El proceso de la comunicación para favorecer el aprendizaje del concepto de función en la clase de matemáticas

Mayra Alejandra Morrón Bogallo

Trabajo de grado para optar al título:
Licenciada en Matemáticas

Asesor
Jorge Andrés Toro Uribe, Doctor en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Medellín, Colombia
2023

Cita	(Morrón-Bogallo, 2023)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Morrón-Bogallo, M. A. (2023). *El proceso de la comunicación para favorecer el aprendizaje del concepto de función en la clase de matemáticas* [Trabajo de grado]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Vicerrectoría de Docencia

Sistema de Bibliotecas

Centro de Documentación UdeA Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes

Decano: Wilson Antonio Bolívar Buriticá

Jefe departamento: Cártul Vargas Torres

Dedicatoria

Este trabajo de grado se lo dedico con amor y gratitud a mi familia, quienes han sido mi ancla y mi fuente de inspiración a lo largo de esta travesía académica. En los días grises y difíciles, ellos han sido mi refugio, mi apoyo inquebrantable y mi razón para seguir adelante. Cada sonrisa, cada palabra de aliento y cada gesto de amor que he recibido ha sido la chispa que iluminó mi camino, impulsándome a esforzarme y a superar obstáculos. Ellos son mi mayor motivación, el motor que me ha impulsado cada día a ser mejor, a perseguir mis sueños y a alcanzar metas que en algún momento parecían inalcanzables.

Agradecimientos

A Dios por su presencia en este recorrido académico.

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor Jorge Andrés Toro Uribe, cuyo papel ha sido fundamental en la elaboración de mi trabajo de grado. No solamente me guio hacia la consecución de este importante logro académico, sino que lo hizo con una excepcional habilidad para transmitir conocimientos de manera clara y accesible. Además, quiero enfatizar su calidad humana, ya que es una persona que muestra respeto hacia sus estudiantes, y su disposición para brindar apoyo en todo momento ha enriquecido de manera significativa mi experiencia de investigación. Su dedicación a mi crecimiento académico y su generosa disposición para compartir sus conocimientos y experiencia han sido verdaderamente inspiradores.

A mis compañeros por compartir sus conocimientos y alegrías a lo largo de esta travesía llamada Práctica Pedagógica.

A mis amigos que me han brindado su apoyo y me han dado ánimos para seguir construyendo conocimiento.

A la Institución Educativa Compartir, a los estudiantes del Semillero de Matemáticas y al grado 10°3, por compartir sus conocimientos y brindarme la experiencia de ser su profesora de matemáticas en este recorrido.

A la Universidad de Antioquia, la Facultad de Educación y a los profesores que marcaron mi proceso académico.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Siglas, acrónimos y abreviaturas

NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
PEI	Proyecto Educativo Institucional
ZDM	*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*
UAI	Unidad de Apoyo Integral
PTA	Programa Todos Aprender
SIATA	Sistema de Alerta Temprana del Valle de Aburra
EOS	Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos
EBC	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas
MEN	Ministerio de Educación Nacional

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo *favorecer el proceso de la comunicación en estudiantes de décimo grado a partir de tareas relacionadas con funciones lineales*. En este trabajo se definieron tres líneas que marcaron una ruta para el marco teórico; el primero, asociado a la comunicación en la clase de matemáticas, el segundo, con los niveles de algebrización y, por último, el concepto de función. Por otro lado, en este estudio se implementa la investigación de diseño, en específico el experimento de enseñanza, desarrollado en tres fases: diseño de las tareas, implementación y análisis retrospectivo con 14 estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Compartir. Como resultado del análisis de las tareas se encontraron varias palabras clave que permitieron dar cuenta de algunos elementos sobre la comunicación en la clase de matemáticas, al igual se identificaron ciertos niveles de algebrización en los estudiantes al finalizar cada una de las tareas analizadas. Por último, se plantean las conclusiones y recomendaciones del estudio que dan cuenta del logro del objetivo planteado en el estudio.

Palabras clave: comunicación en Educación Matemática, concepto de función, algebrización, tareas.

Abstract

This research aims to enhance the communication process in tenth-grade students through tasks related to linear functions. In this work, three lines were defined to guide the theoretical framework: the first, associated with communication in the math classroom; the second, with levels of algebraization; and finally, the concept of function. Furthermore, this study implements design research, specifically the teaching experiment, conducted in three phases: task design, implementation, and retrospective analysis with 14 tenth-grade students from the Compartir Educational Institution. As a result of the task analysis, several keywords were found that shed light on various issues related to communication in the math class, and certain levels of algebraization were identified in the students upon completing each of the analyzed tasks. Finally, the study presents the conclusions and recommendations that reflect the achievement of the study's objective.

*Keywords***:** communication in Mathematics Education, function concept, algebrization, tasks.

Capítulo 1: Introducción

"La práctica pedagógica es la oportunidad de transformar el aula en un espacio de aprendizaje significativo, donde se fomenta la participación activa y crítica de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento" Paulo Freire

1.1. Descripción del contexto

La Práctica Pedagógica que se desarrolla en el aula de clase es la esencia del quehacer del profesor en formación, en este espacio concurren historias, culturas y diversidad de pensamientos que generan espacios de interacción y diálogo, el cual permite conocer y diversificar el conocimiento en los espacios de aula. El relato de experiencia de aula que se presenta en este documento fue producto de la Práctica Pedagógica, las discusiones generadas en el Seminario de Práctica y los escenarios formativos que generaron reflexiones y diálogos sobre la necesidad de involucrar la comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la clase de matemáticas.

Esta experiencia se llevó a cabo en la Institución Educativa Compartir[1], la cual está ubicada en San Antonio de Prado, corregimiento del municipio de Medellín, en la carrera 62A #42D Sur 26. La institución se encuentra en la zona urbana del corregimiento y es de carácter urbano, oficial, mixto y calendario A. La misión de la Institución Educativa Compartir es ofrecer un proceso educativo con calidad, que la consolide como una Institución Educativa para la ciencia, la cultura y la tecnología, donde la formación humana sea en pro para la vida de toda la comunidad educativa. Para alcanzar este fin, la Institución Educativa Compartir imparte educación formal en los niveles de Preescolar, Educación Básica y Media; la Media se presta en las modalidades académica y media técnica con énfasis en Diseño de Multimedia, y las jornadas que ofrece son en la mañana y en la tarde.

La Institución Educativa cuenta con un rector, dos coordinadores, una psicóloga del entorno protector, 35 profesores de primaria y bachillerato y alrededor de 1.100 estudiantes. También, cuenta con programas de la secretaría de educación de Medellín, como la Unidad de Apoyo Integral

[1] Ver consentimiento de la Institución Educativa Compartir
https://drive.google.com/drive/folders/1TETyzEO5QA2ULmjZL5ziaBuY-VoTRWY0

(UAI) cuyo propósito es atender a los estudiantes con barreras educativas y el programa Todos a Aprender (PTA). La Institución Educativa Compartir se acoge al modelo pedagógico Desarrollista Social y está organizada en cuatro gestiones: administrativa, directiva académica y comunitaria, lo cual da fundamento al Proyecto Educativo Institucional PEI, en donde está consagrado la información de esta como: los principios y fundamentos, los objetivos, el manual de convivencia, el gobierno escolar, el reglamento del docente, estrategias pedagógicas, proyectos pedagógicos, entre otros aspectos involucrados en la institución.

En el primer semestre de práctica, entre el mes de agosto y noviembre de 2022, dado el interés de vincular las matemáticas con diferentes fenómenos de variación y cambio, se desarrolló la dinámica de observación y participación por parte de la profesora en formación[2] al Club de Ciencias de la Institución Educativa Compartir. Este espacio fue dirigido por la profesora cooperadora con ayuda de una formadora del SIATA de Medellín[3]. Los encuentros se realizaban los viernes de 12:00 a 1:30 pm y asistían estudiantes desde el grado segundo hasta el grado once. Se abordó la temática de la meteorología a partir de diferentes clases experimentales, donde se realizaron varios experimentos[4] como la construcción de una nube dentro de una botella, un termómetro análogo, experimentos con sensación térmica y con vientos alisios que representa el comportamiento de las masas de aire. Cada uno de estos espacios propició la participación de los estudiantes, el cual fomentó la interacción a través de la práctica y la experimentación con diversos materiales. En estos entornos, tanto estudiantes como profesores se involucraron a partir de preguntas y respuestas, con el fin de construir un ambiente comunicativo. En línea con lo anterior, Espinosa et al. (2010) plantean que la pregunta y la respuesta como técnica de enseñanza y aprendizaje cumplen el propósito de facilitar el proceso de comunicación, ya que fomenta la retroalimentación y permite llegar a consensos para analizar la finalidad de la pregunta y de la respuesta.

Al mismo tiempo, se realizó una intervención de aula en el grado noveno el día 14 de septiembre del 2022, con el acompañamiento de la profesora de la asignatura de física. La experiencia de aula consistió en la ejecución de una Guía diseñada por la profesora en formación

---

[2] Autora del trabajo.
[3] Sistema de Alerta Temprana del Valle de Aburrá [SIATA].
[4] Ver Anexo 1: Club de Ciencias.
https://drive.google.com/drive/folders/1xfiMN_zDwSsH0xuLaJdUvGerNEjxhuxJ?usp=sharing

en torno a desplazamiento y trayectoria[5]. La primera parte de la Guía hacía alusión a la realización de una narrativa sobre la rutina que empleaban los estudiantes para llegar a la Institución Educativa al tener en cuenta el desplazamiento, la trayectoria y otros conceptos matemáticos. En la segunda parte de la Guía se hizo alusión a la construcción de un circuito a partir de instrucciones, con el fin de realizar la representación de la trayectoria y la gráfica de los resultados obtenidos en el recorrido del circuito.

Posteriormente, se llevó a cabo el primer Encuentro Corregimental de Profesores de Matemáticas[6] el día 13 de octubre del 2022, dirigido a profesores de matemáticas del corregimiento de San Antonio de Prado. En este encuentro hubo una conferencia inaugural y luego tres talleres con diferentes temáticas como la Comunicación en la clase de matemáticas, la Exploración del *GeoGebra* y el Álgebra temprana.

De otro lado, el segundo semestre de práctica tuvo lugar entre el mes de febrero y junio de 2023. La Institución Educativa realizó una convocatoria para los estudiantes interesados en pertenecer a los Semilleros de Matemáticas, los cuales serían orientados por profesores en formación de la Universidad de Antioquia. De manera particular, se llevó a cabo un acompañamiento a estudiantes del grado séptimo con edades que oscilan entre 11 y 12 años, con el fin de fortalecer temas que se abordaban en los espacios de aula convencional mediante unas Guías[7] diseñadas por la profesora en formación. El Semillero de Matemáticas dio inicio con una asistencia de 13 estudiantes, pero a medida que pasaba el tiempo la deserción de estudiantes se notó debido a otras ocupaciones o desinterés de los estudiantes, por lo cual la participación terminó siendo de ocho estudiantes. Los encuentros del Semillero de Matemáticas se realizaron los viernes entre las 12:00 y la 1:00 de la tarde, donde posibilitó la participación de los estudiantes, tanto de manera escrita como oral.

Simultáneamente, se realizó el trabajo de campo en la Institución Educativa Compartir con estudiantes del grado décimo, en el cual se abordaron tareas relacionadas con las funciones lineales

---

[5] Ver Anexo 2: Guías de física https://drive.google.com/drive/folders/1Mg3fPWzxEhii09pvQzouB8-UtGNT4dYv?usp=sharing
[6] Ver fotografías en la carpeta Primer Encuentro Corregimental de Profesores de Matemáticas https://drive.google.com/drive/folders/1Xt29rJls0I_eWawYr9Gw4GCMBCyOyCTr?usp=sharing
[7] Ver Anexo 3: Semillero de Matemáticas https://drive.google.com/drive/folders/1AZm4S71G6f1ZsNOt4TV9srfEQWS6AekT?usp=sharing

desde la comunicación. El primer encuentro se efectuó el día 28 de abril de 2023 en un horario de 10:00 am a 12:00 m, donde la profesora en formación abordó una tarea relacionada con la variable dependiente e independiente a partir de un relato contextualizado y otra tarea que abordó la función lineal mediante una situación de la vida real. El segundo encuentro tuvo lugar el 12 de mayo de 2023, desde las 10:50 am hasta las 12:00 m. Durante este encuentro, la profesora en formación implementó dos tareas, la primera tarea consistió en identificar tres errores en un procedimiento dado, y luego justificar o explicar la forma correcta de resolver el problema. La segunda tarea se centró en el reconocimiento de las propiedades de las funciones lineales, tales como la inclinación, la pendiente, la ordenada al origen y la graficación de coordenadas, con el fin de dar solución a la situación problema planteada.

1.2. Planteamiento del problema y justificación

A través del encuentro con el grado noveno en el 2022 se identificaron algunas dificultades relacionadas con la identificación de la variable dependiente e independiente, al igual con la realización de gráficas de coordenadas en el plano cartesiano. Durante el encuentro se desarrolló una Guía[8] en equipos colaborativos sobre desplazamiento y trayectoria. La primera parte de la Guía hacía alusión a la realización de una narrativa sobre la rutina que empleaban los estudiantes para llegar a la Institución Educativa teniendo en cuenta el desplazamiento, la trayectoria y otros conceptos matemáticos. A propósito de lo anterior, Espinosa et al. (2010) plantean que la realización de narrativas exige que los estudiantes organicen ideas para producir un texto, al igual permite generar discusión y un proceso de relectura que induce al estudiante aclarar lo que él mismo escribió, permitiendo nuevos significados e interpretaciones.

Durante la ejecución de este apartado de la Guía los estudiantes realizaron estimaciones sobre la distancia y el tiempo que usan para desplazarse de un lugar a otro, los estudiantes para representar la información utilizaron gráficas en el plano cartesiano y planos de los lugares donde habitan. Sin embargo, se encontraron falencias al momento de representar la información contenida en las distintas narrativas propuestas por los estudiantes, ya que algunos no lograron distinguir la

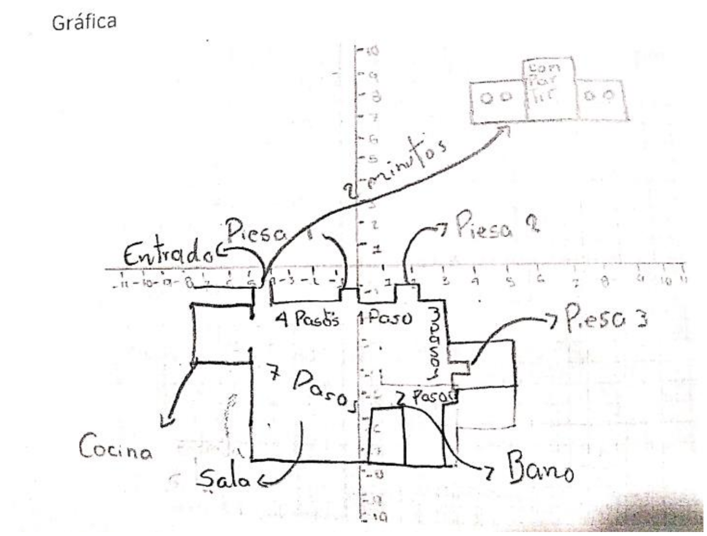
---

[8] Ver carpeta Anexo 2: Guías de física https://drive.google.com/drive/folders/1Mg3fPWzxEhii09pvQzouB8-UtGNT4dYv?usp=sharing

variable dependiente y la variable independiente de la información contenida en sus narrativas y algunos estudiantes de noveno tienen aún una interpretación informal e intuitiva de representación de la información como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1

Representación gráfica de la narrativa de uno de los equipos



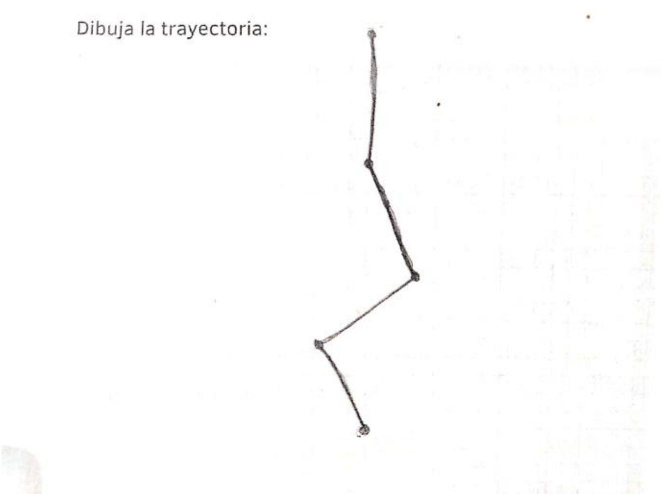
Nota. Fuente archivo personal de la autora

Por lo cual, uno de los trabajos a realizar en la clase de matemáticas es fomentar en el estudiante un lenguaje y una representación formal de las matemáticas. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) mencionan que “la comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas” (p.74); esto quiere decir, que la comunicación permite realizar un nexo entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje formal de las matemáticas, en donde el estudiante sea capaz de referirse al objeto matemático en estudio a partir de un lenguaje más formal de las matemáticas. Este proceso se desarrollará gradualmente a medida que se lleven a cabo construcciones en las aulas de clase, sin interrumpir de inmediato el lenguaje cotidiano. En lugar de eso, el profesor tiene la tarea de guiar al estudiante hacia la formación de un lenguaje que se origina en las experiencias cotidianas de los alumnos, permitiendo que estas experiencias se aprovechen de manera progresiva hacia la comprensión de conceptos más formales.

En el segundo momento de la Guía se hizo alusión a la construcción de un circuito a partir de instrucciones que los estudiantes debían desarrollar, para luego realizar la representación de la trayectoria y la gráfica de los resultados obtenidos en el recorrido del circuito. En esta parte, algunos estudiantes no lograron realizar los seis trayectos que se pretendían en las instrucciones, sino que algunos solo tuvieron en cuenta cinco o cuatro trayectos de los seis propuestos. Al igual, hubo estudiantes que no tuvieron en cuenta la unidad de medida (pasos) para la construcción de la trayectoria y tampoco lograron tener en cuenta que, si la posición inicial y final coinciden en una trayectoria, esta sería nula. A continuación, se ilustra en la Figura 2 la construcción de la trayectoria por uno de los equipos.

Figura 2

Trayectoria realizada por uno de los equipos



Nota. Fuente archivo personal de la autora.

Cabe resaltar que esta Guía se realizó en equipos colaborativos, los cuales tenían asignados unos roles, esto con el fin de estimular la comunicación y el intercambio de ideas entre los estudiantes, con el fin de generar una construcción de significados, reflexiones, análisis e intercambio de interpretaciones de situaciones o conceptos matemáticos. En esta misma línea, Jiménez y Pineda (2013) mencionan que el trabajo en equipo es una estrategia que podría favorecer la participación de los estudiantes, pues permite que cada uno logre expresar y exponer sus consideraciones en torno a sus roles.

Por medio de la intervención con el grado noveno se identificó la necesidad de generar espacios que promovieran la comunicación en la clase de matemáticas, ya que es importante destacar que la comunicación es fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dado que permite a los estudiantes expresar sus ideas y comprender las ideas de otros. También, se ve la necesidad de diseñar tareas que promuevan las representaciones multimodales (Erath et al., 2021) en las clases, ya que en la Guía implementada se evidenció las dificultades que poseían algunos estudiantes para representar trayectos de acuerdo con las notaciones del plano cartesiano.

Por lo anterior, el profesor de matemáticas para favorecer la comunicación debe implementar "tareas que conecte el lenguaje y las distintas representaciones multimodales" (Erath et al., 2021, p. 248), esto con el fin de mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes. De acuerdo con lo anterior, se busca aportar a la investigación en Educación Matemática a través de elementos que permitan un acercamiento a las funciones lineales, debido a que es necesario diseñar tareas que fomenten la interacción y el diálogo para una mayor comprensión y consolidación de los conceptos abordados en el aula. Igualmente, se ha identificado que las funciones lineales son un tema fundamental en la educación secundaria, y que su comprensión es importante para el desarrollo de habilidades matemáticas. Por tanto, se considera que el diseño de tareas que permiten a los estudiantes aproximarse a las funciones lineales desde diferentes perspectivas, puede ser una estrategia para fomentar la comunicación y la interacción de este objeto matemático.

Para lograr una comunicación en la clase, los profesores deben promover una comunicación efectiva en la que los estudiantes tengan la posibilidad de interactuar, expresar sus opiniones y criterios libremente y en donde la comunicación se dé de manera bilateral, es decir, no solo entre el profesor y el estudiante, sino también entre los propios estudiantes (Castillo, 2011). Por lo cual, la comunicación en la clase de matemáticas depende en gran medida de cómo el profesor enfoque la clase. Si el profesor la concibe como un conjunto de verdades absolutas, la comunicación se convierte en un monólogo en el que no hay una participación activa por parte del estudiante, sino que simplemente escucha al profesor. Por otro lado, si el profesor concibe la clase como una construcción social, se fomenta la participación activa tanto del profesor como del estudiante, esto implica un intercambio de ideas que promueve un ambiente de aprendizaje dinámico y no rutinario (Espinosa et al., 2010). En este último, la enseñanza y el aprendizaje cobra sentido para los sujetos activos en el proceso, ya que no se limita únicamente a la transmisión, sino que vincula una diversidad de ideas que permiten llegar a conjeturas válidas o no, la validez de los argumentos puede ser moderados a partir de discusiones que puedan crear consensos y replanteamiento de los argumentos.

Por otro lado, para poder analizar cómo favorecer la comunicación en la clase de matemáticas, es necesario indagar en los aspectos que afectan la comunicación, dado que esta puede ser una ruta para crear tareas que promuevan la comunicación a partir de elementos que generen en los estudiantes un acercamiento a las funciones lineales por medio del lenguaje gráfico, modelos de situaciones, la interacción entre los sujetos involucrados en la clase de matemáticas y por medio de un patrón de discusión en donde los estudiantes desarrollan un problema matemático, el profesor orienta mediante preguntas, observaciones y reformulaciones hasta llegar a una solución válida (Jiménez-Espinosa, 2019).

Así se hace necesario indagar y buscar alternativas que permitan que los estudiantes de la Institución Educativa Compartir logren construir justificaciones ya sean verbales o escritas, las cuales deberán ser comunicadas al grupo general o en subgrupos. Al permitir que los estudiantes proporcionen las razones de su pensamiento, por lo tanto, se alienta a los estudiantes a explicar sus ideas matemáticas y construir justificaciones por medio de la interacción con otros agentes involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Ferreiro (2005) menciona que las relaciones son una condición necesaria para que se produzca el proceso de construcción de conocimiento, lo que significa que el aprendizaje no ocurre en aislamiento, sino a través de la interacción y la colaboración con otros.

De acuerdo con las ideas expuestas en los apartados anteriores, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el proceso de la comunicación en estudiantes de décimo grado a partir de tareas relacionadas con funciones lineales?

Para responder a esta pregunta se plantea el siguiente objetivo de investigación:

Favorecer el proceso de la comunicación en estudiantes de décimo grado a partir de tareas relacionadas con funciones lineales.

Capítulo 2: Marco teórico

"La educación es el pasaporte hacia el futuro, el mañana pertenece a aquellos que se preparan para él hoy." Malcolm X

En este capítulo se describe la revisión de literatura y la fundamentación teórica de la investigación. De un lado, la revisión de literatura abarcó un periodo de cinco años entre 2018 a 2023, en donde se abordan dos líneas: la comunicación en la clase de matemáticas y el concepto de función. Por otro lado, se presenta la fundamentación teórica encaminada en tres líneas: la comunicación en la clase de matemáticas, los niveles de algebrización y el concepto de función.

2.1. Revisión de literatura

En este apartado se describe la revisión de literatura, la cual se llevó a cabo teniendo en cuenta la pregunta de investigación. Se hizo un rastreo de literatura en varias revistas especializadas en Educación Matemática, tanto en español como en inglés, en un periodo comprendido entre el año 2018 al 2023, con el objetivo de tener en cuenta las últimas tendencias y avances en la Educación Matemática. En español se hizo un rastreo por las revistas PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática[9], Enseñanza de la Ciencias[10] y Educación Matemática[11]. En este proceso se encontraron cinco documentos que abordan temáticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, como la comunicación, el uso de gráficas, funciones y conceptualizaciones de la pendiente. En inglés se consideraron dos revistas *Educational Studies in Mathematics*[12] y ZDM *Mathematics Education*[13], ambas localizadas en la base de datos de *Springer Link*[14] de acceso libre en el Sistema de Bibliotecas de la Universidad de Antioquia. En la búsqueda, se encontraron seis documentos que abordan temas relacionados con la comunicación y el concepto de función en la Educación Matemática y educación secundaria.

[9] Ver revista PNA https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/index
[10] Ver revista Enseñanza de las Ciencias https://ensciencias.uab.es/
[11] Ver revista Educación Matemática https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/
[12] Ver revista *Educational Studies in Mathematics* https://www.springer.com/journal/10649
[13]Ver revista ZDM *Mathematics Education* https://www.springer.com/journal/11858
[14] Ver base de datos *Springer* https://link.springer.com/

De esta forma entonces se encontraron un total de 11 documentos los cuales se organizaron en una matriz diseñada en *Microsoft Excel*[15], en donde se incluyó la siguiente información: autor(es), año de publicación, título, objetivo del estudio, fuente, revista, criterio de inclusión, criterio de exclusión y observaciones del documento. Por medio de estos últimos, se seleccionaron los documentos que hacen parte de la revisión de literatura. Fueron incluidos nueve documentos que hicieran alusión al término de búsqueda en el título, el resumen o en las palabras claves; al igual se tuvo en cuenta que los artículos trabajarán con estudiantes de educación secundaria y su periodo de publicación comprendiera el periodo de análisis. Los dos documentos restantes se excluyeron de la revisión, puesto que se evidenció que este abordaba una población de educación superior y su tema central era el estudio del afecto por medio de gráficos, el cual se distanciaba del propósito de la investigación.

Luego de tener los documentos seleccionados para la revisión, se procedió a clasificar los artículos en dos líneas, la primera hace alusión a la comunicación en la clase de matemáticas y la segunda con el concepto de función. En la Tabla 1 se puede observar un resumen de los documentos.

Tabla 1

Matriz de sistematización de los artículos

Líneas	**Autor(es) y año de publicación**	**Título de los artículos**	**Revista**
Documentos relacionados con la comunicación en la clase de matemáticas	Patricia Perry, Leonor Camargo, Óscar Molina y Carmen Samper (2021)	Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula	Educación Matemática
	Nuria Planas (2018)	*Language as resource: a key notion for*	*Educational Studies in Mathematics*

[15] Ver carpeta de Revisión de Literatura
https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1KX_KuQI6Nr6oxxB1T1ZyWjRaBz-lb68A

		understanding the complexity of mathematics learning	
	Kirstin Erath, Susanne Prediger, Uta Quasthoff y Vivien Heller (2018)	*Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: the case of explaining to learn and learning to explain*	*Educational Studies in Mathematics*
Documentos relacionados con el concepto de función	Marina Andrés, María Teresa Coronel, Enrique Di Rico, Juan Pablo Luna y Carmen Sessa (2021)	El papel de las representaciones en la pantalla de GeoGebra en el trabajo matemático del aula Investigación colaborativa en torno a la enseñanza de funciones en la Escuela Secundaria	Educación Matemática
	Crisólogo Dolores Flores y Gustavo Andrés Mosquera García (2022)	Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas	Educación Matemática

	José David Zaldívar Rojas y Eduardo Carlos Briceño Solis (2019)	¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas	Educación Matemática
	Anne Watson, Michal Ayalon y Stephen Le rman (2018)	*Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula*	*Educational Studies in Mathematics*
	Martín Carlsen (2018)	*Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function*	*Educational Studies in Mathematics*
	Stephan Michael Gunster y Hans-Georg Weigand (2020)	*Designing digital technology tasks for the development of functional thinking*	ZDM *Educational Mathematics*

Nota. Elaboración propia.

2.1.1. Comunicación en la clase de matemáticas

En esta línea descrita en la tabla 1 figuran autores como Perry et al. (2021) los cuales abordan una investigación basada en prácticas usuales sobre las verbalizaciones de los estudiantes en la clase de matemáticas. Del mismo modo, Planas (2018) proporciona fundamentos y razones para la teorización del lenguaje como recurso y Erath et al. (2018) adelantaron una investigación para examinar cómo la competencia discursiva influye en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.

En primera instancia, Perry et al. (2021) adoptan una estrategia investigativa basada en prácticas usuales con el objetivo de contrastar su hipótesis, la cual hace alusión que las verbalizaciones de los estudiantes en la clase de matemáticas suelen no ser útiles para el desarrollo del respectivo discurso, debido a rasgos intrínsecos de las intervenciones. Este estudio se realizó en Colombia con estudiantes de séptimo grado de un colegio de Bogotá, conformado por 35 estudiantes, 20 hombres y 15 mujeres con edades entre 12 y 14 años. La temática abordada en las sesiones de clase giró en torno al uso de la definición de polígonos semejantes para determinar si parejas de polígonos son semejantes. Durante la investigación encontraron que su hipótesis no se sostiene, ya que encontraron voces de estudiantes que tienen un potencial considerable para impulsar el discurso matemático. Sin embargo, no siempre son aprovechadas por el profesor, quizá debido a una gestión que tiene como prioridad lograr la intervención de los estudiantes a costa de ejercer su papel de líder del discurso. Además, notan dos asuntos, el primero tiene que ver con el uso apropiado de la respectiva definición, no solo se debe tener en cuenta las condiciones sino también saber que se puede concluir de esas condiciones; el segundo tiene que ver con el uso de deícticos apoyado por el señalamiento sobre una representación gráfica es un recurso que puede ayudar considerablemente a esbozar ideas en proceso de elaboración cuando no se tiene el vocabulario especializado; y, no tener acceso a dicho recurso puede constituirse en desventaja que afecta la claridad de lo que se pretende comunicar.

De otro lado, Planas (2018) aborda la importancia del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas, señala que el lenguaje no solo es un medio para comunicar ideas matemáticas, sino que es considerable para la construcción y comprensión de conceptos matemáticos complejos, y que este en sí mismo es un recurso clave para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a lo largo del tiempo. La autora revisa estudios previos que muestran que el lenguaje es una herramienta fundamental para la creación de significados en matemáticas. También, destaca la importancia del lenguaje en la resolución de problemas matemáticos y las dificultades que pueden tener los estudiantes para resolverlos cuando el lenguaje utilizado no es familiar para ellos. El artículo proporciona fundamentos y razones para la teorización del lenguaje como recurso. Con base en puntos de vista de la sociolingüística y la gramática funcional, propone una teorización que considera los lenguajes sociales de los estudiantes y los sistemas como sitios dialécticos discursivos de producción de significado.

Y Erath et al. (2018) quienes adelantaron una investigación que tuvo como objetivo examinar cómo la competencia discursiva influye en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, el estudio se dio de manera empírica en Alemania y se centró en la capacidad de los estudiantes para explicar y comprender conceptos matemáticos. Las autoras encontraron que la capacidad de los estudiantes para explicar y comprender conceptos matemáticos estaba relacionada con su competencia discursiva. Algunos de los hallazgos relacionan como la explicación es una de las prácticas discursivas más frecuentes, en donde la participación activa de los estudiantes es heterogénea. Además, encontraron que los profesores desempeñan un papel importante, pues ellos quienes fomentan la discusión y el diálogo en la clase ayudan a mejorar la competencia discursiva. Las autoras sugieren que la competencia discursiva hace parte del dominio del lenguaje académico, la interacción en la clase, la atención a la diversidad lingüística y la formación de profesores son factores para considerar en la enseñanza de las matemáticas.

Cada uno de los autores resaltados en esta línea permite hacer una reflexión sobre las potencialidades de la comunicación en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de desarrollar habilidades comunicativas en los estudiantes para fortalecer el pensamiento crítico, el razonamiento matemático y la resolución de problemas. Además, la comunicación en la clase de matemáticas puede fomentar ambientes de aprendizaje colaborativos y participativos, lo que puede fomentar la discusión y el diálogo en la clase.

2.1.2. Concepto de función

En esta línea, se destacan distintos estudios llevados a cabo por diversos autores. Andrés et al. (2021) sostienen que cuando los estudiantes trabajan en una misma pantalla, se propicia la construcción de una explicación más sólida sobre el comportamiento de una función. Por otra parte, Dolores y Mosquera (2022) exploran las conceptualizaciones de la pendiente promovidas en el currículum colombiano de matemáticas. Zaldívar y Briceño (2019) presentan un análisis detallado de los usos de las gráficas en situaciones donde los estudiantes se enfrentan a la modelación del movimiento con el respaldo de la tecnología. Del mismo modo, Watson et al. (2018) realizan un estudio sobre cómo se desarrollan los conceptos relevantes para la comprensión de las funciones para los estudiantes a lo largo de los años de la escuela secundaria y preparatoria, Carlsen (2018) se centra en el razonamiento matemático colaborativo en pequeños grupos de cuatro estudiantes de secundaria superior con respecto a una función sinusoidal y Gunster y Weigand (2020) desarrollan un estudio para investigar de qué manera las tareas diseñadas de acuerdo con el marco teórico denominado Función-Operación-Matriz (FOM) podrían promover el pensamiento funcional utilizando tecnologías digitales en el sentido del principio operativo.

En primer lugar, Andrés et al. (2021) diseñaron una secuencia de actividades para la introducción al concepto de función, a partir de una situación geométrica dinámica presentada en un software *GeoGebra*. La investigación se realizó en Colombia con estudiantes de los primeros años de la Educación Secundaria con edades entre los 12 a 14 años. Los autores encontraron que los estudiantes interactúan al incorporar palabras e ideas del otro, y logran establecer una coordinación entre los registros de representación en los cuales se enfocó cada uno en su interpretación. Además, el hecho de que los estudiantes trabajen en equipo, favorece que construyan una explicación sobre el comportamiento de una determinada función. Por otro lado, desde el enfoque didáctico que presentan los autores, la incorporación de la computadora al trabajo matemático de los estudiantes debe preservar espacios importantes de producción autónoma –individual y colectiva– y permitir en los estudiantes una posición crítica acerca de las respuestas generadas por el *software*.

Por su parte, Dolores y Mosquera (2022) exploran las conceptualizaciones de la pendiente que se promueven en el currículo colombiano de matemáticas, en esta investigación se realizó una revisión de los documentos curriculares colombianos tales como los Derechos Básicos Aprendizaje y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas que dan cuenta de la conceptualización de la pendiente en la formación de estudiantes desde primero hasta undécimo grado. El análisis de los documentos curriculares se realizó al utilizar el Método de Análisis de Contenido y las categorías de conceptualizaciones de la pendiente. El método constó en tres fases: primera, preanálisis; segunda, explotación del material y tercera, tratamiento de los resultados. Este estudio permitió hacer comparaciones con las investigaciones de su tipo hechas en Norteamérica y México, y permitió apreciar que el desarrollo por niveles educativos de la idea de pendiente en el currículo colombiano es similar al desarrollo previsto en el currículo mexicano y norteamericano. Las ideas de proporcionalidad se abordan en el nivel de primaria, aparece en la secundaria y se amplía en el bachillerato con énfasis en el estudio de la razón de cambio y su conexión con la derivada en todos los casos. Además, encontraron que los documentos analizados proporcionan orientaciones nacionales sobre las competencias y los aprendizajes, sin embargo, es necesario recordar que Colombia tiene un currículo abierto en donde cada escuela puede diseñar su propio currículo. Esto significa que las orientaciones nacionales tienen que ser adaptadas a los contextos específicos de cada escuela.

En esta misma línea, Zaldívar y Briceño (2019) realizaron un análisis de los usos de las gráficas cuando los estudiantes se enfrentan a una situación de modelación del movimiento con apoyo de tecnología. Este estudio lo realizaron en México con estudiantes de bachillerato (15-17 años). Los investigadores evidenciaron cómo el uso de las gráficas cartesianas se direcciona durante la puesta en escena por resignificaciones progresivas que dentro del discurso matemático escolar podrían considerarse como errores conceptuales pero que, desde el posicionamiento teórico de los autores, son más bien formas culturales de saberes que se encuentran en la base de justificaciones funcionales. El uso de la gráfica permitió no acentuar la reflexión únicamente en el concepto de función, sino ampliar esa visión e inclusive prescindir, gracias a la modelación – graficación, de referencias a ecuaciones. Pero, además, el análisis deja ver que la gráfica cartesiana también subordina en el discurso Matemático Escolar, otras resignificaciones y unidades funcionales de la gráfica, como son las trayectorias y las curvas de comportamiento, que compondrían formas culturales de saberes a las que también los estudiantes hacen referencias al enfrentarse a situaciones de movimiento relativo.

Por otro lado, Watson et al. (2018) realizaron un estudio sobre cómo se desarrollan los conceptos relevantes para la comprensión de las funciones para los estudiantes a lo largo de los años de la escuela secundaria y preparatoria. Esta investigación se realizó en Inglaterra e Israel con 120 estudiantes en edades de 12 a 18 años. Los autores encontraron que el plan de estudios de Inglaterra enfatiza en la generalización de secuencias, en donde los estudiantes tienden a recibir tablas de valores para generalizar. Por lo anterior, se requiere centrarse solo en la variable dependiente y asumir que la variable independiente se ejecuta a través de números de posición de secuencia. El plan de estudios israelí se centra en la función de manera formal, al expresar en términos de x. Además, el análisis iterativo y comparativo identificó similitudes y diferencias en las respuestas de los estudiantes, la representación, el diseño de tareas y las respuestas de los estudiantes. Hacia el final de la escuela, los estudiantes de ambos antecedentes curriculares se desempeñaron de manera similar en la mayoría de las tareas, pero las abordaron por diferentes rutas, como intuitivas o formales y con diferentes comprensiones, incluidos los enfoques de funciones de correspondencia y covariación.

Asimismo, Carlsen (2018) se centra en el razonamiento matemático colaborativo en pequeños grupos de cuatro estudiantes de secundaria superior con respecto a una función sinusoidal. El estudio se realizó en Noruega, con estudiantes que comprenden las edades entre 18 y 19 años y que en ese entonces estaban cursando el último semestre de la escuela secundaria superior. Los estudiantes participaron en colaboración en un proceso de razonamiento matemático sobre las relaciones entre las descripciones teóricas matemáticas de los parámetros en la expresión algebraica de la función sinusoidal y sus contrapartes al identificar estos parámetros junto con su valor numérico en una situación problemática. El razonamiento de los estudiantes sobre la herramienta matemática de esta función sinusoidal es múltiple y multicolor. Al adoptar un enfoque dialógico para los análisis de la interacción de los estudiantes, el estudio revela que el razonamiento matemático de los estudiantes vista como compuesta tanto por aspectos de proceso como por aspectos estructurales, se caracteriza por tres características. En primer lugar, los análisis muestran que el Razonamiento Matemático de los estudiantes se caracteriza por tensiones entre la herramienta matemática y su uso en situaciones denominadas resistencias. En segundo lugar, el Razonamiento Matemático de los estudiantes se caracteriza por el uso de medios semióticos de objetivación como la deíctica, la gestualidad y los recursos lingüísticos. En tercer lugar, los análisis revelan que el Razonamiento Matemático se caracteriza por los esfuerzos de los estudiantes para interpensar (usar el lenguaje para pensar conjuntamente) y colaborar con el fin de lograr el objetivo de la resolución de tareas colectivas. Sin embargo, los cuatro estudiantes contribuyeron al razonamiento matemático colectivo de varias maneras y en diversos grados.

Finalmente, Gunster y Weigand (2020) desarrollaron un estudio para investigar de qué manera las tareas diseñadas de acuerdo con el marco teórico Función-Operación-Matriz (FOM) podrían promover el pensamiento funcional al utilizar tecnologías digitales en el sentido del principio operativo. Esta investigación se ejecuta en Alemania con estudiantes de octavo grado. Los resultados mostraron que los estudiantes tienen dificultades para relacionar los cambios basados en la manipulación de la representación gráfica con la representación simbólica. En el estudio, las dificultades deben ser contrarrestadas por un lado por la variación sucesiva del problema en el sentido del principio operativo. Por otro lado, los estudiantes se involucran en un proceso operativo con la ayuda de tecnologías digitales, ya que combinan ambos niveles de representación al hacer claras las acciones con el gráfico y la ecuación de la función subyacente.

Cada uno de los autores resaltados en esta línea permite tener algunos horizontes sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en la clase de matemáticas, ya que esta puede ser desafiante para los estudiantes quienes presentan dificultades para comprender conceptos abstractos y visualizar representaciones matemáticas dentro del plano. Es importante que los estudiantes comprendan cómo resolver problemas matemáticos mediante funciones y utilizar representaciones gráficas para generar razonamientos matemáticos.

2.2. Fundamentación teórica

En este apartado se presenta la fundamentación teórica, en la cual se tratan tres líneas, la primera acerca de la comunicación en la clase de matemáticas, la segunda sobre los niveles de algebrización y la tercera sobre el concepto de función. En primera instancia, se retoman elementos provistos por la comunicación en Educación Matemática (MEN, 1998; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2003; Sfard, 2008; Jiménez et al., 2010; Sfard y Cobb, 2014); Por otro lado, se retoman algunas consideraciones en relación con los niveles de algebrización (Godino et al., 2015; Aké y Godino, 2018) y por último se presentan algunas ideas sobre el concepto de función (MEN, 1998; NCTM, 2003; MEN, 2006).

2.2.1. Comunicación en la clase de matemáticas

Esta primera línea presenta la fundamentación teórica que se desarrolla en varios aspectos, el primero tiene que ver con el concepto de comunicación y las implicaciones que tiene la comunicación en la clase de matemáticas (MEN, 1998; NCTM, 2003; Sfard, 2008). El segundo aspecto que se tiene en cuenta es el aprendizaje desde los enfoques adquisitivo y participativo que plantea Sfard y Cobb (2014) y por último se retoman algunas reflexiones de la interacción en la clase de matemáticas de Jiménez et al. (2010) y Sfard (2008).

Desde los planteamientos de Sfard (2008) se menciona que la comunicación “es una actividad en la que alguien trata de hacer sentir o actuar a su interlocutor de una manera determinada” (p. 77). En este sentido, la comunicación implica una intencionalidad por parte del emisor para influir en el receptor. La comunicación se ve como un proceso que permite a los estudiantes construir significado a través de la interacción y el diálogo, no solo como una actividad de transmisión de información, sino que también implica la interpretación, la negociación y la construcción conjunta del conocimiento a través del uso del lenguaje y la interacción social. Es a través de la comunicación que los estudiantes pueden intercambiar ideas, comprender las perspectivas de otros y construir significados compartidos.

En este sentido, Sfard (2008) menciona que la comunicación se mide por su capacidad para evocar reacciones en los sujetos. En el contexto educativo, los estudiantes pueden proponer diferentes soluciones a un problema matemático, aunque algunas de estas soluciones pueden ser incorrectas desde el punto de vista matemático, todas son discursivamente apropiadas. Esto se debe a que la respuesta no solo proporciona información sobre el conocimiento matemático del estudiante, sino que también puede generar discusión y reflexión en otros interlocutores. En cada solución, se refleja una perspectiva única y puede proporcionar una oportunidad para que los estudiantes aprendan de sus errores y avancen en su comprensión.

En cuanto a los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), mencionan que la comunicación es una parte importante de las matemáticas y de la Educación Matemática, ya que permite que las ideas sean analizadas, perfeccionadas, discutidas y corregidas, lo que promueve la reflexión y el pensamiento crítico del sujeto. El proceso de comunicación ayuda también a dar sentido y permanencia a las ideas, lo que las hace más duraderas y significativas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar con otros los resultados de sus pensamientos ya sea de manera oral o escrita, aprenden a ser claros y convincentes.

Además, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) indican que la comunicación permite que el estudiante establezca conexiones entre sus conocimientos informales e intuitivos y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Debido a que, al comunicarse con otros estudiantes y profesores sobre ideas matemáticas, los estudiantes pueden relacionar lo que ya saben con nuevos conceptos matemáticos, para así desarrollar una comprensión más profunda del objeto matemático en estudio. Al igual, se destaca la importancia de la comunicación oral y escrita, dado que son parte esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas porque es fundamental para el discurso matemático, se sintetiza los conocimientos de los estudiantes y se estructura la comprensión del estudiante y lo hace público. Las formas en que se concibe la comunicación para el estudiante en la clase de matemáticas se resumen en la Figura 3.

Figura

Las formas en que se concibe la comunicación para los estudiantes según Sfard (2008), NCTM (2003) y MEN (1998)

Sfard (2008)	**NCTM (2003)**	**MEN (1998)**
La comunicación es el proceso que permite a los estudiantes construir significado a través de la interacción y el diálogo.	La comunicación permite que las ideas sean perfeccionadas, discutidas y corregidas, lo que promueve el pensamiento crítico del estudiante.	La comunicación permite que el estudiante establezca conexiones entre sus conocimientos informales e intuitivos y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

Nota. Elaboración propia a partir de Sfard (2008), NCTM (2003) y MEN (1998)

Con respecto a las implicaciones sobre la comunicación en la clase de matemáticas, Sfard (2008) menciona que la comunicación matemática implica el uso de diferentes lenguajes y representaciones como verbales, gráficos, simbólicas, entre otras. Por lo tanto, es importante que los estudiantes puedan interpretar y crear estas representaciones para comunicar sus ideas y soluciones; se debe permitir el desarrollo de habilidades sociales y metacognitivas como por ejemplo la capacidad de escucha, de hacer preguntas, justificar respuestas, analizar y reflexionar sobre los conceptos matemáticos; se debe permitir a los estudiantes conectar los conceptos matemáticos con su propia experiencia y comprensión, y debe conllevar a fomentar la participación activa de los estudiantes y la construcción colaborativa de conocimiento en el aula de clase, ya que permite que los estudiantes compartan sus ideas y entiendan las perspectivas de los demás, lo que les ayuda a construir significados matemáticos.

Por otro lado, se considera el aprendizaje de las matemáticas desde los planteamientos de Sfard y Cobb (2014) quienes proponen dos enfoques, el primer enfoque es llamado adquisitivo, el cual concibe las matemáticas como estructuras y procedimientos que generan conocimiento. Desde este punto de vista, el aprendizaje se entiende como la adquisición de esas estructuras y procedimientos que pueden llevarse de una manera pasiva que ocurre por el simple hecho de la transmisión de información o activa donde el estudiante se involucra en el proceso de aprendizaje. En otras palabras, el aprendizaje es un ‘proceso de acumulación de información’, donde el estudiante adquiere conocimientos sobre las estructuras y procedimientos que se utilizan en matemáticas para generar nuevos conocimientos.

El segundo enfoque llamado participacionista se centra en el aprendizaje como un proceso social, donde los estudiantes aprenden a través de la interacción social. De esta manera, el aprendizaje no es simplemente un proceso individual, sino que también está influenciado por las interacciones que tienen los estudiantes con otros sujetos, por lo cual el estudiante no solo aprende del profesor o del libro de texto, sino también de sus compañeros de clase. En este sentido, el aprendizaje no solo implica la acumulación de información, sino que se trata también de un proceso de construcción de significados a través de la participación activa en el discurso matemático. Para apoyar con eficacia un discurso matemático en el aula de clase, “los profesores tienen que propiciar un ambiente en el que los estudiantes se sientan libres para expresar sus ideas” (NCTM, 2003, p. 65).

El enfoque adquisitivo y participacionista que proponen Sfard y Cobb (2014) deben considerarse como complementarias para el desarrollo de las clases de matemáticas, ya que permite generar varias dinámicas de aprendizaje. Por ejemplo, el enfoque adquisitivo puede ser útil para aquellos estudiantes que prefieren aprender de manera individual y necesitan tiempo para reflexionar sobre la información antes de participar de las discusiones. Mientras tanto, el participacionista puede ser útil para los estudiantes que aprenden a través de la discusión. Combinar estos enfoques permite crear un ambiente de aprendizaje más inclusivo y variado, donde los estudiantes pueden desarrollar habilidades tanto individuales como colectivas. En este trabajo de investigación se utilizarán los dos enfoques anteriormente mencionados, sin embargo, se toma con mayor consideración el enfoque participacionista, debido a que este permite una construcción social de significados a través de la participación activa en el discurso matemático.

Otro punto central de la comunicación es la interacción, Jiménez et al. (2010) sugieren que la clase de matemáticas se convierte en un ambiente de aprendizaje donde se fomenta la discusión, la pregunta, la respuesta y la negociación de significados, y que es responsabilidad del profesor crear un ambiente de interacción en la clase para que tanto los estudiantes como el profesor sean participantes activos. Además, la comunicación enfatiza la importancia de estudiar las interacciones entre sujetos dentro de una cultura, en lugar de enfocarse en cada individuo en particular. Es decir, se sugiere que no es suficiente entender a los individuos de forma aislada, sino que es necesario comprender cómo se comunican y se relacionan entre sí en un contexto determinado, en lugar de analizar a una persona como una entidad independiente.

Igualmente, Jiménez et al. (2010) menciona que en la interacción está implícitamente la interpretación, dado que para que la comunicación sea adecuada y efectiva, los estudiantes deben comprender y compartir significados, lo que implica que los mensajes transmitidos deben ser claros y precisos. Además, los receptores deben interpretar los mensajes correctamente, lo que significa que deben ser capaces de entender los significados que los emisores intentan transmitir a través de las palabras, símbolos y gráficos utilizados. También, Sfard (2008) indica que “la mayor parte de nuestro aprendizaje no es otra cosa que una clase especial de interacción social que apunta a la modificación de otras interacciones sociales” (p. 43) es decir, el sujeto aprende a través de la interacción social porque permite obtener retroalimentación, aprender nuevas habilidades y adquirir nuevos conocimientos para mejorar futuras interacciones sociales.

Sfard (2008) menciona que el estudiante que está en la clase de matemáticas debe aprender a participar en el discurso, el cual va adquiriendo progresivamente a la hora de interactuar con los actores presentes en la clase de matemáticas. Para que las interacciones de los estudiantes promuevan aprendizaje, los estudiantes deben desarrollar habilidades comunicativas, las cuales irán construyendo con acompañamiento del profesor.

2.2.2. Niveles de algebrización

Esta segunda línea presenta la fundamentación teórica que desarrolla algunas ideas en relación con los niveles de algebrización (Godino et al., 2015; Aké y Godino, 2018). Por otra parte, en el *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática* EOS[16] se ha vinculado un modelo basado en el reconocimiento de seis niveles de algebrización incluyendo el nivel cero o indicativo de ausencia de algebrización, este implica una visión amplia de la naturaleza del álgebra escolar. Estos niveles representan diferentes aspectos del aprendizaje algebraico que pueden

---

[16] Ver sitio oficial del EOS http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/

coexistir en diferentes momentos del proceso educativo. A continuación, se describen los cuatro primeros niveles de algebrización incluyendo el nivel cero según Aké y Godino (2018).

El nivel cero de algebrización. Se refiere a un nivel de pensamiento previo a la introducción del álgebra, aquí los objetos matemáticos son representados por medio de lenguajes naturales, numéricos, icónicos o gestuales, y no por medio de símbolos algebraicos. En este nivel pueden intervenir símbolos que se refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. Las tareas que se resuelven en este nivel pueden ser de dos tipos: estructurales o funcionales. En las tareas estructurales no se corroboran propiedades, es decir, no se buscan patrones o regularidades. En cambio, en las tareas funcionales, simplemente se determina una regla recursiva, es decir, una regla que permite obtener un resultado a partir de una operación anterior.

El nivel uno de algebrización. Se reconoce la generalidad de los objetos matemáticos mediante el uso de lenguajes naturales, numéricos, icónicos o gestuales. Pueden intervenir símbolos, pero sin operar con dichos objetos, es decir, los símbolos algebraicos se utilizan para representar conceptos generales, pero no se realizan operaciones algebraicas con ellos. En las tareas estructurales del nivel uno, se identifican propiedades, equivalencias numéricas y relaciones entre los conceptos generales a partir de la observación de patrones o regularidades, mientras que las tareas de funciones, se expresa una regla general que relaciona dos o más conceptos generales.

El nivel dos de algebrización. Se empiezan a realizar tratamientos algebraicos con las incógnitas, es decir, se resuelven ecuaciones del tipo $Ax \pm B = C$ en las que se busca el valor de la incógnita. Se utiliza un lenguaje simbólico o simbólico - literal para referirse a los conceptos generales, pero con un enfoque especial en las cantidades indeterminadas. En las tareas relacionadas en este nivel empiezan a trabajar con funciones algebraicas y se comprende que una función puede ser representada por una expresión algebraica que relaciona la variable independiente con la variable dependiente.

El nivel tres de algebrización. Se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones, conservando siempre la equivalencia. En este nivel, se trabaja con ecuaciones más complejas del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, en las que se resuelven ecuaciones con incógnitas que aparecen en ambos lados de la igualdad. Se utilizan técnicas más avanzadas para resolver ecuaciones, como el método de igualación, el método de sustitución y el método de reducción.

Por otro lado, en la investigación realizada por Godino et al. (2015) dan cuenta del nivel cuatro, cinco y seis de algebrización.

Nivel cuatro de algebrización. Se introduce el uso de parámetros como registro numérico para expresar ecuaciones y funciones, los parámetros son valores desconocidos que se utilizan en una ecuación o función en lugar de números específicos. En este nivel implica un cambio conceptual significativo para los estudiantes, ya que deben aprender a utilizar parámetros en lugar de números en las expresiones algebraicas.

Nivel cinco de algebrización. Se relaciona con el tratamiento de parámetros en la actividad matemática. Se realizan cálculos analíticos que implican operaciones con uno o más parámetros, en conjunto con otras variables. Se trata de una etapa más avanzada en el proceso de algebrización, en la que se profundiza en la comprensión de las relaciones entre las variables y los parámetros, y se utiliza esta comprensión para realizar operaciones más complejas y abstractas.

Nivel seis de algebrización. Se refiere a la introducción de estructuras algebraicas más avanzadas y complejas como la del espacio vectorial, este nivel se aborda generalmente en la etapa de Bachillerato y requiere de una comprensión más profunda de los objetos y procesos algebraicos. En este nivel, se pone en juego una mayor complejidad ontosemiótica, lo que significa que hay una mayor interacción entre los objetos matemáticos y su significado, lo que lleva a una comprensión más profunda de la naturaleza específica de la actividad matemática implicada.

Los niveles de algebrización permiten comprender cómo los estudiantes construyen y desarrollan su comprensión del pensamiento algebraico a lo largo de su formación académica, cada uno de estos niveles representa un conjunto de habilidades, destrezas y comprensiones que son cada vez más complejas y aumentadas en el desarrollo de la algebrización. Además, ayuda a los profesores a identificar las dificultades específicas que los estudiantes enfrentan en su comprensión del álgebra. Estos niveles de algebrización se resumen en la Figura 4.

Figura 3

Resumen de los niveles de algebrización según Godino et al. (2015) y Aké y Godino (2018)

Nota. Elaboración propia

En consecuencia, las comprensiones de los estudiantes en relación a las funciones lineales deberían estar en un nivel cuatro de algebrización, ya que los estudiantes deben aprender a utilizar parámetros en lugar de números en las expresiones algebraicas. Según Godino et al. (2015) mencionan que en la función lineal se interpretan los símbolos literales x y y, ellos toman el caso de la expresión $y = 2x$, donde x y y son interpretados como variables, que pueden tomar cualquier valor del conjunto numérico previamente establecido, que normalmente es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Esto significa que se puede asignar cualquier valor numérico a la variable x, y la variable y tomará un valor correspondiente de acuerdo con la expresión $y = 2x$. Indican que el coeficiente multiplicador de x en la expresión $y = ax$ se puede generalizar a cualquier valor dentro de un cierto dominio. En este caso, la letra "a" se utiliza como un parámetro y puede tomar diferentes valores dentro de un dominio específico, y al cambiar el valor de "a", se pueden obtener diferentes funciones lineales.

2.2.3. Concepto de función

Esta tercera línea presenta la fundamentación teórica que desarrolla algunas ideas en relación al concepto de función (MEN, 1998; NCTM, 2003; MEN, 2006), estos documentos rectores aportan al desarrollo del concepto de la función en Educación Matemática.

Desde los NCTM (2003) se destaca que los estudiantes de niveles medios (9 a 12) deben aprender que los patrones pueden ser analizados y representados de forma matemática. En la educación secundaria, se les debe brindar a los estudiantes la oportunidad de profundizar en su comprensión de las relaciones y funciones, y ampliar su conocimiento sobre los diferentes tipos de funciones existentes, ya que les permitirá modelar matemáticamente situaciones del mundo real y les daría herramientas versátiles para analizar y describir sus entornos cotidianos. Al mismo tiempo, el álgebra debe permitir a los estudiantes elaborar y utilizar diversas representaciones matemáticas como la representación tabular (organizar datos de manera sistemática, lo que les permite detectar patrones y relaciones en los datos), la representación simbólica (expresar las relaciones matemáticas en forma de fórmulas y ecuaciones, lo que les permite manipular y resolver problemas con mayor eficacia), la representación gráfica (visualizar las relaciones matemáticas en forma de gráficos y diagramas, lo que les permite comprender mejor las propiedades de las funciones y las relaciones matemática) y la representación verbal (permite expresar las relaciones matemáticas en palabras).

Con respecto a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) indican que la idea de función surge en contextos donde hay cambios, y su utilidad radica en que permite conectar patrones de variación entre diferentes variables, lo que permite predecir y controlar dichos cambios. Asimismo, la introducción de la función en diferentes contextos ayuda a los estudiantes a comprender la relación entre los conjuntos en los que se definen las funciones, así como la relación establecida entre ellas. Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde las funciones no siguen una regularidad, con el fin de que comprendan que no todas las funciones tienen una expresión algebraica que las describa.

Además, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) mencionan que, en la Educación Básica Secundaria, el estudio de las funciones tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio, ya que es importante que los estudiantes sean conscientes de los patrones que se presentan en situaciones cotidianas, que sean capaces de describirlos y crear modelos matemáticos de estos patrones, y que puedan establecer relaciones entre ellos. Si se aborda el estudio del álgebra únicamente desde la perspectiva de las expresiones simbólicas, se privaría a los estudiantes de la oportunidad de experimentar la modelación y la creación de sistemas simbólicos.

De la misma forma los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) establecen que las funciones tienen la capacidad de analizar y representar una variedad de fenómenos y procesos, estos pueden estar presentes no solo en situaciones cotidianas, sino también en las ciencias naturales y sociales, así como en el ámbito de las propias matemáticas.

En cuanto a los objetos algebraicos, como los términos algebraicos, se pueden entender como representaciones de funciones, de manera similar las ecuaciones e inecuaciones pueden ser reinterpretadas como igualdades o desigualdades entre funciones. Esto implica que el estudio de las relaciones entre la generación de patrones de variación y el proceso de modelización, particularmente en lo que respeta a las nociones de variable y función, es fundamental para relacionar el pensamiento variacional con el cálculo algebraico en la Educación Básica Secundaria, y con la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral en la Educación Media.

Capítulo 3: Metodología

Si en realidad insistimos en enseñar unas matemáticas que no se pueden incorporar fácilmente en el discurso diario o derivar del mismo, entonces no parece haber escapatoria con respecto a iniciar a los estudiantes en las metarreglas de las matemáticas modernas, o por lo menos en un subconjunto seleccionado (Sfard, 2008).

En este capítulo se describe de manera detallada la forma cómo se abordó la investigación. En primer lugar, se presenta el paradigma y el enfoque del estudio (Hernández et al., 2014); en segundo lugar, se expone el método (Gravemeijer y Prediger, 2019; Camargo, 2021); en tercer lugar, los participantes; en cuarto lugar, la descripción de las tareas realizadas; en quinto lugar, se abordan las técnicas empleadas (Bisquerra, 2009) y por último los instrumentos de análisis de la información.

3.1. Paradigma y enfoque

Este trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo de corte interpretativo, dado que tiene como objetivo comprender y dar sentido a las experiencias y perspectivas de los participantes, se considera que la realidad es construida socialmente y está influenciada por el contexto (Hernández et al., 2014). Esta elección se basa en la relevancia que se le atribuye al contexto y a los participantes dentro de la investigación, además de la necesidad de desarrollar una investigación que permitiera obtener conocimiento sobre el desarrollo de las clases de matemáticas desde un enfoque comunicacional.

Dentro de este paradigma y enfoque, el investigador desempeña un papel fundamental al comprender e interpretar la realidad a medida que se desarrolla la investigación, esto implica sumergirse en el contexto de los participantes, interactuar con ellos y recolectar datos a través de técnicas apropiadas. Al adoptar este enfoque, se busca obtener una comprensión profunda de las dinámicas de la comunicación presentes en las clases de matemáticas y cómo estas influyen en el proceso de aprendizaje. El investigador se convierte en un observador activo y participante, lo que permite captar de manera más precisa las experiencias y perspectivas de los participantes involucrados (Hernández et al., 2014).

3.2. Método

El método utilizado corresponde a una investigación de diseño en línea con lo planteado por Gravemeijer y Prediger (2019), la cual combina el diseño instruccional, que se enfoca en desarrollar métodos de enseñanza y aprendizaje efectivos para la clase de matemáticas, y la investigación educativa, que tiene como objetivo investigar y comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como los factores que influyen en dichos procesos. La investigación de diseño, en correspondencia con estos autores, se basa en tres fases: diseño de las tareas, implementación y análisis. En la primera fase, se identifica el problema específico y a partir de ahí, se diseñan tareas que aborden el problema; en la segunda se implementa las tareas en la clase; en la tercera fase se realiza un análisis retrospectivo sobre la implementación de las tareas.

Sumado a lo anterior, de manera particular este trabajo corresponde a un experimento de enseñanza, el cual es una estrategia que "consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje en específico" (Camargo, 2021, p.86). En esencia, los experimentos de enseñanza implican el diseño cuidadoso de unas tareas planificadas, su implementación en un entorno educativo y la evaluación posterior de los resultados obtenidos, que puede implicar la observación de cómo los estudiantes interactúan con los materiales y participan en las actividades propuestas por la profesora en formación.

En consecuencia, esta investigación se desarrolló en tres fases: la primera fase se presenta en dos momentos, en donde la profesora en formación diseñó tareas cuyo objetivo era favorecer la comunicación en la clase de matemáticas mediante tareas sobre funciones lineales para posteriormente llevarlas al curso de Seminario de Práctica Pedagógica, en donde se discutían con el profesor y compañeros del curso, con el propósito de identificar la pertinencia, los aspectos positivos y a mejorar. Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas, si era necesario se reorganizaban las tareas que se iban a implementar. En la segunda fase, la profesora en formación implementó dichas tareas en la clase de matemáticas a un grupo de décimo grado de la Institución Educativa Compartir. Luego de la aplicación de las tareas, se recibió una retroalimentación en los mismos encuentros del Seminario de la Práctica Pedagógica. En el diseño de las siguientes tareas del experimento se repetía este ciclo: análisis del diseño, reorganización (de ser necesario) y retroalimentación. La tercera fase corresponde al Capítulo 4 en donde se detalla el análisis retrospectivo de acuerdo con los registros tomados.

3.3. Participantes de la investigación

La investigación contó con la participación de un total de 14 estudiantes, quienes cursan el grado décimo en la Institución Educativa Compartir. Al considerar las dinámicas propias de la institución, se optó por el grupo 10º3 que fue seleccionado por la coordinadora. Este grupo de estudiantes presentaban bajo rendimiento académico en las asignaturas de física y matemáticas, luego, se dividió el grupo 10º3 a la mitad, debido a que otro profesor en formación iba a realizar su investigación con el mismo grupo, esto permitió que ambos profesores en formación tuvieran la oportunidad de llevar a cabo sus investigaciones. Por otra parte, al tener al grupo de participantes seleccionados se procede a conformar cinco equipos de trabajos en donde se desarrollan las cuatro tareas propuestas por la profesora en formación. En la Tabla 2, se puede observar los participantes, los equipos que pertenecen y las tareas que fueron partícipes.

Tabla 2

Participantes, los equipos que pertenecen y las tareas en que participaron

Equipos	Integrantes	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
1	Roberto	x	x	x	
	Pedro	x	x	x	
2	Juan	x	x		
	Yeison	x	x	x	
	Samuel			x	
3	Miguel	x	x		x
	Daniel	x	x		x

4	María	x	x	x
	Carlos	x	x	x
	Adrián			x
5	Dayana	x	x	x
	Melany	x	x	
	Lucas	x	x	x
	Mateo			x

Nota. Elaboración propia.

Para efectos de este trabajo, sólo serán considerados como participantes de la investigación a los estudiantes mencionados en la Tabla 2 (se utilizan seudónimos para proteger la identidad de los participantes) cabe resaltar que los estudiantes Samuel, Adrián y Mateo no estuvieron presente en el primer encuentro donde se implementó la Tarea 1 y la Tarea 2.

Por otro lado, es importante destacar los aspectos éticos relacionados con el desarrollo de esta investigación, específicamente en lo que respecta al acceso a la institución y la obtención de los permisos necesarios. Inicialmente, se llevó a cabo el correspondiente proceso de obtención del consentimiento informado[17] por parte de los acudientes y de los estudiantes del grado 10°3. Además, se les informó a los estudiantes que participaron del estudio, sobre la intención de la investigación, y estos dieron su aprobación mediante la firma del consentimiento informado, permitiendo así el uso de la información proporcionada a través de su participación.

3.4. Descripción de las tareas realizadas

Esta investigación tuvo lugar en dos encuentros con los estudiantes participantes, debido a las dinámicas de la institución, ya que estos espacios estaban fuera del plan de estudio de los estudiantes. En el primer encuentro se desarrolló la Tarea 1 y la Tarea 2 sobre la variable dependiente e independiente. La Tarea 1 alude una historia y la Tarea 2 se trató sobre la temática

[17] Ver consentimientos informados de los estudiantes https://drive.google.com/drive/folders/1qlRFhUDRe-NV_KMa0Eyi2k4aVlxe9zi1

de los XV de Mariana, en donde los estudiantes debían encontrar los modelos y los costos de la fiesta. Cabe destacar que en la implementación de la Tarea 2 se realizó una intervención en el primer punto de la tarea por parte de la profesora en formación, debido a que los estudiantes no recordaban los conceptos que se debían implementar para la elaboración de la tarea.

En el segundo encuentro se desarrolló la Tarea 3 y la Tarea 4, sin embargo, debido a las dinámicas de la institución, se contó con poco tiempo para la implementación de las tareas (1 hora y 10 minutos), por lo cual se tomó la decisión de implementar las dos tareas de manera simultánea, es decir, de los cinco equipos de trabajo conformados, dos desarrollaron la Tarea 3 y tres equipos ejecutaron la Tarea 4.

La Tarea 3 consistía en identificar los errores en el procedimiento realizado sobre la temática de una discográfica, para posteriormente explicar cómo sería el procedimiento correcto de la tarea. La Tarea 4 se centró en el reconocimiento de las propiedades de las funciones lineales, tales como la inclinación, la pendiente, la ordenada al origen y la graficación de coordenadas, con el fin de dar solución a la situación "investigación del asesinato". Estas tareas fueron diseñadas con el fin de favorecer la comunicación en la clase de matemáticas. A continuación, en la Tabla 3, se presenta un cronograma de tareas, con las fechas de los encuentros y las tareas desarrolladas[18] en cada uno de los encuentros con los estudiantes participantes.

Tabla 3

Cronograma de las tareas y fechas de los encuentros.

Encuentros	Fechas	Tareas
1	28 de abril de 2023	**Tarea 1. Identificación de la variable dependiente e independiente a partir de una historia**. Se les propuso a los estudiantes desarrollar la primera tarea a partir del relato de una historia sobre el torneo de voleibol, con el fin de identificar en el relato la variable dependiente e independiente, para posteriormente realizar el gráfico del

[18] Ver Anexo 4: tareas implementadas en la investigación https://drive.google.com/drive/folders/120QPiL2cbsU8wUKtnkK7aNi_qTMUO2R_

		relato de la historia. Los equipos de trabajo podían recurrir a la discusión y al consenso para desarrollar cada uno de los puntos de la tarea propuesta. **Tarea 2. Los XV de Mariana.** Esta tarea se centra en la temática de los XV de Mariana, en donde los estudiantes se enfrentan a la lectura e interpretación de cada uno de los momentos clave para la preparación de la fiesta. El propósito de la tarea era encontrar los modelos más adecuados y determinar los costos asociados a la celebración a partir de la función lineal.
2	12 de mayo de 2023	**Tarea 3. Encontrando los errores.** Se centró en ayudar a Carlos a identificar los errores en un procedimiento, para después explicarle cómo sería el procedimiento correcto para abordar una situación, la cual implica a una discográfica que necesita determinar la función de beneficios de la empresa en función del número de discos vendidos, para luego encontrar los beneficios que se obtendrían al vender 200 discos. **Tarea 4. Investigando el asesinato.** Se centró en el reconocimiento de las propiedades de las funciones lineales, como la pendiente, la inclinación, la ordenada al origen y la graficación de coordenadas, con el fin de resolver una situación sobre la investigación de un asesinato. En esta situación, se presentaron seis personajes, donde uno de ellos es el asesino y otro es la víctima del crimen. Los estudiantes debían identificar los tres errores cometidos por el asesino al observar las cuatro rectas presentes en la situación, así como las cuatro observaciones

	realizadas por la víctima. Luego debían encontrar las coordenadas donde ocurrió el crimen utilizando una tabla de valores y la creación de una gráfica.

Nota. Elaboración propia para ilustrar el cronograma de encuentros y las tareas realizadas.

Cabe resaltar que se tomarán en cuenta las cuatro tareas mencionadas en la Tabla 3 para el análisis, estas tareas representan elementos fundamentales que permiten evaluar y comprender las funciones lineales desde un enfoque comunicacional.

3.5. Técnicas e instrumentos

En el desarrollo de esta investigación, se empleó la técnica de observación participante, la cual se define según Bisquerra (2009) como “la acción de observar simultáneamente mientras se participa en las actividades inherentes al grupo objeto de estudio” (p. 332). Esta técnica permite la inmersión en los entornos de clase con el fin de aprehender la realidad desde la perspectiva de los participantes.

En el contexto de este estudio, se llevó a cabo la observación participante durante los encuentros con el grupo de estudiantes del grado 10º3, durante dichos encuentros, la investigadora actuó como moderadora y observadora, desempeñando un rol activo en el proceso. La investigadora brindaba acompañamiento a los estudiantes, daba indicaciones y respondía preguntas. No obstante, se procuró limitar la interacción con el fin de permitir que los estudiantes ofrecieran respuestas genuinas.

La recolección de datos tuvo lugar durante los encuentros realizados con el grado 10º3. En estos encuentros, se obtuvieron diversos registros, que incluyen fotografías tomadas durante las sesiones, las producciones realizadas por los estudiantes y un diario de campo que la investigadora fue construyendo en dichos espacios. Las producciones escritas de los estudiantes se consideran como la fuente principal para analizar la información, las fotografías y el diario de campo inspiran e ilustran los análisis respectivos.

3.6. Estructura del análisis

Para el análisis de esta investigación se utilizaron las producciones escritas de los estudiantes. Las tareas que se analizan en este trabajo son las Tarea 1, Tarea 2, Tarea 3 y Tarea 4 descritas en el Capítulo 3. Se realiza el respectivo análisis en dos momentos, en primer lugar, se lleva a cabo una descripción de las intervenciones por cada una de las tareas, mostrando algunas evidencias del trabajo realizado con los estudiantes. En segundo lugar, se hace una triangulación en relación a cada una de las tareas atendiendo a los referentes teóricos expuestos en el Capítulo 2, las producciones escritas de los estudiantes y a la mirada propia de la investigadora.

Para el análisis de la tarea se generaron varios códigos, los cuales señalan la tarea como la respuesta del enunciado que se pretende analizar, por ejemplo, para caracterizar la posición de la pregunta de la tarea se usa el código P2, el cual indica la pregunta dos de la tarea respectiva, es decir, el registro quedará nombrado Tarea 1 - P2.

Capítulo 4: Análisis y resultados

La comunicación en matemáticas no solo implica resolver funciones lineales, sino también explicar cómo llegaste a la solución, lo que es igualmente importante.

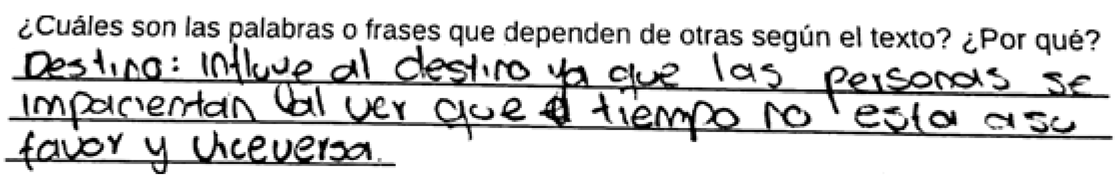
En este capítulo se ponen en consideración elementos que fundamentan el análisis y los resultados obtenidos en la investigación. Asimismo, se presenta cada una de las tareas realizadas por los estudiantes participantes y posteriormente se desarrolla los resultados obtenidos de las tareas. Para responder a la pregunta de investigación, se analizaron las producciones escritas de los estudiantes, hechas en cada uno de los encuentros realizados.

4.1. Tarea 1

Durante el desarrollo de esta tarea se abordó un relato de una historia, en donde los estudiantes debían identificar las variables dependientes e independientes, según el caso expuesto en cada una de las preguntas. Esta tarea contó con 6 preguntas relacionadas con un caso específico de la historia, una pregunta en donde los estudiantes debían representar de manera gráfica la historia y un cuadro donde debían plasmar sus aprendizajes en el desarrollo de la tarea.

Figura 4

Respuesta de la Tarea 1 - P2 por el Equipo 3

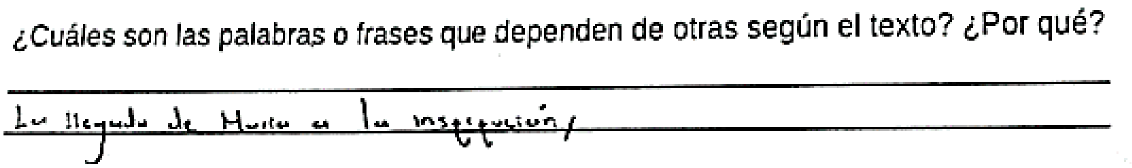

¿Cuáles son las palabras o frases que dependen de otras según el texto? ¿Por qué?

Destino: influye al destino ya que las personas se impacientan al ver que el tiempo no esta a su favor y viceversa.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 5

Respuestas de la Tarea 1 - P2 por el Equipo 4

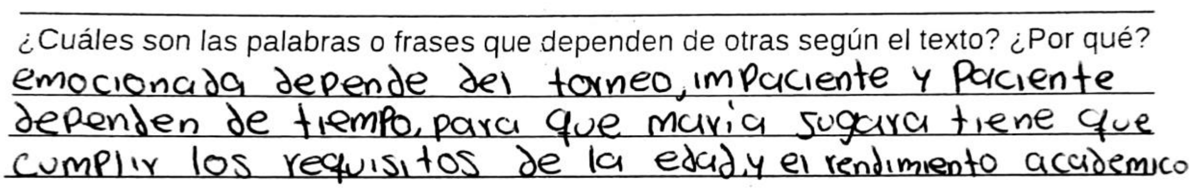

¿Cuáles son las palabras o frases que dependen de otras según el texto? ¿Por qué?

La llegada de Maria a la inspección,

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 6

Respuesta de la Tarea 1 - P2 por el Equipo 5


¿Cuáles son las palabras o frases que dependen de otras según el texto? ¿Por qué?

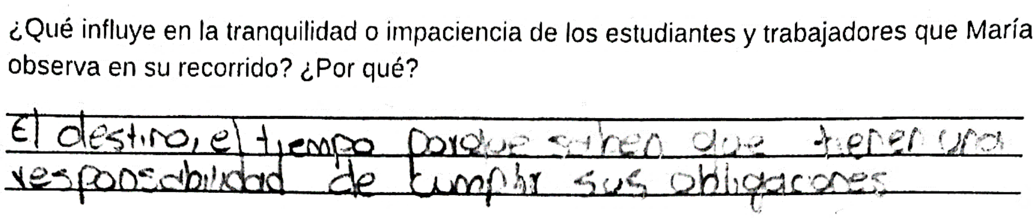
emocionada depende del torneo, impaciente y paciente dependen de tiempo, para que maria jugara tiene que cumplir los requisitos de la edad, y el rendimiento accidemico

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 5, 6 y 7 se puede apreciar que los equipos de trabajos reconocieron algunas palabras como el destino (Equipo 3), la llegada de María a la institución (Equipo 4), impaciencia y paciente, emoción y la participación (Equipo 5) como variables que dependen de otras para que puedan llegar a ser efectuadas. Los equipos, desde sus observaciones, lograron extraer elementos relevantes del relato y llevar a cabo discusiones enriquecedoras entre sí, con el objetivo de construir una comprensión compartida, a través de discusiones colaborativas que permiten intercambiar perspectivas y conocimientos entre pares.

Figura 7

Respuesta a la Tarea 1 - P4 por el Equipo 3

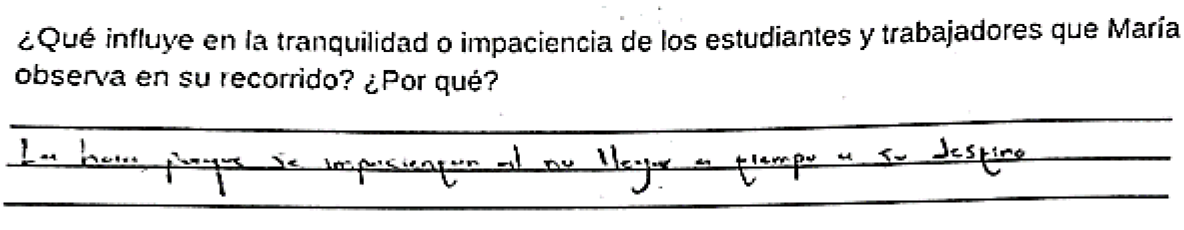

¿Qué influye en la tranquilidad o impaciencia de los estudiantes y trabajadores que María observa en su recorrido? ¿Por qué?

El destino, el tiempo porque saben que tienen una responsabilidad de cumplir sus obligaciones

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 8

Respuesta a la Tarea 1 - P4 por el Equipo 4



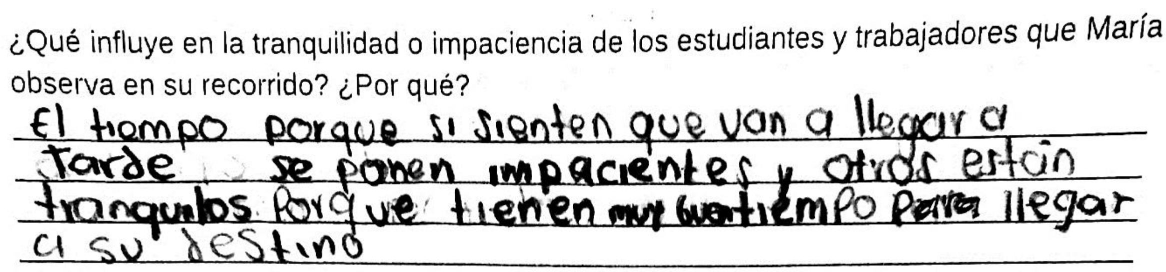
¿Qué influye en la tranquilidad o impaciencia de los estudiantes y trabajadores que María observa en su recorrido? ¿Por qué?

La hora porque se impacientan al no llegar a tiempo a su destino

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 9

Respuesta a la Tarea 1 - P4 por el Equipo 5



¿Qué influye en la tranquilidad o impaciencia de los estudiantes y trabajadores que María observa en su recorrido? ¿Por qué?

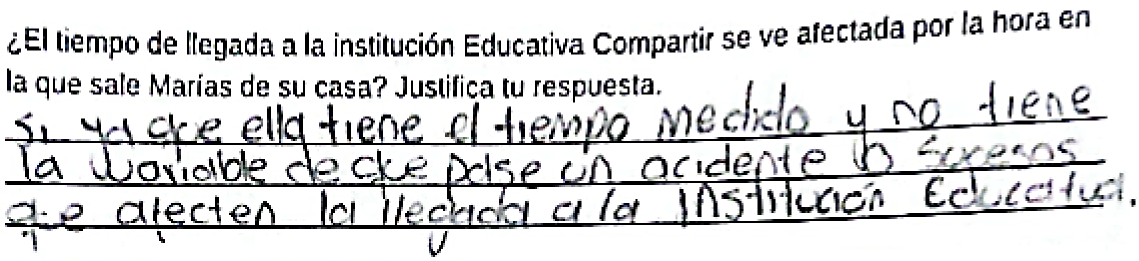
El tiempo porque si sienten que van a llegar a tarde se ponen impacientes y otros están tranquilos porque tienen ~~muy~~ tiempo para llegar a su destino

Nota. Archivo personal de la autora.

Se puede observar en las Figuras 8, 9 y 10 algunas respuestas dadas por los Equipos 3, 4 y 5 en relación a la pregunta sobre la influencia de la tranquilidad o impaciencia de los estudiantes y trabajadores que María podía observar en el recorrido a la Institución. En la Figura 8 y 10 los Equipo 3 y 5 consideran “el tiempo” como una duración indefinida, mientras que en la Figura 9 el Equipo 4 lo interpreta como una medida específica, mencionan “la hora”. Aunque las palabras utilizadas son diferentes, ambas perspectivas convergen en reconocer que el tiempo juega un papel determinante en la tranquilidad o impaciencia, esta convergencia resalta cómo las representaciones del tiempo varían entre los equipos, pero el sentido atribuido a ellas se mantiene. A pesar de que puede haber diferencias en la forma en que cada equipo conceptualiza el tiempo, todos ellos logran reconocer su importancia como variable independiente en el discurso sobre la influencia en la tranquilidad o impaciencia de los estudiantes y trabajadores.

Figura 10

Respuesta de la Tarea 1 - P5 por el Equipo 3

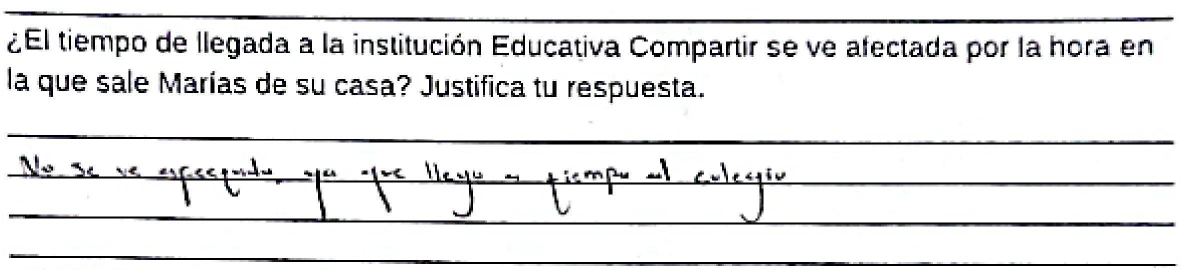

¿El tiempo de llegada a la institución Educativa Compartir se ve afectada por la hora en la que sale Marías de su casa? Justifica tu respuesta.

Si ya cke ella tiene el tiempo medido y no tiene la Variable de cke pase un acidente o sucesos que afecten la llegada a la institución Educatva.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 11

Respuesta de la Tarea 1 - P5 por el Equipo 4

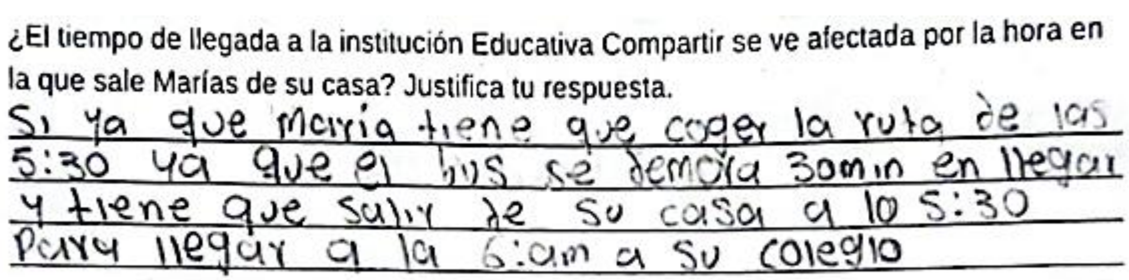

¿El tiempo de llegada a la institución Educativa Compartir se ve afectada por la hora en la que sale Marías de su casa? Justifica tu respuesta.

No se ve afectado ya que llega a tiempo al colegio

Nota. Archivo personal de la autora

Figura 12

Respuesta de la Tarea 1 - P5 por el Equipo 5


¿El tiempo de llegada a la institución Educativa Compartir se ve afectada por la hora en la que sale Marías de su casa? Justifica tu respuesta.

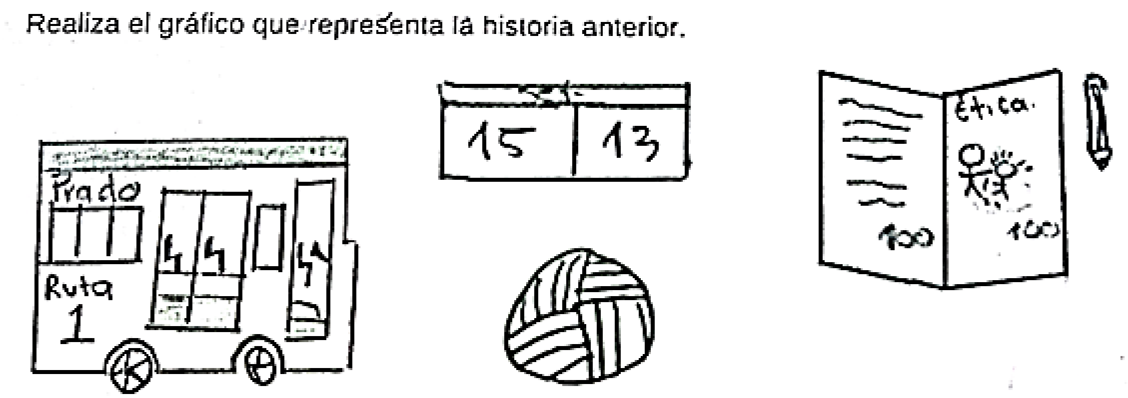
Si ya que María tiene que coger la ruta de las 5:30 ya que el bus se demora 30min en llegar y tiene que salir de su casa a las 5:30 para llegar a la 6:am a su colegio

Nota. Archivo personal de la autora

En las Figuras 11, 12 y 13 se evidencia que los Equipos 3 y 5 están de acuerdo en que el tiempo de llegada a la institución se ve afectado por la hora de salida de María. Ambos equipos consideran que la premisa "el tiempo de llegada a la institución" es una variable dependiente de la hora de salida. Sin embargo, el Equipo 4 tiene una perspectiva diferente, ya que sostiene que el tiempo de llegada a la institución no se ve afectado por la hora de salida de María. En otras palabras, consideran que la premisa "el tiempo de llegada" es una variable independiente, es decir, no está influenciada por la hora de salida de María.

Figura 13

Representación gráfica de la Tarea 1 por el Equipo 3



Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 14

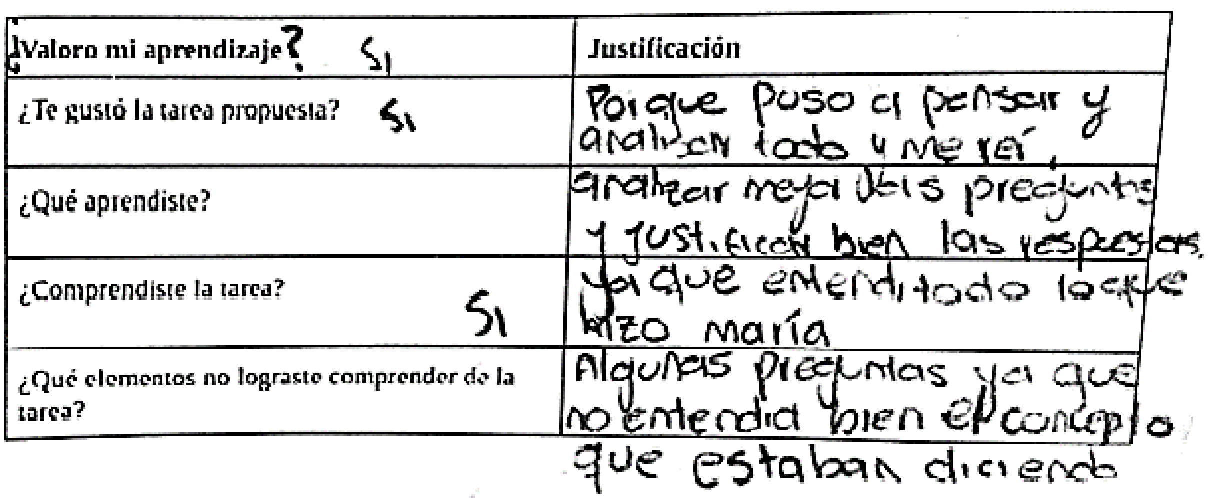
Representación gráfica de la Tarea 1 por el Equipo 4

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 14 y 15, se puede apreciar la representación visual de la narrativa propuesta en la Tarea 1. Los Equipos 3 y 4 han capturado diversos elementos matemáticos relacionados con las variables dependientes e independientes, ellos han plasmado estos elementos de manera gráfica, como la ruta que debe ser tomada para llegar a la institución, incluyendo ciertos factores involucrados al salir temprano o tarde. Esto resulta importante ya que, a lo largo de dicho trayecto, es posible que surjan inconvenientes o retrasos que tengan un impacto directo en la paciencia de los usuarios que dependen de las rutas de autobuses para llegar a sus destinos. La hora de salida de María implica en la historia la participación en el torneo de voleibol, dado que si llega tarde no puede participar en los tiempos establecidos en el torneo. Por otro lado, el Equipo 3 ha optado por representar visualmente los puntos de un set de voleibol en su gráfica, esta representación ilustra como uno de los equipos ha tomado la delantera en términos de puntuación. Esta ventaja en puntos podría tener implicaciones, al determinar si el equipo en cuestión gana o pierde el torneo de voleibol.

Figura 15

Aprendizajes obtenidos en la Tarea 1 por el equipo 3



¿Valoro mi aprendizaje? Si	Justificación
¿Te gustó la tarea propuesta? Si	Porque puso a pensar y analizar todo y me reí,
¿Qué aprendiste?	analizar mejor unas preguntas y justificar bien las respuestas.
¿Comprendiste la tarea? Si	ya que entendí todo lo que hizo maría
¿Qué elementos no lograste comprender de la tarea?	Algunas preguntas ya que no entendía bien el concepto que estaban diciendo

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 16

Aprendizajes obtenidos en la Tarea 1 por el Equipo 4

Valoro mi aprendizaje	Justificación
¿Te gustó la tarea propuesta?	Si, Pero poco coherente.
¿Qué aprendiste?	Que hay que leer bien para poder comprender.
¿Comprendiste la tarea?	En algunos casos.
¿Qué elementos no lograste comprender de la tarea?	Las primeras preguntas.

Nota. Archivo personal de la autora.

En la Figura 16 y 17 se ilustran los aprendizajes del Equipo 3 y el Equipo 4, alrededor de la implementación de la Tarea 1. El Equipo 3 dentro de la pregunta ¿Qué aprendiste? manifiestan que, mediante la realización de la actividad, lograron "analizar mejor las preguntas y justificar bien las respuestas" a través de la realización de la tarea, este refleja una interiorización de las habilidades necesarias para abordar la tarea. Por otro lado, el Equipo 4 menciona dentro de la misma pregunta que "hay que leer bien para poder comprender" esto también puede ser visto como un paso hacia la conceptualización, ya que están identificando la habilidad crítica de comprensión como parte de la tarea. En cuanto a la pregunta ¿Te gustó la tarea propuesta? el Equipo 3 dice que "si, porque puso a pensar y analizar todo"; por otra parte, el Equipo 4 mencionan dentro de la misma pregunta que "si, pero poco coherente", esta última puede sugerir que, aunque estuvieron comprometidos con la actividad pueden haber tenido dificultades en la comprensión de algunos conceptos o términos propuestos en la tarea.

Con respecto a la aplicación de esta tarea, se permitió a los estudiantes construir significados a través de la interacción y el diálogo, el cual implicó la interpretación, la negociación y la construcción conjunta del conocimiento a través del uso del lenguaje y la interacción social (Sfard, 2008). Esta tarea permitió que los equipos buscaran extraer elementos relevantes del relato y discutirlos entre sí para negociar y construir de manera conjunta cada una de las preguntas planteadas en la tarea. Asimismo, permiten analizar cómo los estudiantes identifican estas variables dependiente o independiente y cómo interactúan para lograr que las acciones se lleven a cabo. Reconocer la variable dependiente e independiente en una narrativa implica identificar los eventos, personajes o elementos que tienen un impacto directo en el desarrollo de la trama y los que se ven afectados por esos eventos.

En las Figuras 8, 9 y 10, los estudiantes muestran una comprensión adecuada de la variable independiente "tiempo" y su impacto directo en la tranquilidad e impaciencia de los estudiantes y trabajadores. Esto muestra que los estudiantes identifican que el tiempo es un factor clave que puede desencadenar algunos eventos o situaciones específicas. Desde otra mirada, en la Figura 11 y 13 se evidencia que los Equipos 3 y 5 están de acuerdo en que el tiempo de llegada a la institución se ve afectado por la hora de salida de María, sin embargo, en la Figura 12, el Equipo 4 no logra establecer correctamente los cambios que pueden ocasionar la hora en que María sale de su casa y la llegada a la institución, aquí se evidencia una falta de comprensión en la relación entre la variable independiente y la variable dependiente en este contexto particular.

Este ejemplo ilustra cómo la comprensión de las relaciones causales entre las variables independientes y dependientes puede variar entre diferentes individuos o grupos, según Sfard (2008) esta variación en la comprensión se debe a la existencia de diferentes "metáforas cognitivas", que son marcos conceptuales o modelos mentales a través de los cuales los individuos interpretan y entienden los fenómenos. Es importante tener en cuenta que estas diferencias en la comprensión no implican que una interpretación sea correcta y la otra incorrecta, en cambio, refleja las diferentes perspectivas y enfoques que los individuos pueden tener al abordar un problema o fenómeno determinado.

Asimismo, en las Figuras 14 y 15, se observa cómo los Equipos 3 y 4 están construyendo significados matemáticos a través de la representación gráfica y la narrativa propuesta en la Tarea 1, aquí se puede apreciar como los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos y cómo incorporan esos conceptos en sus pensamientos y acciones cotidianas. Además, la metáfora de la "ruta que debe ser tomada para llegar a la institución" y los "factores involucrados al salir temprano o tarde" hacen alusión a la manera en que los estudiantes interactúan con el dominio del conocimiento matemático y cómo ciertos factores pueden afectar sus resultados, esto se relaciona con el concepto de "reificación" de Sfard (2008), donde los conceptos abstractos se basan en entidades tangibles y manipulables. Es decir, se refiere a la transformación de conceptos abstractos en entidades concretas y visualizables, esto implica tomar conceptos que son inicialmente abstractos y darles forma material, lo que permite facilitar la comprensión y la comunicación de ideas matemáticas al proporcionar un "puente" entre lo abstracto y la experiencia.

En las Figuras 16 y 17 los Equipos 3 y 4 dentro de la pregunta ¿Qué aprendiste? el Equipo 3 menciona que "analizar mejor las preguntas y justificar bien las respuestas" esto significa que, a medida que participan en la tarea, se están involucrados en el proceso de cuestionar, explorar y comprender los conceptos matemáticos desde un pensamiento más crítico y analítico. Igualmente, los estudiantes están aprendiendo a respaldar sus respuestas con evidencia sólida y razonamiento lógico, en lugar de proporcionar simplemente una respuesta sin fundamentos. Por otra parte, el Equipo 4 afirma que "hay que leer bien para poder comprender" la parte donde dicen "leer bien" se refiere a la capacidad que tiene el equipo de la información a través de la lectura, esto implica comprender las palabras y las ideas presentadas en el texto, así como establecer conexiones entre conceptos. En cuanto a "poder comprender" no solo significa entender lo que está escrito, sino también ser capaz de participar en discusiones y diálogos sobre el contenido, por lo cual el Equipo 4 se involucró en la construcción de conocimiento a través de la interacción y la conversación. Por lo anterior, los NCTM (2003) mencionan que hay que estimular en los estudiantes el pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar con otros los resultados de sus pensamientos, ya sea de manera oral o escrita, para que aprendan a ser claros y convincentes.

Con respecto a los niveles de algebrización, la Tarea 1 permitió que los equipos estuvieran en el Nivel dos de algebrización, ya que este nivel aborda el trabajo con funciones algebraicas, la cual marca un paso en el desarrollo matemático de los estudiantes para comprender que una función puede representarse mediante una expresión algebraica que relaciona las variables independientes y dependientes para obtener una comprensión de las relaciones funcionales en el mundo real.

4.2. Tarea 2

Esta tarea se centra en la temática de los XV de Mariana, en donde los estudiantes se enfrentan a la lectura e interpretación de cada uno de los momentos clave para la preparación de la fiesta. El propósito de la tarea era encontrar los modelos más adecuados y determinar los costos asociados a la celebración a partir de la función lineal. Esta tarea contó con 4 preguntas en donde se debía encontrar el modelo de los costos de la fiesta y un cuadro donde se registró los aprendizajes en el desarrollo de la tarea.

Figura 17

Respuesta de la Tarea 2 – P2 por el Equipo 2

¿Cuál es el costo para contratar el DJ, si a último momento el DJ decide descontar 3000 pesos de la tarifa adicional por horas extras? ¿Cuál es la función que modela el costo para contratar el DJ?

C(x) = 35000(x) + 150.000

C(x) = 35.000(2) + 50.000

C(x) = 214.000

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 18

Respuesta de la Tarea 2 – P2 por el Equipo 3

¿Cuál es el costo para contratar el DJ, si a último momento el DJ decide descontar 3000 pesos de la tarifa adicional por horas extras? ¿Cuál es la función que modela el costo para contratar el DJ? y = mx + b.

C(x) = 35.000 (x) + 150.000

C(x) = 35.000(2) + 150000

C(x) = 214.000

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 19

Respuesta de la Tarea 2 – P2 por el Equipo 4

¿Cuál es el costo para contratar el DJ, si a último momento el DJ decide descontar 3000 pesos de la tarifa adicional por horas extras? ¿Cuál es la función que modela el costo para contratar el DJ?

$C(x) = 32.000(x) + 150.000$
$C(x) = 32.000(2) + 150.000$
$C(x) = 214.000$

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 18, 19 y 20 se puede apreciar que los Equipos 2, 3 y 4 en relación a la pregunta sobre el costo para contratar el DJ, los equipos utilizaron la fórmula de la función lineal para resolver la pregunta planteada. Cabe resaltar que el Equipo 3 optó por expresar de manera escrita la formula $y = mx + b$ para guiarse en la resolución de la pregunta 2 de la tarea. Por otro lado, los Equipos 2 y 3 decidieron plantear la función con el valor planteado en la lectura, el cual fue $35.000, en cambio el Equipo 4 lo planteó descontando los $3.000 de la tarifa adicional por horas extras del DJ para encontrar la función que modela el costo. Aunque hubo dos maneras de plantear la función, los equipos llegaron a la misma conclusión, el cual fue que el costo para contratar el DJ fue de $214.000.

Figura 20

Respuesta de la Tarea 2 – P3 por el Equipo 2

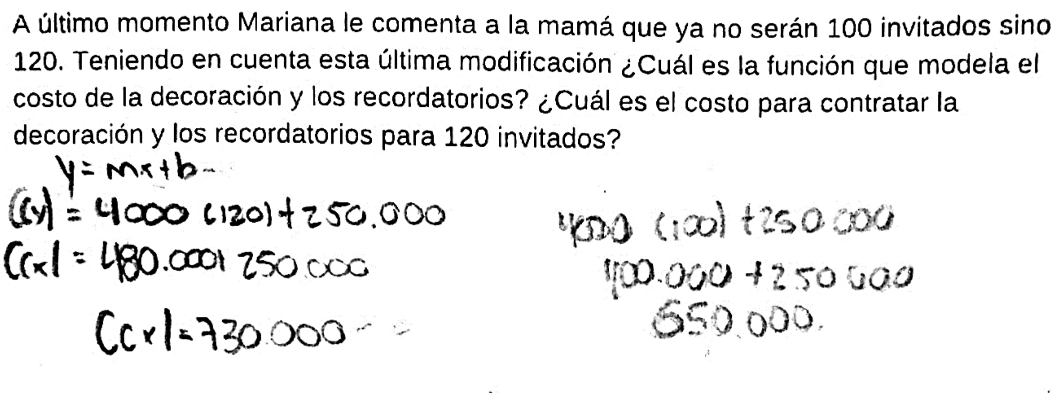
A último momento Mariana le comenta a la mamá que ya no serán 100 invitados sino 120. Teniendo en cuenta esta última modificación ¿Cuál es la función que modela el costo de la decoración y los recordatorios? ¿Cuál es el costo para contratar la decoración y los recordatorios para 120 invitados?

$(y) = 4000(120) + 250.000$ $\qquad$ $4000(120) + 250.000$
$(y) = 480000 + 250.000$
$(y) = 730.000$

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 21

Respuesta de la tarea 2- P3 por el Equipo 3



A último momento Mariana le comenta a la mamá que ya no serán 100 invitados sino 120. Teniendo en cuenta esta última modificación ¿Cuál es la función que modela el costo de la decoración y los recordatorios? ¿Cuál es el costo para contratar la decoración y los recordatorios para 120 invitados?

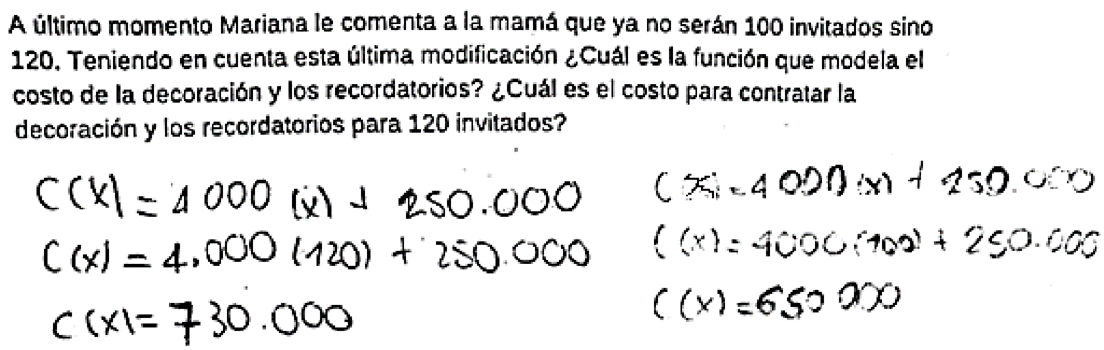
y = mx+b
C(x) = 4000 (120) + 250.000
C(x) = 480.000 + 250.000
C(x) = 730.000

4000 (100) + 250.000
400.000 + 250.000
650.000.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 22

Respuesta de la tarea 2 – P3 por el Equipo 4



A último momento Mariana le comenta a la mamá que ya no serán 100 invitados sino 120. Teniendo en cuenta esta última modificación ¿Cuál es la función que modela el costo de la decoración y los recordatorios? ¿Cuál es el costo para contratar la decoración y los recordatorios para 120 invitados?

C(x) = 4 000 (x) + 250.000
C(x) = 4.000 (120) + 250.000
C(x) = 730.000

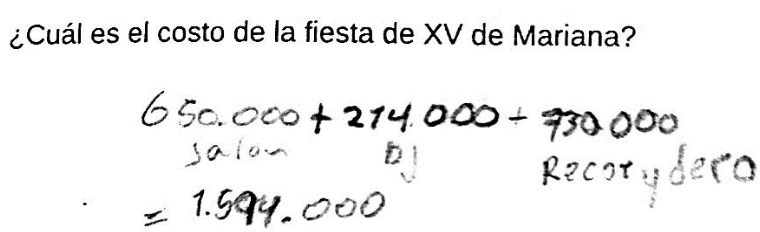
C(x) = 4 000 (x) + 250.000
C(x) = 4000 (100) + 250.000
C(x) = 650 000

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 21, 22 y 23 se puede observar las respuestas generadas por los Equipos 2, 3 y 4 en relación a la pregunta sobre la decoración y los recordatorios para 120 invitados. El Equipo 3 emplea la fórmula de la función lineal de manera visible, lo que significa que están utilizando una representación simbólica (la fórmula) para resolver el problema, en cambio los Equipos 2 y 4 no se les hace necesario tener la fórmula de manera visible para comprender la estructura de la función lineal. Cada uno de los equipos tienen en cuenta que $4.000 es la pendiente (m), x representa en este caso los invitados, que según el ejercicio propuesto es 120 y el valor constante (b) sería los $250.000. Por consiguiente, el resultado del costo de la decoración y los recordatorios para 120 personas es de $730.000. Por otro lado, se puede evidenciar el costo de los recordatorios y la decoración para 100 invitados, el cual va hacer un dato para responder la P4 planteada en la Tarea 2, los Equipos 3 y 4 encuentran el costo para los 100 invitados, el cual es $650.000, sin embargo el Equipo 2, no logra encontrar el valor, se puede evidenciar que este equipo en la fórmula sigue utilizando el dato de (120 invitados) en vez de utilizar el dato (100 invitados), este equipo no fue consciente de la variación que ocurre al cambiar el valor de la variable x. Esto refleja una falta de comprensión de cómo una variación en el contexto afecta los cálculos y las respuestas.

Figura 23

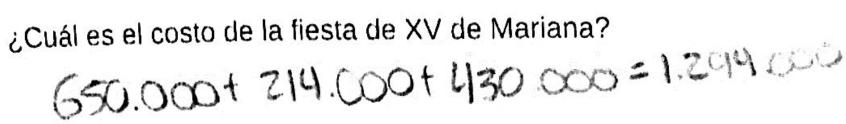
Respuesta de la Tarea 2- P4 por el Equipo 2



Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 24

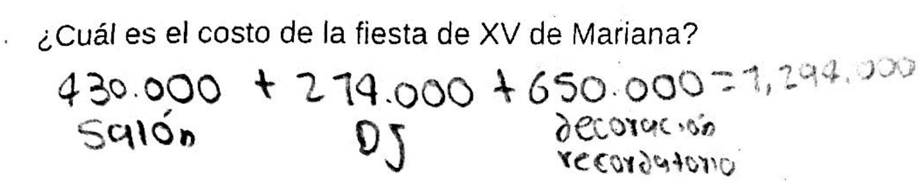
Respuesta de la Tarea 2- P4 por el Equipo 3



Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 25

Respuesta de la Tarea 2 - P4 por el Equipo 4



Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 24, 25 y 26 se puede apreciar las respuestas generadas por los Equipos 2, 3 y 4 en concordancia con la pregunta sobre el costo total de la fiesta de XV de Mariana. Los equipos analizaron los gastos asociados con el salón, el DJ, la decoración y los recordatorios para calcular el costo total de la fiesta. Sin embargo, los tres equipos omitieron considerar el costo de la comida en sus cálculos, el cual no hizo parte de las preguntas, pero se encontraba en la planeación de los XV de Mariana. Por consiguiente, los equipos podrían no haber evaluado cuidadosamente la situación después de responder las primeras cuatro preguntas planteadas, lo que resultó en que no tomaran en cuenta el costo de la comida al calcular el costo total de la fiesta. Esto puede deberse a una falta de atención a los detalles o a la posibilidad de que no se dieron cuenta de la importancia de incluir el costo de la comida para obtener un cálculo preciso del gasto total de la fiesta de XV de Mariana.

Por otro lado, el Equipo 2 para realizar el cálculo total toma como costo el valor de $730.000 para representar el costo de los recordatorios y la decoración, el cual no es correcto, ya que el costo total se está calculando para los 100 invitados iniciales que se habían planteado en la situación, por lo cual el costo representativo de los recordatorios y la decoración es de $650.000, el cual fue resuelto por los equipos en la pregunta tres, donde se encontraba los costos para 120 invitados y para 100 invitados. Por lo anteriormente mencionado, el Equipo 2 obtuvo una cantidad diferente en comparación a los Equipos 3 y 4 al sumar los costos generados para el salón del evento, el DJ y los recordatorios y la decoración.

Figura 26

Aprendizajes obtenidos en la Tarea 2 por el Equipo 2

¿Qué aprendí?

Valoro mi aprendizaje	Justificación
¿Te gustó la tarea propuesta?	er entretenido
¿Qué aprendiste?	aprendi sobre la funcion lineal
¿Comprendiste la tarea?	Masomenos
¿Qué elementos no lograste comprender de la tarea?	las dos ultimas preguntas

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 27

Aprendizajes obtenidos en la Tarea 2 por el Equipo 3

¿Qué aprendí?

Valoro mi aprendizaje		Justificación
¿Te gustó la tarea propuesta?	Si	Porque entendi mucho.
¿Qué aprendiste?		la funcion lineal.
¿Comprendiste la tarea?	Si	Porque lo resolvi todo.
¿Qué elementos no lograste comprender de la tarea?		Reemplazar bien.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 28

Aprendizajes obtenidos en la Tarea 2 por el Equipo 4

¿Qué aprendí?

Valoro mi aprendizaje	Justificación
¿Te gustó la tarea propuesta?	Si
¿Qué aprendiste?	A hacer operaciones
¿Comprendiste la tarea?	Si
¿Qué elementos no lograste comprender de la tarea?	Algunas operaciones que se me dificultan

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 27, 28 y 29 se evidencian los aprendizajes de los Equipos 2, 3 y 4 alrededor de la Tarea 2 propuesta por la profesora en formación. Frente a la pregunta ¿Te gustó la tarea propuesta? el Equipo 2 menciona que “es entretenida”, el Equipo 3 dice que “si, porque entendí mucho” y el Equipo 4 menciona que “si”. Estas respuestas reflejan cómo los equipos participaron en la tarea y cómo su percepción de la tarea está relacionada con su nivel de interés y comprensión. En relación a la pregunta sobre ¿Qué aprendiste? el Equipo 2 dice que “operaciones sobre la función lineal", el Equipo 3 menciona que "la función lineal" y el Equipo 4 a "a hacer operaciones". En las respuestas de los equipos se puede identificar cómo cada equipo participó en la tarea y cómo su aprendizaje se relaciona con la comprensión de conceptos matemáticos específicos. Sobre la pregunta ¿Comprendiste la tarea? el Equipo 2 dice que "más o menos", en cambio el Equipo 4 dice que "si, porque lo resolví todo" y el Equipo 4 si comprendió la tarea, esto indica cómo cada equipo participó en la tarea de manera diferente y cómo su nivel de comprensión varía.

La aplicación de esta tarea permitió que los estudiantes utilizaran diferentes lenguajes y representaciones como verbales y simbólicas para comunicar las ideas y soluciones que se requirieron en las preguntas planteadas de la tarea. La interacción con estos diferentes lenguajes permitió que los estudiantes no solo representaran sus pensamientos, sino que también interpretaran y comprendieran las ideas presentadas por sus compañeros de equipo. Este intercambio de perspectivas y enfoques fomenta un ambiente de aprendizaje colaborativo, donde la comunicación se convierte en una herramienta para la construcción conjunta del conocimiento.

Según Sfard (2008) se debe permitir a los estudiantes conectar los conceptos matemáticos con su propia experiencia y comprensión, en este caso, la experiencia sería los XV de Mariana, el cual conecta la experiencia de los estudiantes con el concepto de función lineal. En consonancia con la perspectiva de Sfard, la conexión de los conceptos matemáticos con la experiencia personal es importante para el desarrollo de una mayor comprensión, el cual sirve como un puente entre la abstracción matemática y la vida cotidiana, lo que facilita la comprensión de los conceptos y su aplicación en situaciones relevantes. Además, al permitir a los estudiantes hacer esta conexión, se crea un entorno donde los conceptos matemáticos dejan de ser entidades aisladas y se transforman en herramientas para interpretar y resolver problemas del mundo real.

En las Figuras 18, 19 y 20 los estudiantes logran reconocer la ecuación de la función lineal, como medio para la resolución de la situación de los XV de Mariana. Cabe resaltar, que esta tarea permitió según los NCTM (2003) profundizar en la comprensión de las relaciones y funciones, y ampliar su conocimiento sobre la función lineal, ya que esta permite modelar matemáticamente situaciones del mundo real y les brindaría diferentes herramientas para analizar y describir sus entornos cotidianos. La función lineal permite que los estudiantes desarrollen una estructura para comprender la relación entre dos variables, el cual posibilita desarrollar una comprensión de cómo las cantidades se relacionan en el mundo real.

En las Figuras 21, 22 y 23 uno de los equipos analizados no logró comprender la variación que ocurre al cambiar el valor de la variable x del problema, esto permitió que los integrantes del equipo no fueran consientes de como esta variación puede llegar afectar la veracidad de los resultados al calcular el presupuesto de los XV.

En las Figuras 24, 25 y 26 todos los equipos cometieron un error al no tomar en cuenta el costo de la comida en sus cálculos. Aunque no se mencionaba explícitamente en las preguntas iniciales, la comida estaba incluida en la planificación de la fiesta de XV años de Mariana. Como resultado de este error, los equipos no evaluaron adecuadamente la situación después de responder las primeras cuatro preguntas que se les hicieron, esto llevó a que no tuvieran en cuenta el costo de la comida al calcular el gasto total de la fiesta. Esta omisión podría deberse a una falta de atención a los detalles por parte de los equipos que puede dificultar la capacidad de identificar patrones, relaciones y regularidades matemáticas. Según Sfard (2008) el error que cometen los estudiantes a la hora de desarrollar una situación matemática es una oportunidad para el aprendizaje, ya que pueden llevar a discusiones y reflexiones que profundizan la comprensión que ha tenido el estudiante o el equipo participe de la tarea.

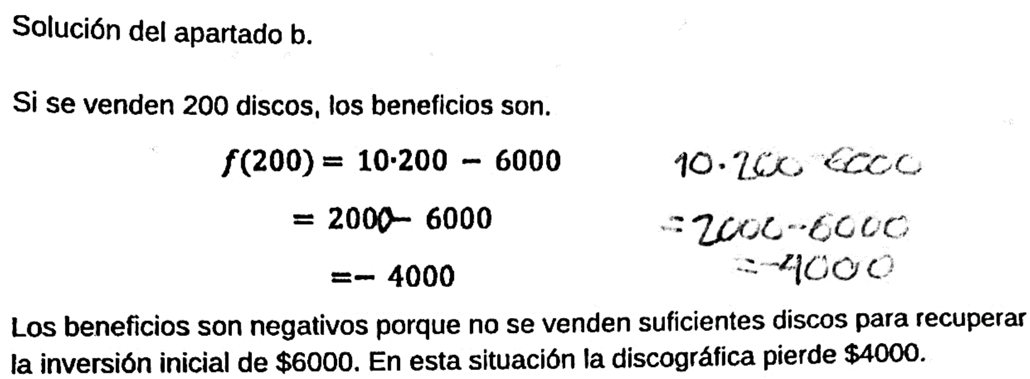
En consecuencia, las comprensiones de los Equipos 3 y 4 en relación a la Tarea 2 sobre la función lineal están en un nivel cuatro de algebrización, ya que los Equipos utilizar parámetros en lugar de números en las expresiones algebraicas. Estos dos equipos logran interpretan el símbolo de la x, el cual es interpretado como variable, que pueden tomar cualquier valor del conjunto numérico previamente establecido, que normalmente es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. En cambio, el Equipo 2 quedo en un nivel tres de algebrización al no comprender en todos los puntos propuestos esa variación.

4.3. Tarea 3

Esta tarea se centra en ayudar a Carlos a identificar los errores en un procedimiento, para después explicar cómo sería el procedimiento correcto para solucionar la situación matemática, la cual implica a una discográfica que necesita determinar la función de beneficios de la empresa en función del número de discos vendidos, para luego encontrar los beneficios que se obtendrían al vender 200 discos. Esta tarea conto con una pregunta donde los equipos participantes debían identificar y explicar la manera correcta de solucionar la situación matemática y una pregunta sobre los aprendizajes en la realización de la Tarea 3.

Figura 29

Respuesta de la Tarea 3 – P1b por el Equipo 1


Solución del apartado b.

Si se venden 200 discos, los beneficios son.

$$f(200) = 10\cdot 200 - 6000$$
$$= 2000 - 6000$$
$$= -4000$$

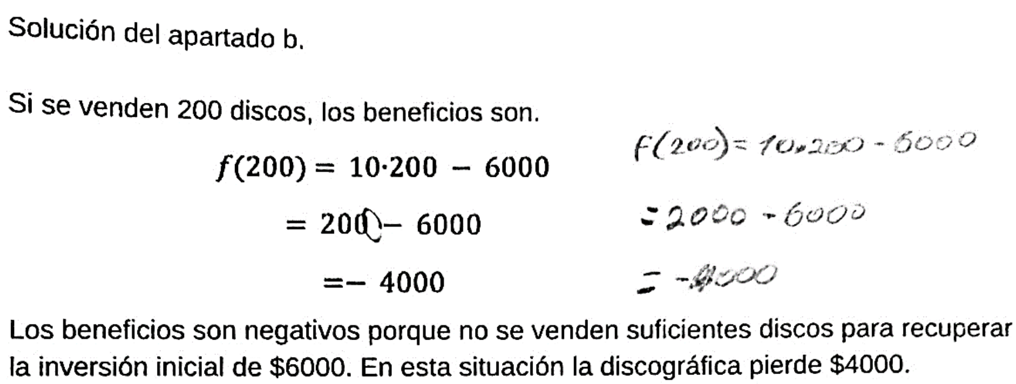
10·200 − 6000
= 2000 − 6000
= −4000

Los beneficios son negativos porque no se venden suficientes discos para recuperar la inversión inicial de \$6000. En esta situación la discográfica pierde \$4000.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 30

Respuesta de la Tarea 3 – P1b por el Equipo 2


Solución del apartado b.

Si se venden 200 discos, los beneficios son.

$$f(200) = 10\cdot 200 - 6000$$
$$= 2000 - 6000$$
$$= -4000$$

f(200) = 10·200 − 6000
= 2000 − 6000
= −4000

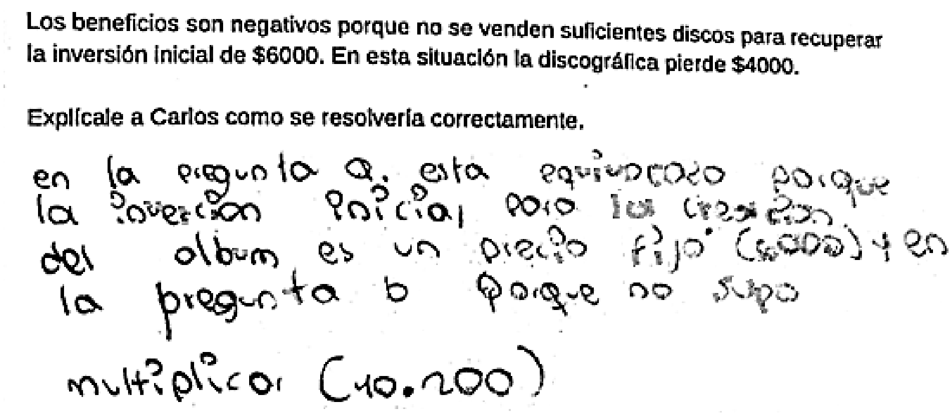
Los beneficios son negativos porque no se venden suficientes discos para recuperar la inversión inicial de \$6000. En esta situación la discográfica pierde \$4000.

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 30 y 31 se evidencia los procedimientos realizados por el Equipos 1 y 2, donde se muestra los procedimientos que ellos consideran correcto de manera matemática, con el fin de identificar los errores que Carlos cometió a la hora de resolver la situación matemática. Ambos equipos identificaron que hubo un mal procedimiento a la hora de realizar la multiplicación $10 \cdot 200$ el cual da como resultado \$2.000 en vez de \$200. Los equipos evidenciaron el error, esto implica que están utilizando representaciones visuales y símbolos matemáticos para comunicar sus ideas y así lograr dar solución al problema matemático.

Figura 31

Respuesta de la explicación a Carlos sobre la correcta solución de la Tarea 3 por el Equipo 1



Los beneficios son negativos porque no se venden suficientes discos para recuperar la inversión inicial de $6000. En esta situación la discográfica pierde $4000.

Explícale a Carlos como se resolvería correctamente.

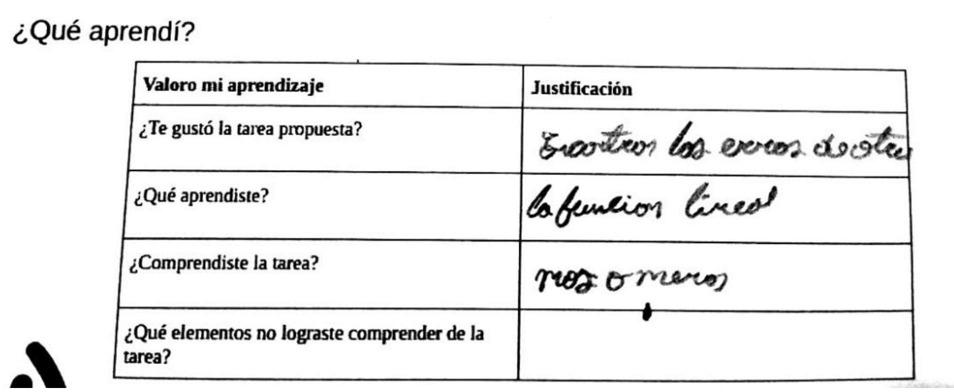
en la pregunta a. esta equivocado porque la inverción inicial para la creación del album es un precio fijo ($6000) y en la pregunta b poque no supo multiplicar (10.200)

Nota. Archivo personal de la autora.

En la Figura 32 se observa la explicación del Equipo 1 sobre los errores cometidos por Carlos, menciona que en la pregunta 1a se equivocó, ya que la inversión inicial para la creación del álbum musical es un precio fijo ($6000) y no un valor que varía. En la pregunta 1b el equipo menciona que Carlos no supo multiplicar $10 \cdot 200$, estos errores se producen cuando los estudiantes aplican incorrectamente un procedimiento o regla matemática.

Figura 32

Aprendizajes de la Tarea 3 por el Equipo 2



¿Qué aprendí?

Valoro mi aprendizaje	Justificación
¿Te gustó la tarea propuesta?	Encontrar los errores de otra
¿Qué aprendiste?	la funcion lineal
¿Comprendiste la tarea?	mas o menos
¿Qué elementos no lograste comprender de la tarea?	

Nota. Archivo personal de la autora.

En la Figura 33 se evidencia el aprendizaje alrededor de la Tarea 3 por el Equipo 2, en relación a la pregunta ¿Te gustó la tarea propuesta? el equipo dice que “sí, porque encontraron los errores de otro”, esto sugiere un aprendizaje a través de la revisión crítica y el análisis de problemas. En la pregunta ¿Qué aprendiste? el equipo menciona que “la función lineal” esto puede mostrar que no solo se limitaron a señalar errores, sino que también adquirieron conocimientos relacionados con el contenido de la tarea. Y sobre la pregunta ¿Comprendiste la tarea? el equipo menciona que “más o menos” lo que sugiere que, si bien hubo avances en su comprensión, es posible que algunos aspectos de la tarea aún no estén completamente claros. Cada uno de los aprendizajes adquiridos por el Equipo 2, permitió que se generara una comunicación y un intercambio de ideas.

La aplicación de esta tarea permitió que los equipos comunicaran y reflexionaran en torno a una situación matemática donde debían identificar varios errores. En las Figuras 30 y 31 los equipos están utilizando la comunicación para comparar sus procedimientos con el de Carlos y señalar las discrepancias, esto destaca cómo la comunicación según Sfard (2008) sirve como un mecanismo para la detección y corrección de errores, lo que es importante en el aprendizaje de las matemáticas. Al igual, por medio de esta tarea los equipos trabajaron juntos para resolver un problema matemático y construir un conocimiento compartido sobre cómo resolverlo correctamente, lo que sugiere un proceso de construcción colectiva de conocimiento, esta se da a través de la interacción social y la comunicación entre los miembros del equipo.

Por otro lado, en la Figura 32 el Equipo 1 menciona que Carlos consideró incorrectamente que la inversión inicial era un costo variable en lugar de un precio fijo de $6.000, esto sugiere que Carlos no evaluó adecuadamente los gastos fijos necesarios para iniciar el proyecto del álbum. Además, el Equipo 1 indica que Carlos también cometió un error al multiplicar $10 \cdot 200$, ya que Carlos pudo haber cometido un error en los procedimientos, dado que al no tener en cuenta otro cero el resultado obtenido fue incorrecto.

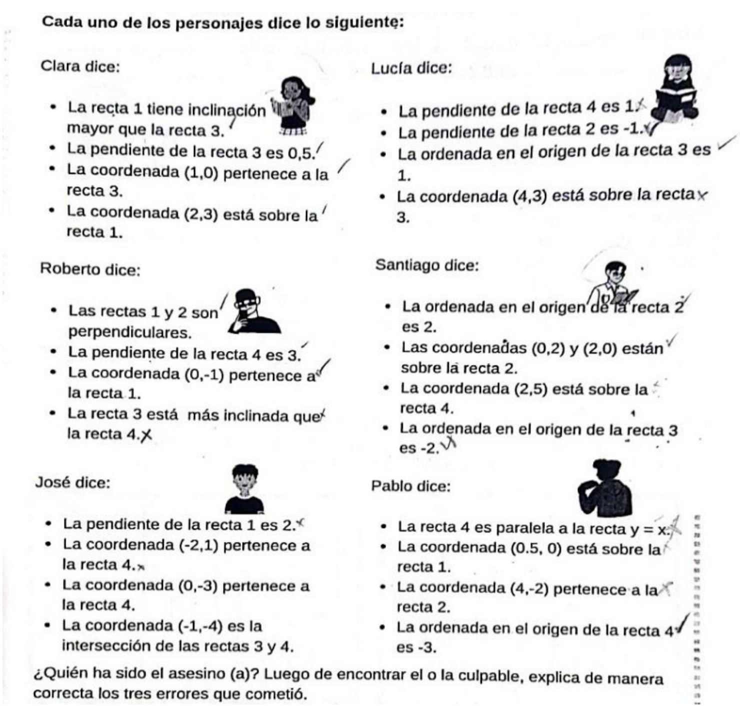
Por lo anterior, el Equipo 2 está en un nivel tres de algebrización, debido a que fueron capaces de encontrar parcialmente los errores y no lograron justificar sus ideas alrededor de los procedimientos en la solución de la situación. Sin embargo, el equipo obtuvo una comprensión de la fórmula de la función lineal. Por otro lado, el Equipo 1 se encuentra en un nivel cuatro de algebrización, ya que lograron encontrar los errores, al igual que lograron justificar y explicar los procedimientos y errores cometidos por parte de Carlos.

4.4. Tarea 4

La tarea 4 se centró en el reconocimiento de las propiedades de las funciones lineales, como la pendiente, la inclinación, la ordenada al origen y la graficación de coordenadas, con el fin de resolver una situación sobre la investigación de un asesinato. En esta situación, se presentaron seis personajes, donde uno de ellos es el asesino y otro es la víctima del crimen. La tarea consto de una pregunta donde debían identificar los tres errores cometidos por el asesino al observar las cuatro rectas presentes en la situación, así como las cuatro observaciones realizadas por la víctima. Dos preguntas donde debían explicar las observaciones que hizo la víctima y el asesino. Luego debían encontrar las coordenadas donde ocurrió el crimen utilizando una tabla de valores para posteriormente realizar la gráfica y marcar el sitio donde ocurrieron los hechos del crimen, este apartado solo lo alcanza a realizar parcialmente el Equipo 5. Por último, se propuso una tabla sobre los aprendizajes alcanzados en la realización de la tarea, el cual ninguno de los equipos logro terminar.

Figura 33

Identificación de los errores de la Tarea 4 por el Equipo 3



Cada uno de los personajes dice lo siguiente:

Clara dice:

- La recta 1 tiene inclinación mayor que la recta 3.
- La pendiente de la recta 3 es 0,5.
- La coordenada (1,0) pertenece a la recta 3.
- La coordenada (2,3) está sobre la recta 1.

Lucía dice:

- La pendiente de la recta 4 es 1.
- La pendiente de la recta 2 es -1.
- La ordenada en el origen de la recta 3 es 1.
- La coordenada (4,3) está sobre la recta 3.

Roberto dice:

- Las rectas 1 y 2 son perpendiculares.
- La pendiente de la recta 4 es 3.
- La coordenada (0,-1) pertenece a la recta 1.
- La recta 3 está más inclinada que la recta 4.

Santiago dice:

- La ordenada en el origen de la recta 2 es 2.
- Las coordenadas (0,2) y (2,0) están sobre la recta 2.
- La coordenada (2,5) está sobre la recta 4.
- La ordenada en el origen de la recta 3 es -2.

José dice:

- La pendiente de la recta 1 es 2.
- La coordenada (-2,1) pertenece a la recta 4.
- La coordenada (0,-3) pertenece a la recta 4.
- La coordenada (-1,-4) es la intersección de las rectas 3 y 4.

Pablo dice:

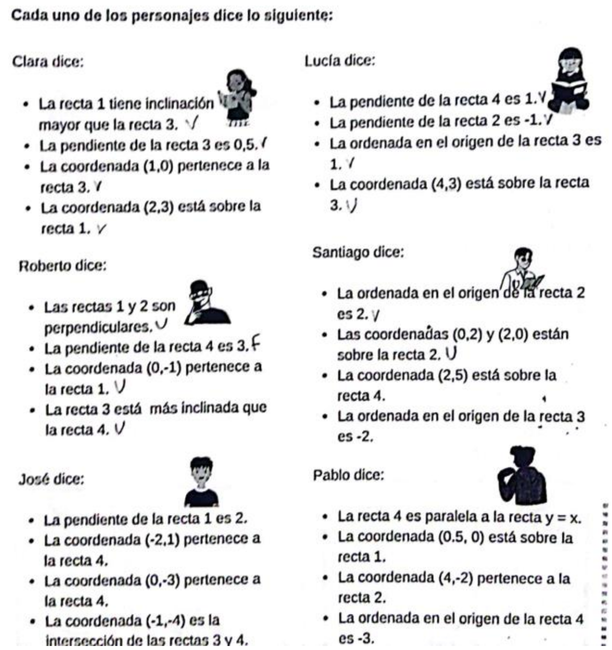
- La recta 4 es paralela a la recta y = x.
- La coordenada (0.5, 0) está sobre la recta 1.
- La coordenada (4,-2) pertenece a la recta 2.
- La ordenada en el origen de la recta 4 es -3.

¿Quién ha sido el asesino (a)? Luego de encontrar el o la culpable, explica de manera correcta los tres errores que cometió.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 34

Identificación de los errores de la Tarea 4 por el Equipo 4



Cada uno de los personajes dice lo siguiente:

Clara dice:

- La recta 1 tiene inclinación mayor que la recta 3.
- La pendiente de la recta 3 es 0,5.
- La coordenada (1,0) pertenece a la recta 3.
- La coordenada (2,3) está sobre la recta 1.

Roberto dice:

- Las rectas 1 y 2 son perpendiculares.
- La pendiente de la recta 4 es 3. F
- La coordenada (0,-1) pertenece a la recta 1.
- La recta 3 está más inclinada que la recta 4.

José dice:

- La pendiente de la recta 1 es 2.
- La coordenada (-2,1) pertenece a la recta 4.
- La coordenada (0,-3) pertenece a la recta 4.
- La coordenada (-1,-4) es la intersección de las rectas 3 y 4.

Lucía dice:

- La pendiente de la recta 4 es 1.
- La pendiente de la recta 2 es -1.
- La ordenada en el origen de la recta 3 es 1.
- La coordenada (4,3) está sobre la recta 3.

Santiago dice:

- La ordenada en el origen de la recta 2 es 2.
- Las coordenadas (0,2) y (2,0) están sobre la recta 2.
- La coordenada (2,5) está sobre la recta 4.
- La ordenada en el origen de la recta 3 es -2.

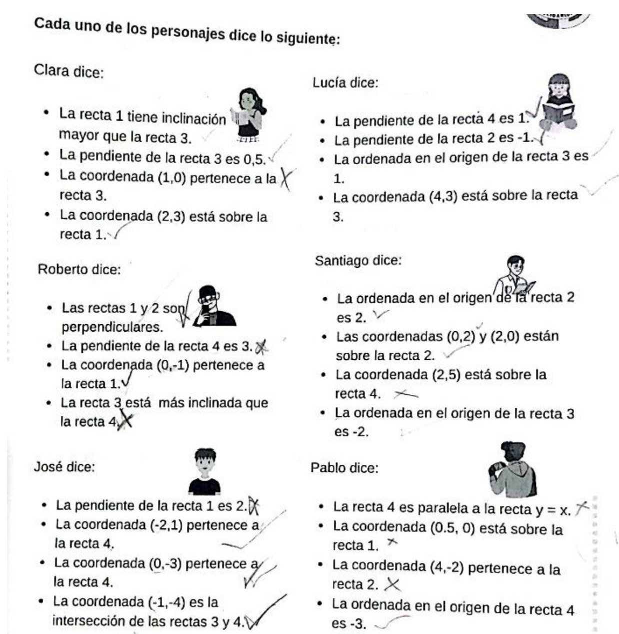
Pablo dice:

- La recta 4 es paralela a la recta y = x.
- La coordenada (0.5, 0) está sobre la recta 1.
- La coordenada (4,-2) pertenece a la recta 2.
- La ordenada en el origen de la recta 4 es -3.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 35

Identificación de los errores de la Tarea 4 por el Equipo 5



Cada uno de los personajes dice lo siguiente:

Clara dice:

- La recta 1 tiene inclinación mayor que la recta 3.
- La pendiente de la recta 3 es 0,5.
- La coordenada (1,0) pertenece a la recta 3.
- La coordenada (2,3) está sobre la recta 1.

Roberto dice:

- Las rectas 1 y 2 son perpendiculares.
- La pendiente de la recta 4 es 3.
- La coordenada (0,-1) pertenece a la recta 1.
- La recta 3 está más inclinada que la recta 4.

José dice:

- La pendiente de la recta 1 es 2.
- La coordenada (-2,1) pertenece a la recta 4.
- La coordenada (0,-3) pertenece a la recta 4.
- La coordenada (-1,-4) es la intersección de las rectas 3 y 4.

Lucía dice:

- La pendiente de la recta 4 es 1.
- La pendiente de la recta 2 es -1.
- La ordenada en el origen de la recta 3 es 1.
- La coordenada (4,3) está sobre la recta 3.

Santiago dice:

- La ordenada en el origen de la recta 2 es 2.
- Las coordenadas (0,2) y (2,0) están sobre la recta 2.
- La coordenada (2,5) está sobre la recta 4.
- La ordenada en el origen de la recta 3 es -2.

Pablo dice:

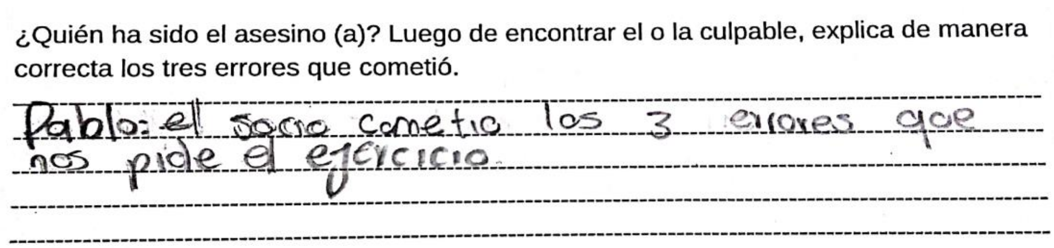
- La recta 4 es paralela a la recta y = x.
- La coordenada (0.5, 0) está sobre la recta 1.
- La coordenada (4,-2) pertenece a la recta 2.
- La ordenada en el origen de la recta 4 es -3.

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 34, 35 y 36 se evidencian las observaciones de los personajes involucrados en la investigación del asesinato, los equipos debían identificar los errores y los aciertos de los personajes involucrados, pero para eso los estudiantes necesitaban saber graficar coordenadas, encontrar la pendiente a partir de la gráfica, identificar la ordenada, la inclinación de una recta, saber que son rectas perpendiculares y paralelas. Esto con el fin de identificar los errores, para posteriormente poder responder las preguntas que se derivan de este apartado. A partir de esta tarea, los Equipos 3 y 5 comunicaron sus aciertos a partir de un “chulito” (✓) y los desaciertos a partir de una “equis” (×), en cambio el Equipo 4, optó por usar verdadero (V) para los aciertos y falso (F) para los desaciertos. Además, esta tarea permitió que los participantes interactuaran y dialogaran en busca de una posible solución a cada una de las observaciones realizadas por los personajes involucrados en el asesinato.

Figura 36

Respuesta de la Tarea 4 – P1 por el Equipo 3

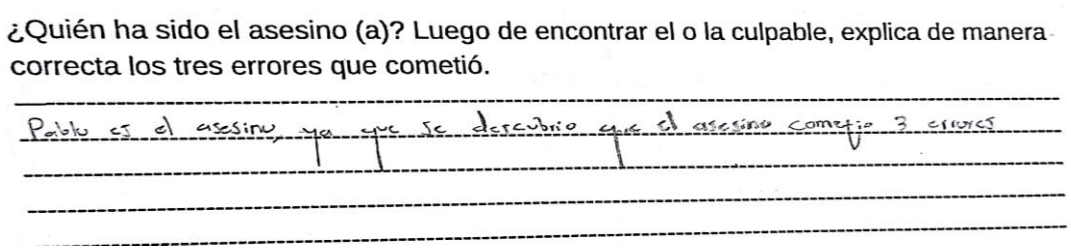

¿Quién ha sido el asesino (a)? Luego de encontrar el o la culpable, explica de manera correcta los tres errores que cometió.

Pablo: el socio cometio los 3 errores que nos pide el ejercicio.

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 37

Respuesta de la Tarea 4 – P1 por el Equipo 4

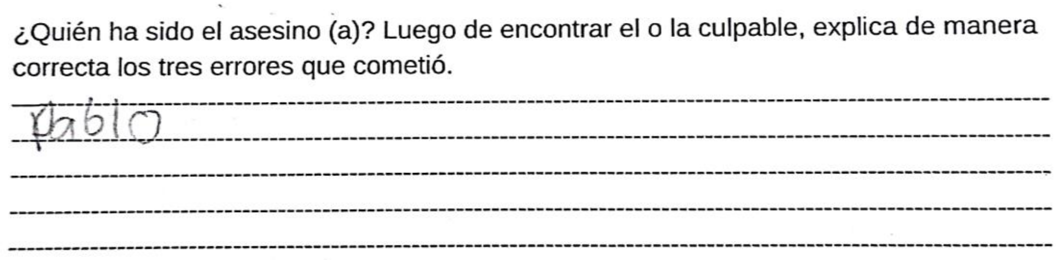

¿Quién ha sido el asesino (a)? Luego de encontrar el o la culpable, explica de manera correcta los tres errores que cometió.

Pablo es el asesino, ya que se descubrio que el asesino cometio 3 errores

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 38

Respuesta de la Tarea 4 – P1 por el Equipo


¿Quién ha sido el asesino (a)? Luego de encontrar el o la culpable, explica de manera correcta los tres errores que cometió.

Pablo

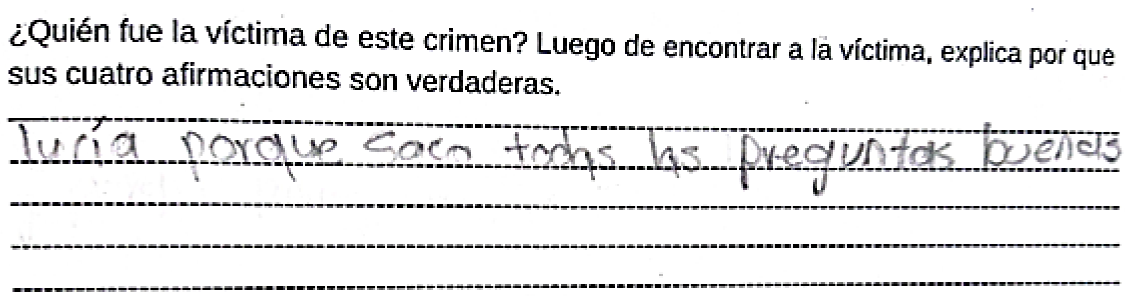
Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 37, 38 y 39 se evidencia las respuestas por los Equipos 3, 4 y 5 en relación a la pregunta sobre ¿Quién ha sido el asesino (a)? para posteriormente explicar la manera correcta de cada una de las observaciones erróneas realizadas por el asesino. Todos los equipos afirman que el asesino ha sido Pablo, el Equipo 3 dice que Pablo fue el asesino porque él fue que cometió los tres errores y el Equipo 4 menciona que Pablo es el asesino porque se descubrió que el asesino cometió tres errores. Sin embargo, en la tarea propuesta el asesino en realidad fue Roberto, este personaje fue el único que cometió los tres errores al mencionar que las rectas 1 y 2 son perpendiculares, que la pendiente de la recta 4 es 3 y que la recta 3 está más inclinada que la recta 4. Se destaca que todos los equipos cometieron errores al categorizar cuáles respuestas eran correctas y cuáles no en relación al problema planteado. Esta parte resalta que, en general, hubo dificultades en la capacidad de los equipos para identificar al asesino correctamente, el cual sugiere que hubo dificultades en la interpretación del problema o en la aplicación de ciertas reglas o criterios sobre la función lineal.

A pesar de la dificultad para resolver la pregunta principal, se enfatiza que todos los equipos tuvieron un alto porcentaje de aciertos en sus deducciones acerca de las propiedades que poseen las funciones lineales. Esto indica que, a pesar de los errores en la pregunta central, los equipos demostraron una compresión de los conceptos relacionados con funciones lineales.

Figura 39

Respuesta de la Tarea 4 – P2 por el Equipo 3

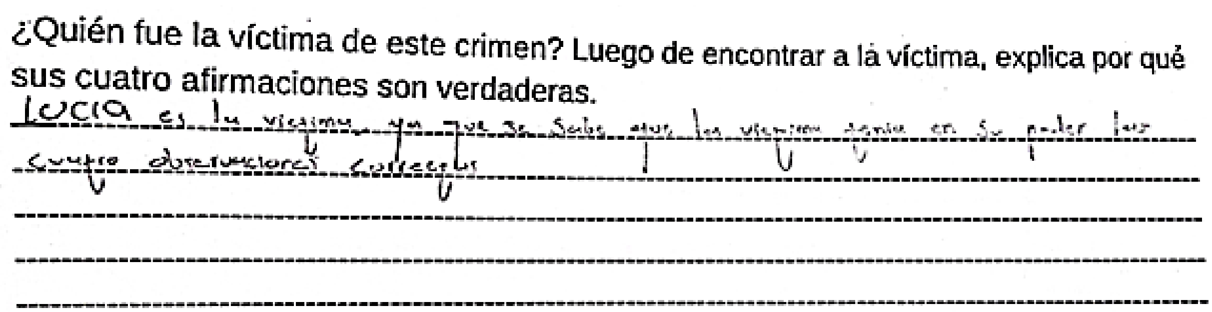

¿Quién fue la víctima de este crimen? Luego de encontrar a la víctima, explica por que sus cuatro afirmaciones son verdaderas.

lucía porque saco todas las preguntas buenas

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 40

Respuesta de la Tarea 4 – P2 por el Equipo 4

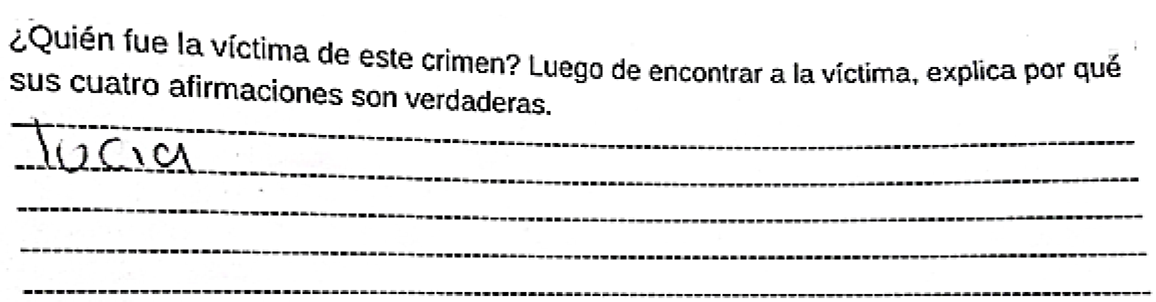

¿Quién fue la víctima de este crimen? Luego de encontrar a la víctima, explica por qué sus cuatro afirmaciones son verdaderas.

Lucia es la victima ya que se sabe que las victimas tenia en su poder las cuatro afirmaciones correctas

Nota. Archivo personal de la autora.

Figura 41

Respuesta de la Tarea 4 – P2 por el Equipo 5


¿Quién fue la víctima de este crimen? Luego de encontrar a la víctima, explica por qué sus cuatro afirmaciones son verdaderas.

lucia

Nota. Archivo personal de la autora.

En las Figuras 40, 41 y 42 se evidencia las respuestas de los Equipos 3, 4 y 5 en relación a la pregunta ¿Quién fue la victima de este crimen? y posteriormente explicar porque sus cuatro afirmaciones son verdaderas. El Equipo 3 menciona que Lucia porque saco todas las preguntas buenas, este equipo proporciona una razón de su razonamiento frente al crimen. El Equipo 4 dice que Lucia es la víctima, ya que se sabe que la víctima tenía en su poder las cuatro afirmaciones correctas, esto sugiere que el equipo analizó las pruebas disponibles y realizó una deducción lógica basada en la información que se presenta en el caso. El Equipo 5 afirma que Lucia fue la víctima, sin embargo, no se proporcionan detalles adicionales sobre su razonamiento, el cual sería importante que el equipo explique más a fondo su justificación, ya que esto fortalecería su posición frente al caso de estudio. Los tres Equipos concuerdan que Lucia fue la víctima, el cual es una afirmación correcta, ya que sus observaciones en relación a las cuatro rectas son verdaderas. Por otro lado, la convergencia de opiniones entre los diferentes equipos puede influir en la percepción de la veracidad de una afirmación.

Figura 42

Respuesta de la Tarea 4 – P3 por el Equipo 5

Ahora que sabemos quién ha sido el asesino y la víctima, vamos a averiguar dónde se produjo el crimen.

El crimen tuvo lugar en las coordenadas que cumplen las siguientes condiciones:

- El sitio está sobre la recta $y = 2x - 5$
- La ordenada del sitio es menor que su abscisa.
- La suma de las dos coordenadas del sitio es 8,5

Realiza una tabla de valores para encontrar el lugar donde se produjo el crimen.

X	1	
Y	-3	

$y = 2(1) - 5.$

Realiza la gráfica y marca el sitio donde se produjo el crimen.

Nota. Archivo personal de la autora.

En la Figura 43 se muestra una parte de la respuesta generada por el Equipo 5, que está relacionada con la pregunta acerca del lugar donde se produjo el crimen, el cual debía cumplir unas condiciones específicas para realizar la tabla de valores y posteriormente la gráfica con la demarcación del lugar de los hechos. Sin embargo, el Equipo 5 no logró completar la tabla de valores y la gráfica. A pesar de eso, lograron realizar un bosquejo inicial de la tabla de valores y pudieron encontrar una coordenada que indicaba la posible ubicación del crimen, la razón de su dificultad fue que el tiempo asignado para llevar a cabo esta tarea no fue suficiente para finalizarla adecuadamente.

Mediante la realización de esta tarea, los equipos se involucraron en la comprensión y el uso de conceptos matemáticos relacionados con funciones lineales, como la pendiente, la inclinación, la ordenada al origen, entre otros, lo cual permitió a los equipos desarrollar un lenguaje matemático y una capacidad para expresar ideas matemáticas. Por otro lado, al presentar el problema en el contexto de una investigación de asesinato, la tarea ayudó a los estudiantes a ver la relevancia y aplicabilidad de las matemáticas en situaciones de la vida real, el cual permite generar en los participantes la motivación para aprender matemáticas al mostrarles cómo pueden usar estas habilidades en contextos fuera del aula. Según Sfard (2008) los estudiantes deben relacionar los conceptos matemáticos que están aprendiendo con sus propias experiencias. En otras palabras, no deben ver las matemáticas como algo abstracto y desconectado de sus vidas, sino como algo que tiene aplicaciones y relevancia en el mundo real. Por otra parte, la autora enfatiza en la importancia de involucrar activamente a los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, esto significa que los estudiantes no deben ser pasivos receptores de información, sino que deben participar activamente en la exploración y comprensión de los conceptos matemáticos.

En las Figuras 34, 35 y 36 se muestra las observaciones de cada uno de los personajes involucrados en el crimen, este apartado fomenta la interacción y el diálogo entre los participantes, ya que trabajan juntos en busca de soluciones a cada una de las observaciones realizadas por los personajes involucrados en el caso de asesinato. En las Figuras 37, 38 y 39 se presentan las respuestas y justificaciones de los equipos para señalar quién creen que es el asesino. Además, se evidencia que todos los equipos cometieron errores al categorizar las respuestas como correctas o incorrectas y al identificar al asesino equivocado. Sin embargo, a pesar de los errores, se puede mencionar que todos los equipos tuvieron un porcentaje de aciertos en sus deducciones sobre las propiedades de las funciones lineales. Esto indica que, aunque hubo errores en la respuesta final, la comunicación permitió a los equipos presentar sus ideas. En consecuencia, Sfard (2008) menciona que, aunque algunas de estas soluciones pueden ser incorrectas desde el punto de vista matemático, todas son discursivamente apropiadas. Esto se debe a que la respuesta no solo proporciona información sobre el conocimiento matemático del estudiante, sino que también puede generar discusión y reflexión en otros interlocutores.

En las Figuras 40, 41 y 42 se presenta un escenario de comunicación en el contexto de la investigación de un crimen. Los Equipos 3, 4 y 5 fueron los participantes en este proceso comunicativo, donde cada equipo respondió a la pregunta ¿Quién fue la víctima de este crimen?, este interrogante es el núcleo de la discusión, y su respuesta se convierte en el resultado central de la comunicación que tiene lugar en este contexto. En la solución de esta pregunta, los tres equipos coinciden en que Lucía fue la víctima, este consenso, desde una perspectiva de la comunicación permite reforzar la credibilidad de la afirmación de que Lucia es la víctima, ya que la convergencia de opiniones entre diferentes actores en una comunicación puede influir en la percepción de la veracidad de una afirmación. Sumado a esto, es importante destacar que la comunicación en este contexto no se limita solo a la presentación de conclusiones, sino que implica un intercambio constante de ideas, razonamientos y evidencia para respaldar esas conclusiones a las que llegan los equipos, el cual enriquece el proceso de resolución del problema.

Por otro lado, en la Figura 43, se muestra la respuesta generada por el Equipo 5, que está relacionada con la pregunta acerca del lugar donde se produjo el crimen. El Equipo 5 se enfrentó con un desafío, ya que no lograron completar la tabla de valores y la gráfica debido al tiempo, dado que fue muy limitado. Esto muestra que la comunicación no solo se trata de transmitir información de manera clara, sino también de gestionar el tiempo, tomar decisiones conjuntas y adaptarse a las circunstancias, dado que, en un entorno de trabajo colaborativo como este, la comunicación debe permitir a los equipos a superar desafíos y avanzar hacia sus objetivos, incluso cuando el tiempo es limitado.

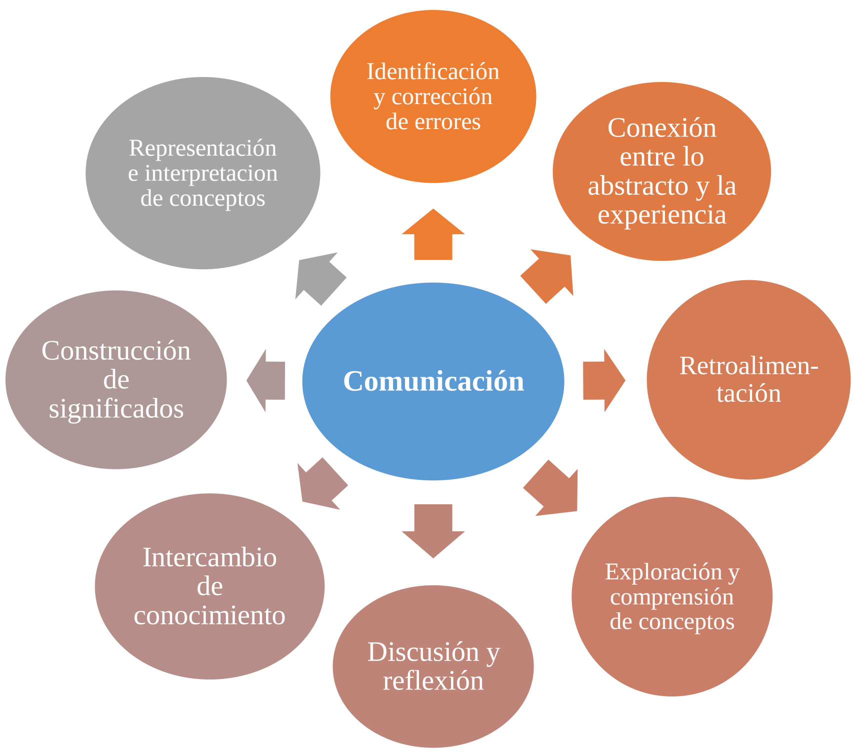
En consonancia con los análisis previos, se puede afirmar que los Equipos 3, 4 y 5 han alcanzado un nivel de algebrización de grado tres en su comprensión de las funciones lineales. Este nivel se caracteriza por su capacidad para considerar diversos aspectos de las funciones lineales, como la pendiente, la ordenada al origen y la representación gráfica de coordenadas. Sin embargo, es importante señalar que estos equipos han enfrentado desafíos específicos al intentar encontrar rectas paralelas o perpendiculares. En particular, les resultó complicado determinar cuándo dos rectas son perpendiculares y cómo obtener una recta paralela a una dada mediante la manipulación de valores, esta dificultad refleja que los equipos pueden mejorar su comprensión y aplicación de las funciones lineales en diferentes situaciones matemáticas.

4.5. Resultados

A continuación, se presenta la Figura 44 con algunas palabras clave relacionadas con los resultados de las cuatro tareas de la investigación. Además, se presenta la Tabla 3 con los niveles de algebrización alcanzados por cada uno de los equipos que participaron en las tareas.

Figura 43

Palabras clave en las tareas analizadas



Nota. Elaboración propia.

Tabla 3

Niveles de algebrización alcanzado por cada uno de los equipos participantes en las tareas analizadas

Equipos	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Equipo 1			Nivel 4	
Equipo 2		Nivel 3	Nivel 3	
Equipo 3	Nivel 2	Nivel 4		Nivel 3
Equipo 4	Nivel 2	Nivel 4		Nivel 3
Equipo 5	Nivel 2			Nivel 3

Nota. Elaboración propia.

Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones

El discurso matemático que se aprende en el salón es una parte bien establecida de la herencia cultural y se supone que precisamente por esta razón, los estudiantes están llamados a convertirse en sus participantes (Sfard, 2008, p.230)

El presente capitulo se pone en consideración las conclusiones de la investigación, en relación a la pregunta y el objetivo planteado. Estas conclusiones están fundamentadas en el análisis de las tareas y el marco teórico desarrollado. Adicionalmente, se mencionan aportes al campo de la Educación Matemática, algunas limitaciones manifiestas en el estudio, posibles líneas de investigación y algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

5.1. Consideraciones respecto a la pregunta y el objetivo

Esta investigación se enmarca en la pregunta *¿Cómo favorecer el proceso de la comunicación en estudiantes de décimo grado a partir de tareas relacionadas con funciones lineales?* Para responder a esta pregunta, se llevó a cabo una revisión de la literatura que permitió establecer una fundamentación teórica en torno a la comunicación en la clase de matemáticas, los niveles de algebrización y el concepto de función. Estos elementos se integraron para llevar a cabo un análisis de las tareas, con el fin de responder a la pregunta de investigación.

Asimismo, esta investigación se planteó desde la propuesta de Sfard (2008) en torno a la comunicación en la clase de matemáticas. Por otra parte, se tomó como referencia los niveles de algebrización planteados por Godino et al. (2015) y Aké y Godino (2018) con el fin de establecer los niveles a los que llegaron los participantes en el desarrollo de las cuatro tareas propuestas. Por último, se tomó el concepto de función desde el MEN (1998), NCTM (2003) y MEN (2006), con el objetivo de poner en consideración los elementos que trae cada uno de estos documentos rectores acerca de la función lineal.

Por otro lado, el método de la investigación de diseño, en particular el experimento de enseñanza aportó en el cumplimiento de la pregunta y el objetivo de investigación, porque a partir de sus tres fases: diseño, implementación y análisis retrospectivo se abordó las tareas específicas de la investigación. En la primera fase, se trató del diseño de las tareas, asegurando que estuvieran alineadas con el objetivo de la investigación. En la segunda fase, se aplicaron las tareas al grado 10°3 en la Institución Educativa Compartir, esto permitió recopilar datos empíricos y observar cómo los participantes respondían a las tareas, lo que aportó información para el análisis posterior. En la última fase, se realizó una triangulación con las respuestas de los estudiantes acerca de las cuatro tareas, la mirada de la investigadora y los referentes teóricos planteados en el estudio.

En consecuencia, con el análisis de las tareas y los resultados obtenidos en la investigación, se destacan algunas palabras clave relacionadas con algunos hallazgos encontrados en las tareas analizadas como: *representación e interpretación de conceptos matemáticos, retroalimentación, identificación y corrección de errores, conexión entre lo abstracto y la experiencia, exploración y comprensión de conceptos, discusión y reflexión, intercambio de conocimientos y construcción de significados* (ver Figura 44). Estas, reflejan aspectos importantes como se muestra a continuación.

5.1.1. Palabras clave en la investigación

Representación e interpretación de conceptos matemáticos. Esto se relaciona con la capacidad que tuvieron los estudiantes para expresar la información y comprender los conceptos matemáticos propuestos en las tareas, además, de interpretar las perspectivas de los demás integrantes del equipo a través de representaciones visuales, verbales o simbólicas.

Retroalimentación. Esta permitió al estudiante corregir errores y mejorar su comprensión matemática alrededor de las tareas desarrollas por cada equipo.

Conexión entre lo abstracto y la experiencia. Esto implicó crear un puente entre los conceptos abstractos del concepto de función y la vida cotidiana de los participantes, la cual permitió facilitar la comprensión y la comunicación de ideas matemáticas.

Identificación y corrección de errores. Las tareas desarrolladas por los estudiantes implicaron revisar, analizar y corregir las soluciones, con el fin de darle validez a las afirmaciones. Por otro lado, esta permitió generar un proceso acerca de cómo los estudiantes construyeron su comprensión matemática alrededor de las tareas propuestas.

Discusión y reflexión. Estos procesos fueron clave en la comunicación de los equipos, ya que, lograron desarrollar una comprensión de los conceptos matemáticos al discutir sus ideas con otros y reflexionar sobre sus propias ideas.

Intercambio de conocimientos. Las tareas posibilitaron que los estudiantes compartieran sus ideas y sus experiencias, mediante el dialogo y la interacción con otros.

Construcción de significados. Las tareas permitieron que los estudiantes lograran aplicar, explicar, conectar y usar los conceptos matemáticos de la función lineal para resolver las cuatro tareas propuestas.

Exploración y comprensión de conceptos. Estas tareas posibilitaron a los estudiantes a no limitarse a memorizar fórmulas y procedimientos, sino que los llevo a comprender los conceptos de la función lineal a través de la indagación y la construcción de significados.

Por otro lado, los resultados obtenidos en la investigación permitieron establecer el nivel de algebrización presente en las soluciones propuestas por cada equipo (ver Tabla 3), la cual compara los niveles de algebrización alcanzados por cada equipo en relación con las tareas analizadas. Estos niveles posibilitaron comprender cómo cada equipo abordó y resolvió las tareas planteadas en el estudio. Además, brindo información sobre las fortalezas y debilidades de cada equipo a partir de los procedimientos y soluciones a los que llegaban mediante la aplicación del concepto de función lineal.

Con respecto al concepto de función, las tareas permitieron a los equipos participantes aplicar la variable dependiente e independiente, la fórmula de la función lineal y algunas propiedades como la inclinación de la recta, la ordenada al origen, la pendiente, entre otras, para solucionar situaciones en diferentes contextos y aplicaciones. Los participantes mostraron tener una capacidad de modelar situaciones del mundo real al utilizar la función lineal, lo que indica una de las posibilidades de cómo las funciones pueden representar y resolver problemas prácticos. Estos resultados no solo reflejan la comprensión de los equipos del concepto de función, sino que también resaltan la importancia de enseñar y aprender matemáticas a través de enfoques contextualizados y aplicados, lo que promueve un discernimiento sobre de los conceptos matemáticos y de diferentes fenómenos.

En relación al objetivo general, *favorecer el proceso de la comunicación en estudiantes de décimo grado a partir de tareas relacionadas con funciones lineales*, se muestra con lo expuesto anteriormente que este fue logrado, en la medida en que se realizó un análisis que permitió poner en escena las ideas de los estudiantes mediante tareas relacionadas con el concepto de función lineal.

5.2. Limitaciones del estudio

Algunas de las limitaciones que se presentaron en la investigación se exponen a continuación.

En primer lugar, como consecuencia de las dinámicas de la institución se contó con solo dos encuentros con el grado 10°3 para la implementación de las tareas, lo cual resultó ser un tiempo limitado para establecer una interacción con los participantes del estudio, esto debido a que los espacios debían ser programados en la agenda institucional.

En segundo lugar, el tiempo fue otro factor en las limitaciones del estudio, ya que no fue el adecuado para que los estudiantes lograran desarrollar las tareas propuestas. Esto se reflejó en el segundo encuentro, cuando se implementó la Tarea 3 y la Tarea 4, esto influyó en las producciones de los estudiantes.

En tercer lugar, la actitud de los estudiantes en el segundo encuentro fue un limitante en el aprovechamiento del espacio para el desarrollo de las tareas propuestas para ese encuentro, ya que el espacio que se tomó para la implementación de las tareas fue en la hora de Educación física, por lo que los estudiantes manifestaron estar en desacuerdo en la utilización de ese espacio debido a que ya llevaban tiempo sin hacer deporte.

En cuarto lugar, la ausencia de un *software* matemático representó una limitación en el estudio, ya que su incorporación habría potenciado la comprensión y la comunicación en torno a las funciones lineales. La utilización de herramientas digitales habría permitido a los estudiantes visualizar gráficamente las relaciones entre variables, realizar análisis por medio de la tecnología y fomentar un ambiente de aprendizaje más interactivo y participativo.

Por último, la extensión de las tareas propuestas representó una limitación, especialmente en el caso de la Tarea 4, esta extensión excesiva podría haber abrumado a los estudiantes, el cual dificultó su capacidad para mantener la concentración y la motivación durante la realización de la tarea propuesta.

5.3. Posibles líneas de investigación

El desarrollo de esta investigación puede posibilitar el desarrollo de futuras investigaciones, las cuales se podrían orientar así:

- Investigar si las tareas sobre funciones lineales pueden utilizarse para desarrollar competencias comunicativas específicas, como la capacidad de argumentación, la presentación de resultados y la interpretación de gráficos, y cómo estas competencias pueden ser evaluadas.
- Documentar en un periodo de tiempo más amplio, lo que sucede en la clase de matemáticas al implementar tareas que favorezcan la comunicación mediante las funciones lineales.
- Comparar el impacto de la comunicación mediante tareas relacionadas con las funciones lineales en diferentes entornos educativos, como escuelas urbanas y rurales, instituciones públicas y privadas, o aulas presenciales y virtuales.
- Evaluar cómo el uso de herramientas tecnológicas y multimedia, como *software* de gráficos, simulaciones interactivas o presentaciones multimedia, puede mejorar la comunicación del concepto de función en la clase de matemáticas.
- Investigar cómo la retroalimentación del profesor y la interacción entre estudiantes durante las tareas relacionadas con funciones lineales contribuyen al desarrollo de habilidades comunicativas en la clase de matemáticas.
- Explorar cómo la interacción entre estudiantes, la discusión en grupos pequeños y las actividades de resolución de problemas en equipo ayudan a mejorar la comunicación de conceptos relacionados con funciones lineales.

5.4. Recomendaciones generales

Al considerar la investigación llevada a cabo, se debe tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Identificar el contexto y los participantes con el fin de generar propuestas cercanas al interés del estudiante, que propicien la interacción y el dialogo en la clase.
- Promover la retroalimentación constante entre estudiantes y profesores, con el fin de enriquecer los espacios de la clase de matemáticas.
- Evitar generar en las tareas preguntas cerradas que encasillen al estudiante a una única respuesta, por el contrario, se debe utilizar preguntas abiertas que desafíen a los estudiantes a pensar críticamente y a desarrollar sus propias opiniones.

- Utilizar esquemas para sintetizar la información del análisis, con el fin de encontrar palabras clave que permitan dar cuenta de los resultados obtenidos y de los niveles de algebrización alcanzados por los estudiantes según las tareas desarrolladas.
- El método de investigación de diseño, en particular los experimentos de enseñanza pueden posibilitar espacios de diseño, implementación y análisis retrospectivo de las tareas o de la clase de matemáticas.

Capítulo 6: Referencias

Aké, L. P. y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, *30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/EM3002.07

Andrés, M., Coronel, M., Rico, E., Luna, J. y Sessa, C. (2021). El papel de las representaciones en la pantalla de GeoGebra en el trabajo matemático del aula. Investigación colaborativa en torno a la enseñanza de funciones en la Escuela Secundaria. *Educación Matemática*, *33*(3), 7-38. https://doi.org/10.24844/em3303.01

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* La Muralla.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis.* Editorial Universidad de Antioquia.

Carlsen, M. (2018). Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. *Educational Studies in Mathematics*, 99(3), 277-291. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9844-1

Castillo, M. (2011). ¿Es la comunicación un factor de aprendizaje de las matemáticas? *Revista Iberoamericana de Educación*, 56(39), 1 – 5. https://doi.org/10.35362/rie5631520

Dolores, C. y Mosquera, G. A. (2022). Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas. *Educación Matemática*, *34*(2), 217-244. https://doi.org/10.24844/EM3402.08

Espinosa, A., Ávila, N. y Mendoza, S. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, *1*(2), 173-202. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=477248386010

Erath, K., Prediger, S., Quasthoff, U. y Heller, V. (2018). Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: The case of explaining to learn and learning to explain. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 161-179. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9830-7

Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J. y Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning. *A review of the state of development and research*. *ZDM Mathematics Education*, *53*(2). https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2

Ferreiro, R. (2005). La participación en clase. *Rompan filas*, *76*, 3-7.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances De Investigación En Educación Matemática, 8,* 117–142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Gravemeijer, K. y Prediger, S. (2019). Topic-Specific Desig Research: An Introduction. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education (*33-57). ICME-14 Monografs. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_2

Günster, S. y Weigand, H. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM Mathematics Education, 52*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01179-1

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGrawHill.

Jiménez, A., Suarez, N. y Galindo, S. (2010). La comunicación: eje central de la clase de matemáticas. *Praxis & Saber, 1*(2), 173 – 202. https://doi.org/10.19053/22160159.1104

Jiménez–Espinosa, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. *Revista de investigación y desarrollo e innovación, 10*(1), 121-134. https://doi.org/10.19053/20278306.v10.n1.2019.10016

Jiménez, A. y Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en la clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, *16*, 101 – 116. https://doi.org/10.19053/01207105.3243

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. MEN

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Perry, P., Camargo, L., Molina, O. y Samper, C. (2021). Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula. *Educación Matemática, 33*(2), 87-114. https://doi.org/10.24844/em3302.04

Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*(3), 215-229. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y

Sfard, A. (2018). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Programa Editorial Universidad del Valle.

Sfard, A. y Cobb, P. (2014). Research in Mathematics Education: What Can it Teach us about Human Learning? En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 545–564). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139519526.033

Watson, A., Ayalon, M. y Lerman, S. (2018). Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula. *Educational Studies in Mathematics*, *97*, 255-272. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9798-8

Zaldívar, J. y Briceño, E. (2019). ¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas. *Educación Matemática*, *31*(2), 212-240. https://doi.org/10.24844/EM3102.09

Anexo

Querido lector. Se ha preparado un anexo, en cual se encuentran tanto los consentimientos informados por parte de la institución como de los estudiantes participantes en la investigación y las tareas desarrolladas por cada uno de los equipos. Al igual, se encuentran las imágenes del encuentro Corregimental de profesores de matemáticas, las tareas, imágenes y Guías desarrolladas en el Semillero de Matemáticas, en el grado noveno y el Club de Ciencias, llevadas a cabo en la Institución Educativa Compartir. La carpeta puede ser consultada en el siguiente enlace: https://drive.google.com/drive/folders/1-s_gzXudP0Do8uU-kxj19XlehD2biiIY