



DIDÁCTICA DE LAS  
**MATEMÁTICAS**

X CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE  
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

20, 21 y 22 de febrero de 2020

# ACTAS CIEM 2020

CONFERENCIAS

TALLERES

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS



# X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

20, 21 y 22 de febrero de 2020

## ACTAS *CIEM 2020*

Conferencias

Talleres

Reportes de Investigación

Socialización de Experiencias

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN  
SOBRE LA ENSEÑANZA DE  
LAS MATEMÁTICAS



**PUCP**

*X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*

*Actas*

*CIEM 2020*

Editores: Cecilia Gaita Iparraguirre, Jesús Flores Salazar, Francisco Ugarte Guerra

Diseño de carátula: Fondo Editorial PUCP

Diagramación de interiores: Cecilia Gaita Iparraguirre

© Pontificia Universidad Católica del Perú – 2020

Avenida Universitaria 1801, Lima 32

626 2000-anexo 4197

E-mail: irem@pucp.edu.pe

Dirección URL: <http://www.irem.pucp.edu.pe>

*Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.*

ISBN: 978-612-4320-38-5

Primera edición digital: julio de 2020

Producido en el Perú – Produced in Perú

## Presentación

La historia de los CIEMs se remonta 20 años atrás, entonces cuando empezó como un coloquio y desde entonces ha venido creciendo hasta convertirse en el congreso sobre enseñanza de las matemáticas más importante del Perú, prueba de ello es el interés que ha despertado en las regiones de nuestro país: así en el año 2016 el Congreso se realizó en el campus de la Universidad Nacional de Piura y, en el 2018, en la Universidad Nacional de Huancavelica, a más de 4000 msnm, el IX CIEM congregó a más de 400 personas, entre profesores e investigadores de todo el Perú y del extranjero. Hoy la Universidad Nacional del Centro del Perú, la Universidad Nacional Hermilio Valdizán, la Universidad Nacional de Tumbes y la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco han manifestado su interés por ser las sedes de los siguientes CIEMs.

Para nosotros el décimo CIEM, significa además celebrar los 20 años del IREM-PUCP aunque como toda institución, nuestro instituto tiene una historia y una memoria que va más allá de su creación: debo recordar con gratitud al Dr. José Tola Pasquel, ilustre matemático e ingeniero peruano, exrector de la PUCP entre 1967 y 1989, fundador del Instituto para la promoción de la enseñanza de las matemáticas IPEN, que funcionó entre 1961 y 1968. EL IPEN fue creado con la finalidad de realizar cursos de perfeccionamiento para profesores de matemáticas de los diferentes niveles, difundir los nuevos conceptos e ideas relacionadas con la enseñanza de la matemática; auspiciar la publicación de libros de texto y colaborar con los organismos y autoridades nacionales en sus esfuerzos para promover el estudio y la enseñanza de las matemáticas. El profesor Tola Pasquel fundó además la Sociedad Matemática Peruana y el Instituto de Matemáticas (IMUNI) que funcionó entre 1960 y 1968. Luego, en 1980, siendo Rector de la PUCP, auspició la creación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Años más tarde, en 1997, el profesor César Carranza y César Camacho, discípulos de Tola Pasquel e infatigables promotores de las matemáticas en el Perú, fundaron el Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA) de la UNI: esto significó el renacimiento del IMUNI luego de 30 años. En el año 2000, el profesor Uldarico Malaspina, impulsó la creación del IREM-PUCP, lo que significó el resurgimiento del IPEN luego de 30 años.

He querido recordar de forma sucinta la historia del IREM-PUCP pues entiendo que es la manera en que puede y debe comprender una institución, pues en ella puede vislumbrarse su razón de ser, su necesidad y su misión.

Desde esa perspectiva el IREM-PUCP es una comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, estrechamente vinculados con la comunidad matemática, cuya finalidad académica es la realización de investigación al más alto nivel y, al mismo tiempo esta investigación es solo un medio para alcanzar un fin aún más alto: mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Perú.

Así, el CIEM debe ser entendido como un espacio de encuentro y de reflexión, que nos enriquezca a todos, profesores e investigadores, con la mirada puesta en construir un Perú con centros de investigación en matemáticas y didáctica de las matemáticas, en distintas regiones del país, que contribuyan coordinadamente con la formación continua de las siguientes generaciones de investigadores y profesores de matemáticas de todos los niveles educativos, y que de igual manera ayuden a establecer la vinculación de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas con otras ramas del saber.

El X CIEM desarrolló las siguientes áreas temáticas:

- Currículo, competencias y evaluación
- Historia y epistemología de la matemática y de la Educación Matemática
- Recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Resolución y creación de problemas
- Modelización en Educación Matemática
- Matemáticas y su integración con otras áreas.

El presente libro contiene los artículos de las propuestas aceptadas y presentadas durante el congreso:

- 12 conferencias,
- 19 talleres,
- 53 reportes de investigación
- 13 socializaciones de experiencias

Mi agradecimiento al comité organizador, liderado por Cecilia Gaita y al Comité Científico coordinado por Jesús Flores y, por supuesto a todos aquellos que hicieron posible con sus participación este congreso.

Francisco Ugarte Guerra  
Director del IREM-PUCP

## **Convocan**

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP)

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de Posgrado de la PUCP

### **Auspician:**

IREM-PUCP

Red Peruana de Universidades

### **Comité Científico**

Dra. Jesús Flores Salazar (IREM-PUCP, Perú)

Dr. Alain Kuzniak (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Avenilde Romo Vásquez (Instituto Politécnico Nacional-IPN, México)

Dr. Cerapio Quintanilla Córdor (Universidad Nacional de Huancavelica-UNH, Perú)

Dra. Cileda De Queiroz e Silva Coutinho (PUC Sao Paulo, Brasil)

Mag. Daysi Julissa García Cuéllar

Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile)

Dr. Fumikazu Saito (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Laurent Vivier (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Maria Jose Ferreira da Silva (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dra. Norma Rubio Goycochea (PUCP-Perú)

Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Uldarico Malaspina Jurado (IREM-PUCP, Perú)

### **Comité Organizador**

Dr. Francisco Ugarte Guerra (IREM-PUCP)

Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre (IREM-PUCP)

Dra. Nancy Saravia Molina (IREM-PUCP)

Mag. Cintya Gonzáles (IREM-PUCP)

Mag. Flor Carrillo Lara (IREM-PUCP)

Mag. Iris Flores Quesquén (IREM-PUCP)

# Índice General

## CONFERENCIAS PLENARIAS

- 1 Instrumentación Corporeizada: combinando diferentes puntos de vista sobre el uso de la Tecnología Digital en la Educación Matemática.  
*Paul Drijvers.* 19
- 2 Razonar con la Covariación. Un estudio sobre las Estrategias en un Curso de Formación de Futuros Profesores de Matemática.  
*Jhony Alexander Villa-Ochoa.* 44
- 3 El Papel de los Problemas de Modelación en la Enseñanza Secundaria.  
*María Trigueros Gaisman.* 56
- 4 El 'Networking' de Teorías en Educación Matemática: ¿Qué significa y Qué produce?  
*Michèle Artigue.* 72

## CONFERENCIAS PARALELAS

- 1 Indagar, crear y resolver Problemas de Matemáticas  
*Uldarico Malaspina Jurado.* 82
- 2 Geometría y Ecuaciones Cuadráticas de una Incógnita: Análisis de una Construcción  
*Maria José Ferreira da Silva.* 91
- 3 Praxeologias requeridas por la Profesion Docente  
*Michèle Artaud.* 102
- 4 Contribuição Da Didática da Matemática Na Forma Continuada de Professores que Ensinam Matemática  
*Saddo Ag Almouloud.* 103
- 5 Curiosidades Criativas Na História Do Conceito de Função: Contribuições para o Ensino  
*Iran Abreu Mendes.* 116

6	Cambios en el Espacio de Trabajo Matemático de Profesores del Liceo en el Dominio del Análisis y sus Implicancias con la Modelización <i>Elizabeth Montoya Delgadillo.</i>	124
7	Formación Docente: el caso de la proporcionalidad <i>Jean-Pierre Bourgade.</i>	132
8	Estadística, Criticidad y Registro de Representaciones Semióticas <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho.</i>	142

## TALLERES

1	¿Cómo construir el concepto de Fracción a partir de sus significados? <i>Olimpia Castro, Sahara Doria, Rosa Lafosse, Percy Merino.</i>	151
2	O Cubo Estatístico: Material para Trabalhar Variáveis Estatísticas <i>Irene Mauricio Cazorla, Cláudio Vitor antana.</i>	158
3	Problemas de Matemática Recreativa: Resolución con TAC <i>Daniel Moreno Caicedo, Juddy Amparo Valderrama Moreno.</i>	168
4	Aprendizaje Activo y Visualización: Representación de un Objeto Tridimensional (3d) en el Plano Bidimensional (2d), a partir de sus Proyecciones Ortogonales o Vistas Principales <i>Carlos Manuel Sabino Escobar, Emilio Máximo Vera Namay.</i>	176
5	Patrón, Sucesión y Secuencia. <i>Elvis Bustamante Ramos, Francisco Ugarte Guerra, Magaly Ethel Campos.</i>	182
6	Propuesta de Tareas y Recursos para la Enseñanza de la Geometría <i>Isabel Torres Céspedes, Marisel Beteta Salas, José Carlos León Ríos.</i>	188
7	Recursos Tecnológicos-Matemáticos para formar Docentes Digitales <i>Zenón Eulogio Morales Martínez.</i>	196
8	Construindo o Pensamento Probabilístico: O Jogo Do Franc-Carreau <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueired.</i>	206
9	Visualización de Sólidos por Secciones Transversales usando Geogebra <i>Nancy Saravia Molina, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>	213
10	Uso de Scripts para Crear Actividades Autoevaluables en Geogebra <i>Marco Gutiérrez Montenegro.</i>	218

11	La Formulación de Problemas: Herramienta utilizada en el aula para el desarrollo de Habilidades Matemáticas a lo largo de la Escolaridad <i>Percy Merino, Olimpia Castro, Carlos Torres, Sahara Doria.</i>	224
12	Criação de Aplicativos Na Perspectiva Da Matemática Inclusiva <i>Elton de Andrade Viana, Maximiliani Albano Hermelino Ferreira, Ana Maria Antunes de Campos, Ana Lucia Manrique.</i>	224
13	Educación Financiera en la Escuela Primaria <i>Celso Ribeiro Campos, Andréa Pavan Perin.</i>	240
14	Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría <i>Victor Barrial Sandoval.</i>	249
15	Visualización de Cuadriláteros: Mediación del Software Geogebra <i>Cecilia Gómez Mendoza, Flor Isabel Carrillo Lara, Rocío Figueroa Vera, Gustavo Rodríguez T.</i>	260
16	Creación de Problemas sobre Composición de Funciones usando Applets <i>Elton Barrantes, Maritza Luna, Marco Solorzano.</i>	269
17	Resolución de Problemas Aritméticos <i>Ángel Homero Flores Samaniego, Isabel Torres Céspedes.</i>	278
18	Conocimientos Didáctico-Matemático del Profesor de Secundaria sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales <i>Carlos Omar Cárdenas Estrella, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>	284
19	Una reflexión sobre el uso de la Geometría Dinámica en el Contexto Escolar <i>Guadalupe Morales Ramírez, Norma Rubio Goycochea.</i>	294

## REPORTES DE INVESTIGACIÓN

- 1 La Creación de Problemas en Gestión de Datos y la Formación de Profesores de Secundaria  
*Augusta Osorio Gonzales, Sara Mónica Sáenz Chaparro, Yolanda Gladys Alhuay Albites, Norma Lidia Olivares Acuña.* 302
- 2 Ensino de Matemática a Alunos com Altas Habilidades/Superdotação por Meio da Construção de Cenários Animados no Geogebra  
*Adrielei Cristine Bueno, Maria Ivete Basniak.* 312
- 3 Una investigación con enfoque en las relaciones entre los trastornos y la ansiedad matemática  
*Ana Maria Antunes de Campos, Elton de Andrade Viana, Ana Lúcia Manrique.* 322
- 4 Teorías de maestros sobre evaluación, en el área de matemática  
*Rodri Demus De la Cruz Rodríguez, Luis Manuel Casas García.* 331
- 5 La Creación de Problemas en la Formación de Profesores  
*Carina Saire Huamani.* 340
- 6 Una estrategia de Invención de Problemas para estimular el Desarrollo de la Competencia de Análisis Didáctico en Profesores de Matemática  
*Carlos Torres, Uldarico Malaspina.* 340
- 7 Errores que cometen los estudiantes de tercer año de Secundaria en la Resolución de Inecuaciones Lineales con una Variable  
*Rolando Ruiz Carbajal.* 358
- 8 Relación entre las Cónicas y Diseño Arquitectónico  
*Sumaya Jaimes Reátegui, Rosa Kohama Aréstegui, Darcy E. Aréstegui de Kohama.* 381
- 9 Formas e Equações: Uma Introdução Ao Estudo Das Seções Cônicas Com O Geogebra  
*André Lúcio Grande, Benedito Antonio da Silva.* 393
- 10 Formación de Profesores de Matemática. Una Revisión de Literatura Científica de los últimos 10 años  
*Flor Isabel Carrillo Lara.* 403
- 11 Espacio de Trabajo Matemático Personal: Interpretación Geométrica de la Derivada de una Función Real de Variable Real  
*Lisseth Chacón Cama, Jesús Victoria Flores Salazar.* 415

12	Objeto Virtual de Aprendizaje: Una Estrategia para Desarrollar Pensamiento Algebraico <i>Juddy Amparo Valderrama Moreno, Solange Roa Fuentes.</i>	421
13	Emociones de Profesores de Matemáticas en Formación <i>María S. García González, Elizabeth Advíncula Clemente, Carina J. Saire Huamani.</i>	429
14	La Enseñanza de Sumas con Números Naturales en la Escuela Primaria Multi - Grado <i>Lorena Trejo Guerrero.</i>	439
15	Análise de Livro Didático: Uma Olhar para o Ensino da Linguagem Gráfica <i>Sidney Silva Santos, Geovane Carlos Barbosa, Nathalia Tornisiello Scarlassari, Celi Espasandin Lopes.</i>	447
16	Un Análisis Normativo Ontosemiótico de los Textos Matemáticos Escolares bajo el Enfoque de Género <i>Anderson D. Chavez Marcelo.</i>	455
17	Álgebra nos Anos Iniciais e Finais Do Ensino Fundamental: Análise Das Expectativas Institucionais <i>Anderson Alves, Marlene Alves Días, Karina de Oliveira Castro, Mariana Silva Nogueira Ribeiro.</i>	464
18	Análisis de las Dificultades que presentan los Estudiantes Universitarios en Matemática Básica <i>Roger Ivan Soto Quiroz.</i>	473
19	Errores y Dificultades Relativos al Concepto de Solución de Ecuaciones Lineales <i>Aldrin Peña Lizano, Francisco Ugarte Guerra.</i>	484
20	Dificultades en el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería <i>Alejandro M. Ecos Espino, Joffré Huamán Núñez, Zoraida R. Manrique Chávez.</i>	490
21	Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de ingeniería <i>Violeta Lupita Bejarano Vílchez, Verónica Neira Fernández.</i>	500
22	El Concepto de Infinito y el Modelo de Van Hiele <i>Alba Soraida Gutiérrez Sierra, Rene Alejandro Londoño Cano.</i>	509

23	El Dinamismo de Geogebra para explorar Aspectos Básicos de la Teoría del Caos <i>Viviana Angélica Costa.</i>	519
24	Herramientas matemáticas para la práctica experimental en el área de física <i>Johel Aldo Tarazona Guillen.</i>	529
25	O Professor Em Uma Aula Assente No Ensino Exploratório de Matemática <i>Vania Sara Doneda de Oliveira, Dalva Spiler Brandelero, Maria Ivete Basniak.</i>	537
26	Instrumentación del Artefacto Simbólico Función Cuadrática <i>Daysi Julissa García-Cuéllar, Mihály André Martínez-Miraval, Jesús Victoria Flores Salazar.</i>	546
27	Enfoque Frequentista de Probabilidades - Um Estudo À Luz Da Teoria Dos Registros de Representação Semiótica <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueiredo.</i>	555
28	Formación Docente en Gestión de Datos <i>Augusta Osorio Gonzales, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>	563
29	Concepções sobre Estatística Mobilizadas por Alunos E Professores Do Ensino Médio: Um Estudo de Caso <i>Cassio Cristiano Giordano.</i>	569
30	O Ensino Para O Desenvolvimento Do Pensamento Algébrico Nos Anos Iniciais Face Às Atitudes Em Relação À Matemática E Às Crenças De Autoeficácia De Professores In-Service E Pre-Service <i>Roseli Regina Fernandes Santana, Nelson Antonio Pirola.</i>	579
31	Programa Institucional De Bolsas De Iniciação À Docência, Pibid: O Que Dizem As Escolas, A Universidade E Os Bolsistas <i>Maria Aparecida Silva de Souza, Saddo Ag Almouloud.</i>	589
32	Propuesta De Un Perfil De Ingresante A La Carrera Profesional De Matemática De La Universidad Nacional De Piura <i>Gloria Solvey Crespo Guerrero.</i>	598
33	El Sistema Métrico Decimal En Las Escuelas De Perú: Un Análisis Del Manual De Aritmética Práctica Del Año De 1864 <i>Elenice de Souza Lodron Zuin.</i>	608

- 34 Elaboração De Livro Paradidático Para O Ensino De Estatística: O Trilhar De Uma Proposta Para O Nono Ano Do Ensino Fundamental  
*Anneliese de Oliveira Lozada, Ailton Paulo de Oliveira Jr.* 617
- 35 A Contribuição Da Autoscopia Na Formação Do Professor De Matemática Da Rede Estadual Do Ensino Médio No Estado Do Amazonas  
Aldemir Malveira de Oliveira, Floriano Augusto Veiga Viseu. 630
- 36 Formación Docente Que Enseña Matemáticas Desde Una Perspectiva Colaborativa  
*Zionice Garbelini Martos Rodrigues, Roseli Regina Fernandes Santana, Luciane de Castro Quintiliano, Adriana de Bortoli.* 639
- 37 O Ensino E A Aprendizagem Da Matemática No Processo De Letramento Da Língua Materna: Reflexões Para A Prática Pedagógica  
*Dimas Cássio Simão.* 645
- 38 Crenças De Autoeficácia E O Ensino Da Álgebra Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental  
*Anderson Cangane Pinheiro, Nelson Antonio Pirola.* 653
- 39 La Tasa De Variación: Una Mirada Desde El Etm Personal De Estudiantes De Secundaria  
*Marco Antonio Ticse Aucahuasi, Jesús Victoria Flores Salazar, Elizabeth Montoya Delgadillo.* 662
- 40 Estudio Histórico-Epistemológico De Las Nociones Trigonométricas Seno Y Coseno  
*Gilder Samuel Vargas Vargas, Mihály Martínez-Miraval.* 671
- 41 Estudo Dos Quadriláteros: Uma Revisão Da Literatura  
*Daysi Julissa García-Cuéllar, Saddo Ag Almouloud.* 682
- 42 La Teoría Del Reflejo De V. I. Lenin En La Tradición Dialéctica De L. S. Vygotsky Y Sus Vínculos Con La Educación Matemática: Error Y Fantasía En La Enseñanza Problemática De La Geometría  
*Luis Miguel Maraví Zavaleta.* 693
- 43 La Modelación Y La Experimentación En El Estudio De Un Fenómeno Físico. Experiencias Y Reflexiones En Educación Media  
*Alexander Castrillón-Yepes, Sebastián Mejía Arango, Ana Carolina González-Grisales, Paula Andrea Rendón-Mesa.* 704

44	Un Acercamiento Entre Los Recorridos De Estudio E Investigación Y Las Tareas Auténticas, Propuesta De Un Proceso De Modelización De La Función Seno <i>Percy Luján Rosadio, Cintya Sherley Gonzales Hernández.</i>	714
45	Prácticas De Enseñanza Del Proceso De Modelización Matemática En Secundaria En Bogotá, Colombia <i>Blanca Cecilia Fulano Vargas.</i>	725
46	Descriptores De Nivel De Razonamiento De Van Hiele, Para La Comprensión De La Parábola Como Lugar Geométrico <i>William Eduardo Calderón Gualdrón, René Alejandro Londoño Cano.</i>	735
47	Tareas de Aprendizaje y Habilidades de Visualización a Partir del Cálculo de Volúmenes <i>Catalina Molano Carranza, Hildebrando Díaz Soler.</i>	744
48	Usos de la Pendiente en Prácticas de Agricultura <i>David Esteban Espinoza, Gabriela Buendía Abalos.</i>	757
49	¿Cuáles Competencias Digitales Favorece Desarrollar El Concurso Foto gebra? <i>Karina Amalia Rizzo, Viviana Angélica Costa.</i>	767
50	La Autorregulación como Posibilidad para Aprender Lógica Proposicional a Través del Ajedrez <i>Yorman Arley Isaza Agudelo, Neysy Catalina Londoño Misas, Luz Stella Mejía Aristizábal.</i>	777
51	Textos Literarios para El Aprendizaje de la Matemática <i>Ingrid Maritza Aquino Palacios, Marta Celinda Ríos Zea.</i>	784
52	Análisis Praxeológico de la Integral Definida en Libros de Texto de Ingeniería <i>Walter Orlando Gonzales Caicedo, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>	792
53	Análisis Económico Institucional sobre la Enseñanza de Vectores <i>Maritza Luna Valenzuela, Saddo Ag Almouloud, Francisco Javier Ugarte Guerra.</i>	804

## SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

- 1 Experiencia de Investigación Formativa en la Asignatura de Matemática Financiera  
*David Esteban Espinoza.* 817
- 2 Errores de Estudiantes en la Modelización de una Situación Cotidiana que Involucra a la Función Lineal y Cuadrática  
*Magaly Ethel Campos Motta, Elvis Bustamante Ramos.* 822
- 3 Sequências de Ensino para Promover o Letramento Estatístico  
*Irene Mauricio Cazorla, Miriam Cardoso Utsumi.* 828
- 4 Análisis de Actividades para la Enseñanza de la Gestión de Datos  
*Percy Callinapa Supo, Eliana Inca Choquepata, Elsa Macedo Anaya.* 839
- 5 La Situación Significativa en la Competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre  
*Giovanna Vicky Gonzales Oporto, Sebastiana Nancy Sacasqui Aguilar.* 848
- 6 Experiencia de la Competencia, “Resuelve Problemas de Forma, Movimiento y Localización” en el Último Puente Inca de Queswachaka  
*Franklin Taipe Florez, Julio Cesar Condori Huillca, Doris Castro Huamani Willi Taipe Florez.* 856
- 7 El Uso de la Regleta de Cuisenaire en el Aula  
*Elizabeth de Lourdes Caudana.* 866
- 8 Educação Estatística Em Um Ambiente de Modelagem Matemática: Uma Ótica Inclusiva Na Educação Infantil  
*Roseli Rosalino Dias da Silva Angelino, Ana Paula Gonçalves Pita, Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzki, Andréa Pavan Perin.* 872
- 9 Usando El Ciclo Ppdac para el Análisis Didáctico de una Situación Problema de Secundaria  
*Augusta Osorio Gonzales, Gladys Flores Cuevas, Juliana Pérez Taxi.* 880
- 10 A Constituição Da Matemática Na Proposta Curricular Da Rede Pública Municipal De Educação De São Luís  
*Waléria de Jesus Barbosa Soares, Carlos André Bogéa Pereira.* 888
- 11 Vibraciones y Ondas con Mathematica  
*Roy Sánchez Gutiérrez.* 896

12	Aprendiendo a Entender La Noción de Límite de una Función <i>Judith Catherine Chávez Salinas.</i>	904
13	O Laboratório de Educação Matemática e Inclusão Na Formação Inicial Do Professor de Matemática <i>Karem Keyth de Oliveira Marinho, Elielson Ribeiro de Sales.</i>	910

# LA MODELACIÓN Y LA EXPERIMENTACIÓN EN EL ESTUDIO DE UN FENÓMENO FÍSICO. EXPERIENCIAS Y REFLEXIONES EN EDUCACIÓN MEDIA

**Alexander Castrillón-Yepes**

**Sebastián Mejía Arango**

**Ana Carolina González-Grisales**

**Paula Andrea Rendón-Mesa**

alexander.castrillony@udea.edu.co, sebastian.mejia4@udea.edu.co,

ana.gonzalez2@udea.edu.co, paula.rendon@udea.edu.co

Universidad de Antioquia, Colombia

## Resumen

*Se presentan experiencias y reflexiones frente a la inmersión de la modelación y la experimentación en la enseñanza de las matemáticas y la física, enmarcadas en un proyecto de investigación que se desarrolló en la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). El problema se configuró a partir de evidencias que recopilaron los investigadores en una institución educativa pública; y está relacionado con la desarticulación entre modelos matemáticos y fenómenos físicos. El objetivo de este trabajo es analizar las posibles relaciones que algunos estudiantes construyen entre los modelos y un fenómeno físico a través de la modelación y la experimentación. Se adoptó un enfoque cualitativo, donde los investigadores asumieron el rol de observadores participantes, buscando describir e interpretar las acciones de los estudiantes a través de una propuesta de aula. Los resultados muestran que los procesos de modelación y experimentación son favorables para establecer relaciones entre los conocimientos matemáticos y físicos.*

**Palabras clave:** *Modelación, experimentación, interdisciplinariedad.*

## Introducción

Se presenta parte de un trabajo de investigación que se realizó en el marco del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física (formación de profesores) de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). El problema de investigación emergió de la práctica pedagógica que se llevó a cabo en una institución educativa pública con estudiantes de 10<sup>o</sup>-11<sup>o</sup> (15-18 años). A partir del reconocimiento de la institución se identificaron dificultades de los estudiantes para relacionar representaciones matemáticas con fenómenos físicos.

La delimitación del problema consta de dos niveles, uno institucional y otro documental; ambos se configuraron a través del acercamiento a las clases de matemáticas y física. En el primer nivel,

los investigadores por medio de sus diarios de campo identificaron dificultades de los estudiantes para comprender el uso de modelos matemáticos en la clase de física, en especial, su manipulación e interpretación. Por ejemplo: La Ley de Coulomb fue vista por ellos como una "fórmula" que les permite obtener resultados numéricos. De esta manera, no hay evidencia de un análisis del modelo, es decir, qué representa y cómo se relaciona con la explicación de fenómenos físicos y quién lo usa y para qué lo usa (Villa-Ochoa, 2016). Además, en este nivel los estudiantes se cuestionan por la utilidad de las matemáticas, aun cuando en clase de física se requieren para expresar leyes y explicar y describir fenómenos.

En el nivel documental, se encuentran los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), y algunos reportes de literatura en relación con las dificultades observadas y con las estrategias propuestas para superarlas. Esto permitió identificar dos aspectos: el primero, una desarticulación entre los modelos matemáticos y su importancia en la explicación y descripción de los fenómenos; el segundo, la importancia de procesos como la modelación y la experimentación en la enseñanza de las matemáticas y la física y en sus posibilidades para promover el trabajo interdisciplinario (MEN, 2006).

La justificación sobre el uso de la modelación y la experimentación es debido a que la primera permite establecer relaciones entre las matemáticas y otras disciplinas (Blum, 2011), y a su vez es relevante para el estudio de situaciones científicas (MEN, 2006); y la segunda porque es una actividad de importancia en la enseñanza de las ciencias (Romero y Aguilar, 2013), se ha incorporado en la enseñanza de las matemáticas y en ambientes que involucran diferentes tipos de tecnologías (Rodríguez y Quiroz, 2016; Molina-Toro, Villa-Ochoa y Suárez, 2018) y se reconoce su relación con la modelación y los modelos (MEN, 2006; Rodríguez y Quiroz, 2016).

En consideración con la delimitación del problema, el objetivo de esta investigación es analizar las posibles relaciones que algunos estudiantes de Educación Media (15-18 años) construyen entre los modelos y un fenómeno físico a través de la modelación y la experimentación. En ese sentido, en el siguiente apartado se expondrán algunos referentes teóricos relacionados con la modelación y la experimentación; luego, se presentarán algunos aspectos metodológicos que se consideraron; y, finalmente, se describirán los resultados que se obtuvieron al implementar una propuesta de aula.

### **Modelación y experimentación en la enseñanza de las matemáticas y la física**

Diversos investigadores concuerdan al considerar que la modelación y la experimentación son importantes en la formación en matemáticas y ciencias (Blum y Leiß, 2006; Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017; Rodríguez y Quiroz, 2016; Caron y Pineau, 2017; Romero y Aguilar, 2013; Molina-Toro et al., 2018). De manera particular, algunos estudios plantean que la modelación puede ser entendida como un proceso que busca la construcción de modelos y en el cual se establecen conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas o áreas del conocimiento (Blum y Leiß, 2006).

Las preocupaciones sobre la manera en que se desarrolla la modelación en el contexto escolar

han generado que se caracterice este proceso a través de ciclos; sin embargo, existen diferentes perspectivas y ciclos de modelación en el campo de la Educación Matemática que varían según la mediación de algunos instrumentos o herramientas y en la descripción de los elementos que intervienen cuando se modela un problema o situación (Perrenet y Zwaneveld, 2012). A pesar de esto, es posible identificar algunos aspectos comunes que se movilizan a la hora de modelar. Entre estos se encuentra el estudio de un problema, situación o fenómeno que demarcan el contexto en el cual emerge la situación a modelar; la simplificación, referida a la identificación y exclusión de variables o factores que no intervienen directamente en el fenómeno o, que debido a su poca influencia, se pueden despreciar; la matematización, que consiste en la construcción de modelos y representaciones matemáticas en consideración con el fenómeno o problema; y, finalmente un proceso de validación que busca evaluar el grado de correspondencia entre los modelos planteados y la situación que se estudia. Sin embargo, estos aspectos no agotan la actividad de modelado, puesto que otras acciones se deberán ejecutar en consideración con la situación estudiada, los medios disponibles y los propósitos de formación con los cuales se incorpora este proceso en el aula.

Por su parte, la experimentación es vista como una actividad científica y un objeto de investigación desde varias perspectivas y enfoques en el ámbito educativo. Así, se reconocen discusiones alrededor de la dicotomía entre teoría y experimentación, y planteamientos sobre la caracterización de diferentes tipos de experimentos (como los físicos, mentales, discrepantes, etc.) que implican acciones como la observación controlada e intencionada, la manipulación de variables y la formulación de hipótesis. De manera particular, este trabajo asume una perspectiva donde la experimentación se encuentra en constante interacción con las construcciones teóricas; al asumir esta postura, según Malagón, Sandoval y Ayala (2013) la experimentación se acompaña de la comprensión conceptual y del diseño y organización de experiencias.

Frente a las acciones involucradas en la experimentación se resalta el diseño experimental, la observación controlada, el uso y manipulación de artefactos, la identificación de variables, la medición, la formalización y la validación (Mengascini y Mordeglia, 2014; Molina-Toro et al., 2018). De esta manera, es posible observar que la modelación y la experimentación comparten acciones y, en coherencia con esto, es viable plantear la vinculación de estos dos procesos en escenarios educativos. Algunas experiencias plantean incluso la importancia de considerar la experimentación en los procesos de modelación porque ésta permite dotar de significado los conceptos matemáticos y porque favorece la construcción, interpretación y validación de modelos (Rodríguez y Quiroz, 2016).

Caron y Pineau (2017), por ejemplo, plantean que algunos estudiantes tienen una buena percepción de las actividades experimentales cuando se modela y que estas pueden contribuir al aprendizaje de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades de modelación.

En coherencia con estos planteamientos alrededor de la modelación y la experimentación, al igual que Molina-Toro y colaboradores (2018), en esta investigación se considera la posibilidad de promover la articulación de estos dos procesos en la enseñanza de las matemáticas y la física,

mediante el estudio de un fenómeno físico, la construcción de montajes experimentales, la consideración de las variables de interés en dicho fenómeno (simplificación), el ajuste de los montajes, el registro de datos, la reflexión sobre los procesos de medición, la construcción de modelos y representaciones, y la validación. Esta incorporación promueve escenarios interdisciplinarios en el ámbito de las matemáticas y las ciencias, a la vez que moviliza la comprensión de conceptos y procedimientos propios de estas disciplinas.

### **Diseño metodológico**

Esta investigación surge de las prácticas pedagógicas que realizaron los autores de este trabajo en una institución educativa pública en Colombia, en el marco del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). La investigación adoptó un enfoque cualitativo que involucra acciones como cuestionar, crear hipótesis e interpretar. Así, autores como García, Gil y Rodríguez (1999) y Hernández, Fernández y Baptista (2014) sustentan que la investigación cualitativa se puede ver como un conjunto de prácticas interpretativas de la realidad. Las interpretaciones de la realidad en este trabajo se configuraron a partir de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos derivados del proceso de práctica de los investigadores y de la implementación de una propuesta de aula. En ese sentido, la investigación se desarrolló a partir de tres etapas, las cuales se describen a continuación:

- Etapa 1. Configuración del problema y revisión de literatura: En esta primera etapa se realizó un proceso de contextualización con la institución educativa, un reconocimiento del problema de investigación y una revisión de la literatura alrededor de la modelación y la experimentación.
- Etapa 2. Diseño, construcción y validación de una propuesta de aula: En esta segunda etapa se construyó una propuesta de aula en consideración con los elementos teóricos abordados en la etapa anterior, la cual fue discutida en diferentes espacios como semilleros de investigación y con algunos investigadores. La construcción de la propuesta de aula consta de tres fases, de las cuales se presentarán dos que son de interés para este reporte de investigación. La Tabla 1, describe las intenciones de dichas fases.

Tabla 1

Fases de la propuesta de aula

<b>Fase</b>	<b>Actividad</b>	<b>Intención</b>
Fase 2 "Modelación y experimentación"	Consta de tres momentos: el primero de ellos se centra en el reconocimiento de las variables involucradas en un fenómeno físico. El segundo hace alusión al estudio de un sistema masa-resorte donde los estudiantes se organizaron en equipos de trabajo para observar, tomar datos, analizar y graficar para describir y comprender el fenómeno a través de las variables que en él intervienen. El tercer momento consta de una discusión donde se abordaron reflexiones sobre sus resultados y se presentaban elementos teóricos sobre las funciones periódicas, para finalmente construir, con ayuda de los investigadores, un modelo del sistema.	-Relacionar las funciones matemáticas (relación de dependencia entre variables) y las relaciones causales de los fenómenos.  -Relacionar el Movimiento Armónico Simple (MAS) con las funciones periódicas.
Fase 3 "Apropiación"	Esta fase consta de dos momentos: en el primero los estudiantes realizaban una indagación del Movimiento Armónico Simple en un péndulo. Ellos debían analizar las variables implicadas en este fenómeno y, con la ayuda de la modelación y la experimentación, construir un modelo matemático del fenómeno. En el segundo momento presentaron reflexiones en torno a los resultados que obtuvieron.	-Analizar y construir modelos a partir del MAS.

Fuente: Elaboración de los autores

- Etapa 3. Implementación, recolección y análisis de la información: Esta última etapa contempla la intervención en el aula, la recolección de registros sobre las construcciones de los estudiantes (documentos, diarios pedagógicos de los investigadores y grabaciones en audio y video de algunas sesiones) y el análisis de la información, donde los investigadores realizaron un proceso de revisión independiente y luego se reunieron para

triangular la información.

Finalmente, a partir del análisis de la información y la triangulación que hicieron los investigadores se realizó un proceso de categorización sobre las relaciones que los estudiantes establecieron entre los conocimientos en matemáticas y física, estas categorías son: relación de aplicación, relación de complementariedad y relación vacía.

- La relación de aplicación se da cuando los modelos matemáticos actúan de manera técnica sobre los fenómenos o cuando estos se limitan a ser el contexto para la construcción de modelos; es decir, cuando las matemáticas tienen un rol instrumental en la explicación o descripción de fenómenos físicos, o cuando el fenómeno físico se convierte en una "excusa" para modelar. Esta categoría implica que se percibe la matemática como una herramienta para la comprensión de la física o la física como un contexto para aplicar las matemáticas, en consecuencia, en cada caso la modelación o la experimentación se presentan subordinadas la una de la otra.
- La relación de complementariedad se presenta cuando las representaciones matemáticas y el fenómeno físico están en constante comunicación; aquí los procesos de modelación y experimentación se desarrollan y se apoyan simultáneamente sin subordinación.
- La relación vacía se da cuando se realizan relaciones entre modelos matemáticos y los fenómenos físicos, pero carecen de sentido y significado. En este caso, se reconoce que las matemáticas y la física están relacionadas, pero no se logra explicitar dicha relación, su naturaleza o necesidad. También se incluyen los casos en los que se plantea una relación nominal, pero sin sentido a la luz del conocimiento matemático o científico.

## Resultados

En este apartado se presentan los principales resultados de la investigación en relación con el uso de la modelación y la experimentación para relacionar los modelos matemáticos con los fenómenos físicos.

Relación de aplicación:

Frente a la relación de aplicación, algunos estudiantes plantearon cómo el uso de expresiones matemáticas permitía describir o considerar elementos del fenómeno físico estudiado, en este caso, en relación con el MAS. Así, por ejemplo, el estudiante E1 (en adelante usaremos los códigos E1, E2, E3, etc. para aludir a cada uno de los participantes) mencionó que en su equipo de trabajo: "Encontramos una función  $f(x)$  o función del tiempo, porque de acuerdo al tiempo, encontramos la posición. Entonces tenemos que si varía el tiempo la posición también". Este fragmento da cuenta de que los estudiantes identifican la dependencia e independencia entre variables y la existencia de una función, lo cual hace parte de los procesos de modelación y experimentación

(Gallardo, 2013; Caron y Pineau, 2017); sin embargo, en este caso ellos no presentaron la función a la que aludieron, ni dieron cuenta de argumentos sólidos sobre el tipo de función que se requiere para la descripción de un movimiento periódico.

Otra evidencia se presenta en la descripción de E2 sobre el proceso que realizaron en su equipo de trabajo:

"[...] El punto de equilibrio para nosotros fue de 18. En un determinado tiempo que fueron 12 segundos contamos 10 oscilaciones, después de esto para encontrar el T, que sería el periodo, lo dividimos;  $12/10$  nos da 1.2 y ya de ahí pudimos encontrar la frecuencia angular que sería  $2\pi rad/1.2$  [...] y nos da un total de 5.23. Ya de ahí podemos encontrar la función [...] la amplitud la usamos teniendo en cuenta que el punto máximo al que llegaba la gráfica era 40 y el punto de equilibrio era 18, así que lo restamos y dio 22 [...] su función sería  $f(t) = 22 \text{sen}(5,23)t + 18$ ".

En esta última evidencia se identifica que el grupo de trabajo logra construir un modelo matemático en consideración con el diseño experimental que realizaron. Esto se hizo en coherencia con los conceptos físicos involucrados; sin embargo, en la discusión se evidenció que la explicación del fenómeno pasó a un segundo plano para primar el hallazgo del modelo matemático. Llamó la atención que los estudiantes priorizaron el registro tabular y el gráfico sobre la experiencia, por eso, olvidaron realizar el proceso de validación con la experiencia y se remitieron a los datos que registraron como único mecanismo para la validación.

Relación de complementariedad:

La única evidencia que los investigadores encontraron sobre este tipo de relación se dio en la fase 2 de la propuesta de aula, en la cual orientaron la discusión y la construcción de un modelo matemático a la luz de una experiencia física. En ese sentido, los investigadores debieron problematizar los argumentos de los estudiantes, evocar situaciones sobre sus registros tabulares y gráficos, pero también de la situación real para interpretar cada uno de los valores que registraron. A continuación, se describe una nota del diario de campo de uno de los investigadores:

"En las actividades del sistema masa-resorte, les preguntábamos a los estudiantes sobre sus mediciones y sus representaciones para que aludieran algunos de nuevo a los conceptos y procesos. Así se les cuestionó, por ejemplo, ¿por qué la cinta métrica se ubica de esa manera? ¿Por qué las gráficas se realizaron con trazos rectilíneos o curvilíneos (según el caso)? ¿La gráfica muestra que el sistema es acelerado o constante?... Esto los llevó a remitirse a sus experiencias..." (Diario de campo, sección 28 de agosto del 2019).

Relación vacía:

Como se mencionó en el diseño metodológico en esta categoría se presentan evidencias de

algunas relaciones que los estudiantes establecieron entre modelos matemáticos y el MAS. Por ejemplo, en la Figura 1 se presenta la construcción de un estudiante, donde afirma que la reflexión, la rotación y la traslación de funciones eran las variables del movimiento. Esto da cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes sobre lo que es una variable en el sentido matemático y físico.

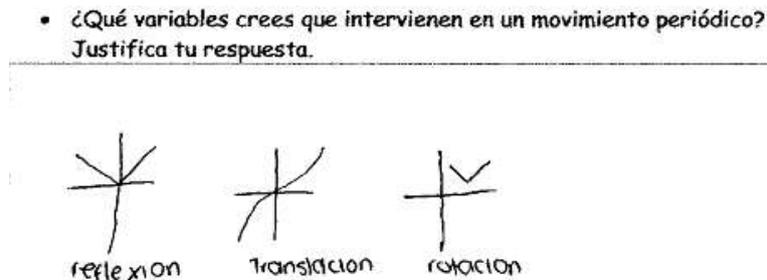


Figura 1. Evidencias de la relación vacía

Otras respuestas de los estudiantes, enmarcadas en esta categoría, permitieron identificar algunas dificultades para la construcción de un modelo. Una interpretación de los investigadores frente a este hecho se relaciona con la falta de claridad conceptual que mostraron los estudiantes frente a nociones como periodo, el cual se confundía con un tiempo arbitrario que medían, y el de frecuencia angular.

### Consideraciones finales

Este reporte de investigación muestra que la incorporación de la modelación y la experimentación en las clases de matemáticas y física posibilitan dotar de significado los modelos matemáticos y los fenómenos físicos. En particular, la identificación y el reconocimiento de relaciones entre variables se materializaron en algunas de las producciones de los estudiantes. Sin embargo, este trabajo también da cuenta que la articulación de procesos como la modelación y la experimentación es un proceso complejo tanto para los estudiantes como para los profesores debido a que involucra conocimientos propios de las matemáticas y las ciencias, como la observación controlada, la formulación de hipótesis, la identificación de variables y sus relaciones, el diseño y ajuste de montajes experimentales, y el uso y validación de modelos.

Se sugiere realizar investigaciones y experiencias que exploren cada una de las categorías definidas en este trabajo. En particular, que den cuenta de las posibilidades para promover relaciones de complementariedad entre las matemáticas y la física. Esto posibilitaría promover trabajos interdisciplinarios donde no se presente una subordinación entre los conocimientos matemáticos y los extramatemáticos como un apriorismo en el cual la construcción de un modelo es el fin de la actividad de modelado o en donde la experimentación deje de lado el uso de leyes y expresiones matemáticas. Más bien, se espera que se reflexione y reconozca los aportes que

estos procesos pueden brindar a los escenarios educativos para la comprensión de las matemáticas y la física.

## Referencias

- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15-30). Springer, Dordrecht.
- Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.) *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
- Gallardo, P. (2013). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 0 (10), 183-193.
- Caron, F., & Pineau, K. (2017). L'Hospital's Weight Problem: Testing the Boundaries Between Mathematics and Physics and Between Application and Modelling. In Stillman G., Blum W., Kaiser G. (eds), *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 59-69). Springer, Cham.
- García, E., Gil, J., & Rodríguez, G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México: McGraw-Hill.
- Malagón, F., Sandoval, S., & Ayala, M. M. (2013). La actividad experimental: construcción de fenomenologías y procesos de formalización. *Praxis Filosófica*, 36, 119-138.
- Mengascini, A. S., & Mordeglia, C. (2014). Caracterización de prácticas experimentales en la escuela a partir del discurso de docentes de primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87-115.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.
- Romero, Á. E. & Rodríguez, O. L. D. (2003). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 55-67.

- Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación *matemática*. *Educación matemática*, 28(3), 91-110.
- Romero, A., & Aguilar, Y. (2013). La experimentación y el desarrollo del pensamiento físico. Un análisis histórico y epistemológico con fines didácticos. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.
- Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Diaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Barcelona: Gedisa.