para cada n . Además, dado que $s(t, x_n) \rightarrow s(t, x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que $s(t, x) \in \mathcal{M}$, y por lo tanto, $\overline{\mathcal{M}}$ es invariante. las pruebas de invariancia positiva y negativa son idénticos y, por lo tanto, se omiten. \square

Proposición 1.16. *Considere el sistema dinámico no lineal \mathcal{G} dado por (1.9). Entonces $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ es invariante positivo con respecto a \mathcal{G} si y sólo si $\mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$ es invariante negativo con respecto a \mathcal{G} . Además, \mathcal{M} es invariante con respecto a \mathcal{G} si y sólo si $BD \setminus \mathcal{M}$ es invariante con respecto a \mathcal{G} .*

Prueba. Sea \mathcal{M} invariante positivo y supongamos, por el absurdo, que si $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$ y $t \leq 0$, entonces $s(t, x) \notin \mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$. Por lo tanto, $s(t, x) \in \mathcal{M}$ y como $-t \geq 0$, $s(-t, s(t, x)) = s(-t+t, x) = s(0, x) = x \in \mathcal{M}$ por invariancia positiva de \mathcal{M} . Esta contradicción muestra que $\mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$ es invariante negativo. El recíproco sigue volviendo sobre los pasos anteriores. Finalmente, el segundo parte del teorema se sigue como consecuencia directa de la primera parte. \square

Proposición 1.17. *Considere el sistema dinámico no lineal \mathcal{G} dado por (1.9). Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ invariante con respecto a \mathcal{G} . Entonces $\partial\mathcal{M}$ y $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ son invariantes con respecto a \mathcal{G} .*

Prueba. De la Proposición 1.16 se sigue que si \mathcal{M} es invariante con respecto a \mathcal{G} , entonces $\mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$ es invariante con respecto a \mathcal{G} . Por lo tanto, por Proposición 1.15, $\overline{\mathcal{M}}$ y $\overline{\mathcal{D} \setminus \mathcal{M}}$ son invariantes con respecto a \mathcal{G} . Ahora, de las Proposiciones 1.14 y 1.16 se sigue que $\partial\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \cap \overline{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{M})}$ y $\overset{\circ}{\mathcal{M}} = \mathcal{D} \setminus \overline{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{M})}$ son invariantes con respecto a \mathcal{G} . \square

El recíproco de la Proposición 1.17 se cumple siempre que \mathcal{M} sea abierto o cerrado.

Para ver esto, observe que si $\partial\mathcal{M}$ es invariante con respecto a \mathcal{G} , entonces $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ es invariante con respecto a \mathcal{G} . Este simple hecho puede demostrarse mediante un argumento de contradicción. Específicamente, supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $s(t, x) \notin \overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Ahora bien, como el conjunto $Q := \{y \in \mathcal{D} : y = s(t, x), t \in [0, \tau]\}$ es conexo, se sigue que $Q \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, donde hemos supuesto $t \geq 0$ por conveniencia. Por tanto, existe $t^* \in (0, t]$ tal que $s(t^*, x) \in \partial\mathcal{M}$. Sin embargo, en este caso, $x = s(-t^*, s(t^*, x)) = s(-t^*+t^*, x) \in \partial\mathcal{M}$, que por la invariancia de $\partial\mathcal{M}$ contradice $x \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Esto muestra que si $\partial\mathcal{M}$ es invariante con respecto a \mathcal{G} , entonces $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ es invariante con respecto a \mathcal{G} . Así, si \mathcal{M} es cerrado entonces $\mathcal{M} = \partial\mathcal{M} \cup \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ es invariante, mientras que si \mathcal{M} es abierto entonces $\mathcal{M} = \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ es invariante. De manera similar, se puede demostrar que si $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ es no vacío e invariante, entonces \mathcal{M} también es invariante siempre que \mathcal{M} sea cerrado o abierto. \square

Proposición 1.18. *Considere el sistema dinámico no lineal \mathcal{G} dado por (1.9). Sea $M \subset \mathcal{D}$ invariante positivo (respectivamente, negativo) con respecto a \mathcal{G} . Entonces $\overset{\circ}{M}$ es invariante positivo (respectivamente, negativo) con respecto a \mathcal{G}*

Prueba. Suponga que M es invariante positivo. Entonces por las Proposiciones 1.15 y 1.16 $\mathcal{D} \setminus M$ y $\overline{\mathcal{D} \setminus M}$ son invariantes negativos. Por lo tanto, $\overset{\circ}{M} \subset \overline{\mathcal{D} \setminus M}$ es invariante positivo. El caso donde M es invariante negativo sigue usando argumentos idénticos. \square

Definición 1.19. *La trayectoria $s(\cdot, x)$ de (1.9) es acotada si existe $\gamma > 0$ tal que $\|s(t, x)\| < \gamma$, $t \in \mathbb{R}$.*

A continuación, establecemos y demostramos un teorema clave que involucra conjuntos de límites positivos. Un resultado análogo es válido para conjuntos de límites negativos. En el caso de que $t \geq 0$, nos referimos a la propiedad de grupo en la Definición 1.1 como propiedad de semigrupo. Es más, usamos la notación $x(t) \rightarrow M \subseteq \mathcal{D}$ cuando $t \rightarrow \infty$ para denotar que $x(t)$ tiende a M , es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\text{DIST}(x(t), M) < \epsilon$ para todo $t > T$, donde $\text{DIST}(p, M) := \inf_{x \in M} \|p - x\|$.

Teorema 1.20. *Suponga que la solución $x(t)$ a (1.9) correspondiente a una condición inicial $x(0) = x_o$ está acotada para todo $t \geq 0$. Entonces el conjunto límite positivo $\omega(x_o)$ de $x(t)$, $t \geq 0$, es un conjunto no vacío, compacto, conexo y invariante. Además, $x(t) \rightarrow \omega(x_o)$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Prueba. Sea $x(t)$, $t \geq 0$, o, de manera equivalente, $s(t, x_o)$, $t \geq 0$, denotamos la solución de (1.9) correspondiente a la condición inicial $x(0) = x_o$. Ahora, dado que $x(t)$ está acotado para todo $t \geq 0$, se sigue del Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 1.6) que cada secuencia en la órbita positiva $x_o^+ := \{s(t, x_o) : t \in [0, \infty)\}$ tiene al menos un punto de acumulación $p \in \mathcal{D}$ cuando $t \rightarrow \infty$, y por lo tanto, $\omega(x_o)$ es no vacío. Luego, sea $p \in \omega(x_o)$ tal que existe una secuencia creciente no acotada $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ con $t_0 = 0$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = p$. Ahora bien, como $x(t_n)$ está uniformemente acotada en n , se sigue que el punto límite p está acotado, lo que implica que $\omega(x_o)$ está acotado. Para mostrar que $\omega(x_o)$ es cerrado sea $\{p_i\}_{i=0}^\infty$ una secuencia contenida en $\omega(x_o)$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$. Ahora bien, dado que $p_i \rightarrow p$ cuando $i \rightarrow \infty$ para todo $\epsilon > 0$, existe un i tal que $\|p - p_i\| < \epsilon/2$. Luego, dado que $p_i \in \omega(x_o)$, existe $t \geq T$, donde T es arbitrario y finito, tal que $\|p - x(t)\| < \epsilon/2$. Ahora, dado que $\|p - p_i\| < \epsilon/2$ y $\|p - x(t)\| < \epsilon/2$ se sigue que $\|p - x(t)\| \leq \|p_i - x(t)\| + \|p - p_i\| < \epsilon$, y por lo tanto, $p \in \omega(x_o)$. Así, todo punto de acumulación de $\omega(x_o)$ es un elemento de $\omega(x_o)$ de manera que $\omega(x_o)$ es cerrado. Por lo tanto, dado que $\omega(x_o)$ es cerrado y acotado es compacto.

Para mostrar la invariancia positiva de $\omega(x_o)$ sea $p \in \omega(x_o)$ tal que existe una secuencia creciente no acotada $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, sea $s(t_n, x_o)$ la solución $x(t_n)$ de (1.9) con condición inicial $x(0) = x_o$ y observe que como $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en (1.9) es Lipschitz continua en \mathcal{D} , $x(t)$, $t \geq 0$, es la única solución de (1.9) entonces que por la propiedad del semigrupo $s(t+t_n, x_o) = s(t, s(t_n, x_o)) = s(t, x(t_n))$. Ahora bien, como $x(t)$, $t \geq 0$, es continua se sigue que, para $t + t_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s(t + t_n, x_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(t, x(t_n)) = s(t, p)$, y por lo tanto, $s(t, p) \in \omega(x_o)$. Por tanto, $s_t(\omega(x_o)) \subseteq \omega(x_o)$, $t \geq 0$, estableciendo una invariancia positiva de $\omega(x_o)$.

Para mostrar la invariancia de $\omega(x_o)$ sea $y \in \omega(x_o)$ de modo que exista una secuencia creciente no acotada $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $s(t_n, x_o) \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, sea $t \in [0, \infty)$ y observe que existe N tal que $t_n > t, n \geq N$. Por lo tanto, de la propiedad del semigrupo se sigue que $s(t, s(t_n - t, x_o)) = s(t_n, x_o) \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, del teorema de Bolzano-Lebesgue (Teorema 1.7) se sigue que existe una subsucesión $\{z_{n_k}^\infty$ de la sucesión $z_n = s(t_n - t, x_o), n = N, N + 1, \dots$, tal que $z_{n_k} \rightarrow z \in \mathcal{D}$ cuando $k \rightarrow \infty$ y, por definición, $z \in \omega(x_o)$. A continuación, se sigue de la propiedad de dependencia continua de que $\lim_{k \rightarrow \infty} s(t, z_{n_k}) = s(t, \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k})$, y por lo tanto, $y = s(t, z)$, lo que implica que $\omega(x_o) \subseteq s_t(\omega(x_o)), t \in [0, \infty)$. Ahora, usando invariancia positiva de $\omega(x_o)$ se sigue que $s_t(\omega(x_o)) = \omega(x_o), t \geq 0$, estableciendo invariancia del conjunto límite positivo $\omega(x_o)$.

Para mostrar la conectividad de $\omega(x_o)$, suponga, por el absurdo, que $\omega(x_o)$ es no conexo. En este caso, existen dos conjuntos cerrados no vacíos \mathcal{P}_1^+ y \mathcal{P}_2^+ tal que $\mathcal{P}_1^+ \cap \mathcal{P}_2^+ = \emptyset$ y $w(x_o) = \mathcal{P}_1^+ \cup \mathcal{P}_2^+ = \emptyset$. Puesto que \mathcal{P}_1^+ y \mathcal{P}_2^+ son cerrados y disjuntos existen dos conjuntos \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 tales que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset, \mathcal{P}_1^+ \subset \mathcal{S}_1, \mathcal{P}_2^+ \subset \mathcal{S}_2$. Luego, como $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz continua en \mathcal{D} , se sigue que la solución $x(t), t \geq 0$, de (1.9) es una función continua de t . Por tanto, existen sucesiones $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$ tales que $x(t_n) \in \mathcal{S}_1, x(\tau_n) \in \mathcal{S}_2$, y $t_n < \tau_n < t_{n+1}$, lo que implica que existe una secuencia $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$, con $t_n < \tau_n < \tau_{n+1}$, tal que $x(\tau_n) \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Ahora, dado que $x(t)$ es acotada para todo $t \geq 0$, se sigue que $x(\tau_n) \rightarrow \hat{p} \notin w(x_o)$ cuando $n \rightarrow \infty$, conduciendo a una contradicción. Por lo tanto, $\omega(x_o)$ es conexo.

Finalmente, para mostrar $x(t) \rightarrow \omega(x_o)$ cuando $t \rightarrow \infty$, supongamos, por el absurdo, $x(t) \not\rightarrow \omega(x_o)$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso, existe una secuencia $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que

$$\inf_{p \in w(x_o)} \|x(t_n) - p\| > \epsilon, \quad n \in \overline{\mathbb{Z}_+}. \quad (1.22)$$

Sin embargo, dado que $x(t), t \geq 0$, está acotada, la sucesión acotada $\{x(t_n)\}_{n=0}^\infty$ contiene una subsecuencia convergente $\{x(t_n^*)\}_{n=0}^\infty$ tal que $x(t_n^*) \rightarrow \hat{p}^* \in \omega(x_o)$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo que contradice (1.9). Por lo tanto, $x(t) \rightarrow \omega(x_o)$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Es importante notar que el teorema 1.20 se cumple para sistemas dinámicos no lineales invariante en el tiempo (1.9) que poseen soluciones únicas hacia adelante en el tiempo siendo las soluciones funciones continuas de las condiciones iniciales. Más generalmente, dejando que $s(\cdot, x_o)$ denote la solución de un sistema dinámico con la condición inicial $x(0) = x_o$, el teorema 1.20 se cumple si $s(t + \tau, x_o) = s(t, s(\tau, x_o)), t, \tau \geq 0$, y $s(\cdot, x_o)$ es una función continua de $x_o \in \mathcal{D}$. Por supuesto, si $f(\cdot)$ es Lipschitz continua en \mathcal{D} , entonces existe una solución única a (1.9), y por lo tanto, la propiedad de semigrupo requerida $s(t + \tau, x_o) = s(t, s(\tau, x_o)), t, \tau \geq 0$, y la continuidad de $s(t, \cdot)$ en $\mathcal{D}, t \geq 0$, se cumplen. Alternativamente, la unicidad de las soluciones a lo largo del tiempo con la continuidad de $f(\cdot)$ asegura que las soluciones a (1.9) satisfacen la propiedad del semigrupo y son funciones continuas de las condiciones iniciales $x_o \in \mathcal{D}$ incluso cuando $f(\cdot)$ no es Lipschitz continua en \mathcal{D} . Más generalmente, $f(\cdot)$ no necesita ser continua. En particular, si $f(\cdot)$ es discontinua pero acotada y $x(\cdot)$ es la única solución de (1.9) en el sentido de Filippov [4], entonces la propiedad de semigrupo requerida con la dependencia continua de las soluciones de las condiciones iniciales se cumple [4].

Nótese que el Teorema 1.20 implica que si $p \in \mathcal{D}$ es un punto límite w de una trayectoria

$s(\cdot, x)$ de (1.9), luego todos los demás puntos de la trayectoria $s(\cdot, p)$ de (1.9) a través del punto p son también ω -puntos límite de $s(\cdot, x)$, es decir, si $p \in \omega(x)$ entonces $O_p^+ \subset \omega(x)$. Además, como todo punto de equilibrio $x_e \in \mathcal{D}$ de (1.9) satisface $s(t, x_e) = x_e$ para todo $t \in \mathbb{R}$, todos los puntos de equilibrio $x_e \in \mathcal{D}$ de (1.9) son sus propios conjuntos límites α -límite y ω -límite. Si una trayectoria de (1.9) posee un punto ω -límite único x_e , entonces se sigue del Teorema 1.20 que como $\omega(x_e)$ es invariante con respecto al flujo s_t de (1.9), x_e es un punto de equilibrio de (1.9).

Ahora consideramos el sistema dinámico autónomo no lineal general

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathcal{I}_{x_0}, \quad (1.23)$$

donde $x(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in \mathcal{I}_{x_0}$, \mathcal{D} es un conjunto abierto con $0 \in \mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo en \mathcal{D} , y $\mathcal{I}_{x_0} = [0, \tau_{x_0})$, $0 \leq \tau_{x_0} \leq \infty$. Suponemos que para cada condición inicial $x(0) \in \mathcal{D}$ y cada $\tau_{x_0} > 0$, el sistema dinámico (1.23) posee una solución única $x : [0, \tau_{x_0}) \rightarrow \mathcal{D}$ en el intervalo $[0, \tau_{x_0})$. Denotamos la solución de (1.23) con la condición inicial $x(0) = x_0$ por $s(\cdot, x_0)$, de modo que el flujo del sistema dinámico (1.23) dado por la aplicación $s : [0, \tau_{x_0}) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es continuo en x y continuamente diferenciable en t y satisface la propiedad de consistencia $s(0, x_0) = x_0$ y la propiedad de semigrupo $s(\tau, s(t, x_0)) = s(t + \tau, x_0)$, para todo $x_0 \in \mathcal{D}$ y $t, \tau \in [0, \tau_{x_0})$ tal que $t + \tau \in [0, \tau_{x_0})$. A menos que se indique lo contrario, asumimos que $f(0) = 0$ y $f(\cdot)$ es Lipschitz es continuo en \mathcal{D} . La siguiente definición introduce varios tipos de estabilidad correspondientes a la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (1.23) para $\mathcal{I}_{x_0} = [0, \infty)$.

Definición 1.21. i) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es **estable** si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| < \epsilon$, $t \geq 0$. Gráficamente

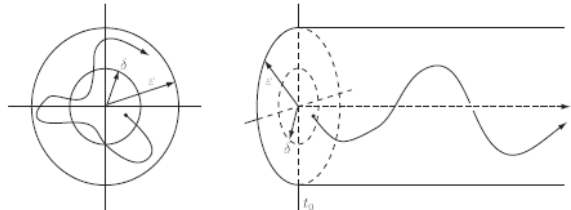


Figura 1.2: Estabilidad de un punto de equilibrio.

ii) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es **asintóticamente estable** si es estable y existe $\delta > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Gráficamente

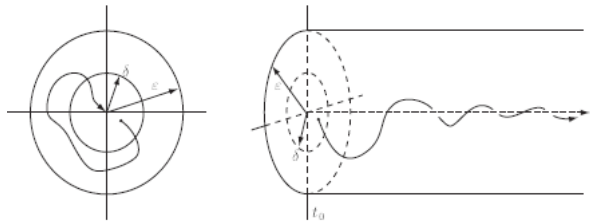


Figura 1.3: Estabilidad asintótica de un punto de equilibrio.

- iii)) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es **exponencialmente estable** si existen constantes positivas α, β y δ tales que si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|e^{-\beta t}$, $t \geq 0$.
- iv)) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es **globalmente asintóticamente estable** si es estable y para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
- v)) La solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es **globalmente exponencialmente estable** si existen constantes positivas α y β tal que $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$.
- vi)) Finalmente, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es **inestable** si no es estable.

La figura 1.4 muestra las nociones de estabilidad e inestabilidad de un punto de equilibrio. Claramente, estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica y estabilidad asintótica implica estabilidad.

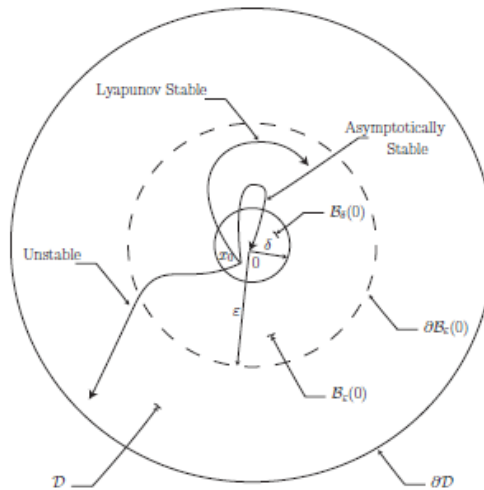


Figura 1.4: Estabilidad e inestabilidad de un punto de equilibrio.

Lema 1.22. (Lema de Gronwall). Suponga que existe una función continua $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta x(s) ds, \quad t \geq t_0, \tag{1.24}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \geq 0$. Entonces

$$x(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \tag{1.25}$$

Prueba. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^t \beta x(s) ds, \quad t \geq t_0, \tag{1.26}$$

Ahora, de (1.24) se sigue que $x(t) \leq y(t)$, $t \geq t_0$, y por tanto, usando (1.26),

$$\dot{y}(t) = \beta x(t) \leq \beta y(t), \quad y(t_0) = \alpha, \quad t \geq t_0. \tag{1.27}$$

Ahora, defina $z(t) := \dot{y}(t) - \beta y(t)$ y observe que (1.27) implica $z(t) \leq 0$, $t \geq t_0$. Por lo tanto,

$$y(t) = y(t_0)e^{\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\beta(t-\sigma)} z(\sigma) d\sigma,$$

lo que implica

$$y(t) \leq y(t_0)e^{\beta(t-t_0)} = \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

El resultado ahora es inmediato al notar que $x(t) \leq y(t)$, $t \geq t_0$. \square

Para enunciar y demostrar los teoremas inversos de Lyapunov (Capítulo 5) necesitamos varias definiciones y un lema clave.

Definición 1.23. Una función continua $\gamma: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$, donde $a \in (0, \infty]$, es de clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\gamma(0) = 0$. Una función continua $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K}_∞ si es estrictamente creciente, $\gamma(0) = 0$, y $\gamma(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$. Una función continua $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{L} si es estrictamente decreciente y $\gamma(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$. Finalmente, una función continua $\gamma: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{KL} si, para cada s fijo, $\gamma(r, s)$ es de clase \mathcal{K} con respecto a r y, para cada r fijo, $\gamma(r, s)$ es de clase \mathcal{L} con respecto a s .

El siguiente lema clave debido a Massera es necesario para el resultado principal del capítulo 5.

Lema 1.24. (Lema de Massera). Sea $\sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función de clase \mathcal{KL} y sea λ un escalar positivo dado. Entonces existe una función infinitamente diferenciable $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\gamma(\cdot), \gamma'(\cdot) \in \mathcal{K}$, $\int_0^\infty \gamma[\sigma(t)] dt < \infty$, y $\int_0^\infty \gamma'[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt < \infty$.

Demostración: Dado $\sigma(\cdot)$ es estrictamente decreciente existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ no acotada tal que

$$\sigma(t_n) \leq \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora, definamos $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\eta(t) \triangleq \begin{cases} \left(\frac{t_1}{t}\right)^p, & 0 < t \leq t_1, \\ \frac{(n+1)t_{n+1} - nt_n - t}{n(n+1)(t_{n+1} - t_n)}, & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

donde $p > \frac{t_1^2}{2(t_2 - t_1)}$. Note que $\eta(\cdot)$ es estrictamente decreciente, $\sigma(t) < \eta(t)$, $t \in [t_1, \infty)$, y $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \eta(t) = \infty$. Dado que $\eta(\cdot)$ es una función infinitamente diferenciable excepto en un número contable de valores de t , se puede aproximar mediante una función infinitamente diferenciable en $[0, \infty)$. A continuación, se puede demostrar que $\eta^{-1}(\cdot)$ es una función estrictamente decreciente tal que $\lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \eta^{-1}(s) = \infty$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} \eta^{-1}(s) = 0$. Ahora, sea $\mu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mu(0) = 0$ y $\mu(s) = e^{-(\lambda+1)\eta^{-1}(s)}$, $s > 0$. Note que $\mu(\cdot)$ es infinitamente diferenciable en

$(0, \infty)$ y $\mu(\cdot)$ es estrictamente creciente, lo cual implica que $\mu(\cdot)$ es una función de clase \mathcal{K} . A continuación, definamos $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\gamma(r) \triangleq \int_0^r \mu(s) ds.$$

Note que $\gamma(\cdot)$ y $\gamma'(\cdot) = \mu(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K} . Además, note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \gamma'[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt &= \int_0^{t_1} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt + \int_{t_1}^\infty \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt \\ &< \int_0^{t_1} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt + \int_{t_1}^\infty \mu[\eta(t)] e^{\lambda t} dt \\ &= \int_0^{t_1} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt + \int_{t_1}^\infty e^{-t} dt \\ &< \infty. \end{aligned}$$

A continuación, ya que para todo $t \geq t_1$ y $s \in (0, \eta(t)]$, $t \leq \eta^{-1}(s)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta(t)} \mu(s) ds &= \int_0^{\eta(t)} e^{-(\lambda+1)\eta^{-1}(s)} ds \\ &\leq \int_0^{\eta(t)} e^{-(\lambda+1)t} ds \\ &= e^{-(\lambda+1)t} \eta(t) \\ &\leq e^{-(\lambda+1)t}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^\infty \gamma[\sigma(t)] dt &= \int_{t_1}^\infty \int_0^{\sigma(t)} \mu(s) ds dt \\ &< \int_{t_1}^\infty \int_0^{\eta(t)} \mu(s) ds dt \\ &\leq \int_{t_1}^\infty e^{-(\lambda+1)t} dt \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ahora, el resultado se sigue del hecho que $\int_0^\infty \gamma[\sigma(t)] dt < \infty$ si y solo si $\int_{t_1}^\infty \gamma[\sigma(t)] dt < \infty$.

□

Capítulo 2

Teoría de la estabilidad de Lyapunov

El siguiente resultado, conocido como método directo de Lyapunov, da condiciones suficientes para la estabilidad asintótica y exponencial de Lyapunov de un sistema dinámico no lineal. Para este resultado, sea $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable con derivada a lo largo de las trayectorias de (1.23) dada por $\dot{V}(x) := V'(x)f(x)$. Note que $\dot{V}(x)$ depende del sistema dinámico (1.23). Dado que, usando la regla de la cadena, $\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(s(t, x)) \right|_{t=0} = V'(x)f(x)$ se deduce que si $\dot{V}(x)$ es negativo, entonces $V(x)$ es decreciente a lo largo de la solución $s(t, x_0)$ de (1.23) pasando por $x_0 \in \mathcal{D}$ en $t = 0$.

Teorema 2.1. (Teorema de Lyapunov). *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) y asuma que existe una función $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0, \quad (2.1)$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0, \quad (2.2)$$

$$V'(x)f(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{D}. \quad (2.3)$$

Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (1.23) es estable. Si, además,

$$V'(x)f(x) < 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0, \quad (2.4)$$

entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (1.23) es asintóticamente estable. Finalmente, si existen escalares α, β y $\epsilon > 0$, y $p \geq 1$ tales que $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$\alpha \|x\|^p \leq V(x) \leq \beta \|x\|^p, \quad x \in \mathcal{D}, \quad (2.5)$$

$$V'(x)f(x) \leq -\epsilon V(x), \quad x \in \mathcal{D}, \quad (2.6)$$

entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (1.23) es exponencialmente estable.

Prueba. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\epsilon(0) \subseteq \mathcal{D}$. Como $\partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$ es compacto y $V(x)$, $x \in \mathcal{D}$, es continuo, se deduce que $V(\partial\mathcal{B}_\epsilon(0))$ es compacto, y por lo tanto, $\alpha := \min_{x \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)} V(x)$ existe. Observe que $\alpha > 0$ ya que $0 \notin \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$ y $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$. A continuación, sea $\beta \in (0, \alpha)$ y defina \mathcal{D}_β como la componente conexa de $\{x \in \mathcal{D} : V(x) \leq \beta\}$ que contiene el origen; es decir, \mathcal{D}_β es el conjunto de todos $x \in \mathcal{D}$ tal que existe una función continua $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $\psi(0) = x$, $\psi(1) = 0$, y $V(\psi(\mu)) \leq \beta$, para todo $\mu \in [0, 1]$. Note $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\epsilon(0)$ (ver Figura 2.1).

Para ver esto, supongamos, ad absurdum, que $\mathcal{D}_\beta \not\subset \mathcal{B}_\epsilon(0)$. En este caso, existe un punto $p \in \mathcal{D}_\beta$ tal que $p \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$, y por lo tanto, $V(p) \geq \alpha > \beta$, lo cual es una contradicción. Ahora, dado que $\dot{V}(x) : V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_\beta$, se sigue que $V(x(t))$ es una función no creciente del tiempo, y por lo tanto, $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$, $t \geq 0$. Por lo tanto, \mathcal{D}_β es un conjunto invariante positivo con respecto a (1.23). Además, dado que \mathcal{D}_β es compacto, se sigue que para todo $x(0) \in \mathcal{D}_\beta$, (1.23) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$.

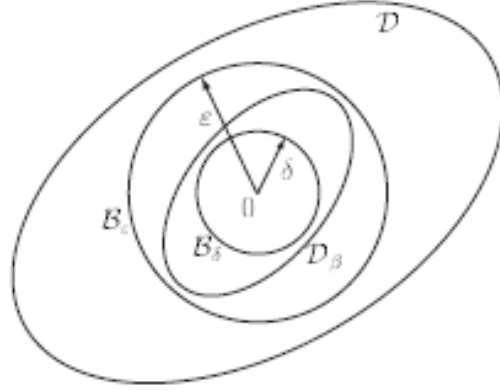


Figura 2.1: Visualización del conjunto usado en la demostración del Teorema 2.1.

A continuación, dado que $V(\cdot)$ es continuo y $V(0) = 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, \epsilon)$ tal que $V(x) < \beta$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$. Ahora, supongamos que $x(t)$, $t \geq 0$, satisfaciendo (1.23) con $\|x(0)\| < \delta$. Dado que, $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\epsilon(0) \subseteq \mathcal{D}$ y $V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}$, se sigue que

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s)) ds \leq 0, \quad t \geq 0,$$

y por tanto, para todo $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) < \beta, \quad t \geq 0.$$

Ahora, como $V(x) \geq \alpha$, $x \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$ y $\beta \in (0, \alpha)$, se sigue que $x(t) \notin \partial\mathcal{B}_\epsilon(0)$, $t \geq 0$. Por lo tanto, para todos $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| < \epsilon$, $t \geq 0$, lo que demuestra la estabilidad de la solución cero $x(t) \equiv 0$ para (1.23).

Para demostrar la estabilidad asintótica de la solución cero $x(t) \equiv 0$ para (1.23) suponga que $V'(x)f(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$ y $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$. Entonces se deduce que $x(t) \in \mathcal{B}_\epsilon(0)$, $t \geq 0$. Sin embargo, $V(x(t))$, $t \geq 0$, es decreciente y acotada por debajo por cero. Ahora, el absurdo, suponga que $x(t)$, $t \geq 0$, no converger a cero. Esto implica que $V(x(t))$, $t \geq 0$, tiene un límite inferior, es decir, existe $L > 0$ tal que $V(x(t)) \geq L > 0$, $t \geq 0$. Por tanto, por continuidad de $V(\cdot)$ existe $\delta' > 0$ tal que $V(x) < L$ para $x \in \mathcal{B}_{\delta'}(0)$, lo que además implica que $x(t) \notin \mathcal{B}_{\delta'}(0)$ para todo $t \geq 0$. Luego, defina $L_1 := \min_{x \in \partial\mathcal{B}_\epsilon(0), \delta' \leq \|x\| \leq \epsilon} V'(x)f(x)$. Ahora, (2.4) implica $-V'(x)f(x) \geq L_1$, $\delta' \leq \|x\| \leq \epsilon$ o equivalentemente,

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V'(x(s))f(x(s)) ds \leq -L_1 t,$$

y por tanto, para todo $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - L_1 t.$$

Dejando $t > \frac{V(x(0)) - L}{L_1}$, se sigue que $V(x(t)) < L$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, estableciendo la estabilidad asintótica.

Finalmente, para demostrar la estabilidad exponencial de la solución cero $x(t) \equiv 0$ para (1.23) tenga en cuenta que (2.6) implica que

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\epsilon t}, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Ahora, dado que por el supuesto $V(x(0)) \leq \beta \|x(0)\|^p$ y $\|\alpha \|x(t)\|^p \leq V(x(t))$, sigue que

$$\alpha \|x(t)\|^p \leq \beta \|x(0)\|^p - \epsilon t, \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

lo que implica que

$$\|x(t)\|^p \leq \left(\frac{\beta^{1/p}}{\alpha} \right) \|x(0)\| e^{-(\epsilon/p)t}, \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

estableciendo estabilidad exponencial. \square

Si x_e es un punto de equilibrio de (1.23), entonces el Teorema 2.1 se cumple con $V(0) = 0$ y $x \neq 0$ reemplazando por $V(x_e) = 0$ y $x \neq x_e$. Una función $V(\cdot)$ continuamente diferenciable que satisface (2.1) y (2.2) es llamada una *función candidata de Lyapunov* para el sistema dinámico no lineal (1.23). Si, adicionalmente, $V(\cdot)$ satisface 2.3, $V(\cdot)$ es llamada una *función de Lyapunov* para el sistema dinámico no lineal (1.23).

En vista de las condiciones (2.1)-(2.4), $V(\cdot)$ se puede considerar como una *función de energía generalizada* para el sistema dinámico no lineal (1.23). En particular, viendo las *superficies de nivel de Lyapunov* $V(x) = \alpha$, para constantes $\alpha > 0$ suficientemente pequeñas, como superficies de energía constante que cubren la vecindad $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\epsilon$, donde $V(x_0) = \beta$, del sistema dinámico no lineal (1.23), se sigue del teorema 2.1 que requiriendo la derivada de Lyapunov $\dot{V}(x) \triangleq V'(x)f(x)$ sea negativa, las trayectorias del sistema (1.23) se mueven desde una superficie de energía a una superficie de energía inferior o menor. Por supuesto, si se cumple la condición (2.3), las trayectorias del sistema se acercarán al origen y permanecerán dentro de una bola de radio $\epsilon > 0$ del origen para condición inicial del sistema que se encuentra dentro de una superficie de energía constante contenida en la bola de radio ϵ . Alternativamente, si se satisface la condición (2.4), entonces las superficies de energía del sistema se reducen a cero de modo que la trayectoria del sistema se aproxima a cero asintóticamente (ver figura 2.2).

Para el plano (\mathbb{R}^2) la función de Lyapunov proporciona la siguiente interpretación. Para que una solución dada $s(t, x_0)$ de (1.23), cruce la superficie de energía constante $V(x) = \beta$, donde $\beta = V(x_0)$, el ángulo entre la normal exterior del vector gradiente $V(x_0)$ y la derivada de $s(t, x_0)$ en $t = t_0$ debe ser mayor que $\pi/2$, esto es, $\dot{V}(x_0) = V'(x_0)f(x_0) < 0$. Para que esto ocurra en todos los puntos, necesitamos $\dot{V}(x) = V'(x)f(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}_\beta$. Por tanto, $V(s(t, x_0))$ es una función decreciente del tiempo. Esto, por supuesto, implica que $\dot{V}(s(t, x_0))$ a lo largo de la solución $s(t, x_0)$ de (1.23) debe ser negativa en \mathcal{D}_β .

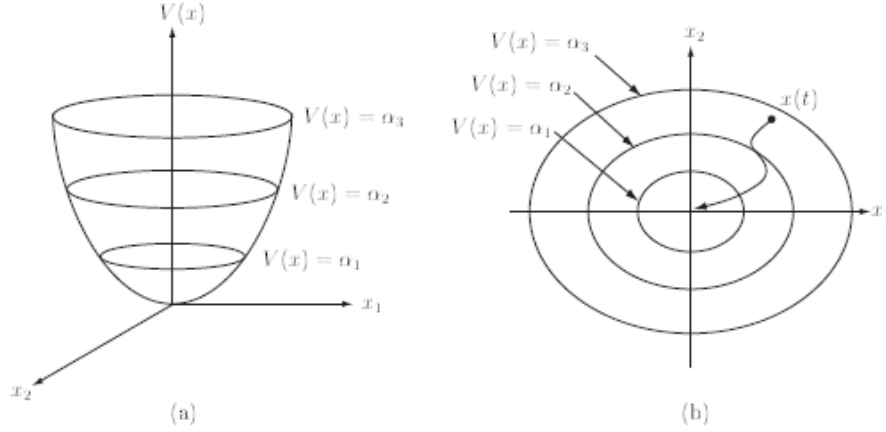


Figura 2.2: (a) Candidato típico a la función de Lyapunov. (b) Superficies de energía constante de Lyapunov. Para ambas figuras $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

Ejemplo 2.2. Considere el sistema dinámico no lineal que respresenta a una nave espacial rígida dado por

$$\dot{x}_1(t) = I_{23}x_2(t)x_3(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_2(t) = I_{31}x_3(t)x_1(t), \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (2.11)$$

$$\dot{x}_3(t) = I_{12}x_1(t)x_2(t), \quad x_3(0) = x_{30}, \quad (2.12)$$

donde $I_{23} = (I_2 - I_3)/I_1$, $I_{31} = (I_3 - I_1)/I_2$, $I_{12} = (I_1 - I_2)/I_3$ y I_1 , I_2 , y I_3 son los momentos principales de inercia de la nave espacial tales que $I_1 > I_2 > I_3 > 0$. Para examinar la estabilidad de este sistema, considere la función candidata de Lyapunov $V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$. Ahora, la derivada de Lyapunov está dada por

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 x_2 \dot{x}_2 + \alpha_3 x_3 \dot{x}_3 = x_1 x_2 x_3 (\alpha_1 I_{23} + \alpha_2 I_{31} + \alpha_3 I_{12}). \quad (2.13)$$

Dado que $I_{31} < 0$, se sigue que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ tales que $\alpha_1 I_{23} + \alpha_2 I_{31} + \alpha_3 I_{12} = 0$. En este caso, $\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = 0$, y por tanto, la solución cero para (2.10)-(2.12) es Lyapunov estable. Se puede ver que la solución cero de (2.10)-(2.12) es Lyapunov estable sin la restricción $I_1 > I_2 > I_3 > 0$ siempre y cuando $I_1, I_2, I_3 > 0$.

Ejemplo 2.3. Considere el sistema dinámico no lineal que describe el movimiento de un péndulo simple con amortiguamiento viscoso dado por

$$\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad t \geq 0, \quad (2.14)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y l es la longitud del péndulo. Para analizar la estabilidad de este sistema, considere la función candidata de Lyapunov

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (\theta + \dot{\theta})^2 + \frac{2g}{l} (1 - \cos \theta). \quad (2.15)$$

Ahora, la derivada de Lyapunov está dada por

$$\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta} \ddot{\theta} + (\theta + \dot{\theta})(\dot{\theta} + \ddot{\theta}) + \frac{2g}{l} \dot{\theta} \sin \theta = -(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \theta \sin \theta), \quad (2.16)$$

el cual es localmente definida negativa y, por tanto, el péndulo simple con amortiguamiento viscoso es localmente asintóticamente estable. Se puede ver que la función de de Lyapunov de energía $V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos \theta)$ falla para mostrar que la derivada de Lyapunov es estrictamente decreciente y, por lo tanto, no puede usarse junto con el teorema 2.1 para establecer la estabilidad asintótica de (2.14).

El teorema 2.1 se puede utilizar para proporcionar una estimación del *dominio de atracción* para el sistema dinámico no lineal (1.23); esto es, encontrar un conjunto abierto conexo \mathcal{D} , en \mathbb{R}^n que contenga el origen con la propiedad de que toda trayectoria que comienza en \mathcal{D}_0 converge al origen a medida que el tiempo tiende a infinito. Es importante señalar aquí que (2.2) y (2.4) no son suficientes para garantizar que toda solución que comience en \mathcal{D} permanecerá en \mathcal{D} para siempre. Sin embargo, si (2.2) y (2.4) se cumplen, entonces todo *conjunto invariante* del sistema dinámico no lineal 1.23 contenido en \mathcal{D} también está contenido en el dominio de atracción \mathcal{D}_0 de 1.23. Como se muestra en la demostración del teorema 2.1, si existe una función de Lyapunov $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que (2.1), (2.2), y (2.4) se cumplan, y si $\mathcal{D}_\beta = \{x \in \mathcal{D}: V(x) \leq \beta\}$ está acotado, entonces \mathcal{D}_β es un conjunto positivamente invariante con respecto a (1.23) y cada trayectoria del sistema que comienza en \mathcal{D}_β converge al origen cuando el tiempo tiende a infinito. Por tanto, \mathcal{D}_β es una estimación del dominio de atracción. Entonces, la pregunta es, ¿cuán grande podemos tomar $\beta > 0$ tal que \mathcal{D}_β permanezca acotado? Dado que $V(\cdot)$ es continua y definida positiva, siempre existe un $\beta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que la superficie de nivel de Lyapunov $V(x) \equiv \beta$ esté acotada y, por lo tanto, \mathcal{D}_β esté acotada ya que $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ para algún $\varepsilon > 0$. Sin embargo, dependiendo de la estructura de $V(\cdot)$, a medida que β aumenta, la superficie de nivel de Lyapunov $V(x) \equiv \beta$ puede no estar acotado y, por lo tanto, \mathcal{D}_β se vuelve no acotado. Para $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, β debe satisfacer $\beta < \inf_{\|x\| \geq \varepsilon} V(x)$. Entonces, si $\beta < \gamma$, donde

$$\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\|x\| \geq \varepsilon} V(x) < \infty \quad (2.17)$$

y $\gamma > 0$, entonces \mathcal{D}_β está garantizado para estar acotado.

A continuación, damos una definición precisa del dominio, o región, de atracción de la solución cero $x(t) \equiv 0$ del sistema dinámico no lineal (1.23).

Definición 2.4. *Suponga que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es asintóticamente estable. Entonces el dominio de atracción $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ de (1.23) está dado por*

$$\mathcal{D}_0 \triangleq \left\{ x_0 \in \mathcal{D}: \text{si } x(0) = x_0, \text{ entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \right\}. \quad (2.18)$$

Como se discutió anteriormente, la motivación para construir el dominio de atracción de un sistema dinámico no lineal se deriva del hecho de que no hay garantía de que una trayectoria del sistema que comienza en un subconjunto \mathcal{D} del espacio de estados permanecerá en \mathcal{D} aunque la derivada de Lyapunov sea negativa en \mathcal{D} , es decir, las trayectorias del sistema se mueven de un nivel de energía a un nivel de energía interno (ver Figura 2.3). El problema de construir el dominio de atracción para sistemas dinámicos no lineales estables localmente ha recibido una atención considerable en la literatura. Sin embargo, dado que la construcción del dominio real de atracción de un sistema dinámico no lineal depende de la trayectoria del

sistema, la mayoría de las técnicas propuestas en la literatura proporcionan un subconjunto garantizado del dominio de atracción.

Para estimar un subconjunto del dominio de atracción del sistema dinámico (1.23) suponga que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que (2.1), (2.2), y (2.4) se cumplen. A continuación, sea \mathcal{D}_β la componente conectado de $\{x \in \mathcal{D}: V(x) \leq \beta\}$ conteniendo el origen. Tenga en cuenta que toda trayectoria que comience en \mathcal{D}_β se moverá a una superficie de energía interna y, por lo tanto, no podrá escapar de \mathcal{D}_β . Por tanto, \mathcal{D}_β es una estimación del dominio de atracción del sistema dinámico no lineal (1.23). Ahora, para maximizar esta estimación del dominio de atracción, maximizamos β tal que $\mathcal{D}_\beta \subseteq \mathcal{D}$. Entonces, definamos $V_\Gamma \triangleq \sup\{\beta > 0: \mathcal{D}_\beta \subseteq \mathcal{D}\}$, así que

$$\mathcal{D}_A \triangleq \{x \in \mathcal{D}: V(x) \leq V_\Gamma\}, \quad (2.19)$$

es un subconjunto del dominio de atracción para (1.23) ya que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$. La discusión anterior suscita una pregunta interesante; es decir, ¿bajo qué

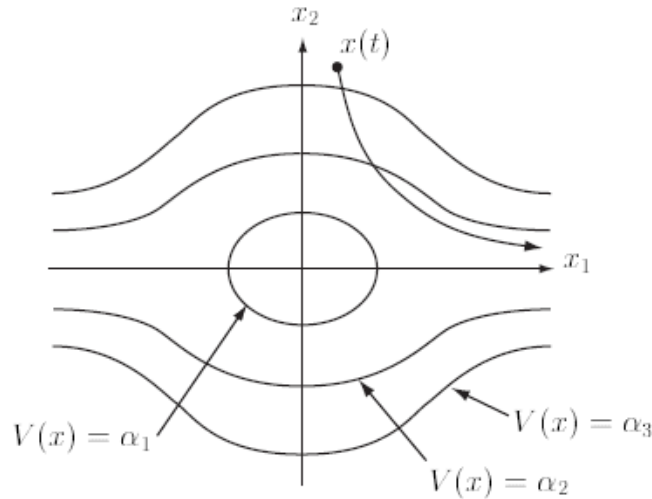


Figura 2.3: Visualización del requisito del no acotado radial; $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

condiciones corresponderá el dominio de atracción a todo el espacio de estado \mathbb{R}^n ? Por supuesto, esto corresponde al caso donde la trayectoria $s(t, x_0)$ de (1.23) se aproxima al origen cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o, equivalentemente, el sistema dinámico es globalmente asintóticamente estable. De la demostración del teorema 2.1 se deduce que la estabilidad asintótica global se mantendrá si cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ está contenido en el conjunto compacto \mathcal{D}_β para algún $\beta > 0$. Claramente, en este caso requerimos $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y que para todo $\beta > 0$, \mathcal{D}_β está acotado, es decir, para cada $\beta > 0$ existe $r > 0$ tal que si $x \in \mathcal{D}_\beta$, entonces $x \in \mathcal{B}_r(0)$ o, equivalentemente, $V(x) > \beta$ para todo $x \notin \mathcal{B}_r(0)$. Esta condición que asegura que \mathcal{D}_β está acotada para todo $\beta > 0$ está implícito por

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Una función $V(\cdot)$ que cumple (1.23) es llamada *propia* o *radialmente no acotada*.

A continuación, establecemos el teorema de estabilidad global de Lyapunov donde el dominio de atracción de (1.23) es todo el espacio de estado.

Teorema 2.5. *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) y asuma que existe una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0, \quad (2.21)$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad (2.22)$$

$$V'(x)f(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad (2.23)$$

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) globalmente asintóticamente estable. Si, alternativamente, existen escalares $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$, y $p \geq 1$, tal que $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfice

$$\alpha\|x\|^p \leq V(x) \leq \beta\|x\|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.25)$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.26)$$

entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es globalmente exponencialmente estable.

Demostración: Sea $x(0) \in \mathbb{R}^n$, y sea $\beta \triangleq V(x_0)$. Ahora, la condición de radial no acotada (2.24) implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V(x) > \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| \geq \varepsilon$. Por tanto, de (2.23) se sigue que $V(x(t)) \leq V(x_0) = \beta$, $t \geq 0$, lo que implica que $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Ahora, la demostración se sigue como en la demostración del teorema 2.1. \square

El siguiente ejemplo muestra la motivación de la condición de radial no acotada para asegurar la estabilidad asintótica global.

Ejemplo 2.6. *Considere el sistema dinámico no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{6x_1(t)}{[1 + x_1^2(t)]^2} + 2x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad (2.27)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{2[x_1(t) + x_2(t)]}{[1 + x_1^2(t)]}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (2.28)$$

Para examinar la estabilidad de este sistema, considere la función candidata de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2/(1 + x_1^2) + x_2^2$. Note que $V(0, 0) = 0$ y $V(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$; sin embargo, $V(x_1, x_2)$ no es radialmente no acotada. La derivada de Lyapunov $\dot{V}(x_1, x_2)$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \left[\frac{2x_1(1 + x_1^2) - 2x_1^3}{(1 + x_1^2)^2} \right] \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 \\ &= \frac{2x_1}{(1 + x_1^2)^2} \left[-\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2 \right] - \frac{4x_2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2} \\ &= -\frac{12x_1^2}{(1 + x_1^2)^4} - \frac{4x_2^2}{(1 + x_1^2)^2} \\ &< 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Claramente, la derivada de Lyapunov es definida negativa en todo \mathbb{R}^2 , y por tanto, la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (2.27) y (2.28) es asintóticamente estable. Sin embargo,

para mostrar que (2.27) y (2.28) no son globalmente asintóticamente estable, consi dérese la hipérbola $x_2 = 2/(x_1 - \sqrt{2})$ en el plano $x_1 - x_2$. Ahora, en la hipérbola, \dot{x}_2/\dot{x}_1 está dado por

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \Big|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} = \frac{-2(x_1 + x_2)}{-6x_1 + 2x_2(1 + x_1^2)^2} \Big|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} = -\frac{1}{2x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 1}, \quad (2.30)$$

mientras que la pendiente de la hipérbola está dada por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2}{(x_1 - \sqrt{2})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}x_1^2 - \sqrt{2}x_1 + 1}. \quad (2.31)$$

Ahora, para $x_1 > \sqrt{2}$, se sigue de (2.30) y (2.31) que

$$2x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 1 > \frac{1}{2}x_1^2 - \sqrt{2}x_1 + 1,$$

y por lo tanto,

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \Big|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} > \frac{dx_2}{dx_1}, \quad (2.32)$$

para $x_1 > \sqrt{2}$. Además, note que para $x_1 > \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \Big|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} &= -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + \frac{4}{x_1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{4 + 6\sqrt{2}x_1 + 2x_1^2 + 4x_1^4}{(1 + x_1^2)^2(x_1 - \sqrt{2})} \\ &> 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ya que en la hipérbola $\dot{x}_1 > 0$ para $x_1 > \sqrt{2}$, de esto se sigue que las trayectorias de (2.27) y (2.28) no pueden cortar la rama de la hipérbola que se encuentra en el primer cuadrante en el plano $x_1 - x_2$, y en la dirección hacia los ejes $x_1 - x_2$ (ver Figura 2.4). Por tanto, dado que las trayectorias que comienzan a la derecha de la hipérbola no pueden llegar al origen, se deduce que la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (2.27) y (2.28) no es globalmente asintóticamente estable.

△

La condición de radial no acotada (2.24) asegura que las superficies de energía constante $V(x) = \alpha$, $\alpha > 0$, son hipersuperficies y, por lo tanto, dado que las trayectorias del sistema se mueven desde una superficie de energía a una superficie de energía interna, las trayectorias del sistema no pueden alejarse del equilibrio del sistema.

Ejemplo 2.7. Considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (2.34)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (2.35)$$

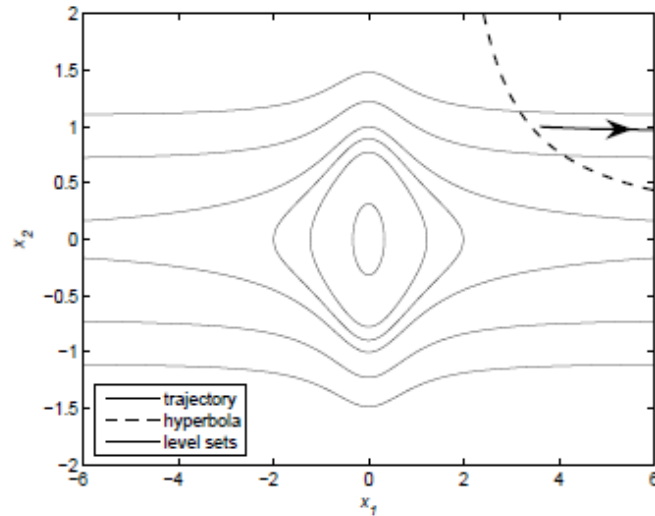


Figura 2.4: Conjuntos de niveles y una trayectoria no acotada para el ejemplo 2.2

Para examinar la estabilidad de este sistema, considere la función candidata de Lyapunov $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$, que es definida positiva y no acotado radialmente en \mathbb{R}^2 . Ahora, la derivada de Lyapunov está dada por

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2^3\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^4 < 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad (2.36)$$

lo que implica que la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (2.34) y (2.35) es globalmente asintóticamente estable.

△

Capítulo 3

Teoremas de estabilidad de conjuntos invariantes

En esta sección, presentamos el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para relajar una de las condiciones en la función de Lyapunov $V(\cdot)$ en los teoremas dados en el capítulo 2. En particular, la condición de definida negativa estricta en el derivado de Lyapunov se puede relajar al tiempo que garantiza la estabilidad asintótica del sistema. Específicamente, si se puede construir una función continuamente diferenciable definida en un conjunto invariante compacto con respecto al sistema dinámico no lineal (1.23) cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es semidefinida negativa y ninguna trayectoria del sistema puede permanecer indefinidamente en los puntos donde la derivada de la función desaparece, entonces el punto de equilibrio del sistema es asintóticamente estable. Este resultado se deriva del principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para sistemas dinámicos no lineales, que ahora enunciaremos y probamos.

Teorema 3.1. (Teorema de Barbashin-Krasovskii-LaSalle). *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23), suponga que $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$ es un conjunto invariante positivo compacto con respecto a (1.23), y se supone que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D}_c \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_c$. Sea $\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathcal{D}_c: V'(x)f(x) = 0\}$ y sea \mathcal{M} el conjunto invariante más grande contenido en \mathcal{R} . Si $x(0) \in \mathcal{D}_c$, entonces $x(t) \rightarrow \mathcal{M}$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración: Sea $x(t)$, $t \geq 0$, una solución para (1.23) con $x(0) \in \mathcal{D}_c$. Dado que $V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_c$, se sigue que

$$V(x(t)) - v(x(\tau)) = \int_{\tau}^t V'(x(s))dx \leq 0, \quad t \geq \tau,$$

y por tanto, $V(x(t)) \leq V(x(\tau))$, $t \geq \tau$, lo cual implica que $V(x(t))$ es una función no creciente de t . A continuación, dado que $V(\cdot)$ es continua en el conjunto compacto \mathcal{D}_c , entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $V(x) \geq \beta$, $x \in \mathcal{D}_c$. Por tanto, $\gamma_{x_0} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$ existe. Ahora, para todo $p \in \omega(x_0)$ existe una sucesión creciente no acotada $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $t_0 = 0$, tal que $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dado que $V(x)$, $x \in \mathcal{D}_c$, es continua, $V(p) = V(\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = \gamma_{x_0}$, y por tanto, $V(x) = \gamma_{x_0}$ en $\omega(x_0)$. Ahora, dado que \mathcal{D}_c es compacto y positivamente invariante se sigue que $x(t)$, $t \geq 0$, está acotado, y por tanto, se sigue del teorema 2.41 que

$\omega(x_0)$ es no vacío, conjunto invariante compacto. Entonces, se sigue que $V'(x)f(x) = 0$ en $\omega(x_0)$ y así $\omega(x_0) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{D}_c$. Finalmente, dado que $x(t) \rightarrow \omega(x_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, se sigue que $x(t) \rightarrow \mathcal{M}$ cuando $t \rightarrow \infty$. □

La construcción de $V(\cdot)$ en el teorema 3.1 puede usarse para garantizar la existencia del conjunto compacto positivamente invariante \mathcal{D}_c . Específicamente, si $\mathcal{D}_\beta = \{x \in \mathcal{D}: V(x) \leq \beta\}$, donde $\beta > 0$, está acotado y $\dot{V}(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_\beta$, entonces siempre podemos tomar $\mathcal{D}_c = \mathcal{D}_\beta$. Como se discutió en la sección 1.1, si $V(\cdot)$ está definida positiva, entonces \mathcal{D}_β está acotado para $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Por otro lado, si $V(\cdot)$ es radialmente no acotado, entonces \mathcal{D}_β está acotado para cada $\beta > 0$ independientemente de si $V(\cdot)$ es definida positiva o no.

Ejemplo 3.2. *El teorema del conjunto invariante Barbashin-Krasovskii-LaSalle puede ser usado para estudiar la estabilidad de los ciclos límites. Para ver esto, considere el sistema dinámico no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = 4x_1^2(t)x_2(t) - g_1(x_1(t))[x_1^2(t) + 2x_2(t) - 4], \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t) - g_2(x_2(t))[x_1^2(t) + 2x_2(t) - 4], \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (3.2)$$

donde $x_1g_1(x_1) > 0$, $x_1 \neq 0$, $x_2g_2(x_2) > 0$, $x_2 \neq 0$, $g_1(0) = 0$, y $g_2(0) = 0$. Ahora, note que el conjunto definido por la elipse $\mathcal{E} \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x_1^2 + 2x_2^2 - 4 = 0\}$ es invariante, dado que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x_1^2 + 2x_2^2 - 4] &= -2[2x_1(t)g_1(x_1(t)) + 4x_2(t)g_2(x_2(t))] \cdot [x_1^2(t) + 2x_2^2 - 4] \\ &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y luego, si $(x_1(0), x_2(0)) \in \mathcal{E}$, entonces $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$. El movimiento en \mathcal{E} se caracteriza por cualquiera de las ecuaciones

$$\dot{x}_1(t) = 4x_1^2(t)x_2(t), \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t), \quad (3.5)$$

lo que muestra que \mathcal{E} es un ciclo límite para (3.1) y (3.2) donde el vector de estado se mueve en el sentido de las manecillas del reloj.

Para examinar si este ciclo límite es atractivo, defina la función $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ representando a medida de la distancia al ciclo límite por $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 - 4)^2$ y note que $V(0, 0) = 16$. Luego, sea $\beta > 0$ y defina

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: V(x_1, x_2) \leq \beta\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: (x_1^2 + 2x_2^2 - 4)^2 \leq \beta\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2(x_1^2 + 2x_2^2 - 4)^2 \frac{d}{dt}(x_1^2 + 2x_2^2 - 4) \\ &= -2(x_1^2 + 2x_2^2 - 4)^2 [2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2)] \\ &\leq 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_c. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Entonces, definiendo $\mathcal{R} \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\}$ se sigue que el conjunto invariante más grande $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$ está dado por

$$\mathcal{D} = \{(0, 0)\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1^2 + 2x_2^2 - 4 = 0\}. \quad (3.8)$$

Por tanto, se sigue del teorema 3.1 que todas las trayectorias del sistema que comienzan en \mathcal{D}_c van al $(0, 0)$ o \mathcal{E} . Sin embargo, para $\beta < 16$, dado que $V(0, 0) = 16$ y $V(1, 0) = 0 < 16$, se sigue que $(0, 0) \notin \mathcal{D}_c$ y $(0, 0)$ corresponde a un máximo local de $V(x_1, x_2)$. Por tanto, $(0, 0)$ es inestable. Así, si $(x_1(0), x_2(0)) \in \mathcal{D}_c$, entonces $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow \mathcal{E}$ cuando $t \rightarrow \infty$, estableciendo que el ciclo límite caracterizado por \mathcal{E} es atractivo.

A continuación, usando el Teorema 3.1 proporcionamos una generalización del Teorema 2.1 para la estabilidad asintótica local de un sistema dinámico no lineal.

Corolario 3.3. *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23), asuma que $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$ es un conjunto invariante positivamente compacto con respecto a (1.9) tal que $0 \in \mathcal{D}_c$, y asuma que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D}_c \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, $x \neq 0$, y $V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_c$. Más aún, asuma que el conjunto $\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathcal{D}_c : V'(x)f(x) = 0\}$ no contiene ningún conjunto invariante más que el conjunto $\{0\}$. Entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (1.23) es asintóticamente estable y \mathcal{D}_c es un subconjunto del dominio de atracción de (1.23).*

Demostración: La estabilidad de Lyapunov de la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) se sigue del Teorema 2.1 ya que $V'(x)f(x) \leq 0$, $x \in \mathcal{D}_c$. Ahora, se sigue del Teorema 3.1 que si $x_0 \in \mathcal{D}_c$, entonces $w(x_0) \subseteq \mathcal{M}$, donde \mathcal{M} denota el conjunto invariante más grande contenido en \mathcal{R} , lo cual implica que $\mathcal{M} = \{0\}$. Por tanto, $x(t) \rightarrow \mathcal{M} = \{0\}$ cuando $t \rightarrow \infty$, estableciendo así la estabilidad asintótica de la solución $x(t) \equiv 0$ a (1.23). \square

Ejemplo 3.4. *Para ver la utilidad del Corolario 3.3, considere el sistema dinámico no lineal que describe la no ción de un péndulo simple dado en el ejemplo 2.3. Para examinar la estabilidad de este sistema considere la candidata a la función de Lyapunov de más energía natural dada por*

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(\theta)), \quad (1,54)$$

con derivada Lyapunov

$$\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = \ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\dot{\theta}\sin(\theta) = -\dot{\theta}^2 \leq 0, \quad (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (1,55)$$

estableciendo la estabilidad de Lyapunov de la solución cero $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \equiv (0, 0)$. Ahora, sea $\beta > 0$ tal que $\mathcal{D}_c \triangleq \{(\theta, \dot{\theta}) : V(\theta, \dot{\theta}) \leq \beta\}$ es compacto. Note que \mathcal{D}_c es positivamente invariante. Ahora, para mostrar la estabilidad asintótica para este sistema sea $\mathcal{R} \triangleq \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = 0\} = \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \dot{\theta} = 0\}$ y note que $\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) < 0$ en todas partes excepto en la línea $\dot{\theta} = 0$, donde $\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = 0$. Ahora, sea \mathcal{M} el conjunto invariante más grande contenido en \mathcal{R} y note que $(0, 0) \in \mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ dado que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio. Además, note que

para que el sistema garantice la condición $\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = 0$, la trayectoria del sistema debe estar sobre la recta $\dot{\theta} = 0$. Dado que $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ implica que $\ddot{\theta} \equiv 0$ lo cual, usando (1.23), implica además $\sin(\theta(t))$, se sigue que, para $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\mathcal{M} = \{(0, 0)\}$ es el conjunto invariante más grande contenido en \mathcal{R} , y por tanto, por el Corolario 3.3, $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, estableciendo la estabilidad asintótica local.

Ejemplo 3.5. El corolario 3.3 también se puede utilizar para caracterizar el dominio de atracción de un sistema dinámico no lineal. Para ver esto, considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1] - x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1], \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (3.10)$$

con candidato a función de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Ahora, la derivada de Lyapunov está dada por

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad (1.58)$$

lo cual es estrictamente negativa si $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$. Ahora, defina $\mathcal{D}_\beta \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 \leq \beta\}$, donde $\beta \in (0, 1)$, y note que $\mathcal{R} \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_\beta : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \{(0, 0)\} = \mathcal{M}$. Ahora, se sigue del Corolario 3.3 que la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (1.56) y (1.57) es localmente asintóticamente estable con \mathcal{D}_β siendo un subconjunto del dominio de atracción para cada $\beta \in (0, 1)$. Por tanto, $\mathcal{D}_c \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ está contenido en el dominio de atracción de (3.9) y (3.10).

En el Teorema 3.1 y el Corolario 3.3 asumimos explícitamente que existe un conjunto invariante compacto $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$ de (1.23). A continuación, proporcionamos un resultado que no requiere la suposición explícita de la existencia de un invariante compacto \mathcal{D}_c .

Teorema 3.6. Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) y suponga que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(0) = 0, \quad (3.11)$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0 \quad (3.12)$$

$$V'(x)f(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.13)$$

Sea $\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V'(x)f(x) = 0\}$ y sea \mathcal{M} el conjunto invariante más grande contenido en \mathcal{R} . Entonces todas las soluciones $x(t)$, $t \geq 0$, de (1.23) que son acotadas tienden a \mathcal{M} cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la trayectoria $s(t, x)$, $t \geq 0$, de (1.23) está acotada. Ahora, con $\mathcal{D}_c = \overline{\mathcal{O}_x^+}$, se sigue del Teorema 3.1 que $s(t, x) \rightarrow \mathcal{M}$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

A continuación, presentamos el teorema del conjunto invariante global para garantizar la estabilidad asintótica global de un sistema dinámico no lineal.

Teorema 3.7. *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) y asumamos que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$V(0) = 0, \quad (3.14)$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0 \quad (3.15)$$

$$V'(x)f(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

Además, suponga que el conjunto $\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V'(x)f(x) = 0\}$ no contiene ningún conjunto invariante más que el conjunto $\{0\}$. Entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es globalmente asintóticamente estable.

Demostración: Como se cumple (3.14)-(3.16), del Teorema 2.1 se sigue que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es Lyapunov estable mientras que la condición de radialmente no acotada (3.17) implica que todas las soluciones de (1.23) son acotadas. Ahora, el Teorema 3.6 implica que $x(t) \rightarrow \mathcal{M}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, dado que \mathcal{R} no contiene ningún conjunto invariante más que el conjunto $\{0\}$, el conjunto \mathcal{M} es $\{0\}$, y por tanto, la estabilidad asintótica global es inmediata.

□

Los teoremas 3.1, 3.6 y 3.7 se conocen como teoremas de conjuntos invariantes. Dado que para la estabilidad asintótica local, $V(x)$ se define en un conjunto compacto positivamente invariante \mathcal{D}_c , \mathcal{D}_c proporciona una estimación del dominio de atracción para el sistema dinámico no lineal (1.23) que no tiene necesariamente la forma dada por (2.19). Finalmente, a diferencia del teorema de Lyapunov, el teorema del conjunto invariante de Barbashin-Krasovskii-LaSalle relaja la condición estricta de definición negativa sobre la derivada de Lyapunov $\dot{V}(x)$, $x \in \mathcal{D}_c$, para la estabilidad asintótica local y global.

Capítulo 4

Construcción de funciones de Lyapunov

Como se muestra en los capítulos 2 y 3, el requisito clave al aplicar el método directo de Lyapunov y el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para examinar la estabilidad de los sistemas no lineales es la construcción de una función de Lyapunov. Para ciertos sistemas, especialmente los que tienen interpretaciones de energía física, construir una función de Lyapunov del sistema puede ser sencillo. En otros casos, sin embargo, puede ser una tarea difícil. En esta sección, presentamos cuatro enfoques sistemáticos para construir funciones de Lyapunov; a saber, los métodos de *gradiente variable*, *de Krasovskii*, *de Zubov* y *de Energy-Casimir*.

El método del gradiente variable asume una cierta forma para el gradiente de una función de Lyapunov desconocida y luego, integrando el gradiente asumido, a menudo se puede llegar a una función de Lyapunov. Para ver esto, sea $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y sea $g(x) = (\frac{\partial V}{\partial x})^T$. Ahora la derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias de (1.23) viene dado por

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \\ &= g^T(x) f(x).\end{aligned}\tag{4.1}$$

A continuación, se construye $g(x)$ tal que $g(x)$ sea un gradiente para una función definida positiva y $\dot{V}(x) = g^T f(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}$, $X \neq 0$. Específicamente, se sigue de (4.1) que la

función $V(x)$ se puede calcular a partir de la integral de línea

$$V(x) = \int_0^x g^T(s) ds = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(s) ds_i. \quad (4.2)$$

Recuerde que la integral de línea de un vector gradiente $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es independiente de la trayectoria y, por lo tanto, la integración en (4.2) puede tomarse a lo largo de cualquier trayectoria que una el origen con $x \in \mathbb{R}^n$. Eligiendo una trayectoria formada por segmentos de línea paralelos a los ejes de coordenadas, (4.2) se convierte en

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1} g_1(s_1, 0, \dots, 0) ds_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, s_2, \dots, 0) ds_2 \\ &+ \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, s_n) ds_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Alternativamente, usando la transformación $s = \sigma x$, donde $\sigma \in [0, 1]$, (4.2) se puede reescribir como

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x) x d\sigma = \int_0^1 \sum_{i=1}^n g_i(\sigma x) x_i d\sigma. \quad (4.4)$$

El siguiente resultado muestra que $g(x)$ es un gradiente de una función real valuada $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si y solo si la matriz jacobiana $\partial g / \partial x$ es simétrica.

Proposición 4.1. *La función $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el vector gradiente de una función escalar $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si y solo si*

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Demostración: Si $g^T(x) = \frac{\partial V}{\partial x}$, entonces $g_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i}$. Ya que $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$, la necesidad es inmediata. Para mostrar suficiencia, suponga $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$ y defina $V(x)$ como la integral de línea

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x) x d\sigma = \int_0^1 \sum_{j=1}^n g_j(\sigma x) x_j d\sigma \quad (4.6)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\sigma x) x_j \sigma d\sigma + \int_0^1 g_i(\sigma x) d\sigma \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\sigma x) x_j \sigma d\sigma + \int_0^1 g_i(\sigma x) d\sigma \\ &= \int_0^1 \frac{d(\sigma g_i(\sigma x))}{d\sigma} \\ &= g_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.7)$$

lo cual implica que $g^T(x) = \frac{\partial V}{\partial x}$. \square

Tomando $g(x)$ tal que $g^T(x)f(x) < 0$, $0 \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$, se sigue, por la Proposición 4.1, que $V(x)$ puede calcularse a través de la integral de línea

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x) x d\sigma = \int_0^1 \sum_{j=1}^n g_j(\sigma x) x_j d\sigma. \quad (4.8)$$

Una vez que tengamos a $V(x)$, $x \in \mathcal{D}$, es importante comprobar si $V(\cdot)$ es definida positiva.

Ejemplo 4.2. Considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (4.9)$$

$$\dot{x}_2(t) = -[x_1(t) + x_2(t)] - \sin(x_1(t) + x_2(t)), \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (4.10)$$

Para construir una función de Lyapunov para (4.9) y (4.10) sea $g(x) = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2]^T$, y sea $a_{12} = a_{21} = \beta$ de modo que se cumple el requisito de simetría (4.5). Ahora,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= g^T(x)f(x) \\ &= (a_{11}x_1 + \beta x_2)x_2 - (\beta x_1 + a_{22}x_2)[(x_1 + x_2) + \sin(x_1 + x_2)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tomando $a_{11} = 2\beta$, $a_{22} = \beta$, y $\beta > 0$ se sigue que

$$\dot{V}(x) = -\beta x_1^2 - \beta(x_1 + x_2) \sin(x_1 + x_2) < 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \quad (4.12)$$

donde $\mathcal{D} \triangleq \{(x_1, x_2) : |x_1 + x_2| < \pi\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^1 [g_1(\sigma x_1, \sigma x_2)x_1 + g_2(\sigma x_1, \sigma x_2)x_2] d\sigma \\ &= \int_0^1 \beta [2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2] \sigma d\sigma \\ &= \beta x_1^2 + \beta x_1x_2 + \frac{1}{2}\beta x_2^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Note que $V(0, 0) = 0$ y $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\beta x_1^2 + \frac{1}{2}\beta(x_1 + x_2)^2 > 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, y por tanto, $V(x)$, $x \in \mathcal{D}$, es una función de Lyapunov para (4.9) y (4.10).

A continuación, presentamos el método de Krasovskii para construir una función de Lyapunov para un sistema no lineal dado. Primero, sin embargo, se necesita la siguiente proposición.

Proposición 4.3. Sean $f, g \in: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuamente diferenciables tales que $f(0) = 0$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$g^T f(x) = g^T(x) \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x. \quad (4.14)$$

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y note que del teorema del valor medio se sigue que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} g^T(p)f(x) &= g^T(p)[f(x) - f(0)] \\ &= g^T(p) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x)x \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$g^T(p)f(p) = g^T(p) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x)x \right]. \quad (4.15)$$

Ahora, dado que p es arbitrario, el resultado se sigue. \square

Teorema 4.4. Teorema 1.6 (Teorema de Krasovskii). Sea $x(t) \equiv 0$ un punto de equilibrio para el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \quad (4.16)$$

donde $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable y \mathcal{D} es un conjunto abierto con $0 \in \mathcal{D}$. Suponga que existen matrices definidas positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right]^T P + P \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right] \leq -R, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0. \quad (4.17)$$

Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (4.16) es un único equilibrio asintóticamente estable con la función de Lyapunov $V(x) = f^T(x)Pf(x)$. Si, además, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ de (4.16) es un único equilibrio globalmente asintóticamente estable.

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x_e \in \mathcal{D}$ tal que $x_e \neq 0$ y $f(x_e) = 0$. En este caso, de la Proposición 4.3 se sigue que para todo $x_e \in \mathcal{D}$ existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $x_e^T Pf(x_e) = x_e^T P \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)x_e$. Por tanto,

$$x_e^T \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x_e) \right]^T P + P \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x_e) \right] \right\} x_e = 0, \quad (1.83)$$

lo cual contradice (4.17). Por tanto, no existe $x_e \in \mathcal{D}$, $x_e \neq 0$, tal que $f(x_e) = 0$. A continuación, note que $V(x) = f^T(x)Pf(x) \geq \lambda_{\min}(P)\|f(x)\|_2^2 \geq 0$, $x \in \mathcal{D}$, lo cual implica que $V(x) = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ o, equivalentemente, $V(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por tanto, $V(x) = f^T Pf(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$. A continuación, calculamos la derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias de (4.16) y usando (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= V'(x)f(x) \\ &= 2f^T(x)P \frac{\partial f(x)}{\partial x} f(x) \\ &= f^T(x) \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right]^T P + P \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right] \right\} f(x) \\ &\leq -f^T(x)Rf(x) \\ &\leq -\lambda_{\min}(R)\|f(x)\|_2^2 \\ &\leq 0, \quad x \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ahora, dado que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, se sigue que $\dot{V}(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$, lo cual prueba que la solución cero $X(t) \equiv 0$ a (1.81) es un único punto de equilibrio asintóticamente estable con función de Lyapunov $V(x) = f^T(x)Pf(x)$.

Finalmente, en el caso donde $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ solo necesitamos mostrar que $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$. Note que de la Proposición 4.3 se sigue que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y algún $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} x^T Pf(x) &= x^T P \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x \\ &= \frac{1}{2} x^T \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right]^T P + P \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right] \right\} x \\ &\leq -\frac{1}{2} x^T R x \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(R) \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{4.19}$$

lo cual implica que

$$\frac{|x^T Pf(x)|}{\|x\|_2^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(R), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0. \tag{4.20}$$

Por tanto, dado que $|x^T Pf(x)| \leq \lambda_{\max}(P) \|x\| \|f(x)\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, se sigue de (4.20) que $\|f(x)\| \geq \frac{\lambda_{\min}(R)}{2\lambda_{\max}(P)} \|x\|$, lo cual implica que $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$. El resultado ahora es inmediato repitiendo los pasos de la primera parte de la prueba. \square .

Ejemplo 4.5. Considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0 \tag{4.21}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_2^3(t), \quad x_2(0) = x_{20}. \tag{4.22}$$

Note que $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio de (1.87) y (1.88). A continuación, calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

se puede demostrar fácilmente que (4.17) se cumple con $P = I_2$ y $R = I_2$ por lo que se cumplen todas las condiciones del teorema 4.4. Por lo tanto, la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (4.21) y (4.22) es globalmente asintóticamente estable con la función de Lyapunov $V(x) = f^T(x)Pf(x) = f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2$.

A continuación, presentamos el método de Zubov's para construir funciones de Lyapunov para sistemas no lineales. A diferencia del método de gradiente variable y el método de Krasovskii's, el método de Zubov's además caracteriza un dominio de atracción para un sistema no lineal dado.

Teorema 4.6. (Zubov's Theorem). *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) con $f(0) = 0$. Sea $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ acotado y supongamos que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y una función continua $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0$, $h(0) = 0$, y*

$$0 < V(x) < 1, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0, \quad (4.24)$$

$$V(x) \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \partial\mathcal{D}, \quad (4.25)$$

$$h(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad (4.26)$$

$$V'(x)f(x) = -h(x)[1 - V(x)]. \quad (4.27)$$

Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es asintóticamente estable con dominio de atracción \mathcal{D} .

Demostración: De (4.24), (4.25) y (4.26) se sigue que en una vecindad $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ del origen $V(x) > 0$ y $V(x) < 0$, $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Por lo tanto, el origen es localmente asintóticamente estable. Ahora, para mostrar que \mathcal{D} es el dominio de atracción, necesitamos demostrar que $x(0) \in \mathcal{D}$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $x(0) \notin \mathcal{D}$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea $x(0) \in \mathcal{D}$. Entonces, por (4.24), $V(x(0)) < 1$. A continuación, sea $\beta > 0$ tal que $V(x(0)) \leq 0 < 1$ y defina $\mathcal{D} \triangleq \{x \in \mathcal{D}: V(x) \leq \beta\}$. Note que $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{D}$ y \mathcal{D}_β está acotado ya que $\lim_{x \rightarrow \partial\mathcal{D}} V(x) = 1$ y $\beta < 1$. Además, dado que $\dot{V}(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}_\beta$, se sigue que \mathcal{D}_β es un conjunto positivamente invariante. Ahora, usando (4.24) se sigue que $\dot{V}(x) = 0$, $x \in \mathcal{D}$, implica que $h(x) = 0$, $x \in \mathcal{D}$, lo que además implica $x = 0$. Por tanto, se sigue del Teorema 3.1 que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

A continuación, sea $x(0) \notin \mathcal{D}$ y supongamos que, por reducción *al absurdo*, que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso, $x(t) \rightarrow \mathcal{D}$ para algún $t \geq 0$. Luego, existen tiempos finitos t_1 y t_2 tales que $x(t_1) \in \partial\mathcal{D}$ y $x(t) \in \mathcal{D}$ para todo $t \in (t_1, t_2]$. A continuación, defina $W(x) \triangleq 1 - V(x)$ y note que $\dot{W} = h(x)W(x)$ o, equivalentemente,

$$\int_{W_0}^{W(x(t))} \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^t h(x(s))ds, \quad (4.28)$$

donde $W_0 \triangleq W(x(t_0))$. Integrando (4.28) y reordenando términos se obtiene

$$1 - V(x(t_0)) = [1 - V(x(t_1))]e^{-\int_{t_0}^{t_1} h(x(s))ds}.$$

Ahora, tomando $t = t_2$, dejando $t_0 \rightarrow t_1$, y usando (1.91) se sigue que $\lim_{t_0 \rightarrow t_1} [1 - V(x(t_0))] = 0$ y $\lim_{t_0 \rightarrow t_1} [1 - V(x(t_2))]e^{-\int_{t_0}^{t_2} h(x(s))ds} > 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto para $x(0) \notin \mathcal{D}$, $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. □

Note que en el caso donde \mathcal{D} no está acotado o $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, (4.25) se convierte en $V(x) \rightarrow 1$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$. En este último caso, las condiciones del Teorema 4.6, con (1.91) reemplazado por $V(x) \rightarrow 1$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, garantiza que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (4.25) es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 4.7. *Considere el sistema dinámico no lineal de segundo orden dado por*

$$\dot{x}_1(t) = -f_1(x_1(t)) + f_2(x_2(t)), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_2(t) = -f_3(x_1(t)), \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.30)$$

donde $f_i(0) = 0$, $\sigma f_i(\sigma) > 0$, $\sigma \in (-a_i, b_i)$, para $i = 1, 2, 3$, $a_1 = a_3$, $b_1 = b_3$, y $\int_0^y f_i(s)ds \rightarrow \infty$ cuando $y \rightarrow -a_i$ o $y \rightarrow b_i$, para $i = 2, 3$. A continuación, sea $h(x) = f_1(x_1)f_3(x_1)$ y sea $V(x)$ de la forma $V(x) = 1 - V_1(x_1)V_2(x_2)$, donde $V_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $V_i(0) = 1$, $i = 1, 2$. Ahora, se sigue de (4.27) que

$$[V_1'(x_1) + f_3(x_1)V_1(x_1)]V_2(x_2)f_1(x_1) + [V_2'(x_2)V_1(x_1)f_3(x_1) - V_1'(x_1)V_2(x_2)f_2(x_1)] = 0, \quad (4.31)$$

que se puede satisfacer estableciendo $V_1'(x_1) = -f_3(x_1)V_1(x_1)$ y $V_2'(x_2) = -f_2(x_2)V_2(x_2)$. Entonces, 4.27 se cumple con

$$V(x) = 1 - e^{-[\int_0^{x_1} f_3(s)ds + \int_0^{x_2} f_2(s)ds]}. \quad (4.32)$$

Note que (4.32) satisface $V(0) = 0$, (4.24), y (4.25) para todo $x \in \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2: -a_i < x_i < b_i\}$, $i = 1, 2$. Además, se puede demostrar fácilmente que $\dot{V}(x) = -f_1(x_1)f_3(x_1)[1 - V(x)] \leq 0$, lo cual prueba la estabilidad de Lyapunov de (4.29) y (4.30). Para mostrar la estabilidad asintótica, tenga en cuenta que $\dot{V}(x) = 0$ implica que $f_1(x_1)f_3(x_1) = 0$, lo cual implica además $x_1 = 0$. Además, $x_1(t) \equiv 0$ implica que $f_2(x_2(t)) \equiv 0$, lo cual implica además $x_2(t) \equiv 0$. Por tanto, con $\mathcal{D}_c = \bar{\mathcal{D}}$, se sigue del Teorema 3.1 que la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (4.29) y (4.30) es asintóticamente estable con dominio de atracción $\bar{\mathcal{D}}$.

Finalmente, presentamos el método de energía-Casimir para construir funciones de Lyapunov para sistemas dinámicos no lineales. Este método explota la existencia de *invariantes dinámicos*, o *integrales de movimiento*, llamadas *funciones de Casimir* del sistema dinámico no lineal (1.23). En particular, una función $C: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una integral de movimiento de (1.23) si se conserva a lo largo del flujo de (1.23), es decir, $C'(x)f(x) = 0$. Para el enunciado de nuestro siguiente resultado, sea $r \geq 2$ y sea $C_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$, ser funciones de Casimir dos veces continuamente diferenciables. Además, defina

$$E(x) \triangleq \sum_{i=1}^r \mu_i C_i(x), \quad (4.33)$$

para $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$.

Teorema 4.8. (Teorema de Energía-Casimir): Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) donde $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz continua en \mathcal{D} . Sea $x_e \in \mathcal{D}$ un punto de equilibrio de (1.23) y sean $C_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$, funciones de Casimir de (1.23). Supongamos que los vectores $C_i'(x_e)$, $i = 2, \dots, r$, son linealmente independientes, y suponga que existen $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r]^T \in \mathbb{R}^r$ tales que $\mu_1 \neq 0$, $E'(x_e) = 0$, y $x^T E''(x_e)x > 0$, $x \in \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M} \triangleq \{x \in \mathcal{D}: C_i'(x_e)x = 0, i = 2, \dots, r\}$. Entonces, existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$E''(x_e) + \alpha \sum_{i=2}^r \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right) > 0. \quad (4.34)$$

Además, la solución de equilibrio $x(t) \equiv x_e$ de (1.23) es Lyapunov estable con función de Lyapunov

$$V(x) = E(x) - E(x_e) + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=2}^r [C_i(x) - c_i(x_e)]^2. \quad (1,102) \quad (4.35)$$

Demostración: Note que

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) \quad (4.36)$$

$$= E'(x)f(x) + \alpha \sum_{i=2}^r [C_i(x) - C_i(x_e)]C_i'(x)f(x) \quad (4.37)$$

$$= \sum_{i=1}^r \mu_i C_i'(x)f(x) + \alpha \sum_{i=2}^r [C_i(x) - C_i(x_e)]C_i'(x)f(x) \quad (4.38)$$

$$= 0, \quad x \in \mathcal{D}. \quad (4.39)$$

Ahora, solo hay que demostrar que $V(x_e) = 0$ y $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq x_e$. Claramente, $V(x_e) = 0$. Además,

$$V'(x) = E'(x) + \alpha \sum_{i=2}^r [C_i(x) - C_i(x_e)]C_i'(x), \quad (4.40)$$

y por tanto, $V'(x_e) = 0$.

Ahora, note que

$$V''(x) = E''(x) + \alpha \sum_{i=2}^r \{[C_i'(x)]^T C_i'(x) + [C_i(x) - C_i(x_e)]C_i''(x)\}, \quad (4.41)$$

y por tanto,

$$V''(x_e) = E''(x_e) + \alpha \sum_{i=2}^r \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right). \quad (4.42)$$

Ahora, para mostrar la existencia de α que satisfice la ecuación (4.34), nótese que dado que $C_i(x_e)x = 0$, $i = 2, \dots, r$, $x \in \mathcal{M}$, se sigue que existe una matrix invertible $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $[0, I_{r-1}]Sx = 0$, $x \in \mathcal{M}$, y $[I_{n-(r-1)}, 0]Sx = 0$, $x \in \mathcal{M}^c$. Por lo tanto, para $x_e \in \mathcal{D}$,

$$E''(x_e) = S^T \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{12}^T & E_2 \end{bmatrix} S \quad (4.43)$$

y

$$\sum_{i=2}^r \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right) = S^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} S, \quad (4.44)$$

donde $E_1 \in \mathbb{R}^{(n-r+1) \times (n-r+1)}$, $E_{12} \in \mathbb{R}^{(n-r+1) \times (r-1)}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$, y $N \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$ son simétricas, y E_1 y N son definidas positivas. A continuación, sustituyendo (4.43) y (4.44) en (4.42) se obtiene

$$V''(x_e) = S^T \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{12}^T & E_2 + \alpha N \end{bmatrix} S \triangleq S^T Q S. \quad (4.45)$$

Ahora, escogiendo $\alpha \geq 0$ tal que $Q > 0$, (4.34) está probado, y por lo tanto, $V''(x_e) > 0$. Dado que $V(\cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable, se sigue que $V(x)$, $x \in \mathcal{D}$, está definida positiva en la vecindad de x_e . \square

Está claro del Teorema 4.8 que la existencia de funciones de energía-Casimir para (1.23) puede usarse para construir funciones de Lyapunov para (1.23). En particular, supongamos que podemos construir una función $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\dot{H}(x) = 0$ a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico no lineal (1.23). Si C_1, \dots, C_r son funciones de Casimir para (1.23), entonces

$$\frac{d}{dt}[H + E(C_1, \dots, C_r)](x(t)) \equiv 0$$

para cada función $E: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto, incluso si H no es definida positiva en el equilibrio $x_e \in \mathcal{D}$, la función $V(x) = H(x) + E(C_1(x), \dots, C_r(x))$ puede ser definida positiva en $x_e \in \mathcal{D}$ eligiendo apropiadamente E para que $V(x)$ sea una función de Lyapunov para (1.23).

Ejemplo 4.9. Considere el sistema dinámico no lineal que representa una nave espacial rígida dada por (1.19)–(1.21) en el Ejemplo 1.9. Para demostrar que la solución de equilibrio $x(t) \equiv x_e$, donde $x_e = [0, 0, x_{3e}]^T$, a (1.19)–(1.21) es Lyapunov estable, note que

$$C_1(x) = \frac{1}{2}(I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2), \quad (1,111)$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}(I_1^2 x_1^2 + I_2^2 x_2^2 + I_3^2 x_3^2), \quad (1,112)$$

son funciones de Casimir para (1.19)–(1.21). Ahora, tomando $E(x) = \mu_1 C_1(x) + \mu_2 C_2(x)$ se sigue que $E'(x_e) = 0$ y $x^T E''(x_e)x > 0$, $x \in \mathcal{M}$, $x \neq 0$, están satisfechas con $\mu_1 = -I_3$ y $\mu_2 = 1$. A continuación, usando

$$V(x_1, x_2, x_3) = E(x_1, x_2, x_3) - E(0, 0, x_{3e}) + \frac{\alpha}{2}[C_2(x_1, x_2, x_3) - C_2(0, 0, x_{3e})]^2, \quad (1,113)$$

se sigue que Q en (1.109) está dado por

$$Q = \begin{bmatrix} I_1(I_1 - I_3) & 0 & 0 \\ 0 & I_2(I_2 - I_3) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha I_3^4 x_{3e}^2 \end{bmatrix}. \quad (1,114)$$

Note que $Q > 0$ para cada $\alpha > 0$. Por tanto, se sigue del Teorema 1.8 que la solución de equilibrio $x(t) \equiv x_e$ a (1.19)–(1.21) es Lyapunov estable con función de Lyapunov (1.113).

Capítulo 5

Teoremas de Lyapunov inversos

En los capítulos anteriores se asume la existencia de una función de Lyapunov mientras se deducen las propiedades de estabilidad de un sistema dinámico no lineal. Esto plantea la cuestión de si siempre existe o no una función de Lyapunov para un sistema dinámico no lineal estable y asintóticamente estable de Lyapunov. Varios resultados relacionados con la existencia de funciones de Lyapunov continuamente diferenciables para Lyapunov estables y sistemas no lineales asintóticamente estables que varían en el tiempo conocidos como *teoremas de Lyapunov inversos* abordan este problema. Sin embargo, a diferencia de los teoremas inversos para sistemas variables en el tiempo donde se asegura la existencia de una función de Lyapunov continuamente diferenciable para un sistema estable de Lyapunov, en el caso invariable en el tiempo, la estabilidad de Lyapunov en general no implica la existencia de una función de Lyapunov independiente del tiempo continuamente diferenciable o incluso continua. Sin embargo, la existencia de una función de Lyapunov semicontinua inferior para un sistema estable de Lyapunov está garantizada. Sin embargo, como se muestra a continuación, siempre existe una función de Lyapunov independiente del tiempo continuamente diferenciable para sistemas dinámicos no lineales asintóticamente estables e invariantes en el tiempo.

Teorema 5.1. *Supongamos que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es asintóticamente estable, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable, y sea $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}$ está contenido en el dominio de atracción de (1.23). Entonces existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{B}_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$, $x \neq 0$, y $V'(x)f(x) < 0$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$, $x \neq 0$.*

Demostración: Dado que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es, por hipótesis, asintóticamente estable se sigue que existen funciones de clase \mathcal{K} y \mathcal{L} $\alpha(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$, respectivamente, tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces $\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|)\beta(t)$, $t \geq 0$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Luego, sea $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$ y sea $s(t, x)$ la solución de (1.23) con la condición inicial $x(0) = x$ así que para todo $\|x\| \leq \delta$, $\|s(t, x)\| \leq \alpha(\|x_0\|)\beta(t)$, $t \geq 0$. Además, note que $s(t, x) = x + \int_0^t f(s(\tau, x))d\tau$, lo cual implica que

$$\frac{\partial s(t, x)}{\partial x} = I + \int_0^t f'(s(\tau, x)) \frac{\partial s(\tau, x)}{\partial x} d\tau. \quad (1,115) \quad (5.1)$$

Por tanto,

$$\left\| \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} \right\| \leq 1 + \int_0^t \lambda \left\| \frac{\partial s(\tau, x)}{\partial x} \right\| d\tau, \quad (5.2)$$

donde $\lambda \triangleq \max_{x \in \mathcal{B}_\delta(0)} \|f'(x)\|$. Además, se sigue del Lema de Gronwall (ver Lema 1.22) que $\left\| \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} \right\| \leq e^{\lambda t}$. Ahora, se sigue del Lema 1.24 que existe una función infinitamente diferenciable $\gamma(\cdot)$ tal que $\gamma(\cdot)$ y $\gamma'(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K} , $\int_0^\infty \gamma(\alpha(\delta)\beta(t))dt < \infty$, y $\int_0^\infty \gamma'(\alpha(\delta)\beta(t))e^{\lambda t}dt < \infty$. Dado que $\|s(t, x)\| \leq \alpha(\|x\|)\beta(t) \leq \alpha(\delta)\beta(t)$, $t \geq 0$, se sigue que la función

$$V(x) = \int_0^\infty \gamma(\|s(t, x)\|)dt, \quad (1,117) \quad (5.3)$$

está bien definida en $\mathcal{B}_\delta(0)$. Además, note que $V(0) = 0$.

Luego, dado que $f(\cdot)$ en (1.23) es uniformemente Lipschitz continua en $\mathcal{B}_\delta(0)$ se sigue de la proposición 1.13 que

$$V(x) = \int_0^\infty \gamma(\|s(t, x)\|)dt \geq \int_0^\infty \gamma(\|x\|e^{-Lt})dt,$$

donde L denota la constante Lipschitz de $f(\cdot)$ en $\mathcal{B}_\delta(0)$, lo cual implica que $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}_0$, $x \neq 0$. Ahora, note que dado $\|s(t, x)\| = \sqrt{s^T(t, x)s(t, x)}$,

$$V'(x) = \int_0^\infty \gamma'(\|s(t, x)\|) \frac{s^T(t, x)}{\|s(t, x)\|} \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} dt, \quad (5.4)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \|V'(x)\| &\leq \int_0^\infty \gamma'(\|s(t, x)\|) \left\| \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} \right\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \gamma'(\alpha(\delta)\beta(t))e^{\lambda t} dt \\ &\infty, \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0), \end{aligned} \quad (5.5)$$

lo cual prueba que $V'(\cdot)$ está acotado. Ahora, (5.4) implica que $V'(\cdot)$ es continua, y por tanto, $V(\cdot)$ es continuamente diferenciable.

Finalmente, note que dado que $f(\cdot)$ es Lipschitz continua en \mathcal{D} la trayectoria $s(t, x)$, $t \geq 0$, es única, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(s(t, x)) &= \int_0^\infty \gamma(\|s(\tau, s(t, x))\|)d\tau \\ &= \int_0^\infty \gamma(\|s(\tau + t, x)\|)d\tau \\ &= \int_t^\infty \gamma(\|s(t, x)\|)d\tau, \end{aligned} \quad (5.6)$$

lo cual implica que $\dot{V}(s(t, x)) = -\gamma(\|s(t, x)\|) < 0$, $s(t, x) \neq 0$. El resultado es ahora inmediato al notar que $V'(x)f(x) = \dot{V}(s(0, x)) = -\gamma(\|x\|) < 0$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$, $x \neq 0$. \square

El siguiente resultado da un teorema de Lyapunov inverso para la estabilidad exponencial.

Teorema 5.2. *Supongamos que la solución $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es exponencialmente estable, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable, y sea $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}$ está contenido en el dominio de atracción de (1.23). Entonces, para cada $p > 1$, existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y escalares α, β y $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\alpha\|x\|^p \leq V(x) \leq \beta\|x\|^p, \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0), \quad (5.7)$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0). \quad (5.8)$$

Demostración: Dado que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es, por hipótesis, exponencialmente estable se sigue que existen escalares positivos α_1 y β_1 tal que si $\|x_0\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| \leq \alpha_1\|x_0\|e^{-\beta_1 t}$, $t \geq 0$. Luego, sea $x \in \mathcal{B}_\beta(0)$ y sea $s(t, x)$, $t \geq 0$, denota la solución a (1.23) con la condición inicial $x(0) = x$ así que para todo $\|x\| < \delta$, $\|s(t, x)\| \leq \alpha_1\|x\|e^{-\beta_1 t}$, $t \geq 0$. Ahora, procediendo análogamente al teorema 5.1 se sigue que para $\alpha(\delta) = \alpha_1$, $\beta(t) = e^{-\beta_1 t}$, $\gamma(\sigma) = \sigma^p$, y $(p-1)\beta_1 > \lambda$, donde $\lambda = \max_{x \in \mathcal{B}_\delta(0)} \|f'(x)\|$,

$$\int_0^\infty \alpha_1^p e^{-\beta_1 p t} dt < \infty \quad (5.9)$$

y

$$\int_0^\infty p\alpha_1^{p-1} e^{-\beta_1(p-1)t} e^{\lambda t} dt < \infty \quad (1,124) \quad (5.10)$$

Por tanto,

$$V(x) = \int_0^\infty \|s(t, x)\|^p dt \quad (5.11)$$

es una función candidata de Lyapunov continuamente diferenciable para (1.23).

Para demostrar que (5.7) se cumple, observe que

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^\infty \|s(t, x)\|^p dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha_1^p \|x\|^p e^{-\beta_1 p t} dt \\ &= \frac{\alpha_1^p}{p\beta_1} \|x\|^p \quad x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

lo cual prueba el cota superior en (5.7). Ahora, dado que $\|f'(x)\| \leq \lambda$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0)$, y $f(\cdot)$ es Lipschitz uniformemente continua en $\mathcal{B}_\delta(0)$ con constante de Lipschitz $L = \lambda$ se sigue que

$$\|f(s(t, x))\| \leq \lambda\|s(t, x)\| \leq \lambda\alpha_1\|x\|e^{-\beta_1 t} \leq \lambda\alpha_1\|x\|, \quad t \geq 0. \quad (5.13)$$

Por tanto,

$$s(t, x) = x + \int_0^t f(s(\tau, x)) d\tau \quad (5.14)$$

implica

$$\begin{aligned} \|s(t, x)\| &\geq \|x\| - \|x\|\lambda\alpha_1 t \\ &\geq \frac{\|x\|}{2}, \quad t \in [0, \frac{1}{2\lambda\alpha_1}]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Así, se sigue de (5.11) que

$$V(x) \geq \int_0^{\frac{1}{2\lambda\alpha_1}} \frac{\|x\|^p}{2p} dt = \frac{1}{2^{p+1}\lambda\alpha_1} \|x\|^p, \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0), \quad (5.16)$$

lo cual prueba la cota inferior en (5.7).

Finalmente, para mostrar (5.8) tenga en cuenta que con $\gamma(\sigma) = \sigma^p$ se sigue como en la prueba del teorema anterior que $\dot{V}(x) = -\gamma(\|x\|) = -\|x\|^p$. Ahora, el resultado es inmediato de (5.7) notando que

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^p \leq -\frac{1}{\beta} V(x), \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0), \quad (1,130) \quad (5.17)$$

lo cual prueba (5.8). \square

A continuación, presentamos un corolario del Teorema 5.2 que muestra que p en el Teorema 5.2 puede tomarse igual a 2 sin pérdida de generalidad.

Corolario 5.3. *Supongamos que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es exponencialmente estable, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable, y sea $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}$ está contenido en el dominio de atracción de (1.23). Entonces existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y escalares α, β , y $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\alpha\|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0), \quad (5.18)$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \quad x \in \mathcal{B}_\delta(0). \quad (5.19)$$

Demostración: La demostración es una consecuencia directa del Teorema 5.2 con $p = 2$. \square

Finalmente, presentamos un teorema inverso para la estabilidad exponencial global.

Teorema 5.4. *Si la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es globalmente exponencialmente estable, y $f: \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz, entonces existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y escalares α, β , y $\varepsilon > 0$, tal que*

$$\alpha\|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.20)$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.21)$$

Demostración: Por la proposición 1.12 $f(\cdot)$ es globalmente Lipschitz si y sólo si $\|f'(x)\| \leq \lambda$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora, la prueba es idéntica a la prueba del 5.2 reemplazando $\mathcal{B}_\delta(0)$ por \mathbb{R}^n y $p = 2$

□

Finalmente, es importante notar que aunque asumimos que el campo vectorial f es continuamente diferenciable para establecer los teoremas de Lyapunov inversos para la estabilidad asintótica, estos resultados también son válidos para campos vectoriales que son localmente Lipschitz continuos así como continuos. En particular, Massera [12] demostró un teorema inverso que involucra la existencia de una función de Lyapunov uniforme (es decir, infinitamente diferenciable) para campos vectoriales localmente continuos de Lipschitz. Además, Kurzweil demostró la existencia de una función suave de Lyapunov para la estabilidad asintótica bajo el supuesto de que f solo es continua.

Capítulo 6

Teoremas de inestabilidad de Lyapunov

En los capítulos anteriores establecimos condiciones suficientes para Lyapunov y la estabilidad asintótica de sistemas dinámicos no lineales. En esta sección, proporcionamos tres teoremas de inestabilidad clave basados en el método directo de Lyapunov para demostrar que la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es inestable. La principal utilidad de estos teoremas de inestabilidad es cuando el método indirecto de Lyapunov no proporciona ninguna información sobre la estabilidad de un sistema dinámico no lineal.

Teorema 6.1. (Primer teorema de inestabilidad de Lyapunov). *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23). Supongamos que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y un escalar $\varepsilon > 0$ tal que*

$$V(0) = 0, \quad (6.1)$$

$$V'(x)f(x) > 0, \quad x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0), \quad x \neq 0. \quad (6.2)$$

Además, supongamos que para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\|x_0\| < \delta$ y $V(x_0) > 0$. Entonces, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es inestable.

Demostración: Supongamos, *por reducción al absurdo*, que existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$, entonces $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Por hipótesis, existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tal que $V(x_0) = c > 0$ y $\|x_0\| < \delta$. En este caso, se sigue de (6.2) que $V'(x(t))f(x(t)) \geq 0$, $t \geq 0$, y por tanto, $V(x(t)) \geq c > 0$, $t \geq 0$. Así, en la trayectoria, $V'(x(t))f(x(t)) > 0$, $t \geq 0$, donde $x(t)$, $t \geq 0$, denota la solución de (1.23) con la condición inicial x_0 . Ahora, considere el conjunto $\mathcal{S} \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(t), t \geq 0\}$ y note que $\overline{\mathcal{S}}$ es compacto. Dado que $V'(x(t))f(x(t)) > 0$, $t \geq 0$, se sigue que existe $d = \min_{y \in \overline{\mathcal{S}}} V'(y)f(y) > 0$. Luego, dado que $V(\cdot)$ es continua en $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ se sigue que existe $\alpha > 0$ tal que $V(x) \leq \alpha$, $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0) \cap \mathcal{S}$. Entonces, se sigue que

$$\alpha \geq V(x(t)) = V(x(t_1)) + \int_{t_1}^t V'(x(s))f(x(s))ds \geq c + (t - t_1)d, \quad t \geq t_1. \quad (6.3)$$

Como el lado derecho de (6.3) no está acotado, se sigue que existe $t \geq t_1$ tal que $\alpha < c + (t - t_1)d$, lo cual contradice a (6.3). Por tanto, no existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$, entonces $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Así, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (6.3) es inestable.

□

Es interesante notar que la función $V(\cdot)$ en el Teorema 6.1 puede ser tanto positiva como negativa en \mathcal{D} . Sin embargo, $V(\cdot)$ se requiere que sea positiva para algunos puntos $x_0 \neq 0$ arbitrariamente cerca del origen del sistema dinámico no lineal. Una versión más restrictiva del Teorema 6.1 es el caso donde $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida positiva para todo $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. En este caso, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (6.3) es *completamente inestable* en el sentido de que existe $\varepsilon > 0$ tal que cada trayectoria que comienza en $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$, que no sea la trayectoria trivial, eventualmente deja $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Observaciones similares valen para el siguiente teorema de inestabilidad.

Ejemplo 6.2. *Considere el sistema dinámico no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^6(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (6.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2^3(t) + x_1^6(t), \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (6.5)$$

Para examinar la estabilidad de este sistema considere la función $V(x_1, x_2) = -\frac{1}{6}x_1^6 + \frac{1}{4}x_2^4$. Note que en la línea $x_1 = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$ en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Evaluando $\dot{V}(x_1, x_2)$ obtenemos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^5 \dot{x}_1 + x_2^3 \dot{x}_2 = x_1^6 + x_2^6 - x_1^5 x_2^6 + x_2^3 x_1^6. \quad (1,140) \quad (6.6)$$

Ahora, existe una vecindad \mathcal{N} del origen y $\delta \in (0, 1)$ tal que $|-x_1^5 x_2^6 + x_2^3 x_1^6| \leq \delta(x_1^6 + x_2^6)$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}$, lo cual implica que $\dot{V}(x_1, x_2) \geq (1 - \delta)(x_1^6 + x_2^6) > 0$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}$. Entonces, se sigue del Teorema 6.1 que la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (6.4) y (6.5) es inestable.

Teorema 6.3. (Segundo teorema de inestabilidad de Lyapunov). *Considere el sistema dinámico no lineal (1.23). Supongamos que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, una función $W: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, y escalares $\varepsilon, \lambda > 0$, tal que*

$$V(0) = 0, \quad (6.7)$$

$$W(x) \geq 0, \quad x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0), \quad (6.8)$$

$$V'(x)f(x) = \lambda V(x) + W(x). \quad (6.9)$$

Además, suponga que para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\|x_0\| < \delta$ y $V(x_0) > 0$. Entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es inestable.

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo, que existe un $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$, entonces $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Por hipótesis, existe $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$ tal que $V(x_0) > 0$. Se sigue de (6.8) y (6.9) que

$$V'(x)f(x) \geq \lambda V(x), \quad x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0),$$

o, equivalentemente,

$$V'(x)f(x) - \lambda V(x) \geq 0, \quad x \in \mathcal{B}_\varepsilon(0). \quad (1,144) \quad (6.10)$$

Luego, formando $e^{-\lambda t}$ (6.10), $t \geq 0$, obtenemos

$$e^{-\lambda t} V'(x(t))f(x(t)) - \lambda e^{-\lambda t} V(x(t)) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (6.11)$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt}[e^{-\lambda t} V(x(t))] \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (6.12)$$

donde $x(t)$, $t \geq 0$, denota la solución a (1.23) con condición inicial x_0 . Integrando a ambos lados de (6.12) se tiene que $e^{-\lambda t} V(x(t)) - V(x(0)) \geq 0$, $t \geq 0$, y por tanto, $V(x(t)) \geq e^{-\lambda t} V(x(0))$, $t \geq 0$. Así, dado que $V(x_0) > 0$, $x(t) \notin \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción. Por tanto, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es inestable dado que no existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$, entonces $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. □

Ejemplo 6.4. Considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + x_1(t)x_2^2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (6.13)$$

$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t), \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (6.14)$$

Para examinar la estabilidad de este sistema considere la función $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Note que en la línea $x_2 = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$ en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Calculando $\dot{V}(x_1, x_2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1^2x_2^2 \\ &= 2V(x_1, x_2) + 4x_1^2x_2^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ahora, con $W(x_1, x_2) \triangleq 4x_1^2x_2^2 \geq 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se sigue que las condiciones del teorema 6.3 están establecidas, y por tanto, la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (??) y (??) es inestable.

El teorema de inestabilidad final se debe a Chetaev [3] y se conoce apropiadamente como el teorema de inestabilidad de Chetaev.

Teorema 6.5. (Teorema de inestabilidad de Chetaev). Considere el sistema dinámico no lineal (1.23) y suponga que existe una función continuamente diferenciable $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, un escalar $\varepsilon > 0$, y un conjunto abierto $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ tal que

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{Q}, \quad (6.16)$$

$$\sup_{x \in \mathcal{Q}} V(x) < \infty, \quad (6.17)$$

$$0 \in \partial\mathcal{Q}, \quad (6.18)$$

$$V(x) = 0, \quad x \in \partial\mathcal{Q} \cap \mathcal{B}_\varepsilon(0), \quad (6.19)$$

$$V'(x)f(x) > 0, \quad x \in \mathcal{Q}. \quad (6.20)$$

Entonces la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es inestable.

Demostración: Sea $x_0 \in Q$ y supongamos, por reducción al absurdo, que existe un conjunto cerrado \mathcal{P} tal que $x(t) \in \mathcal{P} \subset Q \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Entonces, se sigue de (6.20) que

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \\ &= V(x(0)) + \int_0^t V'(x(s))f(x(s)) ds \\ &\geq V(x(0)) + \alpha t, \end{aligned}$$

donde $\alpha = \min_{x \in \mathcal{P}} V'(x)f(x) > 0$, lo cual implica que $V(x(t)) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, contradiciendo (6.17). Así, existe $T > 0$ tal que o bien $x(T) \in \partial Q$ o $x(t) \rightarrow \partial Q$ cuando $t \rightarrow \infty$. Primero, considere el caso en el cual $x(T) \in \partial Q$. En este caso, dado que (6.20) implica que $V(x(t))$, $t \geq 0$, es estrictamente creciente para todo $x(t) \in Q$ se sigue que $V(x(T)) > 0$. Entonces, dado que $V(x) = 0$, $x \in \partial Q \cap \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, se sigue que $x(T) \notin \partial Q \cap \overline{\mathcal{B}_\varepsilon(0)}$, lo cual implica que $x(T) \in \partial Q \setminus \overline{\mathcal{B}_\varepsilon(0)}$. A continuación, dado que $\partial Q = \overline{Q} \cap \partial Q$ y $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{B}_\varepsilon(0)}$ se sigue que $\partial Q \setminus \mathcal{B}_\varepsilon(0) = (\overline{Q} \cap \partial Q) \setminus \mathcal{B}_\varepsilon(0) \subseteq (\overline{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \cap \partial Q) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(0) = \partial Q \cap \partial \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Por tanto, $x(T) \in \partial \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Similarmente, si $x(t) \rightarrow \partial Q$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $x(t) \rightarrow \partial \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Así, no existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$, entonces $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Por tanto, la solución cero $x(t) \equiv 0$ a (1.23) es inestable. \square

A diferencia de los teoremas 6.1 y 6.3 que requieren que $V(\cdot)$ y $\dot{V}(\cdot)$ satisfagan ciertas condiciones en todos los puntos en una vecindad de \mathcal{D} , el teorema de inestabilidad de Chetaev requiere que $V(\cdot)$ y $\dot{V}(\cdot)$ satisfagan ciertas condiciones en una subregión Q de \mathcal{D} .

Ejemplo 6.6. Considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{x}_1(t) = x_1^3(t) + x_2(t)x_1^2(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \quad (6.21)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1^2(t), \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (6.22)$$

Para examinar la estabilidad de este sistema considere la función $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$ y el conjunto abierto $Q \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0) : x_1 > x_2 > -x_1\}$. Note que $V(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in Q$, y $V(x_1, x_2) = 0$, $x \in \partial Q \cap \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, donde $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ es una vecindad del origen suficientemente pequeña. A continuación, evaluando $\dot{V}(x_1, x_2)$ obtenemos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 - x_2\dot{x}_2 = x_1^4 - x_2(x_1^2 - x_1^3) + x_2^2. \quad (6.23)$$

Ahora, existe una vecindad \mathcal{N} del origen y $\delta \in [0, 1)$ tal que

$$\dot{V}(x_1, x_2) \geq x_1^4 - (1 + \delta)|x_2|x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{N} \quad (6.24)$$

lo cual muestra que $\dot{V}(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in Q \cap \mathcal{N}$. Por tanto, se sigue del teorema 6.5 que la solución cero $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ a (6.21) y (6.22) es inestable.

Bibliografía

- [1] E. A. Barbashin and N. N. Krasovskii, *On the Stability of Motion in the Large*, Dokl. Akad. Nauk., vol. 86, pp. 453-456, 1952.
- [2] Birkhoff, G.D., *Dynamical Systems*, New edn, 1966, Am. Math. Soc., Providence, 1927. (MR.0209095)
- [3] N. G. Chetaev, *The Stability of Motion*. New York: Pergamon Press, 1961.
- [4] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1988.
- [5] N. N. Krasovskii, *Problems of the Theory of Stability of Motion*. Stanford, CA: Stanford University Press, 1959.
- [6] J. P. LaSalle, *Some Extensions of Liapunov's Second Method*, IRE Trans. Circ. Theory, vol. CT-7, pp. 520-527, 1960.
- [7] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*. New York: Academic Press, 1961.
- [8] Lyapunov, A.M., *Stability of Motion*, Academic Press, London, 1966. (MR.0208093)
- [9] A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*. Kharkov, Russia: Kharkov Mathematical Society, 1892.
- [10] A. M. Lyapunov, *Probleme Generale de la Stabilité du Mouvement*, in Annales de la Faculté Sciences de l'Université de Toulouse (É. Davaux, ed.), vol. 9, pp. 203-474. 1907. Reprinted by Princeton University Press, Princeton, NJ, 1949.
- [11] A. M. Lyapunov, *The General Problem of Stability of Motion* (A. T. Fuller, trans. and ed.). Washington, DC: Taylor and Francis, 1992.
- [12] J. L. Massera, *Contributions to Stability Theory*, Ann. Math., vol. 64, pp. 182-206, 1956.
- [13] Poincaré, H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899. (MR.0426906).
- [14] H. L. Royden, *Real Analysis*. New York: Macmillan, 1988.

- [15] Wassim M. Haddad and VijaySekhar Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control*. PRINCETON UNIVERSITY PRESS, PRINCETON AND OXFORD, 2008.