UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

PROMOCIÓN DE ARGUMENTACIÓN POR PROFESORES MEDIANTE TAREAS MATEMÁTICAS

Autor

Jaime Humberto David Serna

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2023

Promoción de argumentación por profesores mediante tareas matemáticas

Jaime Humberto David Serna

Tesis de maestría presentada para optar al título de Magíster en Educación

Tutores

Sandra Milena Zapata, Doctor (PhD) en Educación

John Henry Durango Urrego, Doctor (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Maestría en Educación

Medellín, Antioquia, Colombia

2023

Cita	(David-Serna, 2023)
Referencia Estilo APA 7 (2020)	David-Serna, J. H. (2023). *Promoción de argumentación por profesores mediante tareas matemáticas* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Maestría en Educación, Cohorte VII.

Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (Edumath).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Centro de Documentación Educación

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes.

Decano/Director: Wilson Antonio Bolívar Buriticá.

Jefe departamento: Ruth Elena Quiroz Posada.

Dedicatoria

A *Dios*, porque esta investigación fue inspirada por él.

A mi madre, *Gloria Elena*, quien, durante este arduo camino investigativo, con una llamada en la noche me llenaba de motivación. Casi siempre terminaba con la frase "hágale mijo que Usted es capaz". Su vida y su amor por el prójimo siempre han sido un ejemplo para mí.

A mis hermanos mayores, *Diego* y *José*, quienes por diversas circunstancias no pudieron terminar la educación secundaria y se dedicaron a las labores del campo. A pesar de eso, siempre me motivaron a estudiar, y aquí voy en este camino profesional. Mis logros son también de ellos.

A mis demás familiares, quienes sintieron mis ausencias en diversos momentos, dado los tiempos que debía dedicarles a la maestría y al trabajo en el colegio.

A las personas que perdí durante el tiempo que duro este camino investigativo, en especial, a mi amigo *Uriel*, quien quiso partir de este mundo terrenal dejándome gratos recuerdos. Los de una niñez llenos de barro y rodeados de latas de malta que simulábamos como balones.

Por último, y no menos importante, dedico este trabajo a *Alejandra*, mi compañera de camino, quien en momentos de llanto me repetía "sé que lo vas a lograr" y me motivaba a seguir en el proceso.

Agradecimientos

A *Dios*, ese ser supremo que me dio la vida, que siempre estuvo ahí enseñándome que su tiempo es perfecto, que los momentos difíciles que atravesé en este proceso investigativo no eran más que momentos para aprender a amar, a ser humilde y a enfrentar la vida con valentía. Por ayudarme a encontrar una armonía entre lo que tenía que hacer y lo que quería hacer y ser. Igualmente, por manifestar su amor hacia a mí a través de personas, a las cuales les ofrezco mi gratitud.

A mi madre, *Gloria Elena*, quien fue mi motor en todo este proceso y desde la distancia oraba por mi salud y me animaba para que fuese capaz de cumplir con los compromisos en el colegio donde laboro y pudiese avanzar en la consolidación de la tesis, al igual que responder con las tareas solicitadas en los distintos seminarios de formación.

A mi amada *Alejandra*, quien me apoyó de diversas maneras en este trabajo, en especial, me motivo y me acogió en los momentos más críticos de este camino investigativo.

A los Doctores *Sandra Milena Zapata* y *John Henry Durango Urrego*, orientadores de esta tesis, y a quienes admiro profundamente por el profesionalismo y la calidad humana que sobresale en ellos. Siempre les agradeceré por el apoyo, por la paciencia que tuvieron conmigo.

Al Doctor *Horacio Solar Bezmalinovic*, de la Pontificia Universidad Católica de Chile; y al Doctor Rubén Darío Henao Ciro, de la Universidad de Antioquia, por darle el visto bueno al anteproyecto que gesto finalmente este trabajo de investigación.

A los profesores que hacen parte del Área de Matemáticas del colegio San Ignacio de Loyola (Medellín, Colombia). De manera especial, a los tres profesores quienes fungieron como participantes en esta investigación. Asimismo, a los encargados del área de comunicaciones del colegio, quienes realizaron las videograbaciones de las clases llevadas a cabo en el trabajo de campo. Y en general, a las directivas del colegio por permitir desarrollar esta investigación en ese contexto.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Para ello, se tuvieron en cuenta entrevistas, videograbaciones de clase y guías de trabajo utilizadas por tres profesores de distintos grados de escolaridad, en virtud de que la argumentación es transversal a estos. La ruta para poder alcanzar el objetivo propuesto, se enmarcó en un diseño fenomenológico de corte interpretativo. En el estudio se hizo uso de una interpretación del Modelo Teórico Integral de la Argumentación en Educación Matemática (MTIA), que teoriza la argumentación a partir de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas. Por otro lado, el proceso de análisis fue asistido por el software Atlas.ti 22, el cual facilitó la tarea de segmentar datos en unidades de análisis y de esta manera construir teoría. Finalmente, se presentan como principales resultados ocho subcategorías que describen la manera cómo profesores promueven argumentación mediante tareas matemáticas, a saber: *indagación de ideas previas*, *andamiaje del profesor*, *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad*, *alteración de contenido*, *especificación de condiciones*, *solicitud de mejores respuestas*, *uso de respuestas incorrectas* e *inclusión de afirmaciones falsas.*

Palabras clave: Argumentación, Promoción, Profesores de matemáticas, MTIA, Tarea matemática.

Abstract

This research aims to analyze how teachers promote argument through mathematical tasks. To do this, interviews, class video recordings and work guides used by three teachers of different degrees of schooling were taken into account, because the argument is transverse to these. The route to achieve the proposed objective was framed in a phenomenological design of an interpretive cut. In the study, an interpretation of the Integral Theoretical Model of Argumentation in Mathematics Education (MTIA), which theorizes the argument from dialectical, rhetorical and logical qualities. On the other hand, the analysis process was assisted by the Atlas.ti 22 software, which facilitated the task of segmenting data into units of analysis and thus building theory. Finally, eight subcategories are presented as main results that describe the way which teachers promote argumentation through mathematical tasks, namely: inquiry of previous ideas, teacher scaffolding, relationship between concepts and everyday situations, alteration of content, specification of conditions , request for better answers, use of incorrect answers and inclusion of false statements.

*Keywords***:** Argumentation, Promotion, Mathematics teachers, MTIA, Mathematical task.

Introducción

Este trabajo de investigación titulado: *promoción de argumentación por profesores mediante tareas matemáticas*, surge de una problemática que inicia con la importancia de la argumentación en la Educación Matemática y en general en la educación del siglo XXI. Luego, se plantean algunas dificultades, evidenciadas principalmente en la promoción de la argumentación por parte de profesores de matemáticas. Y finaliza con la relevancia de las tareas matemáticas como un medio para promover la argumentación en el aula. El trabajo se estructuró en cinco capítulos, a través de los cuales se da cuenta del proceso investigativo llevado a cabo. A continuación, se brinda una breve descripción de lo que trata cada capítulo.

El Capítulo 1 presenta el problema de investigación, el cual trae a colación algunos antecedentes teóricos e investigativos en relación con la argumentación, que ayudan a elucidar la pertinencia de este estudio. Igualmente se expone el planteamiento del problema que confluye en la pregunta ¿Cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas? Por último, y en concordancia con la pregunta, se propone el objetivo de analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas.

En el Capítulo 2 se propone el marco teórico usado en este estudio. Inicialmente, se brinda un acercamiento a la definición de actos comunicativos. Luego se explicita bajo qué definición de argumentación se concibe la investigación, debido a los diversos significados atribuidos a esta. Como referente principal se construye un modelo de acuerdo con una interpretación del Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática propuesto por Durango (2017a), en el cual se teoriza la argumentación a partir de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas. Finalmente, como las tareas matemáticas se conciben como un medio para promover la argumentación, se presentan algunas acepciones de estas.

El Capítulo 3 contempla la ruta que se estableció para ofrecer una posible respuesta a la pregunta de investigación. En ese sentido, se presenta el enfoque de investigación y el diseño metodológico. Este último, incluye una descripción del contexto en el cual se desarrolló el estudio, especifica características de los participantes, detalla técnicas e instrumentos utilizados en el trabajo de campo y describe las fases del análisis de los datos.

En el Capítulo 4 se reporta el análisis de los datos y los resultados de la investigación. Para ello, se describen las categorías y subcategorías establecidas luego de un proceso de codificación asistido por el software de análisis de datos cualitativos Atlas.ti 22. Esto permitió por medio de las unidades de análisis lograr una postura teórica que diera respuesta a la pregunta de investigación. Asimismo, se menciona la estrategia usada para presentar los datos y poder alcanzar el objetivo de analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan conclusiones en aras de atender a la pregunta de investigación y estimar el alcance del objetivo trazado. Se discuten los resultados obtenidos a la luz de lo que informa la literatura al respecto. También, se comunican algunas limitaciones que se presentaron en el desarrollo de la investigación. Por último, se precisan posibles líneas de investigación derivadas de este estudio.

Capítulo 1
Problema de investigación

En este capítulo se trata el problema de investigación. En primer lugar, se presentan algunos antecedentes teóricos que, si bien la mayoría se ocupan de la argumentación en otros ámbitos, traen consigo herramientas teóricas o metodológicas que permiten entender aspectos de la relación entre la argumentación en Educación Matemática, las tareas matemáticas y su promoción en el aula de clase. Asimismo, se destacan antecedentes investigativos acerca de la argumentación en Educación Matemáticas. En especial, se distinguen aquellos que, por su objeto de estudio, se aproximan al interés de este trabajo. En segundo lugar, se expone el planteamiento del problema a partir de la pertinencia de analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Finalmente, se formula la pregunta y el objetivo investigativo.

1.1. Algunos antecedentes teóricos e investigativos

Se hace preciso iniciar la presentación de antecedentes teóricos con el Modelo Argumentativo de Toulmin (2007), que se ha convertido en un referente seminal en investigaciones que tratan la argumentación (Valbuena-Duarte et al., 2022; Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez, 2022; Rasse y Solar, 2019; Estrella et al., 2017; Solar, 2016). En particular, en Educación Matemática su uso se remite comúnmente al análisis de los argumentos ofrecidos por los estudiantes cuando resuelven una tarea (Ríos-Cuesta, 2021). El modelo está constituido por algunos componentes que juegan un papel importante en la constitución de un argumento. Estos componentes se explicarán en el Apartado 2.3.3. debido a que se hará uso de este en la presente investigación. Es conveniente informar que este modelo se caracteriza por dimensionar cualidades lógicas, pero abandona cualidades dialécticas que incluyen argumentos dialógicos y monológicos.

Habermas (1999) define la argumentación como un habla intencional, en la que los participantes tematizan pretensiones de validez que se tornan dudosas y tratan de recusarlas o reafirmarlas por medio de argumentos. Van Eemeren (2019) propone la teoría de la argumentación con base en una perspectiva pragmadialéctica. Es decir, la argumentación puede estudiarse tanto a partir de una dimensión pragmática en cuanto actividad verbal como a partir de una dimensión dialéctica asociada al intercambio crítico que tiene como fin resolver una diferencia de opinión. Estudiar la argumentación a partir de una dimensión pragmática y dialéctica supone definir la argumentación como actos comunicativos e interactivos, cuyo objetivo es resolver una diferencia de opinión entre interlocutores a partir de proposiciones que el argumentador ofrece, de tal forma que el punto de vista expuesto sea aceptado por su interlocutor que actúa de manera racional y razonable.

A continuación, se presentan algunos antecedentes investigativos en el ámbito de la Educación Matemática. Goizueta (2015) se enfocó en responder: ¿cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en aulas de matemáticas? Este trabajo informó, entre otras conclusiones, que los estudiantes no son capaces de validar su producción matemática, es el profesor quien decide en función de sus conocimientos, acerca de la validez de las respuestas de los estudiantes, pese a que este desconoce, en algunos casos, la justificación y validación que pueden darse entre los estudiantes cuando trabajan en grupo.

Giraldo y Úsuga (2019) mostraron interés por la Educación Matemática Crítica en la formación de sujetos educativos críticos, que justifiquen y tomen decisiones después de una reflexión. Estos autores acuden al análisis de la argumentación dada por estudiantes de grado sexto cuando solucionan problemas y situaciones críticas. Con esta investigación se evidenció que los estudiantes no estaban acostumbrados a expresarse libremente, debido a que se sentían inhibidos para hacerlo; no obstante, se reconoció el discurso argumentativo y la evolución en sus argumentos.

Rasse y Solar (2019) se enfocaron en el análisis de episodios de argumentación en clase de matemática en educación primaria. Esta investigación tuvo como propósito que, a partir del modelo de formación del Mejoramiento de la Experiencia Docente, los profesores en ejercicio trataran problemáticas de gestión de la actividad en el aula para el desarrollo de la argumentación. De esta manera se evidenció que la planificación de la clase con miras a promover la argumentación es compleja, porque implica que los profesores consideren eventuales respuestas que puedan darle sus estudiantes, posibiliten espacios, presenten desafíos, confronten ideas y orienten la argumentación hacia la adquisición de contenidos con la finalidad de fomentar y facilitar el aprendizaje. En ese sentido, se concluye la necesidad de formar tanto a los futuros profesores como a los profesores en ejercicio, para que logren aportar al desarrollo de este tipo de actividades de argumentación en la formación matemática de sus estudiantes.

A pesar de los trabajos diversos sobre argumentación, en los que abundan los orientados hacia el análisis de las argumentaciones realizadas por estudiantes cuando se enfrentan a un problema matemático, y que en su mayoría utilizan el Modelo Argumentativo de Toulmin (2007), son escasos aquellos que se han preguntado por promoción de argumentación mediante tareas matemáticas. Las siguientes investigaciones son relevantes porque sus objetos de estudio se relacionan con el presente trabajo.

Ortiz y Carreño (2018) desarrollaron una investigación orientada al análisis de condiciones que permiten a profesores promover la argumentación en el aula, destacándose: la tarea matemática. Los autores se enfocaron en prácticas de seis profesores de matemáticas entre primero y octavo grado, para comprender la argumentación que se llevaba a cabo en las clases, entre profesores y estudiantes. El estudio concluye que solo algunos profesores promueven la argumentación en el aula, y quienes lo hacen, utilizan la pregunta como estrategia comunicativa que gestiona y promueve la opinión de los estudiantes.

En un estudio acerca de la promoción de la argumentación en Educación Matemática, Rumsey y Langrall (2016) identificaron cinco estrategias de instrucción para promover efectivamente el uso de la argumentación por parte de los estudiantes en el contexto de la exploración de las propiedades aritméticas. (1) proporcionar apoyos lingüísticos como herramienta para desarrollar la argumentación matemática. (2) discutir contenido rico y familiar ya que permite la entrada significativa a la argumentación. Los estudiantes pueden expresar lo que saben acerca de un contenido matemático con esta estrategia de instrucción. (3) especificar condiciones, de tal forma que los estudiantes reconozcan la necesidad de más información, asimismo de cuáles son las condiciones para poder realizar una afirmación en relación con una tarea. (4) introducir afirmaciones falsas, de modo que se explore el uso de contraejemplos y otras formas de determinar la validez de una afirmación. En este sentido, los estudiantes comenzaron a ir más allá de los ejemplos específicos en sus justificaciones. (5) manipular un contenido matemático familiar para que no lo sea, por ejemplo, aplicar la propiedad asociativa de la suma a la resta. Esta última estrategia crea un rico contexto para la argumentación. Así, se prepara a los estudiantes para enfrentar y explorar situaciones matemáticas desconocidas en el fututo. En síntesis, Rumsey y

Langrall (2016) informan que la enseñanza con énfasis en la argumentación es una herramienta poderosa que se puede integrar en diversas áreas de contenido matemático.

Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2021) en una investigación desarrollada con estudiantes de quinto grado 5° mediante la argumentación colectiva, destacan cuatro tipos de preguntas que el profesor utiliza con sus estudiantes para promover la construcción de argumentos. La primera, demanda una respuesta por parte de estos del tipo sí o no. La segunda, solicita una evaluación, es decir, anima a los estudiantes a evaluar los argumentos de sus compañeros, de modo que se refuten conclusiones o se validen. La tercera, tiene el objetivo de pedir una justificación en la que los estudiantes ofrecen garantías para validar afirmaciones. Y la cuarta, solicita un dibujo como respaldo. En esta los estudiantes usan un dibujo de un caso en particular para respaldar la garantía que justifica sus conclusiones. Por último, los investigadores insisten en que estos tipos de preguntas pueden ayudar a profesores para que se promueva la argumentación.

Zhuang y Conner (2022) ilustran en su estudio cómo dos profesores de matemáticas de secundaria utilizan respuestas incorrectas de estudiantes para apoyar su participación en la argumentación colectiva. Asimismo, dentro de sus hallazgos muestran que, cuando los estudiantes compartieron sus garantías inicialmente incorrectas, es decir, que no explicaban las razones de la afirmación propuesta, o incompletas en clase, los profesores obtuvieron acceso a los entendimientos de los estudiantes. En ese sentido, indagar acerca de las respuestas incorrectas de los estudiantes a través de una discusión colectiva puede promover el pensamiento matemático y la comprensión conceptual.

Pérez (2021) relaciona la promoción de argumentación con la gestión de tareas de modelación por parte de profesores. Esta investigación se centró en promover la argumentación y en gestionar las respuestas incorrectas ofrecidas por estudiantes en tareas de modelación matemática. Así, las tareas matemáticas se convierten en un recurso mediante el cual profesores de matemáticas promueven argumentación en el aula. Al respecto, Herbst (2012) trata un vasto número de significados atribuidos a la tarea matemática, por ejemplo, considera la tarea como una representación de la actividad matemática que se evidencia en el desarrollo, ya sea potencial o real, del trabajo en un problema auspiciado por un sujeto. Además, la tarea sirve como instrumento en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción. En este sentido, las alteraciones o modificaciones que el profesor inflige a las tareas obedecen en algunos casos a las necesidades de encontrar un entorno de trabajo adecuado en el que se pueda valorar las acciones de los estudiantes. Este referente se discute nuevamente en el Capítulo 2.

En Educación Matemática se destaca la investigación de Durango (2017a), quien propone un *Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática*, en adelante MTIA. En este no solo se consideran las cualidades lógicas basadas en la argumentación a dos columnas, afirmación-razón, sino que se trasciende a un modelo de argumentos a cuatro columnas, en el que se incluyen las cualidades dialécticas y las cualidades retóricas. Estas dos cualidades permiten entender la argumentación como una actividad social que da lugar a la refutación, al diálogo, a la persuasión y a la negociación de significados entre los sujetos que intervienen en el quehacer matemático. Cabe decir que dicho modelo concibe la argumentación como proceso, procedimiento y producto, dado los elementos que lo nutren. Este modelo será ampliado en el Apartado 2.3., ya que se usará en la investigación como referente teórico.

1.2. Planteamiento del problema

La Educación Matemática en Colombia como disciplina investigativa en formación gana cada vez fuerza. Por ejemplo, a partir de la creación de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) se han logrado comunicar a la comunidad académica diversas investigaciones referentes a su praxis, cuyos intereses se refieren a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, a la enseñanza y al aprendizaje de la aritmética, a la solución de problemas, a la didáctica del cálculo, a la enseñanza de la geometría, a la historia de la enseñanza de la matemática, a las competencias matemáticas, entre otros (Gómez, 2018).

El amplio interés investigativo en la Educación Matemática ha permitido comprender y transformar la enseñanza y el aprendizaje en contextos situados, así como, contribuir a la formación de ciudadanos que puedan participar activamente en la preparación, discusión y toma de decisiones para transformar la sociedad (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Esta idea se relaciona con una misión de la educación del siglo XXI: forjar en los estudiantes un pensamiento crítico que promueva ideas nuevas y puntos de vista diversos para dar solución a problemas sociales, políticos y económicos (Arriagada y Osorio, 2019; Alvis et al., 2019). En esa misma línea, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en Colombia cuando refiere a formar habilidades y destrezas en los estudiantes de diversos niveles educativos, con el fin de ser matemáticamente competentes (MEN, 2006) sugiere que en la clase de matemática el profesor y los estudiantes interactúen para construir y validar conocimiento, con la finalidad de que los actos comunicativos permitan deliberar sobre razones, conjeturas, juicios, ventajas o desventajas de las decisiones que se toman en situaciones y contextos diversos.

La Educación Matemática tiene la oportunidad y el desafío de transformar prácticas de enseñanza que recurren a la memorización de procedimientos por prácticas productivas que se enfocan en el pensamiento y en la acción, con la intención de que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas mediante la argumentación, comunicación, conexión y representación de sus conocimientos (Alsina, 2020). En particular, la argumentación cumple un rol fundamental en el desarrollo de competencias matemáticas, debido a que puede propiciar tanto el diálogo como el trabajo colaborativo en el aula que incide posteriormente en la comprensión de conceptos matemáticos (Aldana-Bermúdez, 2014).

La argumentación es valiosa y necesaria en el aula, dado que posibilita en los estudiantes de cualquier nivel educativo una visión que hace accesible el conocimiento matemático, y que los hace partícipes de su construcción (Rasse y Solar, 2019). Esto puede aportar al cambio de la concepción negativa, algunas veces evidenciada, que estos tienen de la matemática, pues les genera dificultad y exiguo interés (Gamboa y Moreira-Mora, 2017). Ahora bien, debido a que la argumentación permite que los estudiantes ocupen un papel protagónico en el aula a través de la externalización de sus ideas con el uso del lenguaje (Cervantes-Barraza et al., 2019), se puede facilitar una comunicación para que los profesores identifiquen errores que presentan los estudiantes, los cuales no son considerados en ocasiones por el uso de otro tipo de prácticas tradicionales (Rasse y Solar, 2019). Las afirmaciones precedentes suponen que la argumentación ocupa una función importante en la Educación Matemática, cuyo desarrollo, tanto en los currículos escolares como en su concreción en el aula, es prioritario para el logro de aprendizajes de contenidos matemáticos que se estudian (Chin y Brown, 2000).

En la realidad educativa de Colombia se puede evidenciar una dificultad en la argumentación matemática. Los resultados de las Pruebas Saber 11° de los años 2018 y 2020 en matemáticas, informan que la competencia de argumentación a nivel nacional presenta un mayor porcentaje en el promedio de respuestas incorrectas por parte de los estudiantes. En este sentido, el desempeño es más bajo que en las otras competencias evaluadas: interpretación y representación, formulación y ejecución. Este hecho se evidencia de manera específica en los resultados obtenidos por los estudiantes del Colegio San Ignacio de Loyola de Medellín (ICFES, 2018; ICFES, 2020). Ahora bien, la dificultad presentada en términos numéricos, hace reflexionar sobre las causas de este hecho. En particular, lleva a analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas.

Algunos estudios evidencian que profesores no planean sus clases con el fin de promover la argumentación en el aula (Valbuena et al., 2020). Al respecto, se afirma que ciertos profesores que intentan incluir la argumentación en sus clases no lo logran, ya que las estrategias que utilizan se limitan a un intercambio de información sin fundamentación matemática (Arriagada y Osorio, 2019); o eligen tareas cerradas que promueven principalmente el uso de un algoritmo estándar que dificulta la aparición de la argumentación (Solar y Deulofeu, 2016). Como resultado, se evidencia que algunos profesores no implementan actividades en sus clases que promuevan la argumentación, a pesar de que conocen su importancia en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática (Cervantes-Barraza et al., 2019).

Pese a las anteriores aseveraciones, es un desacierto afirmar que en el aula no acontece la argumentación, puesto que el conocimiento profesional del profesor, que adquiere un carácter social, dinámico, situado, contextualizado, práctico y parcialmente tácito (Climent, 2002), lo ubica en un nivel en el que promover la argumentación se hace, en algunas ocasiones, de manera implícita e inconsciente. En efecto, algunos profesores rara vez son capaces de externalizar y describir con detalles esos conocimientos usados de manera espontánea en su labor. En pocas palabras, se puede reconocer la existencia de la argumentación en el aula de clase.

Solar y Deulofeu (2016) evidencian que la argumentación en el aula de clase se puede promover mediante el uso de tareas matemáticas. Estos autores definen la tarea matemática como la actividad que se realiza en clase, y contiene preguntas que posibilitan darle la oportunidad a los estudiantes de que propongan procedimientos para dar respuesta a una situación planteada. Por su parte, Herbst (2012) la entiende como una representación de la actividad matemática, que tiene sentido en interacciones entre personas e instrumentos culturales, y hace uso de objetos y procedimientos matemáticos. Ambas definiciones se complementan y amplían el significado de tarea en Educación Matemática.

Una buena preparación previa de tareas por parte del profesor puede propiciar situaciones que posibiliten construir un conocimiento formal a partir del aporte individual de los estudiantes, de modo que se estimule el interés y participación en las clases (Valbuena et al., 2020). Así, las tareas matemáticas ofrecen oportunidades individuales de crecimiento cognitivo y emocional

(Herbst, 2012). Al mismo tiempo, que estas son relevantes para la argumentación oral o escrita que realiza el estudiante (Aldana-Bermúdez, 2014).

En resumen, la argumentación es importante para el logro de aprendizajes de los contenidos matemáticos en los estudiantes, a la vez que permite un trabajo colaborativo en el aula. De igual forma, posibilita la formación de ciudadanos con pensamiento crítico que orienten sus acciones en beneficio de una mejor sociedad. A pesar de que se informan algunas dificultades en la implementación de la argumentación en el aula de clase por parte de profesores de matemáticas, hay un interés en la Educación Matemática por su promoción. Estudios ya citados (Rumsey y Langrall, 2016; Ortiz y Carreño, 2018; Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez, 2021; Pérez, 2021; Zhuang y Conner, 2022) reportan avances en temas relacionados con la promoción de argumentación en la clase de matemática, sin embargo, hace falta ampliar el panorama al respecto. Es por ello que el presente estudio tiene como objeto de estudio: la promoción de la argumentación mediante tareas matemáticas por parte de profesores de matemáticas.

1.2.1. Pregunta de investigación

¿Cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas?

1.3. Objetivo investigativo

Analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se plantea el marco teórico que sustenta la investigación llevada a cabo. Primero, se da un acercamiento a la definición de actos comunicativos, en los que se incluyen preguntas y respuestas que son consideradas dentro del proceso argumentativo. Segundo, se mencionan autores que han trabajado la argumentación a partir de diferentes enfoques, para luego explicitar bajo qué definición de argumentación se permea este estudio, debido a los diversos significados atribuidos a esta. Tercero, de acuerdo con una interpretación del Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática (Anexo 1) propuesto por Durango (2017[a]), se teoriza la argumentación a partir de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas. Por último, se presentan algunas acepciones de las tareas matemáticas.

2.1. Actos comunicativos

En este estudio se hace necesario tener un acercamiento a los actos comunicativos, que abarcan los actos de habla estudiados por Austin (1962); entiéndase por acto de habla la unidad básica de comunicación lingüística que conlleva en sí la producción de un símbolo (Lozano, 2010). En ese orden de ideas, los actos comunicativos consideran no solo lo que se dice y se expresa con palabras, sino también el lenguaje no verbal, gestos, miradas, posturas, entonación, cualquier otro signo de comunicación; así como la influencia del contexto y de la estructura social (Oliver y Gatt, 2010). Estos se pueden clasificar en actos comunicativos dialógicos y de poder. Según Soler y Flecha (2010), un acto comunicativo dialógico se basa en la sinceridad y búsqueda del consenso, en el que predominen las interacciones dialógicas apoyadas en un diálogo con ausencia de coacciones; mientras que un acto comunicativo de poder está orientado hacia la consecución de una acción en la que predominan interacciones de poder surgidas de la propia intencionalidad del hablante.

En el aula de clase de matemática se pueden identificar algunos actos comunicativos que parten de la función del profesor, estos se evidencian en las afirmaciones, respuestas, invitaciones, explicaciones, órdenes, recomendaciones y sugerencias que este realiza. En especial, las preguntas que plantea el profesor se convierten en una estrategia fundamental para la interacción comunicativa (Forero-Sáenz, 2008). Ahora bien, se considera que los actos comunicativos dialógicos son más afines con la promoción de argumentación, en tanto que incitan al consenso y permiten que los estudiantes puedan expresarse en un plano de igualdad. Por ejemplo, en la discusión de una tarea matemática. En esa misma línea, Habermas (1999) afirma que estos actos comunicativos permiten "llegar a un acuerdo que sirva de base a una coordinación concertada de los planes de acción individuales" (p. 379). Es decir, en el contexto de este trabajo, que las argumentaciones dadas por los estudiantes y profesor se armonicen y se negocien para encontrar una solución compartida a la tarea matemática que sea objeto de discusión.

2.2. Aproximación a la argumentación.

Es complejo considerar una teoría única y universal de la argumentación, toda vez que esta posee diversas definiciones que dependen del ámbito desde el cual se estudie. Asimismo, obedece a algunas reglas de acuerdo con las perspectivas y los enfoques a las que se ve sometida en su análisis y evaluación. Por ejemplo, un enfoque pragmadialéctico la asocia con resolver una diferencia de opinión, mientras que un enfoque lógico la relaciona con la adquisición de bienes epistémicos como el conocimiento o la justificación (Gensollen, 2017). La literatura reporta que la argumentación se ha estudiado ampliamente en la filosofía, de ahí que diversos autores (Van Eemeren, 2019; Vega-Reñon, 2016; Bermejo, 2006; 2009; Toulmin, 2007; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2006; Habermas, 1999; Perelman, 1997) hayan centrado su interés en comprenderla y trabajarla, puesto que es un asunto que atañe a los seres humanos, para los cuales es indispensable la comunicación. En concordancia con lo anterior, la Educación Matemática también se ha interesado por la argumentación, especialmente, ha indagado por la argumentación que tiene lugar en el aula de clase de matemática, dada la importancia que tiene en la formación de los estudiantes.

Investigadores en Educación Matemática (Vargas et al., 2022; Solar et al., 2020; Cervantes-Barraza et al., 2019; Goizueta y Planas, 2013) se han acercado a diferentes posturas filosóficas que tratan la argumentación, de tal suerte que con sus interpretaciones han podido comprender y/o explicar la argumentación en el aula de clase de matemática, al igual que contribuir por medio de sus investigaciones en el desarrollo de la misma. También han surgido algunas propuestas (Conner et al., 2014; Yackel, 2002; Krummheuer, 1995; 2007) que abordan la argumentación atribuyéndole ciertos apelativos, verbigracia, la argumentación colectiva. Esta se entiende como "la instancia en la que estudiantes y profesor realizan una afirmación matemática y proporcionan evidencia para respaldarla" (Conner et al., 2014, p. 404). En ese sentido, la argumentación colectiva estará ligada a interacciones que ocurren en el aula, ya sea en el trabajo con pequeños grupos o en las distintas actividades que se realicen a lo largo de la clase, en relación con un contenido matemático (Krummheuer, 1995). Así, para Krummheuer (1995) esta noción de argumentación vincula aspectos sociológicos, pero también psicológicos del aprendizaje desde la perspectiva participacionista, que implica una actuación apropiada del profesor en la conexión argumentación-aprendizaje.

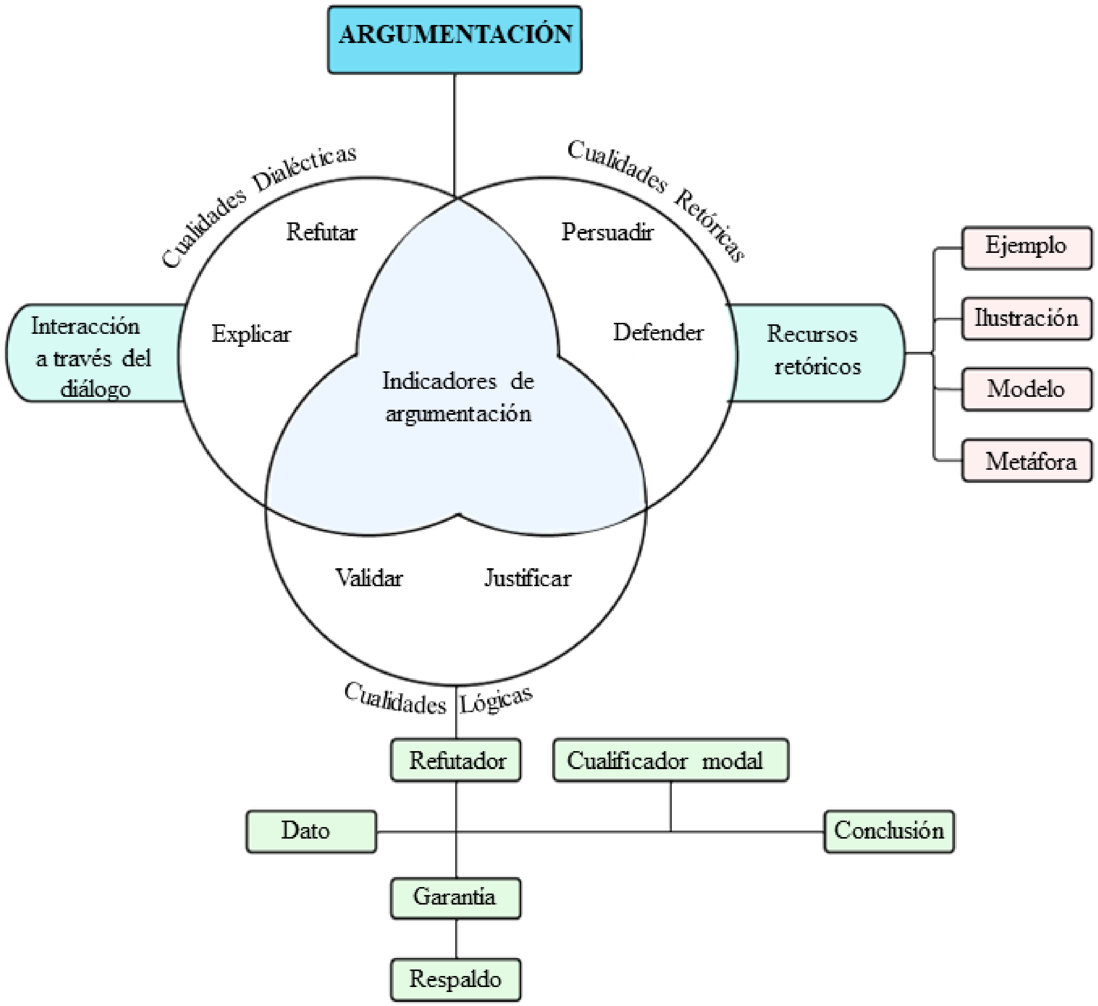
Es evidente que en el campo de la Educación Matemática coexisten diversas definiciones de argumentación, como las atribuidas a la ya mencionada "argumentación colectiva". Es por ello, que es necesario tomar postura e informar bajo qué definición de argumentación se permea este estudio. Así las cosas, en esta investigación la argumentación se define en términos de acciones comunicativas, cuya intención es validar, justificar, refutar, defender, explicar o persuadir puntos de vista o conocimientos acerca de conceptos matemáticos mediante el uso de preguntas y respuestas (Durango, 2017b). Aunado a ello, la argumentación se concibe a partir de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas. A continuación, se amplían estas designaciones a partir de una interpretación del MTIA propuesto por Durango (2017a).

2.3. Interpretación del Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática.

Esta investigación se erige en los elementos que nutren el MTIA, el cual fue propuesto para analizar e interpretar la argumentación de maestros en la práctica pedagógica de su formación inicial y en el contexto de la geometría. La Figura 1 presenta una interpretación del modelo, de tal manera que se pueda analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. El MTIA no es un modelo acabado, está abierto a considerar asuntos que quizá no se consideraron inicialmente, lo cual es normal debido a la naturaleza que comprende la argumentación. De ahí que, con la interpretación que se le da en este estudio puedan surgir aportes que amplíen el campo de acción y análisis de dicho modelo.

Figura 1

Interpretación del MTIA



Nota. La Figura muestra una interpretación del MTIA propuesto por Durango (2017a). Fuente: Elaboración propia (2022).

La Figura 1 informa acerca de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas de la argumentación. Habermas (1999) afirma que "según sea el aspecto bajo el que consideremos la argumentación, las estructuras que en ella descubrimos son distintas" (p. 48). En ese sentido, no es lo mismo analizar la argumentación a partir de sus cualidades dialécticas que a partir de sus cualidades retóricas o lógicas. Según Goizueta y Planas (2013), "la acepción adecuada se reconocerá según el contexto de uso" (p. 63). En esta investigación se opta por considerar que la argumentación que tiene lugar en el aula de clase de matemática, puede estudiarse a partir de cualidades dialécticas, retóricas o lógicas. Es menester informar que las tres cualidades en sinergia permiten ver a la argumentación de una manera integral, pese a la segmentación que se hace por cualidad. Por otra parte, es importante mencionar que, originalmente el MTIA considera seis intenciones de la argumentación de manera general, en la Figura 1, estas se especifican de acuerdo con las cualidades de la argumentación.

2.3.1. Cualidades Dialécticas

Las cualidades dialécticas incluyen argumentos dialógicos y monológicos e indicadores de argumentación. Se entiende por indicador de argumentación a la señal, frecuentemente presentada en forma de conector que une de manera argumentativa, afirmaciones o puntos de vista. Si bien, estos indicadores se mencionan en este apartado del discurso, también aplican para las cualidades retóricas y lógicas de la argumentación.

Las cualidades dialécticas favorecen la interacción entre sujetos a través del diálogo, de ahí que sea importante la actuación de los refutadores en conexión con los procedimientos al argumentar. Según Habermas (1999), la dialéctica se ocupa de los procedimientos pragmáticos de la argumentación. En ese sentido, implica la conversación que se genera a partir de una tesis, enunciado, hipótesis o proposiciones que sirven para resolver un problema. De acuerdo a la anterior descripción, las cualidades dialécticas tienen como intenciones argumentativas explicar y refutar. Se entiende por explicar, en el contexto de este trabajo, el ofrecer puntos de vista o realizar afirmaciones concernientes a una tarea propuesta, la cual es objeto de conversación. Asimismo, refutar sugiere la acción de oponerse a las ideas expuestas por un otro, de manera que se puedan aclarar puntos de vista o afirmaciones en relación con la solución a una tarea.

2.3.2. Cualidades Retóricas

Las cualidades retóricas se vinculan con procesos de persuasión utilizados por los sujetos cuando argumentan. Esto permite satisfacer las necesidades expresivas de los sujetos, en las que se ponen en juego sus creencias y conocimientos adquiridos. Las cualidades retóricas incluyen recursos como el ejemplo, la ilustración, el modelo y la metáfora. Grosso modo, cuando se usan ejemplos en una argumentación, se fundamenta una regla que implica reconocer la existencia de algunas regularidades de las que los ejemplos darán una concreción, de ahí la importancia de no usar aquellos que llevan a generalizaciones indebidas (Perelman, 1997). Por su parte, una ilustración en una argumentación tiene como función reforzar la adhesión a una regla conocida y admitida, en la que se presentan casos particulares que aclaran la proposición o el enunciado general (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). Estos casos particulares pueden presentarse también como modelos para imitar. Según Perelman (1997), se imita a quienes tienen autoridad debido a su competencia y a las funciones que desempeñan en la sociedad. Por último, se hace uso de la metáfora en una argumentación cuando hay “un acertado cambio de significación de una palabra o de una locución” (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006, p. 610).

Los anteriores recursos retóricos, dada la naturaleza de este estudio, adquieren concretamente unas definiciones acordes al objetivo propuesto. De esta manera, se entenderá el ejemplo como el uso de casos particulares en la argumentación, que permiten persuadir puntos de vista en relación con la tarea que se discute. La ilustración hace referencia al uso de una gráfica o dibujo con el fin de brindar claridades acerca de lo que se pretende afirmar en la argumentación. El modelo adquiere sentido al recurrir a un argumento que ha sido presentado de forma previa por un participante en la argumentación. Se concibe un argumento como “una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición” (Goizueta y Planas, 2013, p. 63). Y la metáfora refiere al uso de una comparación entre objetos de la vida cotidiana con objetos matemáticos involucrados en una tarea, con el fin de persuadir y/o defender puntos de vista en la argumentación. Así, se ha dilucidado que las intenciones argumentativas que confieren las cualidades retóricas son persuadir y defender. La primera es evidente por el uso de cualquiera de los recursos retóricos en la argumentación; la segunda implica ofrecer argumentos a favor de un punto de vista o afirmación en la argumentación que gira en torno a la solución de una tarea matemática.

2.3.3. Cualidades Lógicas

Las cualidades lógicas se vinculan con la validez y forma interna de los argumentos. El MTIA hereda estas cualidades del modelo argumentativo de Toulmin (2007). En este se propone una estructura argumentativa que no está solo limitada a reglas de inferencia lógica que parte de unos datos para llegar a una conclusión, sino que considera otros elementos. (1) Dato: es una evidencia que se presenta para fundar el argumento, se considera el punto de partida de la argumentación. (2) Garantía: es una regla general, un principio o una ley que otorga legitimidad a la conclusión a partir de los datos. (3) Respaldo: funciona como evidencia empírica o teórica para dar autoridad y vigencia a la garantía. (4) Cualificador modal: matiza la conclusión a partir de la certeza que el argumento le otorga. (5) Refutador: actúa en desacuerdo con la conclusión frente a un punto de vista o conocimiento expuesto. (6) Conclusión: es la proposición que se pretende justificar y de la que se quiere convencer. Asimismo, las cualidades lógicas tienen como intenciones argumentativas validar y justificar. Se entiende por validar, en este trabajo, el dar fuerza a afirmaciones o puntos de vista que surgen en torno a la solución de una tarea matemática, mientras que justificar refiere al uso de argumentos convincentes en la argumentación.

2.4. Tareas Matemáticas

En este estudio el foco principal está puesto en la promoción de argumentación, sin embargo, como ya se ha mencionado, el medio para darse tal promoción es mediante tareas matemáticas. Es por ello que se hace necesario indagar al respecto. Herbst (2012) considera que las tareas matemáticas sirven como instrumento en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción. En este sentido, las alteraciones o modificaciones que el profesor realiza a las tareas obedecen, en algunos casos, a las necesidades de encontrar un entorno de trabajo adecuado en el que se puedan valorar las acciones de los estudiantes (Herbst, 2012). Este autor, concibe la tarea matemática a partir de ciertos atributos que, para los fines de esta investigación, son pertinentes, pues amplían su campo conceptual. Así, con respecto a una tarea matemática se puede afirmar que:

- Es una representación de la actividad matemática que se refleja en el desarrollo, ya sea potencial o real, del trabajo en un problema auspiciado por un sujeto en particular. Además, se encarna en las interacciones entre personas e instrumentos culturales.
- Es el desarrollo temporal de un sistema de interacciones entre un agente cognoscente y un problema.
- Hace uso de objetos y procedimientos matemáticos.
- Puede alterar la labor de un profesor.
- Permite la negociación de cambios en el trabajo matemático.
- Se relaciona con hacer o decir algo en asociación con objetos matemáticos.

Como complemento se asumirá en esta investigación que las tareas, en ocasiones, parten de preguntas que posibilitan la generación de procedimientos por parte de los estudiantes para dar respuesta a una situación planteada (Solar y Deulofeu, 2016). En resumen, la sinergia de los elementos expuestos permitirá tratar y dar respuesta a la pregunta investigativa y cumplir con el objetivo propuesto.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se presenta el enfoque de investigación y diseño metodológico. Este último incluye una descripción del contexto en el cual se desarrolló la investigación, especifica características de los participantes, detalla las técnicas e instrumentos utilizados en el trabajo de campo y describe las fases del análisis de los datos. Así, se estableció una ruta para poder dar respuesta a la pregunta *¿Cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas?,* al igual que cumplir con el objetivo de investigación propuesto.

3.1. Enfoque

Dada la naturaleza de esta investigación fue pertinente usar un enfoque cualitativo. Según Creswell (2007), se elige este enfoque cuando, entre otros, el tema de investigación necesita ser explorado y se quiere tener una visión detallada de este, cuando se pretende estudiar a seres humanos en su ambiente natural y cuando se tienen los recursos para llevarse a cabo la investigación. En esta misma línea, Hernández et al. (2014) afirman que este enfoque permite "comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto" (p. 358). Estas consideraciones, además de cómo está redactada la pregunta de investigación, sustentan el enfoque utilizado.

3.2. Diseño

De los diseños que existen en investigación se consideró pertinente enmarcar este estudio bajo un diseño fenomenológico. Su propósito es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno (Hernández et al., 2014). Según Aguirre-García y Jaramillo-Echeverri (2012) este diseño de investigación contribuye de modo privilegiado al conocimiento de las realidades escolares, en particular, permite conocer vivencias de los actores en el proceso formativo. Ahora bien, es importante mencionar que de acuerdo a las variantes que puede adoptar un diseño fenomenológico, en esta investigación se comprende desde un enfoque hermenéutico. Este enfoque se concentra en la interpretación que hace el investigador de la experiencia humana (Hernández et al., 2014). En ese sentido, es fundamental que el investigador analice los discursos de los participantes en aras de encontrar posibles significados del fenómeno que es objeto de indagación.

En el caso de la presente investigación, la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas es el fenómeno por el cual se indaga, en el que los protagonistas son profesores de matemáticas del Colegio San Ignacio de Loyola. Se espera poder analizar dicho fenómeno con la influencia del investigador. En virtud de que, como se ha mencionado antes, la promoción de argumentación por parte de profesores en algunas ocasiones se hace de manera implícita e inconsciente, por tanto, no basta con lo que estos puedan expresar al respecto sino con lo que el investigador puede analizar externamente a través de la recolección de información. De esta manera se justifica el porqué del uso de un diseño fenomenológico de corte interpretativo, el cual permite tener un acercamiento a la pregunta de investigación. A continuación, se precisan aspectos que complementan y dan forma al diseño.

3.2.1 Contexto

La investigación se llevó a cabo en el Colegio San Ignacio de Loyola, Medellín, Colombia; lugar en el que labora el investigador. Es un colegio fundado hace más de un siglo por la Compañía de Jesús, una orden religiosa de la iglesia católica, cuyo principal representante fue el español Ignacio de Loyola. Este colegio es de carácter privado e inspirado en la espiritualidad ignaciana. Tiene dos sedes ubicadas en la comuna 11 Laureles-Estadio: sede infantil y sede de mayores. En esta última se realizó el estudio; cuenta con estudiantes desde el grado tercero (3°) hasta el undécimo grado (11°). Los grados están distribuidos en tres ciclos, así: de 3° a 5°, de 6° a 8° y de 9° a 11°, de acuerdo con las necesidades formativas propias de cada etapa evolutiva. El año escolar está dividido en tres periodos académicos. Cabe decir que, el colegio tiene como misión tratar experiencias significativas que movilicen cambios pertinentes con una visión integral e integradora de la realidad educativa, a la vez que permitan la innovación en la enseñanza y el aprendizaje.

3.2.2. Selección de participantes

En esta investigación participaron tres profesores de matemáticas del colegio San Ignacio de Loyola. Se escogió un profesor de cada ciclo formativo, en virtud de que la argumentación es transversal a los diferentes grados de escolaridad. Los profesores seleccionados se mostraron optimistas ya que, en conversaciones informales con el investigador, expresaban que las investigaciones realizadas en el colegio contribuirían positivamente a sus quehaceres y aportaría a la formación de los estudiantes. Por ello decidieron participar en el estudio, en ningún momento se sintieron obligados o condicionados por alguna razón, acogieron las indagaciones realizadas por el investigador y se expresaron con naturalidad.

A los profesores participantes se les solicitó diligenciar un consentimiento informado debido que es un aspecto importante para sustentar la ética de este estudio (Parra y Briceño, 2013). En él autorizaron, el uso de seudónimos con el fin de salvaguardar la identidad y la difusión del material derivado de este trabajo (Anexo 2). Cabe destacar que este consentimiento informado se encuentra en concordancia con el Código de Ética en Investigación de la Universidad Antioquia, en el que se distinguen preceptos como la difusión oportuna de los hallazgos investigativos a la comunidad científica y la gestión del proceso investigativo con responsabilidad, seguridad, transparencia y veracidad (Universidad de Antioquia, s.f.).

En el consentimiento informado no se explicitó el nombre del trabajo de investigación, con la intención de obtener una mayor fiabilidad en los resultados obtenidos, dado que los profesores desconocían la pregunta y el objetivo que guiaba el estudio, aunque con las entrevistas que se hicieron y que se describen en el Apartado 3.2.3.2., pudieron intuir posiblemente que el interés se centraba en analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. A continuación, se dará una breve descripción de los tres profesores participantes, en la cual se presentan algunas características generales como la formación profesional y tiempo de ejercicio profesoral.

María: Profesora de matemáticas de quinto grado (5°), para el año actual 2022, tiene 25 años de edad, de los cuales 4 años han sido dedicados al ejercicio profesoral en el colegio en el cual se desarrolló la investigación. Es licenciada en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Estudia actualmente maestría en educación en la misma universidad. En su trayectoria se ha desempeñado como profesora de matemáticas en los grados 5° y 6°.

Sandra: Profesora de matemáticas de sexto grado (6°), para el año actual 2022, tiene 40 años de edad, de los cuales 14 años han sido dedicados al ejercicio profesoral en el colegio en el cual se desarrolló la investigación. Es licenciada en matemáticas y física de la Universidad de

Antioquia, Medellín, Colombia. A lo largo de su trayectoria se ha desempeñado como profesora de matemáticas en los grados 5°, 6° y 7°.

Fernando: Profesor de matemáticas de grado once (11°), para el año actual 2022, cuenta con 58 años de edad, de los cuales 31 años han sido dedicados al ejercicio profesoral en el colegio en el cual se desarrolló la investigación. Es licenciado en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Es el profesor más antiguo del cuerpo profesoral del área de matemáticas del colegio. Se ha desempeñado a lo largo de su trayectoria como profesor de matemáticas de los grados superiores, en su mayoría, como profesor de cálculo en 11°.

Debe mencionarse que los tres profesores, a pesar de que sus diferencias de edades y de tiempos en ejercicio son considerables, han recibido una sólida formación matemática, didáctica y pedagógica, que les permite tener una conciencia del papel que juega la Educación Matemática en la formación de ciudadanos críticos y reflexivos, los cuales puedan promover transformaciones en la sociedad circundante.

3.2.3. Técnicas e instrumentos para recolección de información

En el trabajo de campo, la recolección de información es fundamental para obtener datos acerca del fenómeno que se investiga. Se puede recolectar información de diferentes tipos mediante técnicas e instrumentos que el investigador utiliza. Este estudio considera al investigador por sí mismo como un instrumento debido al rol ejercido. En un sentido amplio, el rol del investigador se evidenció en el proceso investigativo. En particular, el investigador se enfocó en analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Ello requirió una búsqueda constante de significación al interpretar lo concerniente con el fenómeno observado. Asimismo, el rol del investigador fue clave para encontrar puntos de convergencia en la información recolectada por algunas técnicas e instrumentos, que también sustentan el diseño fenomenológico escogido. Estas técnicas e instrumentos se aplicaron en momentos llevados a cabo en el segundo periodo académico del colegio, que comprende el tiempo transcurrido entre el 2 de mayo y 19 de agosto del 2022. A continuación, se describen dichos momentos.

3.2.3.1. Momento 1: Observación, videograbaciones, transcripciones

La observación implica mantener un papel activo y una reflexión permanente frente al fenómeno que se observa, además, estar atento a sucesos, eventos e interacciones que puedan presentarse (Hernández et al., 2014). En particular, en esta investigación se hizo uso de esta técnica para explorar y dilucidar aspectos en torno al fenómeno de la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas. De modo que, se pudiesen analizar significados y comprender vínculos entre las personas que allí intervienen. Es importante destacar que el investigador en su rol como observador, adoptó una participación pasiva en las grabaciones de video, es decir, estuvo presente, pero no interactuó con el auditorio.

Se dispuso inicialmente una ficha para registrar la observación, tanto de manera descriptiva como interpretativa, de modo que se considerara el entorno físico, los hechos relevantes, las actividades o acciones que realizaban los sujetos en su contexto natural, los implementos o recursos que usaban y el para qué los usaban, y en general formas de organización e interacción. Esta ficha contaba con elementos como: fecha de realización, nombre del profesor al cual se observaría en su clase, lugar, número de estudiantes presentes, objetivo de la observación asociado al fenómeno que se pretendía estudiar, así como temas o conceptos matemáticos trabajados.

Aunque la ficha para registrar la observación (Anexo 3) fue diseñada para identificar episodios que pudieran dar respuesta a la pregunta de investigación, por medio del registro de los tiempos en cronometro de las videograbaciones, realmente solo sirvió como un primer acercamiento del investigador con las vivencias en el aula de clase. No fue sino hasta que se lograron realizar las videograbaciones de las clases y las transcripciones de estas, para llevar a cabo una lectura minuciosa y juiciosa, y de esta forma identificar unidades que se pudiesen analizar. En síntesis, la observación por parte del investigador en este aspecto que se relata consistió en mayor medida en recolectar en su mente por medio de los sentidos, aspectos que posiblemente fueran en la vía de responder a la pregunta de investigación, y que consecuentemente los iba a aterrizar al tener las transcripciones de los videos de las clases.

Las videograbaciones de clase se realizaron durante el mes de mayo del 2022, pero las transcripciones de estas se extendieron hasta julio del mismo año, debido al retraso por una falla técnica que no pudo solucionarse. Esta falla ocasionó que solo se tuviera registro de una clase de la profesora María y de una clase del profesor Fernando, a pesar de que se pretendía inicialmente tener como insumo dos clases de cada profesor. Las videograbaciones de las clases de la profesora Sandra no presentaron ninguna dificultad y se tuvo el registro de las dos. Así, se realizaron en total 4 videograbaciones de clase.

Las clases tenían una duración de aproximadamente 80 minutos que, para efectos comparativos, equivalen en algunos casos a dos períodos de clase en un colegio público. Contaban con un número de estudiantes que oscilaba entre 28 y 31. Los grupos para las videograbaciones fueron seleccionados por los profesores participantes y de acuerdo con la disponibilidad del investigador para estar presente como observador, al igual que la persona del área de comunicaciones del colegio, quien por solicitud de las directivas actuó como camarógrafo.

Las primeras dos videograbaciones se llevaron a cabo el 9 y 10 de mayo del 2022 en el aula que correspondía a la clase de matemáticas del grado 6°E con la profesora Sandra. Aquí es preciso informar que los grados contaban con 5 secciones que iban desde la A hasta la E, es decir, si se toma como ejemplo al grado sexto, este se dividía en 6°A, 6°B, 6°C, 6°D y 6°E. Las dos videograbaciones fueron realizadas en dos días diferentes de la semana pero que eran continuas según el horario fijado para la asignatura. De tal suerte que la segunda videograbación se conectaba con lo tratado en la anterior. En ambas se trabajó acerca de los números enteros. La siguiente videograbación se realizó el 20 de mayo del 2022 en la clase de matemáticas del grado 11°C con el profesor Fernando, en la que se estudió el referente temático: función por tramos. Y la cuarta videograbación se efectuó el 26 de mayo del mismo año con el grupo 5°E de la profesora María, en el que se estudiaron las ecuaciones lineales. La Tabla 1 ofrece un resumen de las acciones descritas.

Tabla 1

Resumen de las acciones descritas para las videograbaciones en el momento 1

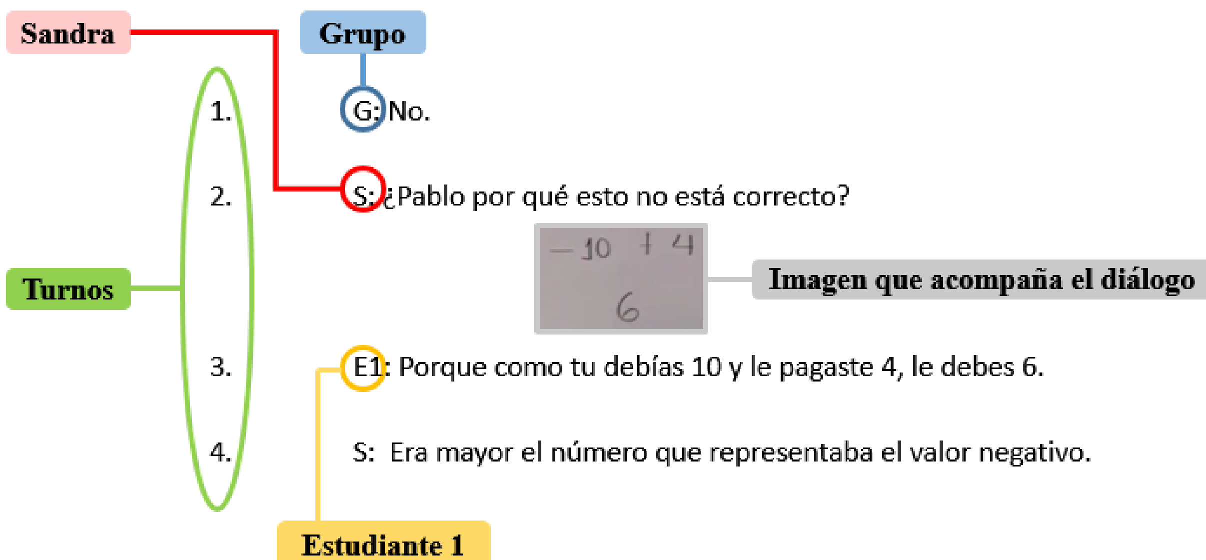
Momento 1: videograbaciones de clase realizadas en el año 2022				
Profesor(a)	**Fecha**	**Grado**	**Referente temático trabajado**	**N° de videograbaciones.**
Sandra	9 y 10 de mayo	6°E	Números enteros	2
Fernando	20 de mayo	11°C	Función por tramos	1
María	26 de mayo	5°E	Ecuaciones lineales	1

Nota. Elaboración propia.

Por último, con las videograbaciones de las diferentes clases se llevó a cabo un proceso de transcripción manual por parte del investigador, quien digitó las voces y sonidos que los videos podían ofrecer. Los diálogos transcritos, conforme a las situaciones ocurridas en las clases, fueron acompañados por imágenes que informan las discusiones acerca de un referente temático y en torno al cual giraba la argumentación. Por convención, en las transcripciones, se usó en los respectivos turnos las iniciales de los participantes cada que intervenían con su locución, es decir, "M" representaba a María, "S" a Sandra y "F" a Fernando. Entiéndase por turno a la intervención de un interlocutor dentro de la conversación. Los estudiantes se identificaron en sus turnos como E1, E2, E3, …, y así sucesivamente; cuando dos o más estudiantes respondieron o intervinieron al unísono se escribió "G" de grupo. Cabe agregar, que las transcripciones se realizaron en Microsoft Word, un software para el procesamiento de textos. La Figura 2 muestra como ejemplo un fragmento de transcripción de diálogo en el que se pueden visualizar estas convenciones.

Figura 2

Convenciones establecidas en las transcripciones.



Nota. Elaboración propia (2022).

En definitiva, pese a que solo se realizó una sola videograbación en el caso de la profesora María y el profesor Fernando, se pudo recolectar información valiosa para la investigación. En ese sentido, la observación se constituye como una técnica imprescindible porque implica utilizar los sentidos y poner atención a esos detalles que permiten reconocer la potencial utilidad de la información que se recolecta. Ahora bien, no basta con la observación para generar resultados confiables. De ahí que se necesiten otras técnicas que permitan encontrar puntos de convergencia con las conjeturas acerca de lo observado. Por tal razón, en esta investigación se hizo uso también de entrevistas semiestructuradas, que hacen parte del segundo momento en la ruta metodológica planteada.

3.2.3.2. Momento 2: Entrevistas

El tipo de entrevista que se escogió en esta investigación es la semiestructurada. Esta se basa en una batería de preguntas que permiten al investigador tener la libertad de introducir preguntas adicionales de acuerdo con la necesidad de precisar conceptos u obtener otra información (Hernández et al., 2014). En este estudio, la batería de preguntas, como instrumento, tuvo la función de obtener experiencias, perspectivas y opiniones detalladas de los profesores participantes en su propio lenguaje, los cuales, a partir de sus propias concepciones, dieron un acercamiento al fenómeno estudiado, esto es, acerca de la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas. Así, las preguntas que se formularon a los profesores/profesoras fueron principalmente las siguientes:

- ¿Qué entiende por argumentación?
- ¿Qué concibe por tarea matemática?
- ¿Usted promueve argumentación a partir de tareas matemáticas? En caso de que la pregunta sea afirmativa, ¿de qué manera la promueve?
- ¿Qué características tienen tales tareas?
- ¿Con qué intención Usted propone las tareas?

Se realizó una entrevista a cada profesor por separado, en un ambiente tranquilo y sin distractores, dado que el día, que fue el mismo para los tres profesores, los estudiantes no tuvieron clase (13 de junio del 2022). Las entrevistas tuvieron un carácter amistoso por el colegaje que se manejaba entre el investigador y los entrevistados. Como consecuencia, las preguntas fueron tratadas en su totalidad con un desarrollo fluido, aunque conciso en las respuestas por parte de los profesores. Estas entrevistas quedaron grabadas en audio y de igual manera que las videograbaciones llevadas a cabo en el momento 1, fueron transcriptas manualmente por el investigador para su posterior análisis. La Tabla 2 ofrece un resumen de las acciones descritas.

Tabla 2

Resumen del momento 2

Momento 2: entrevista a los profesores llevadas a cabo en el 2022		
Fecha	**Profesores**	**Preguntas**
13 de junio	María, Sandra y Fernando	• ¿Qué entiende por argumentación? • ¿Qué concibe por tarea matemática? • ¿Usted promueve argumentación a partir de tareas matemáticas? En caso de que la pregunta sea afirmativa, ¿de qué manera la promueve? • ¿Qué características tienen tales tareas? • ¿Con qué intención Usted propone las tareas?

Nota. Elaboración propia.

En síntesis, este segundo momento permitió personalmente indagar a los participantes y conocer sus experiencias acerca del fenómeno que se pretendía analizar. Junto con lo recolectado en el momento 1 se tenía información útil para brindar una respuesta a la pregunta de investigación a la vez que se aproximaba al objetivo propuesto. Empero, se consideró un tercer momento, en vista de que la argumentación puede presentarse tanto de manera oral como escrita. Después de realizar las entrevistas en el momento 2, se les pidió a los profesores la guía de trabajo que utilizaron y fueron objeto de discusión en las videograbaciones realizadas en el momento 1. Esta recolección de información se llevó a cabo en el momento 3 que se describe a continuación.

3.2.3.3. Momento 3: Guías de trabajo

Para formar una triada que enriqueciera la recolección de información, se consideraron las guías de trabajo en matemáticas como insumo que los profesores participantes elaboraron para sus clases. Estas fueron objeto de los diálogos presentados en las videograbaciones de cada una de las sesiones y que, para efecto del análisis, se dispusieron en su totalidad a fin de evidenciar, de forma escrita, intentos de tareas matemáticas que promueven argumentación. Según el texto escrito por Reyes (2014), titulado "*Coloquios para un conocimiento práctico de la propuesta educativa de la compañía de Jesús: un camino para los maestros*", las guías deben contener de manera general unos aspectos básicos que incluye: área, grado, asignatura, fecha, tiempo de duración, título del referente temático, tipo de guía, entre otros. Cabe agregar que, en el Colegio San Ignacio de Loyola, sumados a los aspectos básicos antes mencionados, en el diseño de las guías debe incluirse los subprocesos y estándares de desempeño que los estudiantes deben alcanzar en el respectivo periodo académico. Ahora bien, los profesores tienen la libertad de escoger la información, ejemplos y tareas que se presentan en la guía, que ayuden al desarrollo de los referentes temáticos tratados. Con respecto al tipo de guías utilizadas se destacan las de ejercitación, las informativas o las que mezclan ambas.

Las guías de ejercitación son aquellas que permiten al estudiante poner en práctica los conceptos trabajados. Están dotadas de preguntas, situaciones problema o simplemente tareas que permiten estimular la actividad intelectual y el desarrollo de los procesos de pensamiento de los estudiantes. Por su parte, las guías informativas son textos que exponen definiciones e historia. Ambas guías como instrumento buscan desarrollar la autonomía del estudiante, que lo convierte en agente de su propio proceso escolar (Reyes, 2014).

En este estudio, se consideró como fuente de información la guía informativa y de ejercitación de grado 5° llamada "*Igualdades y ecuaciones*" (Anexo 4). También, la guía informativa y de ejercitación de grado 6° titulada "*Operaciones con los números enteros*" (Anexo 5). Por último, la guía de ejercitación de grado 11° denominada "*Funciones por tramos y sus aplicaciones*" (Anexo 6). La Tabla 3 resume la información presentada.

Tabla 3

Resumen del momento 3

Momento 3: guías de trabajo usadas en las videograbaciones de clase por los tres profesores			
Profesor	**Tipo de guía**	**Nombre de la guía**	**Grado**
María	Informativa y de ejercitación	Igualdades y ecuaciones	5°
Sandra	Informativa y de ejercitación	Operaciones con los números enteros	6°
Fernando	Ejercitación	Funciones por tramos y sus aplicaciones	11°

Nota. Elaboración propia.

Las guias elaboradas por los tres profesores tenían en común la formulación de cuatro subprocesos que agrupados daban cuenta de los estándares de desempeño que los estudiantes debían alcanzar. De esta manera los subprocesos de resolución y formulacion de problemas y modelación enunciaban el estándar 1; y los subprocesos de razonamiento matemático y comunicación matemática enunciaban el estándar 2. Este último estándar estaba estrechamente relacionado con la argumentación. La Tabla 4 informa acerca de los subprocesos que formulan el estándar 2 en cada una de las guías, que se tienen en cuenta en el segundo período académico del colegio para cada grado mencionado. En esta se resaltan intenciones de la argumentación como justificar y explicar (se presenta en tercera persona del singular). Igualmente, la palabra textual “argumenta”, forma verbal de la tercera persona del singular. Es decir que, en principio, hay un interés del Colegio San Ignacio de Loyola por la argumentación en educación matemática, en tanto que influye en la formación integral de los estudiantes.

Tabla 4

Subprocesos que formulan el estándar 2 en el respectivo grado.

	Subprocesos		
Grado	**Razonamiento matemático**	**Comunicación matemática**	**Estándar 2**
5°	**Explica** el funcionamiento de los algoritmos de las operaciones básicas a partir de las características de los números racionales positivos.	Expresa relaciones y propiedades de los números racionales positivos en diferentes tipos de representaciones.	Emplea el lenguaje matemático para **justificar** procedimientos aplicándolos a la solución de situaciones problema en el conjunto de los números naturales.
6°	Utiliza las propiedades, operaciones y relaciones de los números racionales en la solución de situaciones problema.	**Explica** el uso de las operaciones, propiedades y relaciones con los números racionales.	**Argumenta** los procedimientos utilizados en la solución de situaciones problema matemáticos y realistas en contextos numéricos y aleatorios, aplicando las operaciones y propiedades del conjunto de los números enteros y las medidas de tendencia central en datos no agrupados.
11°	**Argumenta** sobre las relaciones de variación presentes en modelos matemáticos.	Interpreta y aplica el concepto de función en la solución y formulación de situaciones problema.	**Argumenta** e interpreta gráfica y analíticamente situaciones problemas matemáticos y realistas que involucran funciones reales y el cálculo de límites.

Nota. PIA[1] de matemáticas del CSI[2] /Elaboración propia.

Los tres momentos mencionados hicieron parte del diseño metodológico y permitieron recolectar información necesaria para encontrar una respuesta a la pregunta investigativa y alcanzar el objetivo propuesto. Esta información fue importada al software de análisis de datos cualitativos Atlas.ti 22 para su posterior análisis. Atlas.ti 22 es un programa que fue desarrollado por el alemán Thomas Muhr. Dentro de sus funciones permite codificar datos para construir teoria, a partir de las relaciones que se establecen entre conceptos, categorías y temas (Hernández et al., 2014).

3.2.4. Fases del análisis de los datos

El análisis de los datos fue una tarea primordial para el investigador, quien exploró, describió e interpretó los datos en su contexto, de acuerdo con el fenómeno que se investigó, esto es, a cerca de la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas. Este a su vez, con la ayuda del software Atlas.ti 22, realizó una depuración de la información que surgió luego del trabajo de campo. Aquí es preciso informar que, si bien este estudio se concibió bajo un diseño fenomenológico, se usó Atlas.ti 22, el cual, según Vasilachis et al. (2006), parece estar fuertemente influenciado por estrategias de análisis propias de la teoría fundamentada. En ese sentido, sin ánimos de inmiscuir ampliamente en la teoría fundamentada, este estudio consideró algunas estrategias de codificación. De esta manera se pudo construir teoría que sustentará y diera respuesta a la pregunta de investigación. A continuación, se describen 2 fases llevadas a cabo en el proceso de análisis de los datos.

3.2.4.1. Fase 1

En esta fase, el investigador realizó una lectura detallada, tanto de las transcripciones de las videograbaciones de clase, como de las entrevistas. Asimismo, se revisaron las guías de trabajo utilizadas por los profesores participantes. En otros términos, el procedimiento de codificación que se llevó a cabo en Atlas.ti 22 fue el de *análisis línea por línea*, el cual “exige un examen minucioso de los datos, frase por frase y a veces palabra por palabra […]. Ésta es quizás la forma más

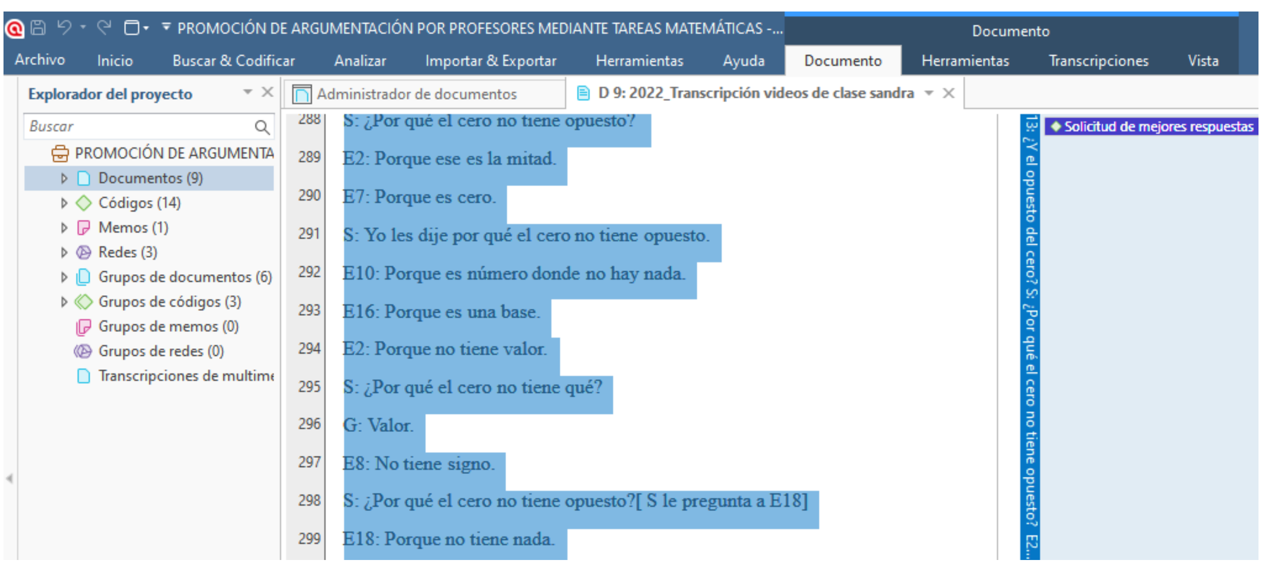
[1] Plan Integrado del Área
[2] Colegio San Ignacio

demorada de codificación, pero suele ser la más productiva" (Strauss y Corbin, 2012, p. 131). Cabe agregar que, como el investigador fue quien hizo el proceso de transcripción manual, ya tenía idea de ciertos sucesos que compartían características comunes que pudiesen asociarse para dar respuesta a la pregunta de investigación. Este proceso y el *análisis línea por línea* fue importante para generar rápidamente categorías de manera inductiva, las cuales se desarrollan en el Capítulo 4.

Según Hernández et al. (2014) "las reglas de codificación las establece el investigador" (p. 451). En ese aspecto, el investigador organizó la información con la herramienta Atlas,ti 22 y fue clasificándola hasta establecer unidades de análisis. Estas se asociaron con episodios, expresiones, palabras claves y en general indicios que pudiesen dar una posible respuesta a ¿cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Posteriormente, cada una de las unidades fue codificada y agrupada en categorías. Aunque Atlas.ti 22 facilitó la sistematización de la información, las categorías fueron establecidas de acuerdo con la interpretación que hacía el investigador de las unidades de análisis que mostraban similitud en su naturaleza, las cuales podían dar respuesta a la pregunta investigativa. La Figura 3 muestra el proceso de codificación de la información descrito anteriormente.

Figura 3

Selección de un episodio agrupado en una categoría.



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22.

En el proceso de codificación se consideró, de acuerdo con la información recopilada a partir de las técnicas e instrumentos utilizados en el trabajo de campo, que las transcripciones de las videograbaciones y las guías de trabajo tuviesen puntos de convergencia evidenciados en las distintas categorías establecidas, en virtud de que la argumentación puede presentarse de forma oral o escrita. Ahora bien, con la información aportada por las entrevistas, en las cuales se hicieron preguntas generales (Apartado 3.2.3.2.), no se obtuvieron suficientes datos que pudieran ofrecer una respuesta fidedigna a la pregunta de investigación, más allá de lo manifestado por los profesores participantes. Como se informó en el planteamiento del problema acerca del conocimiento profesional del profesor, que puede adquirir un carácter tácito (Climent, 2002), el promover la argumentación en algunas ocasiones se hace de manera implícita e inconsciente, por tanto, lo que manifieste el profesor en una entrevista puede no coincidir con lo que se observa en su diario vivir de acuerdo al fenómeno observado.

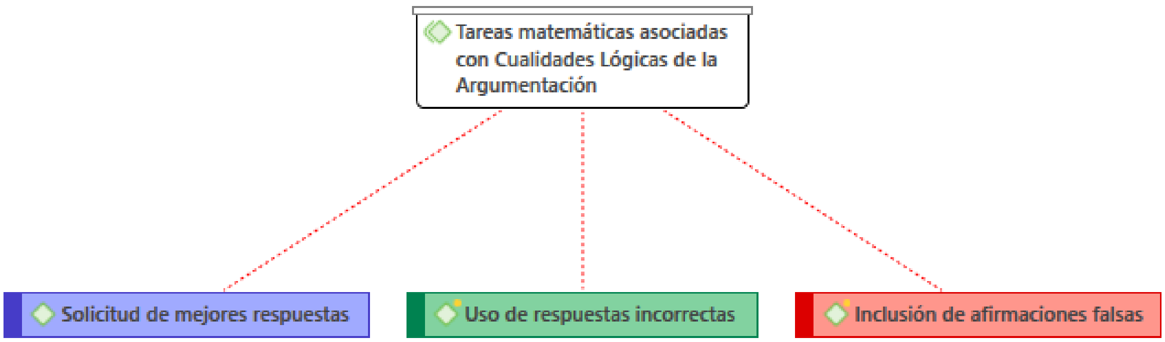
En vista de que el diseño escogido en este estudio es el fenomenológico de corte interpretativo, resulta conveniente dilucidar lo que se evidencia externamente y se contraste con lo dicho por los profesores. En resumen, algunas definiciones, experiencias, reflexiones y demás asuntos que los profesores hayan develado en las entrevistas, se pondrán en común con lo que se pueda analizar a partir de las videograbaciones de clases y las guías de trabajo. Durante el análisis y resultados se traerán a colación fragmentos de entrevista que puedan complementarse o contrastarse con los datos obtenidos por las demás fuentes mencionadas.

3.2.4.2. Fase 2

Para establecer las categorías el investigador asoció ciertos episodios de las videograbaciones de clase y algunos fragmentos de las guías de trabajo, a formas de cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. En la fase 2, el investigador comenzó a relacionar dichas categorías de modo que se pudiera ir construyendo una teoría que respondiese a la pregunta investigativa. Tales relaciones no surgieron de manera espontánea, sino que requirieron de la interpretación del investigador que, influenciado por supuestos teóricos, pudo identificar propiedades en los datos para encontrar puntos de convergencia. Este proceso requirió identificar acciones/interacciones asociadas al fenómeno que se investigó (Strauss y Corbin, 2012). Así, se lograron vincular categorías que dieron surgimiento a tres categorías centrales en concordancia con el referente teórico presentado en este estudio. Estas tres categorías estuvieron en relación biunívoca con una cualidad de la argumentación. La Figura 4 muestra la integración de tres subcategorías a una categoría central. Estas se explicitan en el Capítulo 4.

Figura 4 *a*

Integración de tres subcategorías en una categoría central.



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22.

La Figura 4 informa que las categorías inicialmente establecidas, tomaron el nombre de subcategorías, las cuales brindaban mayor poder explicativo. Cabe decir, que se realizó una saturación de los datos hasta el punto de no encontrar otras posibles subcategorías que brindarán una respuesta a la pregunta de investigación. La integración de los elementos expuestos permitió desarrollar una postura teórica enmarcada en analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. De esta manera, se seleccionaron episodios o fragmentos para analizar que develaban el fenómeno en cuestión. Asimismo, se tejió un discurso en el que algunas veces se presentaron diagramas o representaciones para mostrar las relaciones establecidas entre categorías y subcategorías.

Es importante aclarar que las categorías centrales, al igual que las subcategorías establecidas para cada una, no son aisladas unas de otras, es decir, a pesar de que hay una caracterización relacionada con una cualidad de la argumentación, estas no son excluyentes ni se pretenden que lo sean, pues como se ha informado en este estudio, la argumentación es considerada a partir de la sinergia de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas. Asimismo, algunos episodios que se consideraron para el análisis bien pueden clasificarse en una u otra subcategoría, sin embargo, fueron abordados en la que se presentaba riqueza y contaba con mayores características de acuerdo con la descripción de las subcategorías. Este hecho da cuenta de las conexiones que se establecen entre las cualidades de la argumentación, que como consecuencia exigió experticia por parte del investigador para interpretar y darle un tratamiento particular a cada una, a pesar de que las fronteras entre una y otra sean quiméricas. En el Anexo 7 se presentan tablas de co-ocurrencias, las cuales informan que algunas unidades de análisis compartían diferentes códigos. Es decir, había episodios o fragmentos que hubiesen podido ser tratados a partir de otras subcategorías dada la naturaleza de la información que poseían para analizar.

Capítulo 4

Análisis y resultados

En este capítulo se presenta el análisis y los resultados de la investigación. Para ello se tienen en cuenta los aspectos metodológicos expuestos en el Capítulo 3, principalmente, las fases del análisis de los datos. También, se describen las categorías y subcategorías establecidas, que permitieron lograr una postura teórica para dar respuesta a la pregunta investigativa. Asimismo, se menciona la estrategia que se usó para presentar los datos. Estos se evidencian en las unidades de análisis a través de las cuales se realizó precisamente el proceso de análisis que dio cuenta del objetivo propuesto en este estudio.

Las unidades de análisis correspondían a episodios producto de las videograbaciones de clases o a fragmentos de las guías de trabajo utilizadas por los profesores, que pudieron dar indicios de cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Estas unidades, como ya se ha mencionado, pasaron a formar parte de una categoría según sus características, propiedades y acciones. El investigador, a partir de su experticia, escogió aquellos episodios o fragmentos relevantes para analizar. Igualmente, la naturaleza de dichos episodios y fragmentos posibilitaron proponer una descripción de las subcategorías. Luego, las relaciones entre subcategorías permitieron definir las categorías que se vinculan con cualidades de la argumentación.

Como estrategia de análisis se presentarán evidencias[3] de cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas, las cuales, en su mayoría, están dotadas de preguntas que se realizan a lo largo de las clases o se expresan en las guías de trabajo elaboradas por los profesores participantes. Es importante mencionar que el análisis seguirá el siguiente orden: se comienza con los datos recolectados atribuidos a la profesora ***María***[4], se continua con

[3] Las evidencias se presentarán por subcategorías y relacionarán a los tres profesores participantes. Se informará cuando no se establezca relación de acuerdo con la información recolectada en el trabajo de campo.
[4] Los nombres de los tres profesores se resaltan a través del uso de letra negrilla y cursiva.

los de la profesora ***Sandra*** y por último con los del profesor ***Fernando***; esto en cada una de las subcategorías. El orden en que se expondrán las subcategorías será de manera intencional. La escogencia de las evidencias que se presentan fue por decisión del investigador quien las consideró relevantes por encima de otras que se hubiesen podido presentar.

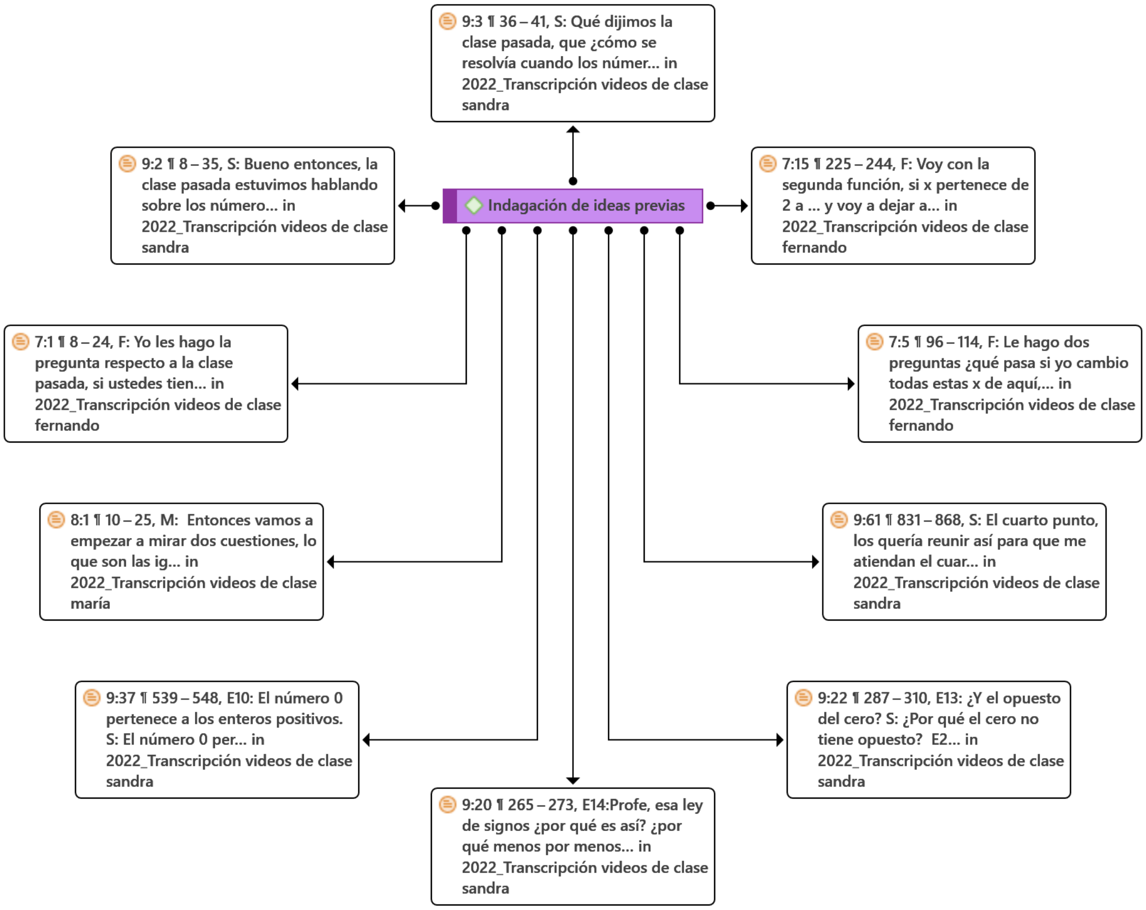
Es menester informar que las evidencias que dan cuentas de las primeras dos subcategorías se vinculan con cualidades dialécticas de la argumentación, por tal razón, su análisis se produce a partir de los asuntos teóricos que expone la interpretación del MTIA realizado en este estudio con relación a dicha cualidad. Las siguientes tres subcategorías al relacionarse con cualidades retóricas de la argumentación se analizan tomando en consideración, recursos retóricos usados al argumentar y demás asuntos que atañen a esta cualidad. En ese orden de ideas, las tres últimas subcategorías ligadas a cualidades lógicas de la argumentación se analizan a la luz de los componentes argumentativos que expone la interpretación del MTIA presentado en el Capítulo 2. Estas apreciaciones surgen de considerar la argumentación a partir de diferentes cualidades, por lo que se requiere analizarla de diferentes formas según el contexto. Aquí es preciso mencionar que este estudio se desarrolló en un contexto natural de clase, no en contextos de experimentos de enseñanza o en contextos controlados. A continuación, se comienzan a elucidar las posibles respuestas a la pregunta de investigación. Los diálogos que se presentan en algunos casos serán extensos con el fin de evidenciar intentos de promoción de argumentación por parte de los profesores. Asimismo, se evidencia la aplicabilidad del piso teórico considerado en este estudio, como los indicadores de argumentación.

3.1. Subcategoría: indagación de ideas previas

En el proceso de identificación de unidades de análisis el investigador encontró en los datos regularidades en cuanto a las acciones/interacciones asociadas al fenómeno de la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas. De esta manera se logró identificar que los profesores en aras de promover la argumentación, posiblemente utilizan la indagación de ideas previas por parte de los estudiantes. En efecto, la indagación de ideas previas permitió un diálogo entre profesor(a) y estudiantes en el que se solicitaron o se ofrecieron argumentos mediante preguntas o respuestas. Las preguntas y respuestas giraban en torno a conocimientos obtenidos previamente en grados inferiores, en el contexto extraescolar o que se adquirieron en clases anteriores al presente curso. La Figura 5 informa episodios que se pudieron identificar en relación con la subcategoría descrita. De estos episodios, se escogió uno por cada profesor para ser presentado y analizado.

Figura 5

Episodios relacionados con la subcategoría indagación de ideas previas



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22.

4.1.1. Evidencias

En la transcripción 1[5] de la videograbación de la clase impartida por ***María***, se logra apreciar que la profesora comienza su clase, que es acerca de igualdades y ecuaciones, preguntando a sus estudiantes ¿qué son las igualdades? La cual es una **pregunta** que se formula para que estos

[5] Las transcripciones fueron numeradas en el orden en el que se presentaron.

brinden **explicaciones**[6] al respecto teniendo en cuenta ideas previas. Igualmente, la **pregunta** actúa como un **indicador de argumentación** (**IA**[7]).

El **diálogo** entre la profesora y los estudiantes se da por medio de **actos comunicativos dialógicos**, que incluso comienzan con el levantamiento de manos por parte de los estudiantes pidiendo la palabra [4][8]. Son **dialógicos** porque tienden a la búsqueda de un consenso, en el cual los estudiantes que quieren participar lo hacen al llamado de la profesora. En esa línea, los estudiantes intervienen con sus aportes y tratan de responder a la **pregunta**, y/o complementan las **argumentaciones** dadas por algún otro compañero a partir de los conocimientos obtenidos previamente por estos. Dentro de sus **explicaciones** mencionan que las igualdades tienen que ver con cosas que, tienen iguales características, dan lo mismo, tienen igual cantidad, proporción, e incluso que viene, según E5, de la palabra espíritu que indica similitud e "igualidad" [18]. Palabra que no existe en el vocabulario común, pero si en la mente del estudiante que la expresa. El rol de profesora durante este momento de la clase es permitirles a los estudiantes ofrecer sus **argumentos** y asiente cada vez que un estudiante participa. Luego, reúne los **argumentos** e informa a los estudiantes que de alguna manera se acercaban al concepto. Al final precisa la definición de igualdad.

3.1.1.1. Transcripción 1: clase de la profesora *María*

4 [9]	M:	Entonces vamos a empezar a mirar dos cuestiones, lo que son las igualdades y lo que son las ecuaciones, para empezar a hacer ese proceso de diferenciación, ¿qué se les ocurre a ustedes que son las igualdades? [[10]algunos estudiantes levantan la mano] Juanes.
5	E1:	Las igualdades **para mí**[11], **es como decir**, como dos cosas que tienen las mismas… **no sé cómo decirlo**.
6	E2:	Características.
7	E1:	Eso, **que tienen** las mismas características, **que son** iguales.
8	M:	Mismas características, que son iguales, Emiliano.
9	E3:	Profe, **es algo parecido** a lo que dijo Juan Esteban [E1], sobre, **es como** dos cosas **que te dan lo mismo**, por ejemplo, $1 + 1 = 2$ ó $3 - 1 = 2$.
10	M:	Muy bien. Salomón.

[6] Palabras o expresiones que se consideren como elemento teórico se escribirán en negrilla, para su identificación.
[7] En el análisis de cada transcripción se escribirá (**IA**) cada que se haga mención a un indicador claro de argumentación.
[8] Cuando se haga referencia a un turno se escribirá el número del turno entre corchetes.
[9] Indica el turno de la transcripción original.
[10] En las transcripciones se hace uso del corchete para precisar o aclarar algo. También, para introducir un comentario u omitir una parte del texto.
[11] Se escribirá en negrita un indicador claro de argumentación de acuerdo al contexto dentro de la transcripción correspondiente a los estudiantes.

11	E4:	Profe, **yo pienso que** son cosas **que tienen** la misma cantidad.
12	M:	Muy bien. Jerónimo.
13	E5:	Profe, para mí igualdades **es como algo que tiene** igual cantidad, igual proporción.
14	M:	Listo. Emiliana.
15	E6:	Profe, **a mí**, igualdad **me suena** a lo que hicimos la clase pasada, que en dos partecitas del rectángulo **hay como** igual cantidad de cuadrados. [la estudiante hace referencia a la práctica de laboratorio de ecuaciones]
16	M:	Muy bien. Luis y por último jerónimo para que avancemos.
17	E7:	[Ruido y no se escucha]
18	E5:	**Para mi** igualdad **viene de** la palabra espíritu e indica la similitud y la igualidad de números **o** una cantidad **de algo** a un número y otro número.
19	M:	Muy bien, entonces en todo lo que dijeron, igualdad, necesariamente tiene uno que mencionar por ahí un igual ¿cierto? Entonces una igualdad, todo lo que dijeron, realmente se acercaba a una igualdad, van a ser dos expresiones matemáticas que tienen el mismo valor, que era lo que ustedes decían y precisamente se cumple eso, como esto es igual a esto entonces es una igualdad, listo. [S hace gestos con la mano]

Es importante informar que, en la entrevista realizada a ***María***, en especial cuando se le pregunta de qué forma promueve la argumentación en los estudiantes, parte de la respuesta que da está en concordancia con lo evidenciado en la transcripción 1. La profesora resalta la importancia del diálogo en el que los estudiantes pueden ofrecer sus puntos de vista. En la Tabla 5 se informa lo expresado por la profesora.

Tabla 5

*Parte de la respuesta de la profesora **María** a la pregunta ¿de qué forma promueve la argumentación en los estudiantes?*

Yo creo que la argumentación está presente en todos esos momentos [como el evidenciado en la transcripción 1] en donde los estudiantes realmente pueden dar más claramente sus puntos de vista, razonamientos […]. Precisamente esa conversación permite ver esa capacidad de argumentación en los estudiantes. Entonces yo creo que, dentro de las clases de matemática se busca eso, que se genere mucha participación, mucho diálogo.

Nota. Fragmento tomado de la transcripción de la entrevista realizada a María /13 de junio del 2022 (minuto-01:20_02:30)

De los episodios seleccionados que relacionan a la profesora ***Sandra*** en esta subcategoría, se escogió el evidenciado en la transcripción 2. Esta transcripción corresponde al video 1 de la clase de la profesora. En el episodio se muestra que esta apela a dos **preguntas** [30] como estrategia para **interactuar** con los estudiantes. Las **preguntas** hacen que los estudiantes se remitan a conocimientos obtenidos en sesiones anteriores del curso para brindar **explicaciones** al respecto. Las **preguntas** giran en torno al estudio de la suma y resta de números enteros. En el **diálogo** que se genera, E8 no contesta acertadamente a la petición de la profesora, esta le **refuta** y pregunta a E9 si es cierto lo afirmado por E8. E9 pide repetir la **pregunta**, por tanto, la profesora solicita resolver una operación entre números enteros que se informa en el turno [34]. Acto seguido, E9 ofrece una **explicación** que, al analizarla detenidamente, está permeada por la idea de recta numérica que el estudiante ya vio con antelación, cómo esta representa el ordenamiento de los números tanto negativos como positivos y en relación con la distancia con el número cero. Por tal razón expresa “como sabemos” (**IA**) [35], debido a que es un conocimiento previo que el estudiante ya posee. También, advierte que se trata de una resta debido a que los números tienen diferente signo. La **argumentación** que se suscita en el turno [35] hace que la profesora en modo **dialógico** la acepte, sin embargo, deja entrever que espera **argumentaciones** más refinadas y claras que respondan a la **pregunta**.

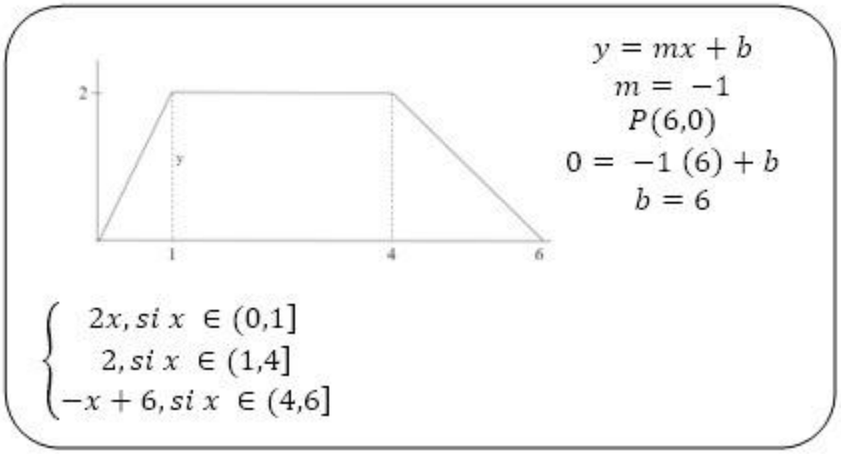
3.1.1.2.Transcripción 2: clase de la profesora *Sandra*, video 1

30	S:	¿Qué dijimos la clase pasada? Que ¿cómo se resolvía cuando los números enteros tenían signos distintos?
31	E8:	**Se le ponía** el menos atrás.
32	S:	A ver ¿si será? Maxi.
33	E9:	Repítame la pregunta.
34	S:	Cómo hago para hacer esta operación [se escribe en el tablero $-5+10$], que si bien no sabemos si es suma o resta, si uno es negativo y el otro es positivo.
35	E9:	**Como sabemos** que el 10 es positivo y el -5 es negativo, lo vamos a restar, **entonces** le restamos 5 y **nos queda** en cero y los 5 **que nos falta** queda ya en 5 positivo.
36	S:	[…] O sea, así está bien, tal vez haya unas frases más claras.

El siguiente segmento hace referencia a la clase de ***Fernando***, en el que se discute una tarea sobre función por tramos. Las **preguntas** que plantea el profesor giran en torno a la Figura 6 y van enfocadas a indagar sobre ideas previas de los estudiantes.

Figura 6

Tarea sobre función por tramos.



Nota. La información es extraída del video de ***Fernando*/**minuto 6:52. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

Las **preguntas** que realiza ***Fernando*** son del tipo qué pasaría si se realizan algunos cambios en los coeficientes que acompañan la variable x, si se le cambia el signo a la función o inclusive si esta se multiplica por algún número. A partir de la **pregunta** planteada en [82], E1 emplea un **acto comunicativo** no verbal y **explica** con las manos que la función se cierra. En general, a partir del **diálogo** que se genera, los estudiantes responden acertadamente a las **preguntas** de manera conjunta, debido a que estas apuntan al tema de transformaciones de funciones que ya habían visto en clases anteriores. Precisamente en el turno [91] el profesor les recuerda las gráficas de $\sqrt{x}$ y -$\sqrt{x}$, en la que una es el reflejo de la otra con respecto al eje x. De igual forma se aprovecha para repasar el dominio y rango de una función.

3.1.1.3.*Transcripción 3: clase del profesor *Fernando

82	F:	Les hago dos preguntas ¿qué pasa si yo cambio todas estas x de aquí, todas, las cambio por $2x$?
83	E1:	[hace un gesto con las manos cerrándose]
84	G:	¿**Cómo**?
85	F:	¿Si cambio las x por $2x$ que pasa?
86	G:	Se comprime.
87	F:	Se comprime en el eje x.
88	F:	¿Qué pasa si le pongo un menos a toda esta función aquí?
89	G:	Se refleja.
90	F:	Se refleja aquí con el eje x.

91 F: Cuando se les olvide acuérdense de raíz. [F se refiere a la gráfica de $\sqrt{x}$ y -$\sqrt{x}$]
92 F: ¿Qué pasa si cambio las x por menos x?
93 G: Se refleja con y.
94 F: ¿Qué pasa si multiplicó todo esto por un 3?
95 G: Se expande.
96 F: Se expande en el eje y ¿estamos?
97 F: ¿Cuál es el dominio de esta función?
98 G: De 0 a 6.
99 F: ¿Cuál es el rango?
100 G: De 0 a 2.
101 F: Es perfecto.

En suma, la **argumentación** con características **dialógicas** entre el profesor ***Fernando*** y los estudiantes permiten traer a colación conceptos que sirven para afianzar nuevos temas. Indagar sobre ideas previas posibilita seguir avanzando en el aprendizaje, en este caso, de las funciones por tramos. Cabe mencionarse que, para ***Fernando***, "*argumentación es entender el porqué de las cosas y saberlo expresar*" (comunicación personal, 13 de junio, 2022). Es decir, para él es importante que el estudiante sea capaz de **explicar** aquellos procesos que usa al resolver una tarea. De ahí que el profesor simpatice con la función **argumentativa** de **explicar**, la cual procura que los estudiantes utilicen en sus **argumentaciones**.

En definitiva, de acuerdo a las evidencias presentadas, ***María, Sandra*** y ***Fernando***, posiblemente hacen uso de la *indagación de ideas previas* para promover la argumentación en los estudiantes.

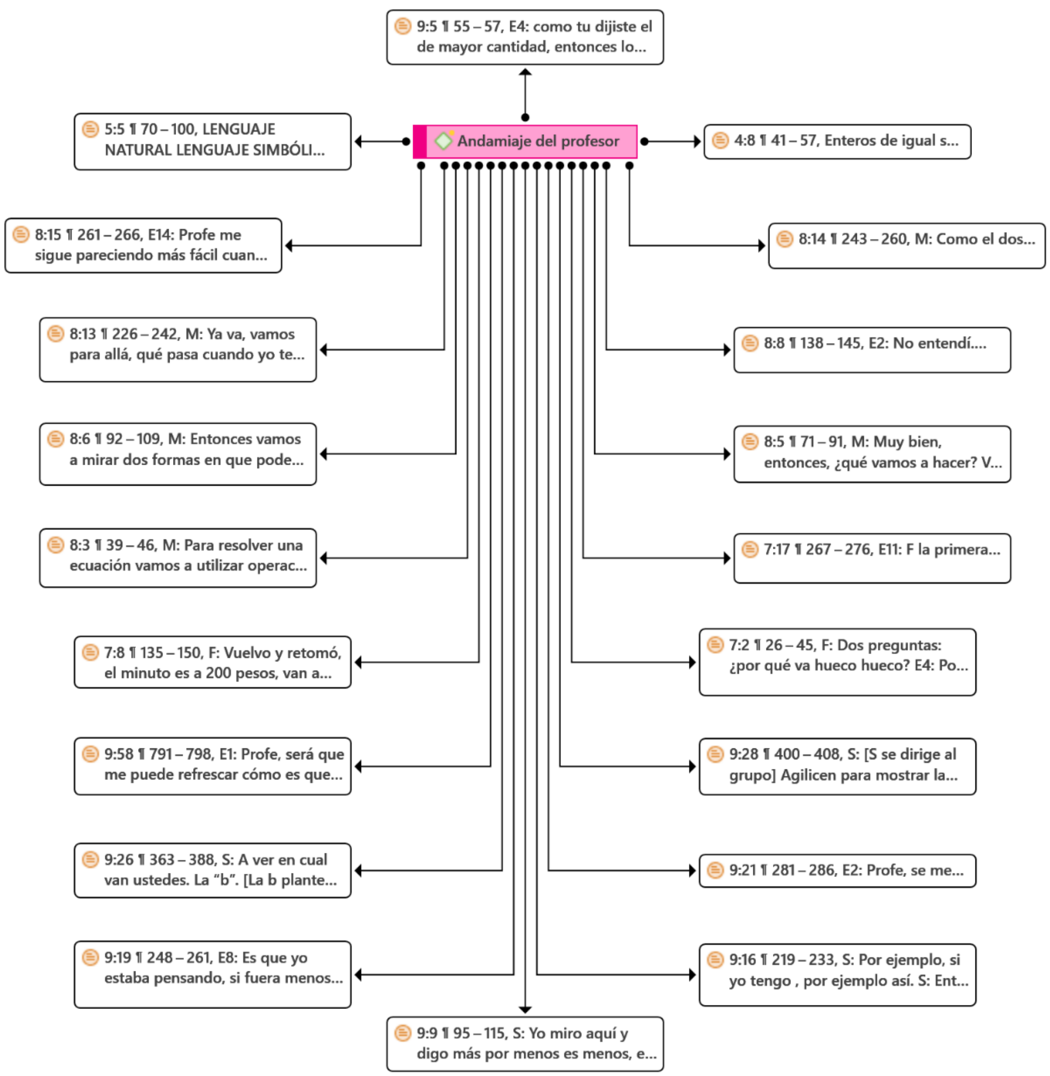
4.2. Subcategoría: andamiaje del profesor

En el proceso de codificación el investigador identificó que en diversas acciones/interacciones, algunas unidades de análisis no tenían una relación clara con las subcategorías establecidas en ese momento, sin embargo, eran objeto de análisis porque podían proporcionar evidencias de cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. De ahí que se optara por agrupar tales unidades en la subcategoría denominada *andamiaje del profesor*.

Andamiaje es un término polisémico que ha hecho referencia a variados constructos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza. Según Díaz-Maggioli (2023), el andamiaje es "una forma eficaz de mediación con el objetivo de promover aprendizajes que habiliten espacios para el desarrollo” (p. 14). En concordancia con lo anterior, denominar la subcategoría *andamiaje del profesor* indica en el contexto de este estudio, que el profesor es quien actúa como apoyo y gestiona la argumentación de los estudiantes con la intención de favorecer el aprendizaje. En otras palabras, el profesor estimula que se lleve a cabo una interacción dialógica abierta a dar, pedir y confrontar ideas y razones de los estudiantes que intervienen. Es necesario informar que esta fue la última subcategoría en manifestarse, pero se presenta en esta parte del análisis para seguir un orden intencional. La Figura 7 evidencia los episodios o fragmentos seleccionados que hacen parte de esta subcategoría.

Figura 7

Episodios relacionados con la subcategoría andamiaje del profesor



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

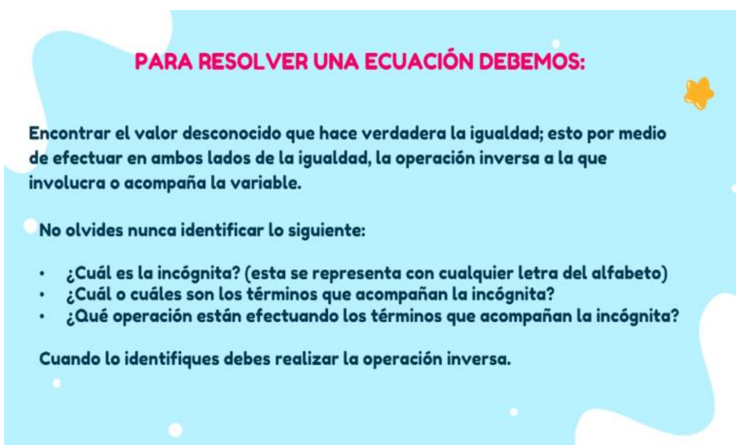
4.2.1. Evidencias

En la clase de la profesora ***María*** se hace evidente como esta se configura en andamiaje para los estudiantes, máxime al **explicar** un concepto nuevo. Es la profesora quien proporciona los elementos necesarios para que los estudiantes puedan ir logrando un acercamiento al referente temático tratado. Asimismo, por medio de **actos comunicativos**, en especial orientaciones, gestiona las **argumentaciones** de los estudiantes en la discusión de tareas que se generan en la clase.

La transcripción 4 comienza con la Figura 8 que hace parte de una presentación realizada en el programa Microsoft PowerPoint. En esta presentación, la profesora plantea unas **preguntas** que sirven como ayuda al resolver una ecuación lineal.

Figura 8

Diapositiva sobre los pasos para resolver una ecuación.



Nota. Diapositiva utilizada por ***María*** en su clase.

La profesora aplica las **preguntas** dispuestas en la presentación a un primer ejemplo alrededor del cual comienza un **diálogo** con sus estudiantes. De esta, surge una **refutación** por parte de E5 que se localiza en el turno [76]. El estudiante cuestiona los pasos que la profesora recomienda para resolver la ecuación pues deja entrever que es fácil encontrar un número que sumado con 25 de 36, sin recurrir a tantos procedimientos. En atención a esto, ***María*** intenta decir en el turno [77] que es válido la acepción de E5, pero al querer complementar es interrumpida por E6, quien **refuta** a E5 afirmando que si los números en la ecuación fueran más grandes sería más difícil resolverla a simple vista. Este **argumento** es reforzado por la profesora en los turnos [79] y [83]. Estos apuntan a confrontar de manera positiva el argumento de E5. Es decir, hay presencia de **actos comunicativos dialógicos** que propenden por llegar a un consenso en la vía de tener presente los pasos para resolver una ecuación. En este aspecto, se le recuerda a E5 que en un ejercicio de la clase anterior[12], destinó tiempo en encontrar la solución a la ecuación planteada al utilizar su método de ensayo y error. De ese modo se manifiesta la importancia de seguir la estrategia de solución propuesta en la clase por ***María***.

4.2.1.1. Transcripción 4: clase de la profesora *María*

64	M:	Muy bien, entonces, ¿qué vamos a hacer? Vamos a mirar este ejemplo. ¿Qué es lo primero que debemos tener presente? ¿Cuál es la incógnita? ¿En este ejemplo la incógnita es cuál? [M señala: $m + 25 = 36$]
65	G:	m.
66	M:	La m, ese es nuestro valor desconocido.
67	M:	Segundo, vamos a identificar ¿cuál es el término que me está acompañando ahí la incógnita?
68	E3:	El 25.
69	M:	Y ese 25 está ¿qué operación tiene el 25?
70	G:	Una suma.
71	M:	Listo, entonces normalmente cuando tenemos la suma ¿qué debemos buscar?
72	G:	La resta.
73	M:	Tenemos que aplicar una operación inversa, que es la resta. Entonces ¿qué vamos a hacer? [E12 pide la palabra]
74	E12:	Profe, yo **quería decir** algo **que es como** la regla de tres.
75	M:	Chicos, la regla de tres, cuando uno la plantea y la va resolviendo es una ecuación.
76	E5:	¿**No se puede simplemente** encontrar un valor que sumado con 25 es 36?
77	M:	De poderse sí, sí se puede, pero…
78	E6:	**Pero si son** números más grandes **es más** difícil.
79	M:	Eso es, o sea yo soy capaz de mirar esta ecuación y yo de una identifico cuál es el valor, pero no en todas las ecuaciones yo voy a lograr, así mirándola, encontrar cuál es la solución, si la ecuación es un poco más compleja voy a tardar más tiempo porque va a ser simplemente por ensayo y error. ¿Jero cuánto te demoraste encontrando la solución?
80	E5:	**Pues** profe, nada.
81	M:	Pero no fue inmediato, busca, pero no en este, en el que habías hecho la vez pasada.
82	E5:	¡Eh!

[12] En la clase anterior, los estudiantes habían tenido un acercamiento a las ecuaciones lineales a través de un laboratorio que consistía en trabajar con cuadros rojos y verdes, los primeros representaban unidades negativas y los segundos unidades positivas.

83 M: Ensayaste, borraste, no te dio, volviste a ensayar otro número. Entonces como yo voy ensayando puede que no tenga la suerte y me quedé ahí busqué y busqué, mientras que con la ecuación yo puedo encontrar ese valor de una manera más ágil, listo.

En la transcripción anterior se evidencia como ***María*** sirve de andamiaje para sus estudiantes en el transcurso de la clase. El andamiaje también se ve reflejado en la guía informativa y de ejercitación "***Igualdades y ecuaciones***"[13] elaborada por la profesora. Esta guía presenta elementos que sirven de apoyo para resolver algunas tareas matemáticas, a la vez que permiten enriquecer las **argumentaciones** de los estudiantes cuando **explican** la solución de las mismas. Al respecto, en la entrevista realizada a ***María***, esta expresa en relación con los elementos que se proporcionan que, es "*algo muy, muy mecánico y se va trascendiendo a una parte en que ya los estudiantes deben de poner en evidencia todos esos conocimientos que han adquirido de una manera más global"* (comunicación personal, 13 de junio, 2022).

La Tabla 6 extraída de la guía antes mencionada opera como andamiaje, puesto que contiene información que ayuda al estudiante para dirimir los problemas que aparecen en las tareas. En este caso, la tabla tiene como objetivo ayudar en la formulación de ecuaciones que se plantean en un lenguaje natural y requieren pasarse a un lenguaje algebraico para su posterior resolución. Lo anterior hace parte de la ejercitación que los estudiantes deben realizar. Según ***María***, "*la argumentación está presente [...]dentro de esa parte de la ejercitación, como un estudiante, por ejemplo, en diálogo con el otro, pone en evidencia un proceso que puede ser similar o puede ser totalmente diferente al de su compañero*" (comunicación personal, 13 de junio, 2022).

[13] Las tres guías que los profesores participantes utilizaron en sus clases se escribirán en letra negrilla y cursiva para su fácil identificación.

Tabla 6

Relación entre lenguaje natural y lenguaje simbólico

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE SIMBÓLICO	LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
Dado un número	x	La raíz **cuadrada** de un número	$\sqrt{x}$
El **duplo**, el **doble** de un número	$2x$	La raíz **cúbica** de un número	$\sqrt[3]{x}$
La **mitad** de un número	$\frac{1}{2}x; \frac{x}{2}; x:2$	La raíz **cuarta** de un número	$\sqrt[4]{x}$
El **triple** de un número	$3x$	La **cuarta parte** de un número	$\frac{1}{4}x; \frac{x}{4}; x:4$
La **tercera** parte, o el **tercio** de un número	$\frac{1}{3}x; \frac{x}{3}; x:3$	El **cuádruplo** de un número	$4x$

Nota. Tomado de la guía "***Igualdades y ecuaciones***".

Ahora bien, tomando en consideración las clases de ***Sandra***, en estas se constatan momentos en los que la profesora actúa como andamiaje para sus estudiantes. La transcripción 5 muestra uno de estos momentos. Comienza con la Figura 9 extraída de la primera clase impartida por ***Sandra***, en la cual **explica** como sumar dos números enteros. A los estudiantes les muestra que la operación $-5 + 10$ da como resultado 5, debido a que se resta el 10 con el 5 y se pone el signo del mayor número, que en este caso es positivo. Este **argumento** se convierte en apoyo para los estudiantes, en especial, E4 pide resolver la siguiente operación $(-15 + 8)$, y utiliza para ello las mismas razones de su profesora aplicadas en este caso a una respuesta negativa como se evidencia en los turnos [48] y [50].

Figura 9

Suma y resta de números enteros

$$-5 + 10 = 5$$

$$-15 + 8$$

Nota. La información es extraída del video 1 de ***Sandra***/minuto 6:40. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

4.2.1.2. Transcripción 5: clase de la profesora *Sandra*, video 1

46 E4: ¿Profe yo puedo hacer el otro?
47 S: Dígame, dígame.

48 E4: **Como tu** dijiste el de mayor cantidad, **entonces** lo que **yo hago** es $15 - 8$ porque **ya sabemos** que el 8 es positivo.

49 S: Quince menos ocho…siete

50 E4: **Y** se pone el menos **porque** el 15 es el mayor **y** tiene menos.

En concordancia con lo anterior, la profesora en la guía de "***Operaciones con los números enteros***" da varios ejemplos de cómo se debe proceder al sumar o restar números enteros relacionándolos con el valor absoluto de estos. La Tabla 7 se convierte entonces en una ayuda para que el estudiante pueda resolver diversos ejercicios que involucren operaciones entre números enteros. Asimismo, que pueda **explicar** el porqué de los resultados que obtiene y sea capaz de **refutar** las respuestas que brindan sus compañeros en los momentos de puesta en común[14].

Tabla 7

Operaciones entre números enteros

Enteros de igual signo	**Enteros de distinto signo**
Se suman los valores absolutos de los números y al resultado se le pone el signo que tenían los sumandos, por ejemplo: (5) + (3) = 8 (-14) + (-17) = -31 (25) + (+62) = 87 -16 + (-4) = ___	Se restan los valores absolutos de los números y al resultado se le pone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto, por ejemplo: (-5) + (3) = -2 (-4) + (7) = 3 (18) + (-24) = -6 (-9) +(-15) = ___

Nota. Tomado de la guía "***Operaciones con los números enteros***".

La siguiente evidencia para esta subcategoría es facilitada por la clase de ***Fernando***, en la que se discute la tarea 4 literal "a" (Figura 10) dispuesta en la guía "***Funciones por tramos y sus aplicaciones***". El profesor realiza una serie de **preguntas** a los estudiantes con el fin de que estos participen a través del **diálogo** y poder determinar así la función por tramos que pide la tarea.

[14] Se le llama puesta en común al momento de socialización de la tarea entre estudiantes y profesor.

Figura 10

Tarea 4 literal "a"

4. Una empresa de telefonía celular determina que la tarifa T que deberá pagar un usuario por el consumo de t minutos en un mes, se describe de la siguiente manera: Tarifa básica…$20. 000.oo
   - Valor de un minuto…$ 200.oo para los primeros 100 minutos
   - Valor de cada minuto después de 100, tiene un descuento del 20%

   Determine:

   a) La función T
   b) El consumo (en minutos) cuando la tarifa es $56. 000.oo

Nota. Tarea de la guía "***Funciones por tramos y sus aplicaciones***" (2022).

El profesor en el turno [130], en consecuencia de una posible intervención de la estudiante E7 (**acto comunicativo** en [129]), que se sabe está en un nivel más avanzado que sus compañeros, restringe (**acto comunicativo**) en ese momento su aportación para brindar oportunidad a los demás estudiantes. En concordancia con ello, primero **pregunta** a cómo quedará el minuto después de haber consumido más de cien, a sabiendas que después de esto los minutos tendrán un descuento del 20%. Segundo, se establece el precio que se debe pagar por los primeros cien minutos. Tercero, pregunta a cuántos minutos se les aplicará el descuento si hipotéticamente se gastan 150 [131], igualmente, cuántos minutos cobraran a 160 (ya aplicado el descuento) si se gastan 120 minutos. Finalmente, para establecer la función por tramos, el profesor **pregunta**, de acuerdo con las condiciones del problema, cómo se escribe en matemáticas los que se pasan de cien. Para ello, E9 **responde** en manera de pregunta (**IA)** [135] que es confirmada por ***Fernando***. Este afirma en el turno [137] que el problema sirve de modelo para los demás ejercicios que los estudiantes deben realizar, además, es el típico ejemplo de función por tramos. La transcripción 6 termina con la formulación de la función por tramos de esta tarea (Figura 11), la cual se convierte en andamiaje para la realización de otras tareas matemáticas asociadas con el referente temático: función por tramos.

4.2.1.3. Transcripción 6: clase del profesor *Fernando*

122	F:	Vuelvo y retomo, el minuto es a 200 pesos, van a hacer un descuento del 20 por ciento los que se pasen de 100 y ojo aquí, o sea que ¿a cómo va a quedar el minuto? ¿si estaba a 200 y le van a descontar el 20?
123	E1:	160.

124 F: Va a quedar a 160.

125 F: Entonces yo hago la pregunta ¿quién me dice cuánto valen los primeros 100 si hago esta multiplicación? Cuando yo ya me vaya a pasar del intervalo 100, si son 100 minutos ¿cuánto pagaríamos?

126 E1: 40 mil.

127 F: Sería 40 mil, porque sería estos 20 mil de aquí más 200 por 200, perdón por 100, o sea quedaría 40 mil más ¿a cómo es que va a quedar el minuto?

128 E1: A 160.

129 F: ¡Ojo aquí! Voy a abrir un paréntesis aquí, si t es mayor que 100. [E7 intenta decir algo al respecto]

130 F: Espéreme para que ellos me participen y ahorita nos cuenta Laura.

131 F: Yo les hago la pregunta, si el descuento lo van a hacer por los minutos que se pasen de 100 y yo me gasté 150 minutos ¿por cuántos minutos me hacen el descuento?

132 E8: Por 50.

133 F: Por 50, porque los primeros 100 pague 40000. Si gasto 120 minutos ¿cuántos me cobran a 160? 20.

134 F: Entonces en matemáticas ¿cómo se escribe los que se pasen de 100?

135 E9: ¿**T menos 100**?

136 F: Eso, eso Sofí.

137 F: En matemáticas así se escribe, y créanme con esta expresioncita se hacen todos los problemas que van a ver de ahí en adelante. Siempre les va a tocar abrir un paréntesis y ahorita van a ver que colocamos t menos 2, t menos 6, este va a ser el problema clave de función por tramos, listo muchachos.

138 F: Voy a hacer la siguiente pregunta ¿encuentra la función? Véala ahí

Figura 11

Solución de la tarea 4 literal "a"

$$f(t) = \begin{cases} 20.000 + 200\,t, si\ t \in [0,100] \\ 40.000 + 160\,(t - 100), si\ t > 100 \end{cases}$$

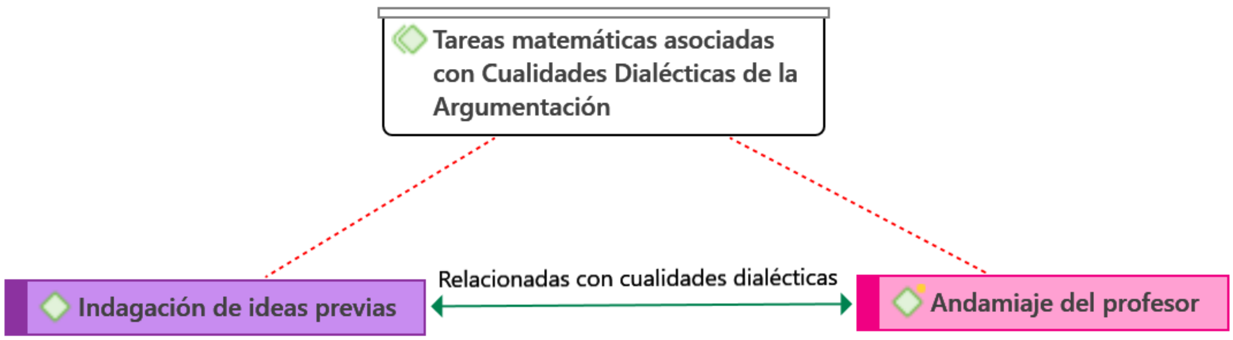
Nota. La información es extraída del video de ***Fernando*/**minuto 17:17. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

En síntesis, de acuerdo a las evidencias presentadas, ***María, Sandra*** y ***Fernando***, actúan en algunos momentos como apoyo y promueven la argumentación en los estudiantes, por medio de una interacción dialógica. De ahí que, esta subcategoría se denomine *andamiaje del profesor*.

Ahora bien, en el proceso de codificación el investigador identificó que las subcategorías, *indagación de ideas previas* y *andamiaje del profesor*, guardaban una relación en cuanto a la naturaleza de los datos, los cuales se asociaban con cualidades dialécticas. De esta manera se optó por agrupar estas dos subcategorías en una categoría central denominada *tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación* (Figura 12).

Figura 12

Tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.3. Categoría: tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación

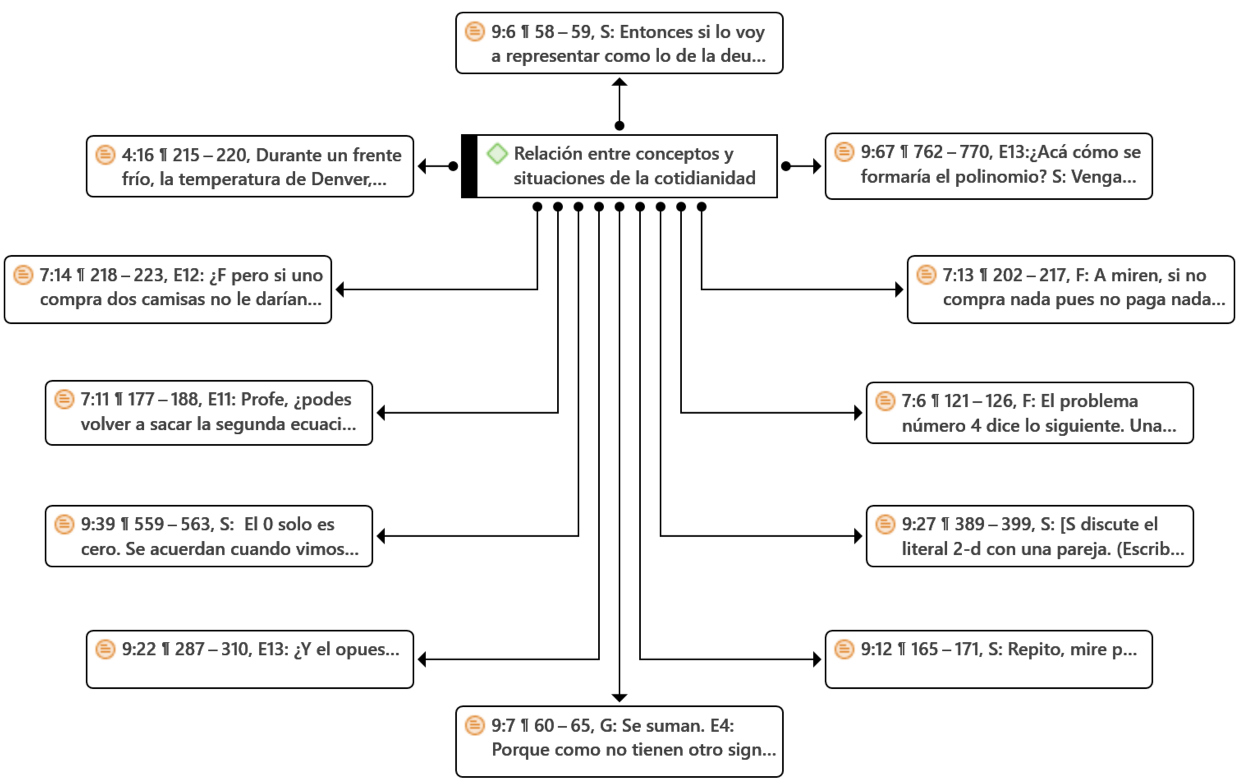
En la Figura 12 se informa que las dos subcategorías se agruparon en una categoría central denomina tareas matemáticas asociadas con cualidades Dialécticas de la Argumentación. Dada la naturaleza de las dos subcategorías en cuanto a los datos, esta categoría considera tareas matemáticas en las que prevalecen argumentos dialógicos que son usados al argumentar. Es decir, esta categoría se relaciona con el diálogo que se establece entre profesor y estudiantes, en el que actos comunicativos se evidencian en las preguntas y respuestas que surgen a partir de la conversación o discusión de un enunciado, tesis o proposiciones que sirven para resolver una tarea. En esa línea, es común en los diálogos la presencia de funciones argumentativas como explicar y refutar. Las evidencias se presentaron a través de las dos subcategorías antes mencionadas, debido a que en estas hay mayor poder explicativo del fenómeno de la promoción de argumentación por profesores mediante tareas matemáticas.

4.4. Subcategoría: relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad

En el proceso de dilucidar la forma en cómo los profesores participantes promueven la argumentación mediante tareas matemáticas, se pudieron identificar algunos episodios de las videograbaciones de clase y fragmentos de las guías, que dan cuenta de manera particular que relacionar conceptos matemáticos con situaciones de la cotidianidad permite la aparición de la argumentación en los estudiantes. En ese marco, el profesor usa principalmente recursos como el ejemplo o la metáfora, medios para persuadir o defender una posición frente al conocimiento que se quiere compartir con los estudiantes. Estos usan de modelo la comunicación dada por el profesor para generar argumentos basados también en dichos recursos. Asimismo, por medio de las analogías que establecen, enriquecen la argumentación, a la vez que se aproximan al referente temático tratado. La Figura 13 informa episodios y fragmentos en los que se evidencia promoción de argumentación a partir de considerar la relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad. Se escogerán algunos episodios o fragmentos para analizarlos a la luz de lo que dicta el referente teórico principal en concordancia con cualidades retóricas de la argumentación.

Figura 13

Episodios o fragmentos que dan cuenta de la subcategoría relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.4.1. Evidencias

La transcripción 7 alude a una de las clases de ***Sandra***, en la que esta utiliza un **recurso retórico** como es la **metáfora** para realizar una comparación entre las operaciones de suma y resta de números enteros con el concepto de deuda que se utiliza en la vida cotidiana. En ese sentido, al discutir acerca de la solución de $-15+8$ se interpreta que, si se representase como una deuda, al pagar $\$8000$ entonces se quedaría debiendo $\$7000$ por cuanto la deuda es mayor al dinero que se tiene [51]. En el turno [52] la profesora plantea otro **ejemplo**, en este caso solo aparece el mismo signo menos en todos los números y **pregunta** qué operación habría que hacer con estos. En **respuesta**, los estudiantes contestan que se suman, en especial, E4 en el turno [54], advierte que es a razón de que (**IA**) no tienen otro signo diferente. La profesora los interpela y pide explicación del por qué se debe sumar si en el **ejemplo** solo hay signos menos (intención de refutar). Al respecto, E10 [56] **defiende** la idea que los números se suman ya que (**IA**) todos son negativos. Luego E11 complementa y afirma que (**IA**) si todos los números son negativos o positivos se suman y si son de distintos signos se restan [58]. ***Sandra***, a partir de un **acto comunicativo** como es asentir con la cabeza, **defiende** dicha afirmación.

La profesora **pregunta** a una estudiante el signo del resultado de las operaciones del ejemplo expuesto, el cual es contestado correctamente [60]. La profesora continua en su **analogía** con la deuda, se **pregunta** y ella misma se responde (**argumento con carácter monológico**). En síntesis, ***Sandra*** atribuye una relación del uso del signo menos en las operaciones con el significado de deuda. Mediante esta comparación los estudiantes pueden tener una mayor aproximación al concepto de suma y resta, en vista de que cada vez que se enfrenten a una tarea que requiera operaciones de este tipo, podrán tener presente la **metáfora** de la deuda y usarla como argumento para dar respuesta a la tarea.

4.4.1.1. Transcripción 7: clase de la profesora *Sandra*, video 1

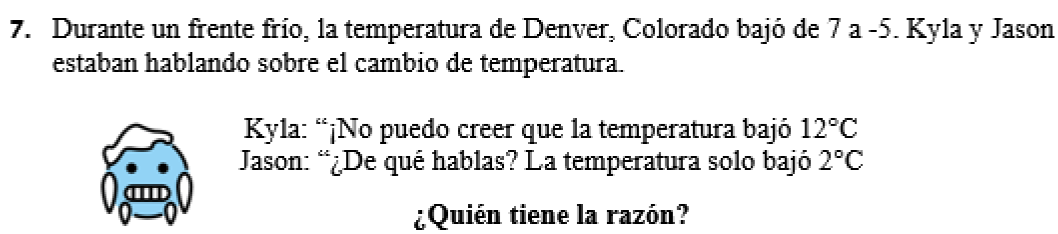
51	S:	Entonces si lo voy a representar como lo de la deuda y lo que tengo, si es mayor lo que tengo a lo que debo pues voy a quedar con algo, sí, sí voy y pago eso que debo quedo con algo o me devuelven algo; pero, si yo tengo una deuda mayor voy y pago 8000 entonces que me van decir, que quedo debiendo 7 mil, cierto.
52	S:	Podemos hacerlo desde la lógica, les decía yo la clase pasada que uno puede acudir a la lógica en esos ejercicios de suma y resta, y ¿qué pasa cuando tenían el mismo signo? Por ejemplo $-5-6-8-4$.
53	G:	Se suman.
54	E4:	**Porque como no** tienen **otro** signo.

55 S: ¿Por qué tengo que sumar si aquí dice menos, menos…?
56 E10: **Porque** todos son números negativos.
57 S: Porque todos son números negativos.
58 E11: Profe, **cuando** todos sean negativos o positivos se suman, **pero cuando** sean de distinto signo, uno positivo y otro negativo, se restan. [S asiente con la cabeza]
59 S: María paulina entonces si yo sumo estos [S se refiere al ejemplo propuesto en [52]] ¿con qué signo quedará?
60 E12: Con menos.
61 S: Que le debo a Reimundo y todo el mundo, le debo, le debo, le debo y le debo, ¿cuánto debo en total?
62 G: 23.
63 S: Entonces ¿cuánto debo pagar? Pues esos 23.

Es importante también informar que en la guía de "***Operaciones con los números enteros***" realizada por ***Sandra***, aparecen tareas como la descrita en la Figura 14. Esta tarea relaciona el cambio de temperatura en una ciudad con los números enteros. A partir de las afirmaciones de los dos personajes que allí intervienen se espera que los estudiantes **defiendan** una de las posiciones y al mismo tiempo **refuten** la otra. Las argumentaciones en este caso deben ser nutridas por conocimientos acerca de los números enteros y del valor absoluto.

Figura 14

Tarea 7 de la actividad 2



7. Durante un frente frío, la temperatura de Denver, Colorado bajó de 7 a -5. Kyla y Jason estaban hablando sobre el cambio de temperatura.

Kyla: "¡No puedo creer que la temperatura bajó 12°C
Jason: "¿De qué hablas? La temperatura solo bajó 2°C

¿Quién tiene la razón?

Nota. Se muestra una tarea de la guía "***Operaciones con los números enteros***" (2022).

Otra evidencia de esta subcategoría, se presenta en algunos momentos de la clase impartida por ***Fernando***. La transcripción 8 corresponde a un segmento de la discusión de la tarea 5 dispuesta en la guía "***Funciones por tramos y sus aplicaciones***" (Figura 15).

Figura 15

Tarea 5 de la guía "*Funciones por tramos y sus aplicaciones*"

5. Debido a problemas económicos una tienda de ropa debe cerrar, así que decidió poner sus productos en liquidación de manera que por compras mayores a 20000 obtendrán un 20% de descuento y por compras mayores a 60000 obtendrán un 50% de descuento. Suponiendo que cada prenda vale 10.000
   a. Hallar la función correspondiente, con su respectiva gráfica.
   b. Si pago 100.000 pesos ¿Cuántas prendas compro?

Nota. Tarea que es objeto de discusión en la clase de ***Fernando*** (2022).

El profesor comienza a establecer la función por tramos referida a la tarea propuesta a partir de **argumentos monológicos**, se pregunta y el mismo se responde [184], señala en el tablero que si no se compra ninguna prenda no se paga nada, si se cambia a x por 1, es decir, una prenda, se pagaría $\$10000$ y si se compran 2 se pagaría $\$20000$. Fijado el primer tramo de la función se comienza a construir el segundo de acuerdo con las condiciones dadas en la tarea. Por tanto, el profesor comienza a realizar una serie de **preguntas**, una de ellas alude al porcentaje de un número [188], que es contestada correctamente por E2 [189]. Inmediatamente Fernando pregunta en cuánto quedan las prendas si se hace el descuento del $20\ \%$ [190]. E4 se pronuncia y responde acertadamente [191].

Luego, se formula la parte de la función que es producto de la discusión en ese momento, la cual representa el precio que se debe pagar por la cantidad de prendas adquiridas. En el **diálogo** generado, E4 pregunta por qué (**IA**) el descuento no se les aplica a todas las prendas [193], pues el profesor ya había informado que, si por **ejemplo** se compraban 4 prendas, las dos primeras no tenían descuento. Por consiguiente, ***Fernando*** trae a colación, de forma graciosa, un **ejemplo** de la vida cotidiana relacionado con los descuentos que se aplican al comprar, en este caso, zapatos en un almacén. Advierte acerca de ser prudentes y averiguar bien el tema de los descuentos. E1 [196] aporta en la aclaración del descuento real que se aplica en dicha compra. Finalmente, enfocados de nuevo en la tarea, E12 **pregunta** si con la compra de dos camisas darían el descuento [199], en cuyo caso el profesor responde que no, que solo se aplica el descuento después de $\$20000$, o sea que se deben comprar más de dos camisas. En la Figura 16 se muestra la solución parcial de la tarea discutida en este apartado.

4.4.1.2. Transcripción 8: clase del profesor *Fernando*

184 F: A miren, si no compra nada pues no paga nada. Si compra una prenda, 10 mil, y si compra dos ¿cuánto? 20 mil.

185 E12: **Pero ya ahí** se aplica el descuento.

186 F: Ya enseguida vamos con el descuento. Le van a aplicar el descuento de las que se pasen de 20 mil, cosa que las dos primeras las van a cobrar a diez mil. Entonces ¿Quién me dice con qué precio empiezo aquí? Lo mismo de allá. O sea ¿Cuánto valen las dos primeras camisas?

187 G: 20

188 F: Entonces usted aquí debe empezar con 20000 más, ¡ojo pues! Le van a hacer un descuento del 20%, ¿cuál es el 20% de 10000?

189 E2: Dos mil.

190 F: ¿En cuánto queda la prenda?

191 E4: En ocho mil.

192 F: Entonces, ¡ojo pues! Ocho mil ¿por quién? Por x menos dos, porque van a ser las que se pasen de dos. O sea, si compra cuatro camisas, las dos primeras se las cobran a diez mil y…

193 E4: ¿**Por qué** el descuento no aplica para todas?

194 F: Porque ellos no van a ser tan bobos. [risas en el salón]

195 F: No, es que es verdad, es como cuando usted se va a los almacenes, pregunta: ¿cuánto valen esos zapatos? Señor valen 200 mil pesos, pero hoy tenemos un descuento, por el segundo par le hacemos un descuento del 40%, entonces usted se emociona todo, y yo les hago la pregunta ¿si usted compra los dos pares de zapatos …

196 E1: Le están dando 20 en cada uno. [se hace referencia al 20%]

197 F: Le están dando es el 20%, a usted no le están dando el 40%, entonces lo ponen a que se gaste otros 60 mil y que compre otro par de zapatos que usted no tenía plata para comprárselos, pero usted llega todo animado ¡cómo! ¡El 40! A parte que el día anterior le subieron otros 20 mil para que usted… hay que poner mucho cuidado con el "día sin iva", averígüese muy bien cuánto vale lo que usted va a comprar.

198 F: Bueno, ¡ojo pues!

199 E12: ¿F **pero si** uno compra dos camisas **no** le darían el descuento?

200 F: No, es después de 20 mil.

Figura 16

Solución parcial de la tarea 5

$f(x) = \{10000x, si\ x\ \in\ [0,2]$	$f(x) = \begin{cases} 10000x, si\ x\ \in\ [0,2] \\ 20000 + 8000\ (x-2), si\ x \in\ (2,7] \end{cases}$

Nota. La información es extraída del video de ***Fernando***/minuto 26:01. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

Es conveniente destacar que, las tareas como las que se informan en la Figura 15 son de aplicabilidad. Estas permiten que el estudiante pueda **argumentar** teniendo en cuenta el uso de **ejemplos** particulares y realizando **metáforas** con lo que acontece en la vida diaria. Asimismo, este tipo de tareas, según ***Fernando*** "*tienen la intención de enseñar que las matemáticas conllevan a tomar decisiones en la vida de manera lógica y concreta. [...] Inducen a tener un buen raciocinio de las cosas*" (comunicación personal, 13 de junio, 2022). Añade ***Fernando***, que ese es el objetivo que él quiere lograr como profesor en sus estudiantes.

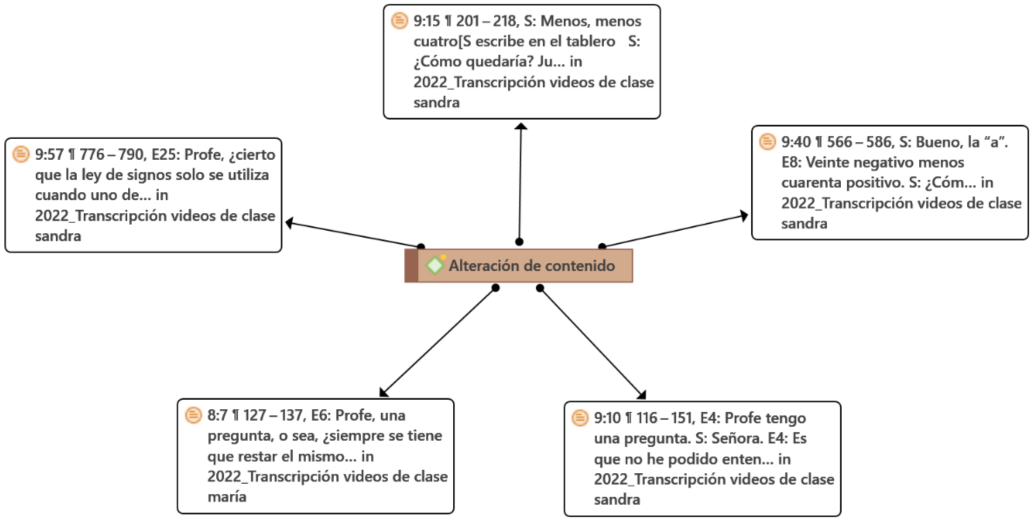
En definitiva, de acuerdo a las evidencias presentadas, ***Sandra*** y ***Fernando***, posiblemente hacen uso de la subcategoría *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad*, como medio para promover argumentación en los estudiantes. Por su parte, en la información recolectada que vincula a la profesora ***María***, no se pudo evidenciar que esta hiciera uso de la subcategoría antes mencionada para promover argumentación mediante tareas matemáticas en sus estudiantes.

4.5. Subcategoría: alteración de contenido

Otra forma en la que posiblemente se puede promover la argumentación mediante tareas matemáticas es a partir de la alteración de contenido. En los datos de dos de los profesores participantes se pudo encontrar que en el proceso de instrucción se presentan tareas matemáticas que implican una modificación en las mismas. Esto con la finalidad de sembrar la duda en los estudiantes de si es posible o no lo que se afirma, algo que algunas veces es desconocido para ellos. Lo anterior, en aras de afianzar los conceptos tratados y favorecer las argumentaciones que puedan surgir a raíz de lo que se plantea. Recursos como el ejemplo y la ilustración se resaltan en esta subcategoría. La Figura 17 informa de episodios que dan cuenta de esta subcategoría en las dos profesoras participantes del estudio.

Figura 17

Episodios identificados relacionados con la subcategoría alteración de contenido



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.5.1. Evidencias

En la transcripción 9, correspondiente a la clase de ***María***, se evidencia la subcategoría: alteración de contenido. A partir de un **ejemplo** que corresponde a la solución de la ecuación que se muestra en la Figura 18, surge una **pregunta** (**IA**) por parte de E6 [116] que motiva a la profesora a realizar una modificación en la ecuación, en aras de ofrecer una respuesta.

Figura 18

Solución de una ecuación lineal.

$$
\begin{gathered}
m + 25 = 36 \\
m + 25 - 25 = 36 - 25 \\
m + 0 = 11 \\
m = 11
\end{gathered}
$$

Nota. La información es extraída del video de ***María***/minuto 15:04. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

La profesora indaga acerca de qué pasaría si en vez de restar 25 se restara 24, los estudiantes responden que sobraría uno. E12 contesta erróneamente al decir que la solución sería m igual a 12, pero su aserción no es tenida en cuenta. La profesora continua con la alteración a la ecuación y E11 ante la **pregunta** en [121] responde que al final quedaría m más uno. De modo que ***María*** en el turno [123] muestra que al hacer esa modificación y en general al restar por otro número diferente al que debiese, seguiría la ecuación sin poderse resolver, debido a que todavía hay valores que acompañan a la incógnita. E12 solicita intervención (**acto comunicativo**) y plantea una **pregunta** al respecto [124] con la intención de **persuadir**. La profesora **defiende** la idea que siempre se debe restar por el mismo número para poder eliminarlo y de esta manera, evitar la situación que se presentó en la alteración que se **ejemplificó**, ya que conllevaría a la aplicación de más procesos para poder resolver la ecuación. La profesora ilustra este hecho en la Figura 19.

4.5.1.1. Transcripción 9: clase de la profesora *María*

116	E6	Profe, una pregunta, **o sea**, ¿siempre se tiene que restar el mismo valor?
117	M	¿El mismo valor? Sí, porque si tú por ejemplo restaras 24 ¿qué pasaría?
118	G	Le sobraría uno.
119	M	Vamos a mirarlo acá. [Se escribe en el tablero $m + 25 - 24 = 36 - 24$]
120	E12	m sería 12.
121	M	¿Quedaría m más qué?
122	E11	Más uno
123	M	O sea que yo aquí me estoy complicando porque todavía sigo teniendo un valor acompañándome a la incógnita y la idea es eliminarlo de una, listo. [E12 solicita intervención]
124	E12	Profe**, entonces** siempre que hagamos esa resta, por ejemplo $25 - 25$ nos tiene que dar cero, **o sea** siempre tenemos que restar el número igual o **podemos** restarle otro número.
125	M	El número igual, para anular, listo, porque mira lo que pasa si yo resto otro número. [Figura 19]

Figura 19

Solución parcial de una ecuación lineal

$$\boxed{\begin{array}{c} m + 25 - 24 = 36 - 24 \\ m + 1 \end{array}}$$

Nota. La Figura evidencia la afirmación del turno [125] en la transcripción 9. Es extraída del video de ***María***/minuto 15:50. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

La subcategoría alteración de contenido también se evidencia en la clase de ***Sandra*** que corresponde al video 1. En la clase se realizan una serie de **ejemplos** para practicar la ley de signos. La transcripción 10 da cuenta de este hecho. En un primer momento, E25 propone el **ejemplo** que se expresa en el turno [180], los estudiantes responden al unísono que al aplicar la ley de signos el resultado da negativo [182]. En un segundo momento, E5 con la ayuda de la profesora altera el ejercicio al cambiar el signo más por el menos como se denota en el turno [186]. Finalmente, al pedir a E26 cómo quedaría el resultado esta afirma que más cuatro. ***Sandra*** en el turno [189] por medio de una **ilustración**, informa que el resultado se puede escribir de dos formas; el cuatro con el signo más al lado izquierdo o simplemente el número cuatro. En turnos sucesivos, advierte que la primera forma es recomendable mientras se aprende correctamente el uso de la ley de signos, después bastará con solo escribir el número sin el signo más. Así, el alterar el contenido favorece, en este caso, a afianzar conocimientos del tema que es objeto de discusión, a la vez que promueve **argumentaciones** por parte de los estudiantes al **defender** un resultado que tiene en cuenta la ley de signos aplicada a números enteros.

4.5.1.2. Transcripción 10: clase de la profesora *Sandra*, video 1

178	S:	Ojo pues, Pablo deme un ejemplo.
179	E25:	menos cuatro más cuatro…**pues**…
180	S:	Yo ya le entendí. [S escribe: $-(+4)$]
181	S:	Aplico la ley de signos, menos por más da…
182	G:	Menos.
183	S:	[S escribe la respuesta, -4] Víctor uno que los dos sean negativos.
184	E5:	Menos cuatro…
185	S:	Menos…Menos qué.
186	S:	S: Menos, menos cuatro [S escribe en el tablero $-(-4)$]
187	S:	¿Cómo quedaría? Julieta.
188	E26:	Más cuatro.
189	S:	Menos por menos da más, si quiero lo pongo así o lo puedo dejar así. [S escribe $+4$, luego borra, y escribe 4]

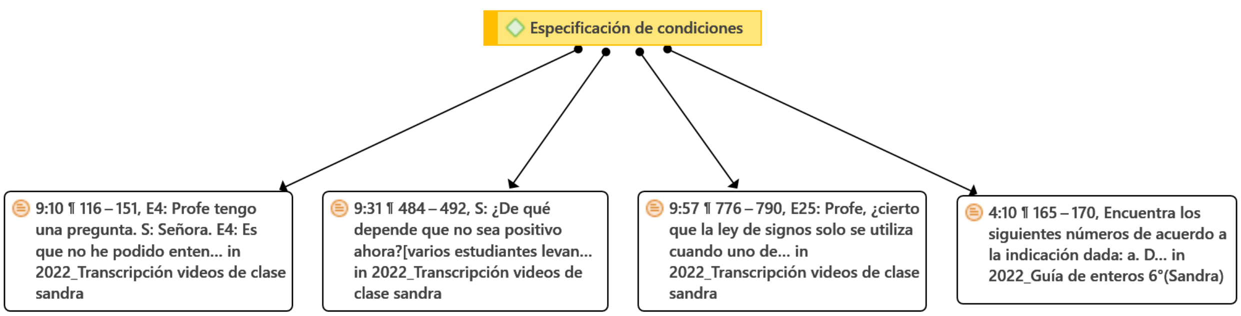
En síntesis, de acuerdo a las evidencias presentadas, ***María*** y ***Sandra***, posiblemente hacen uso de la subcategoría *alteración de contenido*, como una manera para promover argumentación en los estudiantes. Por su parte, en la información recolectada que vincula al profesor ***Fernando***, no se pudo evidenciar que éste hiciera uso de la subcategoría antes mencionada para promover argumentación mediante tareas matemáticas en sus estudiantes.

4.6. Subcategoría: especificación de condiciones

En el proceso de identificación de episodios o fragmentos que pudieran evidenciar intentos de promoción de argumentación mediante tareas matemáticas el investigador identificó que, en la información relacionada con uno de los profesores, había acciones/interacciones en las que se hacía necesario especificar condiciones para la resolución de una tarea. Esto se convertía en punto de partida para generar en los estudiantes posibles afirmaciones acompañadas por argumentaciones que defendían una postura tomada. Debido a las ambigüedades que podían presentarse en la formulación de la tarea o por la naturaleza misma de esta. Recursos como el ejemplo y la ilustración se resaltan en esta subcategoría. La Figura 20 informa de episodios o fragmentos relacionados con esta subcategoría de acuerdo con la información recolectada de la profesora ***Sandra***.

Figura 20

Episodios relacionados con la subcategoría especificación de condiciones



Nota. La Figura es extraída de Atlas.ti 22

4.6.1. Evidencias

En la transcripción 11 concerniente a un fragmento de la clase de ***Sandra*** registrada en el video 2, se evidencia la subcategoría especificación de condiciones. E25 formula una **pregunta** (**IA**) relacionada con la aplicación de la ley de signos y afirma que si (**IA**) el seis fuera positivo no se tendría que aplicar. La profesora informa que la ley de signos se usa cuando un número tiene doble signo [306]. E25 continua con el **ejemplo** de veinte más veinte que en palabras de ***Sandra*** no habría que hacerle nada, pero si se hace una modificación como se indica en [309] si se tendría que aplicar la ley de signos. El estudiante entiende en ese momento que esto ocurre porque (**IA**) hay un paréntesis. Sin embargo, la profesora interviene e indica que no necesariamente, la acción obedece a que se tiene doble signo. En ese sentido, prosigue con dos **ejemplos** para **ilustrar** la situación, uno en el que se aplica la ley de signos y otro en el que no [312]. E25 persiste con otro

ejemplo en el que el mismo, de acuerdo con el proceso de **persuasión** antes realizado por la profesora, responde acertadamente [313]. ***Sandra*** **defiende** la respuesta del estudiante y aclara que después no habrá necesidad de aplicar la ley de signos en casos como el que se presenta en [313]. En conclusión, E25 da las gracias a la profesora y manifiesta que sus intervenciones buscaban aclarar en qué ocasiones se pondría el doble signo más.

4.6.1.1. Transcripción 11: clase de la profesora *Sandra,* video 2

303	E25:	Profe, ¿**cierto que la ley de signos solo se utiliza cuando uno de los números es negativo**?
304	S:	No, mire [S le señala en el tablero un ejercicio resuelto para ejemplificar. No se tuvo registro de cuál fue el ejercicio]
305	E25:	**Por ejemplo**, **si fuera** 6 positivo **no** se tendría que usar.
306	S.	Es que la ley de signos se usa cuando un número tiene doble signo, ¡mira! Este tiene doble signo, más por menos, menos.
307	E25:	**O sea que por ejemplo** 20 más $20\ldots$
308	S:	S: Por ejemplo 20 más 20, que le va a hacer a eso, nada.
309	S:	Pero si tiene así, 20 más menos 20. [S escribe: $20 + (-20)$]
310	E25:	¡Ah!, **si está entre** paréntesis.
311	S:	No necesariamente, tiene doble signo, este número tiene doble signo, le aplico la ley de signos.
312	S:	Por ejemplo, menos, menos 8, tiene doble signo, menos por menos, más 8. Pero si yo tengo menos 8 más $5\ldots$
313	E25:	**Pero si por ejemplo** aquí hubiera entre paréntesis más, **igualmente** me daría lo mismo. [E25 se refiere a: $+(+6)$]
314	S:	¡Ah! En ese caso me da más, porque más por más me da más. Ese es el caso que es cómo a veces innecesario hacerlo, pero yo se los pongo hacer ahora porque lo estamos aprendiendo, pero ustedes después van a ver que más y más da más, entonces no lo ponen sino una vez.
315	E25:	Si profe, era para saber **cuándo** ponerlo y **cuando no**.
316	S:	Más y más, usted puede poner directamente un solo más y ya.
317	E25:	Gracias profe.

En la información plasmada en la guía de "***Operaciones con los números enteros***" realizada por la profesora ***Sandra***, también se evidenció la subcategoría especificación de condiciones. En particular, en la tarea 6 de la actividad 1 de la guía se especifican unas condiciones para su realización. A partir de ello, el estudiante en la puesta en común debe **argumentar** el porqué de la escogencia de los números enteros que cumplen la condición dada (**defender**). Al mismo tiempo que **persuada** con **argumentos** a los demás compañeros, en relación con la solución que ofrece para dar respuesta a la tarea propuesta. La Figura 21 informa la tarea 6 de la actividad 1 dispuesta en la guía antes mencionada.

Figura 21

Tarea 6 de la actividad 1

6. Encuentra los siguientes números de acuerdo a la indicación dada:

a. Dos números enteros positivos cuya diferencia sea 42.
b. Dos números enteros negativos cuya diferencia sea 49.
c. Dos números enteros de diferente signo cuya diferencia sea 120.

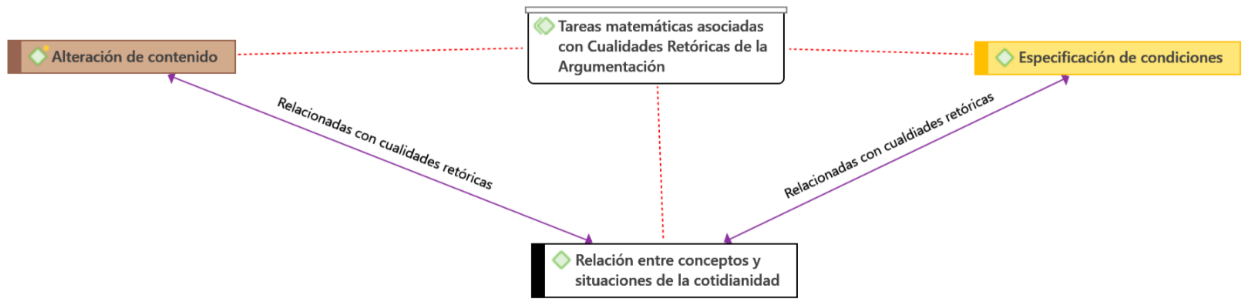
Nota. Para la realización de la tarea se debe considerar la condición dada (2022).

En definitiva, la subcategoría *especificación de condiciones* solo se evidenció en la información recolectada de la profesora ***Sandra***. A pesar de que los episodios o fragmentos eran escasos, se tomó la decisión de incluir dicha subcategoría como una posible forma de promover la argumentación mediante tareas matemáticas en los estudiantes. Aquí es preciso informar que, no fue determinante el número de unidades de análisis que correspondían a esta u otra subcategoría para presentarse como una posible respuesta a la pregunta de investigación, bastaba con una evidencia clara que diera cuenta del fenómeno estudiado.

A partir de las tres subcategorías antes mencionadas, a saber: *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad, alteración de contenido* y *especificación de condiciones*; el investigador identificó que estas se asociaban con recursos retóricos usados al argumentar. Por tanto, según el referente teórico principal de este estudio, se optó por agrupar las tres subcategorías en una categoría central cuyo nombre hace referencia a *tareas matemáticas asociadas con Cualidades Retóricas de la Argumentación* (Figura 22).

Figura 22

Tareas matemáticas asociadas con Cualidades Retóricas de la Argumentación



Nota. La Figura es extraída de Atlas.ti 22

4.7. Categoría: tareas matemáticas asociadas con Cualidades Retóricas de la Argumentación

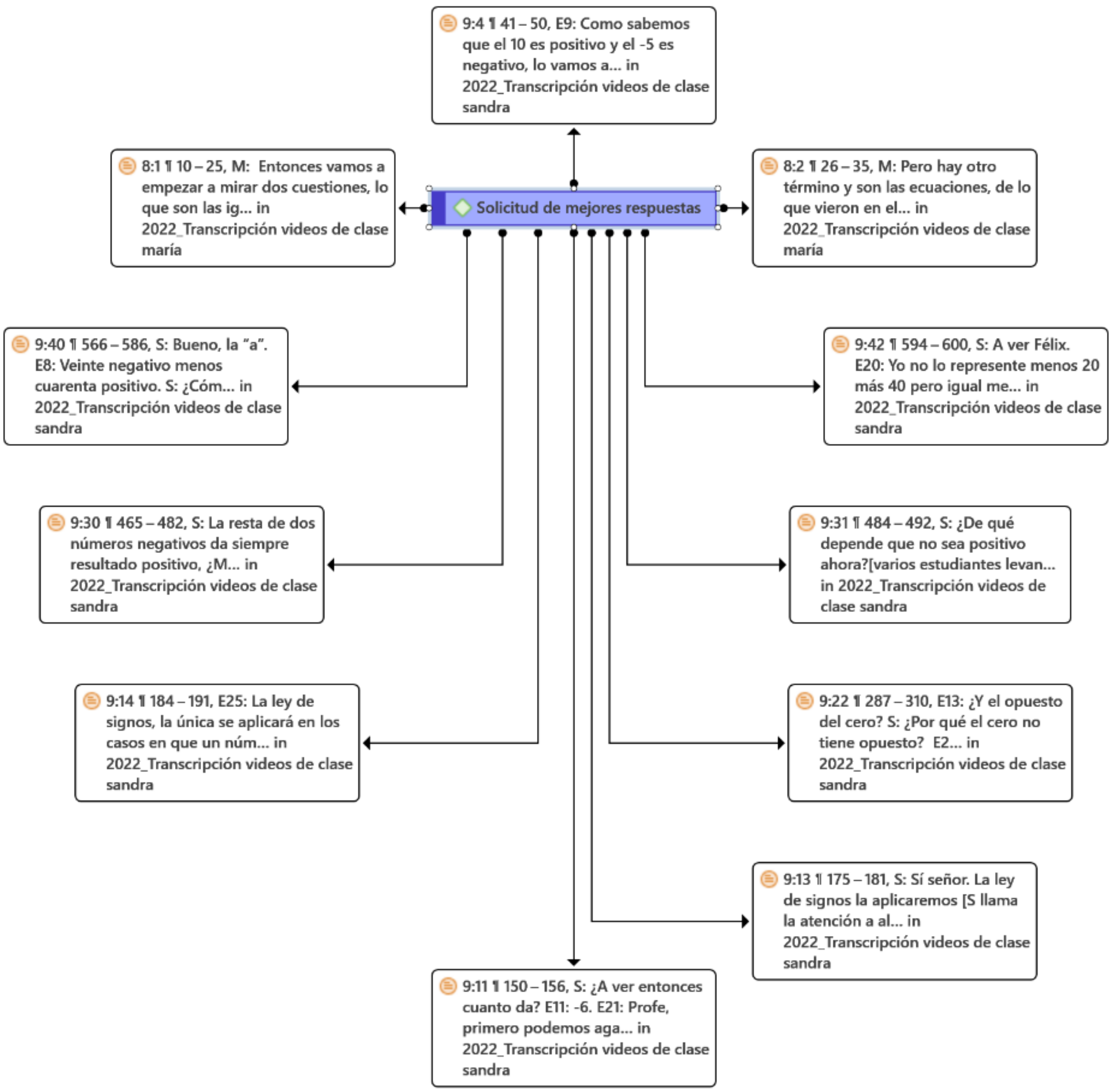
Como ya se ha mencionado, esta categoría central agrupa las subcategorías: *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad*, *alteración de contenido* y *especificación de condiciones*. Dada la naturaleza de los datos identificados en las subcategorías, esta categoría comprende tareas matemáticas que se relacionan con recursos retóricos usados al argumentar, como el ejemplo, la ilustración, el modelo y la metáfora. Asimismo, es común la presencia de funciones argumentativas como persuadir y defender, ya sea puntos de vista o conocimientos acerca del referente temático que es objeto de estudio. Dichos conocimientos, al igual que las creencias y experiencias de los sujetos implicados (profesor-estudiantes), determinan la forma en cómo estos se involucran con la argumentación. Las evidencias fueron presentadas a través de las tres subcategorías antes mencionadas, dado que en estas hay mayor poder explicativo del fenómeno de la promoción de argumentación por profesores mediante tareas matemáticas.

4.8. Subcategoría: solicitud de mejores respuestas

En la búsqueda de dar respuesta a la pregunta de investigación, el investigador encontró en la información de las dos profesoras participantes de este estudio, una manera en la que posiblemente estarían promoviendo la argumentación mediante tareas matemáticas. En algunos episodios de las videograbaciones se evidencia que las profesoras en interacción dialógica con los estudiantes, solicitan mejores respuestas frente a una situación planteada, ya sea para justificar o validar las posturas que se toman en el discurso. En ese sentido, hay una valoración en el discernimiento y juzgamiento de las argumentaciones ofrecidas por los estudiantes, los cuales ofrecen garantías que son apoyadas por evidencias tanto empíricas como teóricas para enriquecer sus argumentaciones. La Figura 23 informa de episodios identificados que dan cuenta de esta subcategoría. De estos se escogerán algunos para analizarlos a la luz del referente teórico principal, haciendo hincapié en cualidades lógicas de la argumentación.

Figura 23

Episodios que dan cuenta de la subcategoría solicitud de mejores respuestas



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.8.1. Evidencias

En la transcripción 12 referida a la clase de ***María*** se evidencia la subcategoría: solicitud de mejores respuestas. Dentro de la estructura argumentativa la profesora formula la pregunta (**dato**) acerca de lo que no puede faltar al hablar de ecuación. En [21] E8 proporciona una **garantía**. El estudiante tiene conocimiento de la x, su experiencia con esta surgió posiblemente al trabajar con libros de matemáticas o de las explicaciones dadas anteriormente por la profesora. Ésta **refuta** la respuesta de E8 [22], quien inmediatamente ofrece como **respaldo** que, pueden (**cualificador modal**) ser otras letras [23].

Al continuar con la búsqueda de responder a la pregunta inicial, E9 afirma que las ecuaciones tienen un resultado, **garantía** que es propuesta en [25]. La profesora de nuevo plantea que pasa si en una ecuación solamente (**cualificador modal**) se tiene a x, E10 **respalda** la anterior respuesta que dio E8, que puede (**cualificador modal**) ser cualquier letra. ***María*** prosigue e indica a modo de **conclusión**, que las ecuaciones tienen un resultado, son igualdades, requieren en el proceso de solución utilizar operaciones inversas y tienen una incógnita que puede ser cualquier letra. Frente a esta última afirmación E3 interviene y **justifica** que la x representa el número incognito hasta que se encuentra [34], es decir, hasta que se resuelve la ecuación. La profesora **valida** lo dicho por E3.

4.8.1.1. Transcripción 12: clase de la profesora *María*

20	M:	Pero hay otro término y son las ecuaciones, de lo que vieron en el laboratorio cuando yo empiezo a hablar de ecuación ¿qué es lo que no me puede faltar?
21	E8:	La x.
22	M:	Pero será que solo encuentro x.
23	E8:	Profe **también** *pueden*[15] ser otras letras.
24	M:	Entonces la ecuación, listo, tiene una equis, mientras tanto tiene una igualdad ¿qué más tiene?
25	E9:	Un resultado.
26	M:	Vamos a encontrar un resultado. ¿Solamente tengo x?
27	E10:	**No**, *puede ser cualquier* letra.
28	M:	Puede ser cualquier letra. [una niña pide permiso para ir al baño]
29	M:	Entonces, puede ser cualquier letra, tenemos que aprender a identificar eso porque a veces nos presentan ecuaciones y como no nos salió con una x

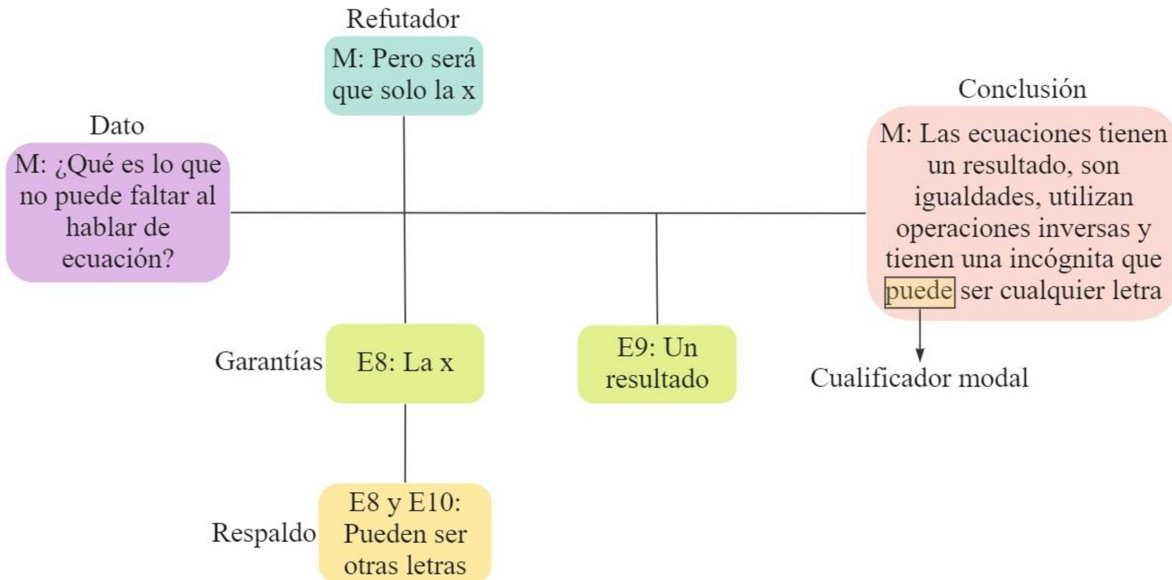
[15] Se escribirá en cursiva los cualificadores modales identificados en las transcripciones correspondientes a los estudiantes.

		entonces sencillamente ya estamos… [se interrumpe la clase porque un estudiante no encuentra su bolso].
30	M:	Muy bien chicos, vamos entonces a continuar, entonces cuando hablamos de ecuaciones, las ecuaciones son una igualdad porque cuando nosotros veíamos lo que eran las igualdades necesariamente por ahí nos aparecía el igual ¿cierto? ¿qué pasaba con el laboratorio? Cuando nosotros encontrábamos el valor de x ¿qué nos permitía ese valor de x?
31	E9:	Descubrir el resultado.
32	M:	Descubrir el resultado, es decir, ese resultado que encontramos es lo que va a permitir que se cumpla la igualdad, entonces esa igualdad como dice acá, es, allí se desconoce un número y el número desconocido se va a representar con una letra, a esa letra nosotros la vamos a llamar incógnita, ¿eso es claro?
33	M:	Para resolver una ecuación vamos a utilizar operaciones inversas ya vamos a mirar qué es eso, Emiliano.
34	E3:	Profe, **o sea** que la letra que utilizamos para la incógnita, al final se *podría* **decir que** la letra es igual a **pues** el número, **entonces** x representa el número incognito *hasta que* se encuentra.
35	M:	Exacto esa letra es el valor desconocido que yo voy a encontrar.

La Figura 24 informa de los seis componentes lógicos que, dan estructura a la argumentación suscitada en la transcripción 12. Dentro del esquema argumentativo, no solo se muestran las intervenciones de los estudiantes sino las de la profesora. Esta *solicita mejores respuestas* en aras de promover la argumentación.

Figura 24

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 12



Nota. La información presenta los componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 12. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA. Los colores de cada componente son solo para identificarlos en la estructura, aunque igualmente estos son nombrados[16].

A continuación, se presentan dos evidencias de esta subcategoría en relación con la clase de ***Sandra***, registrada en el video 1. Las evidencias están dadas a partir de las transcripciones 13 y 14.

La transcripción 13, que se conecta con la transcripción 2 usada para evidenciar la subcategoría de indagación de ideas previas, gira en torno al resultado de la operación $-5+10$. Esta es propuesta previamente por la profesora y actúa como **dato** en la estructura argumentativa. E9 propone un proceso de solución con base en algunas **garantías** como considerar al 10 positivo y 5 negativo. ***Sandra*** estima que la **argumentación** de E9 está bien, sin embargo, promueve que haya otras **argumentaciones**. E5 expresa que primero (**IA**) se debe mirar cual es el número mayor [37]. En ese marco la profesora ofrece un **respaldo** a la **garantía** de E5 e indica que se debe mirar el de mayor valor absoluto [38]. Luego, E5 añade que después de saber que el 10 representa el número mayor se realiza la resta entre este y el 5 (**garantía**). Así, se llega al resultado de 5, positivo

[16] Esta condición aplica para las demás figuras que presenten la estructura argumentativa.

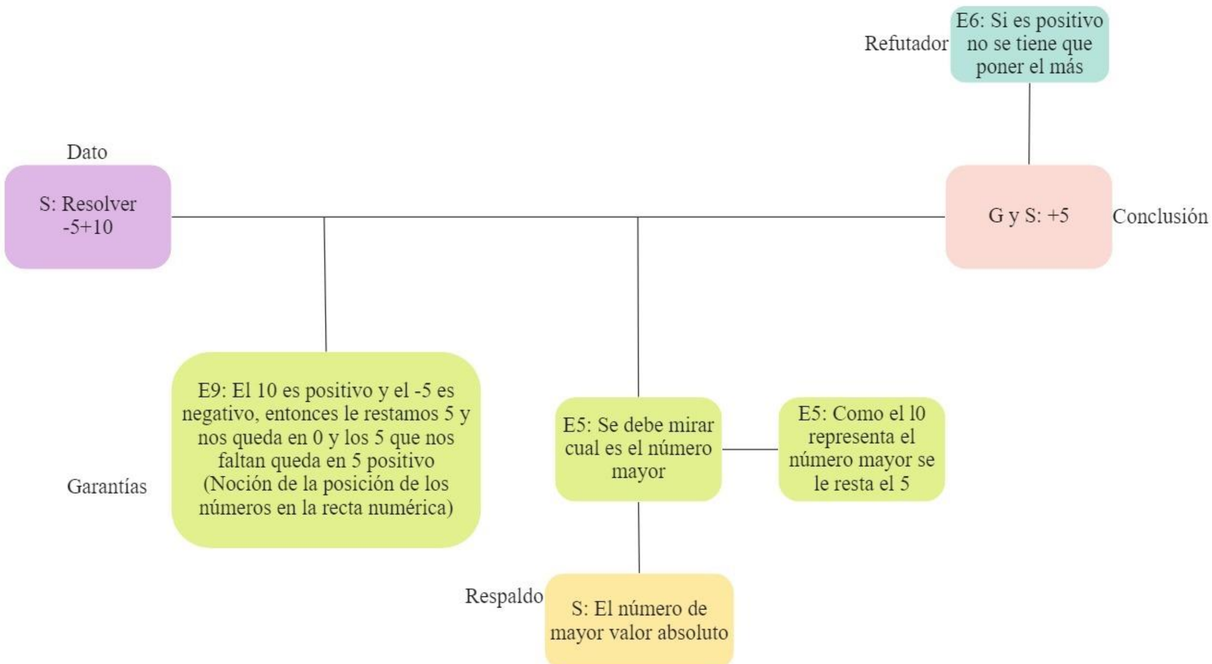
(**conclusión**), ya que para el grupo de estudiantes es claro que se pone el signo del mayor valor absoluto, la profesora **valida** dicho resultado. En [44] E6 **refuta** la forma en cómo se escribió la respuesta dado que no es necesario ponerle el signo más a un número que se sabe es positivo. La Figura 25 informa de componentes lógicos que dan estructura a la argumentación suscitada en la evidencia presentada.

4.8.1.2. Transcripción 13: clase de la profesora *Sandra,* video 1

35	E9:	**Como sabemos** que el 10 es positivo y el -5 es negativo, lo vamos a restar, **entonces** le restamos 5 y **nos queda** en cero y los 5 **que nos falta** queda ya en 5 positivo.
36	S:	Bueno, Víctor que dice. O sea, así está bien, tal vez haya unas frases más claras.
37	E5:	***Primero que todo***, lo que hay que hacer es mirar el mayor.
38	S:	¡Ah!, entonces quien es el mayor valor absoluto, es decir, quién vale más si no tuviera signo, ¡ah! El 10. Entonces, ¿qué operación hago?
39	E5:	**Entonces** después de saber que el 10 es el mayor se le resta el 5.
40	S:	Entonces a 10 le resto 5, y me quedan 5, ¿y le pongo el signo de quién?
41	G:	Del mayor.
42	S:	¿Del mayor qué?
43	G:	Valor absoluto. [S escribe en el tablero $+5$]
44	E6:	Profe, **pero si** es positivo **no** lo tiene que poner.

Figura 25

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 13



Nota. La información presenta los componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 13. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA.

Por otro lado, la transcripción 14 corresponde a un episodio que comienza con la pregunta de E13, la cual es reformulada por ***Sandra*** y se convierte en el punto de partida para la discusión (**dato**). Los estudiantes E2, E7, E10, E16, E8, E18, E11, E27 ofrecen diferentes **garantías** en aras de **justificar** el por qué el cero no tiene opuesto. Se evidencia a lo largo de la transcripción, como la profesora solicita mejores respuestas, debido a que no se convence de las afirmaciones suscitadas por los estudiantes e incluso les **refuta**. Particularmente, les pregunta a E18 y a E27 para promover en estos la argumentación. Las respuestas que ofrece E18 en los turnos [280] y [286] son **refutadas** por ***Sandra***, quien en [287] acude a una analogía con el agua que se congela a 0° para informar que el cero es un punto de referencia (**conclusión**). E11 en el turno [288] intenta **respaldar** dicha conclusión. La idea del cero como punto de referencia se complementa en [291] para **refutar** la aseveración de E10 en el turno [290].

4.8.1.3. Transcripción 14: clase de la profesora *Sandra*, video 1

268 E13 ¿**Y** el opuesto del cero?

269 S ¿Por qué el cero no tiene opuesto?

270 E2 **Porque** ese es la mitad.

271 E7 **Porque** es cero.

272 S Yo les dije por qué el cero no tiene opuesto.

273 E10 **Porque** es número donde **no** hay *nada*.

274 E16 **Porque** es una base.

275 E2 **Porque no** tiene valor.

276 S ¿Por qué el cero no tiene qué?

277 G Valor.

278 E8 **No** tiene signo

279 S ¿Por qué el cero no tiene opuesto? [S le pregunta a E18]

280 E18 **Porque no** tiene *nada*.

281 S No.

282 E11 **Porque** es el encuentro entre negativo **y** positivo.

283 S ¿Gabriela, por qué?

284 E27 **Porque no** tiene valor absoluto.

285 S Porque el cero no tiene signo, no es ni positivo ni negativo. Antonia. [Interviene E18]

286 E18 ¿**No es lo mismo** que decir que **no** tiene *nada*?

287 S No. Se acuerdan cuando vimos el video del señor que decía que ponía a congelar el agua, y él dijo, si yo pongo el agua a cero grados se congela, no es que no pase nada, si pasa, el cero es un punto de referencia, ¿en el nivel del mar no hay nada? Si hay algo, está ese nivel.

288 E11 **Pero** se toma por arriba.

289 S Y se toma para una referencia, sobre el nivel del mar y por debajo del nivel del mar.

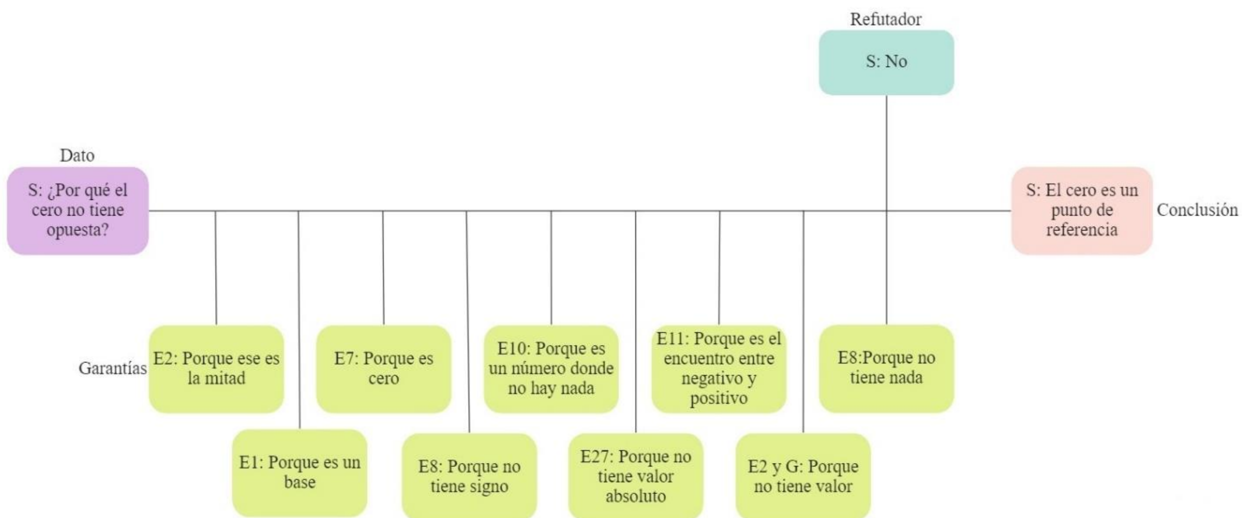
290 E10 **Es como** una puerta entre los números negativos **y** los positivos.

291 S Pues, es un punto de referencia, cuando usted dice, el punto de encuentro va a ser la cancha, ese es como el punto cero, cuando a usted le dicen que siga un mapa, una inducción, no es que en el cero no haya nada, es un punto de referencia.

La Figura 26 informa de componentes lógicos que, grosso modo, dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 14. En el esquema se destacan las diversas garantías que son ofrecidas por los estudiantes para responder a la pregunta inicial que actúa como dato.

Figura 26

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 14



Nota. La información presenta componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 14. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA.

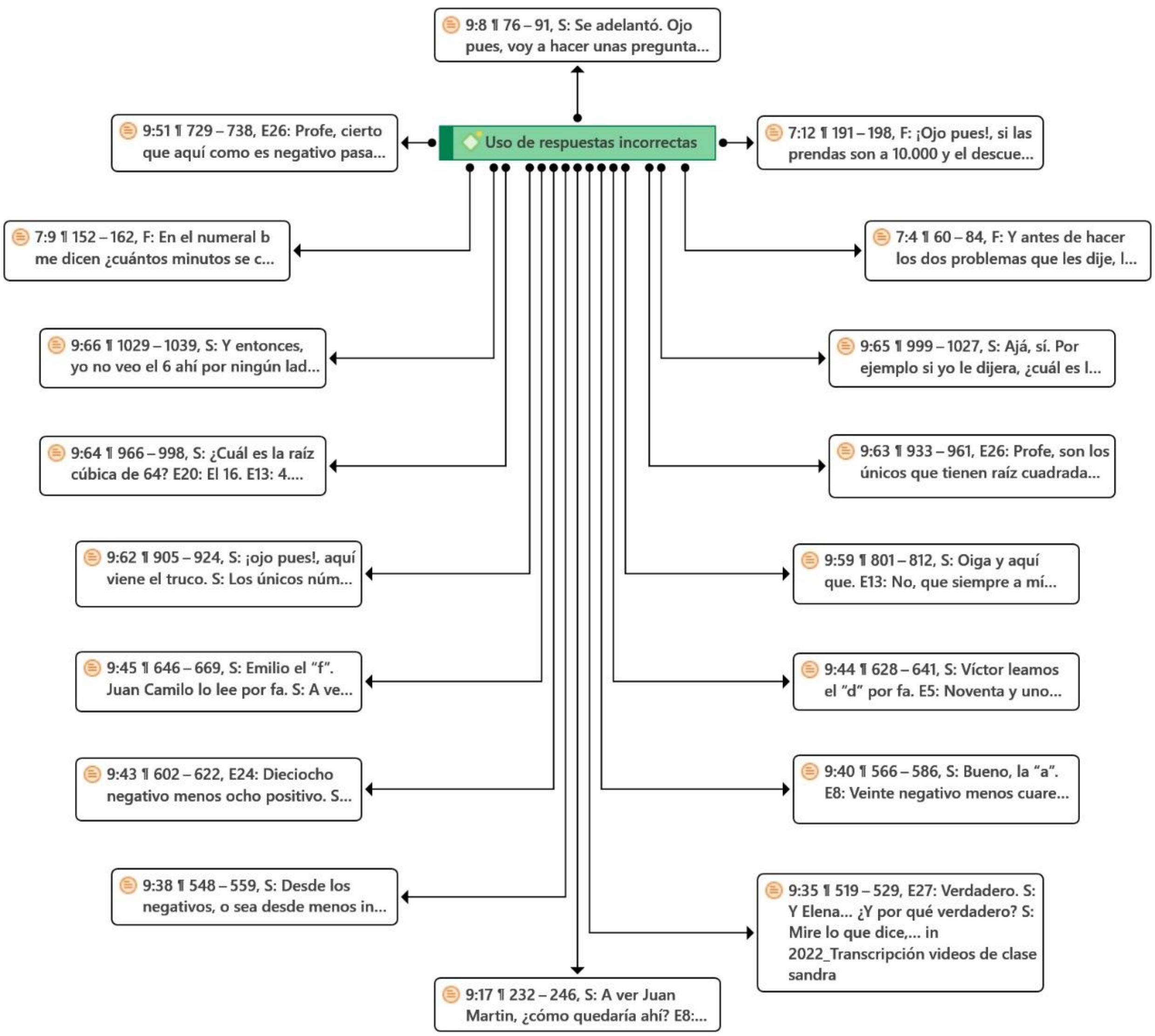
Las evidencias presentadas a través de las transcripciones y los esquemas elaborados en el que se muestran los componentes lógicos involucrados en la argumentación, dan cuenta de cómo ***María*** y ***Sandra***, a partir de la *solicitud de mejores respuestas*, promueven la argumentación en los estudiantes. De esta manera se piden argumentos convincentes que nutren las argumentaciones dadas en la discusión de una tarea matemática. Cabe agregar que, en la información recolectada que vincula al profesor ***Fernando***, no se pudo evidenciar esta subcategoría como una de las formas que usa para promover argumentación mediante tareas matemáticas en sus estudiantes.

4.9. Subcategoría: uso de respuestas incorrectas

Esta subcategoría surge luego de reconocer en los datos de dos de los profesores participantes del estudio, que algunas tareas matemáticas partían de respuestas incorrectas o ambiguas que ofrecían los estudiantes. Estas respuestas eran tomadas por el profesor como nuevos datos para suscitar justificaciones sólidas y de esta manera, poder validar las afirmaciones que se presentaban. En concreto, las respuestas incorrectas se convierten en una herramienta que potencializa la argumentación al mismo tiempo que incide en el aprendizaje de los estudiantes; esto a partir del papel proactivo del profesor, quien posibilita la aparición de la argumentación al interactuar con los estudiantes. La Figura 27 informa de episodios identificados que dan cuenta de esta subcategoría como una forma viable para la promoción de la argumentación mediante tareas matemáticas.

Figura 27

Episodios que dan cuenta de la subcategoría uso de respuestas incorrectas



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.9.1. Evidencias

La transcripción 15 corresponde a la clase de ***Sandra***, registrada en el video 2. Comienza con el planteamiento de una de las tareas de la guía "***Operaciones con los números enteros***". La profesora luego de escribir el ejercicio en el tablero solicita a E4 que la resuelva (**dato**). Esta plantea una **pregunta** que indica una confusión en torno a la aplicación de la ley de signos [145]. La profesora la **refuta** [146] y la estudiante suscita otra **pregunta** en términos del resultado de la operación, ofreciendo una respuesta incorrecta a la tarea. ***Sandra*** vuelve y **refuta**. El grupo al unísono responde que el resultado no es el que insinúa E4, es decir hay **refutación**. La profesora empieza a brindar **garantías** y a **justificar** por qué no puede dar 10, a partir de la analogía con la "deuda", que es un recurso para entender las operaciones entre números negativos (**respaldo**). Después de ello, E4 ofrece como respuesta parcial el número 26 [153], ya que se suman los números para (**IA**) ver cuánto se debe [156]. Finalmente, ***Sandra*** **pregunta** si la respuesta es positiva o negativa, tanto E18 como E4 responden que negativa. La Figura 28 informa de la respuesta a la tarea discutida, la cual dentro de la estructura argumentativa es la **conclusión** a la que se llega.

4.9.1.1. Transcripción 15: clase de la profesora *Sandra*, video 2

142	S	Julián leamos el b. [S hace referencia a una de las tareas de la guía "***Operaciones con los números enteros***"]
143	E24	Dieciocho negativo menos ocho positivo. [S escribe en el tablero $-18-(+8)$]
144	S	¿Cómo quedaría la operación entonces? [E4 sale al tablero]
145	E4	¿**No sería** menos por menos?
146	S	¿Cuál menos por menos amor?
147	E4	¿Queda más 10?
148	S	¿Si quedará más 10?
149	G	¡**No**!
150	S	Miren, debe 18 y debe 8, ¿Cuánto debe? Usted me debe a mi 18 y a él le debe 8, ¿solo debe 10?
151	G	¡**No**! [se escuchan risas, burlas, ruido en general]

152	S	Escuchen, como a mí me interesa que ella también lo entienda, yo le estoy dando el ejemplo, muy bueno para los que ya se lo saben. Entonces mire pues…
153	E4	Da 26.
154	S	¡Eso!
155	S	Si usted le debe 18 y le debe 8.
156	E4	Se suman **para** ver cuánto debo.
157	S	¿Cuánto debe en total?
158	E4	26.
159	S	¿Queda con 26?
160	E18	Menos.
161	S	¿Positivo?
162	E4	**No**, negativo.

Figura 28

Tarea de la guía "Operaciones con los números enteros"

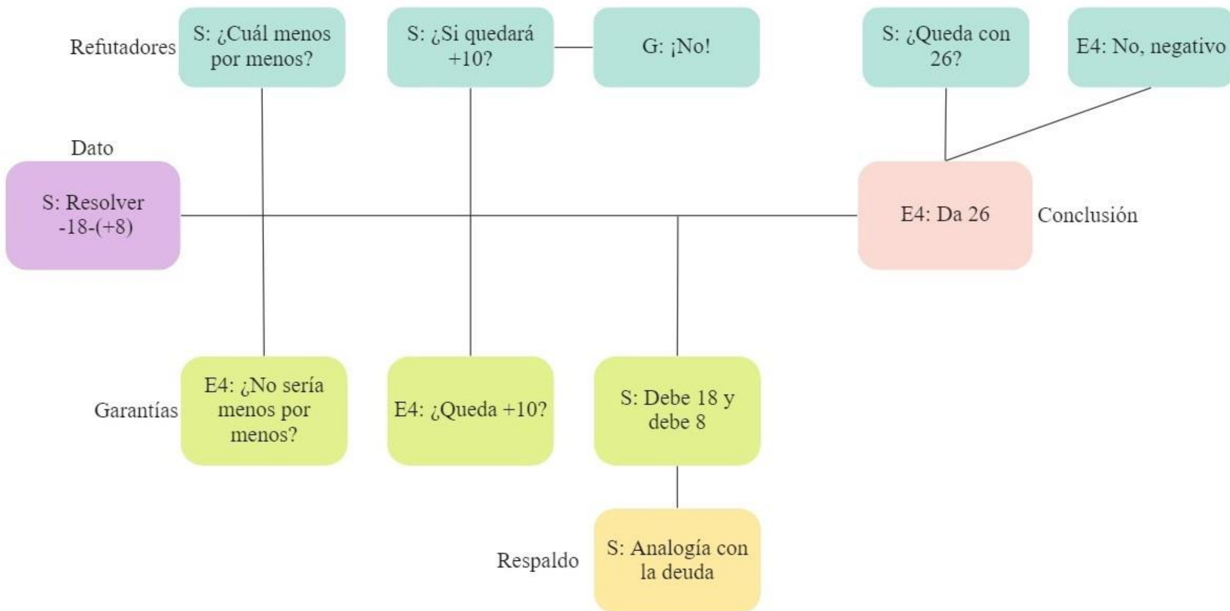
$$\boxed{(b)\ -18-(+8)=-18-8=-26}$$

Nota. Solución de la tarea que es objeto de discusión en la transcripción 15. La solución fue extraída del video 2 de ***Sandra***/minuto 15:19. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

Asimismo, la Figura 29 informa de componentes lógicos que dan estructura a la argumentación a partir de lo evidenciado en la transcripción 15. Se destaca la actuación de los refutadores en desacuerdo con las garantías presentadas y la conclusión parcial a la que se llega.

Figura 29

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 15



Nota. La información presenta los componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 15. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA.

Ahora bien, La transcripción 16 se genera a partir de la clase de **Fernando** en la que se discute la solución del literal b de la tarea 4 (Figura 10). El profesor indaga acerca de lo que habría que hacer para resolver la tarea. Especialmente **pregunta** si se hace uso de la primera o segunda función (Figura 11). E1 y E9 contestan la segunda (**garantía**) y la primera (**garantía**), respectivamente. ***Fernando* refuta** la aserción de E9 y pregunta por qué no puede ser la primera. E7 en el turno [145] deja entrever que la primera no puede ser porque (**IA**) el problema habla de 56 mil pesos, es decir que se pasa de 40 mil (**respaldo**). El profesor **valida** tal afirmación [146]. Luego, a partir de un argumento monológico (el profesor se pregunta y el mismo se responde) plantea la ecuación que sirve para hallar el número de minutos consumidos si se pagan 56 mil pesos (Figura 30 – **conclusión** a la tarea).

4.9.1.2. Transcripción 16: clase de *Fernando*

139 F: En el numeral b me dicen ¿cuántos minutos se consumieron si se pagaron 56 mil pesos? ¿Ustedes creen que qué habría que hacer?

140 E10: Que x sea 56 y encontrar…

141 F: ¿O sea igualar quien a 56000? ¿La primera o la segunda?

142 E1: La segunda.

143 E9: La primera.

144 F: ¿Por qué no la primera?

145 E7: **porque** se pasa de 40

146 F: Porque la primera tiene un máximo el 40.

147 F: Entonces ahora sí, si se consumieron 56 mil pesos ¿cuántos minutos se consumieron?

148 F: Entonces yo cojo, igualo 40 mil más 160 por t menos 100 y lo igualo ¿a quién? A 56000 [Figura 30]

Figura 30

Ecuación generada a partir de una tarea sobre función por tramos

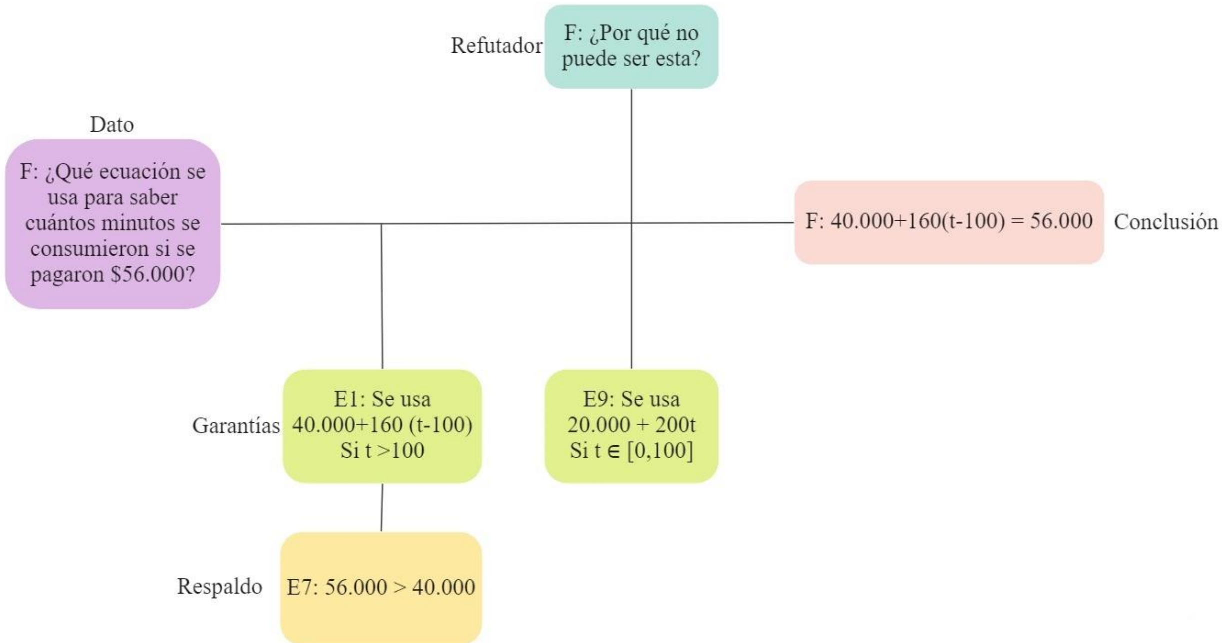
$$\boxed{40.0000 + 160\,(t - 100) = 56.000}$$

Nota. Información extraída del video de ***Fernando***/minuto 18:45. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

En relación con la anterior transcripción de la clase de ***Fernando***, la Figura 31 presenta el esquema argumentativo que da cuenta de los componentes lógicos identificados para evidenciar cómo el uso de respuestas incorrectas puede promover argumentación en los estudiantes.

Figura 31

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 16



Nota. La información presenta los componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 16. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA.

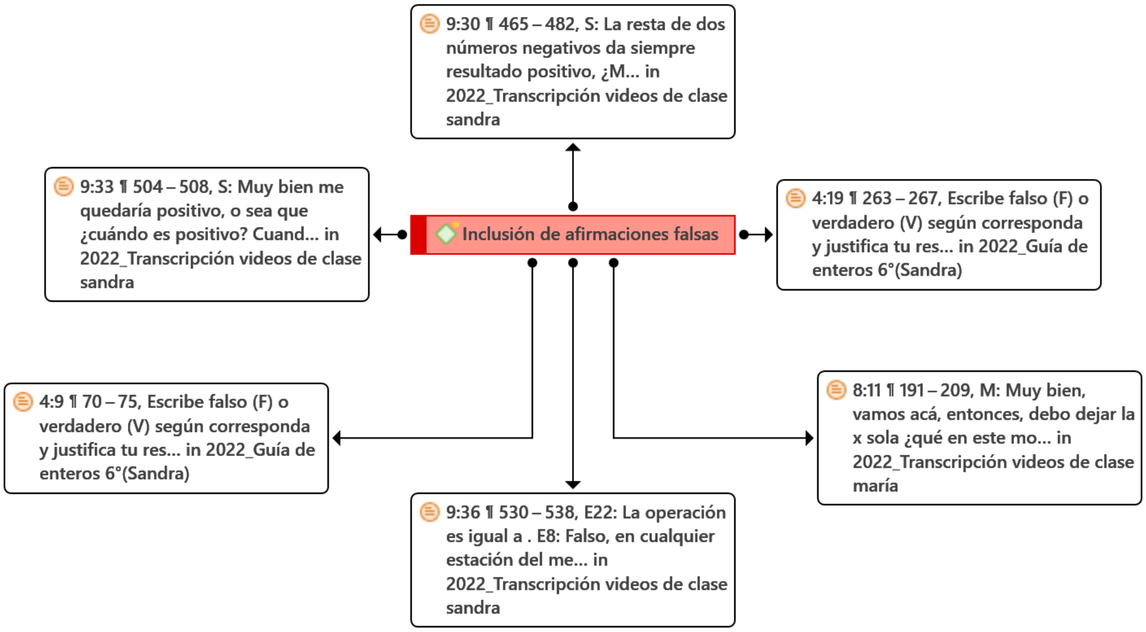
En síntesis, a través de las transcripciones y el análisis de las mismas, se logra evidenciar cómo las respuestas incorrectas de los estudiantes se convierten en una herramienta que el profesor utiliza para promover la argumentación mediante tareas matemáticas. Es menester comunicar que, en la información recolectada que vincula a la profesora ***María***, no se pudo evidenciar que ésta hiciera uso de respuestas incorrectas de los estudiantes para promover argumentación.

4.10. Subcategoría: inclusión de afirmaciones falsas

En el proceso de elucidar la manera en que los profesores participantes promueven argumentación mediante tareas matemáticas, se encontró en algunas acciones de las dos profesoras del estudio, que éstas plantean tareas matemáticas en las que se incluyen afirmaciones falsas. Las cuales ejercen como medio para que los estudiantes utilicen recursos lógicos que permitan refutar las afirmaciones, a la vez que se justifica y se valida lo contrario a estas. Este tipo de tareas amplían el escenario de la argumentación y facilitan el convencimiento por parte de los estudiantes frente al conocimiento expuesto. La Figura 32 informa de episodios o fragmentos que hacen alusión a esta subcategoría.

Figura 32

Episodios o fragmentos relacionados con la subcategoría inclusión de afirmaciones falsas.



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.10.1. Evidencias

La transcripción 17 considera el proceso de solución de la ecuación $2x + 4 = 14$. ***María*** inicia un **diálogo** con los estudiantes en el cual los indaga para luego introducir una afirmación falsa que se evidencia en la Figura 33.

Figura 33

Falsedad en el proceso de solución de una ecuación

$$2x + 4 = 14$$
$$2x + 4 = 14 - 4$$

Nota. En torno a esta ecuación gira la discusión informada en la transcripción 17. Fue extraída del video de ***María***/minuto 22:58. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

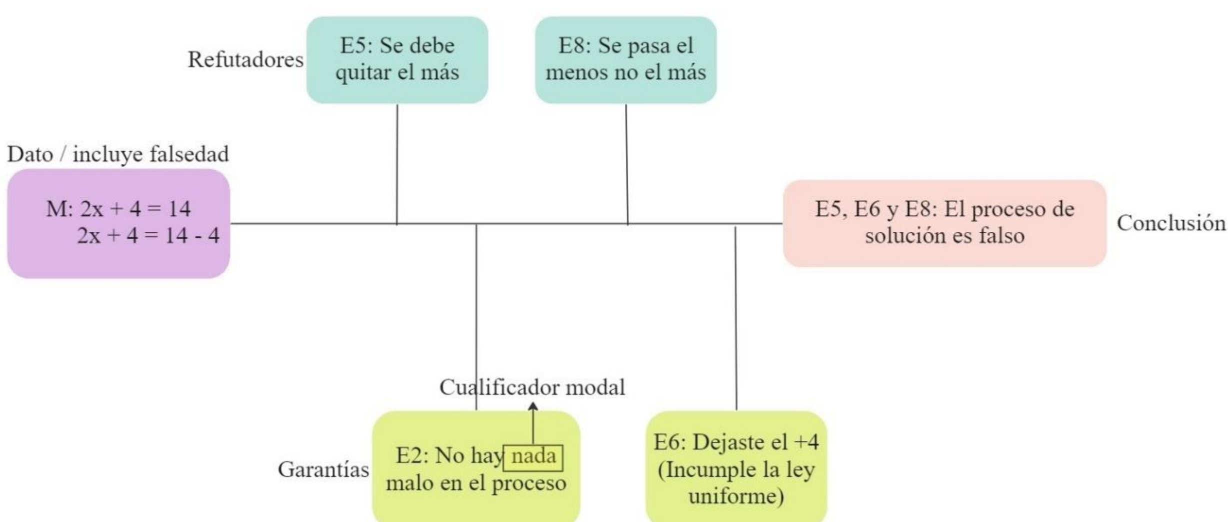
E5 afirma que se debe quitar el más (**refutación**) que aparece en el proceso de solución de la ecuación. La profesora **pregunta** que está mal en la ecuación. E8 expresa que se tiene que pasar el menos no (**IA**) el más. E2 deja entrever que la ecuación está bien, **valida** el proceso de ***María*** al responder que nada (**cualificador modal)** está mal. Por su parte, E7 manifiesta que está mal poner el 14 (**refutación)**. Finalmente, E6 **justifica** que el error está en dejar el más cuatro. Él hace uso de la ley uniforme como evidencia teórica (**garantía**). La Figura 34 informa de componentes lógicos que dan estructura a la argumentación suscitada en la evidencia presentada.

4.10.1.1. Transcripción 17: clase de la profesora *María*

178	M:	Muy bien, vamos acá, entonces, debo dejar la x sola ¿qué en este momento me está estorbando?
179	G:	El 4.
180	M:	Bueno vamos a empezar por ese 4, entonces, $2x$, este 4 me está estorbando, como está sumando, ¿cómo debo hacer para anular ese 4?
181	G:	Menos.
182	M:	Menos, y ¿qué hago con ese menos? ¿Dónde lo pongo?
183	E4:	En el otro lado.
184	M:	En el otro lado. Vuelvo a poner aquí el 4 y pongo 14 menos 4 ¿o qué hago?
185	E5:	Quitas el más.
186	M:	¿Qué está mal en esta ecuación?
187	E8:	Profe **que ahí** tienes que pasar el menos **no** el más.
188	E1:	Profe, **ya sé** que puedo hacer.
189	M:	Aquí, ¿Qué puse mal en esta ecuación?
190	E2:	*Nada*.
191	E7:	El 14.
192	M:	¿Está bien?
193	E6:	**Que le dejaste** el más cuatro.

Figura 34

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 17



Nota. La información presenta los componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 17. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA.

La anterior evidencia (transcripción 17) informa cómo ***María*** incluye una afirmación falsa en la realización de una tarea, la cual se convierte en medio para promover argumentación en los estudiantes. Es preciso comunicar que en la entrevista realizada a la profesora esta expresa que "l*a argumentación tiene que ver con esas justificaciones que realizan los estudiantes para dar cuenta de los razonamientos o los procesos que se establecieron para dar solución a algún problema*" (comunicación personal, 13 de junio, 2022). Es decir, se intuye que ***María*** asocia la argumentación con justificar, una de las intenciones que en este estudio se ha tratado. No obstante, ello no quiere decir que sea la única intención que la profesora concibe de la argumentación, puesto que a lo largo del análisis se han dilucidado las demás intenciones en los datos recolectados de ella. Por esta razón, el diseño fenomenológico de corte interpretativo utilizado en este estudio, no se limitó a trabajar con la información que los profesores proporcionaron a través de las entrevistas, sino de analizar lo que externamente el investigador pudo interpretar de las videograbaciones de clase y de las guías elaboradas por los profesores.

Ahora bien, en las clases de ***Sandra*** también se manifiesta que esta incluye afirmaciones falsas posiblemente para promover argumentación en los estudiantes. En la transcripción 18, perteneciente al video 2, se informa un episodio que corresponde a la tarea del literal b de la actividad 1 dispuesta en la guía "***Operaciones con los números enteros***" (Figura 35).

Figura 35

Tarea propuesta en la guía "Operaciones con los números enteros"

b. La resta de dos números negativos da siempre un resultado positivo ___

Nota. En esta tarea se debe responder verdadero o falso según la afirmación.

La instrucción para la tarea (**dato**) informada en la Figura 35 es responder si la afirmación es verdadera o falsa y **justificar** el por qué. La profesora le **pregunta** a E8 el cual expresa que la afirmación es falsa. ***Sandra*** realiza de nuevo la **pregunta** a otro estudiante quien **justifica** que es falsa, según este porque (**IA**) dos números negativos no se pueden restar. Ante ello, la profesora escribe la diferencia de dos números negativos en el tablero (ver lado izquierdo de la Figura 36) para **refutar** la aseveración del estudiante. Los estudiantes coindicen que está bien escrito porque hace referencia a la afirmación. Ella intenta indagar en los estudiantes si siempre (**cualificador modal**) el resultado dará positivo y comienza con el proceso de solución del contraejemplo. E6 expresa que, luego de aplicar la ley de signos (**garantía**) el resultado sería menos seis (**conclusión**) (ver lado derecho de la Figura 36).

Figura 36

Contraejemplo presentado en la clase de Sandra

$(-8)-(-2)$	$-8+2$ -6

Nota. Este contraejemplo es extraído del video 2 de ***Sandra***/minuto 3:50. La Figura se reformó dado que la original no era de buena calidad. Esta se informa en el Anexo 8.

Dado el resultado la profesora vuelve y hace la pregunta de si siempre (**cualificador modal**) es positivo, los estudiantes contestan que no (**IA**) [28]. Continúa preguntando de qué depende (**cualificador modal**) que no sea positivo como en el contraejemplo informado en la Figura 36. E4 manifiesta que depende (**cualificador modal**) de que los números y los signos sean diferentes o (**IA**) iguales (**garantía**). E21 dice que depende (**cualificador modal**) de los números que estén (**garantía**). Al respecto, E19 afirma que depende (**cualificador modal**) del valor absoluto de los números (**respaldo**). La profesora **valida** dicha respuesta y en acuerdo con los estudiantes se expresa que si es más grande el número negativo en la suma el resultado va a dar negativo.

4.10.1.2. Transcripción 18: clase de la profesora *Sandra*, video 2

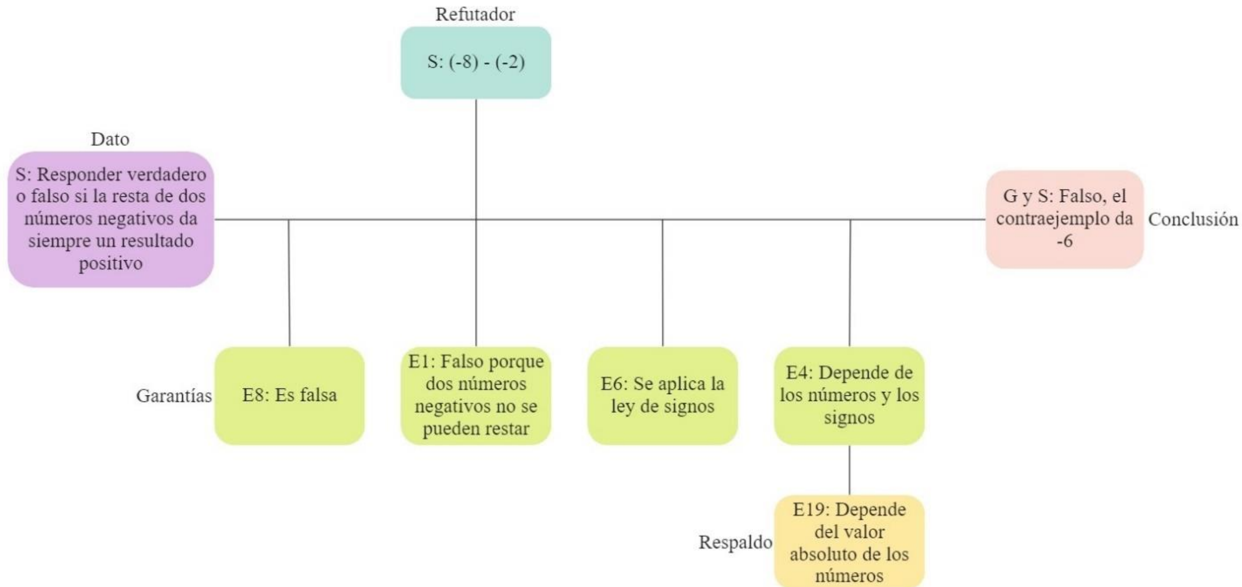
13	S:	¿Martín que dijiste tu ahí?
14	E8:	Falso.
15	S:	¿Falso por qué? ¿A ver por qué, Pedro? ¿Falso por qué o verdadero por qué?
16	E1:	Falso **porque no** se *pueden* restar dos números negativos.
17	S:	No se pueden restar dos números negativos. A ver, aquí dice, la resta de dos números negativos, mírela acá, ¿Se escribiría así?
18	G:	Sí.
19	S:	Me están diciendo que, siempre, siempre, da positivo. ¿Aquí que sería?
20	E6:	Menos ocho más dos.
21	S:	¿Por qué más?
22	E6:	Más **porque** menos por menos da más.
23	S:	Signos diferentes se…
24	G:	Restan.
25	E6:	Menos 6.
26	S:	Seis y pongo el signo del que sea mayor.
27	S:	¿Siempre es positivo?
28	G:	**No**.

29	S:	¿De qué depende que no sea positivo ahora? [varios estudiantes levantan la mano]Antonia.
30	E4:	De que los números, los signos sean diferentes **o** sean iguales.
31	S:	¿Samuel qué dice?
32	E21:	Profe, **yo digo que** *depende* de los números que estén.
33	S:	Depende de los números que estén. Nicol.
34	E19:	*Depende* del número del valor absoluto.
35	S:	Exacto.
36	S:	Si es más grande el número negativo el resultado me va a dar …
37	G:	Negativo.

El proceso de indagación suscitado a partir de la transcripción 18, informa la preponderancia que tiene la función argumentativa de justificar en la clase de ***Sandra***, que se contrasta con lo expresado por ésta en la entrevista realizada, ya que considera la argumentación "*como sinónimo de justificación*" (comunicación personal, 13 de junio, 2022). Incluso cuando se le pregunta directamente acerca de si promueve la argumentación mediante tareas matemáticas, hace referencia que en las guías que ella elabora hay tareas en las que los estudiantes "*pueden responder a ciertas afirmaciones como falso o verdadero, y justificar con el apoyo de una teoría, ya sea para validar o contradecir*" (comunicación personal, 13 de junio, 2022). La Figura 37 informa de componentes lógicos que dan estructura a la argumentación, la cual gira en torno a la inclusión de una afirmación falsa.

Figura 37

Componentes lógicos que dan estructura a la argumentación presentada en la transcripción 18



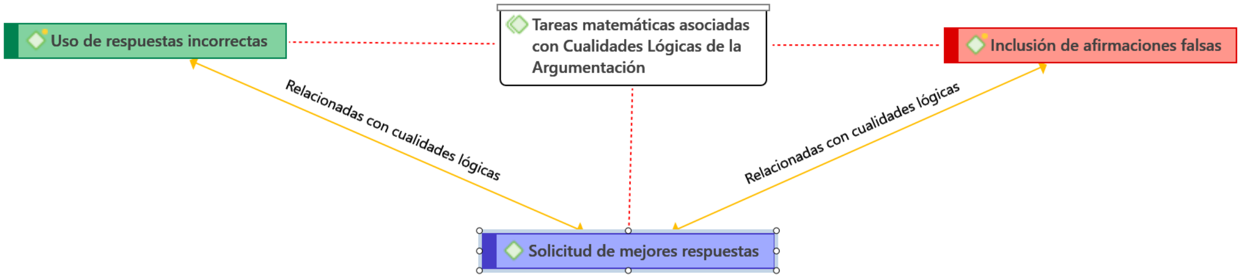
Nota. La información presenta los componentes lógicos de la argumentación identificados a partir de la transcripción 18. La estructura está dada de acuerdo a la interpretación que se hizo del MTIA.

En definitiva, de acuerdo a las evidencias presentadas, ***María*** y ***Sandra*** posiblemente hacen uso de la inclusión de afirmaciones falsas como medio para promover argumentación en los estudiantes. Por su parte, en la información recolectada que vincula al profesor ***Fernando***, no se pudo evidenciar que éste hiciera uso de la subcategoría antes mencionada para promover argumentación mediante tareas matemáticas en sus estudiantes.

Ahora bien, el investigador agrupo las tres subcategorías antes mencionadas, es decir, *solicitud de mejores respuestas*, *uso de respuestas incorrectas* e *inclusión de afirmaciones falsas*, en una categoría central denominada *tareas matemáticas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación* (Figura 38). Dado que las propiedades de los datos de las subcategorías guardaban relación con cualidades lógicas de la argumentación.

Figura 38

Tareas matemáticas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación



Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.11. Categoría: tareas matemáticas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación

De acuerdo a los datos recolectados y analizados de los profesores participantes en aras de indagar como promueven la argumentación mediante tareas matemáticas, se pudo identificar que algunas subcategorías podían agruparse en una categoría central denominada *tareas matemáticas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación*. Esta categoría se relaciona con tareas matemáticas en las que se manifiestan con mayor claridad componentes que dan estructura a la argumentación. Es decir, pueden aparecer elementos como dato, garantía, respaldo, cualificador modal, refutador, conclusión; que se articulan para validar y justificar proposiciones de una manera lógica y coherente. Las evidencias de esta categoría fueron presentadas a través de las subcategorías *solicitud de mejores respuestas*, *uso de respuestas incorrectas* e *inclusión de afirmaciones falsas*. Debido a que en estas hay mayor poder explicativo del fenómeno de la promoción de argumentación por profesores mediante tareas matemáticas.

4.12. Síntesis del análisis y resultados.

Las subcategorías presentadas a lo largo del análisis que se agruparon en tres categorías centrales, dan cuenta de cómo los profesores participantes del estudio promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. La Tabla 8 ofrece un resumen, en el cual las viñetas indican la presencia de las distintas subcategorías en los datos recolectados de ***María, Sandra*** y ***Fernando***.

Tabla 8

Subcategorías presentes en los datos recolectados de los tres profesores participantes.

Categoría	**Subcategorías**	***María***	***Sandra***	***Fernando***
Tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación.	Indagación de ideas previas.	✓	✓	✓
	Andamiaje del profesor.	✓	✓	✓
Tareas matemáticas asociadas con Cualidades Retóricas de la Argumentación.	Relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad.		✓	✓
	Alteración de contenido.	✓	✓	
	Especificación de condiciones.		✓	
Tareas matemáticas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación.	Solicitud de mejores respuestas.	✓	✓	
	Uso de respuestas incorrectas.		✓	✓
	Inclusión de afirmaciones falsas.	✓	✓	

Nota. Elaboración propia.

En la Tabla 8, también se indica con un color diferente cada subcategoría. Estos colores se asignaron en el momento de la codificación realizada en Atlas.ti 22 para la identificación y diferenciación de las diversas subcategorías. Por tal motivo algunas figuras presentadas, que han sido extraídas del software, poseen dicho color distintivo. En la Figura 39 se informa cómo fue la distribución de las subcategorías a partir de los datos recolectados de los tres profesores participantes.

Figura 39

Presencia de las subcategorías en los datos recolectados de los tres profesores

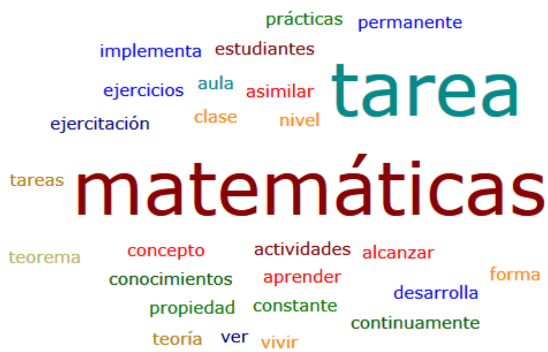
Nota. La información es extraída de Atlas.ti 22

4.12.1. Promoción de argumentación por los tres profesores

Es importante señalar, como punto de convergencia, que los tres profesores usaron tareas matemáticas dotadas principalmente de preguntas para promover la argumentación. Asimismo, las tareas matemáticas abarcaron varias acepciones que se pudieron evidenciar en las formas en las que estas fueron presentadas en el análisis. Este hecho se coteja con las definiciones dadas en el marco teórico a partir de algunos autores y las diversas definiciones que expresaron también los tres profesores participantes. Al respecto, la Figura 40 informa una nube de palabras que se realizó con las respuestas obtenidas de los profesores al preguntarles sobre qué conciben como tarea matemática. Se mencionan palabras como actividades, prácticas, ejercicios, etc., las cuales se relacionan estrechamente con la tarea matemática y amplían su significado.

Figura 40

Nube de palabras acerca de la definición de tarea matemática



Nota. La nube de palabra se exportó de Atlas.ti 22.

En este estudio no se pudo establecer un patrón identitario de la forma en que cada profesor promueve la argumentación. Sin embargo, se pueden hacer algunas alusiones de acuerdo a los resultados obtenidos de las distintas subcategorías presentes en los profesores. La Tabla 8 y la Figura 39 servirán de comunicación para acompañar las menciones que se harán.

En ***María***, a pesar de que no se hicieron presente tres de las ocho subcategorías, se destaca la manera cómo esta actúa de andamiaje para promover la argumentación en sus estudiantes. Estos participaban en la discusión de tareas, ya sea para ofrecer argumentos o para realizar preguntas al respecto. Las transcripciones dieron cuenta de cómo algunos estudiantes de grado 5° responden al estímulo de la profesora, de la cual requieren mayor presencia para avanzar en el referente temático tratado. En síntesis, de acuerdo a los datos recolectados de ***María***, la profesora tiende a favorecer el diálogo en su clase. Esto con el fin de que sus estudiantes brinden explicaciones, pregunten o refuten las afirmaciones dadas por los demás compañeros en relación con la tarea matemática que es objeto de discusión.

En el caso de ***Sandra*** se informa que las ocho subcategorías estuvieron presentes en los datos recolectados de esta profesora. Este hecho quizá se deba a que de ella se obtuvo mayor información, puesto que se pudieron tener como insumo, dos videograbaciones de clase y algunas tareas dispuestas en la guía "*Operaciones con los números enteros*", las cuales permitieron elucidar cómo promovía la argumentación mediante tareas matemáticas en sus estudiantes. Se destaca entre las maneras que usa para promover la argumentación, el *uso de respuestas* *incorrectas*. Estas potencializan la argumentación permitiendo que, los estudiantes justifiquen la falsedad en las tareas que se presentan al mismo tiempo que avancen en la apropiación del concepto trabajado. Cabe agregar que, solo en los datos de ***Sandra*** se evidenció la subcategoría *especificación de condiciones*.

Por otro lado, de los datos del profesor ***Fernando*** solo se obtuvieron evidencias de cuatro subcategorías. Al respecto, es de informar que la guía "*Funciones por tramos y sus aplicaciones*" elaborada por el profesor, no era rica para evidenciar de forma escrita intentos de promoción de argumentación, por esa razón no aparece en la Figura 39. Además, la clase que se registro era más del tipo explicativa. De ahí que en las transcripciones referidas a este profesor predomine su intervención en relación con la de los estudiantes. De hecho, en algunos episodios se pudieron identificar argumentos monológicos de ***Fernando*** (se preguntaba y el mismo se respondía). Ello limitó vislumbrar la forma en cómo promovía la argumentación en los estudiantes del grado 11°. Se evidenció que son pocos los estudiantes que exponen sus puntos de vista. De igual forma, son exiguas las preguntas por parte de estos, lo cual se contrasta con la participación activa que tuvieron los estudiantes de 5° y 6°. En definitiva, la promoción de argumentación por parte del profesor, se evidenció en mayor medida con la subcategoría *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad*, puesto que para ***Fernando*** es importante que los estudiantes vean en las matemáticas un área del conocimiento que ayuda a tomar decisiones en la vida de manera lógica y concreta.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones en aras de responder a la pregunta de investigación y estimar el alcance del objetivo trazado. Del mismo modo, se discuten los resultados obtenidos a la luz de lo que informa la literatura al respecto. Por otro lado, se evalúa la pertinencia del marco teórico utilizado, y los aportes a este, a partir del presente estudio. También, se describen algunas limitaciones que se tuvieron en el desarrollo de la investigación. Por último, se precisan algunas prospectivas derivadas de este trabajo y posibles temas de investigación que, a futuro, puedan aportar a la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas por parte de profesores y en sí, a asuntos que atañen a la argumentación que tiene lugar en el aula de clase de matemática.

5.1. Sobre el cumplimento del objetivo investigativo

Este estudio permitió analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Al respecto, se encontró que los profesores participantes usaron tareas matemáticas dotadas principalmente de preguntas para promover argumentación. Asimismo, en los datos se lograron identificar, en total ocho maneras de promover la argumentación por medio de tareas relacionadas con: *Indagación de ideas previas, andamiaje del profesor, relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad, alteración de contenido, especificación de condiciones, uso de respuestas incorrectas, inclusión de afirmaciones falsas* y *solicitud de mejores respuestas*. Estas se agruparon en tres categorías centrales que hacían alusión a cualidades de la argumentación. La Figura 41 informa las categorías y subcategorías establecidas que dan cuenta de la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas.

Figura 41

Categorías y subcategorías establecidas que dan cuenta de la promoción de argumentación mediante tareas matemáticas

Nota. La información se exportó de Atlas.ti 22, el título central se realizó en Word.

Se constata que los tres profesores participantes hacen uso de tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación. Mediante estas tareas se generaron diálogos que permitieron tanto a los estudiantes como al profesor explicar o refutar afirmaciones que se presentaron a raíz de la discusión de un enunciado, tesis o proposición. En particular, la profesora ***Sandra*** emplea las ocho subcategorías como maneras de promover la argumentación, mientras que en los otros dos profesores no se pudieron evidenciar algunas de estas de acuerdo a los datos recolectados. De ahí, que no se registraran evidencias en ***María*** de las subcategorías: *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad*, *especificación de condiciones* y *uso de respuestas incorrectas*. Por su parte, en ***Fernando*** solo se manifestaron, adicional a las subcategorías pertenecientes a tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación, las subcategorías: *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad* y *uso de respuestas incorrectas*.

Las evidencias que se presentaron para analizar cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas, fueron fruto de un proceso de codificación llevado a cabo en el software de análisis de datos cualitativos Atlas.ti 22. Es importante informar que los fragmentos escogidos para evidenciar el fenómeno en mención, pudieron haber sido otros, además, no importó el número de veces que estos aparecían en las diferentes subcategorías y en relación con cada participante, dado que el interés radicaba en la presencia de estos, así fuese en una sola ocasión.

5.2. Discusión

Este estudio entra a aportar a los escasos trabajos que se han desarrollado con el objetivo de indagar acerca de la promoción de argumentación por parte de profesores en el ámbito de la educación matemática, especialmente, mediante el uso de tareas matemáticas. A continuación, se traen a colación algunos trabajos que por sus objetos de estudio guardan relación con esta investigación, por tanto, se toman como referentes para la discusión. Estos se mencionaron en el Apartado 1.1.

En primer lugar, este estudio se compara con el trabajo realizado por Rumsey y Langrall (2016). Estas profesoras dentro de las cinco estrategias de instrucción para promover efectivamente el uso de la argumentación por parte de los estudiantes en el contexto de la exploración de las propiedades aritméticas, encontraron que proporcionar apoyos lingüísticos a los estudiantes permite el desarrollo del discurso de la argumentación. Lo cual se equipara con la subcategoría *andamiaje del profesor*, porque es este quien actúa como apoyo y estimula que se produzcan interacciones dialógicas en el aula de clase, promoviendo así la argumentación.

Otra estrategia que destacan las profesoras es el discutir contenido rico y familiar, ya que los estudiantes pueden expresar libremente lo que saben acerca de un contenido matemático. Al respecto, el presente estudio se relaciona con esta estrategia cuando se formula la subcategoría *indagación de ideas previas* que hace parte de las tareas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación. En ese sentido, los estudiantes ofrecen argumentos para responder a preguntas que giran en torno a conocimientos incluso obtenidos en el ámbito extraescolar. Igualmente, la subcategoría *especificación de condiciones* coincide casi en su totalidad con la descripción que ofrecen las profesoras al referirse a otra estrategia de instrucción. Ambas apuntan a la necesidad de especificar condiciones para la resolución de una tarea. Asimismo, la estrategia introducir afirmaciones falsas se iguala con la subcategoría *inclusión de afirmaciones falsas,* las dos vinculadas a intenciones argumentativas de justificar y validar. También, la estrategia de manipular un contenido familiar para que no lo sea propuesto por las investigadoras, se asemeja a la subcategoría *alteración de contenido,* en el que se hacen modificaciones a las tareas para crear un contexto que permita la aparición de la argumentación.

En síntesis, dadas las relaciones establecidas entre los hallazgos del presente estudio con las estrategias encontradas por Rumsey y Langrall (2016), es menester generalizar dichas estrategias a diferentes niveles de escolaridad y referentes temáticos, como formas de promover la argumentación en los estudiantes.

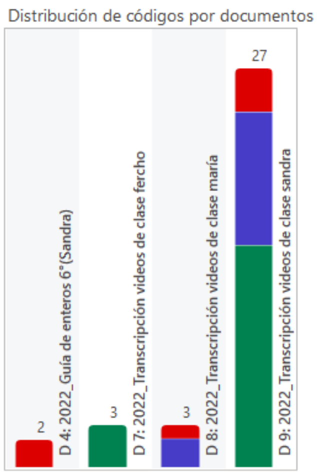
En segundo lugar, se discuten los hallazgos que se reportan en Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2021) con lo encontrado en el presente estudio. Los investigadores presentan cuatro tipos de preguntas que el profesor utiliza para promover la construcción de argumentos en los estudiantes. La primera, que demanda una respuesta por parte de estos del tipo sí o no, y la segunda, que insta a evaluar los argumentos de sus compañeros, se relacionan con las subcategorías pertenecientes a la categoría tareas matemáticas asociadas con Cualidades Dialécticas de la Argumentación, cuyas intenciones argumentativas se enfocan en explicar y refutar.

Es conveniente aclarar que, las tareas matemáticas expuestas en el presente trabajo se componen en su mayoría de preguntas, de ahí, que se puedan comparar los hallazgos de ambas investigaciones. Por otro lado, el tercer tipo de pregunta tiene como objetivo pedir una justificación en la que los estudiantes ofrecen garantías para validar una afirmación, de manera que es clara la correspondencia con las tareas matemáticas asociadas a Cualidades Lógicas de la Argumentación, cuyas intenciones argumentativas se focalizan en justificar y validar. Y la cuarta pregunta relacionada con solicitar un dibujo como respaldo se ajusta al tipo de tareas matemáticas asociadas con Cualidades Retóricas de la Argumentación.

En tercer lugar, esta investigación presentó como una de las subcategorías el *uso de respuestas incorrectas*. Al respecto, los estudios de Zhuang y Conner (2022) y Pérez (2021) reportan cómo el profesor gestiona el uso de las respuestas incorrectas de los estudiantes para promover en estos la argumentación. A pesar de que no se evidenció esta subcategoría en ***María***, fue la de mayor ocurrencia dentro de las tareas matemáticas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación, es decir, es frecuente por ejemplo en ***Sandra*** usar esta subcategoría como forma de promover la argumentación (Figura 42).

Figura 42

Distribución de las subcategorías pertenecientes a las tareas asociadas con Cualidades Lógicas de la Argumentación



Nota. La figura es exportada de Atlas.ti 22, el tamaño de las barras de color indica mayor ocurrencia. El verde corresponde a la subcategoría *uso de respuestas incorrectas*, el azul *solicitud de mejores respuestas* y el rojo *inclusión de afirmaciones falsas*.

En síntesis, dentro de los hallazgos que presentan los estudios objetos de discusión, hay coincidencia con seis de las ocho subcategorías que reporta este trabajo. Sin embargo, esta investigación se distancia de los estudios citados debido a que se hizo a partir de considerar tareas matemáticas propuestas por tres profesores de diferentes grados de escolaridad. En consecuencia, se puede afirmar que la promoción de argumentación puede llevarse a cabo con estudiantes de diferentes niveles educativos y desarrollarse a partir de tareas relacionadas con diversos temas de la matemática. Asimismo, esta investigación aporta y complementa los demás estudios, al incluir las subcategorías *relación entre conceptos y situaciones de la cotidianidad* y *solicitud de mejores respuestas*, como maneras de promover argumentación en los estudiantes. Se aspira que futuras investigaciones consideren estos resultados y continúen con el propósito de indagar y analizar las maneras en cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas propias de su área. Al mismo tiempo que se deriven elementos que amplíen y permitan una mayor comprensión del fenómeno de la promoción de argumentación en la Educación Matemática por parte de profesores.

5.3. Sobre la interpretación del Modelo Teórico Integral de la Argumentación en Educación Matemática.

El MTIA fue el referente teórico principal para llevar a cabo la investigación y poder analizar, a partir de sus elementos, cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. El modelo que se elaboró (Figura 1) como interpretación del MTIA, estuvo dotado de cualidades dialécticas, retóricas y lógicas. Las cuales permitieron una categorización de tareas asociadas con estas. Al igual, que incluir subcategorías descritas en concordancia con lo expuesto por el modelo.

A pesar de que el modelo presenta a la argumentación de una manera integral, es decir, entran en sinergia las tres cualidades mencionadas, en este trabajo se analizó la argumentación por partes. De ahí que en el Capítulo 4 las evidencias reportadas y el análisis de las mismas, estuvieran a merced de la cualidad de la argumentación a la cual se hacía referencia. Por tal motivo, en las dos primeras subcategorías, se hizo hincapié en el diálogo establecido entre profesor y estudiantes desde una perspectiva acorde a las Cualidades Dialécticas de la Argumentación. En las siguientes tres subcategorías, su análisis se enfocó en resaltar recursos retóricos usados al argumentar. Y en las últimas tres subcategorías relacionadas con Cualidades Lógicas de la argumentación, el análisis intento mostrar componentes argumentativos que expone el MTIA, los cuales son heredados de Toulmin (2007).

Por último, es menester informar que, originalmente el MTIA considera seis intenciones de la argumentación. De acuerdo a sus definiciones, en este estudio fueron discriminadas e incluidas en una cualidad de la argumentación, y entraron a aportar en las descripciones de las categorías establecidas. Como resultado, las tareas matemáticas asociadas con cualidades dialécticas de la argumentación tienen la intención de refutar y explicar. Las asociadas con cualidades retóricas, la intención de persuadir y defender. Y las Lógicas tienen el propósito de justificar y validar.

5.4. Limitaciones

El factor tiempo fue un limitante que estuvo presente en el proceso investigativo. Dado el diseño metodológico que se usó y lo que conllevó el trabajo de campo, implicó unos tiempos precisos para cumplir con la recolección de información. En algunos momentos se presentaron retrasos que impedían cumplir con el cronograma dispuesto inicialmente para llevar a feliz término la investigación. Particularmente, la perdida de dos videograbaciones de clase pudo influir en que no se reportaran todas las subcategorías en ***María*** y ***Fernando***, o se impidiera la aparición de otras, puesto que en ***Sandra*** que se tenían las dos grabaciones de sus clases, se evidenciaron las ocho subcategorías. Ahora bien, esta puede no ser la única razón, los grados de escolaridad, las tareas matemáticas propuestas por los profesores y sus mismas prácticas, también son causas de la presencia o ausencia del cómo se promueve la argumentación.

También, es preciso mencionar que se presentaron algunas dificultades con el uso de Atlas.ti 22. Una de ellas ocurrió al importar las transcripciones de las videograbaciones de clase de cada uno de los profesores al software. Algunas funciones matemáticas no se mostraban, por tal razón para extraer las evidencias se hizo directamente de Microsoft Word. No obstante, fue el programa que facilitó el proceso de análisis de la información en este trabajo.

5.5. Futuro investigativo

La argumentación en Educación Matemática se ha estudiado a partir de distintos enfoques, pero son exiguos los trabajos que se pregunten por la promoción de argumentación por parte de profesores, máxime mediante tareas matemáticas. A partir del objeto de estudio de esta investigación, se proponen algunos trabajos que pueden desarrollarse para validar y/o complementar los resultados obtenidos:

- La posibilidad de una investigación que haga uso de otro diseño metodológico que incluya, incrementar el número de participantes, un contexto diferente, el uso de diversas técnicas e instrumentos para la recolección de información, pero que respondan a la misma pregunta que se plantea en este estudio. Esto con la finalidad de encontrar resultados que complementen, refuten o validen los obtenidos en el presente trabajo.
- Un aspecto que puede investigarse, es ¿cómo influye la organización de los estudiantes en el aula de clase en la promoción de argumentación? ¿La promoción de argumentación es más efectiva en pequeños grupos o cuando el profesor se dirige a toda la clase? Estas preguntas no pudieron ser tratadas en este estudio por la naturaleza del mismo.
- Indagar por la posible relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemática y la promoción de la argumentación en el aula de clase.
- Se sugiere una investigación que se haga la pregunta de: ¿Qué características tienen las tareas matemáticas para considerarse tareas potencialmente argumentativas?

- Estudios que se pregunten por la existencia de otras condiciones para promover la argumentación en la clase de matemáticas distintas a las planteadas por Solar y Deulofeu (2016).
- El MTIA es un modelo en construcción, por tanto, se sugieren investigaciones que amplíen su campo de acción y análisis. Por ejemplo, el modelo puede incluir otras intenciones de la argumentación como el convencer.
- Por último, es importante que otros estudios contribuyan a delimitar y caracterizar la argumentación que tiene lugar en el aula de clase de matemáticas. Son arduas las definiciones con respecto a la argumentación y se cuestiona aun ¿Qué es argumentación?

En síntesis, las conclusiones informadas en este capítulo dan cuenta del proceso investigativo llevado a cabo con el objetivo de analizar las maneras en cómo profesores promueven la argumentación mediante tareas matemáticas. Se espera que este trabajo contribuya a demás estudios en Educación Matemática interesados especialmente por la promoción de la argumentación que tiene lugar en un contexto natural de clase. En virtud de la importancia que tiene esta en la formación de los estudiantes.

Referencias

Aguirre-García, J., y Jaramillo-Echeverri, L. (2012). Aportes del método fenomenológico a la investigación educativa. *Revista latinoamericana de estudios educativos*, *8*(2), 51-74.

Aldana-Bermúdez, E. (2014). La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. *Revista Científica*, *3*(20), 37–45. https://doi.org/10.14483/23448350.7687

Alsina, Á. (2020). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, *28*, 1–13. http://dx.doi.org/10.17346/se.vol0.374

Alvis, J., Aldana, E., & Solar, H. (2019). Ambientes de aprendizaje: un articulador para el desarrollo de competencias matemáticas. *Espacios*, *40*(21).

Arriagada, F., & Osorio, J. (2019). *Argumentación y ciudadanía: el aporte de la escuela básica*, *64*, 41–63. https://doi.org/10.29393/Pa64-2AFAM20002

Austin, J. (1962). *How to do Things with Words.* Oxford University Press.

Bermejo, L. (2006). *Bases filosóficas para una teoría normativa integral de la argumentación. Hacia un enfoque unificado de sus dimensiones lógica, dialéctica y retórica*. [Tesis doctoral, Universidad de Murcia].

Bermejo, L. (2009). La distinción aristotélica entre Lógica, Dialéctica y Retórica y su lugar en la Teoría de la Argumentación. *COGENCY*, *1*(2), 27–48.

Cervantes-Barraza, J. y Cabañas-Sánchez, M. (2022). Argumentación matemática basada en refutaciones. *Journal of Research in Mathematics Education*, *11*(2), 159-179. https://doi.org/10.17583/redimat.4015

Cervantes-Barraza, J. y Cabañas-Sánchez, M. (2021). Teacher promoting student mathematical arguments through questions. En M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Interim Vol. 1*, (pp. 81-89). Khon Kaen, Thailand: PME.

Cervantes-Barraza, J., Valbuena, S., & Paternina, Y. (2019). Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto del álgebra temprana. *Educación y Humanismo*, *21*(37), 120–138. https://doi.org/10.17081/eduhum.21.37.3459

Chin, C., & Brown, D. (2000). Learning in science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of Research in Science Teaching*, *37*(2), 109-138. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2736(200002)37:2%3C109::AID-TEA3%3E3.0.CO;2-7

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2742.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401– 429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Creswell, J. (2007). Investigación cualitativa y diseño investigativo. Selección entre cinco tradiciones. En *Academia UTP Universidad*.

Díaz-Maggioli, G. (2023). Andamiaje: a casi medio siglo de su creación. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 14(1), 1-17. https://doi.org/10.18861/cied.2023.14.1.3251

Durango, J. (2017a). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso*. [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia]. Repositorio Digital Universidad de Antioquia.

Durango, J. (2017b). Fundamentos teóricos de un modelo para analizar argumentos de maestros en formación inicial. *Encuentro de Geometría y Sus Aplicaciones*, *23*, 11–17.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., & Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 20(3), 345–370. https://doi.org/10.12802/relime.17.2034

Forero-Sáenz, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. *Universitas Psychologica*, *7*(3), 787–805.

Gamboa, R., & Moreira-Mora, T. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *17* (1), 1-45.

Gensollen, M. (2017). El lugar de la Teoría de la virtud argumentativa en la teoría de la argumentación contemporánea. *Revista Iberoamericana De Argumentación*, (15), 41–59.

Giraldo, G., & Úsuga, L. (2019). *La argumentación en el aula de matemáticas mediante el estudio de situaciones críticas*. [Tesis de pregrado, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional Universidad de Antioquia.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas.* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona].

Goizueta, M., y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(1), 61-78.

Gómez, A. (2018). La educación matemática en Colombia: origen, avance y despegue. *Fides Et Ratio*, *16*, 123–145.

Habermas, J. (1999). Teoría de la acción comunicativa I. Racionalidad de la acción y racionalización social (Manuel Jiménez Redondo, Tr.). Madrid, España: Taurus Ediciones (primera edición en alemán, 1981).

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 5–22.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Editorial McGraw Hill.

ICFES. (2018). *Reporte de resultados del examen saber 11 por aplicación 2018-2*. 1–54.

ICFES. (2020). *Reporte de resultados del examen saber 11° por aplicación 2020-4*. 1–61.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Ed.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures, 229-269. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60-82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Lozano, E. (2010). La interpretación y los actos de habla. *Mutatis Mutandis. Revista Latinoamericana de Traducción*, *3*(2), 333–348. https://doi.org/10.17533/udea.mut.6427

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. En *Revolución educativa* (3).

Oliver, E., & Gatt, S. (2010). De los actos comunicativos de poder a los actos comunicativos dialógicos en las aulas organizadas en grupos interactivos. *Revista Signos*, *43*, 279–294. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-09342010000400002

Ortiz, A., & Carreño, C. (2018). Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática de una escuela municipal en Chile. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *54*, 60–77.

Parra, M. y Briceño, I. (2013). Aspectos éticos en la investigación cualitativa. Revista De Enfermería Neurológica, 12(3), 118–121. https://doi.org/10.37976/enfermeria.v12i3.167

Perelman, C. (1997). *El imperio retórico: retórica y argumentación* (Adolfo León Gómez Giraldo, Tr.). Santafé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma (primera edición en francés, 1977).

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación: La nueva retórica*. (Julia Sevilla Muñoz, Tr.). Madrid, España: Editorial Gredos (primera edición en francés, 1989).

Pérez, J. (2021). *Gestión argumentativa en tareas matemáticas de modelación: estudio de casos.* [Tesis de Maestría, Universidad Católica de la Santísima Concepción].

Rasse, C., & Solar, H. (2019). ¿Quién tiene una respuesta diferente? Análisis del rol docente durante la argumentación en la clase de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 67–87.

Reyes, V. I. (2014). *Coloquios para un conocimiento práctico de la propuesta educativa de la compañía de Jesús: un camino para los maestros*. Merlín ID.

Ríos-Cuesta, W. (2021). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Revista Amazonia Investiga, 10* (41), 96-105. https://doi.org/10.34069/AI/2021.41.05.9

Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, *22*(7), 412-419. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.7.0412

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J. & Ulloa, R. (2020). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–29. doi:10.1080/0020739x.2020.1733686

Solar, H. (2016). Rol de profesor para promover la competencia de argumentación en clase de matemática. Revista Chilena de Educación Matemática, 10(1), 17–23.

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Soler, M., & Flecha, R. (2010). Desde los actos de habla de Austin a los actos comunicativos. Perspectivas desde Searle, Habermas y CREA. *Revista Signos*, *43*, 363–375. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-09342010000400007

Strauss, A., & Corbin, J. (2012). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* (2da Edición ed.). Editorial Universidad de Antioquia.

Toulmin, S. (2007). Los usos de la argumentación (María Morrás y Victoria Pineda, Trs.). Barcelona, España: Ediciones Península (primera edición en inglés, 1958).

Universidad de Antioquia. (s.f.). *Código de ética en investigación de la Universidad de Antioquia.* https://www.udea.edu.co/wps/wcm/connect/udea/e79da6b4-1402-496b-88bc-0dc0321ba827/codigo-etica-udea.pdf?MOD=AJPERES&CVID=luvyYgZ

Valbuena-Duarte, S., Cervantes-Barraza, J. y Herrera-Contreras, L. (2022). Patrones de argumentación colectiva en clase de matemáticas. *Eco Matemático*, 13(1), 6-17. https://doi.org/10.22463/17948231.3362

Valbuena, S., Muñiz, L., & Berrio, J. (2020). El rol del docente en la argumentación matemática de estudiantes para la resolución de problemas. *Espacios*, *41*(9).

Van Eemeren, F. (2019). *La teoría de la argumentación: Una perspectiva pragmadialéctica*, 14. Palestra Editores.

Vargas, C., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2022). Tareas de argumentación: ¿por qué un “por qué” no es necesario ni suficiente? *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, *25*, 101-113.

Vasilachis de Gialdino, I., Ameigeiras, A., Chernobilsky, L., Giménez, V., Mallimaci, F., Mendizábal, N., Neiman, G., Quaranta, G. & Soneira, A. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Gedisa.

Vega-Reñón, L. (2016). *Introducción a la teoría de la argumentación: problemas y perspectivas* (Vol. 4). Palestra Editores.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher’s role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 423–440. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Zhuang, Y. & Conner, A. (2022): Secondary mathematics teachers' use of students' incorrect answers in supporting collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2067932

Anexos

Anexo 1

Esquema del MTIA.

Diálogo	**Argumento con carácter dialógico**	**Acto de habla en el cual un participante solicita u ofrece argumentos mediante preguntas o respuestas, en su orden.**		
Indicadores de argumentación		Señal que permite identificar argumentos a través del diálogo. Estas señales son conectores que unen de manera argumentativa, puntos de vista o afirmaciones. Además, se consideran cualidades retóricas vinculadas con la persuasión y el convencimiento en el diálogo.		
Recursos retóricos	Ejemplo	Uso de casos particulares en la argumentación con la intención de persuadir o generalizar conocimientos o puntos de vista.		
	Ilustración	Uso de una gráfica para apoyar argumentos.		
	Modelo	Uso de la apelación a la acción o a un argumento que ha sido presentado de forma previa por un participante en la argumentación.		
	Metáfora	Uso de una comparación entre objetos de la vida cotidiana con objetos geométricos en un argumento con el fin de persuadir.		
Componentes argumentativos	Datos	Evidencias empíricas o teóricas que acompañan las preguntas o respuestas		
	Conclusión	Puntos de vista o afirmaciones que defiende quien argumenta.		
	Garantías	Justifica la conexión inferencial entre datos y conclusión	A priori-epistemológicas	
			A priori-pedagógica	
			A priori con el uso de medios	
			Institucional-curricular	
			Empírico-profesional	
			Empírico-personal	
			Evaluativa	
	Cualificador modal		Provisional	Indica una racionalidad práctica.

		Específica el grado de certeza de una conclusión	Absoluto	Indica una racionalidad teórica.
	Soportes	Apoya la garantía a través de evidencias teóricas o empíricas.		
	Refutadores	Excepciones a un punto de vista o afirmación sobre un conocimiento geométrico.		
Intención de los argumentos	Para validar	Refinar definiciones, afirmaciones o puntos de vista.		
	Para justificar	Ofrecer argumentos convincentes.		
	Para refutar	Aclarar puntos de vista o afirmaciones.		
	Para defender	Aportar argumentos a favor de un punto de vista o afirmación.		
	Para explicar	Ofrecer otros puntos de vista o afirmaciones.		
	Para persuadir	Usar en los argumentos recursos retóricos.		

Nota. Durango (2017a, p. 188).

Anexo 2

Consentimiento informado

Yo ____

Identificado (a) con CC. ____________________ de _______________________________

En calidad de profesor(a) de matemáticas del colegio San Ignacio de Loyola autorizo el uso y difusión de los resultados que se deriven de la investigación realizada por el profesor Jaime Humberto David Serna, estudiante adscrito a la Maestría en Educación Virtual de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Soy consciente que esta investigación se realiza con fines académicos en los que se evidencia responsabilidad, transparencia, veracidad, y respeto por la privacidad, de ahí que permito el uso de un seudónimo que salvaguarde mi identidad.

Hago constar que el presente consentimiento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

En constancia firmo:

____

Nombre: _________________________

Documento de identidad: ______________________________

Anexo 3

Formato para observación

<table>
<tr><td colspan="2">Formato para el momento de observación de la clase/ observación no participante</td></tr>
<tr><td>Fecha y hora:</td><td></td></tr>
<tr><td>Aula:</td><td></td></tr>
<tr><td>Grado:</td><td></td></tr>
<tr><td>Profesor(a):</td><td></td></tr>
<tr><td>Clase:</td><td></td></tr>
<tr><td>Duración:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Minutos relevantes para el análisis</td></tr>
<tr><td>Minutos</td><td>Pequeña descripción</td></tr>
</table>

Anexo 4

Guía elaborada por la profesora *María*

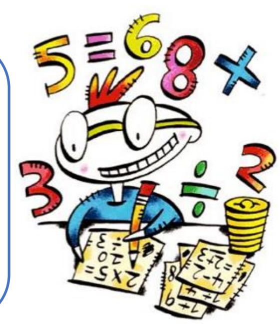
COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA
PERIODO II

Estudiante: ____ *Grado Quinto* ____
Área: Matemáticas *Fecha:* ____________ *de 2022*
Asignatura: Aritmética *Tipo de Guía: Informativa y de Ejercitación*
Docente: *Tiempo de Duración: tres unidades*
Numero de guía: dos

Igualdades y ecuaciones

Subprocesos	RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS	MODELACIÓN	RAZONAMIENTO MATEMÁTICO	COMUNICACIÓN MATEMÁTICA
Estándares de desempeño	Soluciona situaciones problema matemáticos y realistas en el conjunto de los números naturales haciendo uso de información suministrada en diferentes tipos de representaciones.		Emplea el lenguaje matemático para justificar procedimientos aplicándolos a la solución de situaciones problema en el conjunto de los números naturales.	

Con el desarrollo de esta guía comprenderás que, a situaciones cotidianas en donde se involucran cantidades numéricas o datos, y valores desconocidos o variables, se le puede asociar una ecuación. En dicha ecuación los datos se comportan como valores constantes, es decir,



Igualdad: *es una relación entre dos expresiones matemáticas que representan el mismo valor. Las igualdades tienen dos partes separadas por el signo igual.*

Ejemplo: $8 \times 2 = 5 + 5 + 6$

Propiedad uniforme:

1. *Al adicionar o sustraer la misma cantidad en ambas partes de una igualdad, la igualdad se conserva.*

2. *Al multiplicar o dividir ambas partes de una igualdad por la misma cantidad (diferente de cero), la igualdad se conserva.*

Ecuaciones: *es una igualdad en la que se desconoce un número. Ese número desconocido se representa con una letra llamada incógnita.*

Para resolver una ecuación debemos encontrar el valor desconocido que hace verdadera la igualdad; esto por medio de efectuar en ambos lados de la igualdad, la operación inversa a la que involucra o acompaña la variable.

No olvides nunca identificar lo siguiente:
1. *¿Cuál es la incógnita? (esta se representa con cualquier letra del alfabeto)*
2. *¿Cuál o cuáles son los términos que acompañan la incógnita?*
3. *¿Qué operación están efectuando los términos que acompañan la incógnita? Cuando lo identifiques debes realizar la operación inversa.*

Ejemplo: $m + 25 = 36$

1. *La incógnita es m.*
2. *El término que la acompaña es 25 que está sumando con la incógnita.*

La operación que efectía el 25 es suma, por lo tanto, realizaremos la operación inversa a ambos lados, es decir:

Propiedad uniforme:

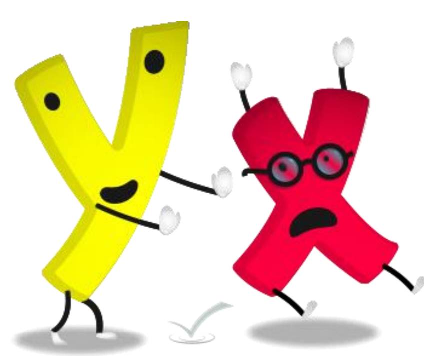
$$m + 25 = 36$$
$$m + 25 - 25 = 36 - 25$$
$$m + 0 = 11$$
$$m = 11$$

$$m + 25 = 36$$
$$m = 36 - 25$$
$$m = 11$$

Algunas expresiones que debemos reconocer para llevar el lenguaje natural al lenguaje simbólico son:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
Dado un número	x
El **duplo**, el **doble** de un número	$2x$
La **mitad** de un número	$\frac{1}{2}x; \frac{x}{2}; x:2$
El **triple** de un número	$3x$
La **tercera** parte, o el **tercio** de un número	$\frac{1}{3}x; \frac{x}{3}; x:3$

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
La raíz **cuadrada** de un número	$\sqrt{x}$
La raíz **cúbica** de un número	$\sqrt[3]{x}$
La raíz **cuarta** de un número	$\sqrt[4]{x}$
La **cuarta parte** de un número	$\frac{1}{4}x; \frac{x}{4}; x:4$
El **cuádruplo** de un número	$4x$



Actividad 1

1. ***Resuelve cada lado de las siguientes expresiones en tu cuaderno y determina si son igualdades o no.***

a. $210 \times 5 = 5 \times 210$
b. $6 + 3 + 9 = 6 \times 3$
c. $64 \times 7 = 1\,000 - 520$
d. $(3 + 7) \times 4 = (5 \times 4) + (10 \times 2)$
e. $13 \times (12 + 4) = (13 \times 12) + 4$
f. $2 \times (18 + 2) = (3 \times 12) + (2 \times 2)$
g. $4 \times (37 - 4) = (25 \times 3) + (19 \times 3)$
h. $(12 + 7) \times 8 = (12 + 8) \times 7$

2. ***Represente la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de las siguientes balanzas y resuelve la ecuación.***

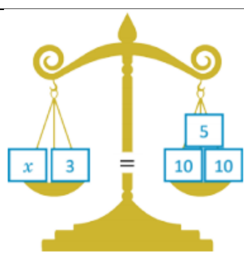
Ejemplo:

Solución:

$$x + 8 = 10$$
$$x + 8 - 8 = 10 - 8$$
$$x = 2$$

Solución

Solución



Solución

Solución

Actividad 2

Halla el valor de la incógnita en cada ecuación. Comprueba la solución en tu cuaderno.

a. $a+3=9-5$	**b.** $m-95=150+3$	**c.** $4n+8=16$
d. $6p=54$	**e.** $3u+22=31$	**f.** $\frac{a}{5}=6$
g. $n+(2+12)=96$	**h.** $\frac{16x-3}{15}=3$	**i.** $\frac{10x-10}{3}=20$
i. $\frac{4(2x-5)}{5}=x+2$	**k.** $12x-6=8x-4x+2$	**l.** $55x+300=25x+600$

Actividad 3

Escribe la ecuación que permite solucionar cada situación problema y resuélvela.

- **a.** *Juliana tiene tantos años como Claudia y Luisa juntas. Si Juliana tiene 14 años de edad y Luisa 3 años de edad. ¿Cuántos años tiene Claudia?*
- **b.** *El precio de un pantalón equivale al de una camiseta y una gorra. Si el pantalón cuesta $175.630 y la gorra $57.320, ¿cuánto cuesta una camiseta?*
- **c.** *En mi colegio entre alumnos y alumnas somos 624. Si el número de chicas supera en 36 al de chicos, ¿cuántos chicos y cuantas chicas hay?*
- **d.** *La suma de dos números es 60. Si uno de los números es 12 unidades mayor que el otro. ¿Cuáles son los números?*
- **e.** *Si el perímetro de un cuadrado es 24 cm, ¿cuánto miden sus lados?*
- **f.** *Los dos octavos de un número son 2. ¿De qué número se trata?*
- **g.** *Juan tiene el doble de dinero que Pepe y entre los dos tienen $123.000. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?*
- **h.** *La edad de Juan es el doble que la de Pepe y la edad de Pepe es el triple que la de Antonio, si entre todos ellos suman 30 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?*
- **i.** *El triple de un número es igual a la suma de dicho número con 18. Calcula dicho número.*

Actividad 4

"PREPARÉMONOS PARA LAS PRUEBAS SABER"

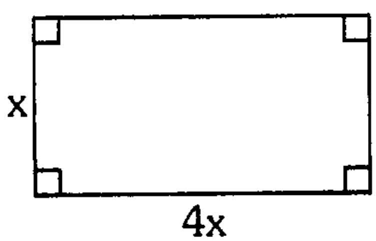
Selecciona la opción correcta para cada pregunta. Realiza los procedimientos en tu cuaderno:

1. El doble de un número, aumentado en 9, es igual al quintuplo del mismo número. ¿Cuál es ese número?

A. 3
B. 5
C. 6
D. 2

2. La suma de cuatro números es igual a 90. El segundo número es el doble del primero; el tercero es el doble del segundo, y el cuarto el doble del tercero. Halla los cuatro números.

A. Los cuatro números son:4; 8; 16 y 32.
B. Los cuatro números son: 7; 14; 28 y 56.
C. Los cuatro números son: 6; 12; 24 y 48.
D. No tiene solución.



3. El perímetro del rectángulo de la figura es 50 cm. El valor de x es:

A. 10 cm
B. 15 cm
C. 5 cm
D. 12 cm

4. El largo de un rectángulo mide 10 mm más que su ancho. Halla sus dimensiones sabiendo que el perímetro mide 260mm.

A. El largo mide 70 mm y el ancho mide 60 mm.
B. El largo mide 65 mm y el ancho mide 55 mm.
C. El largo mide 60 mm y el ancho mide 50 mm.
D. El largo y el ancho deben ser iguales para tener ese perímetro

Anexo 5

Guía elaborada por la profesora *Sandra*

COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA
PERIODO II

Estudiante: ______________________________________ **Grado Sexto** ____
Área: Matemáticas **Fecha:** ______ de 2022
Asignatura: Aritmética **Tipo de Guía:** informativa y de ejercitación
Docente: **Tiempo de Duración:** 5 unidades.

SUBPROCESOS	RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS	MODELACIÓN	RAZONAMIENTO MATEMÁTICO	COMUNICACIÓN MATEMÁTICA
ESTÁNDARES DE DESEMPEÑO	Resuelve situaciones problemas matemáticos y realistas en contextos numéricos y aleatorios, aplicando las operaciones y las propiedades del conjunto de los enteros y las medidas de tendencia central en datos no agrupados.		Argumenta los procedimientos utilizados en la solución de situaciones problemas matemáticos y realistas en contextos numéricos y aleatorios, aplicando las operaciones y propiedades del conjunto de los números enteros y las medidas de tendencia central en datos no agrupados.	

Con el desarrollo de esta guía te adentrarás en el mundo de los números enteros, especialmente en las operaciones de adición y sustracción. Este es un tema nuevo para ti, pero verás que si trabajas con dedicación y responsabilidad lograras aprender lo que te propongas. Pregúntale todas tus inquietudes a tu profesor para que así avances mucho más en el proceso.

ADICION Y SUSTRACCION

Para diferenciar los enteros positivos de los enteros negativos utilizamos los signos + o – delante de ellos. Cuando hagamos operaciones con ellos donde se combinen sumas y restas los escribiremos entre paréntesis.
Por ejemplo: (-2) - (-5) - (-6) + (-3) + 6
Si queremos resolver la expresión anterior resultara útil simplificar los signos y eliminar los paréntesis, para esto se utiliza la siguiente **regla de signos**:

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

Así nuestra expresión quedará de esta manera: -2 + 5 + 6 – 3 + 6. Ahora solo nos queda resolver de izquierda a derecha.

Enteros de igual signo	**Enteros de distinto signo**
Se suman los valores absolutos de los números y al resultado se le pone el signo que tenían los sumandos, por ejemplo: (5) + (3) = 8 (-14) + (-17) = -31 (25) + (+62) = 87 -16 + (-4) = ___	Se restan los valores absolutos de los números y al resultado se le pone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto, por ejemplo: (-5) + (3) = -2 (-4) + (7) = 3 (18) + (-24) = -6 (-9) +(-15) = ___

Para sumar o restar enteros se debe tener presente lo siguiente:

Continuando con nuestro ejemplo inicial el proceso seguiría de la siguiente manera:

-2 + 5 + 6 – 3 + 6
3 + 6 – 3 + 6
9 – 3 + 6
6 + 6
12

Así, **(-2) - (-5) - (-6) + (-3) + 6 = 12**

ACTIVIDAD 1

1. **Escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda y justifica tu respuesta:**
   - **a.** La suma de dos números opuestos es igual a cero ___
   - **b.** La resta de dos números negativos da siempre un resultado positivo ___
   - **c.** La resta de dos números de diferente signo siempre da como resultado un número negativo ___
   - **d.** La operación 10 -11 es igual a -21 ___
   - **e.** El número 0 pertenece a los enteros positivos ___

2. **Escribe la operación que representa cada frase:**
   - **a.** Veinte negativo menos cuarenta positivo. ____________=____
   - **b.** Dieciocho negativo menos ocho positivo. ____________=____
   - **c.** Cero menos cuarenta y ocho positivo. ____________=____
   - **d.** Noventa y uno positivo menos ochocientos positivo. ____________=____
   - **e.** Cincuenta y tres positivo menos cuarenta y tres positivo. ____________=____
   - **f.** Doce negativo menos doce negativo. ____________=____

3. Completa la siguiente tabla reemplazando los valores de a, b, c, según la operación dada.

a	b	c	a + b	a - b	a + b - c
-3	10	-9			
-6	+2	+17			
-8	2	-1			
25	-35	-43			

4. Escribe en tu cuaderno el polinomio que representa cada expresión y luego resuélvelo:

a. De 65 restar 38

b. Restar (-30) de (-30)

c. De 3^3 restar -27

d. Restar $[-22+9]\ de\ [-10-3+7]$

e. De $[2^3-\sqrt{49}]\ restar\ [3^2+5-25]$

f. De (-$\sqrt{25}+10$) restar 5^2-15+8

g. Restar $[\sqrt{81}-8+6]$ de $[2-3^2+5]$

5. Observa el ejemplo y resuelve los siguientes polinomios. Recuerda utilizar la regla de signos:

a. $(-12)\ +\ (+5)-(-18)\ +\ (-25)$

$$-12\ +\ 5\ +\ 18-25$$
$$-7\ +\ 18-25$$
$$11-25$$
$$-14$$

b. $(-18)\ +\ (8)-(+17)-(-13)$

c. $(45)-(-26)\ -\ (+18)\ +\ (\sqrt{81})$

d. $(+16)-(-11)\ +\ (-5)-(+35)$

6. **Encuentra los siguientes números de acuerdo a la indicación dada:**

   a. Dos números enteros positivos cuya diferencia sea 42.
   b. Dos números enteros negativos cuya diferencia sea 49.
   c. Dos números enteros de diferente signo cuya diferencia sea 120.

ACTIVIDAD 2

Lee atentamente y resuelve las siguientes situaciones problema. Puedes hacer uso de la recta numérica

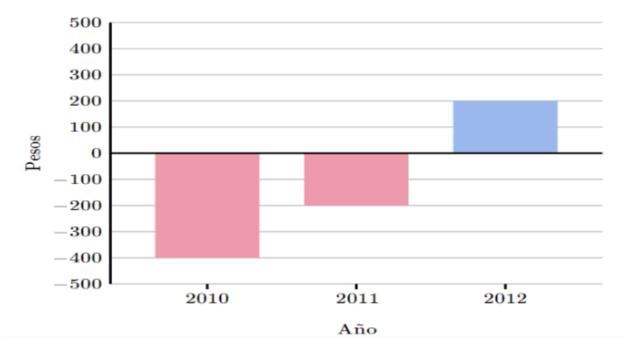
1. Un día de invierno amaneció a 4 grados bajo cero. A las doce del mediodía la temperatura había subido 17 grados, y hasta las cuatro de la tarde subió 3 grados más. Desde las cuatro hasta las doce de la noche bajó 4 grados, y desde las doce a las 6 de la mañana bajó 5 grados más. **¿Qué temperatura hacía a esa hora?**

2. En las carreras de caballos un espectador apostó a las cinco carreras y los resultados fueron los siguientes: en la primera perdió 8500 pesos, en la segunda perdió 9000 pesos, en la tercera ganó 40.000 pesos, en la cuarta perdió 6000 pesos y en la quinta ganó 11.000 pesos. **¿Cuál fue el resultado final de sus apuestas?**

3. De un pozo que se encuentra aproximadamente a 3657 metros por debajo de la superficie de la tierra se realiza una extracción de petróleo, el cuál es dirigido a lo alto de una torre que se encuentra a 47 metros del suelo. **¿Cuánta distancia recorre el petróleo?**

4. El punto más alto de la tierra es el Monte Everest con 10848 metros de altura y el que se encuentra a mayor profundidad es la fosa de las Marianas a -11033 metros aproximadamente. Con base en estos datos, ¿cuántos metros hay de diferencia entre ambos puntos?

5. El negocio Mascotas felices se dedica a pasear perros. Usa la siguiente gráfica de barras para encontrar la ganancia o pérdida total de Mascotas felices, correspondiente al periodo entre 2010 y 2012.



6. Camila hace diariamente, en su tienda de perfumes, un inventario de la mercancía; ella identifica la cantidad de mercancía nueva con números positivos y la cantidad que se vende con números negativos.

INVENTARIO	FECHA
+15	Julio 13
-7	Julio 13
+16	Julio 14
-8	Julio 14
-2	Julio 14
-9	Julio 15
+2	Julio 15

a. ¿Cuántos perfumes en total vendió Camila?
b. ¿Cuántos perfumes en total recibió Camila?
c. ¿Cuántos perfumes en total quedaron en la tienda?

7. Durante un frente frío, la temperatura de Denver, Colorado bajó de 7 a -5. Kyla y Jason estaban hablando sobre el cambio de temperatura.

Kyla: "¡No puedo creer que la temperatura bajó 12°C
Jason: "¿De qué hablas? La temperatura solo bajó 2°C

¿Quién tiene la razón?

8. Tales de Mileto es considerado como uno de "los siete sabios de Grecia". Fue un matemático y filósofo muy reconocido en el área de la geometría. Si murió en el año 547 antes de Cristo a la edad de 77 años, ¿en qué año nació?

9. Pitágoras filósofo y matemático griego, nació alrededor del 585 a.C. y murió 51 años después que Tales de Mileto. ¿Cuántos años vivió Pitágoras?

10. Euclides fue un matemático griego. Si en el 318 a.C. tenía 12 años de edad, ¿Qué edad tenía en el año 290 a. C.?

MULTIPLICACION Y DIVISION

Para comprender la forma en que se operan números enteros con multiplicaciones y divisiones es importante primero conocer la **regla de signos** en ambos casos:

multiplicación de números enteros: **1.** Multiplicamos los números sin tomar en cuenta el signo que estos tengan, es decir, multiplicamos sus valores absolutos. **2.** Una vez hallado el resultado, colocamos el signo que corresponda de acuerdo a la regla de los signos.	Ahora, para **dividir números enteros** se debe realizar lo siguiente: **1.** Dividimos los números sin importarnos el signo que estos tengan. Es decir, hacemos la división de sus valores absolutos. **2.** Una vez obtenido el resultado, colocaremos el signo que corresponda de acuerdo a la regla de los signos.
EJEMPLO (-3) x (+9) =? **1.** Multiplicamos 3 x 9 = 27 **2.** Multiplicamos los signos (-) x (+) = - Así obtenemos que (-3) x (+9) = -27	EJEMPLO (-12) ÷ (- 3) =? **1.** Dividimos 12 ÷ 3 = 4 **2.** Dividimos los signos (-) ÷ (-) = +

Para resolver **polinomios con operaciones combinadas** debemos recordar lo siguiente:

- **Polinomios sin signos de agrupación:** se calculan primero los cocientes y productos, de izquierda a derecha, y por último se efectúan las sumas y las restas.
- **Polinomios con signos de agrupación:** se efectúan primero las operaciones encerradas en paréntesis, luego en corchetes y por último entre llaves. Luego se efectúan las operaciones que quedan indicadas.

ACTIVIDAD 3

1. **Escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda y justifica tu respuesta:**

   a. El producto de dos números enteros que tienen el mismo signo siempre es un entero positivo. _____
   b. Al multiplicar un entero positivo con su opuesto obtenemos un entero positivo. ___
   c. El cociente de dos negativos siempre es un entero negativo. ____
   d. $2 \times (3 + 5) = (2 + 3) \times (2 + 5)$ ____
   e. $(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ ____

2. **Escribe en tu cuaderno la siguiente tabla y colorea los cuadros según las indicaciones dadas:**

   a. De color naranja las casillas cuyos productos son positivos
   b. De color azul las casillas cuyos productos son negativos.

-3 x -7	9 x -7	2 x 13	-21 x -2
14 x -2	-6 x 4	-23 x 9	45 x -1
80 x 6	-10 x -7	-6 x -5	-1 x -27

3. **Completa la siguiente tabla con las operaciones indicadas.**

m	n	p	m x n	m x p	n.m – n.p	m.(n + p)	m.(n-p)
-4	3	-4					
-12	7	-10					
12	-4	16					
1	6	-3					

4. Si a = 60, b = - 5, d = -2 y c = -10, resuelve los siguientes polinomios:

a. $c \div b - b \times c$

b. $\left[a - d \cdot (c \div b)\right] + (a - b + c)$

c. $d - c + b(a \div c)$

5. Resuelve los siguientes polinomios:

a. $-7[8 \div (-11 + 7) + 4(-5 + 3)]$
b. $-12 \div [-5(6 - 4) - 2(-23 + 21)]$
c. $[45 - (18 + 3)] - 3$
d. $[81 \div (-15 + 24) \times (-7 + 4)]$
e. $-36 \div [-8 \div (-5 + 3) + 12 \div (-2)]$
f. $-[-45 \div (-13 + 8)]$
g. $(5 + 4 - 6 - 7 - 6 + 10) \times -64 \div 16$
h. $[5 \times (4 + 8 - 25 + 14 \div 2)]$

ACTIVIDAD 4

Lee atentamente y resuelve las siguientes situaciones problema:

1. Juan tiene un saldo en su tarjeta de crédito de $ 235.000 y tiene que pagar tres facturas: una de $195.000, otra de $73.000 y otra de $45.000. **¿Qué saldo le quedará finalmente en la tarjeta?**

2. Al conectar un refrigerador, la temperatura desciende 2°C cada cinco minutos. Si se enchufa a las 7:00 a.m. Y la temperatura es de 24°C en el ambiente, entonces:
   a. **¿Qué temperatura marcará el refrigerador a las 7:30 a.m. y a las 9:00 a.m.?**
   b. **¿A qué hora alcanza los -10°C?**

3. Juan cría peces en un estanque. Los peces de esta temporada los guarda en un congelador en el cual la temperatura desciende a razón de 3° C cada 20 minutos hasta que alcanza una temperatura mínima de -33°C. Si la temperatura inicial en el interior del congelador es 9°C, **¿Cuánto tiempo pasara para que alcance los -27°C?**

4. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera, a razón de 9°C cada 300m**. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de $-81^\circ C$ sí despegó con 0°C?**

5. La fosa marina de Mindanao tiene una profundidad de 11.040 metros, y la fosa marina de Java, de 7.250 metros. Calcula la diferencia entre la más y la menos profunda. Calcula también la diferencia entre la menos y la más profunda.

6. Rosa gana cada hora 2 euros más que Lucía. Han trabajado el mismo número de horas. Al terminar el trabajo, Rosa ha ganado 64 euros más que Lucía. a) ¿Cuántas horas ha trabajado cada una?. b) Si Lucía gana 384 euros, ¿cuánto ha ganado Rosa?

7. En la cuenta del banco tenemos 1.250 €. Nos ingresan el salario 2.240 € y nos cargan el recibo de la luz, 83 €; el recibo de internet, 48€, y nos abonan una devolución de Amazon de 78 €. ¿Cuánto dinero tenemos ahora?

Visita éste sitio web para realizar más practicas: https://www.geogebra.org/m/nd5cusnt

Anexo 6
Guía elaborada por el profesor *Fernando*

COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA
PERIODO II

Estudiante:	______________________	Grado:	11º______
Área:	Matemáticas	Fecha:	__ / __ / 2022
Asignatura:	Cálculo	Tipo de Guía:	Ejercitación
Docente:		Tiempo de Duración:	4 unidades

ESTÁNDARES DE DESEMPEÑO			
RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS	**MODELACIÓN**	**RAZONAMIENTO MATEMÁTICO**	**COMUNICACIÓN MATEMÁTICA**
Plantea y resuelve problemas matemáticos y realistas utilizando modelos que se ajustan al análisis de funciones y el cálculo de límites.		Argumenta e interpreta gráfica y analíticamente situaciones problemas matemáticos y realistas que involucran funciones reales y el cálculo de límites.	

<u>Guía N°2</u>

Funciones por tramos y sus aplicaciones

INTRODUCCION

Los desplazamientos y transformaciones de una función son fundamentales en el trazo de gráfico de funciones y en el análisis del comportamiento de fenómenos físicos y naturales al igual que en muchas aplicaciones de las matemáticas.

Actividades

Visualiza el siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=AU1GVkYD78w

1. Grafique las siguientes funciones por tramos y encuentre los límites laterales en cada caso. Dominio y Rango:

$$f_{(x)}=\begin{cases}-1 & si\ x\in(-\infty\ ,\ -3)\\ x^2-2x & si\ x\in[-3\ ,\ 2)\\ x+2 & si\ x\in[2\ ,\ +\infty)\end{cases}$$

$$f_{(x)}=\begin{cases}-\sqrt{-x-2} & ,\ si\ x\in(-\infty\ ,\ -2)\\ x^2+2x+1 & ,\ si\ x\in[-2\ ,\ 0)\\ |x-1|\ 21 & ,\ si\ x\in[0\ ,\ +\infty)\end{cases}$$

$f_{(x)}=\begin{cases} \lvert x+1\rvert-2 & si\ x\in(-\infty\ ,\ 0) \\ -\sqrt{x}+2 & si\ x\in[0,\ 4) \\ \sqrt{x-4} & si\ x\in[4\ ,\ +\infty) \end{cases}$	$f_{(x)}=\begin{cases} x+2 & si\ x\in(-\infty\ ,\ -2) \\ \lvert x+2\rvert+1 & si\ x\in[-2\ ,\ 0) \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ x\in[0\ ,\ 2) \\ \sqrt{x-2} & si\ x\in[2\ ,\ +\infty) \end{cases}$
$f_{(x)}=\begin{cases} \lvert x+2\ \rvert & si\ x\in(-\infty\ ,\ -2) \\ \sqrt{1-x^2} & si\ x\in[-2,\ 0) \\ \lvert x^2-4x+4\rvert & si\ x\in[0\ ,\ 4) \\ -\sqrt{x} & si\ x\in[4\ ,\ +\infty) \end{cases}$	$f_{(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & si\ x\in(-\infty\ ,\ -2) \\ \lvert x+2\rvert & si\ x\in[-2,\ 0) \\ \lvert x^2-4x+4\rvert & si\ x\in[0\ ,\ 4) \\ \sqrt{x-4} & si\ x\in[4\ ,\ +\infty) \end{cases}$

2. Elabore el gráfico de las siguientes funciones y encuentre su respectivo dominio y rango.

$f(x)=\dfrac{-\lvert x+2\rvert}{x+2}$	$f(x)=-\dfrac{x^2-2x}{x-2}$	$\lvert x^2-2x+1\rvert+1$
$f(x)=\lvert x-2\rvert-x-\lvert x+1\rvert$	$f(x)=\lvert x-1\rvert-\lvert x+2\rvert$	$f(x)=1-\lvert x+1\rvert-\lvert x-1\rvert$

3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & si & x\le -2 \\ 2-x & si & -2<x<2 \\ \sqrt{x} & si & x\ge 2 \end{cases}$$

Halle:

a. Dominio de f
b. Ceros
c. El valor de $\dfrac{2f(0)-3f(1)}{2-f(2)}$

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN POR TRAMOS

4. Una empresa de telefonía celular determina que la tarifa T que deberá pagar un usuario por el consumo de t minutos en un mes, se describe de la siguiente manera: Tarifa básica…$20. 000.oo
   - Valor de un minuto…$ 200.oo para los primeros 100 minutos
   - Valor de cada minuto después de 100, tiene un descuento del 20%

   Determine:

   a) La función T
   b) El consumo (en minutos) cuando la tarifa es $56. 000.oo

5. Debido a problemas económicos una tienda de ropa debe cerrar, así que decidió poner sus productos en liquidación de manera que por compras mayores a 20000 obtendrán un 20% de descuento y por compras mayores a 60000 obtendrán un 50% de descuento. Suponiendo que cada prenda vale 10.000
   a. Hallar la función correspondiente, con su respectiva gráfica.
   b. Si pago 100.000 pesos ¿Cuántas prendas compro?

6. Un teléfono celular cuesta 39 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cada minuto adicional cuesta 20 centavos de dólar. Encuentre la expresión para el costo mensual de la cantidad de minutos empleados.

7. Una distribuidora de música ofrece a sus clientes un gran surtido de musca en DVD. Si compran no más de 6 DVD, se venden a $ 35.000 cada uno. Si compran más de 6 DVD, cada DVD adicional se vende a $33.000. Encontrar un modelo matemático que represente el costo de C de x DVD.

8. Una empresa de telecomunicaciones ofrece un paquete básico de 100 canales por 30 dólares, por los primeros 10 canales adicionales se cobran 2 dólares, de ahí en adelante se hace un descuento del 30% por canal adicional. Expresar la función.

9. Una compañía de telefonía celular ofrece un plan de navegación ilimitada, en el cual los primeros 4GB de consumo tienen una velocidad de navegación de 7Mbps, al exceder esta capacidad la velocidad va disminuyendo, en la medida de que cada que se haya consumido un 1GB, la velocidad habrá disminuido 1 Mbps, cuando la velocidad alcanza 1Mbps, esta sigue constante, hasta el reinicio del plan. Escribir y graficar la función.

10. A fin de regular el consumo de electricidad, una compañía ha diseñado una tarifa en la cual los primeros 100 KW/h se cobrarán a 2 dólares cada uno, los siguientes 200 KW/h costaran 3 dólares cada uno, y los próximos KW/h por hora costaran 6 dólares cada uno. Expresar y graficar la función por tramos.

11. En una fábrica hay una promoción, por las primeras 6 prendas se cobra 10 dólares por cada una, las siguientes tienen una promoción, se venden 3 por el valor de 15 dólares. Plantear la función y graficar.

12. Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: Esta mañana, Eva fue a visitar a su amiga Leticia y tardó 20 minutos en llegar a su casa, que se encuentra a 800 metros de distancia. Estuvo allí durante media hora y regresó a su casa, tardando en el camino de vuelta lo mismo que tardó en el de ida.

13. Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado (expresa el tiempo en horas y la distancia en kilómetros). Esta mañana, Pablo salió a hacer una ruta en bicicleta. Tardó media hora en llegar al primer punto de descanso, que se encontraba a 25 km de su casa. Estuvo parado durante 30 minutos. Tardó 1 hora en recorrer los siguientes 10 km y tardó otra hora en recorrer los 20 km que faltaban para llegar a su destino.

14. Construye una gráfica que corresponda a la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que: A las 0 horas había, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores. Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana. A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1,5 millones de espectadores.

La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores. Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6,5 millones de espectadores. A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores.

15. Construye una gráfica que describa la siguiente situación: Esta mañana, Lorena salió de su casa a comprar el periódico, tardando 10 minutos en llegar al quiosco, que está a 400 m de su casa. Allí estuvo durante 5 minutos y se encontró con su amiga Elvira, a la que acompañó a su casa (la casa de Elvira está a 200 m del quiosco y tardaron 10 minutos en llegar). Estuvieron durante 15 minutos en la casa de Elvira y después Lorena regresó a su casa sin detenerse, tardando 10 minutos en llegar (la casa de Elvira está a 600 m de la de Lorena).

“ENSEÑEMOS A PERDONAR; PERO ENSEÑEMOS TAMBIÉN A NO OFENDER. SERÍA MÁS EFICIENTE” JOSÉ INGENIEROS

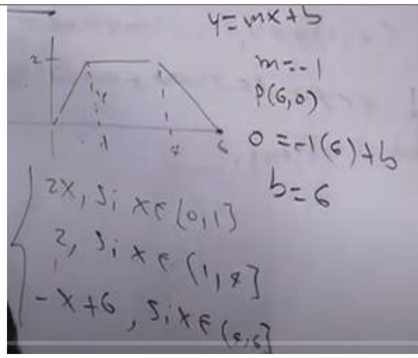
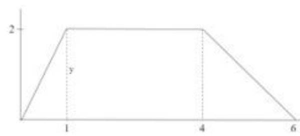
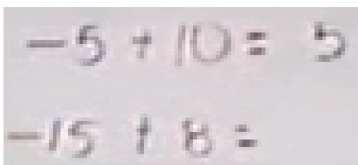
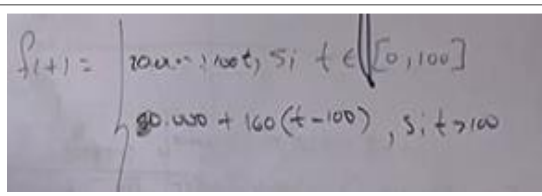
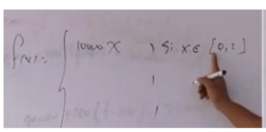
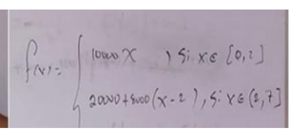
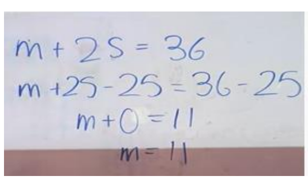
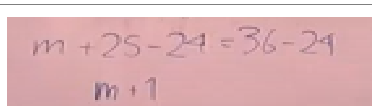
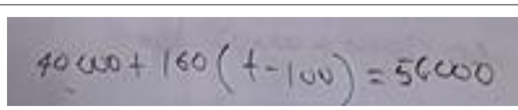
Anexo 7
Tablas de co-ocurrencias

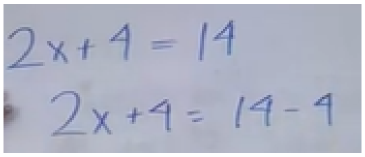
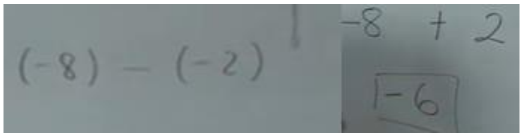
Nota: los números sombreados indican cuantos episodios o fragmentos son compartidos entre la subcategoría escrita en forma horizontal y la subcategoría en posición vertical.

	Alteració... 5	Andamia... 20	Especific... 4	Inclusión... 6	Indagaci... 10	Relación... 12	Solicitud... 11	Uso de r... 18
Indagació... 10						1	3	1
Andamiaje... 20								1
Relación e... 12					1		1	1
Alteración... 5			2				2	1
Especificac... 4	2						2	
Solicitud d... 11	2		2	1	3	1		1
Uso de res... 18	1	1			1	1	1	
Inclusión d... 6							1	

Anexo 8

Figuras reformadas

#Figura	Figura original	Figura reescrita
6		$y = mx + b$ $m = -1$ $P(6{,}0)$ $0 = -1\,(6) + b$ $b = 6$  $\begin{cases} 2x, si\ x \in (0{,}1] \\ 2, si\ x \in (1{,}4] \\ -x+6, si\ x \in (4{,}6] \end{cases}$
9		$-5 + 10 = 5$ $-15 + 8$
11		$f(t) = \begin{cases} 20.000 + 200\,t, si\ t \in [0{,}100] \\ 40.000 + 160\,(t-100), si\ t > 100 \end{cases}$
16	 	$f(x) = \{10000x, si\ x \in [0{,}2]$ | $f(x) = \begin{cases} 10000x, si\ x \in [0{,}2] \\ 20000 + 8000\,(x-2), si\ x \in (2{,}7] \end{cases}$
18		$m + 25 = 36$ $m + 25 - 25 = 36 - 25$ $m + 0 = 11$ $m = 11$
19		$m + 25 - 24 = 36 - 24$ $m + 1$
28		b $-18 - (+8) = -18 - 8 = -26$
30		$40.0000 + 160\,(t - 100) = 56.000$

33		$2x + 4 = 14$ $2x + 4 = 14 - 4$
36		$(-8) - (-2)$ | $-8 + 2$ -6