UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE CURVA EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE PIRIE Y KIEREN

Autor
Carlos Mario Pulgarín Pulgarín

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Doctorado en Educación
Medellín, Colombia
2022

Comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

Carlos Mario Pulgarín Pulgarín

Tesis presentada como requisito para optar al título de:

Doctor en Educación

Asesores:

Carlos Mario Jaramillo López
Doctor en Ciencias Matemáticas

René Alejandro Londoño Cano
Doctor en Educación

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Educación Matemática e Historia Edumath

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Doctorado en Educación

Medellín, Colombia

2022

Doctorado en Educación, Cohorte XV.

Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (Edumath).

Centro de Investigación en Ciencias Exactas y Naturales (CIEN).

Centro de Documentación Educación

Dedicatoria

A mi familia por su presencia permanente,

A mi padre que desde el cielo me acompaña en cada paso.

Agradecimientos

Por su estímulo permanente, valioso tiempo y constantes enseñanzas antes y durante el desarrollo del presente estudio, a:

Doctor Carlos Mario Jaramillo López, profesor titular del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia. Asesor de la presente investigación.

Doctor René Alejandro Londoño Cano, coordinador de la Línea de Formación en Educación Matemática del programa de Maestría en Educación en la metodología virtual y para las regiones de la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Co-asesor de la presente investigación.

A quienes directa o indirectamente hicieron parte de este proceso.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

La importancia histórica y epistemológica del concepto de curva y la creciente preocupación por el estudio de la comprensión que se ha generalizado en el ámbito de la Educación Matemática, despiertan el interés por aportar en este campo a través de la presente investigación, la cual se enfoca en la comprensión del concepto de curva en las transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de la evolución de la comprensión matemática planteada hace algunas décadas atrás por Susan Pirie y Thomas Kieren.

En principio se plantea el problema de investigación, el cual converge en la pregunta que busca responder cómo es el proceso de comprensión del concepto de curva en estudiantes de cálculo integral de programas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia. A partir de allí, se hace necesario conocer la evolución y principales elementos que estructuraron dicho concepto a lo largo de siglos de evolución de la matemática, destacando a su vez los aportes más fehacientes de reconocidos matemáticos a través de la historia.

Posteriormente, se analizan los conceptos de continuidad, discreto e infinito, pilares dentro de la formalización de lo que se ha denominado en este estudio como transición. Esta discusión en torno a tales conceptos son el preámbulo para articularlos con la comprensión como objeto de estudio.

Luego de esta confluencia entre el objeto matemático y el objeto de estudio de la investigación, se plantea como objetivo analizar en los estudiantes de un curso de cálculo integral que hacen parte de los cursos del núcleo común de los programas de Ingeniería de dicha Facultad, la comprensión del concepto de curva en la transición entre lo discreto y lo continuo mediante procesos de razonamiento infinito en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (PK). Para lograrlo, se emplea la metodología de experimentos de enseñanza (conocida por sus siglas en inglés como TEM: Teaching Experiment Methodology), que permiten estructurar un episodio de enseñanza a

través de tres fases: preparación del experimento, experimentación y análisis preliminar, y por último, análisis retrospectivo. A su vez, dentro de estas fases se implementan tres instrumentos de recolección de información (cuestionario inicial, entrevista semiestructurada, cuestionario final) y, para cada uno de ellos se diseñan una serie de descriptores que son refinados a lo largo de la investigación.

De este modo, una vez obtenidos los resultados del trabajo de campo, los descriptores son utilizados para ubicar los estudiantes en un nivel de comprensión dentro del modelo PK y a su vez asociar las variables dentro de la unidad de análisis, con el fin de generar la matriz de perfil de cada estudiante. Los resultados obtenidos con dicha matriz integran el TEM, los niveles PK y las categorías de análisis, brindando un panorama que exhibe el nivel de comprensión de cada estudiante con respecto al concepto de curva y una serie de conclusiones de gran relevancia.

Desde el punto de vista histórico y epistemológico se deja en evidencia la importancia del concepto de curva al momento de entrar en discusión sobre la noción de derivada e integral. Esto en gran medida por que tanto la derivada como la integral se fundamentan desde el concepto de curva en sí misma, y, la manera como las respuestas de los estudiantes en los instrumentos lo validan, se entra en conflictos y contradicciones incluso cuando no se reconoce si una función es una curva o si la generación de una curva implica movimiento. Estas consideraciones en el cálculo con base en los resultados obtenidos dan cuenta de que debe destacarse y replantear el concepto antes de formalizar otros que dependen de este para su definición y formalización.

Por último, la investigación plasma la importancia de los TEM dentro de la enseñanza de la matemática, y en este sentido, queda todo un camino por recorrer en pro de ampliar los experimentos de enseñanza en el aula, de tal manera que la evolución de la comprensión de los estudiantes se convierta en sí mismo en el eje principal de las propuestas pedagógicas de los profesores siendo estos a su vez docentes, tutores e investigadores.

Abstract

The historical and epistemological importance of the concept of curve and the growing concern for the study of comprehension that has become widespread in the field of Mathematics Education, arouse interest in contributing to this field through this research, which focuses on the understanding of the concept of curve in the transitions between the discrete and the continuous within the framework of the theory of the evolution of mathematical understanding raised a few decades ago by Susan Pirie and Thomas Kieren.

In principle, the research problem is posed, which converges in the question that seeks to answer how is the process of understanding the concept of curve in students of Calculus of programs of the Faculty of Engineering of the University of Antioquia? From there, it is necessary to know the evolution and main elements that structured this concept throughout centuries of evolution of mathematics, highlighting in turn the most reliable contributions of renowned mathematicians throughout history.

Subsequently, the concepts of continuity, discrete and infinite are analyzed, pillars within the formalization of what has been called in this study as transition. This discussion around such concepts is the preamble to articulate them with understanding as an object of study.

After this confluence between the mathematical object and the object of study of the research, the objective is to analyze in the students of an integral calculus course that is part of the common core courses of the Engineering programs of said Faculty, the understanding of the concept of curve in the transition between the discrete and the continuous through infinite reasoning processes within the framework of the Pirie and Kieren (PK) theory. And to achieve this, the teaching experiment methodology (known by its acronym in English as TEM: Teaching Experiment Methodology) is used, which allows a teaching episode to be structured through three phases: experiment preparation, experimentation, and preliminary analysis, and lastly,

retrospective analysis. In turn, within these phases three data collection instruments are implemented (initial questionnaire, semi-structured interview, final questionnaire) and, for each of them, a series of descriptors are designed that are refined throughout the investigation.

In this way, once the results of the field work have been obtained, the descriptors are used to locate the students at a level of understanding within the PK model and in turn associate the variables within the unit of analysis, to generate the profile matrix of each student. The results obtained with said matrix integrate the TEM, the PK levels, and the analysis categories, providing an overview that shows the level of understanding of each student regarding the concept of curve and a series of highly relevant conclusions.

From the historical and epistemological point of view, the importance of the concept of curve is evident when entering a discussion about the notion of derivative and integral. This is largely because both the derivative and the integral are based on the concept of the curve itself, and the way in which the responses of the students in the instruments validate it, conflicts and contradictions arise even when it is not recognized. whether a function is a curve or whether the generation of a curve involves motion. These considerations in the calculation based on the results obtained show that the concept must be highlighted and reconsidered before formalizing others that depend on it for its definition and formalization.

Finally, the research reflects the importance of TEM within the teaching of mathematics, and in this sense, there is still a long way to go in order to expand the teaching experiments in the classroom, in such a way that the evolution of the understanding of the students becomes itself the main axis of the pedagogical proposals of the teachers, being these in turn teachers, tutors and researchers.

Introducción

La presente investigación es producto de un estudio que se enmarca en el programa de Doctorado en Educación de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia en la línea de formación de la educación matemática.

El escrito consta de nueve capítulos en los cuales se indaga, plantea, fundamenta y analizan la comprensión del concepto de curva en estudiantes de Cálculo a nivel universitario.

En primer lugar, en el capítulo uno se plantea una revisión y análisis de la literatura en relación con el concepto de curva[1]. La trascendencia histórica del concepto no pasa desapercibida, así como tampoco la importancia de indagar en torno a su estudio y correspondencia con procesos de razonamiento infinito en el campo de la educación matemática. Es por esto que, después de un recorrido por diversas fuentes bibliográficas afines con el tema, en el capítulo dos se presenta y fundamenta el problema de investigación y el objeto matemático en cuestión, lo que conlleva a la discusión sobre apreciaciones de gran relevancia entre el concepto de curva y continuidad en los capítulos tres y cuatro, dado que traen consigo elementos importantes, como lo son por ejemplo el hecho de considerar la importancia de estructurar de manera rigurosa el concepto de transición, así como también procesos de razonamiento infinito, los cuales serán claves en el tratado que sobre curvas se hace a la luz de la teoría de Pirie y Kieren (1994) que se desarrolla en el capítulo cinco.

Finalmente, en el capítulo seis se fundamenta la metodología de la investigación con base en la investigación de diseño, la cual es el punto de partida para describir detalladamente en el capítulo siete un TEM (Teaching Experiment Methodology) y a su vez articularlo a la teoría PK, de manera que permitan interpretar sistemáticamente los resultados de la triangulación con base

[1] El término curva o curvas a lo largo del escrito hará alusión a curvas en el plano cartesiano. En caso de indicar otro tipo de región, se hará la debida aclaración.

en tres instrumentos implementados dentro del experimento de enseñanza. A partir de dicha sistematización se aplica la unidad de análisis (UA) para establecer una serie de conclusiones en torno a responder la pregunta de investigación, lograr el cumplimiento de los objetivos de la investigación y los resultados de la misma.

1. Estudios relacionados con la comprensión del concepto de curva

Ante la pregunta ¿Qué es una curva? Es posible que resulte sencillo e inmediato asociar su respuesta con una imagen o representación gráfica, sin embargo, surgen otras preguntas tales como ¿Es posible definirla de manera simple? Pues bien, conforme a este planteamiento, el estudio sobre curvas requiere profundidad, de hecho, se ha venido discutiendo sobre él desde varios siglos a. de C. y aún en nuestros días surgen nuevos elementos que aportan a una construcción y formalismo de mayor rigor en el tema. En este sentido, considerando la enseñanza y aprendizaje del concepto de curva y sus elementos asociados, se pretende indagar, discutir y analizar aspectos matemáticos y de comprensión en torno a este concepto (curva), desde una perspectiva del estudio del cálculo y, en especial, desde un análisis entre el paso de lo discreto a lo continuo en el plano. Para ello, previamente resultó pertinente revisar las investigaciones que se han llevado a cabo en esta temática y la manera cómo podrían fundamentar el presente estudio. Es así como se inicia identificando los términos específicos involucrados (continuo, discreto, curvas, transiciones entre discreto y continuo, curvas discretas, curvas continuas, comprensión del concepto de curva) y posteriormente se procede con la búsqueda en algunas de las principales bases de datos y buscadores de la red, tales como: APA PsycNET, Cambridge, DOAJ, Dialnet, ERIC, MATHSCINET, Science Direct, Google Scholar, entre otras. Se usan palabras claves relacionadas para ingresarlas como variantes gramaticales dentro del buscador, posterior a ello, se emplearon sinónimos de términos relacionados o significados parecidos asociados al mismo campo semántico. De igual forma, se tradujeron tales términos al inglés y se ingresaron a los buscadores y bases de datos para analizar los resultados arrojados. Luego, se procedió a controlar dichos resultados por medio del intervalo de tiempo en que fueron publicados (entre 1998 y 2018). Se evidenció un número considerable de resultados, sin embargo, en el transcurso de la lectura preliminar y el análisis respectivo de los principales artículos asociados al presente estudio, se puede observar que pocos se pueden vincular de manera directa al objeto de estudio. En consecuencia, se seleccionaron aquellos que poseen elementos afines a la tesis doctoral, que permiten poner en evidencia el problema de investigación, los cuales se presentan a continuación:

Tabla 1

Resultados de búsqueda en algunas bases de datos

Buscador	Búsqueda	Resultados	Resultados considerados
APA PsycNET	Discrete and continuous curves	28	The perception of continuous curves in dot stimuli. Discrete and continuous modes of curved-line discrimination controlled by effective stimulus duration
Cambridge	Discrete and continuous curves	79.543	Curves with continuous Curvatures in Euclidean spaces Cultivating curves Discrete geometry
DOAJ (Directory of open Access journals)	Discrete and continuous curves	23	
Google Scholar	understanding of the concept of curve	528000	Proving Understanding
	discrete and continuous curves	978.000	Concerning curves plane Cultivating curves Discrete and continuous modes of curved line discrimination Curves with continuous curvatures in euclidean spaces Is perception discrete o continuous? A book of curves
	aproximación poligonal de curvas planas	3.050	Esquemas de subdivisión para generar curvas Curvas de Bezier
	transiciones entre discreto y continuo en el estudio del cálculo	7.000	Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria,

	comprensión del concepto de curva		secundaria obligatoria, bachillerato y universidad. La articulación conceptual entre contar-medir y discreto-continuo El concepto de infinito en Leibniz y Locke Paradoxien des Unendlichen Uber unendliche, lineaire Punkmannichfaltigkeiten El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos
Scielo	discrete and continuous curves	3	
	understanding of the concept of curve	4	
Scopus	discrete and continuous curves	0	

Para efectos del desarrollo del presente estudio, se observa y se analizan en detalle los resultados de la búsqueda, logrando identificar autores desde campos distintos de investigación que relacionan resultados sobre curvas discretas y continuas. Sin embargo, es importante estudiar la relación existente entre ellas para comprender los conceptos matemáticos involucrados. Al parecer, no abundan investigaciones cuyo foco de interés sea la comprensión entre los aspectos discretos y continuos de una curva en el campo de la educación matemática, aspectos que son el centro de atención de la presente tesis doctoral.

Es de destacar que los estudios sobre curvas son muy amplios. El texto “A book of curves” de Lockwood (1961) es un clásico que hace un recorrido por los diferentes tipos de curvas pasando incluso por algunas tales como epitrocoides y cuádruple cicloides. En el campo del análisis matemático se encuentra un número considerable de investigaciones sobre curvas. Tarrés (1998) ofrece un referente histórico al respecto, rescatando aportes de Bolzano, Gauss, Cantor, Peano, entre otros. Presenta apreciaciones sobre la idea de curva, curva cerrada, hiperespacios, la curva de Peano y otras definiciones en las que se resaltan cronológicamente los aportes más relevantes sobre el tema desde la geometría y el análisis. Además, brinda una perspectiva teórica y reflexiones filosóficas al respecto. Por otra parte, Rodríguez (2005) propone como tesis doctoral una contribución a la teoría de la aproximación y la construcción de curvas y superficies a partir de un problema de contorno dada por una ecuación diferencial elíptica y condiciones de contorno de tipo elíptico, y un conjunto de puntos de aproximación. Se propone encontrar una función suave que cumpla determinadas condiciones de contorno, considerando el método más como una técnica de generación de curvas y superficies que como una técnica de representación. La investigación se enfoca en estudiar cómo mezclar condiciones de interpolación y de aproximación, de forma que se pueda conseguir curvas y superficies que aproximen un cierto conjunto de puntos y que además estén modeladas mediante una ecuación diferencial sometidas a ciertas condiciones de frontera. Por su parte, Hernández (2011) reúne un conjunto de resultados teóricos que sirven de fundamento para diferentes esquemas de subdivisión que generan tanto curvas planas como curvas definidas sobre una superficie. Además, para cada esquema propuesto, este autor demuestra rigurosamente la convergencia a una curva límite, llamada curva de subdivisión, y se estudian las propiedades geométricas y diferenciales de estas curvas. Las publicaciones de Lockwood (1961), así como las de Tarrés (1998), Rodríguez (2005) y Hernández (2011) pertenecen a décadas distintas y, sin embargo, la preocupación por indagar los fundamentos del concepto de curva está latente en cada uno de ellos. Animov (2001) plantea que "la noción de curva es una de las nociones más importantes en geometría diferencial". El trabajo de Lafuente (1998) sobre geometría diferencial de curvas en el plano, así como la conjetura de la zona de László Fejes Tóth[2], por citar tan solo dos ejemplos, ponen de manifiesto la relevancia y

[2] La conjetura de la zona de László Fejes Tóth formulada en 1973, consiste en que, si una unidad de esfera está cubierta por varias zonas, su ancho combinado es al menos pi; su demostración solo ha sido recientemente publicada a finales del año 2017.

vigencia que tiene el estudio de curvas, así como la necesidad de vincular a la discusión el concepto de continuidad e infinito, dada su inherente relación.

Cantoral et al. (2008) en sus reportes, consideran algunos conceptos de cálculo infinitesimal para el bachillerato, dejando en claro que se debe optar por una presentación infinitesimalista del cálculo en lugar de aquella basada en el concepto de límite, ya que los enfoques para abordar el tema son de diferente naturaleza, puesto que en la primera situación se ahonda en las ideas básicas respecto a la geometría y aritmética infinitesimalista, mientras en la segunda se da un tratamiento en relación a los números reales, funciones y el concepto de límite. Afín con la concepción infinitesimal, Arcos y Sepúlveda (2012) abordan el estudio del diferencial de área en la enseñanza de la integral y la forma como se presenta a los estudiantes. Centra su propuesta en la manera como debe tratar la enseñanza de las integrales dobles y triples con la ayuda del asistente virtual geogebra y bajo la consideración del concepto de infinitesimales en la manera que fueron concebidos por Leibniz. Por su parte, Belmonte (2009) se enfoca en observar y analizar detalladamente el proceso de transición que tiene lugar en la reestructuración cognitiva del esquema conceptual de infinito a nivel colectivo, bajo una perspectiva transversal. Esto supone básicamente un cambio cognitivo del infinito considerado como un proceso, al concepto encapsulado como un simple objeto al que se le da un nombre: infinito actual, lo que se produce a través de la abstracción de propiedades de dicho concepto en términos de una definición, de la construcción de nuevas propiedades del objeto mediante deducción lógica y del establecimiento de relaciones entre las diferentes representaciones del concepto. Por otra parte, Jato (2012) realiza un recorrido por el infinito matemático, haciendo hincapié en su integración en las matemáticas de la enseñanza secundaria. Examina la presencia del infinito en los contenidos escolares de secundaria, describe las principales dificultades para el estudiantado y plantea posibilidades pedagógicas que facilitan su descripción y comprensión.

Arcos y Sepúlveda (2012), Belmonte (2009) y Jato (2012) desde sus estudios, plantean una perspectiva en la que se encuentra ya inmersa la intencionalidad de indagar no solo por el concepto de curva, discreto, continuo o infinito, sino también por el hecho de investigar la comprensión que tienen los estudiantes de estos conceptos.

A partir de algunas dificultades que surgen de la construcción de un software orientado al estudio del cálculo numérico, Ferreira (2014) plantea los siguientes cuestionamientos: "¿cómo podría trazar una curva continua en la pantalla del ordenador, ya que el ordenador tiene una cantidad finita de puntos? ¿qué puntos discretos podría elegir en un conjunto continuo, de forma que, en la pantalla del ordenador, la curva aún siguiese continua?" (p. 128). Tales interrogantes dejan en evidencia la necesidad de comprender el paso de lo discreto a lo continuo para la generación de curvas, dada la necesidad de representar y modelar fenómenos o hacer uso de la naturaleza discreta para involucrar un razonamiento infinito en relación con el continuo. Esta afirmación es fortalecida por Neira (2012):

> Lo que se encuentra en una primera aproximación informal a los escenarios propios del trabajo universitario inicial del cálculo es incomprensión de los conceptos, un inadecuado manejo de los razonamientos, además de una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas. Los cursos se suelen desarrollar en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Todo lo cual revela que la reflexión profunda acerca de la comprensión de los conceptos fundamentales en el trabajo inicial del cálculo en la universidad es necesaria, fundamental y urgente en el ámbito de la educación matemática, en la línea del aprendizaje y enseñanza del cálculo diferencial e integral (p. 13).

En consecuencia, desde las perspectivas de cada uno de los citados autores, específicamente se observan investigaciones sobre curva, diferencial, infinito, discreto, continuo, entre otros, de forma independiente. Sin embargo, se percibe la ausencia de un estudio detallado sobre el tratamiento del concepto de curva y la forma cómo los procesos de razonamiento infinito subyacen en cada uno de los objetos matemáticos, lo que hace evidente una necesaria comprensión de cada uno de ellos. Por consiguiente, a continuación, se plantearán los fundamentos del problema de investigación, no sin antes precisar que algunos conceptos podrán ser ampliamente tratados en secciones posteriores al problema de investigación.

2. El problema de investigación

El análisis sobre curvas y su comprensión es esencial en el campo de las ciencias exactas, la ingeniería, la economía y otras áreas afines en las que comúnmente se generan soluciones a problemas a partir de la construcción de formas geométricas, cónicas o funciones matemáticas que pueden ser simples o supremamente complejas. En todos los niveles educativos se aborda la enseñanza de curvas de forma directa o indirecta, al tratar el desarrollo de contenidos matemáticos tal como se observa en los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006, p. 61). Por ejemplo, se trata la circunferencia y el círculo en los primeros años de formación, la representación de funciones sobre el plano cartesiano en secundaria y el problema de la recta tangente o el área bajo la curva en el nivel universitario, por tan solo citar algunos casos. Sin embargo, el concepto de curva por lo general no se define y aunque parece simple, no se habla mucho de él en los textos escolares. La formalización de cada tema relacionado con curvas pasa por la generalización casi que, de forma inmediata. La matemática continua es la gran soberana, ella domina prácticamente toda la escolaridad, dejando pocos momentos para el estudio de las matemáticas discretas que son la base de las ciencias de sistemas, computación y comunicaciones.

No hay que olvidar que el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática. Como lo afirma Neira (2013):

> Los problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo que encuentran los estudiantes de educación media y de primeros semestres de universidad se ha evidenciado por numerosas investigaciones en diferentes partes del mundo, … Investigaciones que han identificado, clasificado y analizado los problemas detectados en dicha comprensión. Incluso se han llevado a cabo reformas curriculares, innovaciones

> didácticas, propuestas con el uso de la tecnología, programas dirigidos a los profesores y a la enseñanza… Pero a pesar de todos los esfuerzos hechos, la comprensión del cálculo todavía al día de hoy es un problema de la educación matemática. (p.45)

En pro de encontrar alternativas de solución al problema de la comprensión del cálculo Sánchez-Matamoros (2010), presentaron en su tesis el análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada, y por otra parte Turégano (1998), realizó una síntesis de los documentos oficiales e informes de los profesionales en los que se habló de la importancia de proponer nuevos enfoques en el aprendizaje del cálculo, atendiendo a la comprensión y génesis histórica de los conceptos. De hecho, posteriormente Turégano (1998, p. 234) concluye que, en la secuenciación de contenidos, debe primar su génesis histórica al estar más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre su orden lógico.

Por lo tanto, resulta importante destacar que análisis de la comprensión del concepto de curva y los elementos asociados al significado de lo que representa en distintos conceptos relacionados y contextos de la matemática, podría tener consecuencias favorables en el aprendizaje de temas tales como límites, sucesiones, series, área bajo curvas, entre otros. En su estudio, se involucran los conceptos de variación y acumulación, esenciales en el estudio del cálculo.

Como menciona Artigue (1995, citado en Sánchez-Matamoros y García, 2008), hay dificultades para que los jóvenes de primeros semestres de universidad logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente. (p. 269)

Actualmente, estos temas se analizan desde dos puntos de vista: el primero es a partir de una concepción infinitesimal y, el segundo, basado en el concepto de límite. Ambos son parte de esta investigación, ya que involucran procesos de razonamiento infinito a partir de transiciones necesarias entre lo discreto y lo continuo.

Al respecto, en lo concerniente al infinito, cabe destacar que:

> Entre los profesionales de la matemática, el cálculo infinitesimal fue desechado desde mediados del siglo XIX, debido a supuestas deficiencias en sus fundamentos. En la enseñanza (del cálculo) se abandonó la presentación leibniziana[3], siendo gradualmente sustituida por la versión de Cauchy-Weierstrass, sin mayor atención al aspecto didáctico. Lo observado en las aulas de clase, principalmente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, nos permite observar que, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos, resulta conveniente una presentación de una ciencia que atienda los intereses, necesidades y capacidades de (la mayoría de) los estudiantes y no solo a las características que, en cuanto a rigor lógico ha de tener esa ciencia, según los estudiosos de la misma. Actualmente, la mayor parte de los profesores de cálculo reconocen que la presentación basada en el concepto (riguroso) de límite, resulta poco accesible para el común de los estudiantes". (Cantoral et al., 2008, p. 4)

La reflexión sobre curva adquiere relevancia, dado que las investigaciones sobre este tópico pasan por apreciaciones históricas y epistemológicas desligadas, específicamente

[3] A partir de los trabajos de Abraham Robinson a mediados del siglo XX, podemos decir que no hay ninguna razón para seguir insistiendo en una falta de fundamentación lógica al usar infinitesimales y, por lo tanto, en afirmar que el cálculo infinitesimalista es rigurosamente defectuoso.

considerando estudios sobre la noción de límite, infinito, recta tangente y, además, sobre experiencias de aula relacionadas con estos mismos conceptos, en los que estudios sobre la comprensión del concepto de curva son escasos y poco ahondan en las dificultades que pueden presentar tanto profesores como estudiantes en los niveles de educación media y universitaria. Este hecho motiva un profundo estudio sobre el tema y busca a través de la presente investigación, propiciar en los estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad la comprensión del concepto de curva. Dicho de otro modo, el problema que se pretende abordar en el presente estudio considera que:

Los estudiantes de cursos de cálculo diferencial e integral presentan dificultades para comprender el concepto de curva a través de transiciones entre lo discreto y lo continuo, mediado por procesos de razonamiento infinitos.

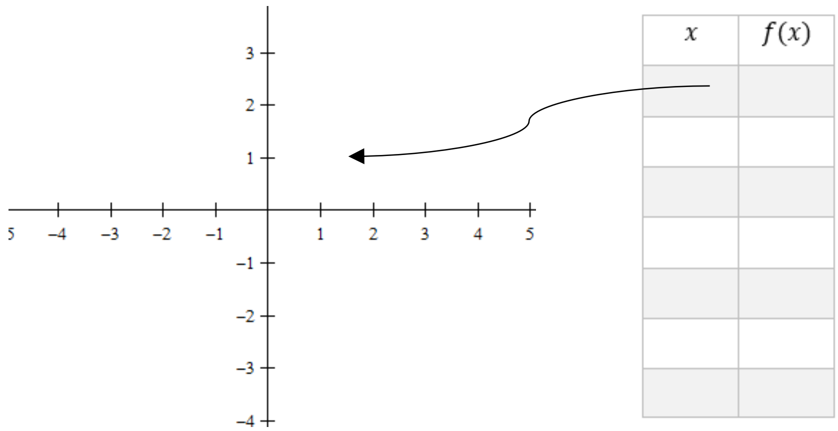
Este problema está relacionado con aspectos tales como:

- *La representación discreta que induce la notación de función en el plano cartesiano.*

Cuando se inicia la construcción de curvas en el plano, partiendo de una forma elemental que consiste en: dada una función $f(x)$, representar en el plano dicha función a partir de tablas de valores, surge un primer interrogante: ¿considerar tablas de valores discretiza la elaboración de la curva en el plano? ¿Al momento de ubicar los puntos en el plano se asume un carácter discreto por parte de los estudiantes? ¿El trazo que se realiza es continuo? ¿El hecho de hacer un trazo continuo para unir una sucesión de puntos en el plano dados por la función $f(x)$, es condición suficiente para definir una curva? Si esto no es así; entonces, ¿qué condición se cumple para que dicho trazo sea curvo?

Figura 1

Tabla de valores en relación con el plano cartesiano

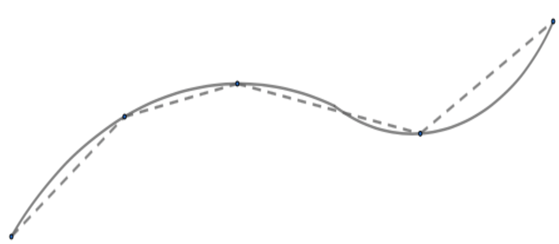


- *La imposibilidad de calcular la longitud exacta de una curva a partir de segmentos de recta finitos.*

La idea de que un segmento curvo podría tener exactamente la misma longitud que un segmento recto ni siquiera parecía posible para la mayoría de los matemáticos. Esta idea sirvió como punto de partida para que se comenzara a aproximar las longitudes de las curvas inscribiendo polígonos sobre tales curvas, encontrando que las longitudes se volvían cada vez más precisas cuanto más corto se hacía el segmento entre los vértices del polígono.

Figura 2

Forma poligonal de una curva



- *Asociar una suma infinita en un intervalo finito*

Algunos axiomas citados en los Elementos de Euclides (Simson, 1774, p. 5) dan cuenta de la discusión en torno al infinito, aunque seguramente sin hacer uso de dicho término, puesto que resultaba formalmente inaceptable para los antiguos griegos hablar de una figura constituida por muchas piezas tan pequeñas como se quiera (López, 2014). Sin embargo, el uso de las series infinitas por parte de Newton da cuenta de un "uso bastante libre de las magnitudes infinitesimales" (Guicciardini, 2006, p. 73). Al respecto, Garelik & Montenegro (2018) sustentan la importancia de un punto de vista histórico-epistemológico en la comprensión del concepto de infinito (p. 121).

- *Identificar que una curva está compuesta por infinitos trozos de recta (segmentos)*

El concepto de curva está vinculado a la dificultad de comprender definiciones matemáticamente aceptables de un concepto que al parecer es intuitivamente claro como el de continuo. De allí que:

> Los alumnos que ingresan por primera vez a un curso de cálculo generalmente han tenido un acercamiento intuitivo del infinito, muy probablemente con aspectos de la "vida real" (p.e. que el universo es infinito), sin haber reflexionado sobre aspectos propios del infinito en matemáticas; ello dificulta en cierta medida su comprensión en un contexto matemático. (Hitt, 2003, p. 1)

- *Solo se aproxima la longitud de una curva cuando los infinitos segmentos dejan de serlo y se convierten en puntos (punto de tangencia)*

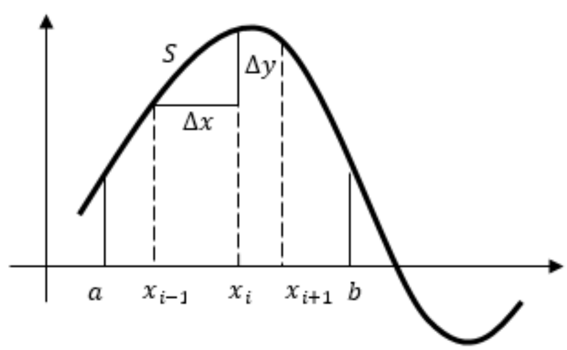
Se puede apreciar que el cálculo con infinitesimales asocia lo finito con lo infinito, vincula lo discreto con lo continuo, emparenta lo algebraico con lo analítico y acerca la teoría al mundo de la experiencia. En este sentido, Según Bingham (1973), Newton concibe en sus métodos infinitesimales las cantidades de forma dinámica y no estática (p. 120) lo que lleva a preguntarse si el concepto de aproximación es concebido por los estudiantes como un movimiento (desde el punto de vista físico) o un proceso infinito (desde el punto de vista geométrico).

- *Asociar la integral definida como un simple operador o relacionarlo con una suma infinita*

Si se considera el caso del cálculo de la longitud de arco de una curva suave en un intervalo $[a, b]$, es posible deducir a partir de dos puntos sucesivos de la curva que cuando $\|\Delta x\| \to 0$ ($n \to \infty$) entonces el número de particiones aumentan y mejora más y más el acercamiento a la longitud de esta, estableciendo que:

Figura 3

Curva suave en un intervalo $[a, b]$ *con particiones regulares*



Sean: $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y = y_i - y_{i-1}$. Del teorema de Pitágoras resulta:

$S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, y al generalizar dicho cálculo al intervalo $[a, b]$ se obtiene:

$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

Dado que el teorema del valor medio (T.V.M) garantiza un $c_i \in [a, b]$ tal que $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$ entonces:

$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \,.\, \Delta x_i$ Y por lo tanto: $S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, dx$

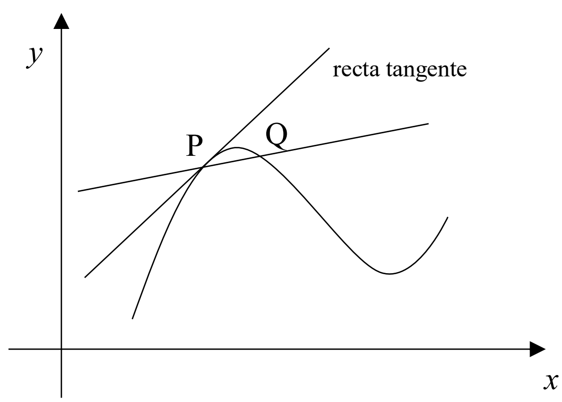
Este último resultado de la longitud de arco de una curva suave como la integral definida, se obtuvo de un proceso en el cual se parte de una interpretación discreta desde una representación geométrica del teorema de Pitágoras, y secuencialmente se puede observar cómo es el aspecto discreto, punto de partida para profundizar en una expresión cada vez más elaborada en la que se introduce el límite de una función, luego la derivada y por último el límite de una suma infinita, algo para nada evidente e inmediato si se le da una mirada desde la comprensión que sobre el tema puede llegar a tener un estudiante.

- *Relacionar la curva a la definición de derivada desde un punto de vista netamente algorítmico, restando importancia al razonamiento que sobre dicha curva debe hacerse.*

Dada la curva de una función $y = f(x)$ y un punto P sobre la curva, la pendiente de la recta tangente a la curva en P es el límite de las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva (secantes), cuando Q se acerca a P.

Figura 4

Recta tangente a una curva



¿Cuál es el concepto-imagen (Tall y Vinner, 1981) que se genera en el estudiante al asociar la derivada a la pendiente de la recta tangente a una curva, sin previamente conceptualizar sobre el concepto de curva, frente a un estudiante que reconoce claramente dicho concepto?

- *Aunque la integración se concibe como la operación inversa de la derivación, en muchos casos se asocia a un mero proceso algorítmico que dista de su interpretación gráfica.*

Como establece Mundy (1984, citado por Llorens y Santonja, 1997) “las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no puede aplicarse” (p. 2) planteando el hecho frente al cual un número considerable de estudiantes de primer año de cálculo no supo contestar al por qué el procedimiento siguiente era incorrecto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

Estas consideraciones hacen relevante el desarrollo de la investigación, dada su incidencia con temas históricos y de suma importancia en el ámbito educativo en todos sus niveles y en los cuales está ausente un estudio detallado que dé cuenta de la comprensión del concepto de curva a través de procesos de razonamiento infinito.

2.1 Pregunta de investigación

En el orden de las ideas expuestas anteriormente y para efectos del desarrollo del presente estudio, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo es el proceso de comprensión del concepto de curva en las transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de Pirie y Kieren?

En el contexto educativo actual, de acuerdo a los planes de estudio, se reconoce la importancia del objeto matemático y, además, cómo se relaciona su aprendizaje con otros objetos matemáticos vinculados. Para el caso del concepto de curva, convergen varios elementos que hacen realmente importante y valioso analizar la comprensión de los estudiantes al respecto, dado que trasciende el estudio de una situación netamente teórica.

Responder a esta pregunta de investigación posiblemente permitirá lograr develar aspectos de comprensión que pueden coadyuvar a la enseñanza y aprendizaje del concepto, teniendo en cuenta la idea de infinito como proceso en el cual las cantidades infinitesimales juegan un papel similar al que desempeñan en el concepto de límite y, además, el reconocimiento donde convergen las apreciaciones y dificultades de comprensión de los estudiantes y docentes en su estudio y enseñanza respectivamente, a la luz del modelo de Pirie y Kieren.

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general

Analizar la comprensión del concepto de curva en las transiciones entre lo discreto y lo continuo mediante procesos de razonamiento infinito en el marco de la teoría de Pirie y Kieren en estudiantes de un curso de cálculo integral.

2.2.2 Objetivos específicos

- Estructurar los objetos matemáticos que se articulan con el concepto de curva en la evolución de la comprensión matemática de los estudiantes de un curso de cálculo integral.
- Determinar los aspectos en los que coinciden y se contrastan las apreciaciones y dificultades de los estudiantes en el tratado de curvas.
- Refinar una serie de descriptores que permitan detectar los niveles de razonamiento de los estudiantes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.
- Establecer si la comprensión del concepto de derivada e integral subyace al concepto de curva en estudiantes de un curso de cálculo integral.

3. Curvas

El concepto de curva en el estudio del cálculo es comúnmente utilizado en la clasificación de funciones y usado como soporte teórico de definiciones afines a temas del cálculo infinitesimal tales como derivadas e integrales, entre otros. Sin embargo, desde mi experiencia y en la búsqueda sistemática realizada en las fuentes, no es común encontrar textos que remitan una definición formal del mismo, por el contrario, asumen de forma evidente el concepto y estructuran otros a partir de este. Es precisamente allí, donde se destaca la importancia que tiene la discusión y análisis detallado en torno al concepto de curva, dado que, como se verá a continuación, su génesis contiene la esencia misma del estudio del cálculo y la comprensión de conceptos asociados a este.

3.1 Génesis del concepto de curva

Según Deulofeu y Figueiras (2002) se tiene evidencia de que "los primeros acercamientos a una curva surgieron a partir de círculos trazados a mano alzada en el siglo VII a. de C. y círculos perfectos trazados con la ayuda de cuerdas y clavos en templos construidos aproximadamente en el siglo V a. de C." (p. 46). Por otra parte, en un recorrido por la historia de la astronomía aproximadamente a partir del siglo VI a. de C. se proponen modelos cosmológicos que involucraron de manera esencial a la esfera y el círculo en culturas tales como la babilónica, la egipcia y la china. Anaximandro, Parménides, Pitágoras y sus discípulos, sostuvieron modelos en los cuales la tierra es esférica y el movimiento de los astros se da en trayectorias circulares, que llevaron a la elaboración de movimientos sumamente complejos a partir de epiciclos en esa ardua tarea de describir las orbitas planetarias. Siglos después, la descripción de estas órbitas persistiría en el modelo de curva, esta vez en manos de las elipses de Johanes Kepler. (Pineda, 2013, p. 52)

Los intentos por dar una definición de curva se remontan a los comienzos de las matemáticas. Euclides en sus escritos definió una línea como: “una longitud sin latitud en donde los extremos de la línea son puntos y siendo la línea recta aquella que se extiende entre sus puntos” (Simson, 1774, p. 1). Con esta definición él trabajó en el estudio de casos muy especiales de curvas: líneas poligonales, círculos y ejemplos similares. Además, definió la curva como aquella línea que está formada por una sucesión de puntos que no van en una misma dirección. Así, Euclides precisaba que una línea no tenía por qué ser necesariamente recta, sino que podía ser curva.

Según Campos (2018), los geómetras griegos al parecer tenían dos nociones de curva: la primera relacionada con la idea de un punto moviéndose a través de combinaciones independientes y la otra a partir de la intersección de un plano con ciertas superficies (por ejemplo: el cono generando así la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).

El círculo, las líneas poligonales y la curva convergieron posteriormente en una misma idea, al ser instrumentos de estudio en las estimaciones del número π conocidas las contribuciones de Arquímedes a la matemática. Sin embargo, los conflictos generados por el infinito llevarían a postergar hasta siglos después la formalización de varios aspectos relacionados al concepto de curva. Y es que, por ejemplo, para los antiguos matemáticos griegos, cualquier razonamiento del tipo “una figura constituida por muchas piezas tan pequeñas como se quiera” resultaba formalmente inaceptable. De hecho, conllevaba a una discusión profunda entre el razonamiento riguroso y el razonamiento intuitivo (Tarrés, 1998).

Aristóteles protestaba contra la naturaleza aparentemente infinita de las partes que componían una cierta longitud. Según Waldegg (1993), Aristóteles relacionaba la noción de imposibilidad a la de infinidad. Es decir, la diagonal de un cuadrado es, en cierta manera, infinita en relación con el lado del cuadrado, en el sentido en que, ni esta, ni el lado, se dejan medir por la misma magnitud. Lo mismo se puede decir de un fragmento de curva en relación con su cuerda (p. 22).

El razonamiento de Aristóteles evoca la famosa paradoja de Zenón, en la cual Aquiles compite contra la tortuga:

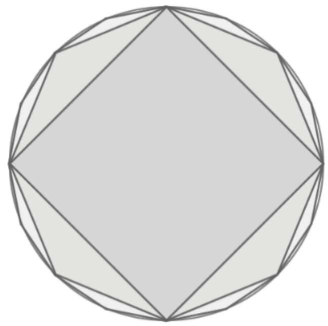
> Aquiles, el atleta más veloz, capaz de correr los 100 m. en 10 segundos, no podrá alcanzar a una lenta tortuga, diez veces menos rápida que él. Ambos disputan una carrera, concediendo Aquiles una ventaja de 100 m. a la tortuga. Cuando Aquiles ha cubierto esos 100 m., la tortuga se ha desplazado 10 m. Al cubrir Aquiles esos 10 m., la tortuga se ha desplazado 1 m. Mientras cubre ese metro que le separa de la tortuga, ésta ha recorrido 0.1 m, y así indefinidamente. Luego, Aquiles debe cubrir infinitos trayectos para alcanzar a la tortuga. Por lo tanto, Aquiles deberá cubrir una distancia infinita, para lo cual necesitará un tiempo infinito, de tal manera que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. (Sorando, 2018, p.1)

El conflicto generado por la paradoja de los infinitos y los inconmensurables exigía métodos lógicos que permitieran aclarar tales cuestiones. Por ello, los matemáticos griegos se ingeniaron axiomas y definiciones tales como: dados dos segmentos, uno mayor que otro, siempre es posible encontrar uno que esté entre los dos[4]. A partir de este axioma, Eudoxo propuso lo que hoy conocemos como método de exhaución y para el cual posteriormente Arquímedes usaría el perímetro de polígonos de 12, 24, 48 y 96 lados para obtener una aproximación de π cercana a 3.1418.

[4] Libro I, Proposición 3 de los elementos de Euclides. https://euclides.org/los-elementos/libro-i/

Figura 5

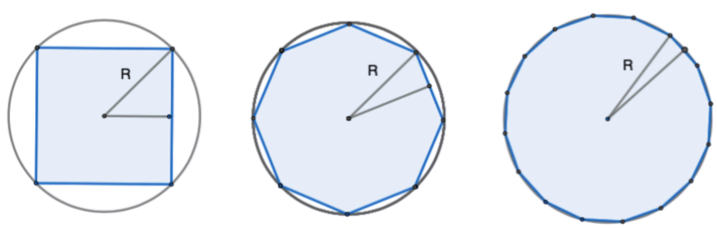
Polígonos regulares inscritos en una circunferencia



Haciendo un acercamiento al método empleado por Eudoxo y Arquímedes, se logran evidenciar resultados interesantes (Figura 6) que a posteriori permitirían no solo concluir un resultado más cercano de π sino además extender otro tipo de generalizaciones (Row, 1917, p. 67).

Figura 6

Resultados de radicales jerarquizados a partir de polígonos de 2^n *lados*



Polígono / Característica	4 lados	8 lados	16 lados
Lado	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
Perímetro	$R.2^2\sqrt{2}$	$R.2^3\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$R.2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
Apotema	$R.\frac{\sqrt{2}}{2}$	$R.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$R.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$
Área	$R^2.2$	$R^2.2\sqrt{2}$	$R^2.2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Este proceso de aproximación de la longitud de la circunferencia y el valor de π, al igual que las discusiones y formalismos elaborados ya para la época, llevarían a resultados impresionantes, como lo es la forma alternativa de calcular el valor de π por medio de límites (Siendo k: Número de raíces cuadradas involucradas[5]):

$$\pi = \lim_{k \to \infty} 2^k \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}$$

Es de enfatizar que este resultado de aproximación de π, al igual que los que se extienden para hallar la longitud del lado de un polígono no datan de tal época (siglos antes de Cristo), pues es solo hasta el origen del cálculo cuando se establece dicha notación (un par de siglos atrás de nuestra era).

Cabe anotar también que, la circunferencia no era la única "curva" a la cual se hacía alusión en la antigüedad. La lúnula de Hipócrates y la parábola fueron algunas figuras curvilíneas que dieron origen al concepto de cuadratura, con el cual se buscaba hallar las áreas de ciertas figuras. No obstante, el problema de la conceptualización de una curva persistió, y, además, otros conceptos se adhirieron a su desarrollo.

Entre los años 1620 y 1623, Bonaventura Cavalieri desarrolló sus primeras ideas sobre lo que él mismo llamó el método de los indivisibles, con el que trataba de formalizar una técnica de medida aplicable al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, y que de inmediato evocaba una imagen visual de lo realizado por Arquímedes muchos siglos atrás. "Este indivisible tal como aparece en las obras de Arquímedes, Cavalieri y Wallis no tiene anchura a diferencia del

[5] Esta expresión es llamada algoritmo iterativo. Fue usado por el matemático Liu Hui en el siglo III de nuestra era para calcular π partiendo de polígonos inscritos en un círculo.

indivisible con un ancho finito distinto de cero, como el que ya se mencionó en la paradoja de Zenón" (Prabhu y Czarnocha, 2008, p. 54).

La limitación pitagórica de la inconmensurabilidad llegaría solo hasta que Fermat y Descartes fundamentaron la geometría analítica en el siglo XVII. Es allí donde, el concepto de curva a partir de una sucesión de puntos como la definió Euclides en sus inicios, tomaba otra connotación con el desarrollo numérico y algebraico formalizado en esta rama de la matemática.

Arquímedes, por ejemplo, definió tal vez por primera vez en la historia, una "curva mecánica", es decir, una curva basada en el movimiento. Sin embargo, Descartes buscó liberar a la Geometría del exceso de figuras y a su vez intentó darle significado al Álgebra por medio de la Geometría. De ese modo estableció que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. Cabe destacar que fue Descartes quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica (Campos, 2018, p. 3)

Descartes, al tratar con las líneas curvas, se extrañaba de la denominación a unas curvas como curvas geométricas y curvas mecánicas. Las primeras eran aceptadas en la geometría, pero las segundas fueron excluidas de ella. Descartes opinaba que se podría entender por geométrico la que era exacto y por mecánico lo que no lo era. Que no se debería de excluir a curvas complejas generadas por movimiento o composición de varios. Esto supuso un avance en la concepción de curva de los matemáticos griegos.

Así, para Descartes las curvas podían ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos de líneas, cada uno siendo determinado por el anterior, lo que implica que, las curvas se consideraban como variaciones.

Una curva es el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera continua y que representa la solución de una ecuación polinómica que ha sido obtenida mediante definiciones o propiedades de las figuras geométricas, es decir, para Descartes una curva es el lugar geométrico de un punto que es solución de una ecuación polinómica.

Los trabajos de Descartes y Fermat tomaron los dos aspectos complementarios de la geometría analítica, uno estudiando ecuaciones a través del significado de las curvas y el otro estudiando curvas definidas por ecuaciones. Lo esencial allí (geometría analítica), cuando se aplica al plano, es el establecimiento de una correspondencia entre los pares ordenados de números reales y los puntos del plano, con lo cual se hace posible una correspondencia entre las curvas del plano y las ecuaciones en dos variables, de modo que a cada curva del plano le corresponde una ecuación definida, de la forma F (x, y) = 0, y a cada ecuación algebraica en dos variables le corresponde una curva o un conjunto de puntos del plano. Así se establece también una correspondencia entre las propiedades analíticas y algebraicas de la ecuación F (x, y) = 0, por un lado, y las propiedades geométricas de la curva conocida, por otro lado.

La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación F(x, y) =0 y el lugar geométrico (generalmente una curva) que consistía de todos aquellos puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes fijos perpendiculares satisfacen la ecuación. Ni Fermat, ni Descartes utilizaron un sistema explícito de dos ejes de coordenadas en la forma que la conocemos y usamos actualmente.

A partir de la geometría analítica, el concepto de curva es tratado en un sistema coordenado y con ecuaciones en dos variables $f(x, y) = 0$, donde se asocian pares de números a puntos y ecuaciones a curvas. De hecho, “el Libro segundo de Descartes trata de la naturaleza de las líneas curvas, y en él clasifica a las curvas en geométricas (las que hoy denominamos curvas algebraicas) y mecánicas” (Velásquez, 1997, p. 100). Esta distinción parece ser punto de divergencia en el concepto mismo de curva, dado que esta última (curvas mecánicas) introduce la idea de movimiento, algo que se traslada a un escenario físico al precisar la consideración del movimiento de un punto. Sin embargo, para ese momento, cronológicamente el concepto de curva no parecía tener un consenso para los estudiosos de la época, por lo menos en cuanto a su definición. Según Hernández (2002):

> Para Fermat (tanto como para Descartes) las dos cantidades desconocidas en una ecuación eran segmentos lineales más que números. Uno de estos era medido a la derecha desde un punto de referencia sobre un eje horizontal, y el segundo era localizado con una ordenada vertical sobre el extremo del primero. El principio de Fermat afirma entonces que el punto terminal de la ordenada describe la curva correspondiente a la ecuación dada (p. 33).

De esta forma, Fermat presentaba la idea de dar un incremento a cierta magnitud, la cual tomaba así el aspecto de una variable, hecho que aportó al desarrollo posterior del concepto de límite y que posiblemente sea el punto de convergencia en la conceptualización de curva a partir de los procesos de razonamiento infinitos, dado el desarrollo matemático que posteriormente surgiría.

Contando con un conocimiento de geometría analítica establecida, la discusión sobre el concepto de curva entró a otro terreno en el cual parecía sustentarse. Sin embargo, la dificultad para definirla fue también punto de partida para formalizar nuevos estudios que enriquecieron la discusión al respecto.

Durante el siglo XVIII Euler tuvo la idea de expresar las diversas coordenadas de los puntos de una curva en términos de un solo parámetro: estas llamadas ecuaciones paramétricas, constituyen un ingrediente básico de la geometría diferencial moderna. También, durante el mismo siglo se consideraron otros sistemas de coordenadas no cartesianos: polares, bipolares, cilíndricos, esféricos, etc., aunque estos no tienen el carácter universal de las coordenadas cartesianas.

En la obra Introductio in analysin infinitorum de 1748, Euler menciona que las curvas se pueden describir mecánicamente por el movimiento continuo de un punto, pero que es preferible considerarla como resultado de una función. Luego, menciona que la naturaleza de la línea curva cuando es continua dependerá de la función o de la manera como las constantes y las cantidades x, y se combinan entre ellas.

Es así como en su obra Tractatus de quadratura curvarum, Newton y Melander (1762) describen la distinción entre el uso de elementos discontinuos y nuevas consideraciones cinemáticas con referencia a las fluxiones, y abandonan así las cantidades infinitamente pequeñas en beneficio del concepto de fluxión. De hecho, Newton plantea allí su posición con relación a no considerar cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos.

Baumgarten (citado por Tarrés, 1998) afirma que "Una serie de puntos con puntos intermedios que da lugar a una línea es un continuo". Por su parte Knäster (citado por Tarrés, 1998) sugiere una idea un tanto imprecisa de línea como:

> Conjunto de punto situados unos próximos a otros de tal manera que entre ellos no puede haber fisuras. Tal vez sin tener conciencia de ello, plantea la necesidad de buscar una estructura interna en determinados conjuntos de puntos que nos indique una idea de proximidad entre ellos (p.3).

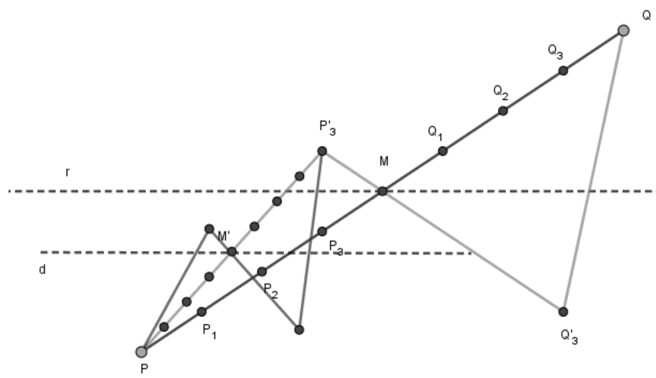
Entre los años 1830 y 1834, Bernard Bolzano dio un ejemplo de una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ninguno de ellos. La función queda descrita por su gráfica, y esta descripción viene dada a través de una construcción de tipo iterativo que da lugar a una curva, obtenida como límite de líneas poligonales.

Esta curva se construye como sigue:

"Sea $\overline{PQ}$ un segmento rectilíneo, y considerese una dirección d, distinta de la de $\overline{PQ}$. Dividamos $\overline{PQ}$ por su punto medio M y tomemos los puntos $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ tales que $\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3M} = \overline{MQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q}$

Figura 7

Función continua que no es derivable

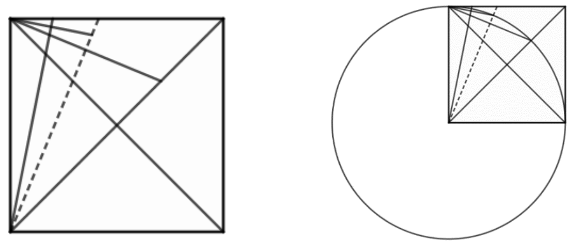


Si P_3' y Q_3' son los simétricos de P_3 y Q_3 respectivamente con respecto a la recta r, paralela a la dirección d por el punto M, formamos la línea poligonal $PP_3'Q_3'Q$ y repetimos el proceso en cada uno de los cuatro lados de esta poligonal, y así sucesivamente. El límite de estas líneas es la curva buscada" (Tarrés, 1998, p. 67).

Esta construcción (Figura 7) arroja resultados similares a la elaborada por Row (1917) en su texto *Geometric Exercises in Paper Folding*. En el caso de Row, su elaboración parte de bisecciones consecutivas a un ángulo del cuadrado y perpendiculares sobre cada bisectriz de tal forma que pasen por el vértice.

Figura 8

Construcción de Row (1917) para aproximar un arco de curva a partir de polígonos regulares



La actividad geométrica de Bolzano en relación con los conceptos de curva y superficie no se limitó a dar buenas definiciones de estos conceptos. Su esfuerzo fue notorio e implicó un constructo de definiciones cada vez más finas sobre el concepto de línea curva. Bolzano (1851) afirma que toda curva simple cerrada contenida en una superficie divide a esta en dos partes, que se distinguen entre sí por el hecho de que todos los puntos de la superficie que no pertenecen a la línea están a un lado de esta o en el lado opuesto.

Los trabajos de Bolzano quedaron olvidados rápidamente y tuvieron que esperar largo tiempo hasta ser redescubiertos en el siglo XX. Sin embargo, a mediados del siglo XIX se propugnaba por el desarrollo de una geometría que permitiese el establecimiento de definiciones y el uso de espacios de dimensión superior a tres. En esta nueva perspectiva, Riemann (citado por (Tarrés, 1998)) plantea que:

> El verdadero carácter de una variedad unidimensional (curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie) (p. 9).

Estos intentos por dar una definición rigurosa del concepto de curva representan una auténtica revolución que trajo sus frutos en años posteriores. Cantor (1877) fija las bases de la topología de los conjuntos del espacio euclídeo de dimensión n. Además, define una curva plana como un continuo sin puntos interiores. Esta definición pasaría a recibir el nombre de línea cantoriana. A finales de 1870 surge una profunda crisis acerca del concepto de curva, al probar Cantor que los puntos de un segmento podían ponerse en correspondencia biunívoca con los de un cuadrado y en general con los de un cubo n-dimensional, lo cual obligó entre otras, a plantear la revisión de la noción de dimensión de los objetos geométricos.

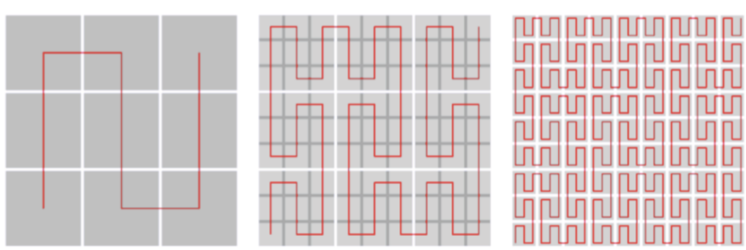
Jordan (1909) plantea como teorema que: toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito.

Esta expresión de curva dada por Jordan (1909) sufrió un durísimo golpe cuando en 1890 Giuseppe Peano define una curva continua que recubre todos los puntos de un cuadrado; es decir, la imagen geométrica de la misma tiene dimensión dos. La descripción dada por Peano es analítica y no da ningún método que permita representar su curva.

Lo planteado por Peano suscitó el interés de los matemáticos de la época, entre ellos el de D. Hilbert, quien en 1891 publicó un artículo en el que da un método que permite visualizar el proceso de construcción de una curva de Peano y que se obtiene como límite de líneas poligonales, igual que la curva de Bolzano ya considerada.

Figura 9

Curvas de Peano (Jácome, 2018)



Se hacía necesario entonces, revisar nuevamente la noción de curva. En 1920, H. Hahn estaba impartiendo un seminario en la Universidad de Viena y propuso el problema de dar una definición adecuada del concepto de curva; de forma casual K. Menger (que contaba con 17 años de edad) asistió a aquel seminario e hizo eco de la propuesta. Una semana más tarde presentó al profesor Hahn una solución: “Una curva es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos”

Más de un siglo atrás, Bolzano había dicho lo mismo que Menger. El profesor Hahn se interesó en tal definición y la reestructura así: Un continuo K recibe el nombre de curva si en cada entorno U de cualquier punto p de K existe un entorno U’, contenido en U, de manera que la intersección del borde de U’ con K no contiene conjuntos conexos.

La definición enunciada por Hahn al igual que otras consideraciones dadas por el desarrollo del análisis, advirtió del alcance y la fecundidad de la idea ya instaurada siglos atrás por Arquímedes en lo concerniente a los polígonos. Al respecto, Cambray (1998) plantea que “las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas” (p. 16).

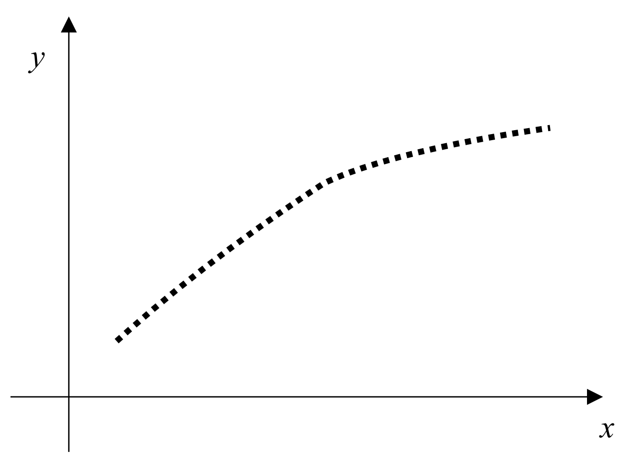
Estas curvas de las que habla Cambray (1998) conciben no solo el infinito, sino además el infinito del infinito, o una infinidad de infinitos, situación que da lugar con mayor certeza a centrar la atención en las curvas en el plano cartesiano enfocando el interés en Newton, Leibniz y Cauchy, quienes hicieron grandes aportes a la formalización del concepto de curva y con ello al desarrollo mismo del cálculo.

3.1.1 Curvas con Newton

En su texto de cuadratura de curvas, Newton & Melander (1762) expresan su propósito de abandonar por completo el uso de cantidades infinitesimales. Enuncian su teoría de las razones primera y última de cantidades evanescentes. Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa a su manera Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento. Se infiere además que, Newton parece percibir la curva como descrita por puntos en movimiento (fluxión) que fluyen continuamente y no como un agregado de cantidades infinitesimales, por lo cual posiblemente la curva para Newton podría haber sido entendida como una derivada respecto del tiempo (fluxiones). Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual de ese término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las fluentes del tipo $f(x, y, z, \dots) = 0$ donde f es una expresión analítica finita o infinita; en otra forma más simple, Newton piensa la curva representada por ecuaciones.

Figura 10

Curva en el plano según Newton



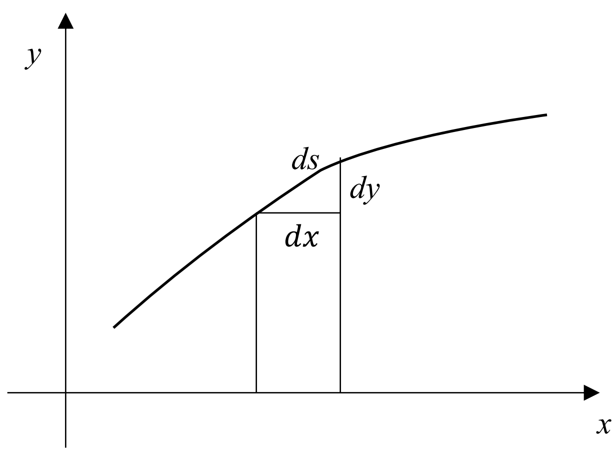
3.1.2 Curvas con Leibniz

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. A la curva se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ y una sucesión de ordenadas

$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva y son algo así como los "vértices" de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la diferencial de x y se representa por dx, significado análogo tiene dy. El diferencial dx es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x, de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituyen la curva, son representados por ds. Resulta así el triángulo característico de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.

Figura 11

Representación de una curva en Leibniz



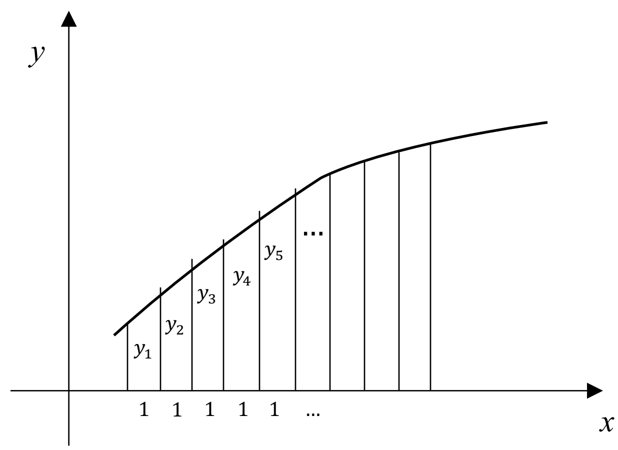
Curiosamente, los términos abscisa, ordenada y coordenadas, tan propios de la geometría analítica, no fueron usados nunca por Descartes, sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de diferenciales, Leibniz siempre hablaba de diferencias.

El triángulo característico tiene lados infinitesimales dx, dy, ds y se verifica la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. El lado ds sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por dy/dx

que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó cociente diferencial. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

Figura 12

Infinitas porciones de unidad



La suma de las ordenadas es una aproximación de la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que, si la unidad pudiera ser tomada infinitamente pequeña, estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas.

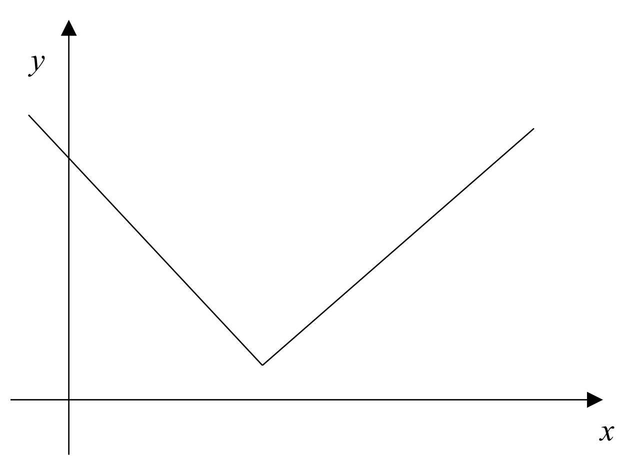
3.1.3 Curvas con Cauchy

En el siglo XVIII Augustin-Louis Cauchy fundamentó las bases rigurosas del cálculo a partir del álgebra de desigualdades. Las pruebas épsilon-delta actuales son gracias a los aportes de Cauchy, aunque en sus inicios haya dado una definición puramente verbal de límites y derivadas. De igual manera, la definición de Cauchy de funciones continuas no distingue entre lo que ahora se llama continuidad puntual y continuidad uniforme. Sin embargo, se considera importante el hecho de que Cauchy trajo algunas definiciones poco rigurosas al lenguaje exacto de las desigualdades e introdujo el límite desde una perspectiva que consolidó la rigurosidad en el cálculo. Los aportes de Lagrange a la derivada y la integral se consolidan a partir de los resultados de las demostraciones hechas por Cauchy. La consideración de Cauchy en la comprensión del concepto de curva se reviste de suma importancia, debido al hecho de permitir formalizar la explicación de funciones continuas sin considerar el concepto de derivada.

Después de lo expuesto aquí frente a las concepciones de Newton, Leibniz y Cauchy, es posible analizar tres conceptos: discreto, continuo e infinito, aspectos estrechamente ligados, pero claramente diferenciados que permiten develar elementos relevantes del análisis matemático y que asociados a la curva, permiten hacer una análisis de la transición entre lo discreto y lo continuo.

Figura 13

Curva en Cauchy



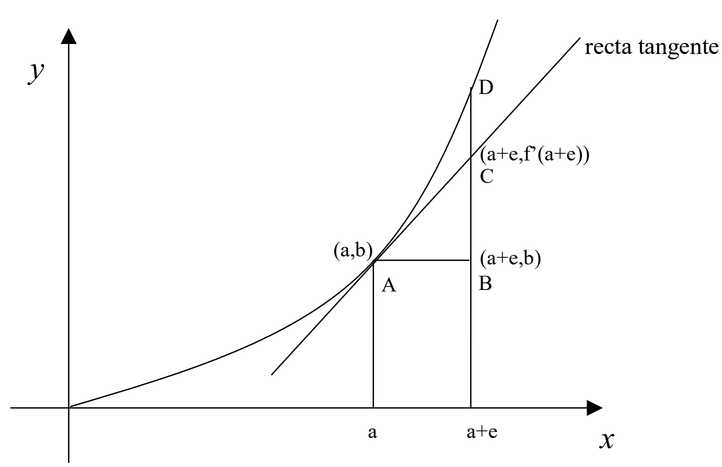
3.2 Longitud de una curva

El problema de encontrar la longitud de una curva se consideró imposible de resolver durante gran parte de la historia del pensamiento matemático. Eso fue hasta que algunos matemáticos comenzaron a aproximar las longitudes de las curvas, inscribiendo polígonos sobre las curvas y encontrando que las longitudes se volvían cada vez más precisas cuanto más corto se hacía la longitud del segmento entre los vértices del polígono, situación que permitía intuir la necesidad del infinito inherente a la curva.

Fermat hizo una conexión notable que relacionó tres de los cuatro principales problemas que enfrentaron los matemáticos del siglo XVII. Fue este descubrimiento el que finalmente condujo a la idea de la derivada. Desafortunadamente, Fermat no pudo darse cuenta de la conexión que había hecho. Por esta razón, siempre parece quedar eclipsado por Newton y Leibniz en el reconocimiento de la creación del cálculo.

Figura 14

Representación de la apreciación de Fermat sobre la tangente



Ahora, si Fermat quería calcular con una buena aproximación la longitud del arco de una curva, resumiría una secuencia de intervalos cortos, cada uno de los cuales se describe de la manera anterior. Lo que él comprendió fue que, al resumir los términos de esta manera, en realidad estaba aproximando el área bajo la curva para la función dada.

El descubrimiento que Newton y Leibniz harían (independiente e inconscientemente entre sí) era que el problema de calcular el área bajo una curva es en realidad el problema inverso de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva, y viceversa.

Desde este precepto la noción de curva cobra mayor relevancia, dado que por un lado vincula la idea de particiones infinitas y, de otro, el de sumas infinitas, esenciales en la elaboración de definiciones y expresiones relacionadas.

4. Continuidad

En el concepto de continuidad convergen varios elementos de gran relevancia en la evolución y formalización de la matemática a través del tiempo. Según Aparicio y Cantoral (2003) "la noción de continuidad, en un sentido global, posee un carácter apriorístico en el ser humano. Las personas perciben el cambio en su estudio de fenómenos reales en términos globales, no locales" (p. 341). En este sentido, la pertinencia de analizar a continuación la continuidad geométrica, numérica y algebraica a nivel local y global, así como también, la estructuración del concepto de transición y la manera como se articula con los procesos de razonamiento infinito en el estudio del concepto de curva, sugiere la importancia de este último como punto de inflexión en la confrontación entre discreto y continuo.

4.1 Continuidad geométrica

Los aportes de David Hilbert a la matemática a través de los axiomas de la geometría del plano permiten que "al postular la continuidad se establezca una equivalencia entre el continuo aritmético y el geométrico y es posible establecer una biyección entre los números reales y los puntos de la recta" (Crespo, 2004, p. 40). Sin embargo, esto no parece evidente y prueba de ello es la amplia discusión que al respecto se ha presentado a lo largo de varios siglos. No obstante, la presencia del infinito en la conceptualización sobre continuidad parece ser indiscutible, más aún, en los procesos que tienen lugar con los estudiantes al comprender conceptos asociados con curvas. Al respecto, Crespo (2004) afirma que:

> El modelo de recta que van forjando tiene gran influencia en la comprensión de conceptos del análisis matemático. La geometría es una gran aliada a través del proceso de visualización, para llegar a la internalización de la noción de continuidad. Una percepción

incorrecta de la propiedad de completitud de los números reales, unida tan sólidamente a la continuidad de la recta, pueden dificultar la comprensión de nociones posteriores. Por ello es de gran importancia hacer hincapié en la enseñanza de estos conceptos (p. 44).

Aquí es importante considerar que si el tratamiento de una curva vincula tanto la continuidad de la recta como la completitud misma de los números reales, cuando el proceso se presenta en un plano cartesiano donde sus características por sí mismas hacen que el paso de lo geométrico a lo analítico se presente de forma espontánea, puede resultar igualmente imperceptible su visualización en torno al concepto de continuidad. Esto es, por ejemplo, que se caracterice el punto geométricamente o se interprete como par ordenado. Para ampliar esta situación observe a modo de ejemplo la pregunta: ¿Qué región representa gráficamente la relación $x^2 + y^2 = 0$? La expresión corresponde a la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = 0$, por lo cual en el plano su representación geométrica será la de un punto. Ahora bien; ¿un punto es una curva? Si se analiza la expresión anterior de forma algebraica evidentemente se puede concluir que se moldea dicha expresión a la forma canónica de la cónica con centro en el origen y su representación en el plano será un punto. Sin embargo, la respuesta a esta pregunta no parece sencilla. Y es que de hecho empieza a dilucidar la elaboración del concepto desde la continuidad local y global. De forma antagónica se presenta la función $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, la cual presenta una discontinuidad en el origen (0,0), sin embargo, aparentemente y por la caracterización de las funciones trigonométricas podría afirmarse que es una curva, ¿verdad?

4.2 Continuidad numérica

Una buena parte de la matemática ha seguido la tradición de la matemática griega, sin embargo, los registros históricos provenientes de diversas culturas alrededor del mundo, indican que la mayoría de civilizaciones antiguas tenían sistemas de numeración y dichos números en muchos casos estaban asociados con significados geométricos, dada la actividad de medir y la medida estaba asociada con magnitudes geométricas. Según Crespo (2004, p. 40):

> El pensamiento griego se orientó a dar forma a la matemática desde el pensamiento lógico deductivo y a lograr la matematización de los fenómenos naturales, sobre la base de su estructura racional. Para los griegos, toda la naturaleza era explicable en términos de números. Pero los únicos números que existían eran los naturales y los racionales, pensados estos últimos como razón de dos naturales. Es conocida la crisis en la matemática que ocasionó el descubrimiento de $\sqrt{2}$ y de su naturaleza no racional. La aparición de estos números irracionales, puede decirse, que obligó a los matemáticos a crear el concepto de continuidad. En el siglo IX, el filósofo árabe al-Farabi generalizó el concepto de número a los racionales y a los irracionales positivos. Los árabes se focalizaron en este aspecto en la medición de las magnitudes, pero no era posible realizar la generalización que deseaban a partir de las operaciones, como en los restantes conjuntos numéricos. La naturaleza de la continuidad es fundamentalmente diferente. En Occidente, recién en el Renacimiento y por influencias árabes, se aceptó que los irracionales eran números. La noción de continuidad sigue a partir de este momento, íntimamente ligada a ideas físicas y geométricas.

4.3 Continuidad algebraica

Hasta fines del siglo XIX, en geometría, la continuidad del espacio se dio por sentada, era un concepto que no se ponía en discusión, que no se planteó como la posibilidad de que pudiera traer consigo un problema, debido al desarrollo del conocimiento en esta época.

Es conocida la demostración dada por Euclides (Siglo III a. C.) en sus Elementos, para la proposición que afirma la existencia de triángulos equiláteros. Para demostrar su existencia, es necesario algún postulado de continuidad. Euclides lo aceptó tácitamente en su obra; se tardaría veintidós siglos en enunciarlo explícitamente, quizá porque la atención de quienes se dedicaron a la geometría, se centró hacia el cuestionamiento del quinto postulado. David Hilbert (1862-1943), en su obra Fundamentos de la Geometría, introdujo un grupo de axiomas de continuidad. La genialidad de Hilbert, con respecto a este tema, consistió en darse cuenta de que la continuidad debía ser explícitamente enunciada a través de un grupo de axiomas para que pudiera usarse en la geometría. En la primera versión de Hilbert, aparece un sólo axioma en el grupo de continuidad: el de Arquimedianedad o de medición. Posteriormente, Hilbert reconoció la necesidad de añadir otro axioma en este grupo: el axioma de plenitud o de integridad: Con estos enunciados previos, no cabe duda de la corrección a las demostraciones geométricas como la de Euclides.

Otros matemáticos posteriormente propusieron axiomáticas equivalentes, en las cuales ya no faltó la idea de continuidad. Existen sistemas geométricos que no satisfacen la continuidad, al postular la continuidad se establece una equivalencia entre el continuo aritmético y el geométrico y es posible establecer una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. Quizás el concepto de continuidad no sea realmente tan intuitivo como puede parecer a simple vista y merece un cuidadoso tratamiento. (Crespo, 2004, p. 41).

En el siglo XVII, Isaac Newton matematizó algunos fenómenos físicos mediante las leyes que los rigen, supuso el tiempo y el espacio como continuos a partir de una percepción de incrementos infinitos (fluxiones en el lenguaje de Newton). Se basaba en un uso bastante libre de las magnitudes infinitesimales (magnitudes infinitesimales generadas por el flujo continuo) y representaciones simbólicas cartesianas de las curvas, siendo las curvas representadas por ecuaciones, que no sólo eran expresadas por expresiones algebraicas finitas sino también por series infinitas (tema en el que Newton trabajó fuertemente). Esta situación llevó a que los matemáticos de la época empezaran a utilizar las series infinitas como representaciones de curvas.

A pesar de los avances de Newton en el cálculo y la concepción de continuidad relacionándola con expresiones infinitas, solo hasta el siglo XIX pudo formalizarse la idea de continuidad y brindar definiciones satisfactorias para los números reales. Los trabajos de Cantor, Dedekind y Weierstrass permitieron llenar los vacíos existentes en los números racionales y legitimar la continuidad de la recta real, lo que trajo consigo el dar mayor validez a la equivalencia entre la continuidad numérica y geométrica de la recta.

Es preciso insistir en que la noción de continuidad no debe pasar desapercibida, dado que si se habla de curva es porque perfectamente se ha llegado a la idea de continuidad, es decir, es posible representar una curva a partir de un trazo sobre una superficie (desde lo geométrico) pero comprender el concepto de curva en cálculo puede ser posiblemente el punto de partida para entender con detalle lo que existe tras la derivada y la integral, puesto que ambas se aplican sobre una curva.

4.4 Razonamiento infinito

El concepto de infinito ha sido un aspecto de amplia discusión a lo largo de la historia de la matemática, tiene gran relevancia en el estudio del continuo, da significado a los procesos de generalización desde múltiples perspectivas, y en particular, reviste de importancia el estudio del cálculo al instaurar los conceptos de derivada e integral. Su origen se remonta al siglo VI a. de C. Posiblemente apareció por primera vez en la civilización griega con Anaximandro, quien concebía el ápeiron[6] como algo ilimitado, profundo, inabarcable, lo contrario a límite. Posteriormente en el siglo V a. de C., las paradojas de Zenón sobre el infinito y lo infinitesimal lo ubican como precursor en este tema, que sería nuevamente tratado en los siglos siguientes. Quien se opuso a este concepto fue Aristóteles, quien en el siglo III a. de C. refutó la posición dada por Anaximandro y las paradojas de Zenón para afianzar los conceptos fundamentales de la matemática, a la vez que rechazó la noción del infinito por las contradicciones que ocasionaba. Sin embargo, trató de resolver las controversias que generaba, concibiendo dos formas diferentes del mismo: el infinito como un proceso de crecimiento sin final, o de subdivisión sin final (infinito potencial) y el infinito como una totalidad completa, existe en un cierto instante (infinito actual). El concepto de infinito potencial se centra en un proceso recursivo interminable, puesto que dado un número natural cualquiera, por más grande que sea, siempre es posible hallar otro número natural mayor que él, y así sucesivamente. Aristóteles aceptó el uso del infinito potencial, pero rechazó el del infinito real, para Aristóteles nunca podremos concebir los números naturales como un todo, pero son potencialmente infinitos porque dado un conjunto finito siempre se puede encontrar un conjunto finito mayor que él.

> Según Bagni (2001) citado por López (2014), Anaxágoras es el primer autor recordado que introdujo procedimientos infinitesimales, introduce la noción de limite, no en el sentido moderno, sino mediante el llamado método de exhaución griego. Este método se presenta inicialmente en un registro verbal, y posteriormente fue puesto por Euclides en un registro visual en el siglo III a. de C., en sus conocidos “Elementos”; aunque dicho método es atribuido a Eudoxo (siglo IV a. de C.), la expresión visual del método les resultó

[6] Sustancia de la cual están hechas todas las cosas

particularmente útil para poder interpretar las construcciones en un gráfico y razonar visualmente (p. 281).

A Eudoxo se le debe la noción "tan pequeño como se quiera", antecedente del paso al límite. Aunque dicho método corresponde en realidad a un teorema, proposición I del libro X de Euclides, que expresa que: dadas dos magnitudes distintas, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que su mitad, del resto se sustrae una magnitud mayor que su mitad y si este proceso se repite continuamente, quedará alguna magnitud más pequeña que la menor de las magnitudes dadas inicialmente. (Hernández, 2019, p. 7).

Habitualmente, el método de exhaución se usa para considerar el círculo como límite de polígonos regulares cuando el número de lados aumenta hasta el infinito. Sin embargo, esta no fue la forma en que los griegos utilizaron el teorema sino un argumento de reducción al absurdo para evitar el uso del infinito. Tal como lo expresa Bagni (2001), citado por López (2014), este resultado tan sencillo tuvo consecuencias importantes para el posterior desarrollo de la matemática, dado que en este principio subyace la formulación de la idea de límite sin hacer uso del infinito (p. 282).

Eudoxo fue el gran matemático griego que supo esquivar y de cierta forma dominar el infinito actual, a él se le atribuye la idea de apartar de las consideraciones matemáticas las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes tal como lo expresa el axioma de Eudoxo-Arquímedes. La magnífica obra realizada por Bolzano en el siglo XVIII y sus continuadores ha consistido en fundar el análisis infinitesimal sobre el concepto de límite aritmético, en donde solo interviene el infinito potencial. La aplicación del paso al límite en conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal (derivada e integral) y también la generalidad de las proposiciones matemáticas y las cuestiones sobre el infinito actual y el transfinito justifican la conocida frase de H. Weyl: “La Matemática es la ciencia del infinito” (López, 2014, p. 283)

Desde la perspectiva de algunos matemáticos del pasado, se deja en evidencia que la discusión sobre el infinito no es para nada sencilla y, aunque su estudio ha permitido el desarrollo de técnicas y teorías trascendentales en la evolución de la matemática, es de destacar la importancia de analizar su comprensión. De allí que en el presente escrito se adopte una conceptualización sobre lo que se considerará como procesos de razonamiento infinito, para de este modo, establecer algunas hipótesis en la forma como incide el concepto de curva sobre el concepto de derivada e integral a través de este tipo de procesos.

Los procesos cognitivos abarcan entre otros: la memoria, el lenguaje, la percepción, el pensamiento y la atención. Dichos procesos están inmersos de manera simultánea dentro del pensamiento matemático y como consecuencia involucran la capacidad de cada sujeto para razonar, es decir, para tener la facultad de resolver problemas, extraer conclusiones y aprender de manera consciente de los hechos, estableciendo conexiones causales y lógicas. En este sentido, nuestra naturaleza finita genera fuertes concepciones sobre el infinito y “la actividad mental involucra avances o dificultades de tipo cognitivo al tratar de comprender conceptos matemáticos que tienen que ver con la noción de aproximación y el paso al límite” (Londoño, 2011, p. 842). Por ende, se concibe en la presente tesis el proceso de razonamiento infinito, como aquel proceso cognitivo en el cual el sujeto está inmerso en un pensamiento matemático en el que relaciona conceptos tales como aproximación, tendencia o límite en torno a la discusión y comprensión del infinito matemático.

4.5 Transiciones entre lo discreto y lo continuo

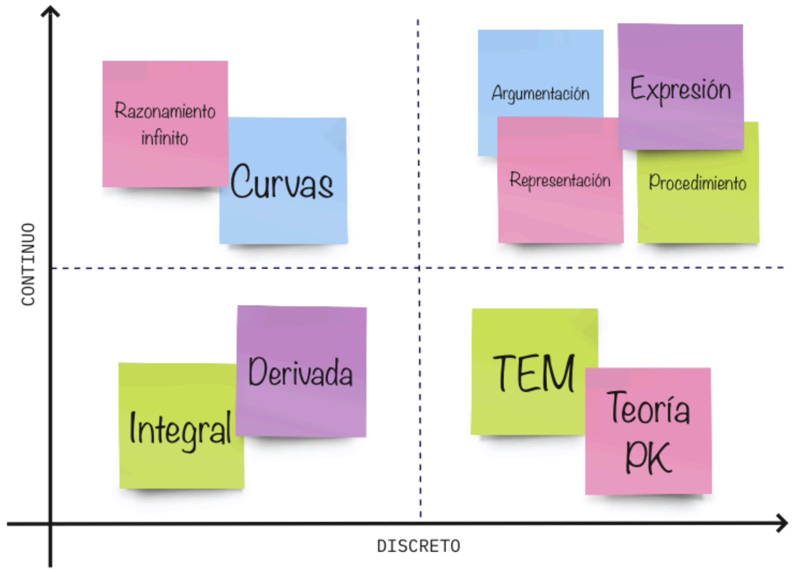
A finales del siglo XVII, Newton y Leibniz casi al mismo tiempo, pero de forma independiente, estructuraron y formalizaron el cálculo. Este proceso abarcó tres elementos: a) crear los conceptos generales de cociente diferencial e integral (llamados fluxión y fluente en términos de Newton), b) idearon una notación para estos conceptos que hizo del cálculo un algoritmo, y c) encontraron que el proceso de hallar tangentes y áreas, son mutuamente inversos, lo que se conoce hoy en día como el teorema fundamental del cálculo. Ambos, sin embargo, tenían percepciones diferentes en cuanto al infinito, y de allí que, sobre derivada, por ejemplo, su concepción fuese otra.

Para Leibniz, hablar de derivada era hablar de un cociente diferencial, es decir, un cociente de diferencias infinitesimales, mientras que, para Newton, la derivada era concebida como una razón de cambio; de hecho, Newton habla de cociente último, haciendo referencia a lo que hoy conocemos como aquellos límites de cocientes a los que cantidades que decrecen sin límite siempre convergen.

De acuerdo a lo expuesto, el concepto de transición en este estudio, se entenderá como el paso de un estado o condición a otra, ese proceso que se presenta entre una condición inicial y final. En particular, se hará mención de tal término para indicar el paso de lo continuo a lo discreto o viceversa, dentro de un proceso de razonamiento infinito.

Figura 15

Elementos involucrados en la investigación a la luz de las transiciones entre discreto y continuo


Razonamiento infinito
Curvas
Argumentación
Expresión
Representación
Procedimiento
CONTINUO
Integral
Derivada
TEM
Teoría PK
DISCRETO

5. La comprensión en matemáticas

Son diversas las investigaciones que abordan la comprensión en matemáticas y que han permitido comprobar dificultades de los estudiantes en sus procesos de aprendizaje (Neira, 2013), y a la vez, suministrar elementos alternativos que aportan en la estructuración de conocimientos más amplios en la educación matemática y en el cálculo en particular. Castro y Rico (1994), Sánchez-Matamoros et al. (2006), Duval y Ludlow (2016), Montero y Mahecha (2020) han divulgado resultados para diversos grados escolares en torno a la comprensión en matemáticas.

Un aspecto clave que se destaca de sus publicaciones, es el hecho de que el conocimiento consiste en una relación de significados, donde también sobresale la naturaleza constructiva del aprendizaje y su consecuencia más inmediata: que el conocimiento previo puede afectar considerablemente lo que el alumno comprende y aprende. Al respecto, en lo concerniente a la comprensión de los estudiantes en cursos de cálculo a nivel universitario Hitt (2003) afirma:

> Si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo. Es difícil concebir que un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos del cálculo (p.1)

En consecuencia, la comprensión no se limita a un aspecto lineal y homogéneo. De hecho, las principales dificultades que encuentran los estudiantes para comprender los conceptos fundamentales del cálculo, Artigue (1995, citado por Neira 2013) las clasifica en tres grupos:

> Las que tienen que ver con la conceptualización de la noción de límite; las que se refieren a la complejidad de los objetos básicos del cálculo -que dan lugar al estudio de los obstáculos epistemológicos, los que en una investigación sistemática se pretenden estudiar finamente para describirlos como obstáculos o conflictos semióticos, culturales,

didácticos,- y las vinculadas con las rupturas necesarias en relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos.

Resulta pertinente asumir una definición de comprensión y entrar a discutirla desde el objeto matemático (curva), como se establecerá a continuación:

5.1 ¿Qué es comprender?

El concepto ha tenido una evolución muy significativa a lo largo de varias décadas hasta tomar parte dentro de la psicología del aprendizaje y de los procesos pedagógicos en todos los niveles de la educación. Antes de 1978 los investigadores estadounidenses generalmente identificaban la comprensión con el conocimiento. Por su parte, Van Hiele (1957) en su tesis doctoral hace un detenido análisis con respecto al concepto y plantea que la comprensión en el caso de la geometría puede darse cuando a partir de los datos e información que se le suministra al estudiante, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes.

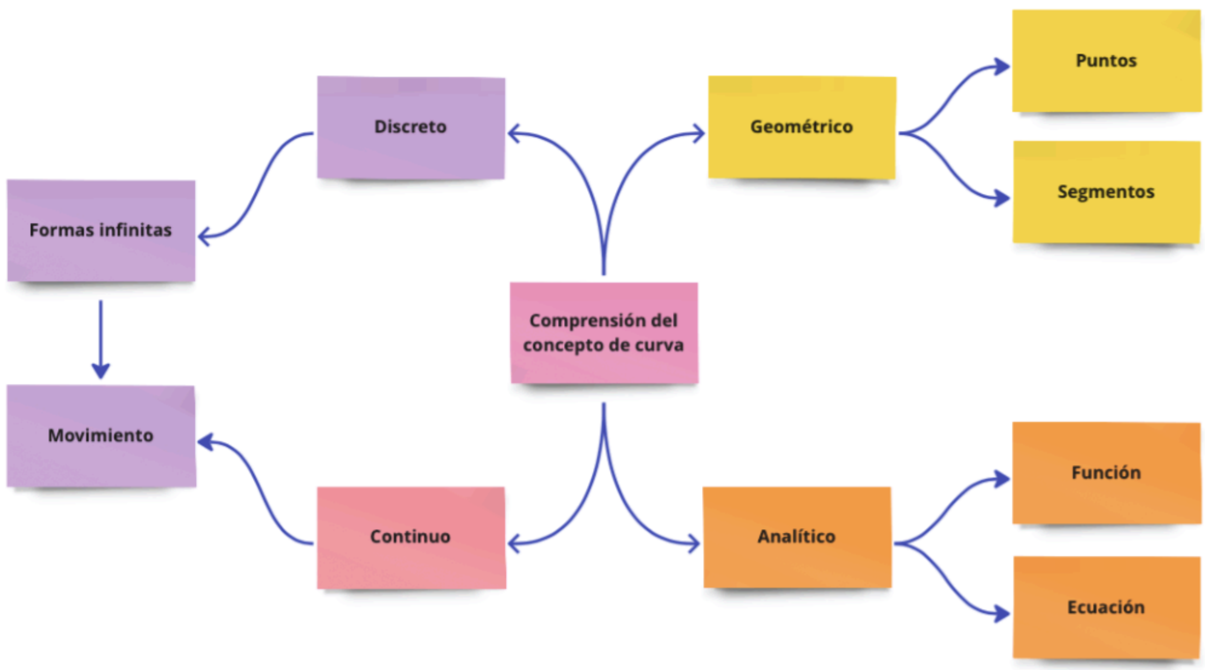
Por otro lado, la comprensión se equiparó con el desarrollo de las conexiones en el contexto de la realización de operaciones algorítmicas y la resolución de problemas. Esta relación con el conocimiento produjo que distintas teorías en el campo de la psicología cognitiva interviniesen de igual manera y otras se replantearan, situación que lleva a la evolución conceptual sobre comprensión. Actualmente, los investigadores separan la comprensión del conocimiento. Sin embargo, en educación matemática no se ha alcanzado un acuerdo unilateral respecto al significado de comprensión. En particular, se han propuesto conceptos constructivistas recientes de la comprensión, entre los que se incluyen los obstáculos cognitivos o epistemológicos concebidos en los trabajos de Gaston Bachelard y Anna Sierpinska, la definición del concepto y la imagen del concepto de Tall y Vinner, las representaciones múltiples de James Kaput y una dicotomía entre las concepciones operativas y estructurales de Anna Sfard. Algunas de estas definiciones tienen elementos comunes, en especial, debido a que la mayoría derivan de la perspectiva constructivista subyacente de que la comprensión del estudiante se construye mediante la formación de objetos mentales y de la realización de conexiones entre ellos. (Meel, 2003)

Los aportes de estos autores llevan a resultados entre los que se considera la definición de comprensión dada por Glasersfeld (1987) (Citado por Meel, 2003) “comprender es concebido como un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona” p. 235 O la dada por Pirie y Kieren (1989) en la que consideran que la comprensión hace parte de un fenómeno recursivo en donde la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación.

Siendo una teoría de destacada relevancia en la investigación educativa que encierra una perspectiva en torno al concepto de comprensión, en el que se propone un modelo consistente sobre la evolución de la comprensión matemática, y además, se articula con el objetivo de la investigación, dado que, podría ampliar la posibilidad de analizar las posibles conexiones asociadas a la comprensión del concepto de curva en los estudiantes de un curso de cálculo integral, parece imperativo considerar la teoría de Pirie y Kieren en el marco de la presente investigación.

Figura 16

Conexiones asociadas a la comprensión del concepto de curva



Las conexiones asociadas a los conceptos matemáticos en la comprensión del concepto de curva, pueden verse mediadas por la manera como los estudiantes dan a conocer sus representaciones. En este sentido, Tall y Vinner (1981) hacen un aporte significativo en lo que han denominado concepto-imagen y concepto-definición, y que dentro de la presente investigación juegan un papel fundamental dado que es en las representaciones desde la imagen o la definición como se puede interpretar de manera detallada lo que el estudiante comprende con respecto al concepto de curva.

5.2 Concepto-imagen y concepto-definición en matemáticas

La estructura cognitiva asociada con el concepto de curva incluye todas las imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias e impresiones, así como propiedades y procesos asociados (que se llamará concepto-imagen, siguiendo a Vinner, Tall y Dreyfus y estructuras elaboradas" o esquemas" según los científicos cognitivos) y ha ido emergiendo con el tiempo mediante experiencias de todos los tipos, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos, madura y es influenciado por desviaciones, aparentemente triviales, de un entendimiento válido. A medida que este concepto-imagen se desarrolla, no resulta necesario que sea coherente en cada momento. Así, resulta posible que visiones cognitivas sean evocadas en tiempos diferentes, sin que el individuo sea consciente del conflicto, hasta que son evocadas simultáneamente. Su coincidencia o no con lo que podríamos llamar concepto-definición (la formulación convencional lingüística que demarca precisamente las fronteras de aplicación del concepto) es fuente de muchas disfunciones en el aprendizaje. (Herrero y Carreras, 2002)

5.3 Teoría de Pirie y Kieren

La teoría sobre la evolución de la comprensión de Pirie y Kieren surge desde un referente netamente constructivista y está basado en la concepción de comprensión de Glasersfeld (1996), quien propuso que la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe. Añade Glasersfeld (1996) que la comprensión es un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento de una persona.

El modelo de Pirie y Kieren postula ocho niveles que describen la evolución de la comprensión matemática en cuanto a conceptos o relaciones se refiere. A su vez, en cada uno de estos niveles (a excepción del primero y el último) se identifican dos elementos complementarios que son la complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma.

El origen inicial de la teoría se fundamenta en la observación y comprensión de la matemática a nivel escolar medio y superior (universitario) en conceptos como las fracciones y las funciones cuadráticas. Pirie y Kieren apoyan su teoría en "experimentos de enseñanza" en ambientes constructivistas, mediante entrevistas individuales, grabaciones en video y audio de actividades que los estudiantes desarrollaban.

5.3.1 Niveles de la teoría PK

Pirie & Kieren (1989) asumieron su concepción teórica considerando que la comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. Por otra parte, conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática como poseedor de ocho niveles potenciales. El proceso de llegar a comprender inicia en el centro del modelo llamado el estrato de conocimiento primitivo. Veamos en qué consiste cada nivel (Meel, 2003):

Nivel 1: Conocimiento primitivo. Los estudiantes afloran toda la información que tiene que ver con ideas intuitivas (conocimiento intuitivo) o experiencias de aprendizaje anteriores. También se conoce como conocimiento situado en términos de Brown, Collins y Duguid, o conocimiento previo o informal, en términos de Saxe.

Nivel 2. Creación de imagen. El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las imágenes no necesariamente son representaciones pictóricas, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con los aspectos mentales o físicos que se evidencien, con el fin de obtener una idea sobre el concepto.

Nivel 3: Comprensión de la imagen. En este nivel, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas con una sola actividad por una imagen mental. El desarrollo de tales imágenes mentales que no son más que imágenes orientadas por un proceso, libera al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie & Kieren, 1992). Aquí el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

Nivel 4: Observación de la propiedad. El estudiante examina una imagen mental y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de una imagen específica además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. Construyen y modifican definiciones mediante la combinación de tales propiedades. Es posible también que el estudiante desarrolle un concepto-definición (Tall & Vinner, 1981) creada a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas.

Nivel 5: Formalización. El estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas. Es importante anotar que las descripciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aun cuando no sea necesario usar un lenguaje matemático formal.

Nivel 6: Observación. El estudiante utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además de que es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.

Nivel 7: Estructuración. En este nivel, el estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. Es capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie y Kieren, 1989).

Nivel 8: Invención. El estudiante es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este nivel, la comprensión matemática del estudiante es infinita, imaginativa y llega más allá de la estructura actual, lo que hace que el conocimiento estructurado se convierta en una nueva dimensión de conocimiento primitivo en el cual la comprensión se extiende para un concepto más elaborado.

Una consecuencia de este modelo es que los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite, y de hecho retiene, los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos. De hecho, esta es una teoría de la relatividad de la comprensión y, por lo tanto, una característica particular de la actividad primitiva es que los observadores pueden considerar lo que deseen como el enfoque de este nivel. Para un observador, la comprensión tiene una cualidad fractal. Se puede observar la comprensión de una persona dentro de la acción primitiva y observar la misma estructura nivelada (Meels, 2003).

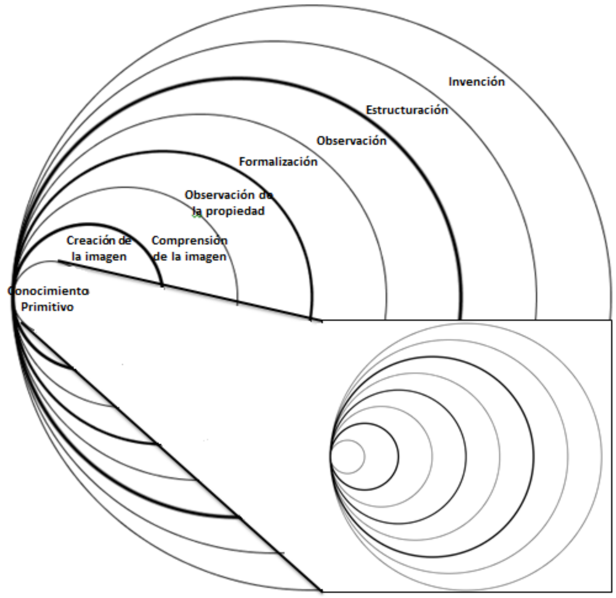
Figura 17

Modelo de estratos de la teoría PK (Meels, 2003)

Pirie y Kieren observan el centro interno, llamado conocimiento primitivo, como una composición de modelos completos, similares a la totalidad. Esta propiedad otorga al centro interno el atributo de característica fractal.

Figura 18

Esquema fractal del conocimiento primitivo (Meels, 2003)

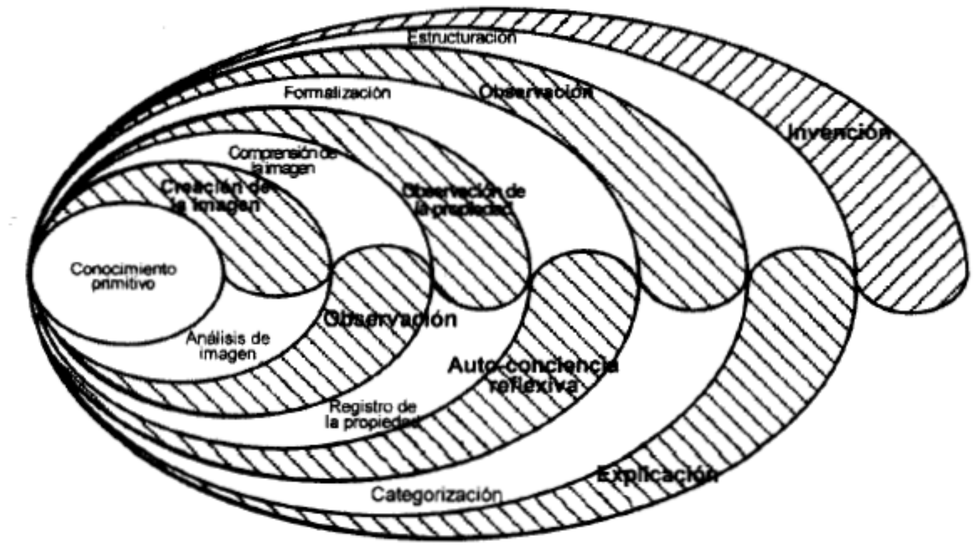


Posiblemente la característica más importante del modelo PK es el proceso dinámico de redoblar. El estudiante debe volver a doblar para llegar a un nivel más interno para extender la comprensión inadecuada de la persona. El proceso de volver a doblar para llegar a un nivel más interno provoca la reexaminación de la comprensión de un nivel en una forma diferente, a partir de las acciones que aparecieron originalmente cuando se trabajó en dicho nivel. La diferencia es cualitativa y realmente distinta debido a la motivación asociada con volver a doblar y la comprensión desarrollada de los anillos externos.

Otra característica del modelo identifica la complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma. Cada uno de los estratos, más allá del estrato del conocimiento primitivo, contiene una complementariedad de forma y proceso. (Londoño, 2011)

Figura 19

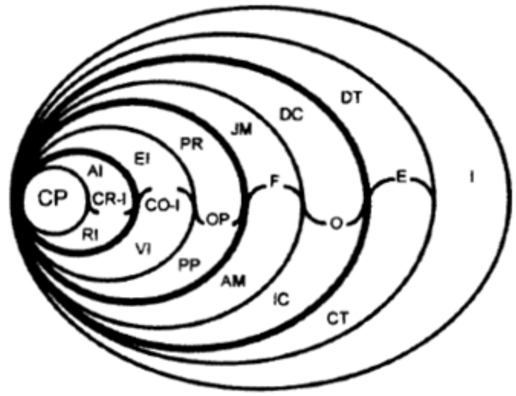
Modelo de complementariedad de un proceso (Meels, 2003)



PK explican que se debe exhibir la acción orientada a la forma para que funcione completamente en un nivel. Estas acciones orientadas a la forma se presentan como una demostración de un agente externo que intenta determinar el nivel de comprensión en el que un estudiante se encuentra operando. Por lo tanto, la ausencia de la acción complementaria que se presenta en el nivel no demuestra que el estudiante esté trabajando en un nivel en particular. Pirie y Kieren ampliaron esta noción y re-etiquetaron los diagramas que se muestran en la figura 20 para permitir un análisis más sencillo de los niveles mezclados y laminares, así como los complementos de actuación y expresión de los mismos. En particular Pirie y Kieren afirman que, si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente nivel.

Figura 20

Componente de cada estrato del modelo PK (Meels, 2003)



Nivel I
CP: conocimiento primitivo

Nivel II
CR-I: Creación de la imagen
AI: Análisis de la imagen
RI: Realización de la imagen

Nivel III
CO-I: Comprensión de la imagen
EI: Expresión de una imagen
VI: Visualización de la imagen

Nivel IV
OP: Observación de la propiedad
PP: predicción de la propiedad
PR: registro de la propiedad

Nivel V
F: Formalización
JM: Justificación del método
AM: aplicación del método

Nivel VI
O: Observación
DC: Descripción de las características
IC: Identificación de las características

Nivel VII
E: Estructuración
DT: Demostración de un teorema
CT: conjetura de un teorema

Nivel VIII
I: Invención

La última característica del modelo son los anillos más oscuros llamados límites de falta de necesidad. Estos límites se refieren al paso del estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable que no requiere necesariamente los elementos de los niveles más bajos. Moverse en los límites de “falta de necesidad” significa un importante cambio cualitativo en la comprensión de la persona, sin embargo, la superación de un límite de falta de necesidad no implica que el estudiante nunca regrese a ese nivel interno de comprensión. De hecho, estos límites de “falta de necesidad” generalmente se cruzan nuevamente durante los momentos en que se vuelve a doblar para reorganizar y reconstruir las comprensiones de niveles internos, con el fin de expandir las comprensiones de niveles más externos.

Con respecto a la teoría de Pirie y Kieren, son diversos los estudios en el ámbito de la educación matemática. De hecho, Pirie & Kieren (1994) explican e ilustran en detalle las tres principales características del modelo con referencia al concepto de función cuadrática. También, explican con rigor las características de las complementariedades de la acción y la expresión. Por otra parte, Warner (2008) analiza la relación entre el comportamiento de los estudiantes y cómo incide en el crecimiento de sus ideas matemáticas generales, extraídas a partir de sus experiencias. Tal análisis fue desarrollado a través de una serie de estudios de caso, involucrando estudiantes de la escuela media con variedad de habilidades.

De otro lado, Meel (2003) comparó la comprensión de estudiantes de cálculo destacados de tercer semestre del currículo con los de un currículo de cálculo tradicional. Con tres instrumentos, se analiza la comprensión de los conceptos de límite, derivada e integral, y mediante una clasificación son validadas las conclusiones del estudio.

Villa (2011) en su tesis doctoral indaga por cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo y la forma como la teoría para la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren puede aportar a su objeto de estudio. Por su parte, Londoño (2011) en su tesis doctoral propone una alternativa para facilitar a los estudiantes de la educación media y primer semestre de universidad que han pasado por una enseñanza de los conceptos de recta tangente y área, la comprensión del teorema fundamental del cálculo mediante la extensión y aplicación de la teoría PK con el diseño de actividades enmarcadas en los niveles de comprensión propuestas por la teoría.

5.3.2 Descriptores

Para analizar la evolución de la comprensión del concepto de curva a través de los cuatro primeros niveles[7] de la teoría PK (Sección 6.3.1), se diseñaron inicialmente una serie de descriptores que aparentemente en la implementación de los instrumentos (anexo 1, 5 y 6) permitirían ubicar los estudiantes en el respectivo nivel:

Tabla 2

Descriptores preliminares de la teoría PK

NIVEL	DESCRIPTORES PRELIMINARES
I	Identifica el concepto de curva desde un aspecto geométrico o numérico. Representa el concepto de curva desde un aspecto geométrico o numérico. Reconoce elementos de una suma infinita y los asocia con formas geométricas y/o numéricas. Utiliza un lenguaje formal en la deducción de ciertas expresiones matemáticas relacionadas con el concepto de curva.
II	Establece diferencias entre concepciones numéricas, geométricas y algebraicas de una curva. Realiza cálculos que sustentan la estimación de valores en procesos infinitos. Propone expresiones para generalizar la suma infinita de magnitudes. Calcula o estima medidas de ciertas magnitudes haciendo uso de particiones regulares. Plantea diferencias entre modelos discretos y continuos en la generación de curvas.
III	Relaciona el concepto de curva en el trazado de funciones. Representa el concepto de curva en distintas funciones. Aproxima curvas a partir de rectas tangentes. Calcula aproximaciones de áreas bajo ciertas curvas. Asocia el concepto de límite y sumatoria a partir de razonamientos infinitos.
IV	Relaciona el concepto de curva con la derivada de una función. Calcula la longitud de una curva por medio de sumas infinitas. Reconoce características de ciertas curvas y su generación por medio de rectas tangentes. Deduce generalizaciones para la conceptualización de curvas a partir de razonamientos infinitos.

[7] En la sección 6.3.1 se explica el motivo por el cual se consideran los primeros cuatro niveles

Sin embargo, se evidenció en el proceso que, la manera como estaban redactados no era consistente entre un nivel y otro con respecto a la unidad de análisis que se pretendía estructurar, y por otra parte, la cantidad de descriptores en cada nivel podría hacer que la sistematización se tornara compleja al establecer categorías dentro del software MAXQDA. Por lo tanto, se hizo necesario un proceso de refinamiento de los descriptores que implicó pruebas piloto con estudiantes externos a la investigación, retroalimentación del proceso con pares, incorporación de los resultados dentro del software MAXQDA para categorizar los resultados y las técnicas correspondientes para su sistematización.

Como resultado, se obtienen unos descriptores refinados y con una notación simple para su sistematización, con el propósito de analizar el proceso de comprensión de los estudiantes considerados y así poder establecer y clasificar de manera práctica el nivel de comprensión de cada uno de ellos, dentro de los respectivos niveles del modelo PK:

Los descriptores serán denotados con la letra **D** seguido del número que indica el nivel en el que se ubica y un guion seguido de un número que señala el descriptor al que hace referencia dentro de dicho nivel (Pulgarín, 2014). Como ejemplo: **D2-3** hace referencia al Descriptor 3 del nivel 2.

A continuación, se presentan los descriptores asociados a los cuatro primeros niveles de la teoría PK:

5.3.2.1 Nivel 1: Conocimiento primitivo. En este nivel se presentan descriptores que se centran en indagar por los elementos previos con que cuenta el estudiante antes de dar inicio a cualquier enseñanza de contenidos o suministrar información. Quedan establecidos así:

D1-1 Representa el concepto de curva desde un aspecto geométrico, métrico, numérico o analítico.

D1-2 Argumenta el concepto de curva desde un aspecto geométrico, métrico, numérico o analítico.

D1-3 Relaciona elementos del infinito con algunas formas geométricas o numéricas, discretas o continuas.

D1-4 Utiliza un lenguaje formal en la deducción de ciertas expresiones matemáticas relacionadas con el concepto de curva.

5.3.2.2 ***Nivel 2: Creación de la imagen.*** Para evidenciar que el estudiante transmite el significado de cualquier tipo de imagen mental relacionada con el concepto de curva, se presentan en este nivel descriptores que apuntan hacia este elemento y quedan definidos así:

D2-1 Establece diferencias en la representación geométrica o analítica de una curva

D2-2 Sustenta la estimación de valores en procesos infinitos.

D2-3 Asocia expresiones para generalizar la suma infinita de magnitudes

D2-4 Expresa diferencias entre modelos discretos y continuos en la generación de curvas

5.3.2.3 ***Nivel 3: Comprensión de la imagen.*** En este nivel el estudiante por medio de la actividad de representaciones en el plano es forzado a realizar acciones físicas particulares con las cuales debe dar cuenta en las preguntas por propiedades o características relacionadas con conceptos tales como límites, tangentes, derivadas e integrales, además de la noción de continuo y discreto en el tratado de curvas.

D3-1 Representa el concepto de curva a partir de distintas funciones

D3-2 Argumenta la aproximación de curvas a partir de rectas tangentes

D3-3 Interpreta aproximaciones de áreas bajo ciertas curvas

D3-4 Manifiesta la relación entre el concepto de límite y sumatoria en ciertas funciones

5.3.2.4 ***Nivel 4: Observación de la propiedad.*** Los descriptores de este nivel buscan identificar el momento en que el estudiante logra examinar diversas imágenes en el estudio del concepto de curvas. Aquí, el estudiante debe hacer distinciones sobre ciertas características, imágenes y conceptos que deben ser más profundos. Las deducciones matemáticas deben estar en un nivel de apropiación mucho más elevado.

D4-1 Representa el concepto de curva a partir de la derivada de una función

D4-2 Calcula la longitud de una curva por medio de sumas infinitas

D4-3 Reconoce características de ciertas curvas y su generación por medio de rectas tangentes.

D4-4 Expresa generalizaciones para la conceptualización de curvas a partir de razonamientos infinitos

6. Metodología

Como ya se pudo evidenciar en el capítulo uno y cinco, son diversas las investigaciones que se han realizado en las últimas décadas en torno a la comprensión en matemáticas (Neira, 2013), dejando como resultado, publicaciones donde se identifican dificultades de los estudiantes en torno a este campo. Así como también, otras en donde se analiza su evolución y se implementan modelos para indagar el avance en su comprensión.

Con base en tales antecedentes y teniendo en cuenta mi experiencia como investigador y docente catedrático de cursos de cálculo a nivel universitario, en donde se evidencia la importancia de discutir y estructurar los objetos matemáticos asociados a los conceptos de derivada e integral, se considera necesario profundizar en el estudio de la comprensión del concepto de curva. Para ello, se propone analizar la comprensión de los estudiantes de un curso de cálculo integral a la luz de las teorías actuales afines (capítulo 5), intentando fundamentarlo con respecto al contenido conceptual existente en matemáticas e incluyendo eso sí, la definición "propia" del concepto de transición planteada en la sección 4.5. De allí que, se hace necesario responder cómo es el proceso de comprensión del concepto de curva en estudiantes de cálculo a nivel universitario, con el fin de legitimar la conjetura relacionada con el hecho de que, al parecer, dicho concepto (curva) subyace al de derivada e integral.

En este sentido, la recolección y análisis de datos obtenidos en el proceso de investigación pueden revelar nuevos interrogantes en el proceso de interpretación, así como también, la necesidad de regresar a etapas previas (puesto que se busca analizar la comprensión del estudiante) con el fin de explorarlas y describirlas para generar posteriormente perspectivas teóricas al respecto. Por lo tanto, se utilizará una metodología apoyada en un enfoque cualitativo (Hernández et. al, 2014). Bajo este enfoque, se someterá el objeto de estudio (comprensión) y el objeto matemático (concepto de curva) a la influencia de ciertas variables (representaciones gráficas, expresiones algebraicas, procedimientos, argumentación, etc.) en condiciones controladas (curso de cálculo integral de programas académicos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia) para observar los resultados que la variable produce en el objeto.

Estos resultados por si solos pudieran no tener significado. Luego, resulta pertinente considerar la posibilidad de que el análisis sobre la comprensión del concepto de curva se realice a partir del aprendizaje en contexto mediante un diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, de una forma sensible a su naturaleza, la enseñanza y la evaluación. Esto lleva a pensar en la implementación de un paradigma metodológico de gran relevancia como lo es la investigación de diseño (Molina et al., 2011).

Con respecto a esta última (investigación de diseño), autores como Valverde (2014) hacen uso indistintamente de los términos investigación de diseño, estudio de diseño o investigación basada en diseño y experimentos de diseño. Sin embargo, en el desarrollo de la presente investigación, se ha asumido una postura diferenciadora con respecto a dicha terminología, catalogando de manera distinta la investigación de diseño y un estudio o experimento de diseño.

6.1 Investigación de diseño

La investigación de diseño se define según Confrey y Sawyer (2006, citado por Molina et al., 2011) como:

> Un paradigma de investigación de naturaleza principalmente cualitativa, que ha sido desarrollado dentro de las ciencias del aprendizaje y se nutre de un amplio campo multidisciplinar… Más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño instruccional propuesto funciona y sugerir formas con las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias.

> Este tipo de investigación tiene potencial para hacer progresar las teorías del aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas, y conduce a conocimiento empíricamente fundamentado que es útil en la toma de decisiones instructivas dirigidas a promover y mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Así mismo, aporta información sobre el diseño instruccional, que sirve de guía para realizar otros diseños. (p. 76)

6.2 Estudios o experimentos de diseño

Los experimentos de diseño se definen, según Shavelson & Towne (2002, citado por Molina et al. 2006), como: "enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testadas a lo largo del diseño, implementación y estudio sistemático de herramientas educativas que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente" (p. 1). En lo concerniente al concepto de curva (sus transiciones entre lo discreto y lo continuo), estas ideas teóricas son aportadas por el trabajo académico en el aula, a partir del uso de métodos que conectan los procesos de actuación y expresión de los estudiantes

Se espera que el experimento de diseño conduzca a anticipar cómo estos elementos conjugados van a funcionar conjuntamente para promover los niveles de comprensión del concepto de curva. Va más allá del desarrollo y puesta a prueba de intervenciones particulares e incluye fundamentos teóricos sobre la comprensión, y reflejan un compromiso por establecer las relaciones existentes entre los conceptos de curva, derivada e integral y la manera como los procesos de razonamiento infinito toman cabida allí, siendo los comportamientos emergentes de los alumnos en respuesta a las actividades y situaciones propuestas, los que conducen al desarrollo de la intervención.

6.3 Experimentos de enseñanza

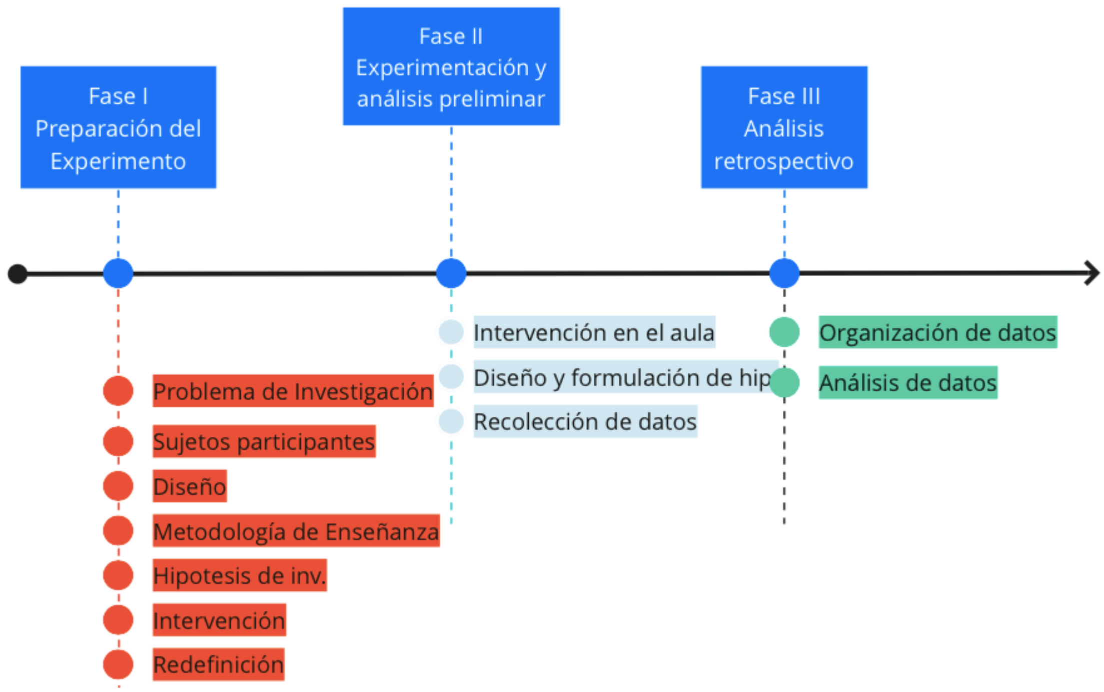
Son una herramienta conceptual que se utiliza en la organización de actividades. Su principal característica es la ruptura de la diferenciación entre profesor e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos. Según Steffe y Thompson (2000):

> Es principalmente una herramienta exploratoria que está dirigida a comprender el progreso que los estudiantes logran durante períodos prolongados. Un experimento de enseñanza implica una secuencia de episodios de enseñanza, así, un episodio de enseñanza incluye un agente docente, uno o más estudiantes, un método y un testigo para registrar lo que ocurre durante el episodio. Estos registros, si están disponibles, se pueden usar para preparar episodios posteriores, así como para realizar un análisis conceptual retrospectivo del experimento de enseñanza (pp. 273-274).

En la ejecución de los experimentos de enseñanza, Cobb y Gravemeijer (2008, citado por Molina et al. 2011) distinguen tres fases: preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y ejecución del análisis retrospectivo de los datos. En la segunda de estas fases tiene lugar las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo de tres pasos: 1) diseño y formulación de hipótesis; 2) intervención en el aula y recogida de datos; y 3) análisis de los datos y revisión y reformulación de hipótesis.

Figura 21

Fases y acciones de un TEM



6.3.1 Experimento de enseñanza para la comprensión del concepto de curva

La comprensión del concepto de curva involucra diversas acciones y expresiones mentales tales como reconocer atributos, representaciones, relaciones entre variables, entre otras. Los estudiantes suelen construir una imagen limitada del concepto y en el caso de una curva, dicha limitante afecta directamente la elaboración de otros conceptos vinculados como lo son la derivada e integral, "al tomar atributos no relevantes como si lo fueran para la definición del concepto" (Tall y Vinner, 1981, p. 152). De allí que la investigación adopte los experimentos de enseñanza (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000; Stylianides & Stylianides, 2013) para intentar dar respuesta al problema de comprensión inmerso en el concepto de curva y apoyar el aprendizaje de los estudiantes a partir de explicaciones teóricas sobre lo que ocurre con la comprensión del concepto a la luz de la teoría PK.

Cabe recordar que Pirie y Kieren (1994) conciben dentro de su modelo que cada nivel más allá del conocimiento primitivo está compuesto por complementariedades de la acción y la expresión, y estos aspectos de la comprensión crecen de acuerdo con cada uno de los niveles del modelo. La acción puede abarcar actividades tanto mentales como físicas, y la expresión puede revelar a los demás o a sí mismo la naturaleza de las actividades. En este sentido y considerando la comprensión como un proceso, los TEM se articulan con la teoría PK, ya que cada fase del experimento de enseñanza trae consigo acciones, y aunque, la expresión verbal no es estrictamente necesaria, es solo a través de la exteriorización que se puede inferir la comprensión que el estudiante está construyendo. Por esta razón, para el experimento de enseñanza se consideraron los cuatro primeros niveles del modelo PK, así como también las estructuras cognitivas de los estudiantes a partir del concepto imagen y concepto definición plasmadas por Tall & Vinner (1981).

Tabla 3

Descripción dentro de las acciones del TEM

	TEM	
Fase	**Acciones**	**Descripción**
I Preparación del experimento	Problema de investigación	Formulación de la pregunta de investigación, justificación del interés y necesidad de hacer el estudio y planteamiento de objetivos.
	Sujetos participantes del estudio	Elegir, justificar la elección y describir los sujetos participantes del estudio.
	Diseño	Diseñar en qué va a consistir la secuencia de intervenciones en el aula.
	Metodología de enseñanza	Identificar metodologías de enseñanza adecuada para el contenido a abordar en el aula según el objetivo de investigación planteado.
	Hipótesis de investigación	Elaborar hipótesis de investigación relativas al problema de estudio, que pueden ser contrastadas a partir de las intervenciones en el aula.
	Intervención	Diseñar la siguiente intervención teniendo en cuenta el análisis de los datos ya recogidos, la búsqueda bibliográfica realizada, los conocimientos previos de los estudiantes y el trabajo efectuado en el aula.

II Experimentación y análisis preliminar	Redefinir	Elaborar hipótesis sobre los resultados por obtener en las intervenciones por realizar. Intentar prever las posibles reacciones de los estudiantes y las dificultades que puedan presentarse.
	Intervención en el aula	Modificar de forma justificada el diseño de la intervención, si se considera conveniente de acuerdo con los objetivos concretos de la intervención.
	Diseño y formulación de hipótesis	Contrastar los resultados con la hipótesis previamente elaborada.
	Recolección de datos	Recolección exhaustiva de datos mediante grabaciones de audio o video, evidencia de hojas de trabajo de los estudiantes, toma de notas, etc. Analizar los datos recogidos en el aula. Toma de nota por parte del investigador-docente (en caso de que lo considere necesario) sobre las intervención, que complementen y ayuden al análisis de los datos recogidos.
	Organización de datos	Realizar la transcripción de las grabaciones realizadas Sistematizar los datos obtenidos
III Análisis retrospectivo	Análisis de datos	Analizar todos los datos de forma conjunta Dar respuesta si es posible a los objetivos del estudio Contrastar los resultados. Elaborar un modelo que describa el aprendizaje o desarrollo de los alumnos, de los docentes o de las tareas realizadas, de los cambios que son considerados aprendizaje o desarrollo de los alumnos a lo largo del experimento de enseñanza, entendiendo estos como ocasionados por las maneras de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente.

6.3.2 Participantes

Los cursos de Cálculo hacen parte de los planes de estudio de muchos programas académicos universitarios. Allí, convergen estudiantes con una formación previa en matemáticas que ha sido impartida en la secundaria (MEN, 2006) y al ingresar a una carrera específica de Ingeniería, deben aprobar dentro de su formación una serie de cursos de Matemáticas como requisito para avanzar en su pensum académico.

En el caso de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia, estos cursos de Cálculo están estructurados dentro de la mayoría de los planes de estudio semestre a semestre de la siguiente manera: Cálculo I (Cálculo Diferencial), Cálculo II (Cálculo Integral), Cálculo III (Cálculo Vectorial). Es de aclarar, además que, previo a estas asignaturas, los estudiantes han cursado y aprobado cursos previos de Matemáticas en los primeros dos semestres como lo son:

Álgebra y Trigonometría, Geometría Euclidiana, Matemáticas discretas, Geometría Vectorial y Analítica por citar algunos casos. La intensidad horaria de los cursos de Matemáticas asociados a la Facultad de Ingeniería por lo general es de 4 horas semanales distribuidas en dos bloques de 2 horas en distintos días de la semana. Con base en este contexto previo, cuando un estudiante matricula dentro de su semestre académico el curso de Cálculo Integral, ya ha aprobado con antelación los cursos de Álgebra y Trigonometría, Geometría Euclidiana, Geometría Vectorial y Analítica y Cálculo Diferencial. Es decir, se presume que el estudiante tiene afianzados ya unos conocimientos de gran relevancia que pueden dar cuenta con mayor detalle de sus conocimientos en pro de la discusión con respecto a la comprensión del concepto de curva.

En consecuencia, se han elegido los estudiantes de dicho curso (Cálculo Integral) para el desarrollo de esta investigación, en la cual me desempeñé como docente y observador, esto con el fin de explorar y contrastar la comprensión que los estudiantes tienen del concepto de curva enmarcado en la teoría de Pirie y Kieren y con base al TEM propuesto.

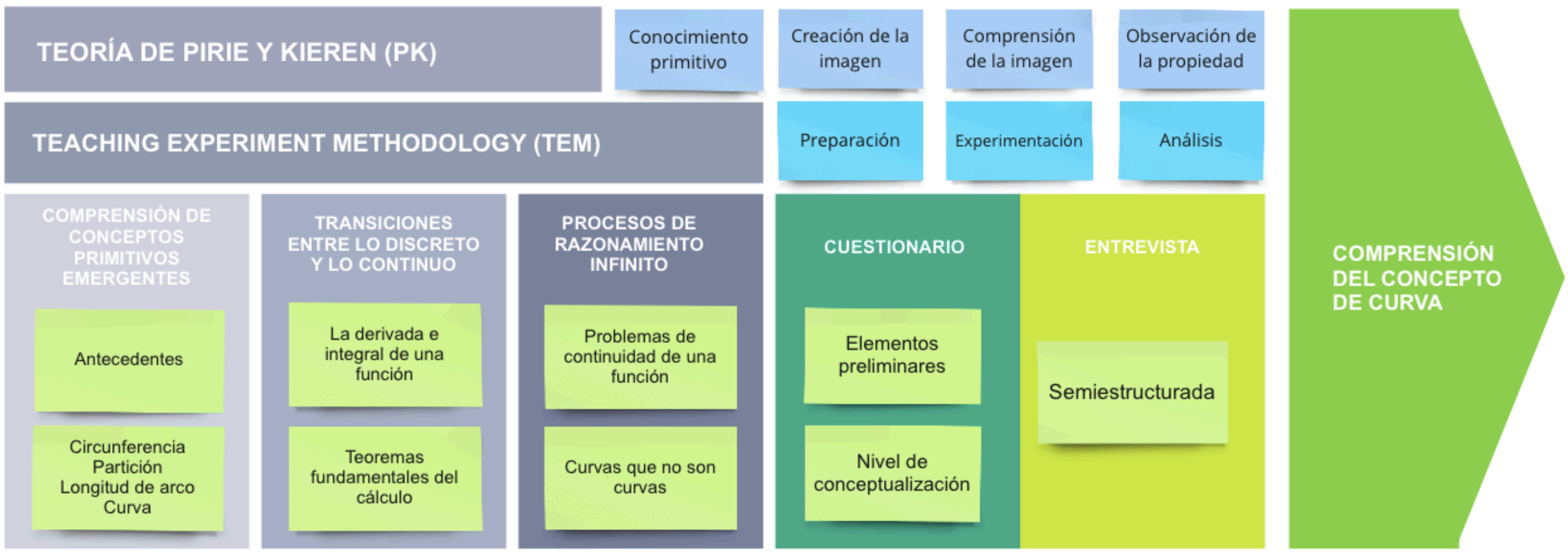
6.3.3 Diseño

El programa del curso de Cálculo Integral está distribuido en 16 semanas (ver Tabla 4), por lo cual el experimento de enseñanza se estructuró con base en una secuencia de enseñanza de cinco sesiones (ver Capítulo 7). Se elaboró un cuestionario aplicado al inicio y otro al final del experimento de enseñanza, al igual que una entrevista semiestructurada realizada en medio del proceso (ver capítulo 8).

El desarrollo del curso, la implementación del TEM y los instrumentos se realizaron de manera virtual (plataforma ZOOM para las clases, Google Meet para las entrevistas, Google forms para los cuestionarios) dadas las medidas de contingencia adoptadas por la Universidad como producto de la pandemia del Covid-19 y que afectaron el desarrollo presencial de las clases. Sin embargo, la manera como se propuso el TEM es replicable tanto presencial como virtualmente.

Figura 22

Articulación del TEM y la teoría PK



Los contenidos considerados en el experimento de enseñanza están relacionados con los programas para las carreras de los cuales hacen parte el grupo de estudiantes seleccionado, de este modo, las tres sesiones restantes están estructuradas con base en los elementos: comprensión de conceptos primitivos emergentes, transiciones entre lo discreto y lo continuo y, por último, procesos de razonamiento infinito.

7. TEM sobre el concepto de curva

Los Teaching Experiment Methodology (TEM) cuentan con tres fases (capítulo 6), las cuales constituyen el antes, durante y después del proceso de investigación. En lo concerniente al concepto de curva, se llevó a cabo el TEM en medio del proceso de clases del curso de Cálculo Integral, el cual tenía ya estipulado una estructura curricular a desarrollar durante el semestre (16 semanas de calendario) que consta principalmente de 4 ejes temáticos: a) técnicas de integración, b) sumas de Riemann, integrales definidas e impropias, c) aplicaciones de la integral, d) sucesiones y series. Por lo tanto, se procedió a diseñar un episodio de enseñanza con base en las temáticas al interior del programa del curso y en medio del desarrollo de las clases, de tal manera que se pudiese implementar el TEM a la par con el avance en la enseñanza de los temas del curso, pero evidentemente profundizando la discusión en lo concerniente a curvas y la manera como se comprende este concepto en cálculo.

A continuación (Tabla 4) se presenta el contenido detallado que plantea el programa del curso de Cálculo Integral para la Facultad de Ingeniería, dosificado en el número respectivo de clases durante el semestre:

Tabla 4

Dosificación de contenidos por clases en el programa del curso de Cálculo Integral

Clase	Contenidos
1 - 7	**Sesión 1 (Clase 1)** Función Primitiva o Antiderivada, la integral indefinida definición y notación, interpretación geométrica de la integral indefinida Primeras fórmulas de la integración, propiedades de la integral indefinida, ejemplos. Métodos de integración: regla de sustitución (cambio de variables), primera tabla de integrales y sustituciones, integración por partes, integración de potencias de funciones trigonométricas,

	sustituciones trigonométricas, descomposición en fracciones parciales, otras sustituciones, integración de funciones racionales de seno y coseno, sustituciones para racionalizar.
8 - 16	**Sesión 2 (clase 8)** La integral definida, la notación sumatoria (notación sigma), propiedades, partición de un intervalo. Norma. partición regular. Sumas de Riemann, definición de la integral definida según Riemann, teorema: continuidad implica integrabilidad, análisis del reciproco. Propiedades de la integral definida y sus generalizaciones, propiedades que ayudan a simplificar la integral, funciones pares e impares. **Sesión 3 (clase 12)** Los teoremas fundamentales del cálculo, teorema del valor medio para integrales, primer teorema fundamental del cálculo (derivada de una integral), ejemplos ilustrativos. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow), evaluación de integrales definidas, ejemplos ilustrativos. Integrales impropias.
17 – 23	Aplicaciones de la integral definida, áreas entre curvas, volúmenes de sólidos de revolución: por secciones planas, método de las arandelas, método de la corteza cilíndrica. **Sesión 4 (clase 20)** Longitud de arco de una curva plana y área de superficie de revolución. Momentos y centros de masa de una barra, centroide de una región plana, los teoremas de Pappus.
24 - 32	Sucesiones y series. Sucesiones, definición y límite de una sucesión, clasificación y teoremas sobre límites de sucesiones. Series numéricas, la serie aritmética, la geométrica, y propiedades. la serie telescópica, criterios de convergencia y divergencia de series, criterio del término n-ésimo para divergencia, criterio de la integral (la serie P), criterios de comparación, comparación en el límite, criterio del cociente y de la raíz, criterio de Raabe. Series alternas, convergencia absoluta y condicional, criterio del cociente y de la raíz para convergencia absoluta. **Sesión 5 (clase 30)** Series de potencia, representación de funciones por series de potencias. Formula de Euler, cálculo con series de potencias. la serie binomial.

Con base en los contenidos del curso estipulados para desarrollarse durante un semestre, se analizaron los ejes temáticos y se consideró la manera pertinente de incluir las sesiones de intervención del TEM, planteando de este modo la estructura del episodio de enseñanza.

Un experimento de enseñanza implica una secuencia de episodios de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000, p. 273). Un episodio de enseñanza incluye un agente docente, uno o más estudiantes, un testigo de los episodios de enseñanza y un método para registrar lo que ocurre durante el episodio. Estos registros, si están disponibles, se pueden usar para preparar episodios posteriores, así como para realizar un análisis conceptual retrospectivo del experimento de enseñanza.

El episodio diseñado para el estudio de curvas y su incidencia en la comprensión de conceptos del cálculo consta de tres instrumentos de recolección de información: cuestionario inicial (CI), entrevista (E) y cuestionario final (CF). Estos tres instrumentos permiten hacer seguimiento al proceso antes, durante y después de la intervención en el trabajo de campo, y facilitan el análisis de resultados al realizar la triangulación y contraste con la observación ejecutada como docente e investigador dentro del TEM en el aula de clase (aula virtual).

Tabla 5
Estructura de intervención del TEM

Sesión 1	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**
Presentación	Comprensión de conceptos primitivos emergentes	Transiciones entre lo discreto y lo continuo	Conceptualización de una curva	Comprensión del concepto de curva
Cuestionario inicial (CI)		Entrevista (E)		Cuestionario final (CF)

7.1 Sesión 1: Presentación del TEM y cuestionario inicial

La sesión uno se ejecutó en la segunda clase del curso. Estuvo destinada a la presentación del TEM y la estructura de trabajo de las restantes sesiones con los participantes. Al finalizar la presentación, los estudiantes realizaron el CI (Anexo 1) a través de un enlace a un forms de Google. Dicho cuestionario constaba de preguntas, la cuales están en estrecha relación con los descriptores y que indagan por la capacidad para formalizar, argumentar e interpretar elementos matemáticos relacionados con los procesos de razonamiento infinito que son el preámbulo en la comprensión del concepto de curva y que constituyen esencialmente el primer nivel en el marco de la teoría PK.

7.2 Sesión 2: Comprensión de conceptos primitivos emergentes

La evolución de la comprensión matemática no es un aspecto lineal y los pre-conceptos y representaciones mentales de los estudiantes son esenciales para la elaboración de conceptos más abstractos. De allí que resulte pertinente analizar en los estudiantes los conceptos de partición e infinito dentro de la formalización hacia el concepto de curva. Por tal motivo, en la clase ocho se ejecutó esta sesión, durante el desarrollo de la temática relacionada con notación sigma y sumas infinitas (Anexo 2), estableciendo una serie de interrogantes y estructurando la explicación de la temática sin perder de vista lo trascendental del tema, así como la visión que allí nace o se redefine por parte del estudiante en el paso de lo discreto a lo continuo.

Así pues, dentro de los conceptos primitivos emergentes en la conceptualización de una curva, se consideró inicialmente la noción de partición. Este concepto se analizó para un segmento, un intervalo y una superficie.

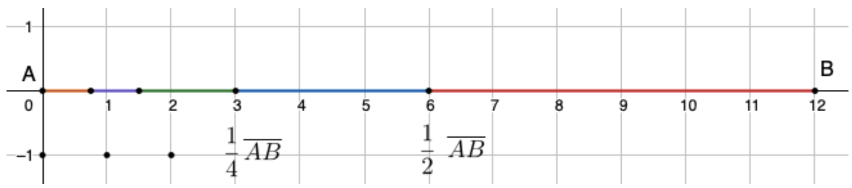
En el transcurso de esta sesión se indagó por los siguientes aspectos:

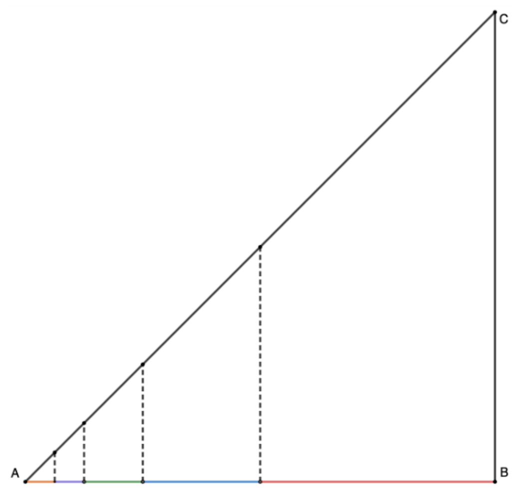
Partición de un segmento:

¿Cuántos puntos componen un segmento $\overline{AB}$? Si se divide $\overline{AB}$ a la mitad y luego su mitad a la mitad y así sucesivamente ¿Qué resultado arroja la suma de las longitudes de estos segmentos? ¿Es posible dividir $\overline{AB}$ infinitas veces? ¿Existen segmentos infinitos? ¿Una suma infinita de segmentos puede arrojar un resultado finito?

Partición de un intervalo:

¿Existen tantos puntos como números reales en $\overline{AB}$?

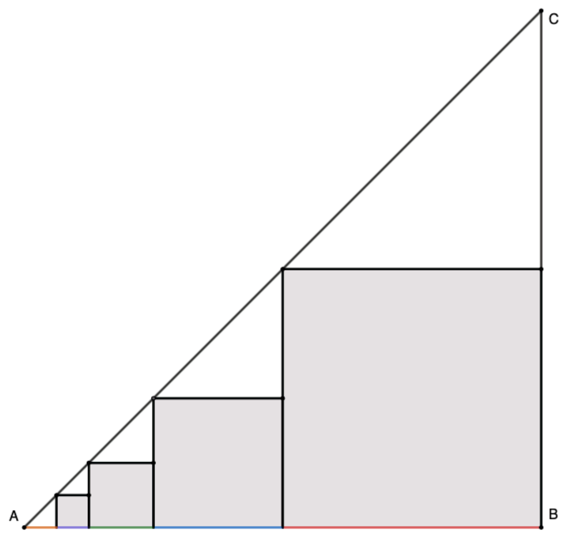




Si los puntos de $\overline{AB}$ se hacen corresponder con los puntos del segmento $\overline{AC}$, podría afirmarse que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ¿Tienen la misma longitud? ¿Tienen la misma cantidad de puntos? ¿Ambos segmentos pueden dividirse infinitamente? ¿Existe una biyección entre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$? ¿La suma de los segmentos de las particiones correspondientes a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es la misma?

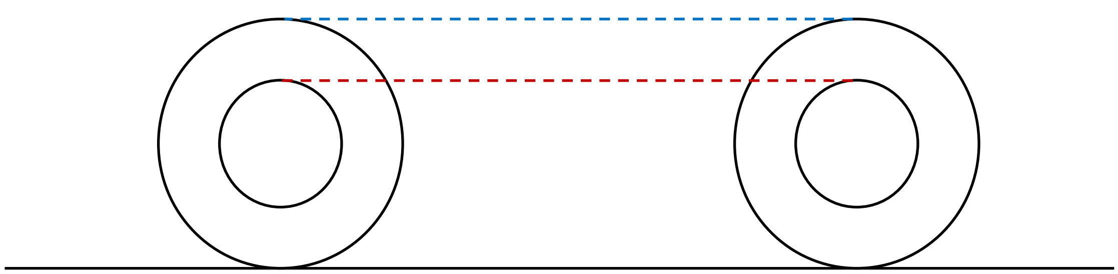
Partición de una superficie:

Si la representación de la figura anterior se asocia con un área como en la siguiente figura, entonces: ¿Una superficie puede dividirse infinitas veces? ¿Una superficie puede involucrar una suma infinita? ¿Existe una biyección entre los puntos del segmento $\overline{AC}$ y el área sombreada?



La Paradoja de la rueda de Aristóteles[8] es una de las primeras paradojas conocidas que hacen referencia a un conjunto infinito y que se puede hallar en la mecánica de Aristóteles del siglo IV a.C.

Se pide considerar una rueda formada por dos circunferencias concéntricas de diferente radio. Si da una vuelta completa, la longitud del segmento donde se apoya la circunferencia exterior es mayor que la longitud de la circunferencia interior, sin embargo, simultáneamente la circunferencia interior también ha dado una vuelta completa, en consecuencia, cada circunferencia se apoya sobre un solo punto; se establece así una correspondencia uno a uno entre los puntos de ambas circunferencias.



[8] Una animación que explica dicha paradoja puede observarse en: https://www.geogebra.org/m/gXds6pev

Desde ese punto de vista tienen el mismo número de elementos, pero eso no basta para que ambas curvas tengan la misma longitud, pues la correspondencia no conserva las distancias.

7.3 Sesión 3: Transiciones entre lo discreto y lo continuo

El estudio del concepto de curva en el plano desde el punto de vista geométrico y analítico parece indicar (según los registros históricos ya discutidos en los antecedentes de la investigación) que su formalización se puede realizar en dos sentidos: de lo discreto a lo continuo y de lo continuo a lo discreto. Sin embargo, surgen, entre otras, preguntas, ¿la comprensión de este concepto se da en ambas direcciones? Es decir, ¿el estudiante elabora su conceptualización de lo general a lo particular o de forma recíproca? Para responder a estos interrogantes, la clase doce (Anexo 3) en la cual se propone esta sesión, trae consigo el estudio de los teoremas fundamentales del cálculo en donde la relación inversa entre la diferenciación y la integración queda rigurosamente formalizada.

7.4 Sesión 4: conceptualización de una curva

La discusión sobre el concepto de transición cobra mayor fuerza debido a que directamente convergen en un tema que a la vez evoca un problema histórico: medir la longitud de una curva[9] (a lo que se le ha llamado longitud de arco). De esta manera, se propone una serie de interrogantes que parten del problema de hallar la medida de una circunferencia y su respectiva área para, posteriormente, contrastarlo con la longitud de una curva de una función cualquiera. Se proponen a la par con el desarrollo de esta temática preguntas tales como:

---

[9] https://www.geogebra.org/m/AJvhztEB

¿Cuántos puntos componen una circunferencia? ¿La longitud de una circunferencia es siempre finita? ¿Qué alternativas conoce para obtener la longitud de una circunferencia?

¿Existe diferencia entre un arco de circunferencia y una cuerda de circunferencia?

Con base en la animación responda:

¿Qué ocurre con los vértices de cada polígono sobre la circunferencia cuando aumenta el número de lados? Si el número de lados del polígono aumenta, ¿Qué ocurre con su longitud? ¿El perímetro del polígono puede ser igual a la longitud de la circunferencia?

7.5 Sesión 5: Comprensión del concepto de curva y cuestionario final

El foco de atención en un curso de cálculo generalmente radica en los conceptos de derivada e integral. Ambos son formalizados a partir del concepto de curva. Sin embargo, el tratamiento de una curva, su definición y formalización es asumida de forma “evidente” y utilizada de manera directa en todo el tratamiento de los contenidos relacionados con derivadas e integrales. La dificultad no radica en asumirlo de forma evidente, sino en la posible omisión de elementos cruciales para establecer procesos de razonamiento infinito a partir del concepto de curva, que posiblemente permitirían establecer una comprensión profunda del estudio del cálculo. Es por lo anterior que en esta sesión se intentará responder: ¿Cómo formalizar el concepto de derivada e integral a partir de una curva?

Responder la pregunta ¿Qué es una curva? orienta el trabajo de esta sesión. No tanto por establecer una “simple” definición, pues, como ya se ha tratado en capítulos anteriores (al abordar la historia y epistemología del concepto), se requieren elementos elaborados tanto por su representación como desde aspectos analíticos y algebraicos (Anexo 6). Sin embargo, algo si parece evidente, y es el hecho de articular los conceptos de transición y razonamiento infinito en la formalización del concepto de curva en el plano. Es por esto que en esta sesión convergen los argumentos y cuestionamientos a la par con una formalización más refinada que posiblemente permitan afirmar que el concepto de curva subyace al concepto de derivada e integral o, por otra parte, la existencia de líneas rectas y líneas curvas hagan pensar que el concepto de límite y suma infinita no son necesarios.

La clase treinta en la cual se aborda el tema de polinomios de Taylor y Maclaurin que conllevan al desarrollo posterior de las series de potencias, hacen pertinente plantear cuestionamientos tales como: ¿Un punto es una curva? ¿Una línea recta es una curva? ¿Una curva debe ser continua en todos sus puntos? ¿Una sucesión de puntos generan una curva? ¿La función matemática en si misma ya es una curva o requiere de elementos discretos? ¿La derivada y la integral de una función pueden formalizarse sin hacer uso de elementos discretos?

A continuación, se presentan las preguntas asociadas a cada uno de los descriptores en los respectivos instrumentos, este proceso hace parte de la fase I y II del TEM que indaga por el conocimiento preliminar del estudiante como punto de partida dentro del modelo PK.

Tabla 6

Preguntas asociadas a los descriptores en cada uno de los instrumentos del TEM

Descriptor	Preguntas asociadas (P)		
	Instrumento 1 Cuestionario Inicial (CI)	**Instrumento 2 Entrevista (E)**	**Instrumento 3 Cuestionario Final (CF)**
D1-1	P4, P5, P6, P7	P2, P3, P4, P8, P17	P1, P7
D1-2	P1, P2, P3, P13	P1, P3, P4, P6, P8, P18, P21	P5, P9
D1-3	P2, P3, P6, P7, P8, P9, P10	P7, P9, P10, P11,P12, P13, P14, P15, P16	P2, P3, P4, P5, P6, P8, P9
D1-4	P1, P6, P10, P11, P12, P14, P15	P1, P5, P9, P19, P20	P8, P9
D2-1	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P12, P13, P14, P15	P1, P3, P5, P6, P8, P17, P18, P21	P1
D2-2	P5, P7, P9, P10, P11, P14, P15	P11, P12, P13	
D2-3	P7, P8, P9, P10, P11	P14, P15, P16, P19	P5, P8, P9
D2-4	P7, P9, P10	P12, P13, P19	
D3-1	P1, P3, P4, P5, P6, P11	P1, P3, P5, P17	P3, P7, P10

D3-2	P3, P4, P6, P14, P15	P6, P10, P17	P3, P6, P7
D3-3	P11	P9, P11, P18, P21	P4, P9,
D3-4	P14, P15	P7, P19, P20	P5
D4-1	P1, P2, P3, P12, P13, P14, P15	P1	P3, P4, P6, P7
D4-2	P11, P14, P15	P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17	
D4-3	P2, P3, P4, P5, P6, P13	P1, P2, P5, P6, P9, P17	P4, P7, P8
D4-4	P1, P7, P8, P9, P10, P11, P12	P7, P8, P10, P18, P19	P4, P5, P9, P10

8. Resultados

El curso de cálculo integral en el cual se desarrolló la investigación constaba de 23 estudiantes a los cuales se les aplicaron los instrumentos 1 (cuestionario inicial) y 3 (cuestionario final). Dado que el número de preguntas por cada cuestionario multiplicado por los estudiantes del curso arrojarían un aproximado de 575 respuestas de carácter cualitativo, se decidió tomar una muestra representativa del curso para tener en consideración sus respuestas y posterior análisis de resultados. Considerando la expresión para el cálculo de la muestra de una población finita, Sean:

n: tamaño de muestra buscado

N: tamaño de la población o universo

Z: parámetro del nivel de confianza

e: error de estimación máximo aceptado

p: probabilidad de ocurrencia del evento

q: probabilidad de que no ocurra el evento

$$n = \frac{N * Z^2 * p * q}{e^2 * N + Z^2 * p * q}$$

$N = 23\ ;\ Z = 80\%\ (puntuación 1.28)\ ;\ E = (20\%)\ ;\ P = 50\%\ ;\ Q = 50\%$

De donde: $n = 8$.

Es decir que, se toma un tamaño de muestra de 8 estudiantes considerando un nivel de confianza del 80% puesto que se aplicaron tales instrumentos de manera virtual, a través de zoom durante las sesiones de clase.

En el transcurso del TEM se aplicó la entrevista semiestructurada a 3 de los 8 estudiantes que habían sido considerados dentro de la muestra inicial y que de manera voluntaria y bajo condiciones de entera discrecionalidad accedieron a realizar la grabación. De esta manera se obtienen en total los resultados de 8 estudiantes para los cuestionarios inicial y final y 3 de ellos con la aplicación de la entrevista semiestructurada. Para la interpretación de los resultados (sección 8.6) se considerarán los 3 estudiantes a quienes se aplicaron los 3 instrumentos (CI, E, CF).

Dentro de las convenciones adquiridas para abreviar y poder denotar fácilmente y de manera práctica los instrumentos y resultados, se ha considerado que: cada estudiante se abrevia est. seguido de una letra mayúscula. Ejemplo: est. A, est. B, est. C, … Los estudiantes que se nombran con las letras A, B y C fueron los elegidos para la entrevista semiestructurada.

Como ya se mencionó en el capítulo 5, se diseñaron una serie de descriptores, los cuales se refinaron en el transcurso del trabajo de campo y se les asignó una nomenclatura para facilitar una sistematización propia que permitió clasificar de manera práctica cada estudiante dentro de los respectivos niveles del modelo PK. En el caso de la nomenclatura de las preguntas, fueron abreviadas con la letra P acompañada del número de la pregunta y le antecede las iniciales del instrumento (CI: cuestionario inicial, CF: cuestionario final, E: entrevista) en el que se aplica dicha pregunta. Así, por ejemplo: CIP2 hace referencia a la pregunta número dos del cuestionario inicial.

A partir de la implementación del CI, se obtuvieron resultados y apreciaciones interesantes que evidencian ciertas complejidades de comprensión frente a aspectos y conceptos geométricos indagados, que posteriormente llevan a discutir algunos aspectos y redefinir otros dentro del TEM.

8.1 Cuestionario inicial

CIP1. ¿Cuál es su definición de curva?

Estudiante	Respuesta
A	Una línea (real o imaginaria) que se aparta de la dirección recta sin formar ángulos.
B	Puntos no colineales que describen un cambio de variabilidad
C	Una sucesión de puntos dictada por una función desde un punto hasta un punto B o hasta el infinito en el espacio
D	La curva es una línea, real o imaginaria que se separa del sentido recto sin formar ángulos.
E	Una colección de puntos que definen parte de una circunferencia
F	Gráfico continuo de infinitos puntos en una trayectoria
G	Cualquier concepto no lineal geométricamente
H	Es una línea continua que varía su dirección

CIP2. ¿Un punto es una curva?

Estudiante	Respuesta	¿Por qué?
A	No	Un punto es un punto, y punto.
B	No	No existe un cambio de variabilidad en el
C	No	Para formar una curva se necesita más de un punto. Un punto es como la unidad elemental.
D	No	Porqué como lo dije en el primer punto, una curva es una línea.
E	No	Porque para formar una curva se requieren de varios puntos
F	Si	Porque un punto la curva básica
G	No	No, ya que una curva es la unión de puntos
H	No	considero que la sucesión del mismo cambiando su dirección si lo es, individualmente no

CIP3. ¿Una recta es una curva?

Estudiante	Respuesta	¿Por qué?
A	SI	Hay diferentes tipos de curvas.
B	No	Una recta es una línea que mantiene una dirección y sentido, mientras que la curva puede cambiar tanto de sentido como dirección
C	SI	Podría definirse que si en el espacio, por ser una sucesión de puntos
D	SI	Porque toda línea recta es una curva.
E	No	Porque la recta no tiene ninguna variación de ángulo entre sus puntos
F	SI	Porque corresponde a mi definición también
G	No	Gráficamente es imposible decir que una recta es una curva
H	No	a mi parecer una curva puede ser recta pero no en el sentido opuesto

CIP4. ¿Toda función representa una curva?

Estudiante	Respuesta	¿Por qué?
A	Si	Pues representa una línea recta o no.
B	No	Esta función puede ser una recta o curva, aunque en algunos casos una recta puede ser considerada una curva
C	Si	Pero desde que función derive a una sucesión de puntos en el espacio. Si es simplemente un punto no sería curva.

D	No	Porqué hay funciones que solo se pueden representar por tablas o por formulas, no se puede hacer curvas en todas las funciones. Como ejemplo esta la función delta de Dirac.
E	No	Porque también hay funciones que representas líneas rectas
F	Si	Porque la curva es la manera de representar una función
G	No	Existen otros tipos de funciones
H	No	depende de la continuidad de la función

CIP5. ¿Es posible afirmar que la siguiente expresión representa una curva?

$$y = \frac{x^2}{x}$$

Estudiante	Respuesta	¿Por qué?
A	Si	Se pueden obtener infinitas curvas.
B	No	Porque simplificando queda "Y" igual a "X" que es una recta
C	Si	Pero no exactamente, porque representa un punto al ser la función y=x. Aunque si se toman varios puntos derivados de esta función podría formarse una curva
D	Si	Porque representa la recta y=x
E	No	Porque luego esta se puede llevar a la forma de una ecuación de un solo grado, la cual representa una línea recta
F	Si	Porque e cada valor de x le corresponde un valor de y que se pueden representar mediante una curva
G	No	Es una recta
H	Si	Es una línea de puntos continuos, pero no varía su dirección

CIP6. ¿La siguiente expresión gráficamente puede representar una curva?

$$x^2 + y^2 = 0$$

Estudiante	Respuesta	¿Por qué?
A	Si	Es la ecuación canónica de la circunferencia en el origen.
B	No	Es un punto
C	Si	Por ser cuadrática
D	No	Es un punto en el plano.
E	No	
F	Si	Ya que puede representarse en un sistema de coordenadas por ejemplo donde las x sean imaginarios y los y reales
G	No	
H	No	

CIP7. Dado un segmento de recta: ¿entre dos puntos existen infinitos puntos?

Estudiante	Respuesta
A	Si
B	Si

C	Si
D	Si
E	Si
F	Si
G	Si
H	Si

CIP8. ¿Existen segmentos que se pueden dividir infinitamente?

Estudiante	Respuesta	Explique
A	Sí	Al hacer divisiones sucesivas se pueden ir aproximando al cero, como en cálculo diferencial.
B	Sí	Ya que existen infinidad de puntos y segmentos entre ellos, solo en algunos casos
C	Sí	Por qué una recta está constituida por infinitos puntos que se podrían dividir hasta la mínima expresión de 2 puntos para formar una recta.
D	Sí	Una recta se puede representar con un punto inicial más t veces un vector director, dicho parámetro t puede tomar INFINITOS número reales entre 0 y 1, por ende si, hay infinitos puntos.
E	Sí	Considero que todos los segmentos se pueden dividir en infinitos puntos por más pequeños que parezca debido a que siempre abra una magnitud más pequeña que otra y así hasta considerarse como infinitas divisiones
F	Sí	Todo segmento comprendido entre dos puntos diferentes se puede dividir infinitamente
G	Sí	Ya que se puede partir en partes iguales las veces que lo desee
H	Sí	se pueden dividir en puntos

CIP9. Dados dos números a y b, es posible afirmar que: ¿existen infinitos números comprendidos entre ellos?

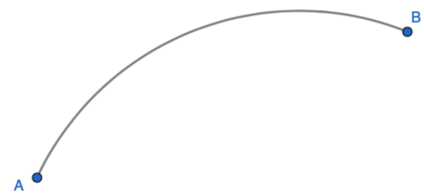
Estudiante	Respuesta
A	Si
B	Si
C	Si
D	Si
E	Si
F	Si
G	Si
H	Si

CIP10. ¿Una suma infinita puede arrojar un resultado finito? De acuerdo a la anterior respuesta brinde un ejemplo.

Estudiante	Respuesta	Ejemplos
A	Sí	Sumatorias divergentes, como en integral.
B	No	(Más infinito) más (más infinito) es igual a (más infinito)
C	No	Se logra un aproximado, pero porque uno es quien elige que tantos decimales necesita. Pero sigue siendo infinitos

D	Sí	Las series geométricas con |r|<1 siendo r la razón.
E	Sí	A pesar de que un número sea muy grande sumado con otro puede dar una cantidad finita
F	Sí	Una serie convergente por ejemplo 1/x2 con x=1,2,3.....
G	Sí	1+1/2+1/4..
H	Sí	1/inf + 1/inf

CIP11. ¿Qué procedimientos propondría para obtener la longitud de un arco AB cualquiera?



Estudiante	Respuesta
A	La fórmula que nos ofrece la geometría euclidiana.
B	
C	Buscar otras formas geométricas que nos ayuden a encontrar el área.
D	Una integral
E	Verlo como si fuese una circunferencia completa para así determinar su radio y el ángulo que se encuentra entre estos puntos A y B
F	Trazo una cuerda entre los extremos, hallo su punto medio y trazo una perpendicular que corte el arco por la mitad, luego trazo una cuerda de cada extremo al centro del arco y repito este procedimiento varias veces y luego sumo todas las cuerdas resultantes
G	Δs=√Δa^2+Δb^2
H	

CIP12. ¿Existen diferencias conceptuales entre las siguientes dos notaciones? Explique.

$$\frac{dy}{dx}\,;\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Estudiante	Respuesta
A	Ambas representan el mismo concepto, de cambio en la ordenada con respecto a la abscisa.
B	Si, una se usa para derivadas y la otra conceptualiza diferencial
C	No, ambos describen la variación
D	Si, dy/dx se puede interpretar como el cambio total de y con respecto a x los deltas solo representan el cambio relativo de y con respecto a x dy/dx es la pendiente de la recta tangente.
E	Si, uno representa la derivada de y con respecto a x y la segunda representa la división de dos variaciones, lo cual no es igual
F	No, para mi ambos representan variaciones de una variable en relación a la variación de otra variable
G	Una es derivada, y la otra es cambio
H	NS

CIP13. La siguiente función en el intervalo [-1,1] es:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

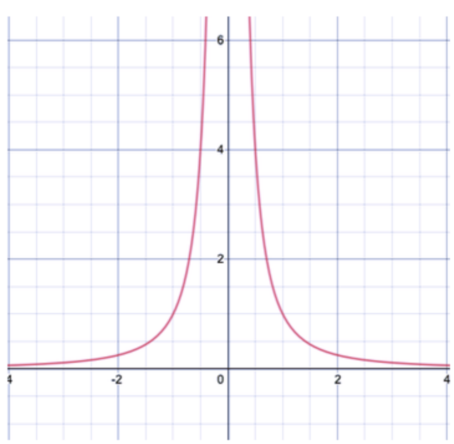
Estudiante	Continua	Derivable	Integrable
A	No	Si	Si
B	Si	Si	Si
C	No	No	Si
D	Si	No	No
E	No	No	No
F	No	Si	No
G	Si	Si	No
H	Si	Si	Si

CIP14. ¿Observa algún error en la integral siguiente?

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2} dx = 0$$

Estudiante	Respuesta	Justifique
A	Si	División por cero. No def.
B	No	El valor de la integral es cero
C	Si	Esta igualada a cero
D	Si	La integral no se puede hacer porque la función no es integrable, tiene discontinuidad en $\times$=0
E	Si	
F	Si	Creo que da -1/12
G	No	No puede haber es e-2
H	No	

CIP15. ¿Existe alguna restricción para hallar el área bajo la curva de la función dada por la siguiente gráfica?



Estudiante	Respuesta	Justifique
A	Sí	Son Asíntotas. No está definido valores en x e y.
B	Sí	La asíntota
C	Sí	La curva tiende hacia el infinito con reflejado en el eje y
D	Sí	Para hacer esa integral toca resolverla planteando una integral impropia.
E	Sí	Pienso que puede existir un inconveniente por el espacio infinito en la mitad
F	No	La suma de las áreas es convergente tanto para las asíntotas vertical y horizontal, es decir, cuando x tiende a cero las áreas de la base de los rectángulos tiende a cero y la altura a infinito y cuando x tiende a infinito (la base) la altura y es la que tiende a cero.
G	Sí	No es continúa
H	No	

8.2 Transcripción de entrevistas

Se usará la abreviatura **E** para indicar el entrevistador y **E-A, E-B** y **E-C** para hacer referencia a cada uno de los entrevistados.

8.2.1 Entrevistado A

1. **E:** ¿Qué concepción (noción, idea, definición) tiene sobre lo que es una curva en matemáticas?

E-A: La noción de una curva en Matemáticas es que puede ser una sucesión de puntos que pueden cambiar de dirección en cualquier momento.

2. **E:** Mencione algunas curvas que conoce o que ha estudiado.

E-A: Curvas cerradas o abiertas,

E: Por ejemplo, ¿Cuáles?:

E-A: La parábola y=x^2 que es una curva abierta

3. **E:** ¿Una circunferencia es una curva?

E-A: Si

4. **E:** ¿Un punto es una circunferencia?

E-A: Un punto para mí no es una circunferencia por que la definición de punto no tiene definición ni en la geometría Euclidiana, si usted va al diccionario de la rae no tiene definición. Como diría una profesora Un punto es un punto y punto.

5. **E:** Una circunferencia con centro en el origen viene dada por la $x^2 + y^2 = r^2$. ¿Si el radio es cero, es decir $x^2 + y^2 = 0$ sigue siendo una circunferencia?

E-A: De acuerdo con lo que vi en geometría vectorial, no es una circunferencia por que la definición dice que $x^2 + y^2 = 1$ El radio debe ser mayor que cero para ser circunferencia.

6. **E:** ¿Una recta es una curva?

E-A: Si claro, es la definición más empírica que tenemos de curva, los antiguos definían la curva como una recta que se puede asimilar con el plano cartesiano.

E: ¿Entonces cuándo se establece la diferencia entre recta y curva? a partir de qué? ¿No sería suficiente con decir que las líneas son curvas o que las líneas son rectas y ya?

E-A: Las líneas pueden ser rectas o curvas, cuando la recta cambia de dirección es curva, ya no está en el plano de la línea recta en X. Si cambia de dirección, si no es continua, ya se puede decir que hay una curva en esa recta.

E: ¿O sea que para hablar de una curva necesito estar constantemente cambiando de dirección?

E-A: no necesariamente, si cambio de dirección una sola vez ya es una curva

7. **E:** acá te voy a mostrar una animación en geogebra…

Observe la siguiente animación: https://www.geogebra.org/m/yqcPCnXg

E: Si el número de lados del polígono aumenta, ¿Qué ocurre con su longitud?

¿El perímetro del polígono puede ser igual a la longitud de la circunferencia?

E-A: Según la geometría Euclidiana, nunca se va a dar eso. Según lo que vimos en cálculo es según lo que proponía Riemann, que para el área del círculo ps teníamos que tomar un valor al infinito para llegar al valor aproximado de esa área.

E: Voy a ir haciendo zoom en esta región, se aumentó a 20 lados ese polígono. ¿Cuando le pregunte si una recta era una curva (usted dijo que sí) entonces no existe posibilidad de que esta recta (figura) llegue a ser igual a la de la circunferencia?

E-A: Tendríamos que tomar ya elementos del cálculo integral para poder acercarnos al valor del área.

E: ¿Qué pasa con el perímetro del polígono con respecto al de la circunferencia?

E-A: Omito la respuesta.

8. **E:** De la geometría Euclidiana se sabe que “dos puntos determinan una línea recta”.

   ¿Cuántos puntos considera que son necesarios para determinar una curva?

https://www.geogebra.org/m/nkvW9Y9h

E-A: Para mis tres puntos que no sean coincidentes en la misma línea recta, perdón, que no sean colineales.

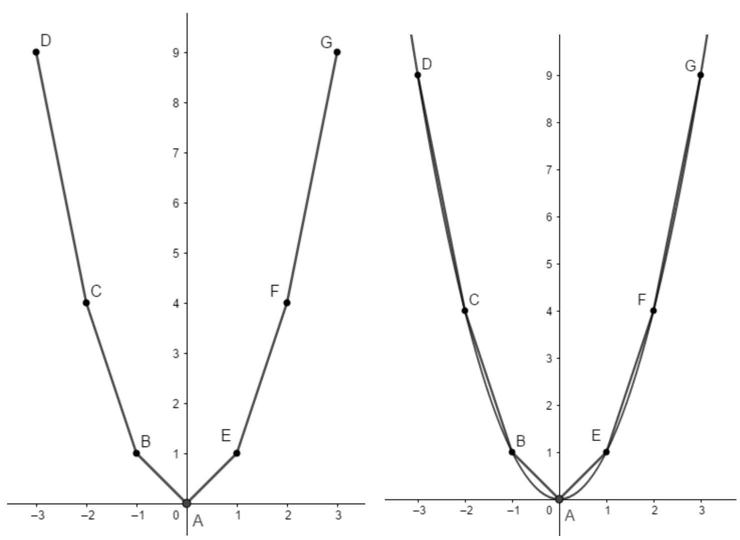
E: Aquí tengo un ejemplo de curva: la parábola (ahorita mencionaste que era una curva)

E-A: Curva abierta, sí.

9. **E:** A medida que yo voy acercando esa línea roja, Punto Q y P (animación: https://www.geogebra.org/m/nkvW9Y9h) estamos hablando de lo que es la tangente comparada con la secante: ¿Es posible construir una curva perfecta como la de la línea azul?

E-A: Se puede en el infinito a llegar a la aproximación de esa curva.

E: En la figura del lado izquierdo se han ubicado puntos de una parábola, dados por la función f(x) = x^2. Y en el lado derecho está el trazo perfecto de lo que sería la curva de la parábola.



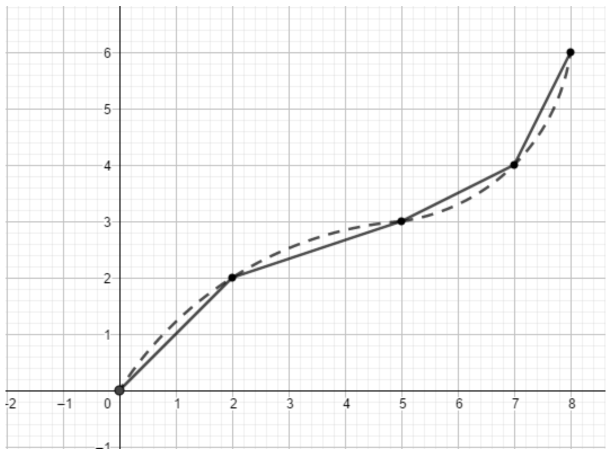
10. ¿En qué momento pasamos en matemáticas de unir puntos con segmentos a un trazo como el de la figura derecha?

E-A: En lo que estamos viendo ahora con el tema de series de Taylor y Maclaurin.

E: ¿O sea que es necesario para hablar de una curva como la de la figura (derecha) para trabajar el concepto de infinito?

E-A: Si, claro. Para mí sí. También usando mínimos cuadrados.

11. E: ¿Cómo podría hacer para calcular la longitud exacta de una curva como la de la figura?



12. E: ¿Un segmento puede dividirse infinitas veces?

E-A: Si.

13. E: ¿Existen segmentos infinitos?

E-A: Si

14. E: ¿Un segmento puede generar una suma infinita?

E-A: Si

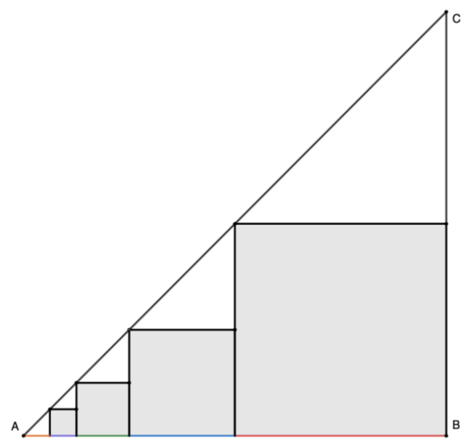
15. E: ¿Una suma infinita de segmentos puede arrojar un resultado finito?

E-A: Si

16. E: ¿Una superficie puede dividirse infinitas veces?

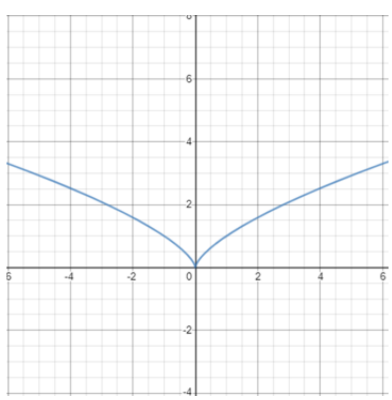
E-A: Si, si consideramos el infinito sí.

E: ¿Se tiene el segmento AC que se divide en infinitas partes, solo en el infinito puede calcularse el área del triángulo?

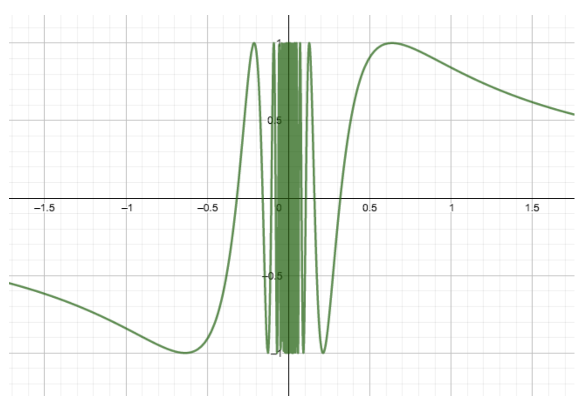


E-A: Si.

17. E: De acuerdo con lo visto en el curso y discutido aquí, ¿Las funciones siguientes representan curvas?



$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

E-A: sí

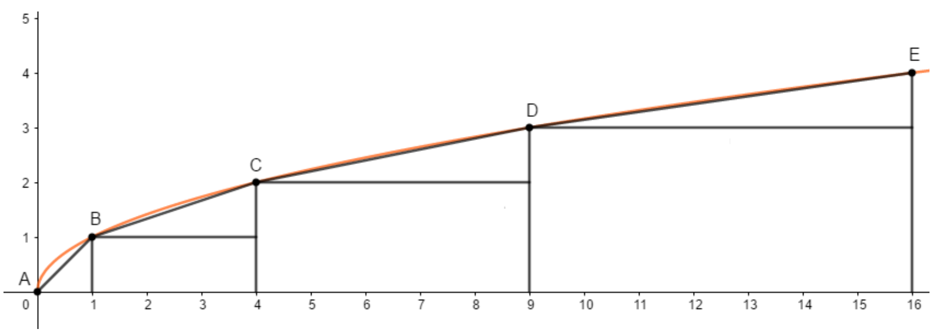
18. E: ¿Podría afirmarse de acuerdo con lo anterior que una curva puede ser discontinua?

E-A: Una curva puede ser discontinua,

E: Luego entonces la función de la figura $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$ sí es curva?

E-A: ¡Ahhh! No, no, entonces no es curva, si hay discontinuidad entonces no hay curva. porque si al trazarla con el lápiz sin levantarlo tiene que ser continua.

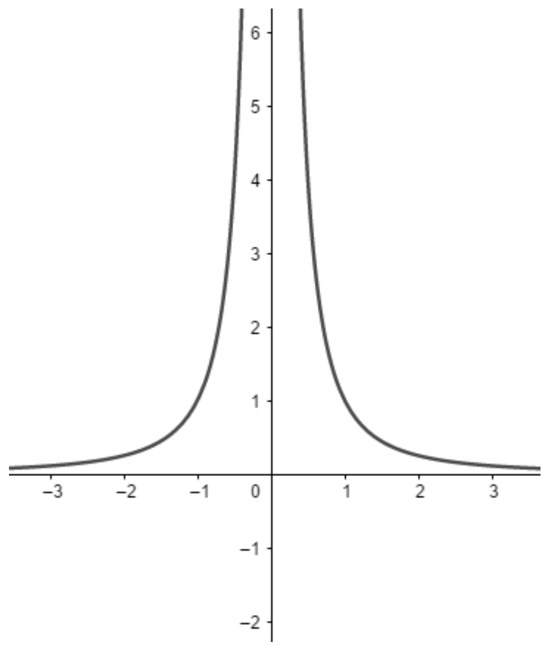
19. E: ¿Qué se necesita para hallar el área bajo esa curva?



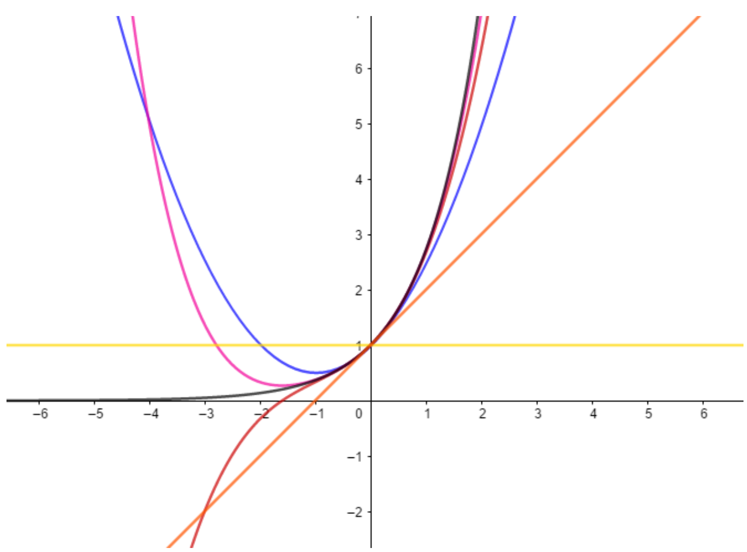
E-A: Aplicar la suma de Riemann. Tendría que sumar infinitos rectángulos para hallar el área bajo esa curva.

20. E: Hay algún error en el procedimiento siguiente (la gráfica de la función está ilustrada)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix} = -\frac{1}{x}\Bigg|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$



E-A: El error es que el área debe ser positiva.



21. E: ¿Qué se necesita para aproximar una curva?

E-A: Puede ser aplicando las series de Taylor y Maclaurin

E: ¿En qué consiste ese tema?

E-A: Consiste en dada una función trascendental y usted le va dando derivadas sucesivas y la va dividiendo por el término que está analizando y lo divide por el factorial de ese término.

E: ¿Cuántas derivadas puede hacer?

E-A: Puede hacer infinitas derivadas para poder llegar allá.

Con 5 derivadas la aproxima, pero no con un término real al área de esa curva, tendría que tener un n mayor.

E: ¿Tendrían que ser infinitos?

E-A: Si.

8.2.2 Entrevistado B

1. **E:** ¿Qué concepción (noción, idea, definición) tiene sobre lo que es una curva en matemáticas?

E-B: Curva: línea continua de puntos que cambian de dirección

2. **E:** Mencione algunas curvas que conoce o que ha estudiado.

E-B: Algunas curvas: circunferencia, elipses, hipérbolas, parábolas, …

3. **E:** ¿Una circunferencia es una curva?

E-B: para ser curva tiene que ser línea cerrada. No, ejemplo la parábola es una curva y no es cerrada.

4. **E:** ¿Un punto es una circunferencia?

E-B: No. De acuerdo con la forma de la expresión es una circunferencia, pero si el radio es cero no sería circunferencia. Un punto no sería una curva.

5. **E:** Una circunferencia con centro en el origen viene dada por la expresión $x^2 + y^2 = r^2$.

   Si el radio es cero, es decir $x^2 + y^2 = 0$ sigue siendo una circunferencia?

E-B: De acuerdo a la forma de la expresión es una circunferencia, pero el radio de la expresión es cero, luego sería un punto.

6. **E:** ¿Una recta es una curva?

E-B: Línea sucesiva de puntos y yo lo definí como curva si cambia de dirección.

En la curva los puntos deben cambiar de dirección en algún momento.

7. **E:** acá te voy a mostrar una animación en geogebra.

Observe la siguiente animación: https://www.geogebra.org/m/yqcPCnXg

E: Si el número de lados del polígono aumenta, ¿Qué ocurre con su longitud?

¿El perímetro del polígono puede ser igual a la longitud de la circunferencia? Será que en algún momento, la longitud del polígono si llega a ser igual a la longitud de la circunferencia?

E-B: No creo, sigue siendo polígono y los lados siguen siendo líneas continuas, no con cambio de dirección. Así haya muchos lados para asemejar la circunferencia siempre habrá espacios que nos quedan sobrando que no se asemejan. Para eso utilizamos lo que hemos visto en cálculo.

E: ¿Así sea en el infinito?

E-B: Si, así sea en el infinito, así tenga infinitos lados no va a ser igual a la circunferencia.

8. **E:** De la geometría Euclidiana se sabe que "dos puntos determinan una línea recta". ¿Cuántos puntos considera que son necesarios para determinar una curva?

https://www.geogebra.org/m/nkvW9Y9h

E-B: Yo creo que desde que de pronto entre uno y otro, por ejemplo, entre el segundo y el tercero cambie la dirección de uno de los dos ya cambia la dirección. Con que tres puntos no todos colineales ya hay un cambio de dirección.

9. **E:** Aquí se ilustra una recta tangente y secante a una curva.

Tenemos una curva (parábola) y una línea roja que sería la secante, a medida que se acerca q a p se va convirtiendo en tangente. ¿Cómo se construye una parábola (una curva de esas)?

E-B: Hay que hallar los puntos principales de este tipo de curva, foco, vértice, de acuerdo a lo que nos den (ecuación canónica,) y ya ubicando esos puntos construiríamos la curva.

10. **E:** Para graficarla ubico puntos, dándole valores a la función y ubicando puntos en el plano. En cálculo ya tú trazas la línea que está aquí, pero ¿en qué momento pasas de este tipo de trazo a este otro?

E-B: No sé.

11. **Yo:** ¿Hay una curva punteada y unos segmentos, en cálculo vimos la longitud de arco (longitud de una porción de curva) Para determinar la medida de la curva que se necesita?

E-B: No recuerdo

12. **E:** ¿Un segmento puede dividirse infinitas veces?

E-B: si

13. E: ¿Existen segmentos infinitos?

E-B: si, yo creo que si

14. E: ¿Un segmento puede generar una suma infinita?

E-B: Si

15. E: ¿Una suma infinita de segmentos puede arrojar un resultado finito?

E-B: Es como contradictorio profe, me confundo.

No sería una suma infinita de segmentos, nosotros lo dividimos en los segmentos que queramos, entonces no sería una suma infinita sino una suma finita.

E: ¿Cuándo llega a ser igual el área del triángulo a la suma de esas áreas?

E-B: Muchísimos, ahí si serían infinitos.

E-B: De acuerdo a eso sí, una suma infinita de segmentos puede arrojar un resultado finito.

16. E: ¿Una superficie puede dividirse infinitas veces?

E-B: Si.

17. E: Aquí se presentan dos gráficas: ¿Esta función, así como está (izquierda) representa una curva?

E-B: Así como está no. Pero, después de esta charla me entran dudas, cómo definir una curva y cómo construir una curva. Pues uno puede construir una curva como lo vimos ahorita, segmentos rectilíneos, yo puedo formar una curva, pero me queda la duda es yo como la formo y hacer segmentos, pero no en qué momento formarla.

E: Acabas de introyectar lo que se llama procesos de razonamiento infinitos, un salto que se da cuando se entra a discutir el infinito, esas transiciones entre discreto y continuo, en qué momento esos puntos me forman un segmento y en qué momento una curva.

E-B: Yo aquí ya pensando en lo que me ha compartido usted, este concepto lo vemos desde que empezamos a estudiar cálculo, pero realmente cuando entra a estudiar en detalle el proceso conceptual de curva, me doy cuenta de que realmente no es tan sencillo y que se deben tener elementos conceptuales previos

E: ¿La gráfica de la izquierda es función continua?

E-B: si, es continua

E: ¿Es derivable?

E-B: Si es derivable

E: La gráfica de la derecha, tiene una discontinuidad en x=0, ¿podría decir que es una curva?

E-B: A pesar de que tiene un espacio pequeño entre el cambio de dirección de los puntos si podría ser curva.

18. E: ¿Una curva podría ser discontinua?

E-B: me enredé, porque ahorita dije que no pero puedo decir que sí.

E-B: Profe la verdad si me doy cuenta que este concepto que entre comillas es sencillo, no es tan sencillo y me doy cuenta que hay muchos vacíos.

19. E: Para aproximar el área bajo esta línea construí unos rectángulos, pero no fueron suficientes, ¿cuántos se necesita?

E-B: debo tener infinitos rectángulos

20. E: ¿Observa algún error dentro de esta integral con respecto a la gráfica?

E-B: permítame yo miro bien, profe, si profe, está bien el procedimiento, pero la gráfica no me satisface (debería ser de [-1,1]) creo que está bien.

21. E: ¿Qué se necesita para aproximar una curva?

E: Se está aproximando la función e^x. ¿Mediante polinomios de Taylor, cuantas (funciones) derivadas se necesitan para aproximar?

E-B: De acuerdo a lo visto en clase debe ser n veces derivable pero la suma debe ser un número finito.

8.2.3 Entrevistado C

1. **E:** ¿Qué concepción (noción, idea, definición) tiene sobre lo que es una curva en matemáticas?

E-C: Según lo que hemos estudiado es una sucesión de puntos en el espacio que va definida por una función

2. **E:** Mencione algunas curvas que conoce o que ha estudiado.

E-C: cuadráticas, hipérbola, parábola.

3. **E:** ¿Una circunferencia es una curva?

E-C: Si, yo creo que si está dentro de lo que es una curva

4. **E:** ¿Un punto es una circunferencia?

E-C: No exactamente, tiene que haber una sucesión de puntos para que sea una circunferencia

5. **E:** Una circunferencia con centro en el origen viene dada por la expresión $x^2 + y^2 = r^2$. Si el radio es cero, es decir $x^2 + y^2 = 0$ sigue siendo una circunferencia?

E-C: No profe, sin un radio como sería una circunferencia

6. **E:** ¿Una recta es una curva?

E-C: Podría ser, una recta no está dada por una función precisamente.

7. **E:** Si el número de lados del polígono aumenta, ¿Qué ocurre con su longitud?

¿El perímetro del polígono puede ser igual a la longitud de la circunferencia?

E-C: Yo creería que nunca los lados llegan a ser la misma curva, se aproxima, pero no llega a ser.

8. **E:** De la geometría Euclidiana se sabe que "dos puntos determinan una línea recta". ¿Cuántos puntos considera que son necesarios para determinar una curva?

E-C: Una curva la determinan dos puntos. Si uno lo mira de manera abstracta con dos puntos, pero si es de forma ortodoxa ps dos puntos tu dirías que es solamente una recta.

9. **E:** A medida que yo voy acercando esa línea roja, Punto Q y P (animación: https://www.geogebra.org/m/nkvW9Y9h) estamos hablando de lo que es la tangente comparada con la secante: ¿Es posible construir una curva perfecta como la de la línea azul?

E-C: Los puntos donde los evalúo forman parte de la curva que es la función de la parábola, si hubiese hecho más puntos obtendría la forma de la parábola

E: que se necesita para llegar a ese trazo (figura derecha)

E-C: Yo creería más puntos, aunque sería una aproximación, utilizando puntos no

10. **E:** ¿En qué momento pasamos en matemáticas de unir puntos con segmentos a un trazo como el de la figura derecha?

E-C: ah no profe si, si uno evalúa la función

11. **E:** ¿Cómo podría hacer para calcular la longitud exacta de una curva como la de la figura?

E-C: Profe, haciendo la suma de las áreas bajo la curva

12. **E:** ¿Un segmento puede dividirse infinitas veces?

E-C: si

13. **E:** ¿Existen segmentos infinitos?

E-C: Es ambiguo, no lo sé profe

14. E: un segmento podría generar una suma infinita

Si, por sumatoria

15. E: ¿Una suma infinita de segmentos puede arrojar resultados finitos?

E-C: Es parecido a lo que vemos con limites, cuando uno utiliza la sumatoria llega a resultados finitos, aunque la sumatoria sea infinita.

16. E: ¿Una superficie puede dividirse infinitas veces?

E-C: si

E: tenemos el triángulo ABC… ¿Cuántos rectángulos se necesitan para aproximar el área del triángulo?

E-C: infinitos

E: ¿Cuál tiene más puntos?

E-C: AC tiene más puntos

17. E: La función de la izquierda representa una curva

E-C: si

E: En x=0 se presenta un pico

¿La función es diferenciable?

E-C: no, es discontinua

E: sen(1/x)

E-C: El seno es un movimiento armónico, en algún punto pasa por cero luego si es una curva

18. E: ¿Una curva puede ser continua?

E-C: si, yo diría que sí.

19. E: ¿Qué se necesita para hallar el área bajo esa curva?

E-C: Si, entre más rectángulos más se aproxima la curva

20. E: Hay algún error en el procedimiento siguiente (la gráfica de la función está ilustrada)

E-C: En esa parte no sería que las curvas nunca llegan a tocar los ejes, el procedimiento de la integral esta malo, entre [-1,1] la región no llega a tocar por la asíntota, luego la región no se puede integrar. Entre más polinomios se tengan más se acerca a la forma de la función, pero yo creo que debe ser infinito.

8.3 Cuestionario final

P1. ¿Un punto es una curva?

Estudiante	Respuesta
A	No
B	No
C	No
D	No
E	No
F	No
G	No
H	No

P2. ¿Cuántos puntos son necesarios para trazar una curva?

Estudiante	Respuesta
A	Tres
B	Dos
C	Tres
D	Tres
E	Más de tres
F	Más de tres
G	Más de tres
H	Más de tres

P3. ¿Toda función es una curva?

Estudiante	Respuesta
A	Si
B	No
C	No
D	No
E	No
F	No
G	No
H	No

P4. ¿Toda curva es continua?

Estudiante	Respuesta
A	No
B	Si
C	No
D	Si
E	Si
F	No
G	Si
H	No

P5. Toda curva es integrable?

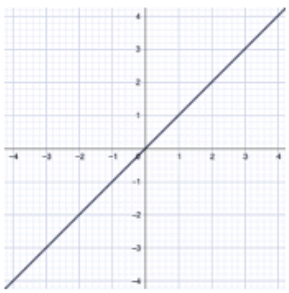
Estudiante	Respuesta	Justifique
A	Si	Por fórmula
B	Si	por ser continua
C	No	Por qué se debe analizar cada ejercicio como independiente y cada uno tiene su forma de resolverlo
D	Si	Porque áreas de figuras conocidas poder realizar una aproximación al área bajo esa curva
E	Si	porque toda función continua en un intervalo es integrable en dicho intervalo
F	Si	
G	Si	Es integrable puesto que es una curva es la representación de una función continua.
H	No	Debe cumplir con las condiciones de integrar, como la continuidad de un intervalo

P6. ¿Si una función es continua entonces tiene que ser curva?

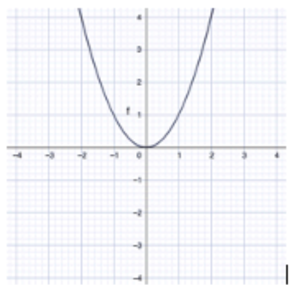
Estudiante	**Respuesta**
A	No
B	No
C	Si
D	Si
E	No
F	No
G	No
H	No

P7. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una curva?

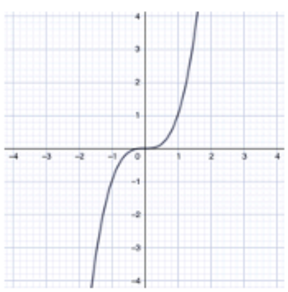
A



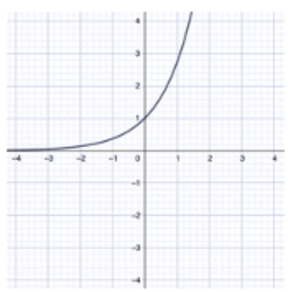
B



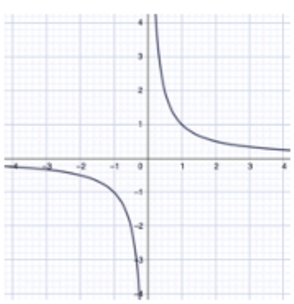
C



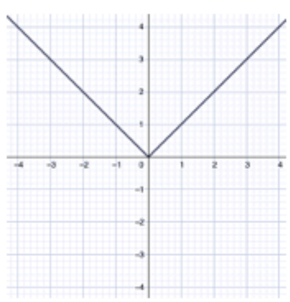
D



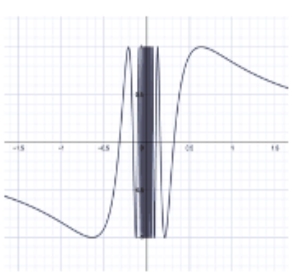
E



F



G



H

Estudiante	A	B	C	D	E	F	G	H
A	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva
B	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	Es curva	No es curva
C	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	No es una curva	No es curva
D	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	No es curva	Es curva	No es curva
E	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	Es curva	Es curva; No es curva
F	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	Es curva	No es curva
G	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	No es curva	Es curva	No es curva
H	No es curva	Es curva	Es curva	Es curva	Es curva	No es curva	Es curva	Es curva; No es curva

P8. La derivada de una función se puede entender analíticamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (en el plano cartesiano). ¿Con base en lo anterior, podría afirmarse que la derivada de una función solo se aplica a curvas?

Estudiante	Respuesta	Justifique
A	No	puede ser un punto
B	No	no sé por que
C	Si	
D	Si	Si porque para exista esa tangente debe de tocar sobre y solo en un punto a la sucesión de puntos en el espacio, más de tres para ser curva
E	No	Porque la derivada en sí representa una relación de cambio
F	Si	no se puede derivar funciones en puntas
G	No	También puede aplicarse a rectas, dado que estás también tienen una pendiente en el punto analizado.
H	Si	ya que se trata de una lineal tangente a la función, de otro modo seria paralelismo o perpendicularidad

P9. ¿Una suma infinita de segmentos puede generar una curva?

Estudiante	Respuesta	Justifique
A	Si	existen funciones de sumas parciales con las que se puede obtener
B	Si	creo que si hay cambio de dirección
C	Si	
D	Si	Mayor cantidad de segmentos(pueden ser infinitos) toquen la curva en un punto, se da una mejor aproximación al área bajo esa curva
E	Si	Porque si aproximo el tamaño de los segmentos a cero tiende a ser la unión de puntos formando una curva
F	Si	.
G	Si	Al tener infinitos segmentos estos se convierten en puntos que le dan la forma a la curva deseada.
H	Si	ya que la constitución de la curva está dada por puntos infinitos que pueden ser segmentados, sacando una aproximación de dicha curva

P10. En una escala de 1 a 5 indique la concordancia (que tan acertada es) de cada definición con respecto a lo que es una curva según sus conocimientos y los adquiridos en el curso (siendo 1 la menor concordancia y 5 la mayor concordancia):

a: Es una línea continua que tiene longitud y no tiene anchura

b: Es una sucesión de puntos que cambian constantemente de dirección, es decir, que no es una recta

c : Toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito

d : Es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos

e: El verdadero carácter de una variedad unidimensional (Curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie)

f: Es un continuo sin puntos interiores

g: Las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas

Estudiante	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**
A	5	4	4	4	4	4	4
B	3	5	5	4	4	4	4
C	1;2	3	3	2	3	1	2
D	4	3	4	2	4	2	4
E	2	4	2	1	3	1	1
F	1	2	3	3	4	3	3
G	4	5	2	3	2	1	4
H	4	4;5	3	2	5	3	3

8.4 Unidades de análisis y observación

Se adoptó para las unidades de análisis (UA), la definición de Picón y Melian (2014):

> Una estructura categórica a partir de la cual podemos responder a las preguntas formuladas a un problema práctico así como a las preguntas de investigación. En ella

se conjuga el material empírico asociado al problema y un cuerpo teórico a través del cual se llevan a cabo inferencias con mayor coherencia y consistencia (p. 103).

Por su parte, las unidades de observación (UO) que se consideran en esta investigación son los referentes empíricos que se utilizan para obtener los datos que necesita la UA. En ese sentido, la UO está orientada por la construcción que se realizó de la unidad de análisis y sus variables. (Azcona et. al, 2013, p. 70).

De este modo, y conocidos previamente y en detalle el problema de investigación, la pregunta de investigación y los objetivos, se establece como UA la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de curva y como UO el proceso de comprensión que tienen dichos estudiantes. Como consecuencia, se establecen cuatro categorías de preguntas y un enunciado por cada una de ellas para de esta manera asociar las variables con respecto a las preguntas y los descriptores (Ver Tabla 5).

Tabla 7

Categorías, enunciados y variables de la UA y UO

Categoría de Preguntas (CP)	Enunciados por categoría (EC)	Variables (V)	Descriptores asociados con las categorías de análisis
CP1 De qué maneras representa una curva?	**EC1** Representaciones de una curva	**V1** Capacidad de representación del estudiante	**D1-1, D2-1, D3-1, D4-1**
CP2 Cómo define una curva?	**EC2** Argumentos asociados al concepto de curva	**V2** Capacidad de argumentación del estudiante	**D1-2, D2-2, D3-2, D4-2**
CP3 ¿Cómo relaciona los conceptos, expresiones algebraicas y las representaciones a partir de transiciones entre lo discreto y lo continuo?	**EC3** Relaciones de conceptos y representaciones entre lo continuo y discreto	**V3** Capacidad de interpretación del estudiante **V4**	**D1-3, D2-3, D3-3, D4-3** **D1-4, D2-4, D3-4, D4-4**

	Capacidad de comunicación verbal del estudiante

Las categorías, enunciados y variables de las unidades de análisis se articulan con base en los cuestionarios y entrevista de tal forma que se integran al TEM y el modelo PK (ya previamente articulados estos dos últimos)

Los resultados obtenidos de los tres instrumentos fueron sistematizados y analizados a través del software MAXQDA, permitiendo de esta manera, clasificar y categorizar la información en coherencia con los descriptores de la teoría PK y las variables de la UA.

8.5 Software MAXQDA en el análisis cualitativo de los resultados

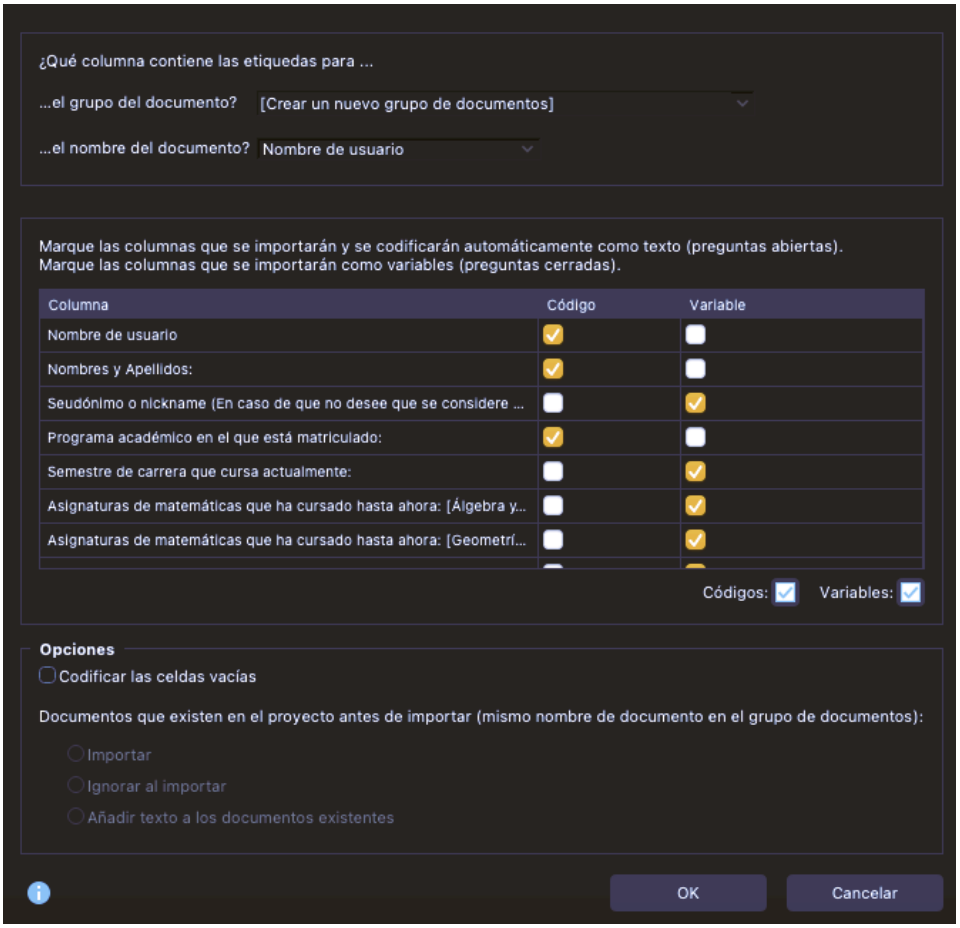
MAXQDA (2021) es un paquete de software para el análisis de datos cualitativos e investigación de métodos mixtos, en el cual se puede analizar todo tipo de datos: textos, imágenes, audios o archivos de video, páginas web, tuits, discursos, grupos focales, encuestas, entre otros.

En general, la gran mayoría de los métodos de investigación cualitativa utilizan categorías. Estas categorías pueden ser creadas con base en los datos de resultados de investigaciones anteriores o en teorías, como ha sido el caso de la presente investigación a la luz de la teoría PK.

Dentro de MAXQDA las categorías son denominadas códigos y estos pueden incluso funcionar como códigos analíticos. Los códigos analíticos son el resultado de un proceso analítico que va más allá del simple acto de determinar un tema (MAXQDA, 2021, p. 4).

Figura 23

Asignación de códigos y variables en MAXQDA



Los estudiantes plantearon respuestas a las preguntas (palabras, párrafos, figuras, etc.) de cada uno de los instrumentos: cuestionario inicial (CI), entrevista semiestructurada (E), cuestionario final (CF), por lo cual fue necesario considerar para el análisis y sistematización de las mismas, una selección de palabras, frases u oraciones que están en relación con las categorías y variables de la unidad de análisis. En tal sentido, se codificaron las preguntas estableciendo una serie de códigos. La codificación consistió en seleccionar parte de un dato como por ejemplo una palabra, frase o párrafo y asignarle un código. En el contexto de esta investigación sobre la comprensión del concepto de curva, el código fue más que un simple término utilizado para nombrar aspectos fundamentales en las respuestas, dado que dichos códigos incluyeron en algunos casos una cadena de caracteres.

A continuación (Figura 24) se muestran lo que en MAXQDA se denomina documentos y que corresponden a los tres instrumentos de recolección de información aplicados en el TEM y los sistemas de códigos:

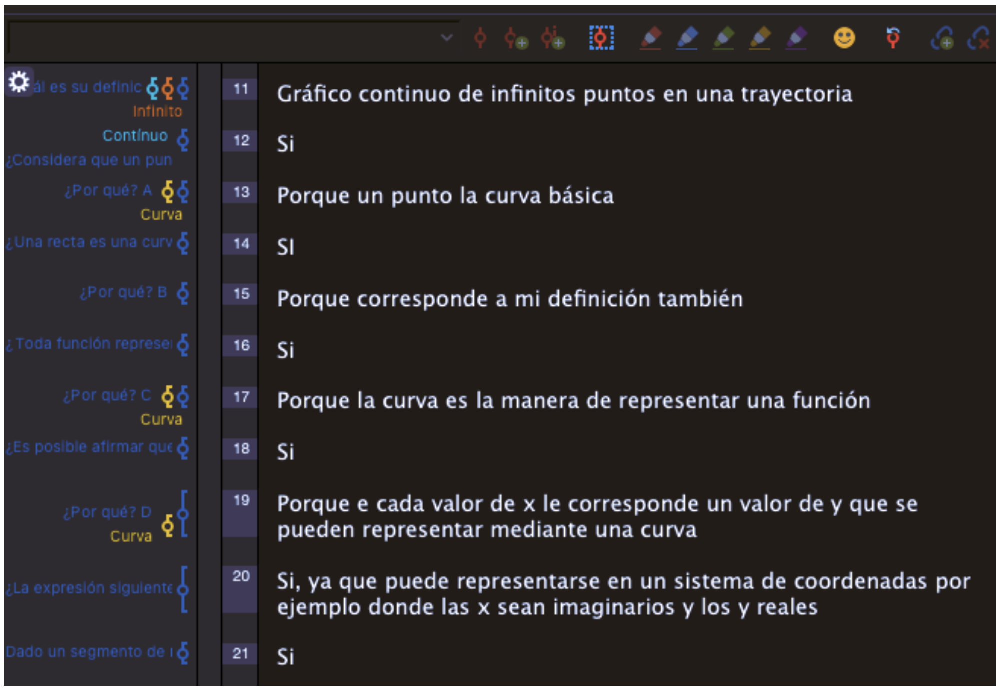
Figura 24

Sistema de códigos en MAXQDA

Dentro de MAXQDA se creó un sistema de códigos con un color específico (Figura 24). Cada código encierra las palabras, frases o párrafos alusivos a este código y que son parte de las respuestas de los estudiantes (Figura 25).

Figura 25

Proceso de asignación de códigos y colores al analizar las respuestas de cada estudiante en MAXQDA

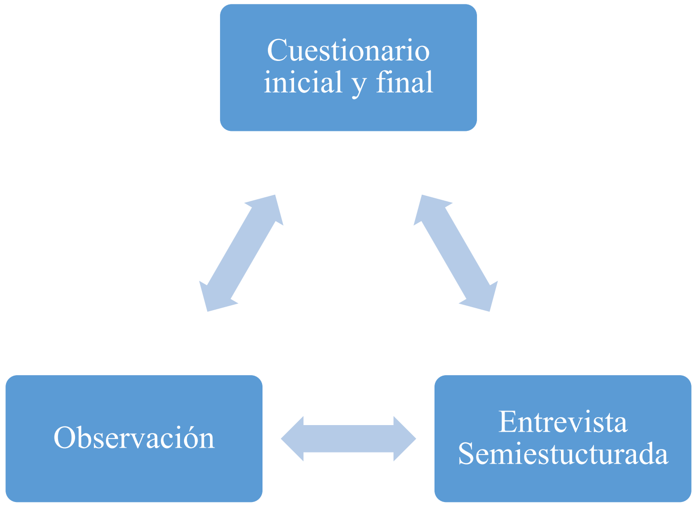


8.6 Interpretación de resultados

El diseño de un TEM en consonancia con los contenidos de un curso de Cálculo Integral y que a su vez permite analizar la evolución de la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría PK arrojó una serie de resultados que se analizarán a continuación. Estos resultados han sido triangulados e interpretados con base en los descriptores y las variables consideradas en la UA.

Figura 26

Triangulación de los resultados a partir de los instrumentos



8.6.1 Estudiante A

Inicialmente al aplicar el CI del TEM, en el nivel más interno (conocimiento primitivo) el estudiante acepta que toda función representa una curva, y en tal sentido afirma incluso que una recta es una curva. Esta situación la valida desde un aspecto geométrico y analítico reconociendo expresiones funcionales en el plano. Sin embargo, no reconoce o cuestiona lo que ocurre con funciones que presentan algún tipo de discontinuidad, por ejemplo: $y = x^2/x$.

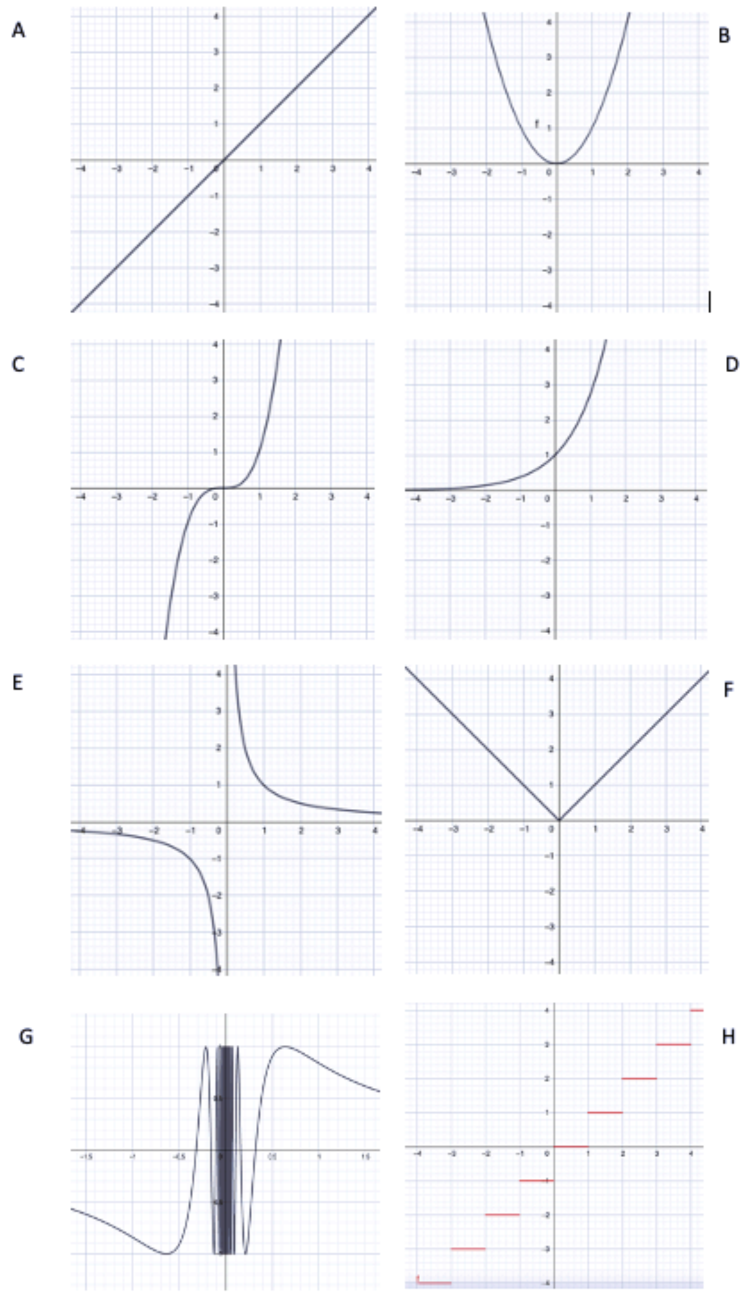
El estudiante hace uso de términos de manera coherente y articulados al formalismo matemático que requiere el curso, a su vez, reconoce distintos tipos de curvas dada su expresión analítica e incluso plantea desde un aspecto geométrico dos tipos de curvas (abiertas y cerradas) asociándolos en algunas de sus respuestas de manera consistente con formas infinitas.

Frente al concepto de curva el estudiante lo asocia desde una percepción Newtoniana, dado que lo atribuye a la idea de movimiento desde el punto de vista vectorial e indirectamente habla de cambio de dirección en una sucesión de puntos.

En la entrevista, el estudiante entra en contradicción con las preguntas CIP6, EP4 (entrevista) y CFP1 (cuestionario final) al afirmar inicialmente que, la expresión $x^2 + y^2 = 0$ es una curva, pero al preguntarle si un punto es una curva su respuesta es no. Es decir, posiblemente no asocia la representación analítica de la expresión dada con el punto de vista geométrico.

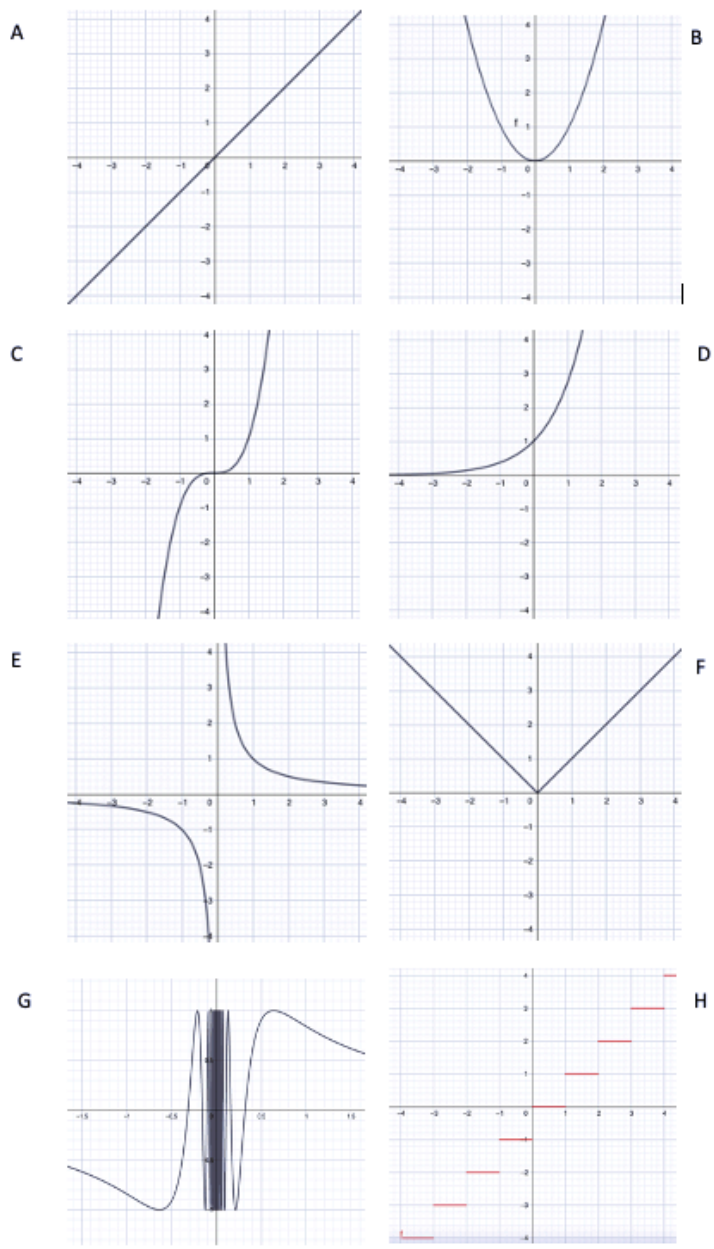
Considera que tres puntos no colineales determinan una curva.

Frente a las gráficas siguientes:



En el inicio del TEM con el instrumento CI en la pregunta CIP4, el estudiante afirmó que toda función es una curva, sin embargo, en estas gráficas (EP7) responde que H (función parte entera) no es curva, para lo cual se enfrenta en una contradicción nuevamente dentro de lo que inicialmente él considera como curva, esta vez desde el punto de vista gráfico.

Además, se aprecian hechos tales como que el estudiante reconoce que en el estudio del infinito pueda presentarse que una suma infinita arroje resultados finitos. Plantea una definición formal de curva y la asocia con la idea de movimiento, es decir, está relacionada con la noción de vector, dado que plantea un posible cambio de dirección. Responde que toda función es una curva, lo cual ocasiona una contradicción al afirmar que la función parte entera no es una curva.



El estudiante plantea diferencias en la generación de curvas, sin embargo, entra en contradicción al aceptar que un punto no es una curva, pero afirma que la expresión $x^2 + y^2 = 0$ si lo es.

Posiblemente no identifica la notación de límite que subyace a las notaciones $\frac{dy}{dx}; \frac{\Delta y}{\Delta x}$ aunque identifica que van dirigidas al mismo concepto como cambio en la ordenada con respecto a la abscisa.

Reconoce la continuidad de una función en un intervalo y la asocia con condiciones de diferenciabilidad e integrabilidad en el caso de la función $y = \frac{1}{x}$ en el intervalo [-1,1]. Reconoce la discontinuidad en una función, evidenciando un error en la solución propuesta por la integral $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2} dx = 0$. Sin embargo, se queda corto en la explicación del porqué es errónea. Reconoce la asíntota de una función desde el punto de vista gráfico, y la relaciona con procesos de razonamiento infinito a partir de integrales

Acepta que un segmento se puede dividir infinitamente y lo asocia con el concepto de derivada.

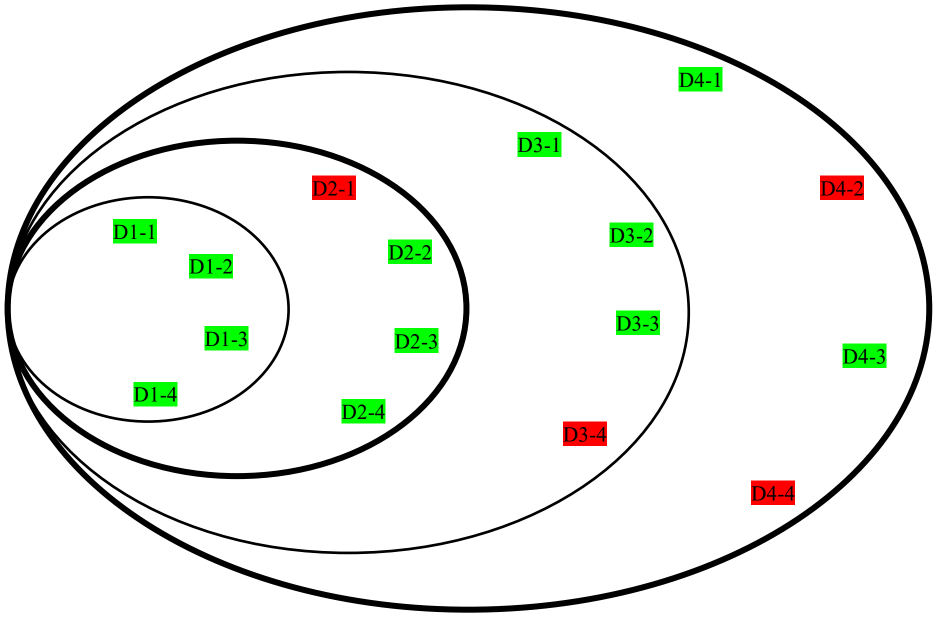
De igual manera reconoce que entre dos números hay infinitos números.

No sustenta por medio de algún procedimiento la forma de obtener la longitud de una curva (arco).

Ante la afirmación: "La derivada de una función se puede entender analíticamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (en el plano cartesiano)", el estudiante responde que la derivada de una función no solo se aplica a curvas.
Inicialmente reconoce que toda función es una curva. Sin embargo, aunque parte entera es función no la reconoce como curva.

Figura 27

Modelo PK en el estudiante A



Con base en los descriptores se pudo establecer que en la ejecución del TEM, el **estudiante A** no tiene dificultades en el nivel de avance 1 al 2 de PK. Es decir, el estudiante cuenta con los conocimientos previos suficientes para afrontar el TEM, sin embargo, presenta dificultades al establecer diferencias en la representación geométrica o analítica de una curva, lo cual hace que el análisis de la imagen dentro del nivel 2 de PK no sea completamente satisfactoria. De hecho, esta situación puso en evidencia ciertas contradicciones del estudiante al contrastar una función (representación analítica) con la representación geométrica.

En la evolución de la comprensión del concepto de curva entre el nivel 2 y 3 de PK, se deja en evidencia que el estudiante está en capacidad de expresar imágenes y visualizarlas, dado que con base en sus respuestas da cuenta de propiedades o características relacionadas con conceptos tales como tangentes, derivadas e integrales, además de la noción de continuo y discreto en el tratado de curvas, aunque no manifiesta claramente la relación entre el concepto de límite y sumatoria bajo ciertas circunstancias.

En el nivel 4 de PK, el estudiante hace distinciones sobre ciertas características, imágenes y conceptos que deben ser más profundos. Las deducciones matemáticas llegaron a un nivel de apropiación más elevado. Sin embargo, es limitado su progreso en cuanto a situaciones que involucran el cálculo de la longitud de una curva por medio de sumas infinitas, al igual que la manera de expresar generalizaciones para la conceptualización de curvas a partir de razonamientos infinitos.

8.6.2 Estudiante B

Inicialmente al aplicar el instrumento CI del TEM, en el nivel más interno (conocimiento primitivo) el estudiante no acepta que toda función representa una curva. Esta situación la valida desde un aspecto geométrico, sin tener en cuenta el punto de vista analítico. De hecho, el estudiante parece no percibir una discontinuidad removible con base en una función dada.
Por otra parte, el estudiante es coherente al establecer que un punto no es una curva argumentándolo desde un aspecto geométrico y analítico.

Plantea que una curva está definida por tres puntos no colineales y plantea la idea de vector al considerar que entre dos de los tres puntos se da un cambio de dirección.

La consideración del estudiante frente a que una recta no es una curva parece asociarla en las gráficas que se le presentan en CFP7, pues allí plantea que la función lineal, valor absoluto y parte entera no son curvas.

Al presentarle el trazo de una curva de manera discreta (puntos sobre el plano) y luego continua (representada por medio de GeoGebra) (CFP17) el estudiante responde: “después de esta charla me entran dudas, como definir una curva y como construir una curva. Pues uno puede construir una curva como lo vimos ahorita, como segmentos rectilíneos; yo puedo formar una curva pero me queda la duda es yo cómo la formo y hago segmentos, pero no en qué momento formarla".

El estudiante no asocia en algunas ocasiones una suma con resultados finitos, de hecho, parece asociar el infinito solo a su representación en el álgebra de infinitos y no trasciende a un aspecto analítico o geométrico.

El estudiante intenta asociar términos formales en matemáticas para definir una curva, introduce el concepto: cambio de variabilidad, lo cual a simple vista parece redundante, no obstante, propone su definición presuntamente articulada a la idea de derivada.

Establece una diferencia entre $\frac{dy}{dx}; \frac{\Delta y}{\Delta x}$ al reconocer el operador de la derivada en uno con respecto al otro.

No reconoce la continuidad de una función en un intervalo cerrado, aunque si valida el hecho de que puede ser diferenciable o integrable en el caso de la función $y = \frac{1}{x}$ en el intervalo [-1,1].

Reconoce la asíntota de una función desde el punto de vista gráfico, sin embargo, no sustenta de manera detallada como incide en el cálculo del área bajo una curva con esta característica.

Acepta que un segmento se puede dividir infinitamente y lo asocia con un aspecto geométrico.

Acepta que entre dos números hay infinitos números.

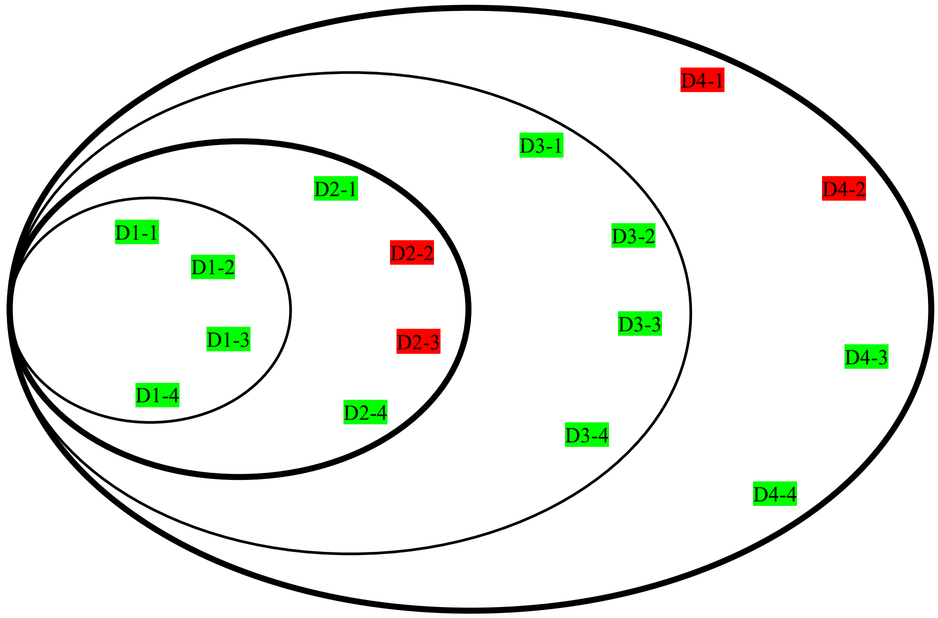
No sustenta por medio de algún procedimiento la forma de obtener la longitud de medir una curva (arco).

Ante la afirmación: "La derivada de una función se puede entender analíticamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (en el plano cartesiano)", el estudiante responde que la derivada de una función no solo se aplica a curvas.

No acepta que toda función es una curva

Figura 28

Modelo PK en el estudiante B



Con base en los descriptores, se pudo establecer que en la ejecución del TEM, el **estudiante B** no tiene dificultades en el nivel de avance 1 al 2 de PK. Es decir, el estudiante cuenta con los conocimientos previos suficientes para afrontar el TEM, sin embargo, presenta dificultades al sustentar la estimación de valores en procesos infinitos y asociar expresiones para generalizar la suma infinita de magnitudes, lo cual hace que tanto el análisis como la realización de la imagen dentro del nivel 2 de PK no sea completamente satisfactoria. De hecho, esta situación quedó claramente en evidencia a través de la entrevista semiestructurada, en la que el estudiante manifiesta la duda sobre cómo y en qué momento se forma una curva en el plano, aun después de haber discutido en dos sesiones iniciales, aspectos afines con este tópico.

En la evolución de la comprensión del concepto de curva entre el nivel 2 y 3 de PK, se evidencia que el estudiante está en capacidad de expresar imágenes y visualizarlas, dado que con base en sus respuestas da cuenta de propiedades o características relacionadas con conceptos tales como límites, tangentes, derivadas e integrales, además de la noción de continuo y discreto en el tratado de curvas.

En el nivel 4 de PK, el estudiante hace distinciones sobre ciertas características, imágenes y conceptos que exigen rigurosidad y formalización. Las deducciones matemáticas llegaron a un nivel de apropiación formal. Sin embargo, es limitado su progreso en la representación del concepto de curva a partir de la derivada de una función y los cálculos de longitud de una curva por medio de sumas infinitas, por lo que se queda corto en las predicciones y observaciones de la propiedad dentro del concepto de curva.

8.6.3 Estudiante C

El estudiante sustenta el concepto de curvas caracterizando curvas abiertas y cerradas. Sin embargo, parece asociar una curva desde el punto de vista analítico solo con expresiones de grado mayor que 1.

En el instrumento 1, el estudiante aflora algunas respuestas que se articulan a procesos de razonamiento infinito. Esto se evidencia en varias ocasiones, dado que asocia términos como sucesión, infinito, continuidad y la apreciación intuitiva de límite. Geométricamente, el paso de lo discreto a lo continuo al parecer lo asocia a la expresión dada por la función.

El estudiante asocia el infinito desde un punto de vista numérico aparentemente por aproximación, sin embargo, no reconoce que una suma infinita puede arrojar un resultado finito.

El estudiante hace uso de un lenguaje formal al sustentar sus respuestas, incluyendo términos geométricos tales como curvas cerradas o abiertas, apreciaciones sobre segmentos y rectas, e incluso plantean expresiones analíticas para apoyar sus respuestas.

El estudiante propone una definición de curva desde un aspecto continuo, dado que concibe la idea de función.

Reconoce que un punto no es una curva y en este sentido asocia la ecuación de la circunferencia y su representación geométrica y analítica.

Acepta que toda función representa una curva, sin embargo, ante su argumento entra en contradicción con la respuesta dada en CFP7 en la que responde que la función parte entera no es una curva.

No reconoce diferencia conceptual entre ambas notaciones $\frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Reconoce la continuidad de una función en un intervalo y la asocia con condiciones de diferenciabilidad e integrabilidad en el caso de la función $y = \frac{1}{x}$ en el intervalo [-1,1].

Reconoce gráficamente el comportamiento en el infinito de una función, sin embargo, no la asocia con la discontinuidad en una integral.

Acepta que un segmento se puede dividir infinitamente y lo asocia con un aspecto geométrico. Sin embargo, no expresa distinción alguna entre una recta y un segmento desde el punto de vista analítico y numérico, y establece que la mínima división de un segmento es hasta llegar a dos puntos.

Acepta que entre dos números hay infinitos números.

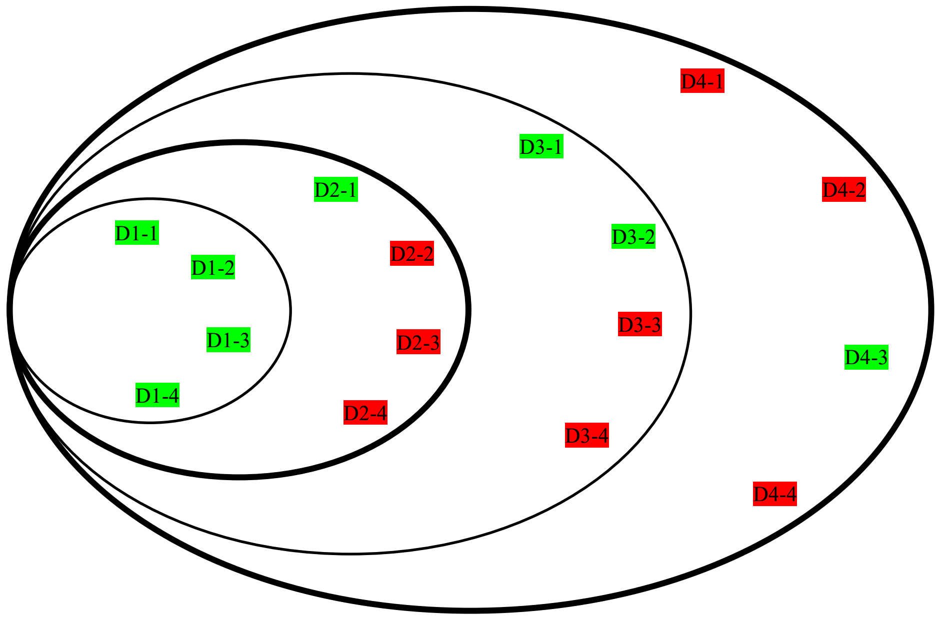
No sustenta por medio de algún procedimiento la forma de obtener la longitud de medir una curva (arco).

Ante la afirmación: “La derivada de una función se puede entender analíticamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (en el plano cartesiano)”, el estudiante responde que la derivada de una función solo se aplica a curvas.

No acepta que toda función es una curva.

Figura 29

Modelo PK en el estudiante C



Con base en los descriptores, se pudo establecer que en la ejecución del TEM, el **estudiante C** no tiene dificultades en el nivel de avance 1 al 2 de PK. Es decir, el estudiante cuenta con los conocimientos previos suficientes para afrontar el TEM, sin embargo, ya en el nivel 2, el estudiante no sustenta la estimación de valores en procesos infinitos, al igual que se le dificultad asociar expresiones para generalizar la suma infinita de magnitudes y expresar diferencias entre modelos discretos y continuos en la generación de curvas. De hecho, esta situación queda manifiesta al no reconocer diferencias conceptuales entre el delta y el diferencial de una variable dada. De igual forma hace que dentro del nivel no tenga una capacidad de análisis y realización de la imagen, lo que hace que deba hacer folding back retornando al nivel 1.

En la evolución de la comprensión del concepto de curva entre el nivel 2 y 3 de PK, el estudiante deja en evidencia que no interpreta aproximaciones de áreas bajo ciertas curvas y pone de manifiesto claramente algún tipo de relación entre el concepto de límite y sumatoria en ciertas funciones, aun cuando se presentó dentro del TEM las series de potencias y las aproximaciones a ciertas funciones a partir de polinomios de Taylor.

En el nivel 4 de PK, el estudiante no hace distinciones sobre ciertas características, imágenes y conceptos formales. Las deducciones matemáticas no llegaron a un nivel de apropiación riguroso. De hecho, reconoce características de ciertas curvas y su generación por medio de rectas tangentes, pero no representa el concepto de curva a partir de la derivada de una función ni calcula la longitud de una curva por medio de sumas infinitas y mucho menos expresa generalizaciones para la conceptualización de curvas a partir de razonamientos infinitos, por lo que se queda limitado en las predicciones y observaciones de la propiedad dentro del concepto de curva.

8.7 Matriz de perfil del estudiante en la UA

Con base en las respuestas de los estudiantes A, B y C y la Tabla 3, en la cual se establecen las preguntas asociadas a los descriptores en cada uno de los instrumentos del TEM, se diseña la siguiente matriz de perfil, en la que el símbolo ✓ indica que el avance del estudiante dentro del nivel de la teoría PK ha sido satisfactorio y de igual manera es positivo con respecto a las variables definidas en la UA.

Tabla 8

Matriz de perfil de descriptores de PK en concordancia con la UA

	Categoría	C1	C2	C3	
	Variable	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**
Estudiante	**Descriptor**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**
	1	✓	✓	✓	✓
	2	✗	✓	✓	✓
A	3	✓	✓	✓	✗
	4	✓	✗	✓	✗
	1	✓	✓	✓	✓
	2	✓	✗	✗	✓
B	3	✓	✓	✓	✓
	4	✗	✗	✓	✓
	1	✓	✓	✓	✓
	2	✓	✗	✗	✗
C	3	✓	✓	✗	✗
	4	✗	✗	✓	✗

9. Conclusiones

9.1 Sobre la investigación

El estudio de la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría PK puede aportar elementos de gran relevancia para la educación matemática en lo concerniente al cálculo diferencial e integral, considerando la estrecha relación entre los aspectos discreto y continuo a partir de procesos de razonamiento infinito inherentes a ambos aspectos.

La experiencia en el aula (virtual o presencial) es un escenario académico en el cual emergen un sin número de aspectos relacionados con la comprensión de conceptos; para el caso del concepto de curva, se pudo observar que este espacio sustenta la necesidad de una fina discusión y formalización de la triada: discreto, continuo e infinito, con base en los fundamentes históricos y epistemológicos del concepto de curva.

Resultó pertinente el diseño de un TEM que articulado a la teoría PK consolidó resultados conducentes a determinar cómo es el proceso de comprensión de los estudiantes cuando enfrentan transiciones entre lo discreto y lo continuo en relación al concepto de curva, en el contexto del cálculo.

Por otra parte, el TEM dentro de la investigación cualitativa es una herramienta conceptual de gran relevancia que permitió consolidar el proceso previo al desarrollo del trabajo de campo y, a su vez, articular el objeto matemático y de estudio de forma sistemática.

De igual forma, analizar la comprensión de los estudiantes frente al concepto de curva en el marco de la teoría PK resultó ser pertinente, dadas las características del modelo en cada uno de sus niveles. Además, porque se logró evidenciar su articulación de forma consistente con la metodología de experimentos de enseñanza.

El desarrollo de la fase I del TEM permitió consolidar una serie de descriptores en el marco de la teoría PK. Sin embargo, la fase II hizo posible el refinamiento de los descriptores, hecho que amplió la perspectiva en la fase III cuando se hizo uso de las variables de las UA.

Los instrumentos: cuestionario inicial (CI), entrevista semiestructurada (E) y cuestionario final (CF) a partir del TEM y los descriptores para la comprensión del concepto de curva, con base en el modelo PK, aportan elementos indispensables para la triangulación de la información y la sistematización de los resultados en estrecha relación con el objetivo de analizar el proceso de comprensión del concepto de curva.

9.2 Obtención de los objetivos

Se propuso como objetivo general analizar la comprensión del concepto de curva en la transición entre lo discreto y lo continuo mediante procesos de razonamiento infinito. En este sentido, a lo largo de la investigación se estructuró desde un punto de vista histórico y epistemológico la importancia del concepto en la matemática y en particular en el estudio del cálculo.

Para la consecución de este objetivo se discutió la importancia de la comprensión en el marco de la teoría PK, estructurando con ello una serie de descriptores que posteriormente con la implementación del TEM en la metodología de la investigación, permitió poner al descubierto las dificultades que los estudiantes enfrentan al abordar la conceptualización de una curva y la manera como la asocian con otros conceptos del cálculo desde dos perspectivas: lo discreto y lo continuo.

Desde la propuesta de investigación, se percibió como importante tratar estos dos elementos (discreto y continuo) a partir de procesos de razonamiento infinitos, y en la implementación de los instrumentos dentro del TEM, se validaron las necesidades que tienen los estudiantes para sustentar situaciones que involucran una curva.

Dentro de los objetivos propuestos se planteó refinar una serie de descriptores que permitan detectar los niveles de razonamiento de los estudiantes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Estos descriptores quedan plasmados en la sección 5.3.2 así como una opción de categoría de análisis propuesta en la sección 8.4.

Al intentar establecer si la comprensión del concepto de derivada e integral subyace al concepto de curva en estudiantes de un curso de cálculo integral se tiene como resultado el hecho de identificar, establecer y relacionar en este proceso de investigación los conceptos de continuo, discreto e infinito como objetos matemáticos vinculados al concepto de curva. A su vez, con los resultados obtenidos de la aplicación de los instrumentos CI, E y CF, se pudo dejar en evidencia que, aunque los estudiantes fundamentan la derivada e integral a partir de curvas y realizan procedimientos algorítmicos sobre ellas, asocian o sustentan de manera limitada el concepto mismo y se evidencian así vacíos conceptuales desde lo geométrico, algebraico y analítico, lo cual puede incidir en una escasa comprensión de otros conceptos del cálculo de manera rigurosa.

De otra parte, las fases I y II del TEM permitieron refinar los descriptores que finalmente se establecieron y se articularon con las variables de la UA para detectar el nivel de razonamiento de los estudiantes frente a la comprensión del concepto de curva. Esta situación propició a su vez la generación de una matriz que permitió determinar los aspectos en los que coinciden y se contrastan las apreciaciones y dificultades de los estudiantes exhiben en el tratado de curvas, lo cual permitió contrastar las respuestas y la evolución de la comprensión de los estudiantes con respecto a los instrumentos CI, E y CF.

En cuanto al hecho de establecer si la comprensión del concepto de derivada e integral subyacen al concepto de curva, cabe mencionar que desde el punto de vista histórico y epistemológico se deja en evidencia la importancia del concepto al momento de entrar en discusión sobre la noción de derivada e integral. Esto en gran medida por que tanto la derivada como la integral se fundamentan desde el concepto de curva en sí misma, y, la manera como las respuestas de los estudiantes en los instrumentos lo validan, entra en conflictos y contradicciones incluso cuando no se reconoce si una función es una curva o si la generación de una curva implica movimiento. Estas consideraciones en el cálculo con base en los resultados obtenidos dan cuenta de que debe destacarse y replantear el concepto antes de formalizar otros que dependen de este para su definición y formalización.

9.3 Participación en eventos académicos y publicaciones

Durante el desarrollo de este estudio doctoral y como parte de los avances y resultados obtenidos en la investigación, se llevaron a cabo las siguientes participaciones académicas en eventos regionales, nacionales e internacionales, así como también se lograron publicaciones de artículos de libros y memorias:

Ponencia: Curvas: transiciones entre discreto y continuo.
Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática.
ENHEM6, Universidad del Cauca.
Cauca, Colombia.
2018.

Ponencia: Curvas: entre la división de lo continuo y la continuidad de lo discreto.
Conferencia Interamericana de Educación Matemática.
XV CIAEM, Universidad de Medellín.

Antioquia, Colombia.

2019.

Ponencia: Tratamiento de curvas mediante razonamiento infinito.

Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

RELME 33, Universidad de las Ciencias Informáticas.

Habana, Cuba.

2019.

Ponencia: Comprensión del concepto de curva a partir de transiciones entre discreto y continuo en el contexto del cálculo.

1er Congreso Caribeño de Investigación Educativa.

Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU).

Santo Domingo, República Dominicana.

2020.

Proyecto: Interacciones de los estudiantes a través de la modalidad virtual Ude@ para el aprendizaje de la Matemática.

ConTIC Investigo.

Vicerrectoría de Docencia, Universidad de Antioquia.

Antioquia, Colombia.

2020.

Publicación de artículo de libro: Interacciones de los estudiantes a través de la modalidad virtual Ude@ para el aprendizaje de la Matemática.

Páginas 623-630.

Revista Caribeña de Investigación Educativa.

ISSN: 978-9945-9224-4-8

Guatemala.

2020.

Publicación de artículo de libro: Comprensión del concepto de curva a partir de transiciones entre lo discreto y lo continuo en el contexto del cálculo.

Páginas 877-884

Revista Caribeña de Investigación Educativa.

ISSN: 978-9945-9224-4-8

Guatemala.

2020.

Ponencia: Incidencias de la comprensión del concepto de curva en el estudio del cálculo

Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

RELME 34, Centro Universitario de Occidente.

Quetzaltenango, Guatemala.

2021.

Ponencia: Procesos de razonamiento infinito en la comprensión del concepto de curva para el estudio del cálculo.

IV Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas.

CIMA, UNAD.

Cundinamarca, Colombia.

2021.

Ponencia: Metodología de Experimentos de Enseñanza para la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

2º Congreso Caribeño de Investigación Educativa.

Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU).

Santo Domingo, República Dominicana.

2021.

Publicación de artículo de libro: Metodología de Experimentos de Enseñanza para la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

Revista Caribeña de Investigación Educativa.

ISSN: 978-9945-9224-4-8

Guatemala.

2022.

9.4 Proyecciones hacia el futuro

Como resultado en la consecución del objetivo de la investigación, se logra consolidar un TEM articulado a la teoría PK y una propuesta de descriptores que entran en afinidad con las categorías dentro de una unidad de análisis, lo que permite estructurar una matriz que podría replicarse a diversas investigaciones donde se haga uso de categorías, códigos o variables para la metodología de carácter cualitativo.

De otro lado, queda abierta la posibilidad de establecer investigaciones desde el punto de vista histórico y epistemológico sobre el tratado de curvas en la educación matemática, ya que como se planteó en el presente estudio, aunque existen definiciones sobre el concepto y formalmente se han establecido avances significativos en ramas de la matemática como la geometría diferencial, en otras ramas de la matemática debe darse mayor importancia a la formalización del mismo y los procesos de razonamiento infinito que se pueden involucrar para los estudiantes en todos los niveles de escolaridad.

Es de considerar también la importancia de los TEM dentro de la enseñanza de la matemática, y en este sentido, queda todo un camino por recorrer en pro de hacer un experimento de enseñanza de cada tema en el aula, de tal manera que la evolución de la comprensión de los estudiantes se convierta en sí mismo en el eje principal de las propuestas pedagógicas de los docentes, siendo estos a su vez tutores e investigadores.

Por último, esta investigación puede abrir otras posibilidades a la analítica de datos, permitiendo que el tratamiento cualitativo de la información pueda ejecutarse a través de softwares tales como MAXQDA, donde la innovación en la metodología de investigación parte de la rigurosidad en el tratamiento de información.

10. Referencias

Animov, Y. (2001). *Differential geometry and topology of curves*. Taylor and Francis Group. Florida. https://www.taylorfrancis.com/books/9781420022605

Azcona, M.; Manzini, F.; Dorati, J. (2013). *Precisiones metodológicas sobre la unidad de análisis y la unidad de observación : Aplicación a la investigación en psicología*. IV Congreso Internacional de Investigación, 13 al 15 de noviembre de 2013, La Plata, Argentina. https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.12219/ev.12219.pdf

Aparicio, E. & Cantoral, R. (2003) Sobre la noción de continuidad puntual: un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*. Nº56 págs. 169-198. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=819472

Arcos, J. & Sepúlveda, D. (2012). La diferencial de área. Una perspectiva infinitesimalista. *El cálculo y su enseñanza*, 3, 35–60. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/137

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad.* España. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=91155

Bingham, T. R. (1973). Newton y el desarrollo del cálculo. *Boletín De Matemáticas*, *7*(2), 113–130. https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/34688

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig. https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400242/Bolzano_14-1851-1_5.pdf

Deulofeu, J. y Figueiras, L. (2002) *Las medidas a través de la historia.* https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4701/lfo2de2.pdf

Cambray, R. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias UNAM, Colección MATHEMA. México.

Campos, M. (2018) *La evolución de los conceptos de curva y tangente a través de comentarios históricos.* México. https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/ModemarCamposCano.pdf

Cantor (1877). *Uber unendliche, lineaire Punkmannichfaltigkeiten*. Leipzig. https://gdz.sub.unigoettingen.de/id/PPN235181684_0015?tify={%22pages%22:[7],%22view%22:%22info%22}

Cantoral, R. et al. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. España. Ediciones Diaz de Santos. P. 4. https://editdiazdesantos.com/wwwdat/pdf/9788479788032.pdf

Castro, E & Rico, L. (1994) Conocimiento matemático, comprensión y evaluación. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado,* Nº 21. Pp 71-82 https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/117838.pdf

Cobb, P., & Steffe, L. (1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 83–94. https://doi.org/10.2307/748576

Cobo, G & Valdivia, S. (2017). *El estudio de casos.* Lima. Edit. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. http://idu.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2017/08/2.-Estudio-de-Casos.pdf

Crespo, C. (2004) *El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos.* Universidad de Buenos Aires. https://core.ac.uk/download/pdf/33252733.pdf

Deulofeu J. & Figueiras, L. (2002) *Las medidas a través de la historia*. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4701/lfo2de2.pdf

Duval, R. & Ludlow, A. (2016) *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.* Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ferreira, N. (2014). *Construções de curvas contínuas em um sistema de coordenadas discretas.* http://seer.pucgoias.edu.br/index.php/estudos/article/view/3372/1958

Garelik, M & Montenegro, F. (2018) *Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión.* Unión: revista iberoamericana de educación matemática. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6574634

Guicciardini, N. (2006) *La época del punto: El legado matemático de Newton en le siglo XVIII*. Revista de estudios filoóficos, Nº 35, Universidad de Antioquia. https://vlex.com.co/vid/epoca-punto-legado-matematico-744663353

Glasersfeld, E. (1996) *Aspectos del constructivismo radical.* Barcelona, España: Gedisa Editorial (23– 49). http://eqtasis.cl/wp-content/uploads/2018/03/Glasersfeld-E.-Aspectos-del Constructivismo-Radical.pdf

Hernández, V. (2002) La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? https://www.cipri.info/app/download/29465786/HIST-1-1-4-analitica.pdf

Hernández, L. (2019) *Euclides: Libro X.* Universidad de la laguna, España. https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/15743/Euclides%20Libro%20X.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2014) *Metodología de la investigación, Sexta edición*. México DF, México: Mc Graw Hill.

Hernández, V. (2011). *Esquemas de subdivisión para generar curvas.* La Habana. http://www.revistaccuba.cu/index.php/revacc

Herrero, P & Carreras, P. (2002). *Construcción de un concepto-imagen adecuado al concepto de continuidad de Cauchy*. Divulgaciones matemáticas, Vol. 10. 51-56. https://www.emis.de/journals/DM/vX1/art5.pdf

Hitt, F (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. versión preliminar presentada en el Undécimo Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Morelia. http://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_c%C3%A1lculo

Jato, S. (2012). *El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria*. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1724/Sergio%20Jato%20Canales.pdf?sequence=1

Jácome, F. (2018) *Lineabilidad y curvas de Peano. U. Sevilla.* https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/81667/Jácome%20Maura%20Francisco%20TFM.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Jordan, C. (1909). C*ours d'analyse de l'cole polytechnique.* París https://ia800901.us.archive.org/30/items/coursdanalysedel01hermuoft/coursdanalysedel01hermuoft.pdf

Lafuente, J. (1998). *Geometría diferencial de curvas en el plano*.

http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Curvas%20y%20Superficies/cp.pdf

Lockwood, E. (1961). *A book of curves*. London. Cambridge University press. https://www.aproged.pt/biblioteca/ABookofCurvesLockwood.pdf

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y kieren*. Universidad de Antioquia. Medellín.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la Matemática. Ciencia y Tecnología, 14, 2014, pp. 277-298. https://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2014/14/CyT_14_18.pdf

Llorens, J. & Santoja, F. (1997). *Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de Integral.* España. Divulgaciones Matemáticas, Vol 5 N° ½ p. 61-76.

MAXQDA (2021). Tutoriales. https://es.maxqda.com

Meel, D. (2003). *Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory.* CBMS Issues in Mthematics Education, 12, 132-181.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Molina, M.,Castro, E. & Castro, E. (2006) *Un acercamiento a la investigación de diseño a través* *de los experimentos de enseñanza.* https://core.ac.uk/download/pdf/12341972.pdf

Molina, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011) *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Revista Enseñanza de las ciencias. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824/353427

Montero, L., & Mahecha, J. (2020). Comprensión y resolución de problemas matemáticos desde la macroestructura del texto. *Praxis & Saber, 11*(26), e9862. https:// doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9862

Neira, G. (2012). *Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica.* Colombia. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. p. 13-42. http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/capitulos_de_libro/del_algebra_al_calculo_transicion_o_ruptura_notas_para_una

Neira, G. (2013) Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. Revista infancias, pp 44-50 https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4817228.pdf

Newton, I. & Melander, D. (1762). *Tractatus de quadratura curvarum.* Zurich. https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-4844

Picón, D. & Melian, Y. (2014). *La unidad de análisis en la problemática enseñanza* *aprendizaje*. Informe Científico Técnico UNPA, ISSN-e 1852-4516, Vol. 6 Nº 3, págs. 101-117. Argentina. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5123550

Pineda, G. (2013) *Física conceptual*. Editorial Universidad de Antioquia, Medellín.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9* (3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). *Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?* Educational Studies in Mathematics, 26 (2-3), 165-190.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 505-528.

Prabhu, V & Czarnocha, B. (2008) Los indivisibles en el cálculo contemporáneo. Grupo Santillana México. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512063004

Pulgarín, C. (2014) A*proximación de curvas a partir del plegado de superficies planas*. Medellín. Universidad de Antioquia.

Rodríguez, M. (2005). *Aproximación de curvas y superficies a partir de problemas de contorno mediante métodos variacionales*. Universidad de Granada. España. https://hera.ugr.es/tesisugr/15401996.pdf

Row, S. (1917). *Geometric Exercises in Paper Folding*. New York: Dover.

Sánchez-Matamoros, G. García, M. Llinares, S. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada*. Enseñanza de las Ciencias. Vol 24, N° 1. España. 85-98. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/73534

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008) *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. https://www.redalyc.org/pdf/335/33511205.pdf

Sánchez-Matamoros, G. (2010). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada.* Sevilla. Edición digital @tres. https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/73311

Simson, R. (1774) *Los seis primeros libros, y el undécimo y duodécimo de los elementos de Euclides*. Madrid. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los_seis_primeros_libros_y_el_undecimo%2C_y_duodecimo_de_los_elementos_de_Euclides.pdf

Sorando, J. (2018). *La paradoja de Zenón*. http://matematicasentumundo.es/HISTORIA/historia_Zenon.htm

Steffe, L. & Thomson, P. (2000). *Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and*

Essential Elements. Research design in mathematics and science education. New Jersey. 267- 307

Stylianides, A. & Stylianides, G. (2013). *Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education*. *ZDM. Mathematics Education, 45*(3), 333-341.

Tall, D. (1992) *Students' Difficulties in Calculus Plenary presentation in Working Group 3*, ICME, Québec, August 1992. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169

Tarrés, J. (1998). *Sobre la historia del concepto topológico de curva*. http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Historia11.pdf

Turégano, M. (1998). *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo.* Enseñanza de las Ciencias. Vol. 16 N° 2. España. 233-249

Valverde, G. (2014) *Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes*. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación. Costa Rica. https://www.redalyc.org/pdf/447/44732048014.pdf

Van Hiele, P. (1957) El problema de la comprensión. [Tesis de doctorado, Universidad Real de Utrecht]. https://www.uv.es

Velásquez, R. (1997) La geometría de Descartes. https://revistas.pucp.edu.pe

Villa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. Universidad de Antioquia. Medellín.

Waldegg, G. (1993). *El infinito en la obra Aristotélica.* Educación Matemática, Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/9647/

Warner, L. (2008). *How do student´s behaviors relate to the growth of their mathematical ideas?* Journal of Mathematica behavior, *27*, 20-227

Anexos

Anexo 1: Cuestionario Inicial (CI)

Indagación preliminar

Respetable estudiante; el presente cuestionario tiene como finalidad recolectar datos importantes para efectos del desarrollo de la investigación doctoral titulada "Curvas transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría PK" adscrita al programa de doctorado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Tales datos serán de vital importancia para la sistematización y formalización del estudio. En virtud de lo anterior, se le agradece de forma muy especial su colaboración para responder las siguientes preguntas. No está de más enfatizar que los datos que usted nos suministre, serán tratados con profesionalismo, discreción, responsabilidad y para fines netamente académicos.

Correo:___________________________________

Sección I

Por favor diligencia cada uno de los espacios en blanco según corresponda:

Nombres y Apellidos: ____

Seudónimo o nickname (En caso de que no desee que se considere su nombre en el tratamiento de la información): ____

Programa académico en el que está matriculado:______________________________________

Semestre de carrera que cursa actualmente:_______________________________________

Asignaturas de matemáticas que ha cursado hasta ahora:______________________________

Asignatura	Aprobado	No aprobado	No cursado
Álgebra y Trigonometría			
Geometría Euclidiana			
Geometría Vectorial y Analítica			
Cálculo Diferencial (Cálculo I)			
Cálculo Integral (Cálculo II)			
Cálculo en Varias Variables (Cálculo III)			
Ecuaciones Diferenciales			

Sección II

Dada su experiencia en las asignaturas de Matemáticas que ha cursado y con base en sus conocimientos (evitar recurrir a consultas en otros medios, textos, etc.), brinde una respuesta a los siguientes interrogantes:

CIP1. ¿Cuál es su definición de curva?

____

____

CIP2. ¿Considera que un punto es una curva?

a. Si

b. No

¿Por qué?

____

____

CIP3. ¿Una recta es una curva? ¿Por qué?

CIP4. ¿Toda función representa una curva?

a. Si

b. No

¿Por qué?

CIP5. ¿Es posible afirmar que la siguiente expresión representa una curva?

$$y = \frac{x^2}{x}$$

a. Si

b. No

¿Por qué?

CIP6. ¿La siguiente expresión gráficamente puede representar una curva?

$$x^2 + y^2 = 0$$

____

Sección III

Dada su experiencia en las asignaturas de matemáticas que ha cursado y con base en sus conocimientos (evitar recurrir a consultas en otros medios, textos, etc.), brinde una respuesta a los siguientes interrogantes:

CIP7. Dado un segmento de recta, ¿entre dos puntos existen infinitos puntos?

a. Si
b. No

CIP8. ¿Existen segmentos que se pueden dividir infinitamente?

a. Si
b. No

Explique.

____

____

CIP9. Dados dos números a y b, es posible afirmar que: ¿existen infinitos números comprendidos entre ellos?

a. Si
b. No

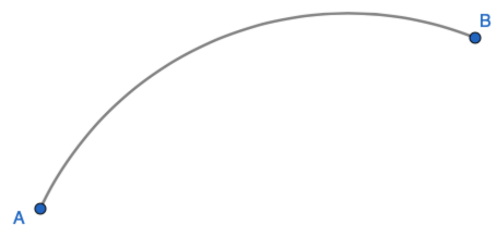
CIP10. ¿Una suma infinita puede arrojar un resultado finito?

a. Si

b. No

De acuerdo a la anterior respuesta brinde un ejemplo.

CIP11. ¿Qué procedimientos propondría para obtener la longitud de un arco AB cualquiera?



CIP12. ¿Existen diferencias conceptuales entre las siguientes dos notaciones? Explique.

$$\frac{dy}{dx}\,;\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sección IV

Dada su experiencia en las asignaturas de matemáticas que ha cursado y con base en sus conocimientos (evitar recurrir a consultas en otros medios, textos, etc.), brinde una respuesta a los siguientes interrogantes:

CIP13. La siguiente función en el intervalo [-1,1] es:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

	Si	No
Continua		
Derivable		
Integrable		

CIP14. ¿Observa algún error en la integral siguiente?

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2} dx = 0$$

a. Si

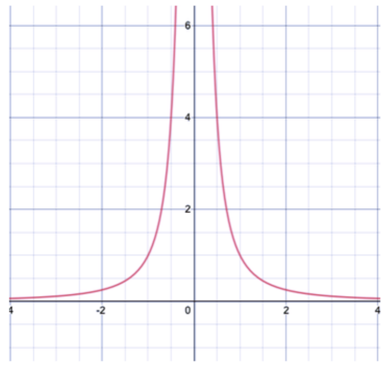
b. No

¿Por qué?

____

____

CIP15. ¿Existe alguna restricción para hallar el área bajo la curva de la función dada por la siguiente gráfica?



a. Si

b. No

¿Por qué?

____

____

Anexo 2: Partición de un intervalo

Área

Notación sigma

Definición:

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \ a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Donde:

i: Índice de la suma

a_i: i-ésimo término de la suma

$i = 1$: Límite inferior

n: Límite superior

Ejemplos

1) $\sum_{i=1}^{6} i =$

2) $\sum_{i=1}^{5} (i + 1) =$

3) $\sum_{j=1}^{7} (j)^2 =$

4) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{n}(k^2 + 1) =$

5) $\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x =$

Teorema: Propiedades de Σ

1) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$ (Prop. Distributiva generalizada)

2) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ (Sumatoria de una constante)

3) $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$ (Prop. Aditiva sobre la función)

4) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$ (Prop. Aditiva de los límites)

5) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+m}^{n+m} a_{(i-m)}$ (Desplazamiento del índice)

6) $\sum_{i=1}^{n} [a_i - a_{(i-1)}] = a_n - a_{(m-1)}$ (Prop. telescópica)

Teorema: Fórmulas de suma

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Ejemplos:

1) $\sum_{i=1}^{20} 2i =$

2) $\sum_{i=1}^{15} (2i-3) =$

3) $\sum_{i=1}^{20} (i-1)^2 =$

4) $\sum_{i=1}^{10} i^2 - 1 =$

5) $\sum_{i=1}^{10} i^2 - 1 =$

6) $\sum_{i=1}^{15} i\,.\,(i-1)^2 =$

7) $\sum_{i=1}^{10} i\,.\,(i^2+1) =$

8) $\sum_{i=1}^{10} \frac{i+1}{n^2} =$

Ejercicios

1. Usar notación sigma para expresar la suma:

1) $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(9)}$

2) $\frac{5}{1+1} + \frac{5}{1+2} + \frac{5}{1+3} + \cdots + \frac{5}{1+15}$

3) $\left[2\left(\frac{1}{8}\right)+3\right] + \left[2\left(\frac{2}{8}\right)+3\right] + \ldots + \left[2\left(\frac{8}{8}\right)+3\right]$

4) $\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + \left[1-\left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \cdots + \left[1-\left(\frac{4}{4}\right)^2\right]$

5) $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[\left(\frac{2n}{n}\right)^3 - \frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$

6) $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{0}{n}\right)^2} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

2. Hallar la suma:

1) $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$

2) $\sum_{k=2}^{5} (k+1)(k-3)$

3) $\sum_{i=1}^{4} c$

4) $\sum_{i=1}^{5} (2i+1)$

5) $\sum_{i=1}^{4} [(i-1)^2 + (i+1)^3]$

6) $\sum_{j=2}^{5} \frac{j}{j-1}$

7) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

8) $\sum_{i=-2}^{3} \frac{k}{k+3}$

9) $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$

10) $\sum_{i=1}^{n} 2i(1+i^2)$

11) $\sum_{k=1}^{n} [(3^{-k} - 3^{k})^2 - \left(3^{k-1} - 3^{(-k+1)}\right)^2]$

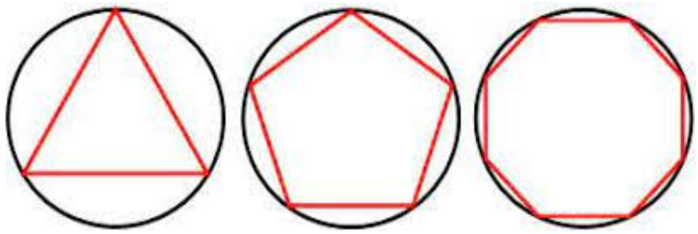
Área de una región plana

La propiedad arquimediana de los números reales dice que:

Si y es un número real arbitrario y $x > 0$ entonces existe un entero positivo n tal que $nx > y$.

Esta propiedad surge del lema con el que trabajó Arquímedes: *dadas dos magnitudes que tengan razón(es decir, que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero), entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra*.

Arquímedes la recuperó de Eudoxo de Cnido (Siglo IV a.C.), quien lo utilizó para demostrar el volumen de ciertas sólidos ya intuidos por Demócrito. El método que utilizó, hoy se denomina método de exhaución y lo podemos considerar el antecedente del cálculo integral. El método consiste en aproximar un resultado buscado con otros conocidos. Así Antifonte (430 a.C.) determinó el área de un círculo, inscribiendo en él triángulos cada vez más pequeños, hasta completar su área. Arquímedes lo utilizó para calcular la longitud de una circunferencia (lo que conlleva el cálculo de π). Inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario, podemos hallar el área del círculo, la longitud de la circunferencia y el número π con tantas cifras decimales como queramos.



Algunos conceptos

1. **Partición de un intervalo**

Es el conjunto de subintervalos en que se ha dividido un intervalo.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_0 = b$$

2. **Norma o malla de una partición**

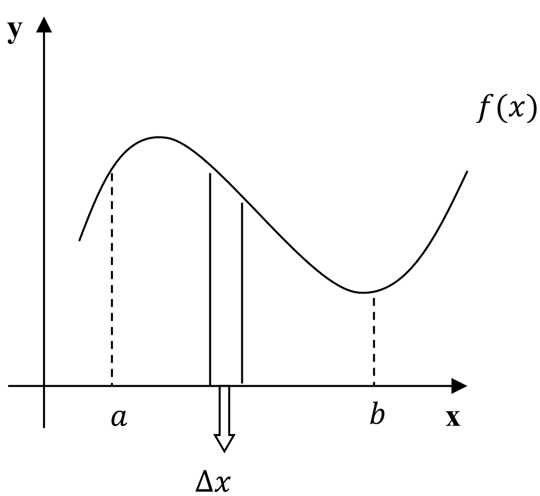
Notación: $\|\Delta\|$

Es la longitud del mayor intervalo de una partición

3. **Partición regular**

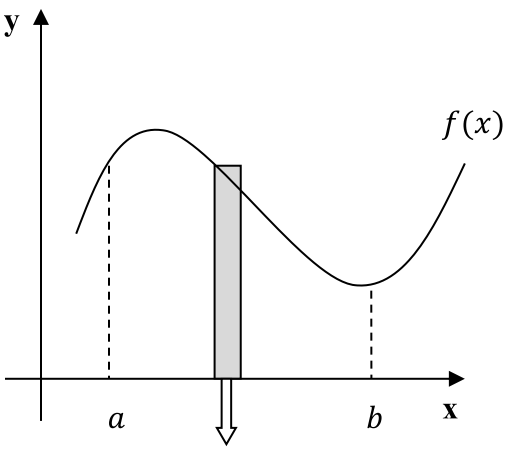
Notación: $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$ Siendo n el número de intervalos

Partición en la cual todos los subintervalos tienen igual longitud.

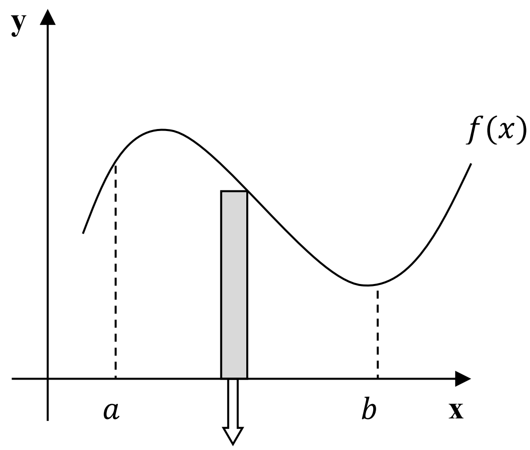


Anexo 3: Sumas de Riemann e integral definida

Generalizando el método de exhaución



Δx (Rectángulos Circunscritos)



Δx (Rectángulos inscritos)

Para un intervalo cualquiera (i-ésimo subintervalo) llamaremos a x_i su extremo final y x_{i-1} su extremo inicial.

El **teorema del valor medio** nos garantiza que la curva de la gráfica de $f(x)$ tiene máximo y mínimo en cada subintervalo.

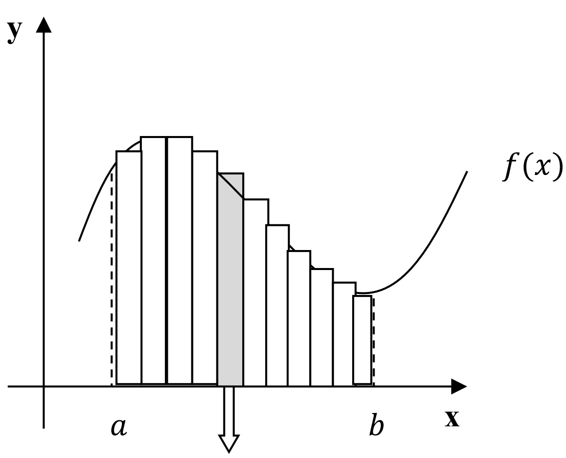
Sean:

$f(min)$: Valor mínimo de cada subintervalo

$f(Min)$: Valor máximo de cada subintervalo

$S(n)$: Suma del área de todos los rectángulos circunscritos en el intervalo $[a, b]$

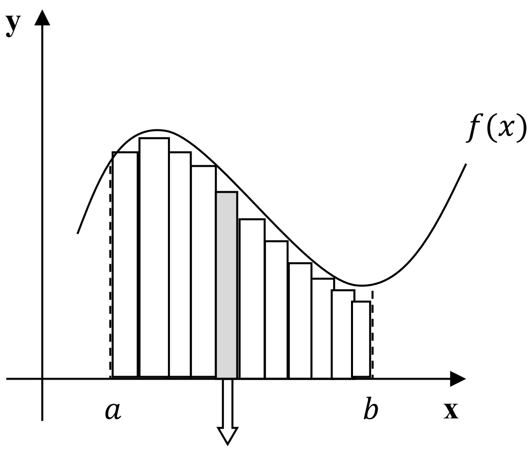
$s(n)$: Suma del área de todos los rectángulos inscritos en el intervalo $[a, b]$



Δx (Rectángulos Circunscritos)

Área del rectángulo circunscrito:
$f(Mi)\Delta x$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(Mi)\Delta x$$



Δx (Rectángulos Inscritos)

Área del rectángulo inscrito:
$f(mi)\Delta x$

$$s(n) = \sum^{n} f(mi)\Delta x$$

$$s(n) \leq A \leq S(n)$$

Nota:

Si al inscribir o circunscribir los rectángulos, los puntos terminales se ubican a la izquierda, entonces son de la forma $a + \Delta x(i - 1)$; en caso contrario $a + \Delta x(i)$.

Ejemplos: Halle la suma superior e inferior de la región acotada por la gráfica dad en el intervalo $[a, b]$ usando n rectángulos según se especifique.

1. $f(x) = x$ entre $x = 0$ y $x = 3$ con $n = 5$
2. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 3$ con $n = 10$
3. $f(x) = x^3 - 1$ entre $x = 1$ y $x = 3$ con $n = 5$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ y $x = 2$ con $n = 7$

Teorema: Límite de las sumas superiores e inferiores

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas superiores e inferiores son idénticos. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(mi)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(Mi)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} S(n)$$

Con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y donde $f(mi)$ y $f(Mi)$ son los valores mínimo y máximo de f en el i-ésimo intervalo.

Nota:

Dado que se llega al mismo límite con $f(mí)$ o con $f(Mí)$, el teorema del encaje garantiza que la elección de x en el i-ésimo subintervalo no afecta el límite.

Ejercicios

1. **Calcular el límite de $s(n)$ cuando $n \to \infty$**

1) $s(n) = \left(\frac{4}{3n^3}\right)(2n^3 + 3n^2 + n)$

2) $s(n) = \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right)$

3) $s(n) = \frac{81}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

4) $s(n) = \frac{18}{n^2}[\frac{n(n+1)}{2}]$

2. **Hallar una fórmula para la suma de n términos. Con esa fórmula, calcular el límite cuando $n \to \infty$**

1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i}{n^2}$

2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2$

3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

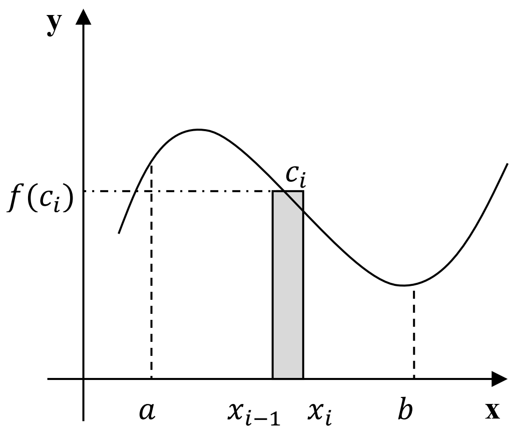
4) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right)$

Definición de área de una región plana

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, el área de la región limitada por la gráfica de f en el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es:

$$Área = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad con\ x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

Y siendo: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

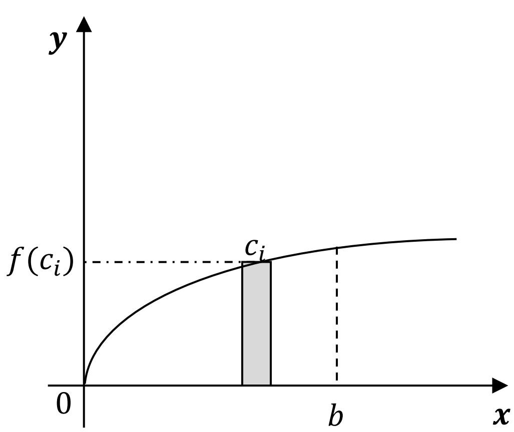


Ejemplos:

1. Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$
2. $f(y) = y^2 - 1$ entre $y = 1$ y $y = 5$

Sumas de Riemann

Las particiones de cada subintervalo no son necesarias tomarlas con igual longitud, por ejemplo en la función $f(x) = \sqrt{x}$ no resulta práctico tomar c_i como se ha venido haciendo.



Consideremos $c_i = \frac{i^2}{n^2}$ y por ende

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}$$
$$\Delta x = c_i - c_{i-1}$$
$$\Delta x = \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}$$
$$\Delta x = \frac{2i - 1}{n^2}$$

Luego:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}} (\frac{2i-1}{n^2})$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i(\frac{2i-1}{n^2})$$

$$A = \vdots$$

A la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ se le llama suma de Riemman asociada a la partición Δ

Integrales definidas

Consideremos

$\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$ Que significa decir:

$$\forall_{e>0}\ \exists_{\delta>0} / \|\Delta\| < \delta \Longrightarrow \left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right| < \epsilon$$

Definición: Integral Definida

Si f es integrable en $[a, b]$ y el límite se denota

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Donde:

a: Límite inferior (cota inferior)

b: Límite superior (cota superior)

Teorema: Continuidad $\Longrightarrow$ Integrabilidad

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$

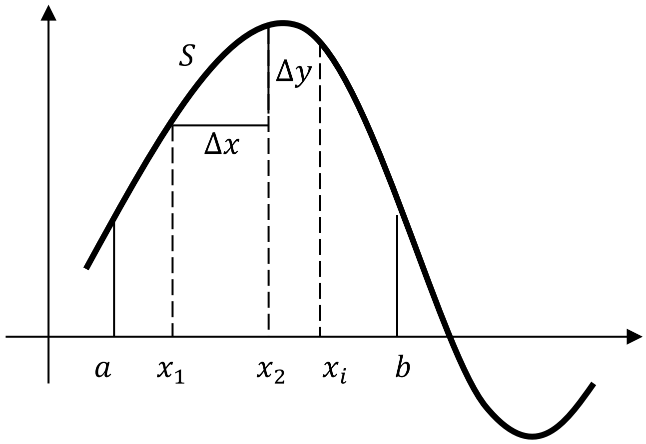
Teorema: La integral definida como área de una región

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$ el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

Anexo 4: Longitud de arco

Una curva se llama **rectificable** si tiene longitud finita. Una condición suficiente para que la gráfica de una función f en un intervalo $[a, b]$ sea rectificable, es que f' sea continua en $[a, b]$. De tal función se dice que es **continuamente derivable** en $[a, b]$ y que su gráfica en $[a, b]$ es una curva suave.



$\Delta x = x_i - x_{i-1}$

$\Delta y = y_i - y_{i-1}$

$S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

De donde:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Dado que dicha aproximación mejora más y más cuando $\|\Delta x\| \to 0$ ($n \to \infty$) entonces:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Reescribiendo la expresión anterior:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \,.\, \Delta x_i$$

Dado que el T.V.M garantiza un $c_i \in [a, b]$ tal que:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

Por lo cual

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \,.\, \Delta x_i$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, dx$$

Luego; diremos que S es la longitud de arco de f entre a y b.

Definición:

Si la gráfica de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es una curva suave, la longitud de arco de f entre a y b es:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Análogamente, para una curva suave dada por $x = g(y)$ en $[c, d]$ la longitud de arco de g entre c y d es:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Ejemplos: Calcular la longitud de arco de la gráfica en el intervalo dado.

a. $y = 3x$; [1,2]

b. $y = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + 1$; [0,1]

c. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$; [1,2]

d. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; [0,2]

e. $9y^2 = 4x^3$; [0,3]

f. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$; [1,4]

Anexo 5: Guion Entrevista

Respetable estudiante; la presente entrevista tiene como finalidad recolectar datos importantes para efectos del desarrollo de la investigación doctoral titulada "Curvas transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría PK" adscrita al programa de doctorado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Tales datos serán de vital importancia para la sistematización y formalización del estudio. En virtud de lo anterior, se le agradece de forma muy especial su colaboración para responder cada una de las preguntas. No está de más enfatizar que la información que usted me suministre, serán tratados con profesionalismo, discreción, responsabilidad y para fines netamente académicos.

Introducción

A lo largo del curso de Cálculo Integral hemos tratado diversos tipos de curvas desde un aspecto geométrico, algebraico y analítico al abordar los contenidos asociados a integrales concebidos dentro del programa. De allí que resulte interesante indagar por la comprensión que usted tiene de dicho concepto y la manera como lo relaciona desde el aspecto discreto y continuo. Por tal motivo, a continuación, se realizarán una serie de preguntas que aportan en la discusión del concepto desde su experiencia y aprendizaje en lo relacionado a los temas del curso.

EP1. ¿Qué concepción (noción, idea, definición) tiene sobre lo que es una curva en matemáticas?

EP2. Mencione algunas curvas que conoce o que ha estudiado

EP3. Una circunferencia es una curva?

EP4. Un punto es una circunferencia?

EP5. Una circunferencia con centro en el origen viene dada por la expresión $x^2 + y^2 = r^2$. Si el radio es cero, es decir $x^2 + y^2 = 0$ sigue siendo una circunferencia?

EP6. Una recta es una curva?

EP7. Observe la siguiente animación:

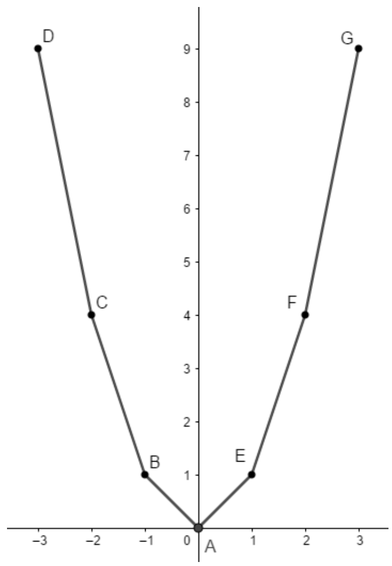
Animación: https://www.geogebra.org/m/yqcPCnXg

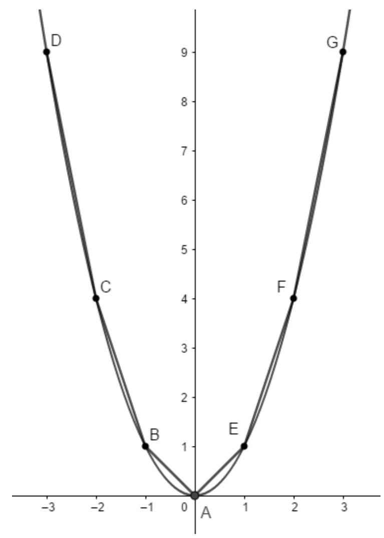
Si el número de lados del polígono aumenta, ¿Qué ocurre con su longitud?

¿El perímetro del polígono puede ser igual a la longitud de la circunferencia?

EP8. De la geometría Euclidiana se sabe que "dos puntos determinan una línea recta". ¿Cuántos puntos considera que son necesarios para determinar una curva?

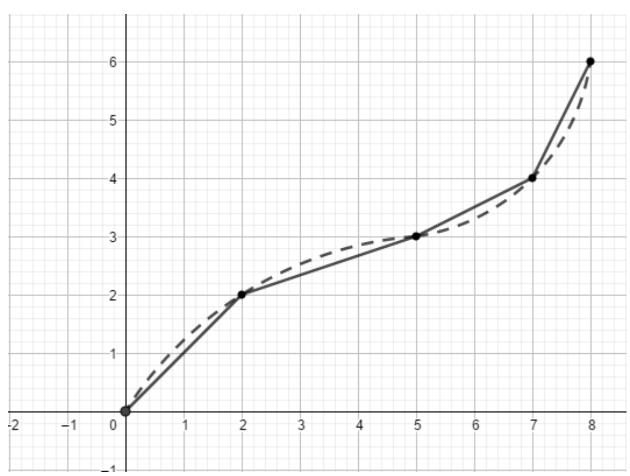
EP9. A medida que yo voy acercando esa línea roja, Punto Q y P (animación: https://www.geogebra.org/m/nkvW9Y9h) estamos hablando de lo que es la tangente comparada con la secante: ¿Es posible construir una curva perfecta como la de la línea azul?





EP10. ¿En qué momento pasamos en matemáticas de unir puntos con segmentos a un trazo como el de la figura derecha?

EP11. E: ¿Cómo podría hacer para calcular la longitud exacta de una curva como la de la figura?



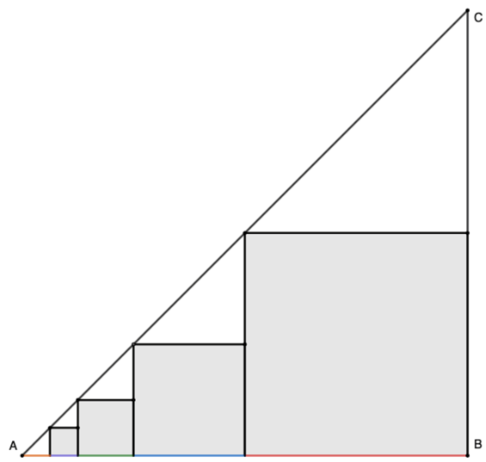
EP12. E: ¿Un segmento puede dividirse infinitas veces?

EP13. E: ¿Existen segmentos infinitos?

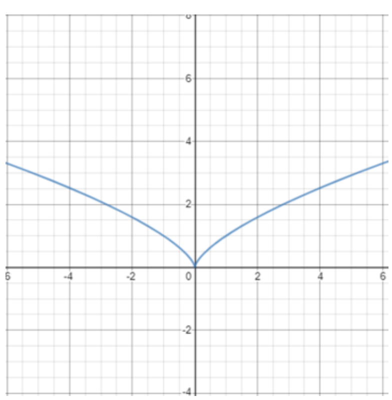
EP14. E: ¿Un segmento puede generar una suma infinita?

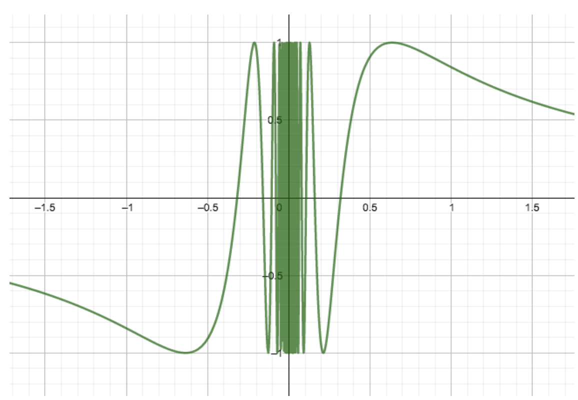
EP15. E: ¿Una suma infinita de segmentos puede arrojar un resultado finito?

EP16. E: ¿Una superficie puede dividirse infinitas veces?



EP17. De acuerdo con lo visto en el curso y discutido aquí, ¿Las funciones siguientes representan curvas?

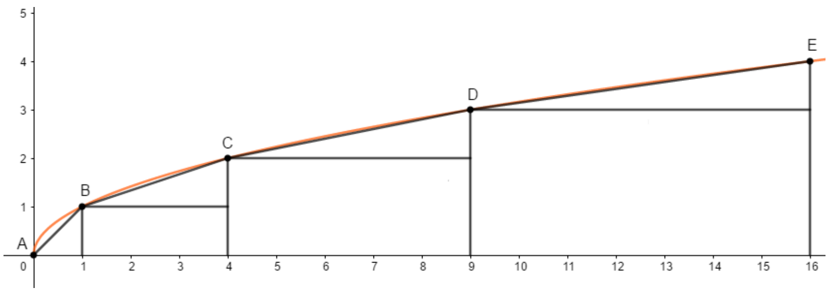




$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$

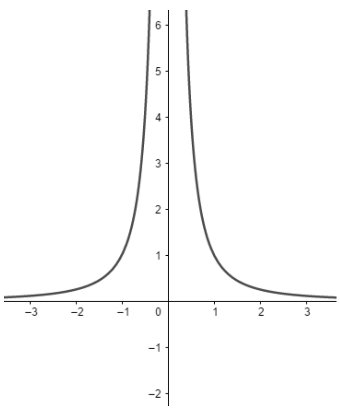
EP18. E: ¿Podría afirmarse de acuerdo con lo anterior que una curva puede ser discontinua?

EP19. ¿Qué se necesita para hallar el área bajo esa curva?



EP20. Hay algún error en el procedimiento siguiente (la gráfica de la función está ilustrada)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$



EP21. ¿Qué se necesita para aproximar una curva?

Anexo 6: Cuestionario final (CF)

Respetable estudiante; el presente cuestionario tiene como finalidad recolectar datos importantes para efectos del desarrollo de la investigación doctoral titulada "Curvas transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría PK" adscrita al programa de doctorado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Tales datos serán de vital importancia para la sistematización y formalización del estudio. En virtud de lo anterior, se le agradece de forma muy especial su colaboración para responder las siguientes preguntas. No está de más enfatizar que los datos que usted nos suministre, serán tratados con profesionalismo, discreción, responsabilidad y para fines netamente académicos.

Correo: ______________________________________

Sección I

Nombres y Apellidos: ____

Seudónimo o nickname (En caso de que no desee que se considere su nombre en el tratamiento de la información): ____

CFP1. Un punto es una curva?

a. Si
b. No

CFP2. Cuántos puntos son necesarios para trazar una curva?

a. Uno
b. Dos
c. Tres
d. Más de tres

CFP3. Toda función es una curva?

a. Si
b. No

CFP4. Toda curva es continua?

a. Si
b. No

CFP5. Toda curva es integrable?

a. Si
b. No

Por qué?

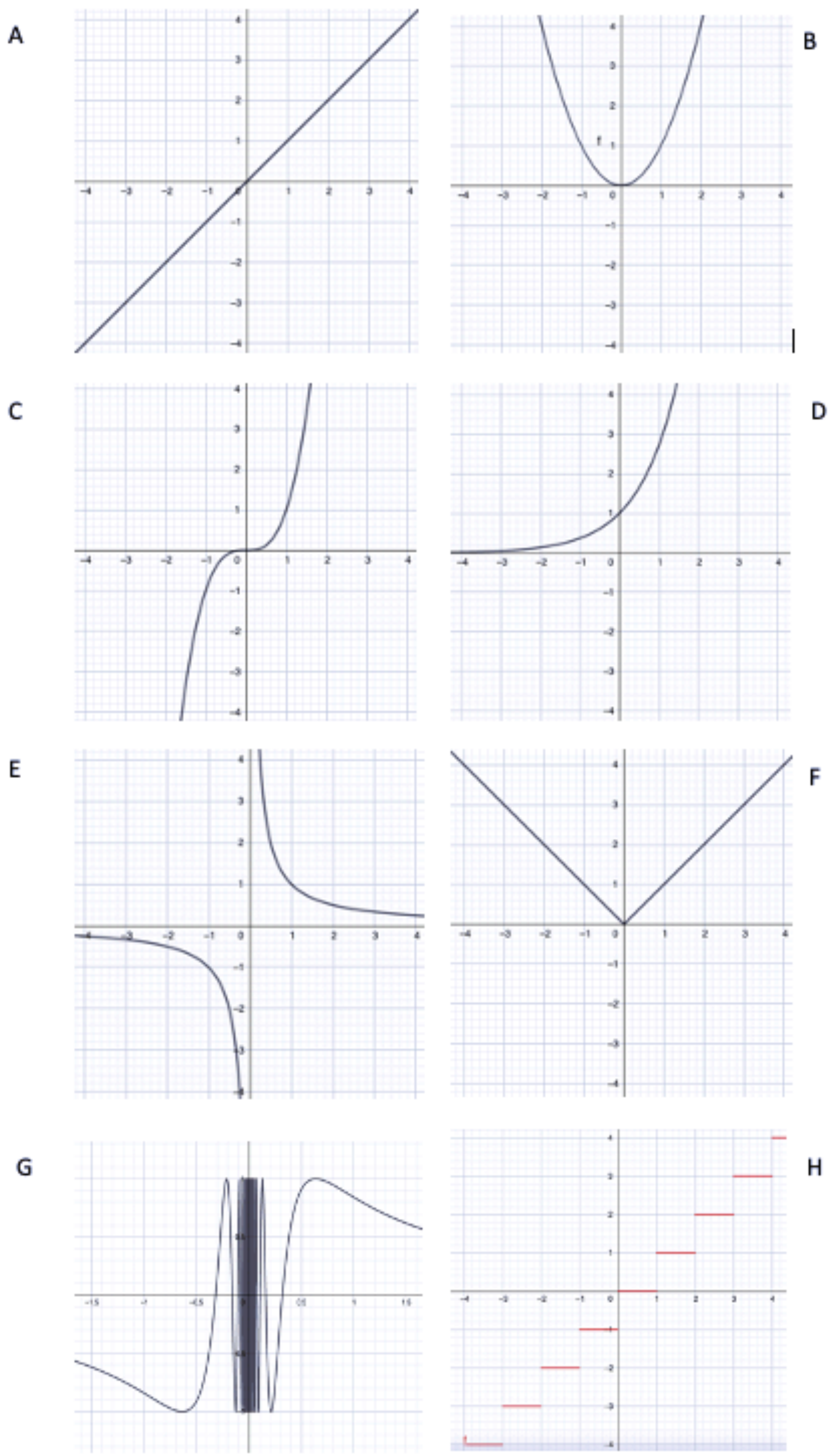
____

____

CFP6. Si una función es continua entonces tiene que ser curva?

a. Si
b. No

CFP7. Cuáles de las siguientes gráficas representan una curva?


A
B
C
D
E
F
G
H

	Curva	No es curva
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

CFP8. La derivada de una función se puede entender analíticamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (en el plano cartesiano). Con base en lo anterior, podría afirmarse que la derivada de una función solo se aplica a curvas?

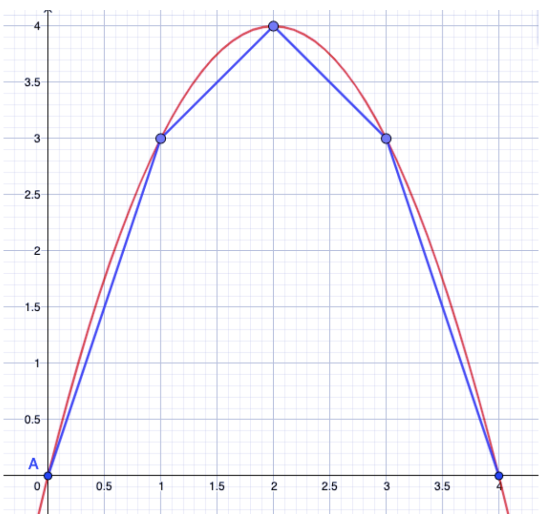
a. Si
b. No

Por qué?

____

____

CFP9. Una suma infinita de segmentos pueden generar una curva?



a. Si
b. No

Por qué?

____

____

CFP10. En una escala de 1 a 5 indique la concordancia (que tan acertada es) de cada definición con respecto a lo que es una curva según sus conocimientos y los adquiridos en el curso (siendo 1 la menor concordancia y 5 la mayor concordancia):

Definición	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Es una línea continua que tiene longitud y no tiene anchura					
Es una sucesión de puntos que cambian constantemente de dirección, es decir, que no es una recta					
Toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito					
Es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos					
El verdadero carácter de una variedad unidimensional (Curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie)					
Es un continuo sin puntos interiores					
Las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas					