



**Estudio sobre la comunicación para favorecer el aprendizaje del concepto de variable en
estudiantes de sexto grado**

Fernando Alonso Escudero Giraldo

Trabajo de grado para optar al título:
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Asesor
Jorge Andrés Toro Uribe, Doctor en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Medellín, Colombia
2023

Cita	(Escudero Giraldo, 2023)
Referencia	Escudero Giraldo, A. F. (2023). <i>Estudio sobre la comunicación para favorecer el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de sexto grado</i> [Trabajo de grado]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
Estilo APA 7 (2020)	



Grupo de Investigación Matemáticas, Educación y Sociedad (MES)
 Seleccione centro de investigación Educativas y Pedagógicas (CIEP)



Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes

Decano: Wilson Antonio Bolívar

Jefe de departamento: Cártul Vargas Torres

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos

Dedicatoria

A mi familia quienes me apoyaron incondicionalmente y me enseñaron todo para la vida, a mis amigos del pregrado con quienes tuve contacto a lo largo de mi formación académica y a las personas que me apoyaron de una u otra forma en momentos difíciles.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento al profesor Jorge Andrés Toro Uribe por su labor de asesoría y acompañamiento, a la Institución Educativa Compartir por permitirnos desarrollar este proyecto de investigación, a mis compañeros de práctica Cristian Fabián Zapata Barrantes, Juan Camilo Colmenares Montoya y Mayra Alejandra Morrón Bogallo por su apoyo tanto académico como compañerismo haciendo esto posible.

Tabla de contenido

Tabla de contenido	4
Resumen	9
Abstract	10
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.....	11
1.1. Descripción del contexto	11
1.2. Planteamiento del problema y justificación	14
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO	16
2.1. Revisión de Literatura	16
2.1.1. Comunicación en la clase de matemáticas	18
2.1.2. Álgebra Temprana	20
2.2. Fundamentación teórica	23
2.2.1. Comunicación en la clase de matemáticas	23
2.2.2. Niveles de algebrización	25
2.2.3. Álgebra Temprana	27
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA	29
3.1. Paradigma y enfoque	29
3.2. Método	29
3.3. Participantes de la investigación	31
3.4. Descripción de las Guías realizadas	34
3.5. Estructura del análisis.....	36
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y RESULTADOS	37
4.1. Análisis Guía 3	37
4.2. Análisis Guía 4	42
4.3. Análisis Guía 5	49

Estudio sobre la comunicación para favorecer el aprendizaje del concepto...	5
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	56
5.1. Consideraciones respecto a la pregunta y el objetivo de investigación	56
5.2. Limitaciones del estudio.....	57
5.3. Posibles líneas de investigación	58
5.4. Recomendaciones generales del estudio	58
Referencias	60
Anexos.....	62

Lista de Tablas

Tabla 1 Matriz de sistematización de los artículos.....	17
Tabla 2 <i>Registro de asistencia en la aplicación de las Guías</i>	31
Tabla 3 Organización de los grupos en el desarrollo de cada Guía	32
Tabla 4 Registro de encuentros y fechas	35

Lista de Figuras

Figura 1 Trabajo de un estudiante en el Semillero de Matemáticas	14
Figura 2 Fases de la investigación	31
Figura 3 Corrección de los estudiantes - Grupo 1	37
Figura 4 Respuesta Guía 3 - P1, Grupo 1.....	38
Figura 5 Respuesta Guía 3 - P1, Grupo 2.....	38
Figura 6 Respuesta Guía 3 - P2, Grupo 1.....	39
Figura 7 Respuesta Guía 3 - P2, Grupo 3.....	39
Figura 8 Respuesta Guía 3 - P3, Grupo 1.....	40
Figura 9 Respuesta Guía 3 - P3, Grupo 3.....	40
Figura 10 Respuesta Guía 3 - P3, Grupo 4.....	40
Figura 11 Respuesta Guía 4 - P1, Grupo 1.....	42
Figura 12 Respuesta Guía 4 - P1, Grupo 2.....	43
Figura 13 Respuesta Guía 4 P1 - a, Grupo 2.....	43
Figura 14 Respuesta Guía 4 P1 - a, Grupo 3.....	44
Figura 15 Respuesta Guía 4 - P2, Grupo 2.....	44
Figura 16 Respuesta Guía 4 - P2, Grupo 4.....	45
Figura 17 Respuesta Guía 4 - P3, Grupo 1.....	46
Figura 18 Respuesta Guía 4 - P3, Grupo 4.....	46
Figura 19 Respuesta Guía 5, Grupo 1	49
Figura 20 Respuesta Guía 5, Grupo 2	50
Figura 21 Respuesta Guía 5, Grupo 3	51
Figura 22 Respuesta Guía 5, Grupo 4	52
Figura 23 Resumen de los análisis	55

Siglas, acrónimos y abreviaturas

PEI	Proyecto Educativo Institucional
ZDM	<i>Zentralblatt für Didaktik der Mathematik</i>
SIATA	Sistema de Alerta Temprana del Valle de Aburrá
UdeA	Universidad de Antioquia

Resumen

Esta investigación se realiza con el objetivo de favorecer el proceso de la comunicación en el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Compartir a partir del diseño y aplicación de una serie de guías. Se definieron tres líneas para la construcción del marco teórico: la comunicación en la clase de matemáticas, los niveles de algebrización y el concepto del álgebra temprana. El enfoque de investigación es cualitativo de corte interpretativo. En particular se hace uso de un experimento de enseñanza desarrollado en tres fases: preparación, implementación y análisis. Los resultados del análisis muestran como evidencia la escritura por medio de símbolos, la definición de ciertos niveles de algebrización. Por último, se presentan las conclusiones que dan evidencia del objetivo planteado.

Palabras clave: Álgebra Temprana, Investigación de Diseño, Comunicación.

Abstract

This research is carried out with the objective of favoring the process of communication in the learning of the concept of variable in sixth grade students of the Compartir Educational Institution through the design and application of a series of guides. Three lines were defined for the construction of the theoretical framework: communication in the mathematics class, algebraization levels and the concept of early algebra. The research approach is qualitative and interpretative. In particular, use is made of a teaching experiment developed in three phases: preparation, implementation and analysis. The results of the analysis show as evidence the writing by means of symbols, the definition of certain levels of algebraization. Finally, conclusions are presented that give evidence of the stated objective.

Keywords: Early Algebra, Design Research, Communication.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

En este apartado se presenta el contexto donde tuvo lugar la Práctica Pedagógica y la descripción de los ciclos y actividades realizadas a lo largo de proceso de investigación.

1.1. Descripción del contexto

La Práctica Pedagógica realizada en los espacios de aprendizaje es el punto de conexión entre la teoría y la experiencia del futuro profesor de matemáticas, la cual permite la interacción de las diferentes dimensiones del ser tanto como profesional como ser humano y donde se potencian las relaciones sociales al servicio de la educación en especial el dialogo y la interacción entre los participantes.

El escrito de este texto académico surge de las discusiones en diferentes espacios de formación, siendo el Seminario de Práctica, el Semillero de Matemáticas con los estudiantes y los ejercicios de observación del Club de Ciencias, los que permiten plantear reflexiones acerca de la comunicación en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

La Institución Educativa Compartir ubicada en Medellín, en particular en el corregimiento de San Antonio de Prado, es una institución educativa oficial, mixta y urbana que ofrece educación formal en los niveles de Preescolar, Básica y Media. La Media se presta en las modalidades académica y media técnica con énfasis en Diseño de Multimedia. La institución se encuentra en la carrera 62A #42D Sur 26, limitando al norte con el Corregimiento de Altavista, al sur con la zona urbana del Corregimiento y con el Municipio de Itagüí, al noroeste con la vereda el Salado y al suroeste con Potrerito. La misión de la Institución Educativa Compartir es ofrecer un proceso educativo con calidad, que la consolide como una Institución Educativa para la ciencia, la cultura y la tecnología, donde la formación humana sea en pro para la vida de toda la comunidad educativa. Las jornadas que ofrece son en la mañana y en la tarde.

El equipo de trabajo de la Institución Educativa Compartir está conformado por un rector, dos coordinadores, una psicóloga de entorno protector, 35 profesores de primaria y bachillerato y alrededor de 1.100 estudiantes. La institución ofrece programas de la secretaría de educación de Medellín, como la Unidad de Apoyo Integral (UAI) para atender a los estudiantes con necesidades educativas y el programa Todos a Aprender PTA. El modelo pedagógico que orienta la institución es el Desarrollista Social.

La Institución Educativa Compartir está conformada por cuatro gestiones: administrativa, directiva académica y comunitaria, dando fundamento al Proyecto Educativo Institucional PEI, el cual incluye información sobre los principios y fundamentos, los objetivos, el manual de convivencia, el gobierno escolar, el reglamento de los profesores, estrategias pedagógicas, proyectos pedagógicos y otros aspectos involucrados en la institución.

Los espacios de intervención del profesor en formación¹ se dividen en distintos momentos. El primer momento corresponde al primer semestre de Práctica Pedagógica entre los meses de agosto y noviembre de 2022, en donde se planteó un interés inicial de vincular la clase de matemáticas con diferentes fenómenos de variación y cambio. Se realizó un ejercicio de observación y participación en el Club de Ciencias de la Institución Educativa Compartir. Este espacio estaba a cargo de la profesora cooperadora y dirigido por una formadora del SIATA². Cada encuentro se realizaba los viernes de 12:00 a 1:30 pm al cual asistían estudiantes desde segundo hasta grado once. Se abordaron temáticas de meteorología junto a experimentos sobre el comportamiento de las masas de aire, fenómenos del clima y comportamiento de las corrientes oceánicas. La dinámica de las sesiones requería la participación de los asistentes para construir conceptos meteorológicos. El propósito de este espacio consistía en la descripción de los fenómenos desde nociones previas o hipótesis en conversación en conjunto con la formadora del SIATA y los asistentes al espacio.

El segundo espacio de intervención consistió en una sesión de clase en el grado noveno el día 14 de septiembre de 2022. Con supervisión de la profesora encargada del área de física, se realizó una Guía³ diseñada por el profesor en formación, acerca de los conceptos de desplazamiento y trayectoria. La primera parte de la Guía hace referencia a la creación de un gráfico donde se describieran los trayectos en distancia y tiempo que les tomaba a los estudiantes ir de la casa a la Institución Educativa. En la segunda parte de la Guía, se realizó la construcción de un circuito a partir de instrucciones y acto seguido se solicitó representar por medio de un gráfico los desplazamientos según la interpretación que hicieron los estudiantes de las instrucciones.

¹ Investigador del trabajo.

² Sistema de Alerta Temprana del Valle de Aburrá [SIATA].

³ Guía de estudiante actividad noveno grado: <https://1drv.ms/f/s!At9ln36pLHJrglXN5a319vDCXeo?e=hG1tTQ>

El tercer espacio se realizó el 13 de octubre de 2022 en el Primer Encuentro Corregimental de Profesores de Matemáticas⁴ dirigido a los profesores del corregimiento de San Antonio de Prado. En este encuentro hubo una conferencia inaugural y tres talleres con diferentes temáticas como la Comunicación en la clase de matemáticas, la Exploración del GeoGebra y el Álgebra temprana. Durante los talleres, los profesores rotaron con el propósito de generar reflexión en torno a las temáticas abordadas en el encuentro.

El cuarto espacio hace referencia al segundo semestre de Práctica que se realizó entre los meses de febrero y junio de 2023. La Institución Educativa llevó a cabo una convocatoria para los estudiantes interesados en pertenecer al Semillero de Matemáticas dividido según los grados. El Semillero de Matemáticas fue orientado por profesores en formación de la Universidad de Antioquia. De manera particular se brindó acompañamiento a estudiantes del grado sexto con edades que oscilan entre 10 y 11 años con motivo de reforzar temáticas que se abordaban en los espacios de clase mediante Guías⁵ diseñadas por el profesore en formación. El Semillero de Matemáticas inició con una asistencia de 18 estudiantes, aunque fue una cifra desigual en el resto de las sesiones porque la cantidad de asistentes disminuía y en ocasiones aumentaba sobre la cifra inicial, siendo consecuencia del caso en particular el cruce con eventos ajenos a la jornada académica regular. Los encuentros del Semillero de Matemáticas se realizaron los viernes entre las 12:00 y la 1:00 de la tarde. Cada encuentro permitió al profesor en formación proponer diferentes situaciones desde la escritura, el dialogo y en ocasiones propuestas de los mismos estudiantes adaptadas a la temática trabajada en la sesión correspondiente.

En el mismo espacio, de forma simultánea, se realizó el trabajo de campo en La Institución Educativa Compartir con los estudiantes de grado sexto que asistían al Semillero de Matemáticas. Se realizaron tareas relacionadas con la variación, específicamente con los cambios de características, magnitudes y atributos de los objetos con el fin de representar las variaciones detectadas por medio de escritura de forma abreviada y realizar operaciones aritméticas, se construyó dicha escritura por medio de las guías propuestas por el profesor en formación, el trabajo en equipo, el dialogo entre estudiantes y la interacción entre otros integrantes, como se refiere Espinosa et al. (2010) quienes enfatizan en cómo la comunicación es importante en la clase de

⁵ Anexo – Ejercicios de trabajo de Semillero de Matemáticas:
<https://1drv.ms/f/s!At9ln36pLHJrglXB5z7GQqFpTMoA?e=fIuaTj>

matemáticas permitiendo explorar diferentes estrategias para mejorar la comunicación en la clase, desde el trabajo en grupo, el dialogo y los cuestionamientos acerca de las situaciones matemáticas.

1.2. Planteamiento del problema y justificación

En los encuentros del Semillero de Matemáticas se realizaban las Guías propuestas por el profesor en formación. Allí se observaron ciertas dificultades en las operaciones aritméticas y debilidades en el reconocimiento de símbolos y su equivalencia, siendo necesario para la mayoría de los estudiantes apoyarse en la escritura de los números para resolver la situación específica como se puede observar en la Figura 1.

Figura 1

Trabajo de un estudiante en el Semillero de Matemáticas

The image shows a student's handwritten work on grid paper. It consists of five equations, each using a different symbol and a numerical value to represent variables. The equations are as follows:

- Equation 1: Three crescent-shaped symbols, each with the number 20 written below it, are added together to equal 60. $20 + 20 + 20 = 60$
- Equation 2: A crescent-shaped symbol with 20 below it, plus a flower-shaped symbol with 3 below it, plus another flower-shaped symbol with 3 below it, equals 26. $20 + 3 + 3 = 26$
- Equation 3: A flower-shaped symbol with 3 below it, plus a triangle-shaped symbol with 17 below it, plus another triangle-shaped symbol with 17 below it, equals 2.5. $3 + 17 + 17 = 2.5$
- Equation 4: A flower-shaped symbol with 3 below it, multiplied by a crescent-shaped symbol with 20 below it, minus a triangle-shaped symbol with 17 below it, equals 49. $3 * 20 - 17 = 49$
- Equation 5: A flower-shaped symbol with 3 below it, divided by a crescent-shaped symbol with 20 below it, plus a stick figure symbol with 0.6 below it, equals 0.75. $3 \div 20 + 0.6 = 0.75$

Nota. Archivo personal del autor.

Una de las estudiantes propuso nuevos símbolos para las variables una vez realizado el ejercicio inicial, pero inmediatamente escribe al costado su valor numérico mostrando la necesidad de apoyarse en la escritura numérica obviando el valor de cada figura cuando ya lo habían reconocido y estaba implícito. De acuerdo con lo anterior se observa que la estudiante parece no

realizar una construcción de significados por medio de las variables, por el contrario, estas parecen ser un obstáculo para realizar operaciones que son de carácter aritmético.

En línea con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se plantea el concepto de variable como el reconocimiento de características, diferencia y la importancia del uso de símbolos y su clasificación. En este mismo sentido, Godino et al. (2014) hacen referencia a un valor desconocido, que se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares y menciona como en tareas de generalización el solo reconocimiento de la regla que relaciona un término con el siguiente en casos particulares, no es indicativo de un proceso de generalización y un entendimiento de la variable.

Por otro lado, se propone plantear una nueva forma de construir el conocimiento, como lo expresa Sfard (2008) la construcción del conocimiento equivale a ser capaz de participar en un discurso específico. El conocimiento y los conceptos se ven como aspectos de la práctica, del discurso o de la actividad. Esto permite plantear una construcción de los significados desde la interacción entre los estudiantes a través de trabajo en equipo o de forma individual, en conjunto o con el profesor, definiendo como la comunicación en la clase de matemáticas es más que informar, es la acción de poner algo en común con el fin asignar un significado colectivo y a su vez posibilita la comprensión y la interacción social (Jiménez, 2019).

Una vez expuesta la problemática anterior, se plantea la siguiente pregunta y objetivo de investigación

Pregunta de investigación: *¿Cómo favorecer el proceso de la comunicación en el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de sexto grado?*

Objetivo de investigación: *Favorecer el proceso de la comunicación en el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de sexto grado.*

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Este capítulo se divide en dos partes, el primero se enfoca en la revisión de literatura realizada entre 2018 a 2023 organizado en dos líneas: Comunicación en la clase de matemáticas y álgebra temprana; y la segunda parte se construye la fundamentación teórica en donde se precisan aspectos teóricos asociados a la comunicación en la clase de matemáticas, el concepto de variable y el álgebra temprana.

2.1. Revisión de Literatura

Se realizó un rastreo de literatura en diversas revistas especializadas en Educación Matemática en un periodo definido entre 2018 a 2023 con el objetivo de rastrear las últimas tendencias y avances en la Educación Matemática respecto al objeto de estudio. Se encontraron artículos tanto en español como en inglés. Se hizo una búsqueda de artículos en español por medio de las revistas Enseñanza de las ciencias⁶, Educación Matemática⁷ y PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática⁸. Por otro lado, las revistas en inglés que se consultaron fueron *Educational Studies in Mathematics*⁹ y *ZDM Mathematics Education*¹⁰ localizadas en la base de datos de *Springer Link*¹¹ de acceso libre en las bases de datos de la Universidad de Antioquia.

Se eligieron diez documentos de los cuales tres corresponden a la línea “Comunicación en la clase de matemáticas” y siete referentes a la línea “Álgebra temprana”. Los documentos fueron organizados en una matriz realizada en *Microsoft Excel*¹², donde se definieron las columnas según información relevante: autor(es), año de publicación, título, objetivo del estudio, fuente, revista, criterio de inclusión, criterio de exclusión y observaciones del documento. Los documentos revisados se muestran en la Tabla 1.

⁶ Ver revista Enseñanza de las Ciencias <https://ensciencias.uab.es/>

⁷ Ver revista Educación Matemática <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/>

⁸ Ver revista PNA <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/index>

⁹ Ver revista *Educational Studies in Mathematics* <https://www.springer.com/journal/10649>

¹⁰ Ver revista *ZDM Mathematics Education* <https://www.springer.com/journal/11858>

¹¹ Ver base de datos *Springer* <https://link.springer.com/>

¹² Ver carpeta de Revisión de Literatura: <https://1drv.ms/f/s!At9ln36pLHJri2mUGDQRHfiAAndT?e=AuIQh9>

Tabla 1*Matriz de sistematización de los artículos*

Línea de Investigación	Autor(es) y Año de Publicación	Título del Artículo	Revista
Comunicación en la clase de Matemáticas	Nuria Planas (2018)	<i>Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning.</i>	<i>Educational Studies in Mathematics.</i>
	Nuria Planas (2020)	<i>How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts?</i>	<i>ZDM – Mathematics Education</i>
	Kirstin Erath, Susanne Prediger, Uta Quasthoff y Vivien Heller (2018)	<i>Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: the case of explaining to learn and learning to explain</i>	<i>Educational Studies in Mathematics.</i>
Álgebra Temprana	Lilia Patricia Aké y Juan Díaz Godino (2018)	Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización	
	Ana Medrano, Ulises Xolocotzin y Rosa del Carmen Flores-Macías (2022)	Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria.	Educación Matemática
	Genny Rocío Uicab Ballote, María Teresa Rojano Ceballos, Montserrat García Campos (2022)	Expresiones de generalización en escolares de 10 a 12 años durante la resolución de secuencias figurales-numéricas y numéricas	

Ana Luisa Llanes Luna, Luis R. Pino-Fan y Silvia Elena Ibarra Olmos (2022)	Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile <i>Developing algebraic activity through conjecturing about relationships.</i>	
Alf Coles y Aehee Ahn (2022)	<i>The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations</i>	
Deborah Schifter y Susan Jo Russell (2022)	<i>Algebraic reasoning in years 5 and 6: classifying its emergence and progression using reverse fraction tasks</i>	<i>ZDM – Mathematics Education</i>
Catherine Pearn, Max Stephens y Robyn Pierce (2022)		

Nota. Elaboración propia.

2.1.1. Comunicación en la clase de matemáticas

En esta línea figuran autores como Planas (2018) quien proporciona fundamentos para la teorización del lenguaje como recurso, también Planas (2020) realizó un proyecto que buscaba examinar el discurso de los profesores y Erath et al. (2018) hace una investigación para examinar cómo la competencia discursiva influye en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.

Planas (2018) plantea la importancia del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. Define como el lenguaje es esencial para la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos, que puedan enunciarse sea de forma compartida o con elementos culturales que para el estudiante tengan sentido, desde sus habilidades de interpretación y discursivas por lo cual el lenguaje es una herramienta fundamental en la creación de significados. También problematiza como los estudiantes pueden tener dificultades para resolver situaciones de matemáticas cuando el lenguaje no es familiar para ellos, sea por la naturaleza o ubicación en la cual fue elaborado o los múltiples discursos creados tanto en los escritos como los profesores quienes los enseñan.

En otro trabajo, Planas (2020) realiza un proyecto con dos profesoras catalanas que parte desde el año 2005, el cual consiste en examinar las características del discurso de los profesores, el cual tiene potencial de abrir la discusión y el aprendizaje de los contenidos matemáticos específicos. La investigación se centra en cómo aprender a comunicar los significados explícitos de los conceptos algebraicos en las ecuaciones, por medio del desarrollo profesional se busca distinguir críticamente y elegir o producir instancias de conversación con los profesores para analizar como presentaban los conceptos matemáticos y si lo hacían de forma clara para los estudiantes.

Erath et al. (2018) efectúa una investigación de naturaleza empírica centrándose en la capacidad de los estudiantes para explicar y comprender conceptos matemáticos, con el objetivo de examinar cómo influye su competencia discursiva en la elaboración de discursos y en la habilidad de explicar conceptos matemáticos desde un lenguaje específico del campo. En su investigación encontraron que los estudiantes que tienen una buena competencia discursiva eran capaces de explicar los conceptos de manera clara y coherente, mientras los estudiantes con una competencia limitada tenían dificultades para expresar sus ideas donde la participación activa de los estudiantes se da en diversas formas y de diferentes maneras. También mencionan el papel de los profesores siendo quienes fomentan la discusión, el diálogo en las clases y como su intervención puede ayudar a mejorar la competencia discursiva de los estudiantes. Las autoras proponen que la competencia discursiva es un componente esencial del dominio del lenguaje académico en la clase de matemáticas. La interacción en la clase, la diversidad lingüística y la capacitación de los profesores son aspectos cruciales para tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

De esta línea se resalta como los autores proponen un análisis y una intervención sobre las diferentes habilidades que están relacionadas con la comunicación para favorecer el aprendizaje de las matemáticas y en la capacidad discursiva de los estudiantes con el fin de mejorar la comprensión y la claridad de las situaciones que se plantean en la clase. Los autores también enfatizan en el papel activo de los profesores para propiciar y ayudar a los estudiantes a generar habilidades y herramientas para que sean participes en la construcción por cuenta propia del discurso y los significados de forma individual y en comunidad.

2.1.2. Álgebra Temprana

En esta línea se presentan autores como Aké y Godino (2018) quienes realizan un análisis de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización, Medrano et al. (2022) observan los efectos de un programa de álgebra temprana con el fin de promover el pensamiento algebraico. Por su parte Uicab et al. (2022) abordan el proceso de generalización de los estudiantes por medio del análisis de tareas y Llanes et al. (2022) caracterizan los libros de contenido en los niveles básicos de la educación de Chile por medio de los niveles de algebrización. Coles y Ahn (2022) realizan un análisis sobre las relaciones simbólicas y su vínculo con el pensamiento algebraico, Schifter y Russell (2022) resaltan la importancia de las representaciones generadas por los estudiantes en el desarrollo del pensamiento algebraico en etapas tempranas y por último Pearn et al. (2022) abordan el pensamiento algebraico con estudiantes de 5° y 6° grado de primaria con el objetivo de explorar a través de la competencia fraccional y el razonamiento como se puede evidenciar el pensamiento algebraico no simbólico y pensamiento algebraico generalizado.

Aké y Godino (2018) abordan el análisis de tareas de un libro de texto de primero de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. El objetivo es determinar si las tareas del libro de texto estaban orientadas a promover el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de 6 a 7 años. El análisis se realizó utilizando el modelo de Niveles de Algebrización, que se enfoca en cuatro criterios: tipo de objetos algebraicos, tipo de notación o representaciones, transformaciones o cálculo analítico y situaciones de modelización. Aunque las tareas no están intencionalmente dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico, se evidencia que es posible orientarlas hacia grados progresivos de algebrización. En general, el estudio destaca la importancia de promover el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de primaria y la necesidad de que los profesores estén capacitados para utilizar los libros de texto como medios para este fin.

En relación con el análisis de material concreto, Medrano et al. (2022) observan el análisis de los efectos de un programa de álgebra temprana con componentes de aritmética generalizada y pensamiento funcional. Para promover el pensamiento algebraico en estudiantes de tercero de primaria en México, basado en la producción de representaciones externas como dibujos, esquemas, o símbolos idiosincráticos que sirven para simular el problema desde sus ideas y perspectiva que puede ser o no ser correcta, esta representación externa son símbolos producidos espontáneamente por estudiantes que a su vez son evidencia del aprendizaje de ideas algebraicas.

Se encontró que la producción de representaciones más sofisticadas se asoció con mejores rendimientos en problemas funcionales, pero no en problemas de aritmética.

Uicab et al. (2022) buscaron describir el proceso de generalización de los estudiantes durante la resolución de tareas y determinar el alcance que manifiestan los estudiantes al expresar la regla de generalización que define a cada tarea matemática. La muestra de trabajo estuvo compuesta por 25 estudiantes de quinto grado de primaria de una escuela pública mexicana. El estudio es de tipo longitudinal, ya que se trabaja con los mismos estudiantes durante dos periodos escolares (2017-2018 y 2018-2019). Los resultados del estudio muestran que los estudiantes tienen capacidad de generalizar a partir de casos particulares y pueden proporcionar términos lejanos a partir de los términos dados, lo que da cuenta de que reconocen el comportamiento de las variables involucradas.

Llanes et al. (2022) caracterizaron el razonamiento algebraico en términos de los niveles de algebrización pretendido en libros de texto de educación básica en Chile. Los resultados, evidencian la existencia de problemas aritméticos que promueven niveles incipientes de algebrización; además, se identificaron prácticas matemáticas de naturaleza algebraica, donde la finalidad radicaba principalmente en generar el término general de una secuencia, resolver ecuaciones de primer grado o transformar (reducir) expresiones algebraicas. Finalmente, se propone una categorización de problemas que permiten promover diversos niveles de algebrización en la educación básica.

Coles y Ahn (2022) tienen como objetivo ofrecer un marco de análisis tanto del desarrollo conceptual como la evidencia empírica que contribuyen a la comprensión de cómo las relaciones simbólicas están vinculadas al pensamiento algebraico. Revisaron el trabajo previo sobre el álgebra temprana y luego consideraron algunas definiciones de álgebra para situarse en una postura y establecer el marco utilizado para el análisis. Se analiza el trabajo escrito de una clase de estudiantes de 11 y 12 años mientras se dedican a hacer matemáticas. Los datos se recopilaron hace 20 años como parte de un proyecto de investigación anterior sobre el desarrollo de la actividad algebraica. Esta evidencia empírica lleva a conclusiones sobre la forma de desarrollarse el pensamiento algebraico. Sus hallazgos apuntan a una propuesta que valida como centrarse en las conjeturas sobre las relaciones puede ser una ruta poderosa hacia el álgebra temprana.

Schifter y Russell (2022) resaltan la importancia de las representaciones generadas por los estudiantes en el desarrollo de su razonamiento algebraico temprano en el ámbito de la aritmética

generalizada. El estudio se enfoca en el uso de representaciones en forma de imágenes, diagramas y contextos de historias para distinguir entre operaciones y demostrar relaciones en instancias específicas de una afirmación general. La población de trabajo son estudiantes de primaria y secundaria. El estudio se llevó a cabo en cinco proyectos realizados entre 1993 y 2022 en los Estados Unidos. Un resultado de la investigación resalta la forma en que las representaciones en forma de imágenes, diagramas, disposiciones de objetos manipulables o contextos de historias, permiten a los estudiantes distinguir entre operaciones, además, pueden utilizar estas representaciones para ilustrar las relaciones transmitidas en casos específicos de una afirmación general y extender estas representaciones a los tipos de clases de números representa un mecanismo para probar una afirmación general.

Pearn et al. (2022) abordan el razonamiento algebraico con estudiantes de 5° y 6° grado de primaria con el objetivo principal de explorar cómo la competencia fraccional y el razonamiento pueden proporcionar evidencia de pensamiento algebraico no simbólico y su progresión hacia el pensamiento algebraico generalizado. La población de trabajo son estudiantes de 5° y 6° grado de primaria en Australia usando una combinación de datos cuantitativos y cualitativos para analizar la relación entre la competencia fraccional y el razonamiento algebraico. Los resultados del estudio sugieren que los estudiantes pueden progresar en su pensamiento algebraico a través de dos puntos críticos de transición, y que los profesores pueden apoyar este proceso mediante la enseñanza de estrategias específicas. Los puntos críticos de transición en el razonamiento algebraico de los estudiantes son dos. El primero es la transición de las estrategias aditivas a las estrategias multiplicativas para los cálculos aritméticos. Los estudiantes que dependen únicamente de estrategias aditivas o de diagramas no pueden utilizar estrategias multiplicativas para resolver tareas más generalizadas. El segundo punto crítico de transición se produce cuando los estudiantes utilizan su conocimiento multiplicativo para tratar cualquier cantidad representada en una tarea de fracción inversa. El razonamiento algebraico completamente generalizado permite a los estudiantes tratar cualquier fracción y cantidad conocida, así como cualquier fracción con cualquier cantidad. Estos puntos críticos de transición son importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes y como pueden ser utilizados.

Quedan evidentes las formas de abordar el álgebra por parte de los autores desde los métodos de aprendizaje, material concreto y dificultades reconocidas en el aprendizaje del álgebra. Los niveles de algebraización como soporte para el análisis del currículo y los libros de texto son

insumos no solo para los investigadores, también para los profesores en ejercicio o en formación con el fin de darles herramientas que permitan abordar de forma crítica su impacto sobre los estudiantes, además de profundizar en la conceptualización de todo aquello que sea de interés para la enseñanza del álgebra.

2.2. Fundamentación teórica

En este apartado se presenta la fundamentación teórica, en la cual se aborda tres líneas, la primera acerca de la comunicación en la clase de matemáticas, la segunda sobre los niveles de algebrización y la tercera línea sobre el álgebra temprana. Se seleccionaron autores como Sfard (2008); MEN, (1998), Jiménez et al. (2012), Sfard y Cobb (2014) para definir la comunicación y su significado en la clase de matemáticas. Por otro lado, se desarrollan las ideas en relación con los niveles de algebrización de Godino et al. (2014) y por último se definen el álgebra temprana a través de Radford (2015), el pensamiento algebraico Radford (2003) y el uso de símbolos en el álgebra Azarquiél (1993),

2.2.1. Comunicación en la clase de matemáticas

Esta línea presenta la fundamentación teórica que desarrolla el concepto de comunicación (Sfard, 2008), las implicaciones que tiene la comunicación en la clase de matemáticas (MEN, 1998; Sfard y Cobb, 2014). Y como influye la comunicación como eje central en la clase de matemáticas (Jiménez et al., 2012)

Se parte desde la definición que adopta Sfard (2008) sobre la comunicación definiéndola como el intercambio de significados, sentimientos, ideas, etc. Sin referirse exclusivamente como objetos definidos que se pueden intercambiar sino a un proceso interpretación y explicación. De esta forma, la comunicación se puede definir como “una actividad en la que alguien trata de hacer sentir o actuar a su interlocutor de una manera determinada” (Sfard, 2008, p. 77) encontrando la sintonía del significado entre quien emite un mensaje y quien lo recibe, además de la interacción entre ambas partes en su respectiva eficacia agregando como “la comunicación no se considerará eficaz a menos que en un momento dado parezca que todos los participantes saben acerca de qué están hablando y crean que todas las partes involucradas se refieren a las mismas cosas cuando usan las mismas palabras” (Sfard, 2008, p. 80).

Sfard (2008) también problematiza acerca de cómo la comunicación en la clase de matemáticas es concebida como una construcción desde cero, lo cual rectifica en cómo el aprendizaje y la comunicación es un “proceso de cambiar de cierta manera, bien definida, las formas discursivas propias” (p. 44) haciendo alusión no solo a estudiante sino también el profesor en como intentan construir significados únicamente desde la interacción, más bien se refiere en como el profesor y el estudiante modifican he intercambian el discurso existente, teniendo en cuenta que de una u otra forma se encuentran con símbolos o significados que son usados con anterioridad para referirse a una idea específica, en lugar de eso se plantea la posibilidad de partir de los significados existentes para añadir o replantear las ideas acerca de estos es así como por medio de la comunicación, los estudiantes y el profesor intercambien ideas, contrasten perspectivas o significados con otros y la posibilidad de construir significados compartidos.

En relación con lo anterior, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) resaltan como por medio de la discusión los estudiantes aprenden a comunicar sus puntos de vista y a escuchar las argumentaciones de los otros, validan formas de representación y construyen socialmente el conocimiento. De hecho, plantean en los “procesos generales” los retos de la comunicación, definiendo algunos como expresar ideas, comprender he interpretar, construir, hacer observaciones, producir y presentar argumentos. Al mismo tiempo enuncia como la comunicación ayuda a los estudiantes a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas, el lenguaje abstracto y los simbólico de las matemáticas; También cumple una función clave como ayuda para que los estudiantes tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, simbólicas y verbales de las ideas matemáticas.

Sfard y Cobb (2014) realizan una recopilación histórica de los enfoques de la educación resaltando como el enfoque participacionista desde una perspectiva del aprendizaje de las matemáticas sostiene que el conocimiento evoluciona a través de la participación activa del estudiante en la construcción de su propio conocimiento matemático. En este enfoque, el aprendizaje de las matemáticas se ve como un proceso activo y socialmente situado. Además, consideran que el crecimiento personal se origina en "el plano social" y que el aprendizaje escolar no se limita al aprendizaje individual de los estudiantes.

Jiménez et al. (2012) reúnen varias ideas acerca de cómo influye la comunicación en la clase de matemáticas. La interacción entre los estudiantes y el profesor ayudan en primera instancia a sobrellevar deficiencias en las habilidades comunicativas y sociales, venciendo la timidez y

permitiendo un pensamiento crítico, evitando que la clase de matemáticas solo se conforme de monólogos por parte del profesor (verdades absolutas o construcción social) y los estudiantes (rol pasivo o participativo), siempre y cuando se permita que el otro exprese sus ideas, dándose una negociación de significados. La comunicación también posee dos aspectos, uno relaciona a la intuición y otro a la lógica haciendo referencia a un momento inicial y luego una construcción por medio del diálogo, expresándose ambas partes en un lenguaje apropiado garantizando el mutuo entendimiento. También expone los problemas que tienen los estudiantes con algunos métodos que los profesores usan, siendo en algunos casos en los que solo presenta situaciones y el mismo las resuelve, prácticamente, el profesor está pensando por el estudiante. Los autores también proponen métodos de enseñanza como el *Thinking Aloud par Problem Solving* asignando roles diferentes a los grupos de trabajo, uno soluciona y el otro escucha, a su vez, la función del profesor es la de guiar el aprendizaje, proponer actividades, problemas y proposiciones que contribuyan a enfrentar dificultades relacionadas y proporcionar herramientas para superarlas.

Jiménez et al. (2012) buscan definir la argumentación en clase como un discurso espontaneo basado en razonamientos, donde se busca persuadir al otro de una idea, consolidándose como una práctica social, pero que cuenta con la particularidad de presentarse por medio de interacción directa (diálogo) o indirecta (escrita) y como en la clase por medio de los argumentos y las negociaciones es posible generar un dialogo argumentativo cuando hablan de un mismo tema y surgen preguntas o cuando se está a favor o en contra de una proposición. Este diálogo no solo depende de conocer el lenguaje ya que no garantiza el éxito de la comunicación y las matemáticas tienen su propio lenguaje. Se define que en la clase de matemáticas se manejan al menos tres tipos de lenguajes: el lenguaje natural se refiere a como se expresan generalmente los estudiantes, el lenguaje del profesor se caracteriza por usar términos específicos y particulares de las matemáticas y el lenguaje matemático propiamente viene a ser un lenguaje simbólico y formalizado desde la lógica.

2.2.2. Niveles de algebrización

Esta esta línea se presenta la fundamentación teórica que desarrolla algunas ideas en relación con los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) definiendo los criterios para considerar uno u otro y su aporte al pensamiento algebraico en Educación Matemática.

Godino et al. (2014) describen las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria, que permiten definir distintos niveles o grados de algebrización. Proponen distinguir dos niveles de algebrización primarios. Estos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico) y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

Cabe aclarar que el nivel se asigna no a la tarea sino a la actividad matemática que se realiza, dependiendo en mayor medida en cómo se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata, por tanto, de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de cómo funcionan los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas. Además, el cambio en alguna de las variables de la tarea puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

Generalización. Generación o inferencia de intensivos.

Unitarización. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.

Formalización y ostensión. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

Transformación. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

Se agrega también el concepto de “objetos extensivos (particulares)” expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

Nivel 0 de algebrización - (ausencia de razonamiento algebraico)

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

Nivel 1 de algebrización

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Nivel 2 de algebrización

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Nivel 3 de algebrización – (Nivel consolidado de algebrización)

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

2.2.3. Álgebra Temprana

En primera instancia se retoman elementos esenciales que define Radford (2015) para la concepción del álgebra temprana y la reflexión acerca de los elementos que distinguen el pensamiento algebraico Radford (2003). Se rescata el enfoque realizado por el grupo Azarquiel (1993) acerca del aprendizaje del álgebra por medio de los símbolos.

En un inicio, Radford (2015) por medio de una revisión histórica debate la concepción del pensamiento aritmético como una base necesaria para el desarrollo del pensamiento algebraico. Sin embargo, el álgebra no es solo una extensión de la aritmética con símbolos diferentes. El álgebra temprana y el pensamiento algebraico implica razonamiento analítico que no puede reducirse a una actividad mediada por notaciones, aparece como una forma ideal - material de reflexión y acción,

que no ocurre únicamente en la cabeza, también surge en coordinación semiótica del habla, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas, de forma dinámica donde pueden tener significado en un contexto específico, siendo un error estudiar su desarrollo centrándose únicamente en uno de sus componentes.

Radford (2003) trata de definir lo que distingue el pensamiento matemático haciendo referencia a tres elementos relacionados entre sí. En primera instancia esta la sensación de indeterminación con los objetos algebraicos cuando se trabajan como incógnitas, variables y parámetros. Esta indeterminación hace que cobre sentido la sustitución o representación de un objeto por otro según las condiciones. En segundo lugar, son los objetos indeterminados de una forma analítica siendo el álgebra un arte analítico. Y en tercer lugar lo que permite que el pensamiento sea algebraico es la forma simbólica peculiar que tiene para designar objetos, que pueden ser representados de forma indirecta como símbolos, siendo algunas letras, pero no de forma estricta, de la misma forma que usar letras no equivale a hacer álgebra, la ausencia de ellas no significa que no realice un pensamiento algebraico.

Azarquiel (1993) nombra la utilidad de los símbolos en el álgebra, pero también habla acerca de la dificultad que tienen los estudiantes de aprovecharlos porque no ven la relación con lo que representan, debido a que las situaciones planteadas no son lo suficientemente adecuadas para necesitar de los símbolos. Para que sea de otra forma, los símbolos tienen que servir para recordar y comprender los procesos, en otras palabras, se trata de darle una intención a su uso y no solo contar con una aparición sin razón clara para el estudiante. Por otra parte, hace referencia al desarrollo de la capacidad de generalizar expresando como con ayuda de símbolos aún se requiere un esfuerzo dirigido específicamente para definir el significado de la letra para el estudiante. El Símbolo se convierte en una de las vías por la que un estudiante puede encontrarse con el álgebra. Una de las formas que se presenta de forma más natural y constructiva, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo. Se puede conseguir que las letras aparezcan en un contexto después de un proceso en el que se trata de dar sentido a las interpretaciones personales, de esta manera, podrán convertirse en una necesidad del estudiante y en un instrumento propio para explicar y manejar sus ideas.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

En esta sección se describe la forma en cómo se abordó la investigación. En la primera parte se muestran el paradigma asociado al estudio; en la segunda parte se expone el método; en la tercera parte se nombran los participantes; en cuarto lugar, se muestra la descripción de las tareas; en una quinta parte se encuentra las técnicas utilizadas y en sexta parte se abordan los instrumentos para el análisis de la información.

3.1. Paradigma y enfoque

Este trabajo de investigación se enmarca en un paradigma cualitativo y un enfoque interpretativo, buscando dar relevancia a las experiencias y saberes de los participantes con el objetivo de realizar un análisis que permitan comprender fenómenos educativos (Hernández et al. 2014). La elección se da con el propósito que los participantes sean el eje central en esta investigación en la medida que su interacción permita al investigador constantemente replantear su intervención y lograr una un proceso de comunicación entre los participantes.

Teniendo en cuenta como la realidad cambia según las observaciones y la recolección de los datos, si como la influencia con la que puede llegar a tener alguien recién insertado en un contexto, el investigador cuenta con un papel fundamental siendo parte activa y dinamizadora de ciertas situaciones que le sean propicias de cara al análisis de la comunicación en este caso y cómo influye en el proceso de aprendizaje en la clase de matemáticas

3.2. Método

El método utilizado corresponde a una investigación de diseño de acuerdo con lo planteado por Gravemeijer y Prediger (2019), en donde se combina el quehacer del profesor como profesional reflexivo y el rol de investigador en cuanto al desarrollo de teorías, combinando el diseño instruccional y la investigación educativa, el rol del investigador está enfocado en los procesos de enseñanza y aprendizaje, al mismo tiempo ver como se generan. Al ser un método intervencionista, el investigador crea y estudia nuevas formas de instrucción, a la vez que participa, en lugar de solo observar la clase, buscando el desarrollo de una teoría que trascienda la simple lección, en este caso como influye la comunicación en la clase de matemáticas.

Este método de investigación consta de tres fases: diseño, implementación y análisis. La primera fase trata sobre la preparación, en este caso se considera en todo momento los puntos de partida de acuerdo con los objetivos de cada instrucción y como pueden desarrollarse diseños posteriores, teniendo en cuenta el tipo de datos que se desean generar. En la segunda fase es la implementación que consiste en realizar el experimento, el diseño está pensado por ciclos donde el investigador se anticipa a las actividades de instrucción propuestas y como podrían desarrollarse en la clase. En la tercera fase se realiza el análisis de forma retrospectiva con el fin de contrastar tanto los objetivos como los resultados.

De acuerdo con lo anterior, esta investigación corresponde a un experimento de enseñanza según lo define Camargo (2021) el cual consiste en el diseño, implementación y evaluación con el fin de poner una conjetura sobre el aprendizaje específico, en este caso la variación, el álgebra y la comunicación buscando reconocer los significados que dan las personas a diversos aspectos que a su vez participan en un diseño que busca crear oportunidades de aprendizaje siendo el foco de investigación en el monitoreo y la documentación del progreso. En este caso particular tanto el investigador como el profesor son la misma persona encargada de proponer, desarrollar y analizar las secuencias en la clase de matemáticas.

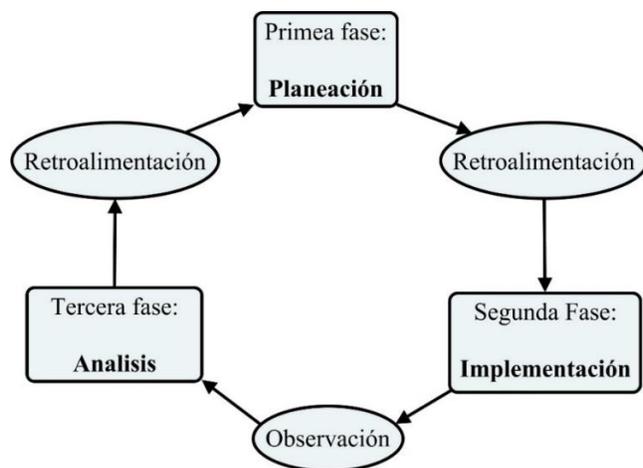
Con base a lo anterior, esta investigación se realizó con el objetivo de Favorecer el proceso de la comunicación en el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de sexto grado. Con este fin se estructura en tres fases: la primera fase es la planeación. Primero el investigador elaboró la Guía para los estudiantes, acto seguido se comparte en el espacio del Seminario de Práctica junto al profesor y los compañeros de curso con el fin de evaluar las actividades propuestas y realizar retroalimentación sugiriendo cambios antes de llevarla a la clase. La segunda fase es la implementación de la Guía con los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Compartir en el espacio de Semillero de Matemáticas del cual formaban parte. El investigador iniciaba con una lectura completa de la Guía con el fin de aclarar dudas acerca de términos desconocidos o dudas relacionadas con lo que iban a realizar los estudiantes. Al iniciar el desarrollo de las Guías, el investigador observó el trabajo que inicialmente plantearon los estudiantes y para intervenir de forma personalizada partiendo de las dudas generadas para el procedimiento.

Una vez finalizada la implementación, el investigador tomaba apuntes de preguntas o momentos destacados con el fin de analizar los resultados y compartir estos datos nuevamente en el espacio de Seminario de Práctica con sus integrantes iniciando un proceso de retroalimentación

a partir de los datos obtenidos y sugerir cambios que fueron implementados en la elaboración una nueva Guía he iniciado nuevamente desde la primera fase. A continuación, en la Figura 2 se resumen anterior:

Figura 2

Fases de la investigación



Nota. Elaboración propia.

3.3. Participantes de la investigación

En la investigación participaron un total de 26 estudiantes que cursan grado sexto en la Institución Educativa Compartir. Se escogieron diferentes grupos de acuerdo a las respuestas dadas en cada Guía y los aportes de su participación para la investigación. A continuación, en la Tabla 2, se muestran los estudiantes que participaron y la asistencia en las actividades en cuales estuvieron presentes.

Tabla 2

Registro de asistencia en la aplicación de las Guías

Estudiantes	Guía 1	Guía 2	Guía 3	Guía 4	Guía 5
Juan	x	x	x		x
Pepe	x	x	x	x	x
Alex		x			
Mariana		x	x	x	x
Elia	x	x	x		

Nata	x	x			
Lis	x	x	x	x	x
Sira	x	x		x	x
Alya	x	x	x		
Luisa		x	x	x	x
Daniel		x	x		x
Pablo		x	x		x
Lucia		x	x		
David		x			
Aura		x	x	x	x
Leo		x	x	x	
Luz		x	x		
Libia			x	x	x
Alexa			x		
Cloe			x		
Carlos			x	x	
Sergio			x		
Helena			x		
Luis	x			x	
Víctor			x		x
Beatriz				x	x

Nota. Elaboración propia.

En la tabla 3 se especifica cómo los estudiantes se organizaron en diferentes grupos en cada una de las Guías.

Tabla 3
Organización de los grupos en el desarrollo de cada Guía

Guía	Grupo	Integrantes
1	1	Juan
	2	Pepe

	3	Elia
	4	Nata
	5	Lis
	6	Sira
	7	Alya
	8	Luis
	1	Juan, Pepe, Alex
	2	Pablo, Daniel
2	3	Mariana, Lucia, David, Lis
	4	Aura, Nata, Alya
	5	Elia, Leo, Luz
	6	Luisa, Sira, Helena
	1	Alexa, Cloe
	2	Aura, Libia
	3	Juan, Pepe, Mariana
3	4	Daniel, Luz, Leo
	5	Lis, Lucia
	6	Víctor, Alya
	7	Carlos, Pablo, Sergio
	8	Helena, Luisa
	1	Mariana, Beatriz
	2	Leo, Pepe
4	3	Libia, Aura
	4	Carlos
	5	Lis, Luisa, Luis
	1	Lucia, Mariana
	2	Juan, Pepe
5	3	Luisa
	4	Aura, Libia
	5	Daniel

6	Víctor
7	Pablo
8	Lis

Nota. Elaboración Propia

Se resalta que los estudiantes no asistieron de forma constante a la aplicación de las guías (se usan seudónimos para proteger su identidad).

Se hace claridad para aspectos éticos de esta investigación en lo relacionado al acceso a la institución y los permisos requeridos a los estudiantes con el fin de notificar y confirmar su consentimiento para participar durante todo el proceso. En primera instancia se solicitó un consentimiento informado por parte de la Institución Educativa Compartir con el objetivo de realizar una investigación con los estudiantes del grado sexto. Del mismo modo, se les informó a los estudiantes que participaron en el estudio, el propósito de la investigación y sus intenciones, a lo cual ellos dieron su aprobación mediante el consentimiento informado y permitiendo el uso de la información suministrada en la aplicación.

3.4. Descripción de las Guías realizadas

En la aplicación de cada una de las Guías, los estudiantes se organizaron por grupos de a dos o tres personas excepto en la Guía 1 que se realizó de forma individual, los grupos en cada una de las guías se organizaron según la elección de cada estudiante para escoger a sus compañeros.

La Guía 1 se realizó con temática principal el razonamiento matemático y análisis de datos, el contexto habla acerca de cómo los padres quieren conseguirle un celular a su hijo y con este motivo buscan el momento apropiado para comprarlo a través de un proveedor en internet.

La Guía 2 tiene como temática central la tienda de “Don Salvador” y “Adrián” debe ir por un encargo, pero al mezclarse todos los productos debe deducir nuevamente los precios de cada compra con el fin de dar la devuelta correcta a su mamá. En una segunda parte de la Tarea se hicieron preguntas por el empaquetado de los productos en la tienda de Don Salvador y se agregó un apartado donde los estudiantes hicieran retroalimentación acerca de la Guía.

En la Guía 3 se divide en tres partes. Primero los estudiantes realizan una lectura breve que trata sobre el jefe de una bodega que le ordena al gerente encargado diseñar una etiqueta para facilitar la visualización contenidos en cada caja, en la segunda parte los estudiantes ponen en práctica el diseño que escogieron empleándolo con otros ejemplos dados y la tercera parte indica

la logística que tiene la bodega para hacer sus entregas, empaquetar nuevamente los productos que sobraron y organizar la información al final del recorrido.

En la Guía 4 se les entregan los bloques lógicos y se les entrega la Guía para iniciar la lectura en conjunto con el profesor en formación. Las instrucciones en este caso no cuentan con situación de contexto, La Guía se divide en dos partes. La primera parte consiste en el reconocimiento y caracterización de los bloques lógicos en todos los atributos que sea posible clasificarlos, sea forma, color, tamaño lo cual corresponde a la pregunta 1 para luego de crear símbolos de la información extraída en forma de escritura abreviada en el apartado “a” y por último se usa la pregunta 2 para comparar las figuras entre sí, permitiendo a los grupos de estudiantes organizar las comparaciones de forma libre. En la segunda parte de la Guía se les propone un ejercicio de diseño, en el cual tiene que crear una escultura, indicar de que tipo de bloques lógicos está hecha y hacer un dibujo de referencia, todo con el fin de mostrarle las indicaciones a otro grupo y que puedan armar la escultura por medio de las indicaciones proporcionadas. El objetivo de esta Guía es organizar la información y presentarla de forma coherente.

La Guía 5 consiste en el uso de regletas lógicas usando los colores Verde, Morado, Naranja, y Amarillo como referencia. Cada regleta tiene una medida diferente guardando relación entre sí. La pregunta orientadora para abordar en esta Guía es: cuando observas las regletas ¿crees que exista alguna relación entre ellas? para abordar esta pregunta el profesor en formación les da las siguientes instrucciones.

1. Nombre cada uno de los colores de las regletas
2. Si debe armar una regleta verde a partir de cada una de las otras regletas ¿cómo lo haría?
3. Haga uso de la escritura abreviada para dar su respuesta y agregue cualquier otra observación encontrada.

A continuación, en la Tabla 4 se resumen la información de los encuentros de acuerdo con la Guía abordada, fecha en que se realizó y encuentro al cual corresponde

Tabla 4
Registro de encuentros y fechas

Encuentros	Fechas	Tareas
1	5 de mayo de	Guía 1 – Razonamiento Matemático Y Análisis De Tablas,

	2023	Compra Del Celular Por Internet
2	12 de mayo de 2023	Guía 2 – Tienda de “Don Salvador”
3	19 de mayo de 2023	Guía 3 – Bodega de productos
4	26 de mayo de 2023	Guía 4 – Bloques lógicos
5	2 de junio de 2023	Guía 1 – Regletas lógicas

Nota. Elaboración propia

Las guías se realizaron de forma semanal los viernes de 12 a 1 pm en el mes de mayo y la primera semana de junio. La Guía 4 que fue realizada en el horario de 10 a 11am debido a una jornada especial en la institución.

3.5. Estructura del análisis

Para el análisis de esta investigación se utilizaron las producciones escritas de los estudiantes. Las Guías que se escogieron para el análisis son: Guía 3, Guía 4 y Guía 5 previamente enunciadas. El análisis se realiza en dos momentos, siendo el primero donde se traen algunas de las producciones de los estudiantes y se describe la intervención realizada. El segundo momento se trata de un análisis realizado en conjunto con la producción de los estudiantes, los referentes teóricos enunciados en el Capítulo 2 y la mirada reflexiva del investigador.

Para el análisis de los datos, se tomó la decisión de generar códigos con el fin de referirse a las respuestas de los estudiantes, siendo la letra abreviada P para referirse a la pregunta, por ejemplo tomando de referencia la respuesta de Grupo 1 en la Guía 3 y la pregunta 2, se escribe como: “Respuesta Guía 3 - P2, Grupo 1”.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y RESULTADOS

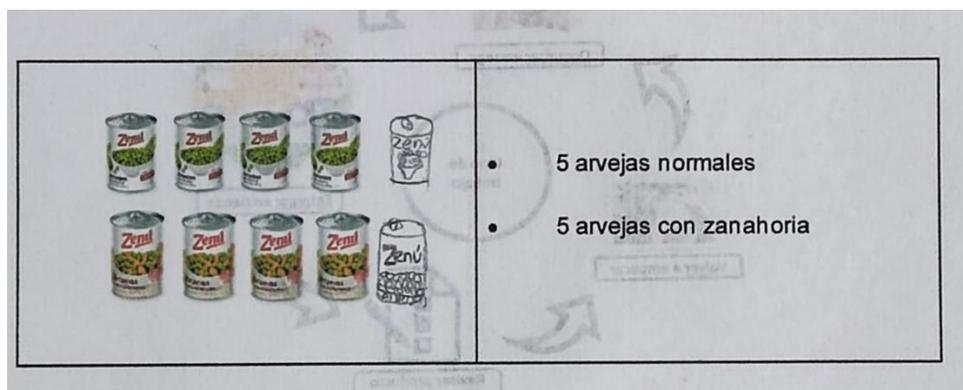
En este capítulo se presentan los análisis y resultados con el fin de responder a la pregunta de investigación. Se presenta la producción de los estudiantes, se analizan las respuestas y se utiliza la triangulación como herramienta de análisis. Se presentará las guías de los estudiantes, y al final se hará un esquema a manera de resumen.

4.1. Análisis Guía 3

En la primera parte se muestra a los estudiantes modificando una imagen que sirve de ejemplo en la Guía, la información en la imagen corresponde con el enunciado de la derecha como se indica en la Figura 3.

Figura 3

Corrección de los estudiantes - Grupo 1



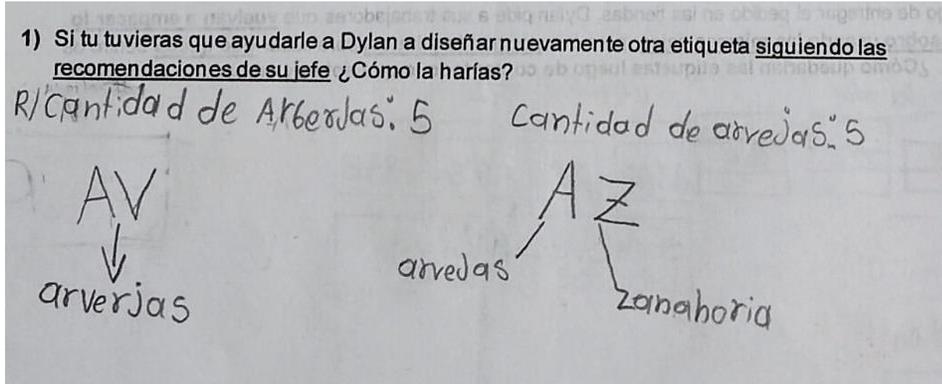
Nota. Archivo personal del autor

La imagen fue diseñada de forma intencional con el objetivo de mejorar las habilidades de lectura. Con anterioridad se observó como los estudiantes operaban de forma directa con la información que se daba por medio de imágenes o símbolos sin detenerse a interpretar su contenido y hacer lectura crítica para saber si la información estaba de forma correcta. Al observar la Figura 3 se puede evidenciar como los estudiantes realizan la corrección a la imagen luego de realizar la pregunta al profesor en formación y confirmar cuál de los dos datos estaba en lo correcto.

Luego de la lectura inicial y la corrección del ejemplo, los grupos procedieron a realizar sus propias etiquetas de acuerdo con las indicaciones proporcionadas en la lectura, como se muestra en las Figuras 4 y 5 a continuación.

Figura 4

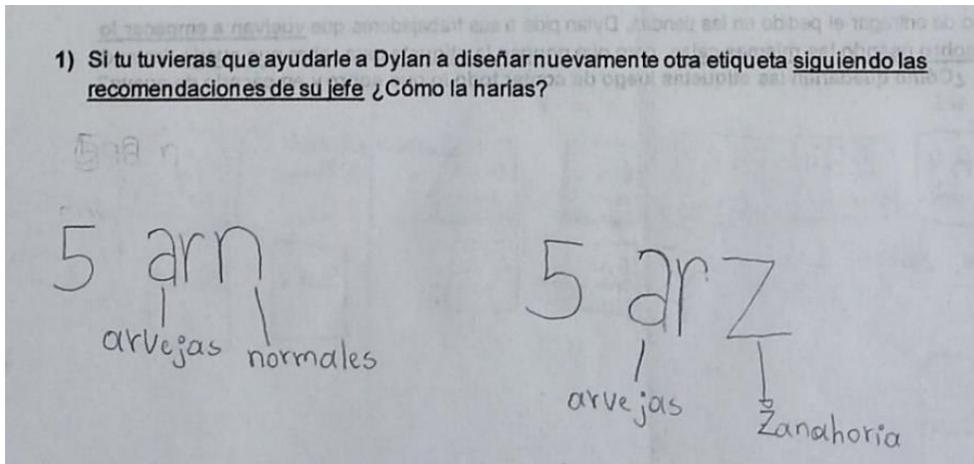
Respuesta Guía 3 - P1, Grupo 1



Nota. Archivo personal del autor

Figura 5

Respuesta Guía 3 - P1, Grupo 2

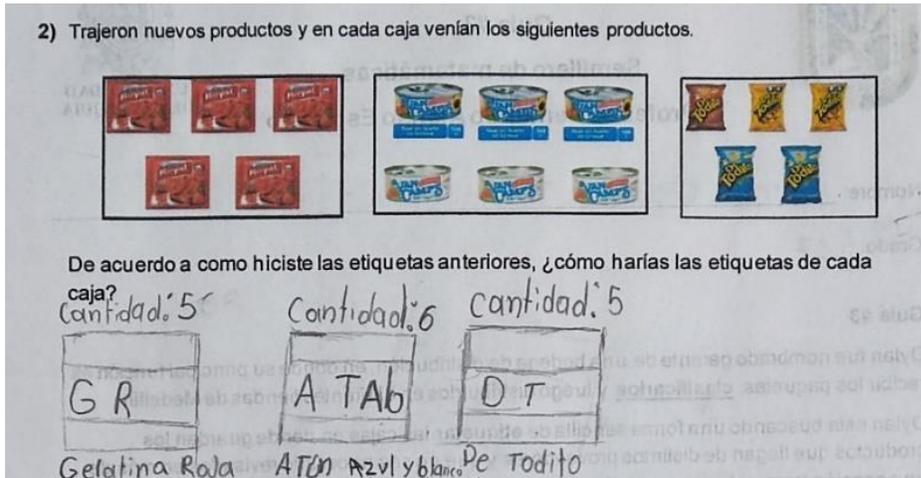


Nota. Archivo personal del autor

En las respuestas de ambos grupos, se puede observar cómo crean sus etiquetas de forma diferente, pero en ambas respuestas se puede entender con claridad cada letra asignada a que hace referencia. Se destaca como en la Figura 5, el Grupo 2 hace uso de una escritura mixta entre números y letras donde cada una da información de diferentes características del producto, pero guardando relación entre sí. Para la segunda parte de la Guía, los grupos usan los diseños que realizaron en la primera pregunta para crear las etiquetas de cajas con diferentes productos ilustradas en las imágenes de la P2. Se seleccionaron las respuestas del Grupo 1 y el Grupo 3 mostradas a continuación en la Figura 6 y Figura 7.

Figura 6

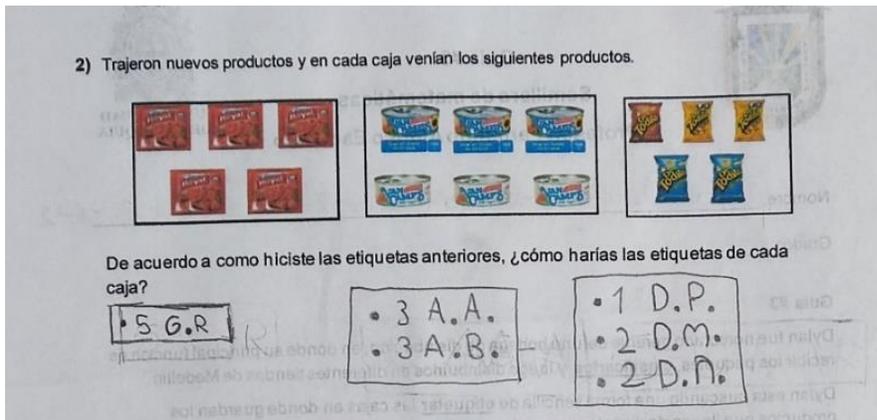
Respuesta Guía 3 - P2, Grupo 1



Nota. Archivo personal del autor

Figura 7

Respuesta Guía 3 - P2, Grupo 3



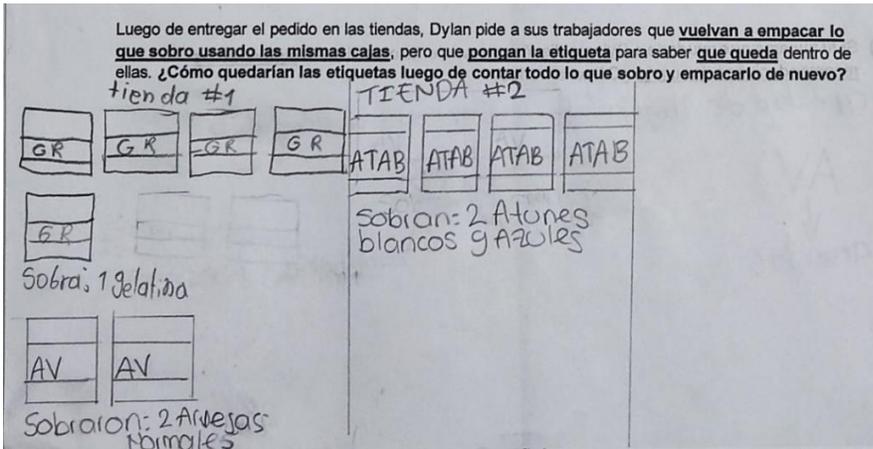
Nota. Archivo personal del autor

Comparando ambos Grupos se puede evidenciar dos tipos de etiquetas. En el Grupo 1 aún se escribe de forma separada la cantidad de producto y las letras que indican el producto, pero en el Grupo 3 se observa como la etiqueta contiene en ella toda la información necesaria acerca del producto y del contenido que hay en cada caja.

En la tercera parte de la guía en la P3, se tiene la logística de la bodega para realizar sus entregas. En este apartado se resaltan las respuestas de los Grupos 1, 3 y 4. Cada una de las respuestas tiene una construcción particular como se muestra a continuación en las Figura 8, 9 y 10.

Figura 8

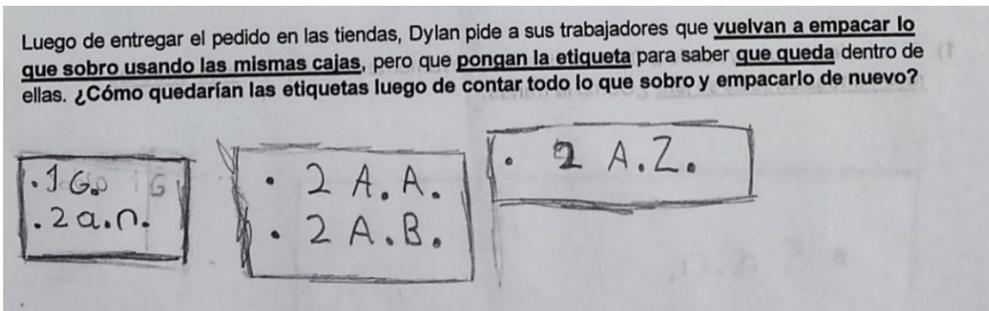
Respuesta Guía 3 - P3, Grupo 1



Nota. Archivo personal del autor

Figura 9

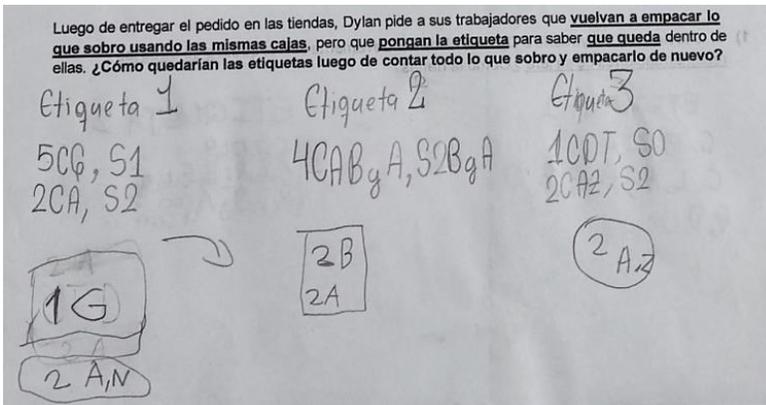
Respuesta Guía 3 - P3, Grupo 3



Nota. Archivo personal del autor

Figura 10

Respuesta Guía 3 - P3, Grupo 4



Nota. Archivo personal del autor

Como se puede observar en las respuestas de cada Grupo, los estudiantes usaron diferentes símbolos para representar las etiquetas de acuerdo a como venía planteando cada equipo en las respuestas anteriores. En el Grupo 1 se resalta el hecho donde no tienen necesidad de incluir el número que indica en la etiqueta cuanta cantidad de cada producto hay, porque dicho valor queda implícito ya en el símbolo que usaron para crear la etiqueta. El Grupo 3 a pesar de no escribir el procedimiento puso las etiquetas que quedarían al final del recorrido, mostrando cierta capacidad de abstraer el proceso y uso de los símbolos de forma precisa en cuanto a la información que contiene. El Grupo 4 propone una nueva letra que representa la abreviación de la palabra “sobra(n)” mostrando un uso natural de la notación propuesta en la Guía para representar palabras.

La aplicación de la Guía les permitió a los estudiantes generar nuevos símbolos para la construcción de significados. Los estudiantes en sesiones anteriores aun no eran capaces de proceder desde oraciones que describían características haciendo referencia a objetos. En esta Guía, no solo son capaces de usar con naturalidad la escritura propuesta, sino que adicional a eso proponen nuevos símbolos que hacen referencia a otros parámetros no indicados o simbolizan la cantidad de elementos de forma implícita.

El trabajo en grupos les permitió a los estudiantes intercambiar ideas y significados entre los integrantes del grupo como lo define Sfard (2008) y al mismo tiempo establecer una relación de comunicación del profesor con los estudiantes por medio de la interacción puntual, enfatizando los puntos relevantes, simplificando los procedimientos. El profesor en formación también propuso retos de comprensión a los estudiantes con el fin de fomentar una lectura consciente en lugar de la lectura superficial como se había detectado en sesiones anteriores. Se diseñó la Guía de forma que se acepten múltiples soluciones y las propuestas en las etiquetas, siempre y cuando el sentido de la simbología propuesta responda a un razonamiento ordenado y acorde con lo esperado en cada pregunta. Se les da valor a los discursos empleados por cada uno de los grupos y al mismo tiempo se demuestra el papel activo desde la elaboración, retroalimentación de otros estudiantes y resignificando su rol en el espacio de clase. También se destaca cambiar el foco del profesor al material de trabajo y a la construcción de soluciones por parte de los estudiantes por medio del material concreto, la observación y la participación en momentos concretos según lo vean necesario los estudiantes como lo afirma Jiménez et al. (2014).

Otro punto para resaltar es la forma como se complementan las preguntas P1 y P2 con P3, haciendo uso de las etiquetas propuestas en las primeras preguntas, sin abandonar la escritura en

este formato. Mas allá de la propuesta del investigador, los estudiantes fueron capaces de comprender la forma en cómo hacer lectura de escritura abreviada. Los estudiantes fueron capaces de usar sus propias palabras y símbolos para aplicarlos en otros ejercicios y darle uso en una situación matemática. Fueron capaces al mismo tiempo de argumentar de forma simple pero concreta y dotaban de significado cada respuesta. El investigador para confirmar este punto pasaba de forma periódica por cada grupo preguntando al azar a uno de los integrantes y confirmando que eran capaces de responder de forma precisa sus respuestas.

En P3, se observó variedad de repuestas por parte de los grupos. Cada grupo hacía referencia a una forma diferente de representar las características de los objetos trabajados en la Guía según su capacidad de comprensión y capacidad de pensamiento matemático. Se evidencia como se realiza la sustitución y representación por medio de las etiquetas (Radford, 2003) agregando que a pesar de ser símbolos que no se usan en un proceso de generalización no quiere decir que no se esté dando pensamiento algebraico en sí.

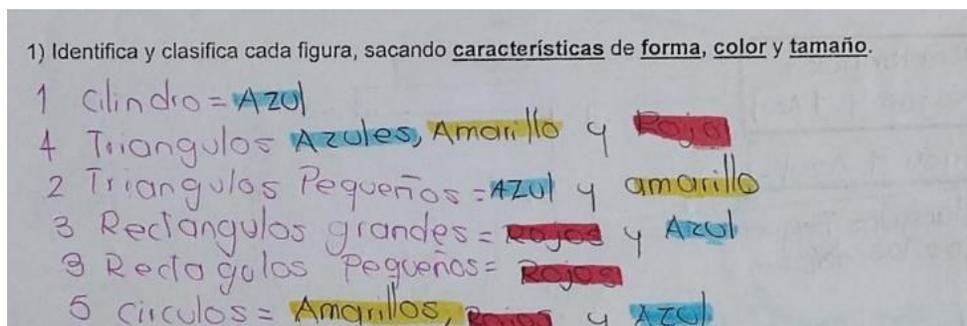
Con el fin de valorar una dinámica general de todos los grupos, se consideró ubicar el tipo de respuestas que proporcionaron en el Nivel 1 de algebrización definidos por Godino et al. (2014) en el cual los estudiantes son capaces de relacionar y aplicar propiedades de las operaciones por medio de los símbolos y expresando datos desconocidos al mismo tiempo de esta forma.

4.2. Análisis Guía 4

Para el análisis de la primera parte de la Guía se usaron tres grupos para observar la forma en la que escribieron la información extraída de los bloques lógicos. En la P1, se escogieron las respuestas de los Grupos 1 y 2, como se muestra en las Figuras 11 y 12 a continuación.

Figura 11

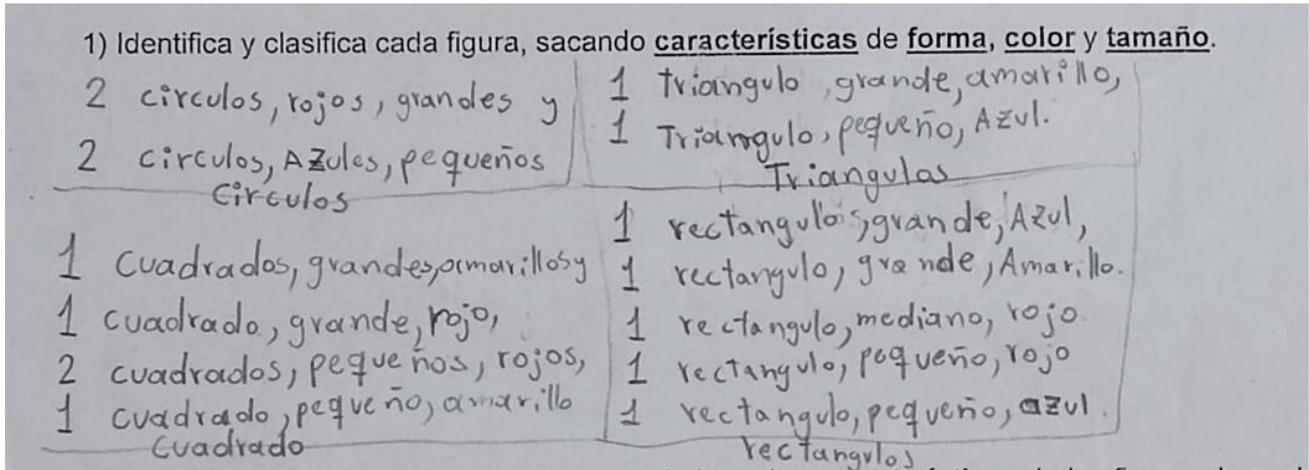
Respuesta Guía 4 - P1, Grupo 1



Nota. Archivo personal del autor

Figura 12

Respuesta Guía 4 - P1, Grupo 2



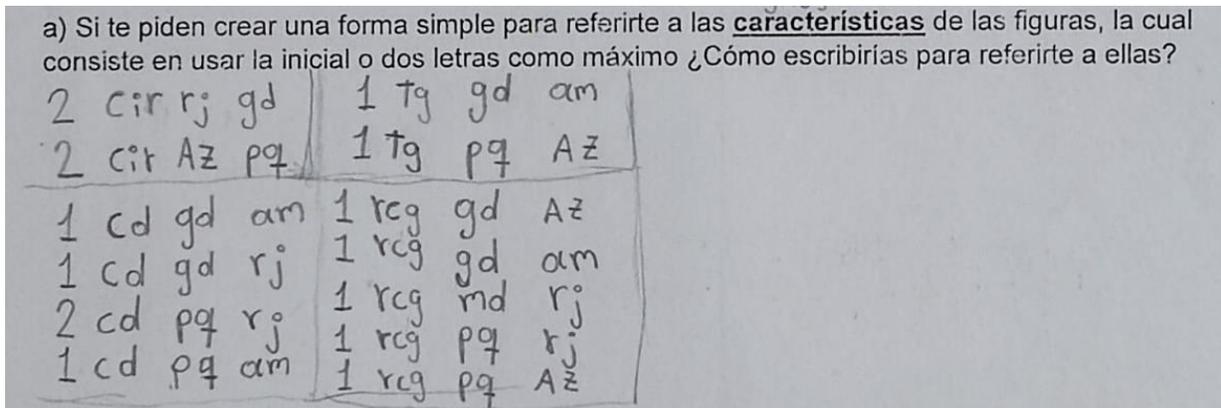
Nota. Archivo personal del autor

En las respuestas de los dos Grupos se notan diferencias en cuanto a la escritura de las características extraídas de los bloques lógicos y en la forma de enunciarlas, por un lado en el Grupo 1 se hace mención del cilindro, cosa que ninguno de los otros grupos puntualizo y lejos de ser un error, los estudiantes del grupo argumentaron que no era una figura plana sino que tenía relieve y por ese motivo la incluyeron de esa forma, mientras el Grupo 2 escribieron las características encontradas en formas de categorías formadas de acuerdo al tipo de figura.

En el inciso P1-a todos los grupos respondieron de forma similar como se observa en la respuesta de los Grupos 2 y 3 en las Figuras 13 y 14 respectivamente.

Figura 13

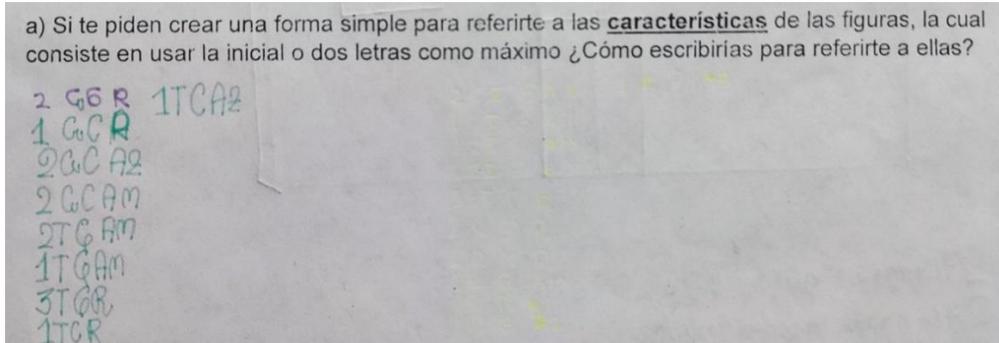
Respuesta Guía 4 P1 - a, Grupo 2



Nota. Archivo personal del autor

Figura 14

Respuesta Guía 4 P1 - a, Grupo 3



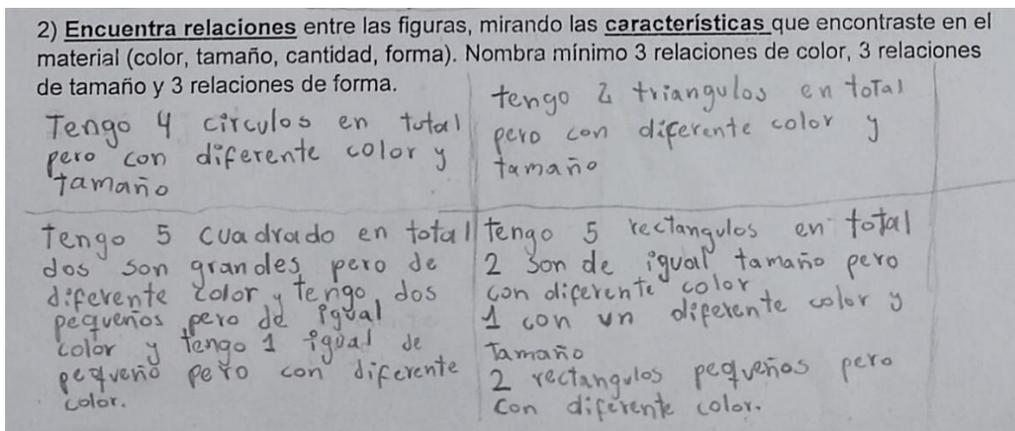
Nota. Archivo personal del autor

En el inciso P1- a, el profesor en formación les preguntó a cada grupo acerca del orden en el cual colocaban las características para forma la oración y la escritura abreviada, cada grupo respondió que no había problema y que el orden no afectaba en nada para entender el enunciado ya que todos entendían los símbolos, de este modo, el profesor en formación les propuso para comprobar esta afirmación que rotaran las hojas otros grupos y al final ningún grupo tuvo dificultad en entender que decía en la respuesta de sus compañeros.

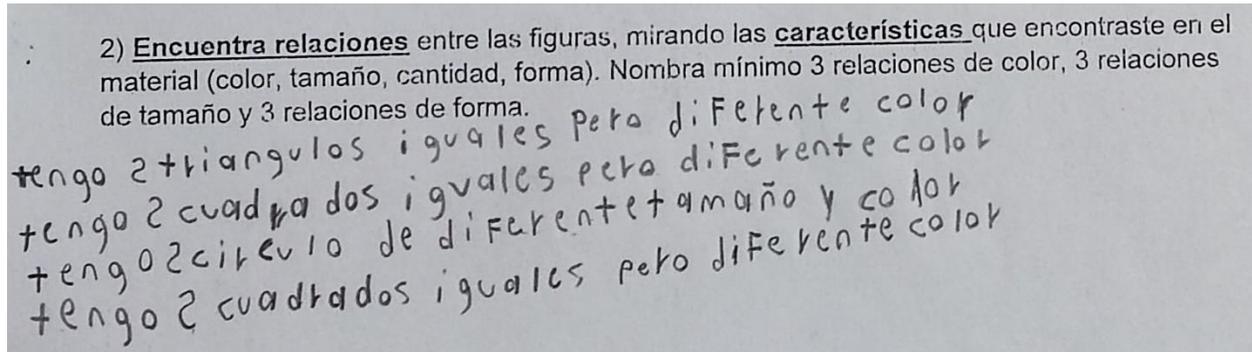
Para abordar la P2 de la Guía se les pidió a los estudiantes que observaran los bloques lógicos y los compararan entre sí según las características que describieron en la pregunta anterior mostrando resultados como los del Grupo 2 y 4.

Figura 15

Respuesta Guía 4 - P2, Grupo 2



Nota. Archivo personal del autor

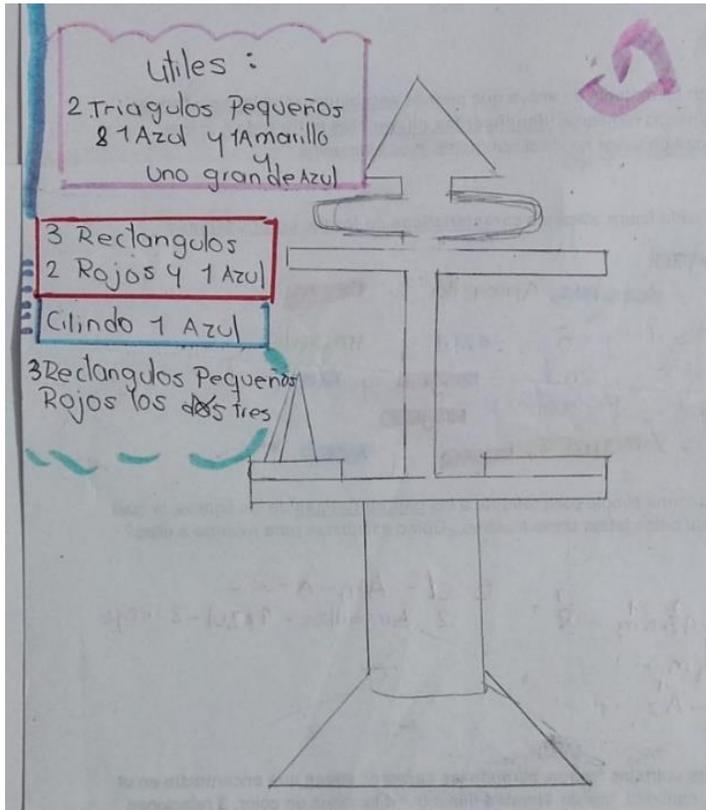
Figura 16*Respuesta Guía 4 - P2, Grupo 4**Nota.* Archivo personal del autor

Los estudiantes no llegaron a comparar los bloques lógicos desde dos o más características al mismo tiempo como se muestra en las Figuras 15 y 16. Se observó en esta pregunta cada una de las características que definieron de forma separada dando evidencia de una escritura organizada y coherente. En la Figura 15 se observa como el Grupo 2 hace uso de asociaciones por conjuntos donde la característica de cada uno es la forma de la figura, mostrando el conocimiento de otros conceptos que no eran el objetivo de la pregunta, pero enriquecen la respuesta.

Para la segunda parte de la Guía se les pidió a los grupos hacer una escultura, la única indicación consistían que tenerla armada debían pasarles un plano a sus compañeros únicamente dando indicaciones de las caras de la figura y que fichas debían usar. En la Guía se les indico que utilizaran escritura abreviada, pero ninguno de los grupos hizo uso de los símbolos realizados en las preguntas anteriores. Los estudiantes retomaron la forma como organizaron la información en la P1 y procedieron a realizar la actividad. Se tomaron los planos de los Grupos 1 y 4 mostrados en las Figuras 17 y 18 a continuación, debido a que el resto del grupo realizaron la actividad con los bloques lógicos, pero no realizaron los planos por lo que no fue posible hacer interactuar a los demás grupos.

Figura 17

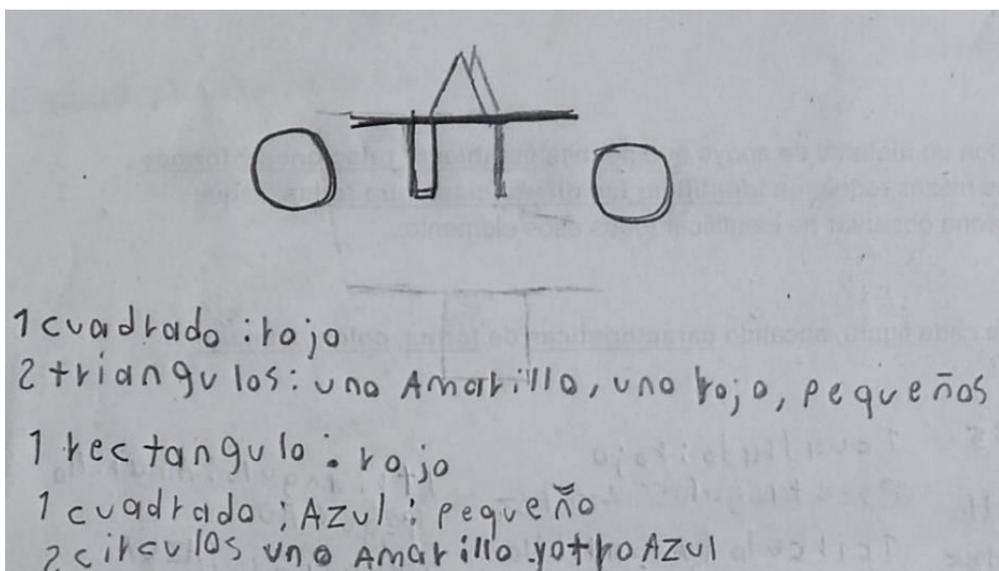
Respuesta Guía 4 - P3, Grupo 1



Nota. Archivo personal del autor

Figura 18

Respuesta Guía 4 - P3, Grupo 4



Nota. Archivo personal del autor

Los estudiantes manifestaron estar a gusto con la segunda parte de la Guía y se destaca como la actividad no se limitaron a crear esculturas únicamente en el piso¹³, sino que realizaron estructuras en tres dimensiones, algo que elevaba la dificultad en la creación de los planos que luego entregaron al otro grupo.

Los estudiantes luego de elaborar los planos de su escultura y entregárselos a otro Grupo, no podían hacer correcciones, esto con el objetivo de problematizar el uso de los símbolos y resaltar la importancia en la coherencia de la escritura y la precisión de las respuestas proporcionadas.

En la P1 y P1- a se llega a un consenso en común por parte de los estudiantes y del profesor en formación al realizar la simbología referente a la escritura abreviada que se espera a este punto. Según Sfard (2008) la comunicación no se considera eficaz a menos que en un momento dado parezca que los participantes saben acerca de que están hablando, en este caso, los estudiantes se han familiarizado con el tipo de escritura cuando se solicita explícitamente, no es necesario realizar intervenciones para esclarecer la forma y cómo realizarla, además de poder ser incluida en situaciones simples como P2.

En la Guía 4 se plantearon tanto con objetivos desde el aprendizaje en matemáticas y la forma de comunicar pero es necesario aclarar que los objetivos no se limitaban únicamente al uso de la escritura abreviada, por el contrario, la articulación de las ideas por parte de los estudiantes, poder expresarlas y clasificar la información según sus características también es un objetivo del investigador, que refuerza la evidencia proporcionada por los estudiantes como lo menciona Sfard (2008) en donde la comunicación es concebida como una construcción desde cero, siendo los resultados en la Guía 4 consecuencia del proceso junto a los estudiantes desde el inicio de la aplicación de las Guías y como se demuestra en la sintaxis del Grupo 2 y Grupo 3 en las figuras 13, 14 y 15. No solo los estudiantes aprendieron, también el investigador encontró nuevas formas de intervenir y diseñar las Guías de tal forma que los estudiantes pudieran reconocer que se pretende de forma directa por medio de la intervención puntual como de forma indirecta modificando la estructura de las Guías y el lenguaje empleado (Jiménez et al. 2012).

Una decisión que ha favorecido a los estudiantes es la metodología de trabajo en equipo. Se observó como ciertos estudiantes participaban de forma constante durante las sesiones, pero otros no intervenían y no resolvían la totalidad de las actividades propuestas. En la aplicación de

¹³ Anexo – Fotos Guía 4: <https://1drv.ms/f/s!At9ln36pLHJri0K4xIKMWJYy67DF?e=ClcrjI>

las Guías, formar grupos de forma aleatoria permitió a los estudiantes que no contaban con mucha participación, asumieran un rol dentro de cada grupo sin necesidad de ser el investigador quien los asignada. Desde la escritura, proponer ideas, solicitar ayuda a los otros grupos o al profesor en formación, los estudiantes adoptaron en sus grupos el compromiso en conjunto, relacionándolo con la propuesta de Sfard y Cobb (2014) como el aprendizaje de las matemáticas y el crecimiento personal se origina desde el plano social de tal forma que cada estudiante adquiere un compromiso ya no individual sino grupal. Los estudiantes que contaban con menos participación a nivel grupal fueron abordados el profesor en formación demostrando ser capaces de preguntar dudas concretas, entender la retroalimentación de sus compañeros y del profesor, dejando atrás dificultades para expresarse evidenciadas en otros momentos (Jiménez et al. 2012).

En la P3 se les da libertad a los estudiantes para construir su escultura y los planos respectivos, pero se observa la dificultad y la complejidad del proceso de comunicación a la hora de trasladar las ideas a otros grupos de forma ordenada. El propósito con la forma de desarrollar esta pregunta y la posterior intervención del profesor en formación, fue evaluar aspectos de la comunicación relacionados a la intuición y a la lógica (Jiménez et al 2012) y problematizar junto a los estudiantes la importancia de expresarse de forma clara, con ideas fáciles de entender y la relevancia de la estructura del dialogo y la escritura, también se resalta la necesidad de tener una estructura en la escritura por ejemplo en situaciones donde deben expresar ideas apoyadas en el pensamiento matemático y el papel que cumple tanto el álgebra en general como la variable no solo a la hora de operar sino también a la hora de entender a que hace referencia por medio del símbolo, aspecto que se vio limitado por el lenguaje usado en los planos elaborados (Figura 17 y 18) y luego se corrigió con retroalimentación por parte del profesor en formación haciendo la corrección de la idea inicial donde los grupos tomaron las partes (bloques lógicos) de forma aislada y al final las unieron sin relación u orden en un plano donde las partes no tienen sentido (escultura).

Lo anterior se relaciona a lo definido por Azarquiel (1993) en la dificultad de usar los símbolos y aprovecharlos, no por el hecho que la situación no los necesite, sino porque no cuentan con la experiencia para relacionarlos entre sí, en lugar de únicamente clasificarlos.

Los estudiantes en esta ocasión mostraron avances en el apartado de la construcción y asimilación del lenguaje simbólico, pero contaron con debilidades a la hora de emplearlo en situaciones que necesitaran establecer relaciones. Luego del análisis, se consideran las respuestas de todo el grupo en el nivel 0 de algebrización según Godino et al. (2014). El investigador tiene el

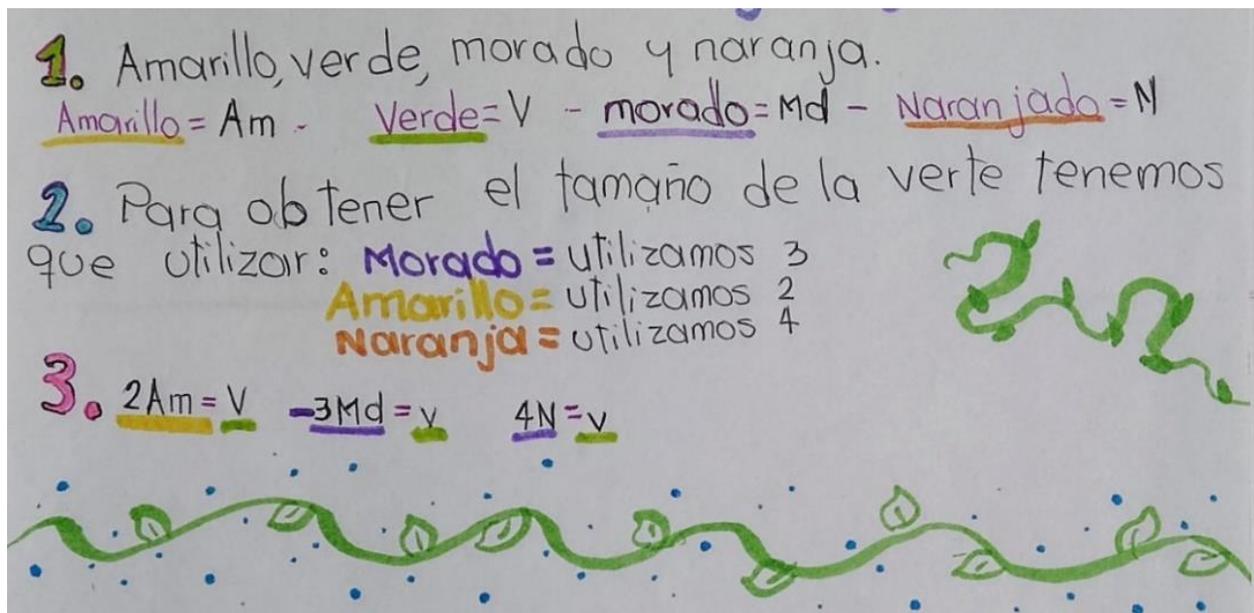
objetivo de replantear la Guía de cara al fortalecimiento del pensamiento algebraico y a la construcción del concepto de variable.

4.3. Análisis Guía 5

Los estudiantes tuvieron facilidad con el formato propuesto para trabajar la Guía 5. A continuación se muestran las respuestas de los Grupos 1, 2, 3 y 4 en las Figuras 19, 20, 21 y 22.

Figura 19

Respuesta Guía 5, Grupo 1



Nota. Archivo personal del autor

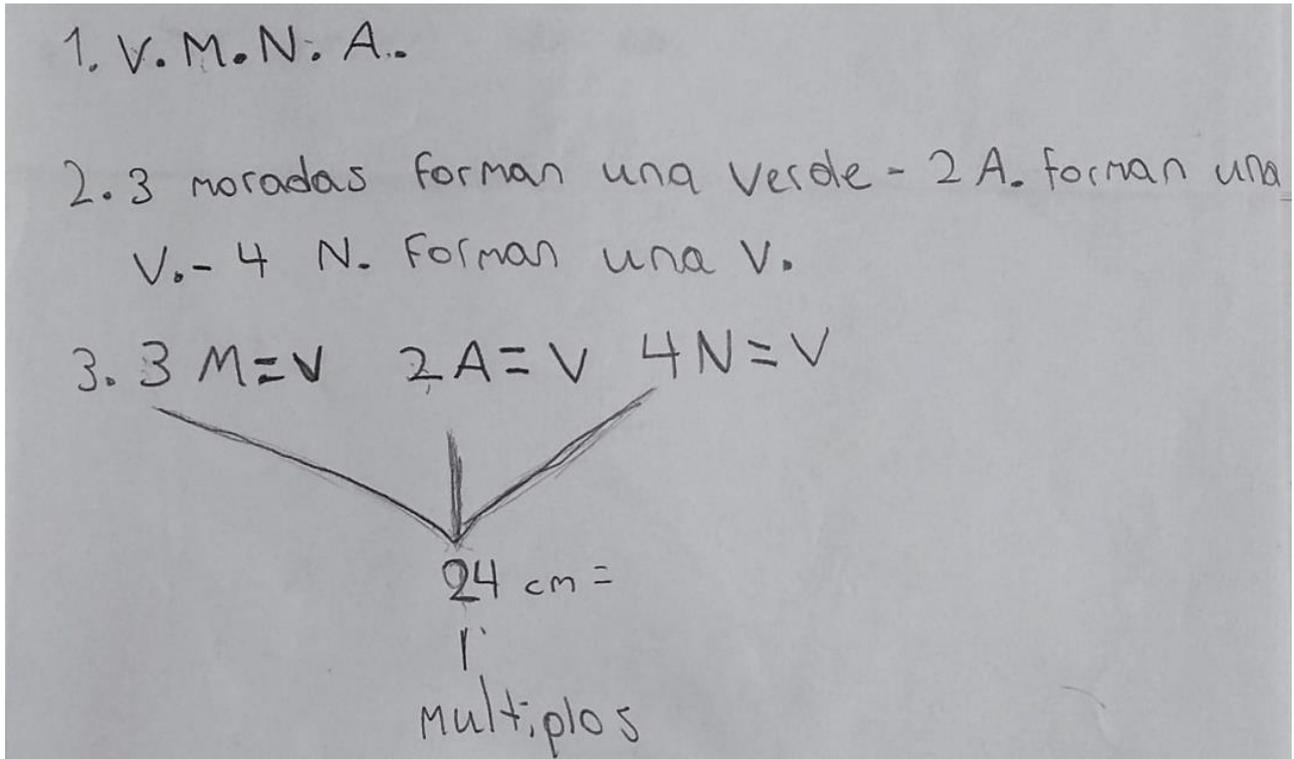
En este grupo se puede observar una estructuración en la forma como presentaron su respuesta. Primero iniciaron con la caracterización de las regletas por medio de sus colores, definieron los símbolos que iban a usar para representarlas por medio de letras abreviadas, en la segunda parte de su respuesta nombraron la cantidad de las otras regletas que necesitaban para construir la regleta Verde. En la tercera parte fueron capaz de traspasar dicha información por medio de los símbolos y combinándolos junto a otros símbolos conocidos (igual).

Se le preguntó al Grupo acerca de la forma de leer la tercera parte de su respuesta a lo que una de las integrantes contestó: “al usar dos veces la regleta Amarilla, puedo armar una Verde”. En su respuesta se puede reconocer como aparece la palabra “tantas veces algo” evidenciando un entendimiento del número que acompaña a su símbolo como la repetición de un mismo objeto, y

la capacidad de referirse al objeto en términos de otro, en este caso, la regleta Verde definida términos de la cantidad de regletas Amarillas.

Figura 20

Respuesta Guía 5, Grupo 2



Nota. Archivo personal del autor

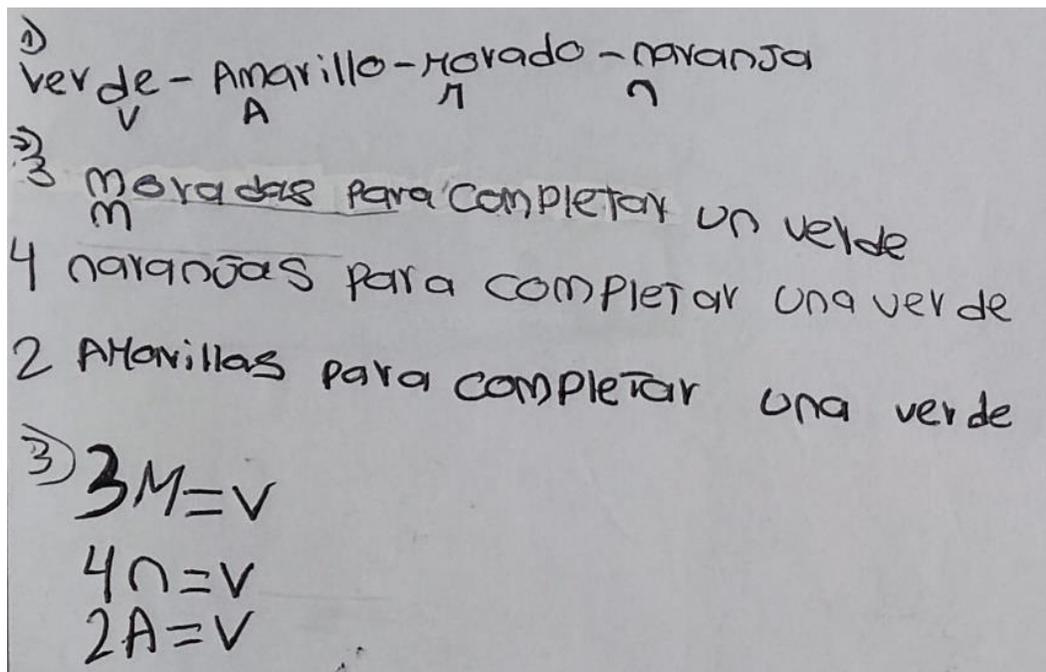
En la respuesta del Grupo 2 se observan en la primera parte una estructura en la escritura de forma clara y acorde a lo trabajado en todas las Guías. En la segunda parte inician escribiendo las frases en oraciones enteras, luego comienzan a combinar escritura entre los símbolos definidos previamente y el uso de palabras que hacen de conector para las ideas entre los símbolos a los que se están refiriendo.

En la tercera parte se encuentra tanto las ideas de la parte anterior en escritura abreviada como una referencia de las tres proposiciones conectadas la expresión “24 cm y Múltiplos”. Al ver esta respuesta, el profesor en formación les pregunta por la última parte a lo cual el grupo responde: “es que medimos con una regla cada una de las regletas y nos daban 3 centímetros la Naranja, 4 cm la Morada, 6 cm la Amarilla, 12 cm la Verde y todas las juntas nos da 24 cm y la regleta verde múltiplo de las otras”. De esta afirmación se puede encontrar un nivel mayor de relaciones, a pesar

de que la suma de las medidas de las regletas juntas no es correcta, de igual forma se valora las relaciones encontradas desde la medición

Figura 21

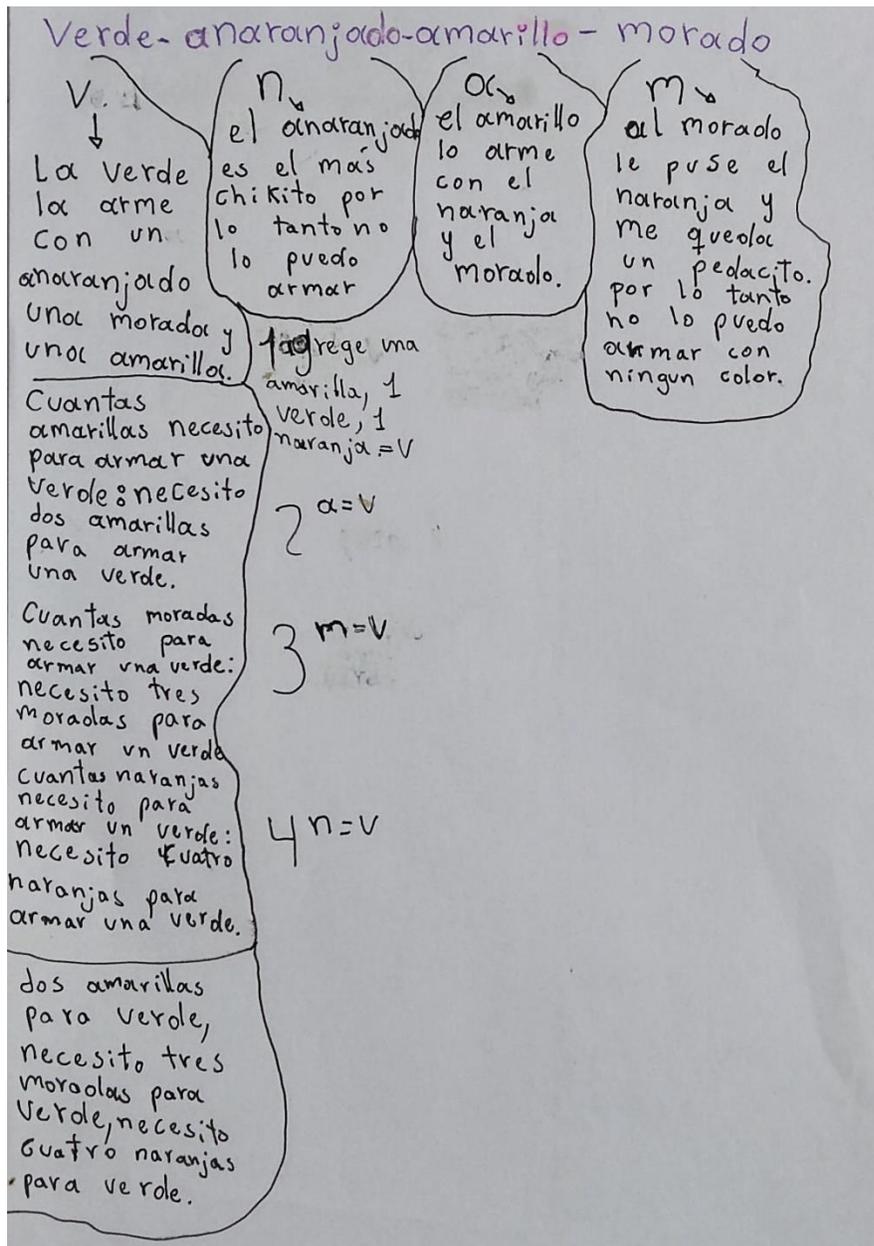
Respuesta Guía 5, Grupo 3



Nota. Archivo personal del autor

La respuesta del Grupo 3 se destaca tanto la estructura para dar las respuestas al igual que otros grupos dando evidencia de la forma en la que se trabajó en otras Guías, y se destaca el uso de la palabra “completar”. Cuando el profesor en formación les pregunta acerca de esa palabra, los integrantes del grupo responden: “es que, para armar una Verde, debo completar con tres Moradas”. Se considera como un valor agregado la construcción de la segunda parte de su respuesta porque el grupo interpreta la situación como una relación de parte-todo y en la tercera parte de la respuesta los estudiantes usan la escritura de símbolos y aparece la escritura de ecuaciones simples.

Figura 22
 Respuesta Guía 5, Grupo 4



Nota. Archivo personal del autor

La respuesta del Grupo 4 en la primera parte define los símbolos tomando una regleta como referencia y relacionándola con las demás. En primer lugar, define la regleta más grande como una composición del resto. A pesar de que, las regletas no fueron diseñadas de forma que dieran exactamente la suma de todas juntas se valora la relación aproximada que encontraron. En el resto de las regletas identificaron como se podían componer del resto, en la regleta Naranja

reconocen es la más pequeña por lo tanto no es posible armarla a partir de otras regletas que son más grandes, armaron la regleta Amarilla con una regleta Naranja y una Morada. En la construcción de la respuesta de la regleta Morada dice: “Al morado le puse una naranja y me queda un pedacito, por lo tanto, no lo puedo armar con ningún color” mostrando un nivel de observación más profundo al reconocer como no es exacta la medición y por lo tanto no puede afirmar la igualdad.

En la segunda parte de la respuesta se destaca la expresión “Cuántas Amarillas necesito para armar una Verde”. Esta expresión ayuda a entender el razonamiento que tuvieron los integrantes del grupo para encontrar las relaciones, reforzando su argumento desde el razonamiento empleado.

Analizando los Grupos de forma general, se reconocen los avances en habilidades de comunicación de las respuestas escritas y orales. Los estudiantes logran usar con soltura la escritura abreviada y construyen de forma ágil los símbolos que hacen referencias a los objetos o a sus características. La propuesta de escritura realizada es entendida con claridad por los estudiantes y por medio de la práctica en diversas situaciones logran comunicarse en común con las mismas palabras y símbolos (Sfard, 2006). Los estudiantes fueron capaces de ordenar sus ideas, comprender los objetivos de la Guía, construir símbolos de acuerdo con lo aprendido en otras tareas, a su vez fueron capaces de encontrar relaciones entre las regletas y presentar algunos argumentos desde su propio razonamiento (MEN, 1998).

De acuerdo con las respuestas referenciadas en las Figuras 19, 20, 21 y 22 se observa como los estudiantes son capaces de partir desde un lenguaje natural, entender la propuesta del profesor en el uso símbolos y formalizar sus conclusiones por medio de ecuaciones (Jiménez et al. 2012). La participación del profesor no inicia desde un rol autoritario legitimado desde el conocimiento, sino un mediador de las dinámicas de clase, lo cual permite trasladar protagonismo a los estudiantes para que sean participes en el discurso por medio de intervenciones desde los argumentos consolidados desde la observación, contrastando opiniones y contar con la capacidad fundamentar sus respuestas desde los conceptos matemáticos abordados, siendo el caso la creación de símbolos. Se evidencia una respuesta estructurada en contraste al inicio de la implementación de las primeras Guías donde no se reconocía de forma explícita la articulación del discurso y las respuestas eran ambiguas.

El profesor también participa del proceso de construcción del conocimiento y del discurso por medio del lenguaje matemático, partiendo desde la comprensión de las respuestas que generan

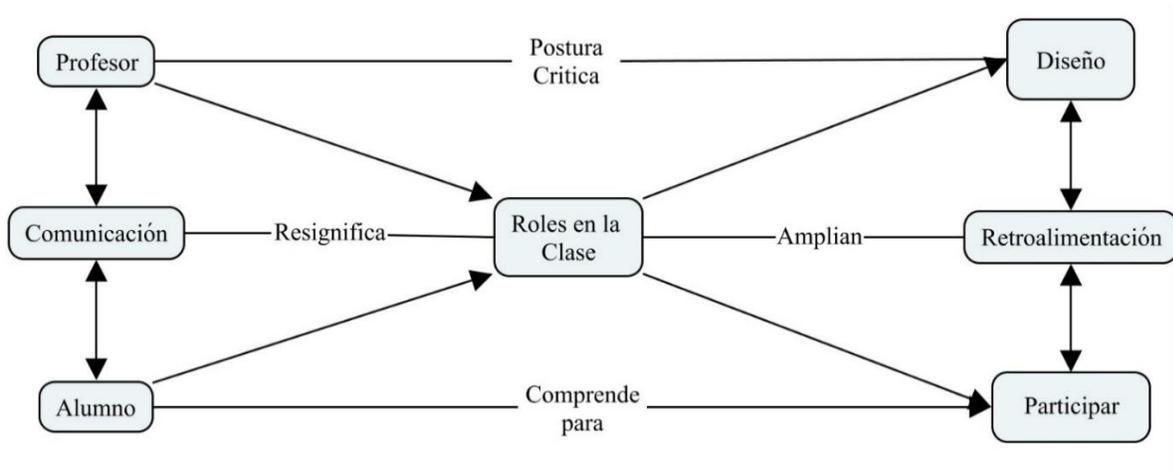
los estudiantes, interviniendo donde es requería su participación desde la observación y el análisis de los resultados priorizando más allá del rigor en matemáticas. Por el contrario, el profesor replantear su proceso de enseñanza a partir de analizar las debilidades que obstaculizan la argumentación a los estudiantes por medio del lenguaje matemático (Jiménez et al. 2012).

De las respuestas por los estudiantes se puede evidenciar como el uso de símbolos permite al profesor introducir de forma sutil la estructura de la escritura en matemáticas por medio de símbolos y signos. Se observa que la creación y uso de símbolos por medio de letras se incorpora de forma orgánica, de tal modo que los estudiantes puedan reconocer el uso de expresiones formales en las matemáticas. El trabajo en la construcción de forma lógica de los argumentos trabajado desde la variable representada por la letra como objeto, genera una nueva pregunta en la lectura que los estudiantes realicen en situaciones matemáticas posteriores al preguntarse de forma natural, que representa la letra o el símbolo en una expresión matemática.

Se clasifica a los grupos de forma general en el nivel de algebrización 1 según lo definido por Godino et al. (2014). En contraste a los resultados las otras Guías analizadas, se considera que los estudiantes cuentan con una mayor capacidad de comunicación por medio del lenguaje matemático y surge la posibilidad de proponer ejercicios con mayor complejidad en razonamiento matemático.

A modo de síntesis de los análisis, la comunicación permite que el profesor y los estudiantes resignifiquen los objetivos en la clase de matemáticas, intercambiando lugares sin asumir roles estáticos, todo con el fin ampliar la interacción entre todos los sujetos implicados en el proceso de aprendizaje y enseñanza. El estudio de la comunicación y su impacto en las clases de matemáticas permite a los estudiantes y al profesor posicionarse en un rol activo desde los intereses particulares de cada rol y al mismo tiempo les permite intercambiar perspectivas con el fin de ampliar la retroalimentación recibida por cada uno, y generar un proceso de enseñanza y aprendizaje de forma conjunta donde todos salgan beneficiados. Con el fin de resumir lo anterior, se propone el siguiente esquema en la Figura 23.

Figura 23
Resumen de los análisis



Nota. Elaboración propia

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este apartado se presentan las conclusiones obtenidas a partir de los análisis, se valoran las conclusiones respecto a la pregunta y objetivo inicial de la investigación. Se da una valoración sobre posibles nuevas líneas de investigación y se esclarecen tanto las limitaciones como las recomendaciones generales acerca del proyecto de investigación.

5.1. Consideraciones respecto a la pregunta y el objetivo de investigación

Al abordar la pregunta de investigación “¿Cómo favorecer el proceso de la comunicación en el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de sexto grado?” por medio de las líneas de comunicación en la clase de matemáticas, niveles de algebrización y el álgebra temprana, se concluye que el objetivo fue alcanzado al observar los resultados en el desarrollo de las Guías por parte de los estudiantes. Estos lograron construir un discurso y escritura por medio de la simbolización, y fueron capaces de argumentar haciendo uso de la propuesta del profesor por medio de una lectura atenta y la escritura abreviada.

La metodología empleada en la implementación de las Guías aportó a los estudiantes una de las múltiples formas de abordar las situaciones matemáticas desde la conversación y el intercambio de ideas al proponer el trabajo en grupo y potenciar las fortalezas y sortear las debilidades a nivel individual. El investigador también es beneficiado por la metodología propuesta al estar en constante evaluación y crítica del material propuesto para desarrollar, debatiendo constantemente sobre la claridad de los objetivos, el uso acorde del material concreto llevado a espacio de clase, y haciendo uso de los resultados de las Guías como factor relevante para el rediseño y mejoramiento de actividades presentadas a lo largo de la implementación de la propuesta de investigación.

En los análisis se encontró que los estudiantes se fueron adaptando progresivamente a la propuesta de escritura abreviada por medio de símbolos. Al avanzar en la implementación de las Guías, las situaciones matemáticas se plantearon con el fin de generar la necesidad de encontrar formatos de escritura que permitan expresar las mismas ideas de una forma práctica. Con la escritura abreviada por medio de símbolos no solo encontraron una notación que les permitía expresar mayor cantidad de información, también encontraron similitudes las respuestas de los

otros estudiantes resultándoles sencillo entender ideas a las cuales hacían referencia ellos mismos además de comparar y encontrar errores.

Los estudiantes luego de comprender la notación por medio de símbolos también empezaron a proponer nuevos símbolos que no solo representando atributos de los objetos sino ideas inmersas en las palabras, encontrando similitudes entre el discurso y la simbología.

Por medio de esta investigación también se encontraron ventajas en el uso y adaptación del experimento de enseñanza. Los constantes espacios de retroalimentación que surgen de los resultados de los estudiantes, la participación activa en clase y el análisis crítico por parte de los profesores en formación en el Seminario de Práctica, permitían reflexionar acerca de las carencias en el diseño inicial de las Guías. A medida que se avanza en las sesiones con los estudiantes, los diseños se volvieron cortos y precisos, notando mejoría en las respuestas de los estudiantes a las situaciones planteadas en las Guías.

Los niveles de algebrización sirvieron como un criterio de referencia para evaluar elementos característicos del pensamiento algebraico en los resultados. Facilitó la adaptación de los objetivos, el diseño y la implementación de las Guías de Aprendizaje, enfocadas en el desarrollo de los conceptos matemáticos y objetivos para favorecer el aprendizaje desde la comunicación. El aprendizaje de otras formas de expresión del lenguaje simbólico a partir de la escritura abreviada permitió transitar del diseño de Guías a partir de las situaciones con un contexto, a plantear situaciones con mayor énfasis las características de objetos, el uso de símbolos, y la argumentación estructurada a partir de los análisis de los estudiantes.

5.2. Limitaciones del estudio

Los cambios en la logística de los espacios destinados para el desarrollo de la investigación tuvieron un impacto en la participación de los estudiantes evidenciándose ausencias en días puntuales de la aplicación de las Guías por ejemplo la Guía 1 y Guía 4. El uso de material concreto como salas de cómputo, o mayor cantidad de objetos para repartir entre más estudiantes de forma que la metodología no se vea restringida por la cantidad de recursos disponibles, fue una de las desventajas de impacto moderado consideradas en la planeación.

De igual forma, el espacio y el horario disponibles para el desarrollo de las Guías se considera pertinente ampliar el margen de tiempo con el fin de incluir espacios de dialogo con los

estudiantes donde manifiesten los aportes que harían en cuanto a la metodología, las Guías trabajadas, inclusión de material concreto, entre otras.

5.3. Posibles líneas de investigación

Al proponer un uso paulatino de los símbolos y su significado desde el objeto, se evidenció que los estudiantes, al comprender y usar en situaciones matemáticas estos métodos de definición de símbolos desde el lenguaje cotidiano, abre la posibilidad a explorar otras concepciones de la variable, en escenarios donde no represente únicamente objetos, sino que se exploren escenarios donde la variable represente números, rangos, incógnitas, probabilidades, con el fin de profundizar en la representación de símbolos y en la argumentación desde las propiedades de los conjuntos numéricos o desde las proposiciones lógicas.

Este estudio parte desde la base del pensamiento algebraico en el álgebra temprana, los objetivos planteados eran acordes a la construcción de la escritura y el lenguaje por parte de los estudiantes, pero no excluye la posibilidad de incorporar ejercicios en grados más avanzados desde el diseño enfocado a la comunicación y la argumentación, al contrario, el profesor al igual que en esta investigación adopta un papel activo desde la observación con el fin de identificar las necesidades de los estudiantes y así diseñar tareas acorde a sus debilidades, siendo ellos mismos quienes retroalimenten dichas propuestas.

5.4. Recomendaciones generales del estudio

El profesor debe hacer un ejercicio consciente y profundo desde la concepción que tiene de comunicación. Los objetivos iniciales con respecto a los conceptos matemáticos deben ser adaptados desde los resultados que los estudiantes le proporcionen, sin ser invasivo en sus intervenciones, siendo las respuestas halladas una medida legítima desde la cual el profesor realice un ejercicio crítico con el material que propone, con los logros alcanzados y al mismo tiempo aprender constantemente a realizar actividades donde todos los participantes entiendan el propósito de su implementación y no solo el profesor o algunos estudiantes.

Los roles en los espacios de clase deben ser dinámicos, no desde actividades que introduzcan gran variedad de objetos o recursos, sino desde las dinámicas de trabajo donde se plantee la necesidad que el estudiante participe sin estar expuesto a juicios frente al error o desde la evaluación. En ocasiones el profesor será el evaluado por los estudiantes y es el momento en el

cual un ejercicio de dialogo entre todos les permitirá entenderse mutuamente, primero desde la interacción entre personas y luego desde las habilidades de cada individuo, donde el profesor con su formación académica tiene que aportar, en lugar de ser concebido como una autoridad inamovible.

Se recomienda retomar la conceptualización que realizar Luis Radford acerca de los elementos que permiten reconocer el pensamiento algebraico desde los símbolos, desde actividades sin elementos alfanuméricos, desde el discurso y las formas de comunicación de los estudiantes, con el fin de ampliar la posibilidad de campos de acción de los estudios que busquen favorecer el aprendizaje de conceptos algebraicos a partir del estudio de la comunicación.

Referencias

- Aké, L.P. y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 161-179. <https://doi.org/10.24844/em3002.07>
- Bisquerra, R. (2009). Metodología de la investigación educativa. *La Muralla*.
- Coles, A. y Ahn, A. (2022). Developing algebraic activity through conjecturing about relationships. *ZDM Mathematics Education*, 54(7), 1229-1241. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01420-z>
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia.
- Erath, K., Prediger, S., Quasthoff, U. y Heller, V. (2018). Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: The case of explaining to learn and learning to explain. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 161-179. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9830-7>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199- 219. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Gravemeijer, K. y Prediger, S. (2019). Topic-Specific Design Research: An Introduction. En G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_2
- Grupo Azarquiél. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Síntesis.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación. *McGraw-Hill*.
- Jiménez, A., Suarez, N. y Galindo, S. (2010). La comunicación: eje central de la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173 – 202. <https://doi.org/10.19053/22160159.1104>
- Llanes, A., Pino-Fan, L. R. y Ibarra, S. E. (2022). Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile. *Educación Matemática*, 34(2), 182–207. <https://doi.org/10.24844/EM3402.07>

- Medrano, A., Xolocotzin, U. y Flores-Macías, R. C. (2022). Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, 34(3), 10–32. <https://doi.org/10.24844/EM3403.01>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. MEN.
- Pearn, C., Stephens, M. y Pierce, R. (2022). Algebraic reasoning in years 5 and 6: Classifying its emergence and progression using reverse fraction tasks. *ZDM Mathematics Education*, 54(7), 1257-1271. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01426-7>
- Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 98(2), 215-229. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y>
- Planas, N. (2021). How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM Mathematics Education*, 53(2), 277-288. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6>
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02
- Radford, L. (2015). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. In: Cho, S. (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_15
- Schifter, D. y Russell, S. J. (2022). The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM Mathematics Education*, 54(7), 1289-1302. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x>
- Sfard, A. y Cobb, P. (2014). Research in Mathematics Education: What Can It Teach Us about Human Learning? En R. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences Cambridge Handbooks in Psychology*, (pp. 545-564). Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139519526.033>
- Uicab, G. R., Rojano, M. T. y García, M. (2022). Expresiones de generalización en escolares de 10 a 12 años durante la resolución de secuencias figurales-numéricas y numéricas. *Educación Matemática*, 34(1), 42–68. <https://doi.org/10.24844/EM3401.02>

Anexos

En este apartado se proporciona el enlace a la carpeta general donde contiene todos los archivos a los cuales se hace referencia a lo largo del escrito.

Carpeta de anexos

<https://1drv.ms/f/s!At9ln36pLHJrglO3Mrs9DA9v7fqe?e=6VG9vY>