

C4

Cuántos empaques. Una propuesta de enseñanza de modelación en diferentes niveles formativos

Olga Emilia Botero Hernández¹
Paula Andrea Rendón-Mesa²
Universidad de Antioquia
Colombia

En el proceso formativo matemático los estudiantes deberían alcanzar una visión que trascienda el utilitarismo del contexto, es decir, se deberían involucrar en el desarrollo de una situación como actores, con el fin de obtener una respuesta que tuviese sentido en correspondencia al contexto que se aproxima. Por su parte, los profesores deberían procurarse porque en las actuaciones de los estudiantes existiera un vínculo entre la matemática y el contexto, como lo confirma los planteamientos de Villa-Ochoa y Berrio [1] cuando mencionan que la modelación posibilita una conexión entre las matemáticas y las experiencias culturales.

En correspondencia con estos argumentos, la propuesta en este capítulo pretende mostrar cómo este contexto particular sitúa el aprendizaje a partir de las necesidades matemáticas que emergen. En dicha lógica, se identifica la situación, es decir, se describe, para que se comprenda el contexto y el propósito formativo. Adicionalmente, se presentan comentarios acerca de posibilidades en el desarrollo de la misma y cómo la evolución de modelos se convierte en una oportunidad de aprendizaje con base en el error. También se indican algunos referentes teóricos que sustentan las visiones de las profesoras que abordan la situación de aprendizaje en diferentes niveles formativos.

Se proponen alternativas evaluativas y algunas ampliaciones en términos de las posibilidades formativas, en correspondencia con los niveles donde se lleva a cabo. Además, se presentan consideraciones acerca de las oportunidades y las debilidades que se pueden encontrar en el proceso de implementación de la situación de aprendizaje.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

Hablar de propuestas de enseñanza para la formación matemática en diferentes niveles requiere reconocer los usos y los alcances que los estudiantes pueden dar a la modelación matemática en relación con la tarea propuesta. Que el profesor, en cuanto a la dinamización, tenga claridad del porqué, qué y cómo modelan los estudiantes, lo que permite adentrarse en particularidades que visiblemente se reconocen en cuestiones que se relacionan con la evolución de modelos, la reflexión que obtienen los estudiantes al modelar la situación y la vinculación de modelos de otras disciplinas [2].

La situación de aprendizaje que se propone se vincula con el desarrollo del pensamiento numérico y geométrico en el ciclo 7 y 8 de la Educación Básica Secundaria y de competencias en ingeniería, particularmente en Ingeniería de Diseño de Producto. La dinámica en dicha situación consiste de un enunciado verbal [8], en el que los estudiantes determinan la mayor cantidad de empaques que se pueden elaborar a partir de un pliego de cartón industrial, cuando se entrega el plano de los mismos. Se espera que vayan más allá de la aplicación de fórmulas matemáticas para el cálculo de áreas y de volúmenes de los

¹ Contacto: olga.botero@udea.edu.co

² Contacto: paula.rendon@udea.edu.co

cuerpos, pues es frecuente que cuando realizan estos procedimientos utilizan fórmulas de memoria o recurren a ellas como único recurso para resolver la situación. En el desarrollo de la situación los estudiantes analizan las diferentes maneras de cómo utilizar la plantilla de la caja en el cartón para obtener la mayor cantidad de cajas como unidad, no como ensamble de ellas.

Si bien la situación se reconoce como un enunciado verbal, no minimiza las prácticas matemáticas ni las restringe, por el contrario, permite que los estudiantes reformulen los procesos, se generen nuevos registros de representación, y se comprenda el contexto en términos formativos como aquello que condiciona la manera de resolver la situación. En correspondencia con el propósito formativo, en la Tabla 1 se describen las metas de aprendizaje, las habilidades y las actitudes que desarrollan los estudiantes para los diferentes niveles para los que se propone esta situación.

Tabla 1. Intenciones formativas de la propuesta

Metas de aprendizaje	Nivel	Relación con documentos rectores propios de cada nivel formativo	Habilidades	Actitudes
Realizar procesos de medición y estimación de superficies y volúmenes, y justifica sus relaciones. Elige las unidades de medida y los instrumentos apropiados, según la situación. Amplia sus comprensiones sobre relaciones entre variaciones de perímetro y área de una figura, de forma que pueda explicarlas y justificarlas. Describe las características de figuras bidimensionales y cuerpos tridimensionales en el desarrollo de situaciones de composición y descomposición. Describe posiciones y trayectorias mediante el uso del plano cartesiano.	7 y 8	Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico. Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras áreas. Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto (Estándares básicos de calidad y Derechos básicos de aprendizaje)	Se espera que los estudiantes desarrollen habilidades en términos de interpretar una situación, tanto desde el punto de vista matemático como del contexto y las condiciones en las que se presenta. En relación con la geometría y los procesos de medición, se espera que desarrollen habilidades relacionadas con el cálculo de áreas irregulares, mediante la aplicación de los conocimientos que poseen frente al cálculo de áreas regulares.	Mediante la implementación de esta tarea de modelación se espera que los estudiantes desarrollen y afiancen actitudes relacionadas con la indagación, la perseverancia y el análisis de resultados, en correspondencia con las condiciones particulares de la situación que analizan.
Resuelve problemas con iniciativa, toma decisiones, creatividad, razonamiento crítico. Comunica y transmite conocimientos, habilidades y destrezas en el campo de la Ingeniería de diseño.	Ingeniería de diseño	Esta situación de aprendizaje pretende dinamizar las cinco áreas de formación de un ingeniero (ciencias básicas, ciencias básicas de ingeniería, área de aplicación profesional, área económico-administrativa, área socio-humanística) y abordar problemáticas típicas, donde deba crear e innovar en las soluciones propuestas. Además de vincular en su actuación el pensamiento científico y concebir de manera global el ejercicio de su profesionalización.	A nivel ingenieril esta situación de aprendizaje posibilita que el futuro ingeniero ponga en juego su habilidad para conceptualizar y materializar un empaque.	De acuerdo con la manera como se dinamiza la situación de aprendizaje, los futuros ingenieros deben despertar sus aptitudes para el trabajo en equipo, su manera polifacética de asumir un contexto y resolver la situación-problema propuesta, y potencializar su ingenio y creatividad.

1.2 Desarrollo de la situación

En este apartado se describe la propuesta y se precisan los diferentes momentos en los que se dinamiza la situación de modelación, así como la configuración del ambiente de aula. La situación propuesta es la siguiente: Suponga que el empaque de la Figura 1 se debe elaborar de cartón industrial. El tamaño de un pliego de este material es de 100 x 70 cm. De acuerdo con esta información responda las siguientes

preguntas: 1) ¿Cuántos empaques se pueden realizar por pliego? Describa las ideas discutidas con sus compañeros de equipo y el procedimiento realizado para responder la pregunta. 2) ¿Cuál es la superficie utilizada y el porcentaje de desperdicio en la fabricación del empaque? ¿Cómo estimaron en el grupo el porcentaje de desperdicio?

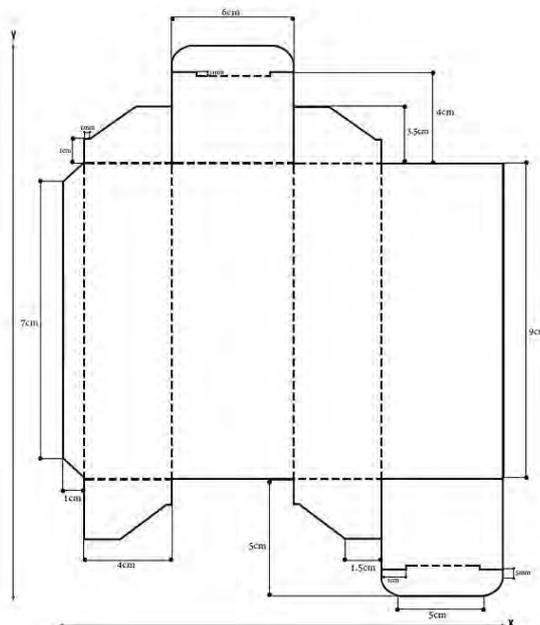


Figura 1. Empaque de producto (Plano de empaque)

Si bien la situación parte de un enunciado verbal, tiene diferentes momentos de intervención:

1. Se espera que los estudiantes analicen la manera de disponer una plantilla para elaborar una caja de dimensiones preestablecidas en un pliego de cartón industrial, también de dimensiones fijas, de manera tal que se obtenga la mayor cantidad de empaques. Para este asunto se pregunta: ¿cuántos empaques? Usualmente, en este primer momento de acercamiento, los estudiantes recurren a calcular el área del empaque y el área total del pliego de cartón, para luego llevar a cabo una división y determinar cuántas veces *cabe* el área de la caja en el área total del cartón. Aunque este procedimiento es matemáticamente correcto ignora el contexto y la configuración de unidad.
2. A partir de estas reflexiones los estudiantes perciben la necesidad de reformular el modelo y comprender la solución, más allá de operaciones matemáticas. Mediante preguntas acerca de ¿cómo se pueden acomodar la plantilla en el pliego de cartón para hacer los cortes? se espera que los estudiantes reflexionen acerca de la necesidad de acomodarlas mediante un arreglo rectangular, que no coincide con la cantidad de cajas que arrojó previamente la división de las dos áreas.
3. Los estudiantes estudian las disposiciones espaciales del empaque (horizontal o vertical) que los lleva a establecer relaciones entre el largo y el ancho del pliego, el largo y el ancho total de la plantilla y a analizar la variación si se utiliza horizontal o verticalmente. 4) Se espera que algunos estudiantes decidan recortar las plantillas y la superpongan, de manera que puedan darse cuenta de la posibilidad de acoplarlas y optimizar la superficie del pliego de cartón.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Cada momento de la modelación demuestra la evolución de los modelos y cómo se consolidan a partir de sistemas de explicación, que no son ajenos ni para los estudiantes de Básica Secundaria ni para los de ingeniería, tales como considerar las dimensiones de un empaque, posición espacial, desperdicio y otros conceptos implícitos en la situación propuesta. Además, la evolución de modelos les permite a los estudiantes de ambos contextos ampliar las ideas sobre el fenómeno de estudio y reorientar sus procesos, con el objetivo de reconocer los significados que asociaron con la situación contextual propuesta y, por tanto, reformularla.

Según Lesh y English [4] la evolución de los modelos demuestra que, en la modelación matemática, los modelos dan cuenta de los aprendizajes matemáticos de los estudiantes, y por ello hacen uso de modelos más sofisticados que los que se les enseñan. Dicho planteamiento se sustenta, por ejemplo, en el tercer momento del proceso, puesto que, aunque los estudiantes de ingeniería tienen claridades en términos, conceptos y procesos numéricos, variacionales y geométricos, no se limitan a ellos, sino que, de manera autónoma, pueden recurrir al uso de software para proponer soluciones que dinamizan los aprendizajes y extenderlos a su futuro campo de acción.

En otras palabras, la evolución de los modelos demuestra que los estudiantes alcanzan desarrollos conceptuales y les permite expresar, probar y revisar sus maneras de pensar. Esta forma de actuar sobrepasa el hecho de que sean guiados a lo largo de una trayectoria conceptual, puesto que les permite asumirse como partícipes del proceso formativo. En este sentido, la modelación matemática pasa de ser un asunto estático a una construcción dinámica, que contribuye con la solución de una situación [5].

Al realizar las tareas de modelación las ideas matemáticas de los estudiantes no permanecen neutrales, al contrario, se transforman, pero con relación a algunos aspectos culturales relacionados con el uso de un empaque, y para el caso ingenieril, su diseño. El contexto se convirtió en un *elemento constitutivo del conocimiento que proporciona un sistema cultural de referencia para la actividad matemática* [1].

Los estudiantes, tanto de nivel universitario como escolar, pusieron en juego las relaciones entre los modelos y el contexto, como se evidencia en las acciones que realizaron para determinar la cantidad de empaques óptima para un pliego de cartón. Participaron de la práctica cultural cuando crearon los planos del producto, estimaron cálculos para conocer las magnitudes y crearon bocetos para comprobar los resultados, acciones que les ayudaron a aprender acerca de los empaques, los envases y las regularidades, entre otros.

En el aula se propusieron situaciones que permitieron convertir el contexto desde un instrumento a un referente cultural, es decir, se involucraron conceptos, acciones, procesos y recursos que ayudaron a distinguir y caracterizar el proceder común o profesional. Generar dicho referente cultural ayudó a los estudiantes a aprender de dos disciplinas en simultánea, en este caso, de las matemáticas y del diseño de producto.

De acuerdo con la experiencia que vivieron los estudiantes al involucrar los modelos del sujeto y los objetos (el que modela y el que se modela), se generó entre ellos una relación de representación que aportó a la significación. A partir de las situaciones los estudiantes crearon modelos que ayudaron a significar la situación, es decir, expresar y representar los conceptos que se asocian con ella.

El hecho de que los estudiantes debieran generar modelos para estimar la cantidad posible de empaques para un pliego de cartón, da cuenta de la relación entre usuario-fenómeno-modelo. Una relación que evidencia la articulación que propicia la modelación matemática entre los conocimientos matemáticos y específicos de un campo de formación, como en el caso del diseño de producto, que no es automática ni se deriva de manera directa del estudio de fenómenos elegidos por los estudiantes. Al implementar la modelación matemática se propicia un ambiente en el que se concibe la reflexión y se problematiza acerca de la utilidad de las formas y los objetos matemáticos frente a una oportunidad de diseño.

En general, cuando el conocimiento se desarrolla a través de procesos de modelación, el conocimiento y las herramientas conceptuales que se desarrollan alcanzan otro nivel de apropiación, uso, evolución y reformulación. Los modelos están configurados por las situaciones en que se crean o modifican, y los entendimientos que evolucionan se organizan alrededor de la experiencia y de las abstracciones. Sin embargo, los modelos y los sistemas conceptuales subyacentes, que a menudo evolucionan, representan formas generalizables de pensar, es decir, no son simplemente situaciones de conocimiento específico que no se transforman.

Las actividades, las herramientas y la cultura, aquella que se relaciona con el diseño de un empaque, con las que se vincularon los estudiantes, permitieron la evolución de los modelos, lo que conlleva a desarrollar

de manera más detallada la situación y proponer una solución legítima, lo que demuestra cómo los estudiantes relacionan el saber y el hacer, como se evidencia en relación con el cálculo de las superficies y al realizar el plano a escala del empaque.

La situación de modelación propuesta conduce a los estudiantes a comprender qué se estudia, establecer variables en juego, esquematizar de manera gráfica o tabular la situación, diseñar estrategias, realizar cálculos matemáticos, emplear procedimientos, comprobar las soluciones, replantear las acciones y, por tanto, a buscar la generalidad de la situación con relación al diseño de un empaque. A partir de un modelo inicial los estudiantes avanzaron, utilizaron procedimientos sistemáticos y descubrieron más de un modo de resolver un problema en el marco de una cultura para el diseño de producto.

3. EVALUACIÓN

La situación de modelación propuesta en este capítulo permite llevar a cabo estimaciones y cálculos de áreas, tanto de figuras regulares como irregulares, al tiempo que analizar aspectos relacionados con la orientación de las figuras y las relaciones entre el largo y el ancho, y cómo inciden en la cantidad de cajas que se pueden elaborar con el pliego de cartón industrial. En dicho sentido se sugiere proponer situaciones similares que dinamicen el empleo de otro tipo de figuras geométricas y posibiliten la replicabilidad del proceso. Por tanto, las configuraciones evaluativas, más que valorar el alcance de una respuesta correcta en cuanto a *cuántos empaques se pueden construir*, implica reconocer el proceso, las modificaciones y las evoluciones de los modelos, asunto que configura un proceso cualitativo y descriptivo.

Para alcanzar estas puestas de la evaluación en términos de carácter formativo, se sugiere que la situación de aprendizaje se valore a partir de rúbricas, que relacionen las metas de aprendizaje y que considere los diferentes momentos de su implementación. Un ejemplo de este elemento se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Rúbrica de evaluación

	1,25 puntos	1,0 puntos	0,5 puntos
Cálculo del área de las partes	Calcula correctamente el área de cada parte de la caja sin omitir ninguna.	Omite algunas de las partes de la caja o realiza un cálculo erróneo en el panel, menos una de las partes.	Omite más de una parte o realiza cálculos erróneos en más de una parte.
Presentación del trabajo	Presenta los diferentes cálculos realizados y el trabajo se puede interpretar con claridad.	Solo indica respuestas y el trabajo no se interpreta con claridad.	Omite cálculos o respuestas parciales y el trabajo no se interpreta con claridad.
Utiliza correctamente las unidades de área y de longitud, según corresponda	Utiliza correctamente todas las unidades de área y de longitud, según corresponda.	Omite la unidad de medida o la escribe de forma incorrecta en máximo 3 medidas.	Omite la unidad de medida o escribe de forma incorrecta en más de 3 medidas.
Exactitud del cálculo	Obtiene un resultado entre 289 cm ² y 292 cm ² .	Obtiene un resultado entre 270 cm ² y 292 cm ² o entre 292 cm ² y 324 cm ² .	Resultado menor a 270 cm ² o mayor a 324 cm ² .

En el caso de los ingenieros la situación de aprendizaje puede dinamizar las áreas de formación y reconocer las necesidades puntuales para su futuro campo de desempeño, como se ilustra en la rúbrica de la Tabla 3.

Tabla 3. Rúbrica de evaluación para ingenieros

Área	Ítem Evaluado	Desempeño		
		Alto	Medio	Bajo
Contexto	Reconoce las necesidades del usuario y del contexto, y los requerimientos técnicos del producto que se espera elaborar a partir de la cuantificación de las variables involucradas.			
Diseño	Realiza procesos para definir las proporciones de las formas del producto.			
	Aplica el proceso de geometrización para definir las proporciones del producto.			
Ingeniería	Emplea planos del producto para soportar el análisis de proporciones.			
	Realiza procedimientos matemáticos que justifican los requerimientos funcionales de la solución, por ejemplo, cálculo de volúmenes, áreas, perímetros, caudal, temperatura y carga máxima, entre otros.			

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

A continuación, se describen diversas situaciones que pueden servir de ampliación para orientar a los estudiantes hacia el aprendizaje de nociones espaciales y métricas.

4.1 Empaque de un CD

En la Figura 2 se presenta el empaque de un CD que se diseña para un grupo de música electrónica [6], una situación es similar a la que se propone en este capítulo.



Figura 2. Empaque del CD que se diseña [6]

La agrupación pretende crear una pirámide azul para que las personas coloquen en sus casas. El diámetro del CD es 12 cm y las caras laterales son triángulos equiláteros. Este contexto le posibilita al estudiante determinar la cantidad de empaques que se pueden realizar con un pliego del material correspondiente. Al mismo tiempo, reconocer el volumen de la figura decorativa que se genera.

4.2 Construcción de una bolsa para colores

Al construir su propia bolsa para colores [7] se pregunta a los estudiantes si un estuche de lápices personalizado es exactamente del tamaño correcto para la cantidad de bolígrafos, lápices, etc., que generalmente utilizan. Se les propone construir uno. Se plantean algunas preguntas iniciales antes de comenzar a planificar el diseño:

- ¿Cuánto mide el bolígrafo, el lápiz, la regla u otro objeto largo que desee guardar en el estuche?
- ¿Cuántos bolígrafos, lápices, etc. quiere guardar en el estuche?
- Si los agrupa todos juntos y los mide alrededor con un trozo de cuerda, ¿qué diámetro para el estuche de lápices necesita?
- Cuando haya decidido las dimensiones del estuche de lápices, piense qué forma sería una buena idea. Bien puede decidir que un prisma cilíndrico, cuboides o triangular, hexagonal u octogonal funciona bien.
- ¿Cómo se ve la plantilla de la forma que quiere?
- ¿Cuántas piezas independientes necesitas?
- ¿Qué forma tiene cada pieza?
- ¿Qué lados deben encajar? Intente modelar la red de su estuche de lápices con papel, doblar la red de papel para darle forma y pegarla con cinta adhesiva. ¿Funciona? ¿Es del tamaño adecuado para sus bolígrafos y lápices?

Una vez que esté satisfecho con su prototipo de papel, debe decidir qué materiales utilizará para el producto real. ¿Tiene que ser un material rígido o podrías usar tela reciclada? ¿Necesitará modificar las medidas en su diseño para utilizar el material elegido? ¿Quiere el mismo material para todas las piezas, o los extremos pueden estar hechos de algo diferente al resto? ¿Cómo pegar o unir las piezas? ¿Quiere poner un diseño en

alguna de las piezas antes de confeccionar el estuche? ¿Cómo se asegurará de que el estuche de lápices permanezca cerrado?

Se sugiere explorar con los estudiantes las diferentes bolsas de colores que utilizan, las características y las especificaciones del diseño, con el ánimo de que utilicen las habilidades desarrolladas a partir de la situación inicial de los empaques y reflexionen acerca del volumen de diferentes prismas y sus plantillas correspondientes, necesarias para el diseño inicial de la bolsa de colores.

Esta alternativa de la actividad se puede llevar a cabo en diferentes momentos: 1) *inicial*: corresponde a la identificación de los requerimientos necesarios para almacenar los lápices y materiales de cada estudiante; 2) *empleo de nociones geométricas y de procesos de medición*, para dar respuesta a las características que debe poseer la bolsa de colores según los requerimientos establecidos en el momento inicial; y 3) *elaboración de prototipo* de la bolsa de colores y primer diseño, que responda a las condiciones de material y elaboración final.

5. CONCLUSIONES

Tal como se ha marcado en la situación de aprendizaje, la evolución de modelos puede contribuir a la configuración de una modelación que no se asume como estática, ni de procesos inmediatos o respuestas absolutas, sino que, por el contrario, asume un proceso dinámico, paulatino, que pone en correspondencia las necesidades del contexto.

De esta forma las matemáticas adquieren sentido al proponer soluciones referidas al contexto que se dinamiza.

La situación de aprendizaje muestra las configuraciones en torno a la enseñanza-aprendizaje de la modelación en diferentes niveles de formación. Además, sobre cómo un enunciado verbal se puede dinamizar cuando se amplían las relaciones experienciales para movilizar los procesos de la actividad matemática, tanto en estudiantes de básica secundaria como de ingeniería.

REFERENCIAS

- [1] Villa-Ochoa J. y Berrio M. (2015). Mathematical modelling and culture-an empirical study. En Stillman G. et al. (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 241-250). Springer.
- [2] Rendón-Mesa P. (2017). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: Aportes de la modelación matemática*. Disertación doctoral. Universidad de Antioquia, Colombia.
- [3] Villa-Ochoa J. et al. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural* 18(36), 219-251.
- [4] Lesh R. y English L. (2005). Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *ZDM* 37(6), 487-489.
- [5] Gainsburg J. (2013). Learning to model in engineering. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(4), 259-290.
- [6] Snorradóttir D. (2013). Empaque de CD. Recuperado: <https://www.packagingoftheworld.com/2013/05/sometime-acid-make-out-cd-packaging.html>
- [7] Universidad de Cambridge. (2015). Make your own pencil case. Proyecto NRICH. Recuperado: <https://nrich.maths.org/8342>
- [8] Villa-Ochoa J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Revista Internacional de Investigación en Educación* 8(16), 133-148.