Uso de la tecnología para favorecer el proceso de comunicación en la clase de matemáticas

Juan Camilo Colmenares Montoya

Trabajo de grado para optar al título:
Licenciado en Matemáticas

Asesor
Jorge Andrés Toro Uribe, Doctor en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Medellín, Colombia
2023

Cita	(Colmenares-Montoya 2023)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Colmenares-Montoya, J. (2023). *Uso de la tecnología para favorecer el proceso de comunicación en la clase de matemáticas* [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Dedicatoria

A mi Esposa e Hijos, los amo.

Agradecimientos

Quiero dar mi más sincero agradecimiento a todas y a cada una de las personas que contribuyeron de una u otra forma a la realización de este trabajo de investigación. A mi familia, por su apoyo inquebrantable y amor constante. A mi asesor, doctor Jorge Andrés Toro Uribe, por su orientación y paciencia. A mi compañera de practica Mayra Morrón, quien fue como una monitora. A mis compañeros de la licenciatura, por las discusiones enriquecedoras y el apoyo mutuo a lo largo de este proceso académico. Finalmente, a todas las fuentes, investigadores y autores cuyas obras han sido fundamentales en la construcción de este trabajo. Sin su contribución, este logro no habría sido posible. Gracias.

Tabla de contenido

Resumen 10

Abstract 11

Capítulo 1: Introducción 12

1.1. Descripción del contexto 12

1.2. Planteamiento del problema 13

Capítulo 2: Marco Teórico 18

2.1. Revisión de literatura 18

2.1.1. Línea sobre comunicación 21

2.1.2. Línea sobre conceptos de Geometría Analítica 23

2.1.3. Línea sobre uso de las tecnologías en las clases de matemáticas 25

2.2. Fundamentación teórica 31

2.2.1. Comunicación en clase de matemáticas 31

2.2.2. Geometría analítica 34

2.2.3. Uso de las tecnologías en las clases de matemáticas 35

2.2.4. Niveles de algebrización 37

Capítulo 3: Metodología 39

3.1. Paradigma y enfoque 39

3.2. Estrategia investigativa 39

3.3. Participantes de la investigación 40

3.4. Descripción de las tareas 42

3.5. Técnicas, instrumentos y estructura del análisis 43

Capítulo 4: Análisis y Resultados 45

4.1. Tarea 1 45

4.2. Tarea 2 53

4.3. Tarea 3 59
4.4. Resultados 65
Capítulo 5: Conclusiones y Recomendaciones 68
5.1. Consideraciones respecto a la pregunta y el objetivo 68
5.2. Limitaciones del estudio 70
5.3. Perspectivas de investigación 71
5.4. Recomendaciones generales 71
Capítulo 6: Referencias 73
Anexo 76

Lista de tablas

Tabla 1 *Línea sobre comunicación* ………………………………………………………………...19

Tabla 2 *Línea de conceptos de Gemetría Analítica* ……………………………………………..19

Tabla 3 *Uso de las tecnologías en la clase de matemática* ……………………………………..20

Tabla 4 *Participantes, equipos a los que pertenecen y tareas en las que participaron* ………..41

Tabla 5 *Cronograma de las tareas y fechas de los encuentros* ………………………………...42

Lista de figuras

Figura 1 *Experimento sobre temperatura* ……………………………………………………14

Figura 2 *Circuito y grafica* ……………………………………………………………...15

Figura 3 *Triangulación del análisis* ……………………………………………………44

Figura 4 *Gráfica de la T1-Equipo 6* ……………………………………………………45

Figura 5 *Gráfica de la T1-Equipo 2* ……………………………………………………46

Figura 6 *Gráfica de la T1-Equipo 3* ……………………………………………………46

Figura 7 *Enunciado principal de la Tarea 1* ……………………………………………47

Figura 8 *Respuesta Equipo 3 T1-P1*……………………………………………………48

Figura 9 *Respuesta Equipo 4 T1-P1* ……………………………………………………48

Figura 10 *Respuesta Equipo 6 T1-P1* …………………………………………………...48

Figura 11 *Respuesta Equipo 2 T1-P3* …………………………………………………...49

Figura 12 *Respuesta Equipo 3 T1-P3* …………………………………………………...50

Figura 13 *Respuesta Equipo 2 T1-P6* …………………………………………………...51

Figura 14 *Respuesta Equipo 3 T1-P6* …………………………………………………...51

Figura 15 *Respuesta Equipo 6 T1-P6* …………………………………………………...52

Figura 16 *Respuesta Equipo 3 T2-P1*……………………………………………………53

Figura 17 *Respuesta Equipo 5 T2-P1*……………………………………………………54

Figura 18 *Respuesta Equipo 3 T2-P1*……………………………………………………54

Figura 19 *Respuesta Equipo 3 T2-P2* …………………………………………………...56

Figura 20 *Respuesta Equipo 4 T2-P4* …………………………………………………...56

Figura 21 *Respuesta Equipo 2 T2-P5* …………………………………………………...56

Figura 22 *Respuesta Equipo 5 T2-P7* …………………………………………………...57

Figura 23 *Vista de la interfaz de Photomath desde un celular* …………………………60

Figura 24 *Respuesta Equipo 1 T3-P1 y P2* ……………………………………………...61

Figura 25 *Respuesta Equipo 5 T3-P1 y P2* …………………………………………………...61

Figura 26 *Respuesta Equipo 6 T3-P1 y P2* …………………………………………………...61

Figura 27 *Graficas de los Equipos T3* ……………………………………………………..64

Figura 28 *Grafica interfaz IPad* ………………………………………………………..64

Figura 29 *La tecnología y la comunicación como puente entre el conocimiento matemático* ….67

Siglas, acrónimos y abreviaturas

EBC	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas
EOS	Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos
ESO	Educación Secundaria Obligatoria
MEN	Ministerio de Educación Nacional
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
PEI	Proyecto Educativo Institucional
PNA	Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática
SGD	Software de Geometría Dinámica
SIATA	Sistema de Alerta Temprana del Valle de Aburra
TIC	Tecnologías de la Información y la Comunicación
ZDM	*Zentrablatt fir Didaktik der Mathematik*

Resumen

El objetivo de esta investigación es *favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje del concepto de parábola en estudiantes de grado décimo a través de la aplicación Photomath.* Para esto se definieron tres líneas que delimitaron el marco teórico, las cuales fueron comunicación en la clase de matemáticas, geometría analítica y uso de las tecnologías en la clase de matemáticas. De igual forma la recolección y el análisis de los datos se realiza en tres fases: diseño de tareas, implementación y análisis, estas son la estructura de un experimento de enseñanza, el cual hace parte de una investigación de diseño. Realizado con 13 estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Compartir, esta investigación da evidencia de como al favorecer la comunicación en las clases de matemáticas, haciendo uso de la tecnología, se enriquecen los procesos de enseñanza y las dinámicas de aprendizaje dentro del salón de clase. Para finalizar, se presentan las conclusiones y recomendaciones alrededor del objetivo planteado en esta investigación.

Palabras clave: comunicación en la clase de matemáticas, tecnología, interacciones sociales, conocimiento matemático

Abstract

The objective of this research is to promote the communication process during the learning of the concept of parabola in tenth-grade students through the Photomath application. For this, three lines were defined that delimited the theoretical framework, which were communication in mathematics class, analytical geometry, and use of technologies in mathematics class. Likewise, the collection and analysis of data is carried out in three phases: task design, implementation, and analysis, these are the structure of a teaching experiment, which is part of a design investigation. Conducted with 13 students from the tenth grade of the Share Educational Institution, this research provides evidence of how by promoting communication in mathematics classes and making use of technology, the teaching processes and learning dynamics within the classroom are enriched. Finally, the conclusions and recommendations are presented around the objective set in this research.

*Keywords***:** communication in mathematics classes, technology, social interactions, mathematical knowledge

Capítulo 1: Introducción

1.1.Descripción del contexto

En este apartado se registra la experiencia de Práctica Pedagógica que tuvo lugar en la Institución Educativa Compartir, entre agosto del 2022 y junio del 2023. La Institución Educativa Compartir está ubicada en el corregimiento de San Antonio de Prado, municipio de Medellín, es de carácter mixta, con dos jornadas mañana y tarde, cuenta con aproximadamente mil estudiantes que oscilan entre las edades de 5 a 18 años y con una planta docente de 35 profesores. La Institución tiene como modelo pedagógico el Desarrollista Social, su nivel de organización y de compromiso con la formación de sus estudiantes los ha llevado a ser reconocidos como una de las mejores instituciones obteniendo varios premios en la ciudad.

De manera particular, durante el segundo semestre del 2022 se desarrollaron tres momentos en la Institución Educativa Compartir[1]. En el primero, se participó como observador en el Club de Ciencias, este espacio fue dirigido por la profesora cooperadora con ayuda de la formadora del SIATA. Los encuentros se realizaban los viernes de 12:00 a 13:30 con estudiantes de segundo hasta undécimo grado, en donde se realizaban diferentes actividades relacionadas con la meteorología, algunas de estas fueron experimentales como observación de las nubes, sensaciones térmicas, entre otras[2]. En el segundo momento, se hizo una intervención en el curso de física del grado noveno[3], relacionando los conceptos de trayectoria y desplazamiento. Este encuentro se realizó el 19 de septiembre del 2022 y se hizo mediante la aplicación de una Guía elaborada por el profesor en formación[4]. Y en el tercer momento, se asistió al Primer Encuentro Corregimental de Profesores de Matemáticas[5] realizado en la Institución Educativa Compartir el de 13 octubre del 2022, con el propósito de fomentar el intercambio de ideas entre profesores de matemáticas del corregimiento de San Antonio de Prado. Durante el encuentro se realizó una charla sobre Educación Matemática y posteriormente los profesores asistieron a diferentes talleres con temáticas como: Comunicación, Álgebra temprana y *GeoGebra*.

[1] Ver consentimiento informado de la Institución Educativa Compartir
[2] Ver evidencias Club de Ciencias
[3] Ver intervención en el grado noveno
[4] De ahora en adelante se usará este término para hacer referenciar al autor de esta investigación.
[5] Ver imágenes del Primer Encuentro Corregimental de Profesores de Matemáticas

Sumado a lo anterior en el primer semestre del 2023 se tuvo la oportunidad de participar de un Semillero de Matemáticas con estudiantes de grado octavo y noveno[6], el cual fue un espacio creado para reforzar y afianzar temas vistos en grados anteriores. En este espacio se realizaron varias Guías desde un enfoque comunicacional buscando favorecer en los estudiantes la justificación de situaciones matemáticas y la participación en el desarrollo de la clase. Por último, durante este semestre se realizó la intervención en el aula con estudiantes del grado decimo lo cual corresponde con los datos empíricos de esta investigación.

1.2. Planteamiento del problema

En línea con el apartado anterior, durante la etapa como observador en el Club de Ciencias, fue notable que los estudiantes estaban por gusto propio y no por obligación, esto hizo que las dinámicas que se generaron fueran aprovechadas por los participantes. Son precisamente en estas intervenciones en las que se evidencia que el nivel manejado en la institución está por encima de la media de una institución educativa pública estándar, pues las respuestas que los estudiantes daban, las preguntas que hacían y la disposición con la que realizaban las actividades propuestas por la profesora daban muestra de esto. Estas conversaciones alrededor de lo enseñado son a lo que se refiere Sfard (2008), al afirmar que en las dinámicas de comunicación hay más de lo que se puede oír y que al centrar la Educación Matemática en la comunicación no solo cambiaria la forma en que se enseñan las matemáticas sino lo que se piensa sobre el aprendizaje de estas.

En el club de ciencias ocurrió algo que ejemplifica esta idea, en uno de los encuentros los estudiantes estaban recibiendo instrucciones para realizar un experimento sobre temperatura, los estudiantes tenían varios recipientes y la profesora uso la palabra “tarrito” para referirse a una botella plástica de gaseosa, pero todos los estudiantes tomaron fue un tarro (tipo envase de gel) pues para ellos esto era un “tarrito”, la profesora al darse cuenta de la confusión debió aclarar lo sucedido para poder continuar con el experimento (ver Figura 1). Acá fue evidente que para el emisor y receptor sus experiencias con el recipiente eran distintas, por eso Sfard (2008) plantea que la naturaleza del aprendizaje humano es dinámica y receptiva a las interacciones sociales, lo cual hace que sea difícil capturar completamente mediante conceptos abstractos desvinculados de su contexto, formulados mediante reglas universales.

[6] Ver imágenes Semillero de Matemáticas

Figura 1

Experimento sobre temperatura

Nota. Archivo personal del autor.

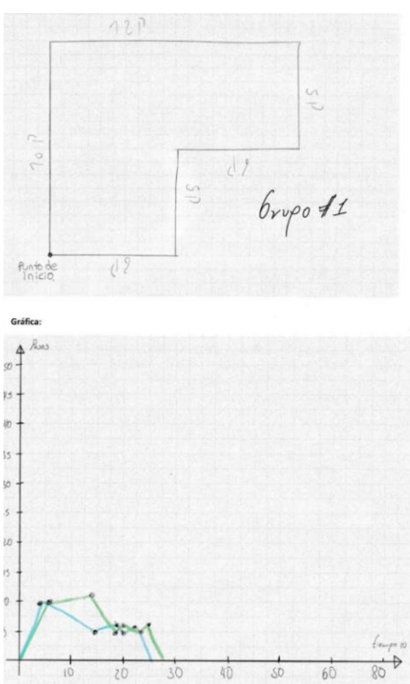
Con respecto a las dinámicas que surgen de las interacciones sociales en clase, se presentaron dos situaciones relevantes durante la realización de la actividad de Física sobre trayectoria y desplazamiento realizada en el grupo Noveno-1, que merecen ser destacadas. La primera de ellas se relaciona con una instrucción dada a los estudiantes al inicio de la actividad, sobre la calificación de la guía, se les explicó de manera explícita que dicha calificación no se basaría únicamente en la precisión de sus respuestas y procedimientos. El objetivo era fomentar un ambiente de trabajo sin la presión de obtener una calificación baja en caso de cometer errores. De hecho, se les hizo hincapié en que los errores también eran considerados importantes en la evaluación de la Guía, y se les instó a realizar cada punto dando su mejor esfuerzo.

Es importante destacar que se observó en cada uno de los estudiantes de Noveno-1 una participación activa y un compromiso por la elaboración de la Guía. Aunque ocasionalmente buscaban la orientación del profesor en formación para evaluar su progreso, la respuesta que recibían siempre fue la misma: "lo importante no es que esté bien o mal, sino que trabajen en equipo y completen la guía". Si el profesor en formación detectaba la necesidad de orientación en algún punto específico de la Guía, brindaba la asistencia correspondiente. No obstante, en general, fueron los estudiantes quienes resolvieron la Guía de manera autónoma. Lo anterior confirma lo dicho por León y Calderón (2003) quienes afirman que los entornos de clases adquieren una posición privilegiada como espacios para la construcción y expresión del conocimiento, mediante la interacción entre los actores principales: estudiantes y profesores. Los autores dejan claro que este proceso requiere un método de enseñanza que incorpore la dimensión comunicativa como un elemento clave en el proceso de adquirir conocimiento.

La segunda situación que es importante resaltar fue el uso de una aplicación que permitía al profesor proyectar desde el televisor la realización de uno de los puntos a desarrollar, si bien el profesor en formación dirigió la realización de este punto quienes lo hicieron fueron los estudiantes. El propósito de usar la aplicación era minimizar los errores en la realización de la trayectoria del circuito y su gráfica, como consecuencia de esto los estudiantes realizaron la actividad sin que el profesor en formación estuviera interviniendo frecuentemente, la pregunta que más le hacían era "¿profe vamos bien?" pero entre ellos mismos se corregían y buscaban la mejor manera de realizar la Guía (ver Figura 2). Cabe resaltar que los equipos que más discutieron entre sí y poco se pusieron de acuerdo fueron los que menos avances tuvieron en la realización de la guía.

Figura 2

Circuito y grafica



Nota. Archivo personal del autor.

En la segunda etapa como profesor de apoyo en el Semillero de Matemáticas, se realizaron tareas orientadas al manejo de las expresiones algebraicas a su vez que se reforzaban temas de grados anteriores como las operaciones aritméticas con los números reales y la solución de ecuaciones de primer grado. También hubo espacios para reforzar conceptos de geometría y plano cartesiano, haciendo uso de aplicaciones tecnológicas como *Photomath* y Geogebra. Se considera importante resaltar el uso del dispositivo *iPad* por parte del profesor, el cual facilitó la manipulación y visualización de herramientas tecnológicas. Acá se suscitaron de nuevo situaciones en las que el lenguaje usado para la comunicación en las dinámicas de clase era clave para la comprensión de lo que se buscaba enseñar. Como ejemplo de esto, en una sesión del Semillero una estudiante para indicar la medida de la altura de una botella de gaseosa dijo lo siguiente: “esa botella mide como medio litro”. Escuchar esto llama la atención debido a que la estudiante usa una magnitud que mide volumen para expresar una medida de longitud. Al dialogar con la estudiante se logra entender que ella no tenía una confusión sobre el uso de las magnitudes, sino que para ella “esa botella tenía la mitad de la altura de una botella de un litro”.

La experiencia del Club de Ciencias, sumado a la intervención de física en el grado noveno, generó interrogantes sobre las dinámicas de clase y el aprovechamiento de recursos tecnológicos con miras a enriquecer la enseñanza de los temas propuestos. ¿De qué manera se pueden emplear estos recursos en beneficio del aprendizaje de los estudiantes? Si las discusiones, comentarios y conversaciones en los espacios de enseñanza son tan importantes en este proceso, ¿Cómo poder generar más espacios de discusión y socialización en las clases? La respuesta a esta pregunta puede estar en lo dicho por Camargo (2021), la cual asevera cómo diversos autores han expresado la necesidad de un cambio radical en la investigación, alejándose de la concepción de las matemáticas como el núcleo en torno al cual giran el sistema educativo, sugiriendo situar al ciudadano aprendiz en el centro del sistema.

Lo anterior implica generar espacios de participación en las clases donde los estudiantes se puedan expresar libremente sin el temor a ser reprochados o censurados por equivocarse, que puedan ser escuchados más seguido ya que en ocasiones las clases se tornan en un espacio en el cual solo el profesor habla, pero los estudiantes no, pues están allí como receptores más que como artífices de su aprendizaje. Tal y como lo mencionan Jiménez y Espinosa (2019), quienes exponen que el paradigma tradicional de enseñanza, comúnmente abordado en los entornos educativos, se fundamenta en el enfoque de "transmisión", el cual limita al estudiante a un mero receptor de información, cuya única tarea es memorizar ideas, técnicas y procedimientos, sin tener la oportunidad de expresar opiniones, plantear preguntas o reflexionar sobre el contenido que se le exige memorizar.

De ahí la importancia de saber escoger las palabras al comunicarse, en la enseñanza de las matemáticas es común que el profesor esté hablando de un tema usando palabras específicas para enseñarlo, pero los estudiantes a su vez pueden estar dándole a esas palabras un significado diferente, por ejemplo, la palabra cuadrado puede hacer que algunos estudiantes piensen en un rectángulo, mientras que otros pensaran en un cubo. Aunque la definición de cuadrado se enseña desde los primeros años escolares, muchas veces no están claras estas palabras o conceptos, pues Bakhtin (1981) indica que el lenguaje no se presenta como un medio neutral que se apropia de manera fácil y libre por parte del hablante, sino que está impregnado de intenciones que provienen de otros.

En concordancia con las ideas mencionadas en los apartados anteriores, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje del concepto de parábola en estudiantes de grado décimo a través de la aplicación *Photomath*?

Y en respuesta a esta pregunta se plantea el siguiente objetivo:

Favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje del concepto de parábola en estudiantes de grado décimo a través de la aplicación *Photomath.*

Capítulo 2: Marco Teórico

En este capítulo se presenta la revisión de literatura y la fundamentación teórica que sustenta la comprensión de la pregunta de investigación.

2.1. Revisión de literatura

En este apartado se registra la revisión de literatura realizada en las siguientes revistas especializadas en Educación Matemática: Enseñanza de las Ciencias[7], Educación Matemática[8] y PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática[9]. De manera adicional, se hizo una revisión en la base de datos *SpringerLink*[10] en donde se consultaron las revistas: ZDM *Mathematics Education*[11] y *Educational Studies in Mathematics*[12]. Solo se tomó en cuenta publicaciones de no más de cinco años de antigüedad lo cual dejaba un rango del año 2018 a al 2023. Se consideraron los artículos que hicieran alusión de manera explícita sobre la comunicación y el uso de herramientas digitales en la clase de las matemáticas, también se incluyeron artículos que hicieran referencia al concepto de parábola o a otros conceptos geometría analítica.

Se encontraron un total de 19 artículos entre español e inglés y en un documento de *Excel* llamado ‘Matriz de revisión de literatura’[13] se organizó la información relevante de cada artículo como autores, año, titulo, objetivo de la investigación y revista. Los artículos seleccionados para el análisis se organizaron en tres líneas, la primera línea son artículos sobre comunicación, la segunda línea aborda conceptos relacionados a geometría analítica y la tercera línea son artículos sobre el uso de las tecnologías en la clase de las matemáticas. Dos artículos fueron descartados, el primero se descartó debido a el manejo que le dieron al *software* de geometría, ya que se alejaba de la geometría analítica pues se centraba más en la geometría euclidiana; el segundo artículo hace una comparación entre estudiantes que usaron herramientas digitales versus los que no las usaron, pese a que interviene un *software* en la enseñanza de temas matemáticos se alejan del propósito de la *investigación*.

[7] https://ensciencias.uab.es/
[8] https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/
[9] https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/index
[10] https://link.springer.com/
[11] https://www.springer.com/journal/11858
[12] https://www.springer.com/journal/10649
[13] Ver Matriz de revisión: https://docs.google.com/spreadsheets/d/1Qb9Y-9IC-w-UisAl-srWrfaq8we22BZ5/edit#gid=1843538217

A continuación, se presentan las Tabla 1 sobre la línea de comunicación, la Tabla 2 sobre la línea de conceptos de Geometría Analítica y la Tabla 3 sobre el uso de las tecnologías en la clase de matemáticas, las cuales resumen lo registrado en la Matriz de revisión de literatura.

Tabla 1

Línea sobre comunicación.

Autor(es) y Año	**Titulo Articulo**	**Revista**
Núria Planas. (2018)	*Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning*	*Educational Studies in Mathematics*
Rebeca Zambrano, Isabel Escudero y Eric Flores Medrano. (2019)	Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación.	Educación Matemática
Patricia Perry, Leonor Camargo, Óscar Molina y Carmen Samper. (2021)	Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula	Educación Matemática

Nota. Elaboración propia.

Tabla 2

Línea de conceptos de Geometría Analítica

Autor(es) y Año	**Titulo Articulo**	**Revista**
Abilio Orts, Salvador Llinares y Francisco José Boigues. (2018)	Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato	Enseñanza de las Ciencias
Camilo Sua Flórez y Leonor Camargo Uribe. (2019)	Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas	Educación Matemática
Crisólogo Dolores Flores y Gustavo Andrés Mosquera García. (2022)	Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas	Educación Matemática

Nota. Elaboración propia.

Tabla 3

Uso de las tecnologías en la clase de matemáticas.

Autor(es)	**Titulo Articulo**	**Revista y Año**
Marina Andrés, María Teresa Coronel, Enrique Di Rico, Juan Pablo Luna y Carmen Sessa. (2021)	El papel de las representaciones en la pantalla de GeoGebra en el trabajo matemático del aula. Investigación colaborativa en torno a la enseñanza de funciones en la Escuela Secundaria.	Educación Matemática
Alberto Arnal-Bailera y Antonio M. Oller-Marcén. (2022)	Construcciones geométricas en GeoGebra a partir de diferentes sistemas de representación: un estudio con maestros de primaria en formación	Educación Matemática
María del Mar García López, Isabel Romero, Albaladejo y Francisco Gil Cuadra. (2021)	Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición	Enseñanza De Las Ciencias
Horacio Itzcovich y Rodolfo Murúa. (2022)	Primeros contactos de un grupo de docentes de escuela primaria con GeoGebra: tensiones entre conocimientos geométricos y el uso del programa	Educación Matemática
Ana María Mántica y Magali Lucrecia Freyre. (2019)	Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular	Educación Matemática
Eliseo Pumacallahui S, Cory Ingrid Acuña Quispe, Dominga Asunción y Calcina Álvarez. (2021)	Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria en el distrito de Tambopata de la región de Madre de Dios	Educación Matemática

Carlotta Soldano, Yael Luz, Ferdinando Arzarello y Michal Yerushalmy. (2019)	*Technology-based inquiry in geometry: semantic games through the lens of variation.*	*Educational Studies in Mathematics*
Eirini Geraniou y Uffe Thomas Jankvist. (2019)	*Towards a definition of "mathematical digital competency"*	*Educational Studies in Mathematics*
Jean-Paul Fischer, Bruno Vilette, Sophie Joffredo-Lebrun, Mireille Morellato, Céline Le Normand, Calliste Scheibling-Seve y Jean François Richard (2019)	*¿Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction.*	*Educational Studies in Mathematics*
Osama Swidan, Cristina Sabena y Ferdinando Arzarello. (2020)	*Disclosure of mathematical relationshipswith a digital tool: a three layer-model of meaning.*	*Educational Studies in Mathematics*
Stephen J. Hegedus y Yenny Otálora. (2023)	*Mathematical strategies and emergence of socially mediatedmetacognition within a multi-touch Dynamic Geometry Environment*	*Educational Studies in Mathematics*

Nota. Elaboración propia.

2.1.1. *Línea sobre comunicación*

Esta línea presenta autores como Planas (2008) quien resalta las particularidades discursivas presentes en la utilización del lenguaje; seguido por Zambrano et al. (2019) quienes por medio de una secuencia didáctica analizan la comunicación entre los participantes; y Perry et al. (2021) quienes analizan la efectividad de las verbalizaciones usadas por los estudiantes durante las clases de matemáticas.

En primer lugar, Planas (2018) destaca las tensiones dialécticas y las especificaciones discursivas en el uso del lenguaje, con atención al significado potencial/realizado y compartido/no compartido. A partir de aquí, argumenta y ejemplifica que en el lenguaje siempre existe el potencial de significado compartido, así como el potencial de reconstrucción de textos, en la inmediatez de la interacción y dentro de un rango de opciones dado por el contexto de la cultura que son suficientes para facilitar nuevas formas de pensar sobre el lenguaje como recurso. Realizado en Cataluña, España con catorce estudiantes de octavo de primaria de un colegio público de diferentes culturas. La autora afirma que el pensamiento del lenguaje como recurso en la investigación en Educación Matemática ha sido más metafórico que conceptual y, como tal, el término ha sido tratado de manera imprecisa durante más de una década.

Por otra parte, Zambrano et al. (2019) presentan una secuencia didáctica cuyo objetivo es introducir el concepto de derivada a través de un fenómeno que presenta variaciones y cambios, buscando, además, la coordinación entre los registros de representación en estudiantes de bachillerato que tienen un primer acercamiento a este concepto. Realizado en México con estudiantes de tercer año de bachillerato, la secuencia didáctica permitió a los autores observar el proceso de transición de los estudiantes entre el registro verbal, gráfico, analítico y geométrico. Analizar el comportamiento de la velocidad en secciones, alrededor de un punto de inflexión y en un instante dado, les ayudó a poner atención en aspectos concretos del comportamiento gráfico (¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, crece, decrece, aceleración, velocidad promedio, velocidad en un instante), lo cual forma parte esencial de la construcción de los distintos significados del concepto de derivada.

Por último, en esta línea se destaca el trabajo de Perry et al. (2021), quienes adoptaron una estrategia investigativa “basada en prácticas usuales”, con el objetivo de contrastar la hipótesis que tenían, según la cual las verbalizaciones de los estudiantes en el aula de matemáticas suelen no ser útiles para el desarrollo del respectivo discurso, debido a rasgos intrínsecos de esas intervenciones. La investigación fue realizada en Bogotá (Colombia) con un curso de grado séptimo conformado por treinta y cinco estudiantes con edades entre 12 y 14 años. Se encontraron voces de estudiantes que tienen un potencial considerable para impulsar el discurso, sin embargo, no siempre son aprovechadas por el profesor, quizá debido a una gestión que tiene como prioridad regular la intervención de los estudiantes a costa de ejercer su papel de líder del discurso. Los autores lograron identificar expresiones auténticas surgidas y elaboradas en el curso de la conversación, lo cual se evidencia en el carácter idiosincrásico de las verbalizaciones, también notaron el recurso a la descripción y al uso de deícticos para subsanar la carencia de términos especializados, hecho que, a pesar de favorecer la expresión, dificulta la inteligibilidad y genera sobreentendidos no siempre correctos.

Los anteriores autores dejan claro no solo la importancia de la comunicación en las clases de matemáticas sino también la importancia del pensamiento o la intención detrás de cada expresión, si se busca mejorar el razonamiento y la justificación en los estudiantes es imperativo fortalecer las habilidades en la comunicación. La participación y el trabajo colaborativo entre los estudiantes es clave para que pueda gestarse en las clases de matemáticas y como se evidenció con lo realizado por Perri et al. (2021) las voces de los estudiantes tienen mucho para aportar a las dinámicas de enseñanza en los salones de clase, los profesores deben identificar este potencial y no tener miedo a perder el papel de "líder del discurso", para que así estas voces verdaderamente puedan ser aprovechadas.

2.1.2. *Línea sobre conceptos de Geometría Analítica*

En esta línea se exponen lo encontrado por Orts et al. (2018), en relación a la descripción de las formas de aprendizaje en un experimento pedagógico; Sua y Camargo (2019) que analizan la resolución de problemas por parte de estudiantes que usan el programa GeoGebra; y Dolores y Mosquera (2022) quienes hacen una comparación sobre la enseñanza de la pendiente en Colombia y lo comparan con el currículo norteamericano y mexicano.

Inicialmente, Orts et al. (2018) caracterizaron trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en estudiantes de Bachillerato en un experimento de enseñanza en España con once estudiantes de primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Los estudiantes fueron distribuidos en cinco grupos, cuatro parejas y un trío. Previamente a la participación en el experimento, los estudiantes abordaron el concepto de derivada en los libros de texto a partir de su definición como límite del cociente incremental. La investigación y los resultados obtenidos proporcionan dos tipos de contribuciones. En primer lugar, un nuevo conocimiento sobre diferentes trayectorias en el aprendizaje de la recta tangente que aporta información para el diseño de secuencias de enseñanza y aprendizaje que ayuden a los estudiantes a progresar hacia niveles de pensamiento más sofisticado. En segundo lugar, esta investigación aporta información sobre el debate en Educación Matemática acerca de los constructos de trayectoria de aprendizaje (hipotética o real) y niveles de progresión, en el sentido de integrar la perspectiva cognitiva que considera las fases en el aprendizaje conceptual en el desarrollo de las trayectorias de aprendizaje.

Por otra parte, Sua y Camargo (2019) apoyados en indicadores de génesis instrumental y razonamiento científico, analizan el proceso llevado a cabo por estos estudiantes con miras a destacar la sinergia que se produce entre el uso de herramientas y funciones de un programa computacional, específicamente GeoGebra, y el razonamiento científico que ponen en juego los estudiantes al enfrentar el problema. Con base en el análisis realizado, muestran cómo esta sinergia lleva a la conformación de un dúo que impulsa procesos propios de la actividad matemática esperada en la escuela. Esto toma lugar en Colombia con 30 estudiantes de grado noveno, en edades comprendidas entre 14 y 16 años. Los autores resaltan que la relación artefactos-individuos se estimula por los procesos de razonamiento ejecutados por los estudiantes, que son promovidos por la tarea propuesta. La naturaleza de la tarea y el desconocimiento de muchas herramientas del Software de Geometría Dinámica SGD, los llevó a contemplar estrategias de solución como parte de su actividad matemática involucrando el recurso del que disponían. La resolución del problema brindó a los estudiantes, gracias al uso del SGD, la oportunidad de experimentar e indagar, apoyándose en objetos y relaciones geométricas no todas conocidas anteriormente por ellos, de ahí que se considere la necesidad de explotar dicho dúo de manera más decidida el nivel escolar. Además, el análisis presentado deja ver la necesidad de herramientas apropiadas de las que se pueda disponer para que acciones propias del razonamiento científico puedan emerger, dada la demanda que impone realizar acciones de esta naturaleza.

Desde la perspectiva de Dolores y Mosquera (2022) el currículum colombiano tiene una tendencia marcada hacia el desarrollo del pensamiento variacional. Este trabajo aporta información acerca de cómo se prevé la enseñanza de la pendiente en Colombia, resultados que son comparados con lo que prevén al respecto del currículum norteamericano y mexicano, los resultados pueden ser útiles en las reformas curriculares para prevenir consecuencias no deseadas en el aprendizaje de este concepto. Los resultados indican que en la primaria se enfatizan las conceptualizaciones propiedad funcional y situación del mundo real, en secundaria las del coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento, en bachillerato la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción en cálculo. Esto, debido al énfasis que en él tienen las conceptualizaciones con esencia variacional como la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción del cálculo, además, en los Estándares Básicos de Competencias aparece más de cuarenta veces el término “variación” y en los Derechos Básicos de Aprendizaje más de cien veces. Con esto se sientan las bases en el currículum colombiano a partir de las cuales se posibilita el abordaje en el bachillerato de la derivada que es, en esencia, un concepto variacional y es tratado en este nivel educativo justamente como una razón de cambio y como pendiente de tangentes a curvas.

Para finalizar los autores de esta línea dejan nociones para poder diseñar momentos en las clases de matemáticas que ayuden a los estudiantes a comprender de una mejor manera los conceptos de la geometría analítica. También deja evidencia de como los estudiantes pueden llegar a construir conceptos cercanos a los que se busca que aprendan en las clases de matemáticas si se les facilitan las actividades y herramientas adecuadas para esto, teniendo siempre en cuenta las delimitaciones trazadas por los Lineamientos Curriculares del Ministerios de Educación Nacional para la enseñanza del área de matemáticas en Colombia.

2.1.3. *Línea sobre uso de las tecnologías en las clases de matemáticas*

Este apartado se presenta a Andrés et al. (2021), quienes analizan aspectos relacionados con la generación de contenido matemático por parte de los estudiantes durante el uso de las computadoras; seguido de Arnal y Oller (2020), quienes investigan el uso de GeoGebra para llevar a cabo tres métodos de construcción basados en las instrucciones presentes en dos versiones distintas de los Elementos de Euclides; García et al. (2020) explican cómo a través de un experimento de enseñanza en dos clases de educación secundaria, pudieron examinar el impacto de GeoGebra en el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas; Itzcovich y Murúa (2022) analizan los debates surgidos al comparar los procedimientos utilizados tradicionalmente por los profesores en un entorno de papel y lápiz, con aquellos empleados al utilizar un software; Mántica y Freyre (2019) se ocupan de la idea de poliedro regular al plantear una situación problemática que utiliza GeoGebra como herramienta de mediación; Pumacallahui et al. (2021) tuvieron como objetivo investigar el impacto del software GeoGebra en el proceso de aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado; Soldano et al. (2018) detallan dos variantes de una tarea de investigación en el campo de la geometría, concebida como un juego competitivo para dos participantes; Geraniou y Jankvist (2019) se apoyan en el enfoque instrumental y los campos conceptuales como marcos teóricos fundamentales para integrar las descripciones de las competencias matemáticas y digitales; Swidan et al. (2020) investigan el sentido de las matemáticas desde una perspectiva fenomenológica y exploran cómo una herramienta digital dinámica en particular puede motivar a los estudiantes a descubrir las conexiones entre una función y sus inversas; y Hegedus y Otálora (2023) exploran cómo los estudiantes de cuarto grado trabajan en colaboración para desarrollar estrategias colectivas con el objetivo de resolver problemas matemáticos utilizando software.

De un lado, Andrés et al. (2021) discuten fenómenos relativos a la producción matemática de los estudiantes cuando están trabajando con sus computadoras resolviendo problemas de funciones. Realizado en una secundaria en Argentina con estudiantes de 12 a 14, encuentran que hay estudiantes interactuando entre ellos mientras trabajan en sus computadoras, las acciones que van realizando son a menudo provocadas por los intercambios orales con los compañeros (para constatar, precisar o aún refutar lo que se está afirmando); y a la vez, los resultados de las acciones que realizan, visibles en sus pantallas, enriquecen el contenido de la discusión que se está dando. Con la intervención del profesor, los estudiantes interactúan incorporando palabras e ideas del otro, y logran establecer una coordinación entre los registros de representación en los cuales se enfocó cada uno en su interpretación. El hecho de que estén trabajando en la misma pantalla, favorece que construyan una explicación compartida sobre el comportamiento de la función. En concordancia con el enfoque didáctico, la incorporación del computador al trabajo matemático de los estudiantes debe preservar espacios importantes de producción autónoma –individual y colectiva– y permitir que ellos adquieran una posición crítica respecto de las respuestas que el software genera.

De otro lado, Arnal y Oller (2020) estudian la realización con GeoGebra de tres procedimientos de construcción hechos a partir de las instrucciones presentadas en dos ediciones diferentes de los Elementos de Euclides: la clásica y la menos conocida de Oliver Byrne. Analizan la influencia de estos sistemas de representación en la producción de construcciones correctas y en el seguimiento de las instrucciones planteadas, hecho en España con 36 estudiantes del Grado en Magisterio de Educación Primaria, los autores al considerar como variable el par (tarea, sistema de representación) logran detectar una relación significativa entre esta nueva variable y el nivel de corrección de la construcción, esto pone de manifiesto la importancia de las tareas a la hora de comprender la influencia del sistema de representación sobre la capacidad de los estudiantes para llevar a cabo la construcción correctamente. Es decir, parece que el uso de un sistema de representación u otro es más o menos adecuado no en términos absolutos, sino en función de la tarea específica en la que se utiliza. En su investigación, Fischer et al. (2019) examinan la utilización de un método específico para abordar un problema de resta verbal en estudiantes de segundo grado.

En cuanto a García et al. (2020), comentan como mediante un experimento de enseñanza en dos clases de secundaria lograron analizar la influencia de GeoGebra en el desarrollo de actitudes relacionadas con las matemáticas y de la competencia matemática en los estudiantes. El análisis cuantitativo de los datos muestra una evolución positiva en las variables estudiadas, mientras que el análisis cualitativo informa sobre cómo se produjo esta evolución, sobre las propiedades del *software* que la sustentaron y sobre la relación entre los constructos afectivos y cognitivos. Realizado en Andalucía España con clases de 3.º de ESO de un centro de educación pública, con 23 estudiantes cada una. Los autores indican que es posible capitalizar las actitudes favorables de los estudiantes hacia las matemáticas con GeoGebra, en especial la motivación y autoconfianza, para desarrollar actitudes matemáticas, inherentes a la competencia matemática. También encuentran cómo determinadas propiedades de GeoGebra permiten a los estudiantes alcanzar grados altos de perseverancia, autonomía, precisión-rigor, manejo del recurso y buen uso de las representaciones que este provee, posibilitando alcanzar niveles adecuados de flexibilidad de pensamiento, diseño de estrategias para resolver problemas y matematización en la mayoría de estudiantes.

Itzcovich y Murúa (2022) comparten y analizan los debates manifestados en las primeras clases al establecer relaciones entre procedimientos que usualmente los profesores ponen en juego en un entorno de lápiz y papel con los desplegados al utilizar dicho *software*. Los autores dan cuenta de las tensiones que se produjeron al incluir el “arrastre” de los elementos de un dibujo elaborado con GeoGebra, como parte de las nuevas condiciones de trabajo. Advierten acerca de la necesidad de generar un espacio de negociación en el aula en relación con el movimiento de los dibujos y también sobre cómo abordar la noción del “arrastre” a partir de las producciones de los estudiantes. Se identificaron las potencialidades que podría adquirir el movimiento de los dibujos realizados con GeoGebra, y su relación con las propiedades que verifican ciertas figuras. Un aspecto que circuló a lo largo de todas las clases del Seminario es la relación entre dibujo y figura y cómo se entrelazan estos dos conceptos en un entorno de geometría dinámica.

Por otra parte, Mántica y Freyre (2019) abordan la noción de poliedro regular elaborando una situación problemática mediada por GeoGebra, dadas las ventajas que proporciona este entorno dinámico en cuanto al trabajo con figuras tridimensionales, dicho entorno permite obtener una multiplicidad de casos con una única construcción si se utilizan propiedades geométricas. El estudio se realizó en Santa Fe (Argentina) con estudiantes del profesorado en matemática de la

Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL[14]. El uso de SGD permite a los estudiantes explorar las particularidades de la figura tridimensional construida analizándola desde distintos puntos de vista, por ejemplo, pueden determinar la cantidad de caras que concurren en un vértice, entre otras condiciones. Las herramientas que ofrece el software brindan aspectos que favorecen la elaboración de argumentos que justifiquen los procedimientos de resolución lo que superaría inconsistencias entre los criterios utilizados en la resolución y aquellos que son verbalizados dado que al utilizar una herramienta determinada del software queda expuesta la propiedad y concepto involucrados. Con respecto al software GeoGebra la herramienta Tetraedro, por ejemplo, refiere a la construcción de un tetraedro regular lo que podría limitar a los estudiantes a pensar que un tetraedro siempre es regular.

Pumacallahui et al. (2021) buscan determinar la influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de educación secundaria en Perú. Es importante señalar, que los resultados cuantitativos, son considerados una evidencia sólida para dialogar con instancias decisivas en la innovación curricular y particularmente en la integración de GeoGebra –como ejemplo de SGD para su inclusión en el corto, mediano y largo plazo en la enseñanza de la geometría. Resulta necesario realizar más trabajos de investigación sobre el uso del software GeoGebra y la forma en que puede ser incorporado en las estrategias de enseñanza utilizadas por los profesores en la enseñanza de la geometría y en otras asignaturas, que forman parte del programa curricular de Educación Secundaria. De manera general, el aporte de este estudio es mostrar la necesidad de incorporar al proceso de enseñanza de la geometría, el software GeoGebra, pues ofrece resultados en el aprendizaje de los estudiantes y sugiere al profesor de matemáticas, que se trata de un recurso didáctico con potencialidad para estudiar la geometría de manera dinámica.

En cuanto a Soldano et al. (2018), describen dos versiones de una actividad basada en la investigación en geometría, diseñada como un juego entre dos jugadores. El diseño está inspirado en el juego semántico de Hintikka, que es una herramienta familiar en el campo de la lógica para definir la verdad y se realizó en un entorno de SGD. Aplicado en estudiantes de grado noveno y décimo grado, los hallazgos muestran que los estudiantes que participaron en la actividad desarrollaron formas de razonamiento estratégico que les ayudaron a descubrir la configuración ganadora, formular declaraciones si-entonces y validar o refutar conjeturas. La automatización del

[14] Universidad Nacional del Litoral

análisis crea nuevas oportunidades de investigación para analizar y evaluar los procesos de indagación de los estudiantes y hace posible una amplia experimentación sobre la adquisición de conocimiento basada en la indagación. En conclusión, este tipo de actividad ayuda a formular y comprobar conjeturas y sistematizarlas según una lógica de tipo visual y para demostrar el teorema, los estudiantes deben desarrollar su razonamiento sobre lo que se conoce como axiomas o teoremas. Los autores afirman que, si los estudiantes desarrollan habilidades lógicas visuales, podrán comprender mejor la lógica que sustenta la demostración de los teoremas.

Geraniou y Jankvist (2019) fundamentan su estudio en dos marcos teóricos: el enfoque instrumental y los campos conceptuales, para "unir" las descripciones de las competencias matemáticas y digitales. Realizado en Holanda con estudiantes de último año de educación secundaria (de 17 a 18 años). Los autores afirman que tanto las competencias matemáticas como las competencias digitales se activan al mismo tiempo en una situación de enseñanza y aprendizaje. No se podría haber resuelto la tarea de la misma manera sin competencias y conocimiento matemático y ni sin las competencias y conocimiento de la herramienta digital. En particular, mostraron un uso reflexivo de la tecnología digital, también con respecto a las capacidades y limitaciones de la herramienta.

Fischer et al. (2019) analizan el uso de un procedimiento para resolver un problema de resta verbal en estudiantes de segundo grado. Se dividió a 4.720 estudiantes franceses en un grupo de control y un grupo experimental, donde se enseñaba o no se enseñaba el algoritmo escrito estándar. Se evaluó la efectividad del uso del algoritmo en términos de precisión de respuestas, elección correcta de la operación aritmética y habilidad de los estudiantes. Se sugiere que el tiempo ahorrado al no enseñar los algoritmos podría dedicarse al entrenamiento en cálculo mental, lo que podría mejorar la resolución de problemas aritméticos y evitar efectos negativos del algoritmo. La investigación revela que el uso del algoritmo por parte de los estudiantes aumenta la elección errónea de la operación aritmética, como en el caso de sumar en lugar de restar.

Swidan et al. (2020) examinan el significado de las matemáticas desde una perspectiva fenomenológica y consideran como una herramienta digital dinámica específica puede incitar a los estudiantes a revelar las relaciones entre una función y sus antidimios. Basándose en la metodología de estudio de caso, los autores se centran en un par de estudiantes de grado 11 y analizan cómo las posibilidades de la herramienta y la participación de los estudiantes en los procesos interrogativos de cuestionamiento y respuesta secuenciales les permiten dar sentido a los objetos matemáticos y sus relaciones y, por último, de la actividad matemática en la que están comprometidos. Surge un modelo de significado de tres capas del proceso de revelación de los estudiantes, a saber, (a) revelación de objetos, (b) revelación de relaciones y (c) revelación de relaciones funcionales. El modelo de capas de significado debe explotarse y estudiarse más como una herramienta para planificar actividades educativas y discusiones en el aula en una amplia gama de temas matemáticos y modos de pensar sobre objetos matemáticos como en el caso del razonamiento co-variacional. Incitar a los estudiantes a familiarizarse con las diferentes capas de significado puede ser una herramienta metodológica que esgrimen los profesores a través de sus acciones en el aula.

Por último, Hegedus y Otálora (2023) estudian las formas en que los estudiantes de cuarto grado crean en colaboración estrategias colectivas para resolver problemas matemáticos utilizando un Software de Geometría Dinámica con interfaces multitáctiles, una combinación que llaman Entorno de Geometría Dinámica multitáctil. Examinan en profundidad dos estudios de casos, cada uno de los cuales ilustra cómo las estrategias matemáticas, la colaboración y la metacognición socialmente mediada emergen en los pequeños grupos de niños mientras trabajan en una actividad utilizando *Geometer's Sketchpad* en el *iPad* para dar sentido a una idea intuitiva de covariación. A pesar de las diferencias en la exploración de tareas, los autores encontraron que ambos equipos crearon y mejoraron estrategias colectivas como producto de la colaboración y la metacognición mediada socialmente durante un período de tiempo corto. En cuanto a la metacognición socialmente mediada, la retroalimentación visual-dinámica del SGD favoreció la conciencia grupal, permitiendo a los niños monitorear sus estrategias y desarrollar una solución más efectiva. Los niños exploraron y reflexionaron sobre los resultados de sus propias acciones en la pantalla, conjeturaron y probaron, y analizaron las propiedades de la forma geométrica a través de sus propias acciones coordinadas. La metacognición fue un proceso clave para que los niños co-crearan estrategias colectivas, así como también para la transición de las estrategias iniciales a las más avanzadas.

A manera de conclusión de esta línea, se resalta como es esencial en el desarrollo de la pregunta de investigación debido al enfoque que la misma tiene respecto al uso de los SGD en las clases de matemáticas en los artículos revisados quedaron registradas las situaciones que se pueden presentar cuando estas herramientas son implementadas en las aulas de clase, dando entonces nociones de lo que se puede llegar a enfrentar un profesor en el aula de clase si busca hacer uso de los SGD. Los autores presentan evidencia de las ventajas y desventajas que el uso de esta tecnología al momento de ser implementada y de cómo tanto profesores como estudiantes pueden beneficiarse de esta en la medida que desarrollen un mejor manejo y comprensión de estos softwares.

2.2. Fundamentación teórica

A continuación, se expone la fundamentación teórica que se compone de cuatro líneas, la primera es sobre la comunicación en la clase de matemáticas que se fundamenta en el MEN (1998), *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2003), Sfard (2008), Jiménez y Pineda (2013) y Sfard y Cobb (2014); la segunda línea retoma algunas ideas de la geometría analítica (MEN, 1998; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2003). Por otro lado, la tercera línea aborda el uso de las tecnologías en la clase de matemáticas (MEN, 1998; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2003) y para finalizar como cuarta línea se abordan los niveles de algebrización (Godino et al. 2015; Aké y Godino 2018).

2.2.1. *Comunicación en clase de matemáticas*

En esta línea se presenta la fundamentación teórica que retoma asuntos de la comunicación en la clase de matemáticas (MEN, 1998; NCTM, 2003). En segunda instancia, se retoma la definición de comunicación desde los planteamientos de Sfard (2008), para posteriormente abordar los dos enfoques del aprendizaje por Sfard y Cobb (2014) y su incidencia dentro de la comunicación en el aprendizaje de las matemáticas. Para finalizar, se hace mención de los ambientes centrados en las estrategias de comunicación y de cómo el lenguaje en un factor clave dentro de las dinámicas del aprendizaje basadas en espacios de participación según Jiménez y Pineda (2013).

En línea con el MEN (1998) se concibe que la comunicación es clave a la hora de la enseñanza de las matemáticas escolares siendo esta parte de los cinco procesos generales que conforman los tres grandes aspectos del quehacer matemático. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas indican la importancia de traer a las dinámicas de enseñanza actividades que relacionen el contenido a enseñar con las experiencias cotidianas de los estudiantes, propiciando así situaciones problema que generen el intercambio de ideas y posturas por medio de la comunicación.

A su vez los profesores de matemáticas como mediadores en el proceso de enseñanza, necesitan prestar mayor atención a lo que los estudiantes hablan dentro de las clases, lo que ellos dicen entender y no entender, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y sobre cómo se les enseñan, escuchar sus dudas y hasta escuchar lo que no dicen, para poder saber de qué forma están viendo, pensando y razonando las matemáticas y así guiar de manera más efectiva el uso del lenguaje matemático y el desarrollo de las habilidades de la comunicación en los estudiantes. Es por esto que el MEN (1998) menciona que "la comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas" (p.75).

Desde la perspectiva de los NCTM (2003) la comunicación "es un camino para compartir y aclarar las ideas" (p.64). La comunicación se convierte en esa vía por la cual transita lo que se piensa, lo que se siente y lo que se cree, es el medio por el cual se exterioriza lo que ocurre en el interior de cada estudiante a la hora de aprender. Por esto los NCTM plantean la importancia de fomentar en los estudiantes la comunicación, ya sea escrita u oral de forma que puedan transmitir lo que piensan y razonan sobre las matemáticas, esto permitirá a los estudiantes a ser acertados y elocuentes al momento de comunicar sus ideas. Por otro lado, cuando los estudiantes prestan atención a las explicaciones de sus compañeros acerca de lo que han comprendido, se crea un espacio propicio para el desarrollo de su propia comprensión. Al explorar las ideas matemáticas desde diferentes perspectivas, se brinda la oportunidad a los participantes de compartir sus propios pensamientos y establecer conexiones, lo cual fortalecerá el proceso de aprendizaje.

En concordancia con los documentos rectores, Sfard (2008) plantea que la comunicación "es una actividad en la que alguien trata de hacer sentir o actuar a su interlocutor de una manera determinada" (p. 77). En este contexto, se puede considerar que la comunicación ha sido exitosa si el emisor logra generar alguna reacción en el receptor, es decir, si la acción busca lograr un entendimiento por parte del hablante, aunque esta intención no necesariamente tenga que ser evidente o pública. Es importante destacar que, el propósito del hablante suele ser general, lo que implica que puede haber más de una reacción en respuesta desde la perspectiva e intención del emisor. Sfard (2008) indica que una respuesta que difiriera de lo que el emisor desea escuchar puede ser considerada como referente de comunicación eficaz.

Por otra parte Sfard (2008) comenta que la comunicación debe verse como el pensamiento mismo y no como algo secundario en el proceso cognitivo, dicho esto la comunicación toma un papel mucho más relevante a la hora de aprender, no solamente es hablar o escuchar, es todo lo que hay alrededor de esta dinámica dentro de los salones de clase, los lenguajes verbales y no verbales, los discursos y puntos de vista, experiencias y contexto, lo que para el profesor puede significar una palabra para los estudiantes puede tener otro significado, y así sin darse cuenta a pesar de que hay un diálogo entre las partes lo que cada una está entendiendo puede ser muy diferente. Por ello, la eficacia en la comunicación depende de la claridad del foco discursivo, siendo este foco lo que es percibido o interpretado por los individuos que se comunican.

Por otro lado, es importante destacar que Sfard y Cobb (2014) plantean dos enfoques dentro de las dinámicas de aprendizaje de las matemáticas, como el adquisitivo y el participacionista. El enfoque adquisitivo describe las matemáticas como configuraciones y procesos establecidos previamente y ve el aprendizaje de las matemáticas como la adquisición de estas configuraciones y procesos. Esta adquisición de conocimientos, esquemas o concepciones se puede dar de forma pasiva, en donde simplemente se transmite una información al estudiante que hace de receptor, o activa donde el estudiante logra esta adquisición por sus propios esfuerzos. El enfoque adquisitivo sostiene que las matemáticas fueron descubiertas o construidas por matemáticos y que son un cuerpo externo de conocimiento que el estudiante adquiere o reconstruye.

Mientras tanto, el enfoque participacionista describe las matemáticas como algo inherente a la actividad humana más que como algo que se debe adquirir, por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas se da como resultado de la interacción social, en contraste con el enfoque adquisitivo el participacionista sostiene que las matemáticas son una de las muchas formas de cómo la sociedad hace las cosas, la cuales han venido evolucionando y siguen experimentando cambios. Sfard y Cobb (2014) encontraron que la investigación en Educación Matemática es particularmente importante para las ciencias del aprendizaje, porque desafía el enfoque adquisitivo y contribuye a introducir y desarrollar el enfoque participacionista. Para este trabajo se hará uso de los dos enfoques siendo el participacionista el más relevante en la investigación.

Aunada a lo anterior, Jiménez y Pineda (2013) resaltan la importancia de los ambientes centrados en las estrategias de comunicación, en los cuales el lenguaje es esa práctica social que enriquece la conversación y reflexión constante entre profesores y estudiantes. La comunicación es entonces un proceso de interacción social en la cual lo que dice el otro debe ser tenido en cuenta, debido a la estrecha relación que hay entre lenguaje y comunicación, el lenguaje es un factor que influye en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es pertinente que en estos espacios de enseñanza haya una comunicación fundamentada en la interacción social de manera que los estudiantes tengan la posibilidad de expresarse y decir lo que piensan. El profesor tiene entonces la responsabilidad de reflexionar sobre su práctica en clase y de esta forma analizar cómo puede propiciar espacios adecuados para la interacción entre quienes participan en estos espacios de aprendizaje.

2.2.2. *Geometría analítica*

En esta línea, se presenta la fundamentación teórica basada en los planteamientos del MEN (1998) y los NCTM (2003). Estos documentos rectores hablan de la función cuadrática sugiriendo cómo abordar su enseñanza en los espacios de aprendizaje. En primer lugar, se introduce la noción de función de manera general y sus representaciones desde los enfoques variacional y algebraico incluidos en el MEN (1998). A continuación, los NCTM (2003) indican las competencias que se desarrollan durante el aprendizaje de la función y brindan directrices para su enseñanza. Finalmente, se presentan ejemplos concretos sobre cómo abordar la enseñanza de la función cuadrática.

En los documentos del MEN (1998), se establece que la función forma parte del pensamiento variacional y de los sistemas algebraicos y analíticos, siendo uno de los conceptos centrales en los que se implica la variación. La relación entre dos conjuntos de datos organizados en una tabla se convierte en el punto de partida para el estudio de la función, lo que permite visualizarla como una representación numérica y facilita al estudiante la comprensión de la variable y la escritura de expresiones algebraicas que describan la variación y el cambio. La tabla también guía a los estudiantes en la graficación de eventos concretos y facilita la identificación de la variable independiente y dependiente.

Igualmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) mencionan que las gráficas cartesianas hacen fácil el estudio dinámico de la variación y el planteamiento de los aspectos de la dependencia entre variables dando paso a la noción de función como dependencia. El contexto en el que emerge la idea de función está determinado por las relaciones entre eventos cambiantes, por lo tanto, la función actúa como instrumento de conocimiento necesario para conectar estos patrones de variación dado entre magnitudes, permitiendo predecir y controlar estos cambios. Las gráficas también facilitan el análisis de las formas más básicas de la función como la lineal o la cuadrática, entre otras, que contienen patrones de variación como la proporcionalidad o características asociadas a su dominio y rango como lo es si son crecientes y decrecientes.

Acorde a lo anterior, los NCTM (2003) indican que los estudiantes de secundaria deben estar en la capacidad de entender las relaciones entre tablas, gráficos e imágenes, teniendo en cuenta las ventajas y desventajas de cada una de estas formas de representar las relaciones, según sea su caso, y así desarrollar en ellos una mejor comprensión de las funciones. A partir de su conocimiento sobre las funciones, se deben tener la facultad para decidir si una situación se puede representar por medio de una función lineal o una función cuadrática y de analizar esta situación para obtener conclusiones según la función. Se sugiere la recopilación de datos mediante experimentos físicos y la manipulación de estos a través de software que generen tablas, gráficas y ecuaciones, argumentando que esta tecnología permite tener una comprensión más amplia de las funciones y sus diferentes representaciones. También se señala que los estudiantes de secundaria deben tener la posibilidad de indagar más en el conocimiento de las relaciones y funciones, ampliando el catálogo de funciones familiares, este amplio repertorio para modelizar situaciones matemáticamente suministra recursos significativos y versátiles a los estudiantes que les permite describir y analizar su entorno. A su vez trabajar en escenarios reales ayuda a dar significado a los conceptos matemáticos implícitos en las funciones favoreciendo al mismo tiempo la valoración de esos conceptos. Lo visto en Álgebra en la secundaria debe dar herramientas a los estudiantes para hacer frente a la modelación de situaciones reales permitiéndoles utilizar y elaborar tablas, gráficas e imágenes para analizar y entender relaciones, patrones y funciones con un mayor grado de complejidad que en los niveles anteriores.

En cuanto a las funciones cuadráticas, los NCTM (2003) proponen generar tareas que permitan explorar las diferentes propiedades de la función, llevando a los estudiantes a reconocer que la expresión $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es cuadrática, que la gráfica es una parábola y qué si el coeficiente de x^2 es negativo, ésta "abre hacia abajo"; que cuando la gráfica no corta al eje x la solución de la ecuación cuadrática son raíces complejas. Asimismo, plantea tareas que ayuden a identificar los cambios que ocurren en la gráfica al manipular los parámetros de la función cuadrática, apoyándose en el uso de calculadoras o programas que manejen estas expresiones calculando los valores de la función o encontrando las soluciones de la ecuación, generando también su gráfica para que los estudiantes visualicen el resultado de cambiar estos parámetros y así haya una mejor comprensión la función.

2.2.3. *Uso de las tecnologías en las clases de matemáticas*

En esta tercera línea se presenta la fundamentación teórica que expone los resultados sobre el uso de las tecnologías en las clases de matemáticas, primero en el MEN (1998) se plantea cómo estas tecnologías impactan de forma positiva la enseñanza dejando claro que es importante tener un fundamento teórico antes de su uso, luego los NCTM (2003) en sintonía con el MEN presenta las ventajas del uso de la tecnología como software de Geometría dinámica.

El uso de las nuevas tecnologías y el impacto de estas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es abordado por el MEN (1998) como algo que precede a el conocimiento matemático de manera que el implemento de las calculadoras y los computadores pueda generar un conocimiento significativo. Es claro que el usar estas herramientas tecnológicas facilitan los cálculos mentales y hasta los sobrepasa, por tal razón su implementación en los procesos de aprendizaje debe de estar dirigido a la compresión de los procesos matemáticos y no a la automatización de tareas complejas. En el caso de las funciones las calculadoras gráficas son un instrumento potente para la comprensión y el análisis por la velocidad de respuesta que estas manejan y la utilidad dada a dichas respuestas en el análisis de conceptos relacionados con la situación que se esté modelando.

Por su parte los NCTM (2003) indican que la tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, calculadoras y ordenadores desempeñan un papel fundamental. Estas herramientas esenciales brindan representaciones visuales de conceptos matemáticos, simplifican la organización y análisis de datos, y realizan cálculos de manera eficiente y precisa. Además, apoyan la investigación de los estudiantes en diversas áreas temáticas como Geometría, Estadística, Álgebra, Medición y Números. Al contar con estas herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden enfocarse en la toma de decisiones, la reflexión y la resolución de problemas. Los estudiantes mediante la correcta utilización de la tecnología, tienen la oportunidad de adquirir un mayor conocimiento y comprensión en el campo de las matemáticas.

En este sentido las calculadoras y computadoras tienen la capacidad de examinar una mayor cantidad de representaciones o ejemplos de los que son posibles hacer a mano. Esto permite a los estudiantes formular y explorar conjeturas de manera más fácil y efectiva. Gracias a la capacidad gráfica de los dispositivos tecnológicos, los estudiantes pueden acceder a modelos que normalmente no serían capaces de crear estos por sí mismos o simplemente no tendrían disposición de hacerlo. La capacidad de los recursos tecnológicos para calcular amplía la gama de problemas que los estudiantes pueden abordar, brindándoles la habilidad de llevar a cabo tareas rutinarias de manera rápida y segura.

Para finalizar, los NCTM (2003) precisan que la tecnología tiene un impacto no solo en los métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino también en el contenido y el momento en que se introduce un tema en el currículo. Al contar con tecnología, los estudiantes de los primeros grados tienen la capacidad de explorar y resolver problemas que involucran números grandes, así como investigar las características de las figuras a través de programas de Geometría Dinámica. Incluso los estudiantes de escuela primaria pueden organizar y analizar conjuntos de datos extensos. Por otro lado, los estudiantes de niveles más avanzados pueden estudiar las relaciones lineales, la pendiente y la variación a través de representaciones en el ordenador, así como realizar experimentos físicos utilizando laboratorios mediados por la tecnología.

2.2.4. *Niveles de algebrización*

Como última línea de fundamentación teórica se presentan los seis niveles de algebrización abordados del cero al tres por Aké y Godino (2018) y del cuatro al seis serán abordados por Godino et al. (2015).

Los seis niveles de algebrización se estructuran desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemáticos EOS[15]; Aké y Godino (2018) plantean que son parámetros que ayudan a identificar entre actividades matemáticas no algebraicas, proto-algebraicas y algebraicas. En el nivel cero se trabaja con elementos específicos utilizando el lenguajes natural, numérico, icónico y gestual; tiene dos tipos de tareas, estructurales y funcionales, la primera no tiene ningún patrón o regla la segunda sí. El nivel uno es el inicio del desarrollo del pensamiento relacional a través de los primeros pasos en este ámbito, es el primer acercamiento al "número general" implica la identificación de propiedades generales de las estructuras algebraicas, así como comprender la igualdad como una relación de equivalencia. El nivel dos tiene el primer contacto con la representación alfanumérica de ecuaciones y funciones, también se simplifican términos semejantes. Para el nivel tres ya hay un tratamiento de las incógnitas y variables por medio de propiedades estructurales y de la modelización algebraica y funcional.

Godino et al. (2015) aportan los niveles restantes, el nivel cuatro presenta elementos como registros numéricos y la utilización de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones, se relaciona con la habilidad de "operar con incógnitas o variables", este nivel conlleva la capacidad de discriminar el dominio y rango de una función paramétrica. El nivel cinco se

[15] Ver sitio oficial del EOS http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/

alcanza al realizar cálculos analíticos que involucran parámetros y variables, las operaciones y las relaciones establecidas entre los parámetros implican una complejidad más alta, ya que ponen en juego los objetos algebraicos del nivel anterior, como las familias de ecuaciones y funciones. El ultimo nivel el seis surge para poder abordar la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática ya que presentan conceptos de estructuras algebraicas como el espacio vectorial o la de grupo, así como el estudio del álgebra de funciones que implica operaciones entre estas.

Capítulo 3: Metodología

En este capítulo se abordará la metodología utilizada para este trabajo de investigación. Se describirán las estrategias y los pasos seguidos para llevar a cabo la recolección y análisis de datos. Además, este capítulo proporciona una visión detallada de cómo se exploró y comprendió la pregunta que dio origen a esta investigación a través de la interpretación y la interacción directa con el entorno de estudio.

3.1. Paradigma y enfoque

Este trabajo está enmarcado en el paradigma cualitativo (Hernández et al., 2014), ya que se busca comprender el fenómeno en el momento mismo en el cual sucede, esto es en la clase de matemáticas, pues cada persona, o conjunto de personas, posee una perspectiva singular para interpretar el medio que les rodea y comprender así las diversas situaciones y eventos a los cuales están expuestos. El enfoque cualitativo brinda la plataforma adecuada para la recolección, análisis y uso de los datos obtenidos en cada una de las intervenciones realizadas. Estos datos, en lo posible, darán descripciones detalladas de las personas, situaciones, acciones e interacciones suscitadas dentro de la clase de matemáticas. Por otro lado, Bisquerra (2009) menciona que el paradigma cualitativo permite acercarse a la realidad de forma directa considerando sus diferentes ángulos y perspectivas.

El paradigma cualitativo se complementa con el enfoque interpretativo (Hernández et al., 2014), el cual permite que frente a cada intervención con los estudiantes se realice un análisis detallado de los hechos ocurridos, esto gracias a que el investigador está ahí en medio del lugar de los hechos observando y recopilando la información, redirigiendo de esta manera la próxima intervención con miras refinar las preguntas a realizar a los estudiantes y de esta forma poder acercarse más al objetivo de la investigación o así mismo revelar nuevos interrogantes alrededor de la comunicación y las dinámicas de aprendizaje dentro de la enseñanza de las matemáticas.

3.2. Estrategia investigativa

En concordancia a lo anterior, la investigación de diseño es la estrategia que más se ajusta a las intenciones de esta investigación. Gravemeijer y Prediger (2019) plantean que la investigación de diseño tiene como objetivo generar espacios para que los estudiantes tengan disposición en la enseñanza y en el aprendizaje. De esta forma el investigador buscará comprender qué activa estos procesos de enseñanza y aprendizaje y qué resultados produce en los estudiantes. De igual forma estos autores indican como la investigación de diseño tiene una estructura general que consta de tres fases, las cuales son: primero diseñar tareas orientadas de acuerdo con los objetivos de aprendizaje, segundo implementar estas tareas y observar lo que sucede en el salón de clase y tercero analizar lo ocurrido para contrastarlo con lo que se esperaba.

En línea con lo anterior, el experimento de enseñanza será la forma con la cual se hará la intervención en la clase de matemáticas, pues esta estrategia es efectiva cuando "se quiere observar el proceso de aprendizaje matemático en vivo y analizar aspectos de este para ganar claridad sobre la naturaleza de los significados construidos por los estudiantes" (Camargo, 2021, p.86).

Lo anterior delimitó las fases en las que se desarrolló esta investigación, las cuales se dividen en tres:

Fase 1: El profesor en formación diseñó tareas con el objetivo de favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje del concepto de parábola en estudiantes de grado décimo a través de la aplicación *Photomath*, estas eran compartidas en el curso de Práctica Pedagógica para que el profesor y los compañeros de curso enriquecieran las tareas con sus apreciaciones.

Fase 2: Aplicación de las tareas en el grado décimo de la Institución Educativa Compartir. Después de cada intervención nuevamente se compartía con el curso de Práctica Pedagógica lo sucedido para así ajustar la siguiente tarea si esta lo requiriera.

Fase 3: Análisis de resultados, lo cual corresponde al Capítulo 4 de esta investigación.

3.3. Participantes de la investigación

Esta investigación fue realizada en la Institución Educativa Compartir con un grupo de 13 estudiantes pertenecientes al grado décimo. Estos participantes son la mitad de dicho grupo, pues la otra mitad fue tomada por otra profesora en formación. Se considera importante aclarar que el grupo 10°3 fue propuesto por la coordinadora de la institución para estas intervenciones, debido a que este grupo tenía bajo rendimiento académico en las asignaturas de matemáticas y física. Los participantes fueron organizados en cinco equipos de dos estudiantes y un equipo de tres, los cuales realizaron las tres tareas propuestas por el profesor en formación. En la Tabla 4 está organizada esta información por participantes, equipos a los que pertenecen y tareas en las que participaron.

Tabla 4

Participantes, equipos a los que pertenecen y tareas en las que participaron.

Equipos	Integrantes	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
1	Ana Verónica	X	X	X
2	Cristina Daniela	X	X	X
3	Juanita Sara	X	X	
4	Cielo Clara	X	X	
5	Lina Santiago Angelica	X	X	X
6	Sebastián Alejandro	X	X	X

Nota. Elaboración propia.

Se hace la aclaración que con el fin de proteger la identidad de los participantes los nombres contenidos en la tabla son seudónimos. También se considera pertinente aclarar que los Equipos 3 y 4 sí estuvieron presentes en la realización de la Tarea 3 pero no lograron terminarla, esto se comentará con más detalle en el Capítulo 4.

Este trabajo de investigación tomó en cuenta las consideraciones éticas para su desarrollo, solicitando previamente los permisos necesarios para estar en la institución, también se realizó el respectivo consentimiento informado[16], que permitía la intervención con los estudiantes del grado 10°3 de la Institución Educativa Compartir. Por medio de este consentimiento informado, a los estudiantes que participaron de la investigación les quedó claro las intenciones de la misma y a su vez mediante su firma autorizaron el uso de los datos recolectados al realizar las tareas propuestas para fines de esta investigación.

[16] Ver consentimiento informado de los participantes

3.4. Descripción de las tareas

Las tareas realizadas para esta investigación fueron diseñadas con el propósito de favorecer la comunicación en la clase de matemáticas y se aplicaron en dos encuentros, el primero tuvo lugar el 28 de abril del 2023 en donde se aplicó la Tarea 1, la cual buscaba afianzar los conceptos de trayectoria y variable a través del lanzamiento de esferas de diferente tamaño y material para que posteriormente los estudiantes dibujaran las trayectorias obtenidas y luego respondieran unas preguntas orientadas a los conceptos que se buscaban afianzar.

El segundo encuentro tuvo lugar el 12 de mayo del 2023, en este se aplicó la Tarea 2 que tenía como objetivo familiarizar a los estudiantes con el software de geometría dinámica *Photomath* para esto debían solucionar una serie de preguntas sobre el comportamiento de la gráfica de la función cuadrática, esto apoyándose en el software. La Tarea 3 también se aplicó este día, esta tarea planteaba una situación real la cual se modelaba por medio de una función cuadrática, el objetivo era que los estudiantes usando *Photomath* dieran solución a las preguntas allí contenidas. Se considera pertinente hacer la siguiente aclaración, de los 6 equipos participantes hasta el momento solo 3 realizaron esta tarea los otros tres equipos se retiraron debido a una situación ajena a esta investigación.

Lo anteriormente mencionado se encuentra registrado en la Tabla 3, la cual contiene las tareas que se realizaron[17] junto con su cronograma de aplicación.

Tabla 5

Cronograma de las tareas y fechas de los encuentros

Encuentros	Fechas	Tareas
1	28 de abril de 2023	Tarea 1. Trayectoria y variables del lanzamiento de una esfera. Se les solicito a los estudiantes buscar 4 formas diferentes de encestar la esfera, esperando que así se generaran 4 trayectorias diferentes, estas trayectorias debían ser dibujadas en la guía que se les entrego y allí mismo responder las preguntas orientadas a trayectoria y variable.
2	12 de mayo de 2023	Tarea 2. Usar la aplicación *Photomath* para realizar graficas de funciones cuadráticas.

[17] Ver tareas implementadas

	En esta tarea los estudiantes debían introducir en la aplicación *Photomath* diferentes funciones cuadráticas para posteriormente graficarlas en la guía y responder las preguntas allí planteadas con relación a los cambios que cada grafica presentaba con respecto a la anterior. Tarea 3. Análisis de un lanzamiento parabólico por medio de la aplicación *Photomath.* Para esta tarea los estudiantes tenían que resolver las preguntas habituales en torno a un lanzamiento parabólico, tales como altura máxima, alcance horizontal, entre otras. Estas se debían sustraer de la información suministrada por *Photomath* al introducir la expresión cuadrática que modelaba el movimiento parabólico.

Fuente. Elaboración propia.

Las tareas descritas anteriormente proporcionaron la información para realizar el análisis de esta investigación el cual gira en torno a los procesos de comunicación que resultan de la enseñanza del concepto de parábola.

3.5. Técnicas, instrumentos y estructura del análisis

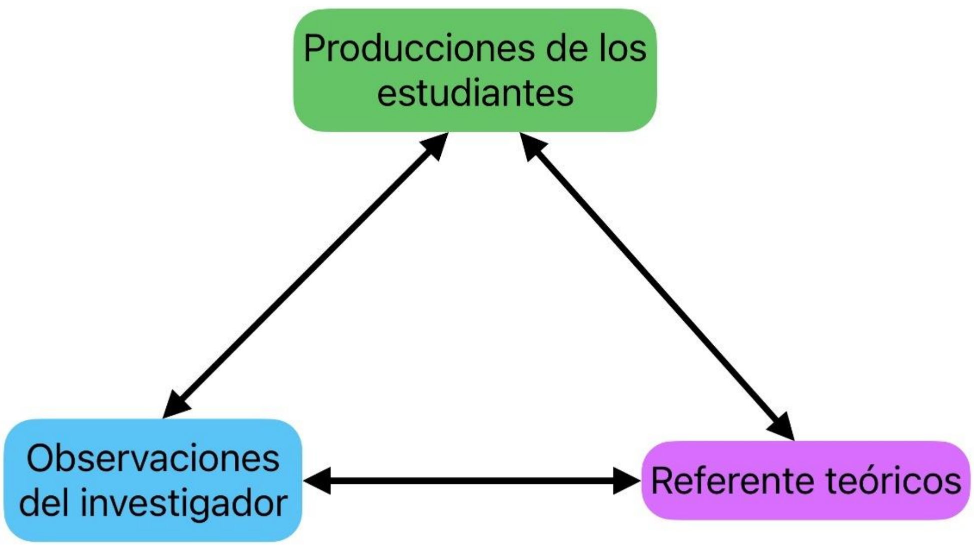
La observación participante (Bisquerra 2009) es la técnica implementada en esta investigación, ya que permite la interacción del investigador cuando aplica las tareas propuestas, a su vez que observa en tiempo real y en el lugar de los hechos los resultados de estas. Dicha técnica enriquece la recolección de datos, pues el investigador capta la realidad desde la perspectiva de los participantes, acompaña al grupo en la elaboración de las tareas propuestas da una mejor comprensión a lo realizado por los participantes, permitiendo al investigador ver que hay detrás de cada respuesta obtenida.

En concordancia con lo anterior, la aplicación de las tres tareas en el grado 10°3 requirió por parte del investigador tomar un rol no solo de observador sino también de participante, siendo este quien dirigía cada momento del desarrollo de la guía. Ya fuera resolviendo dudas, revisando procedimientos o dando indicaciones, el investigador realizaba un acompañamiento de principio a fin, siempre procurando interactuar lo necesario con los estudiantes para que los resultados obtenidos fueran autoría de cada uno de ellos y no del investigador. Para la recolección de datos el investigador elaboró un diario de campo que diligenciaba durante los encuentros con el grado 10°3, respaldando también cada encuentro con un registro fotográfico. Lo anterior junto con la elaboración de las guías por parte de los estudiantes fueron los insumos usados en el análisis para poder dar así una respuesta a la pregunta que dirige esta investigación.

Para el análisis de esta investigación se detallará cada una de las intervenciones hechas al grado 10°3 con las Tareas 1, 2 y 3, descritas anteriormente en este capítulo, respaldando esto con algunas producciones realizadas por los estudiantes en cada uno de los encuentros. Seguido se realizará una triangulación, Figura 3, entre estas producciones obtenidas de los estudiantes, las ideas de los autores usados en la fundamentación teórica y las observaciones del investigador tomadas en las intervenciones.

Figura 3

Triangulación del análisis



Nota. Elaboración propia.

Durante el análisis para hacer referencia una de las preguntas contenidas en las diferentes tareas aplicadas se usará el siguiente código T#-P#, lo cual hace referencia al número de la tarea seguido de la pregunta analizada. A continuación, un ejemplo: Tarea 2, Pregunta 5 es equivalente a T2-P5.

Capítulo 4: Análisis y Resultados

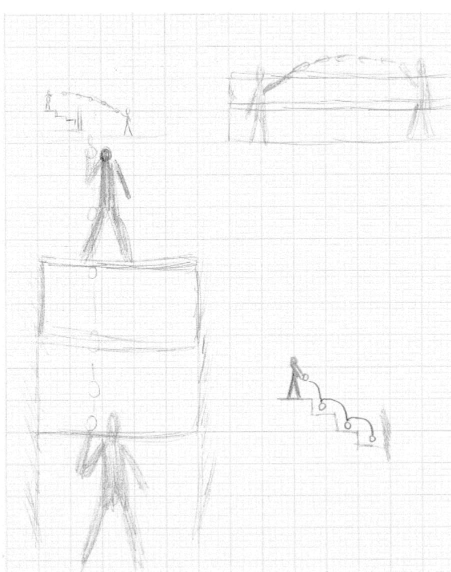
Como se mencionó en el capítulo anterior, a continuación, se presenta el análisis de los resultados obtenidos en cada una de las tareas realizadas por los estudiantes, esto con el fin de poder dar respuesta a la pregunta de investigación. En este apartado se podrá evidenciar de forma más puntal las respuestas entregadas en cada una de las tareas, como también se expondrá información recolectada de la participación directa del investigador con el grado 10°3 mientras realizaron las tareas propuestas en cada encuentro.

4.1. Tarea 1

Para esta tarea se les solicitó a los estudiantes buscar cuatro formas diferentes de encestar la esfera en el aro de basquetbol, a cada equipo se le entregó una esfera de diferente tamaño y material. Posteriormente realizaron la gráfica de los lanzamientos generados y respondieron ocho preguntas alrededor de la trayectoria y las variables implicadas en estos lanzamientos. Los equipos formados realizaron la actividad fuera del salón de clase, desde los lanzamientos hasta el diligenciamiento de la guía, para luego finalizar en el salón de clase comentando sus respuestas con el investigador y los demás equipos.

Figura 4

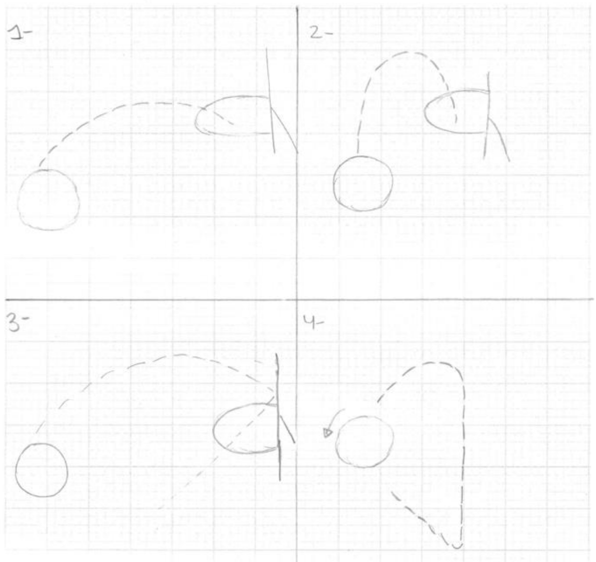
Gráfica de la T1-Equipo 6



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 5

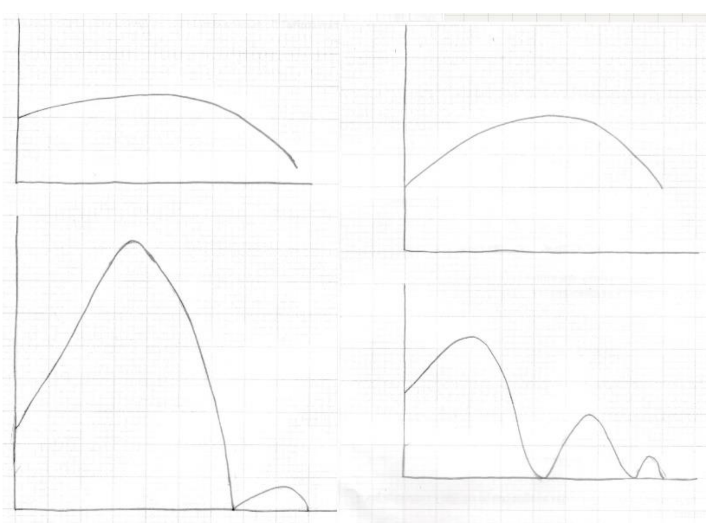
Gráfica de la T1-Equipo 2



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 6

Gráfica de la T1-Equipo 3



Nota. Archivo personal del autor.

Como se puede observar en las Figuras 4 y 5 los dibujos realizados por los equipos variaban según los elementos que incluían dentro de ellas, pues, así como el Equipo 2 solo incluyó la cesta, el Equipo 6 incluye hasta un retrato de ellos mismos lanzando la esfera pasando por los diferentes lugares de donde hicieron los lanzamientos. Si bien se puede identificar dentro de estos dibujos la trayectoria de los lanzamientos, estos no se hicieron conforme a los estándares solicitados en la realización de graficas de este tipo. Por el contrario, lo realizado por el Equipo 3 se acerca más a la trayectoria descrita por el lanzamiento de una partícula, ya que solo describe su recorrido y hasta se puede observar algo a lo que se le puede llamar el primer cuadrante del plano cartesiano.

Lo anterior es relevante para esta investigación pues si se desea favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje del concepto de parábola, esta forma de representación debe de estar clara entre los estudiantes para mejorar el intercambio de información entre ellos y el investigador. Como lo indican los NCTM (2003), en donde la comunicación es un apoyo en los procesos de aprendizaje mediados por representaciones gráficas, en esta tarea usar el recurso de dibujar permitió identificar conceptos erróneos con respecto a la representación gráfica de una trayectoria y corregirlos en ese instante con la participación de los estudiantes, recordándole a estos que son copartidarios con el profesor en su proceso de aprendizaje.

Jiménez y Pineda (2003) resaltan la necesidad de buscar formas de comunicarse diferentes a las usadas tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas, ya que, dada la naturaleza de esta, se requiere que el profesor y los estudiantes usen un lenguaje adecuado para comunicarse e interactuar. Este punto de la Tarea 1 ayudó a que el profesor no se limitara a transmitir el conocimiento matemático desde un lenguaje axiomatizado y complejo, sin mostrar la relación que este tiene con la realidad, sino que, por el contrario, acá los estudiantes desde la misma interacción con su entorno se fueron acercando al concepto que se deseaba enseñar y lo hicieron desde las palabras que ellos mismos consideraron pertinentes usar, según su nivel de conocimiento.

Figura 7

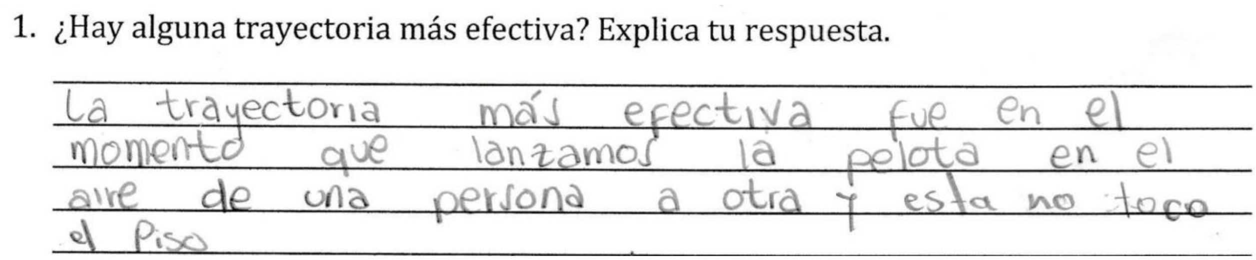
Enunciado principal de la Tarea 1

¿Recuerdan que es trayectoria? De manera simple es una *línea que describe el recorrido que alguien o algo hace al ir de un lugar a otro*. A continuación, junto con tu equipo diríjanse a la cancha de baloncesto y allí buscarán 4 formas diferentes de encestar el balón, eso quiere decir que cada una de estas cestas debe tener una trayectoria diferente. Dibujen las 4 trayectorias.

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 8

Respuesta Equipo 3 T1-P1

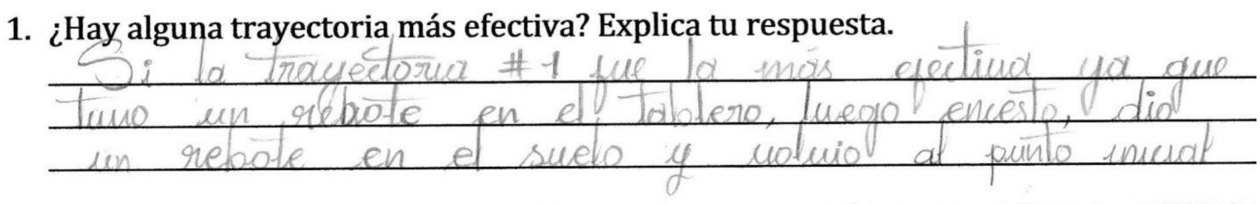

1. ¿Hay alguna trayectoria más efectiva? Explica tu respuesta.

La trayectoria más efectiva fue en el momento que lanzamos la pelota en el aire de una persona a otra y esta no toco el Piso

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 9

Respuesta Equipo 4 T1-P1

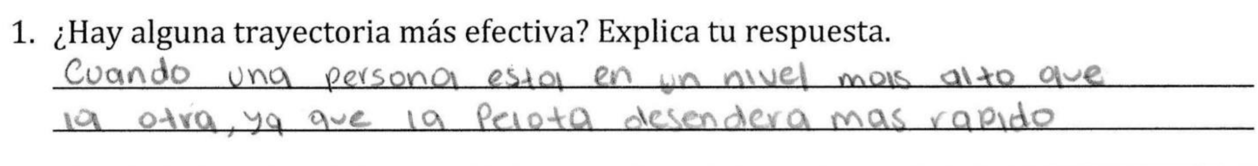

1. ¿Hay alguna trayectoria más efectiva? Explica tu respuesta.

Si la trayectoria #1 fue la más efectiva ya que tuvo un rebote en el tablero, luego encesto, dio un rebote en el suelo y volvio al punto inicial

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 10

Respuesta Equipo 6 T1-P1


1. ¿Hay alguna trayectoria más efectiva? Explica tu respuesta.

Cuando una persona esta en un nivel mas alto que la otra, ya que la pelota desendera mas rapido

Nota. Archivo personal del autor.

En el enunciado principal de la Tarea 1, Figura 7, se da una definición de trayectoria, esto con el fin de orientar a los estudiantes con uno de los objetivos principales de la tarea, el cual era acercarlos a la trayectoria semi-parabólica y parabólica que describe normalmente un lanzamiento hecho a una cesta de basquetbol. Con la pregunta ¿Cuál es la trayectoria más efectiva?, se buscaba que los estudiantes hablaran acerca de las trayectorias, por esto se les cuestionaba sobre la efectividad de las trayectorias que obtuvieron.

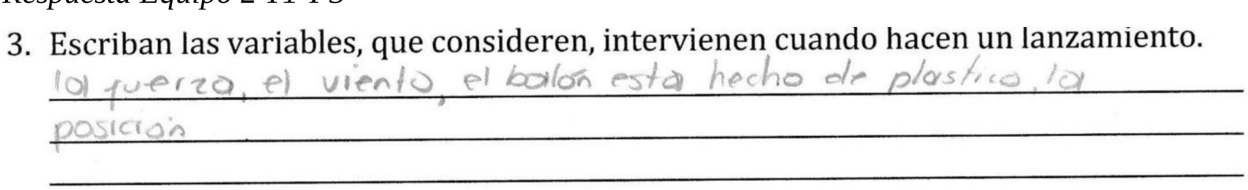
En las respuestas dadas por los equipos se puede observar cómo la efectividad de la trayectoria es atribuida a diferentes factores, por ejemplo, en la Figura 10 el Equipo 6 ve en la rapidez con la que desciende la pelota un factor de efectividad. Por otro lado, en las Figuras 8 y 9 se ve un contraste en las respuestas del Equipo 3 y el Equipo 4, ya que para el Equipo 3 un factor de efectividad era que la pelota no tocara el suelo, mientras que para el Equipo 4 la efectividad radicó en que la pelota rebotara en el tablero y entrara en el aro para después regresar por el suelo al punto inicial. Todas estas perspectivas diferentes sobre un mismo fenómeno fueron relevantes en la discusión de las respuestas, enriqueciendo el momento de la conversación final en la clase.

Lo anterior confirma lo mencionado por Sfard (2008) cuando plantea la comunicación como esa actividad en la que una persona trata de generar en su interlocutor un sentimiento o una acción, sin etiquetar estos resultados como buenos o malos, de hecho, cualquier respuesta dada por el interlocutor es considerada como evidencia de una comunicación exitosa. En esta tarea el investigador orienta a los estudiantes dando una definición puntal de trayectoria, sin embargo, las respuestas dadas por los equipos en P1 se alejaron de lo que el investigador esperaba por respuesta y no solo eso, sino que, cada una de las respuestas dadas fueron diferentes entre sí.

La conversación que se generó entorno a estas respuestas permitió evidenciar que pensaban los estudiantes sobre lo que era una “trayectoria efectiva” y que factores hacían que esto fuera posible. De nuevo se evidencia una de las definiciones de Sfard (2008) sobre la comunicación, donde la autora iguala esta al pensamiento mismo. Los estudiantes al socializar sus respuestas exteriorizaron su concepto de trayectoria, permitiendo al investigador tomar estos discursos y modificarlos, a favor del aprendizaje de los estudiantes y con miras a las próximas tareas a realizar con el grupo. Lo anterior se alinea con Sfard (2008) quien define el aprendizaje en estos contextos participativos como un proceso en el cual se cambian formas discursivas definidas que los estudiantes tienen como propias.

Figura 11

Respuesta Equipo 2 T1-P3



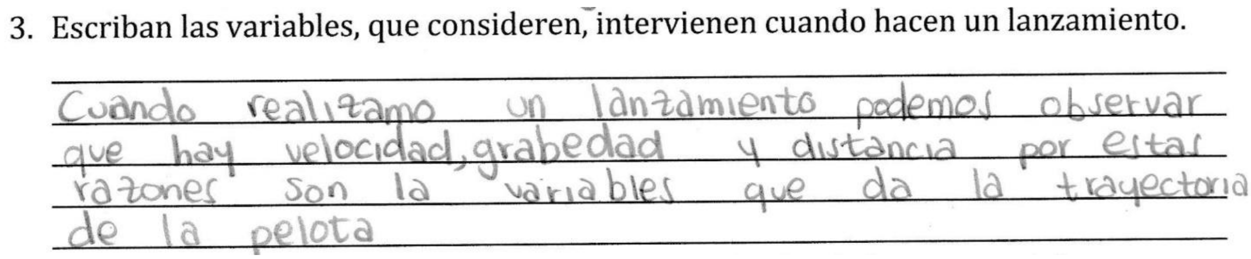
3. Escriban las variables, que consideren, intervienen cuando hacen un lanzamiento.

la fuerza, el viento, el balón esta hecho de plastico, la posición

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 12

Respuesta Equipo 3 T1-P3



3. Escriban las variables, que consideren, intervienen cuando hacen un lanzamiento.

Cuando realizamo un lanzamiento podemos observar que hay velocidad, grabedad y distancia por estas razones son la variables que da la trayectoria de la pelota

Nota. Archivo personal del autor.

Otro objetivo de la Tarea 1 era identificar el concepto que los estudiantes tenían de variable y cuáles identificaban en este tipo de lanzamientos parabólicos. Las respuestas dadas se pueden clasificar en dos grupos, el primero conformado por los estudiantes que relacionaron de forma muy empírica elementos que estuvieron presentes en el lanzamiento de la pelota (Figura 11), como el viento, la fuerza con la que esta se lanza, el material del que estaba hecho la pelota y el tamaño de esta. Estas respuestas daban evidencia de que los estudiantes no relacionaban lo visto en las clases de Física con lo que estaban experimentado en la Tarea 1 con los lanzamientos.

El otro grupo se conformó con los estudiantes que se acercaron más con sus respuestas a las variables usadas en el movimiento parabólico, como se pude leer en la Figura 12, este grupo descarta elementos como el material de la pelota o su tamaño y citan la velocidad, la gravedad y la distancia, elementos que están presentes en las fórmulas del movimiento parabólico.

En esta investigación es importante acercar a los estudiantes a las variables que intervienen en el movimiento parabólico, ya que, para favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje del concepto de parábola, se usó en la Tarea 3 una situación modelada con la siguiente función cuadrática $A(t) = 64t - 16t^2$, la cual es una de las fórmulas del movimiento parabólico visto en Física.

Nuevamente se ve como la comunicación hace visible el pensamiento matemático facilitando así a el investigador trabajar el proceso de aprendizaje con las respuestas dadas por los estudiantes (NCTM 2003). Fue con la lectura de las respuestas que el investigador identificó un error muy común cometido por los profesores que enseñan matemáticas, señalado por Jiménez y Pineda (2013), el cual está relacionado con la comunicación y el lenguaje usado por el profesor, ya que muchas veces este se usa sin pensar que interpretación le darán los estudiantes.

No es que esta pregunta tuviera una forma correcta de responderse, pues cada grupo respondió conforme a lo que interpretaron, en este caso si el investigador buscaba acercarlos a elementos asociados al movimiento parabólico, debió redactar la pregunta más acorde a esto. Acá otra vez se pudo evidenciar como un espacio mediado por la comunicación y el intercambio de ideas fortalece los procesos de aprendizaje, pues el investigador teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado durante la socialización de la Tarea 1, definió cuales eran las variables que se debían tener en cuenta para esta investigación y la relación que estas tienen con el movimiento parabólico.

Figura 13

Respuesta Equipo 2 T1-P6

6. ¿Existe alguna expresión matemática que genere una grafica similar a las trayectorias que se dibujaron? Si la respuesta es afirmativa escriban el nombre o la expresión matemática.

$x(t) = x^2$

$ax^2 + bx + c = 0$

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 14

Respuesta Equipo 3 T1-P6

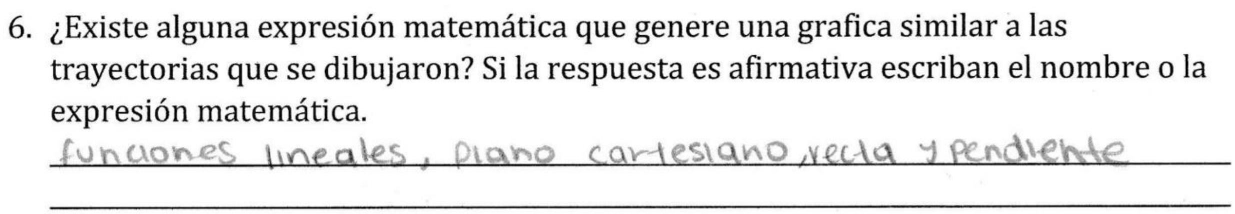
6. ¿Existe alguna expresión matemática que genere una grafica similar a las trayectorias que se dibujaron? Si la respuesta es afirmativa escriban el nombre o la expresión matemática.

No Sabemos

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 15

Respuesta Equipo 6 T1-P6


6. ¿Existe alguna expresión matemática que genere una grafica similar a las trayectorias que se dibujaron? Si la respuesta es afirmativa escriban el nombre o la expresión matemática.

funciones lineales, plano cartesiano, recta y pendiente

Nota. Archivo personal del autor.

El punto seis es más directo y pregunta a los estudiantes si identifican una expresión matemática que genere una gráfica similar a la descrita por las trayectorias creadas al comienzo de la Tarea 1. Acá dos equipos se acercaron a la respuesta escribiendo una ecuación cuadrática y lo que se puede entender como una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$, aunque como se puede observar en la Figura 13, hay un error en su escritura, [$x(f) = x^2$]. Llama la atención que los dos equipos cometieron el mismo error en al escribir la función. Los demás equipos respondieron con elementos que pertenecen a la geometría analítica (Figura 15), como plano cartesiano, recta, pendiente y función lineal pero no asociaron una expresión matemática como lo solicitaba la pregunta. Para finalizar, un equipo respondió que no sabía de una expresión matemática que generara una gráfica similar a las trayectorias que ellos realizaron (Figura 14).

Esta pregunta permitió identificar en qué nivel de algebrización se encontraban los estudiantes y plantear las tareas siguientes, pues quedaba en evidencia que la mayoría de los participantes no estaban en un nivel 2 y 3 de algebrización, que serían los pertinentes en el aprendizaje del concepto de la parábola. Según lo planteado por Aké y Godino (2018) en el nivel dos los estudiantes ya deben hace uso de expresiones alfanuméricas en ecuaciones y funciones, para así avanzar al nivel tres en el que deberán tener un manejo aceptable de las incógnitas y las variables.

El error en la escritura de la función cuadrática da la oportunidad de reflexionar sobre qué lectura están haciendo los estudiantes de estas expresiones matemáticas, ya que esta expresión se lee “efe de equis igual a equis al cuadrado” en donde el estudiante al hacerla debería quedarle claro la expresión en función de qué variable se encuentra y él mismo corregirse de tener claro el concepto de función.

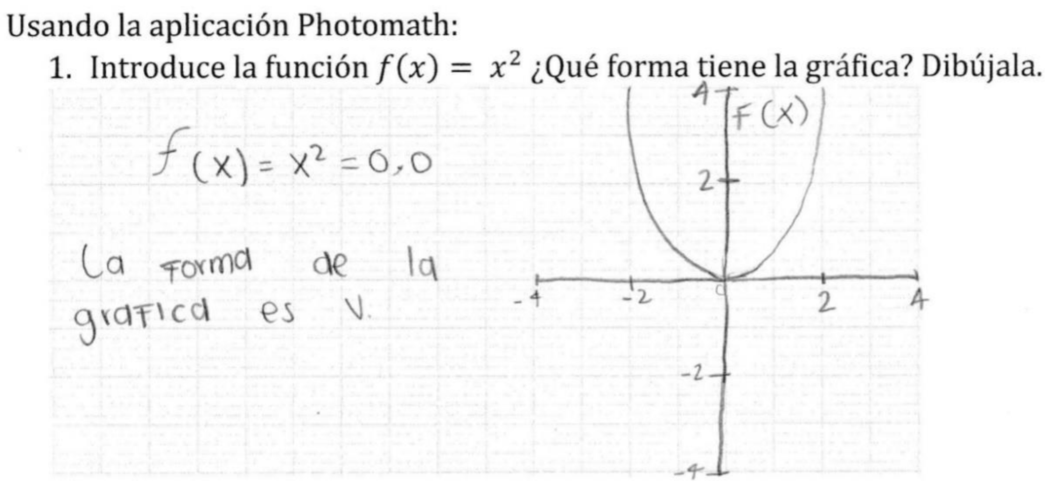
4.2. Tarea 2

La realización de esta tarea parte desde la sugerencia de los documentos rectores del MEN (1998), los cuales indican la importancia de generar actividades donde los estudiantes de secundaria exploren las diferentes características y comportamientos de la función cuadrática comprobando que ocurre con su gráfica al modificar en la expresión algunos de sus términos o coeficientes. En esta tarea se busca alcanzar este objetivo por medio de la aplicación *Photomath*, ya que el manejo de esta es determinante para esta investigación, pues la pregunta de investigación está directamente relacionada con su uso.

A través de las ocho preguntas que se plantean en la Tarea 2 los estudiantes realizaron una lectura de los cambios en la gráfica, registrando esta y la variación en la guía para su posterior análisis. El procedimiento siempre fue el mismo, ellos tomaban una foto a la función cuadrática con *Photomath* y la aplicación generaba la gráfica junto con la información alrededor de esta, acto seguido los estudiantes realizaban la lectura para luego hacer su interpretación de la información suministrada.

Figura 16

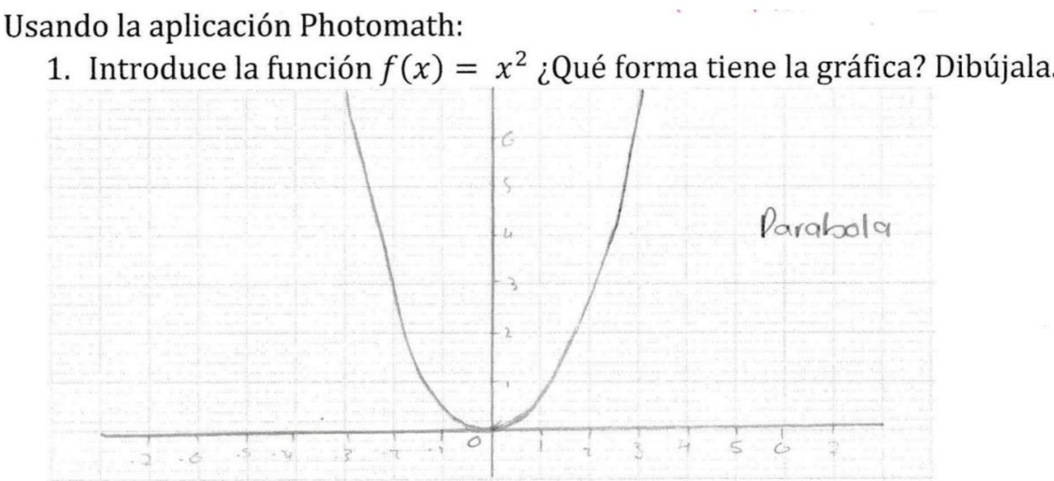
Respuesta Equipo 3 T2-P1



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 17

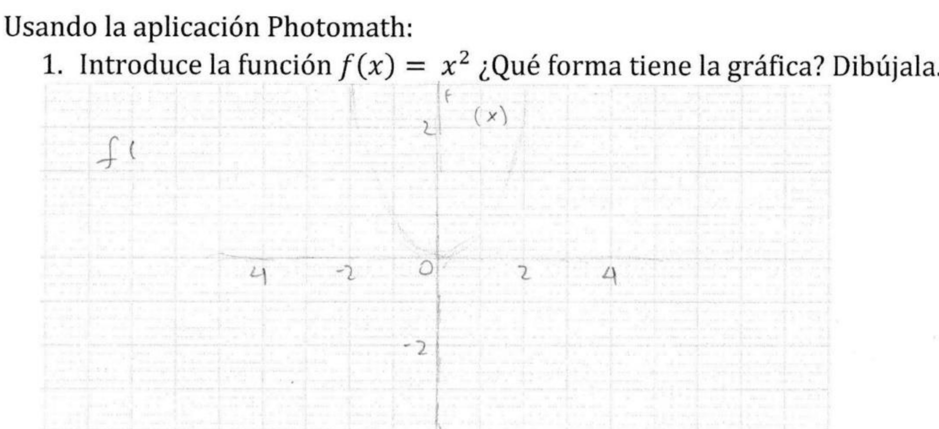
Respuesta Equipo 5 T2-P1



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 18

Respuesta Equipo 3 T2-P1



Nota. Archivo personal del autor.

La primera pregunta de la Tarea 2 pide a los estudiantes que introduzcan una función en la aplicación *Photomath*, seguido se les cuestiona sobre la forma que tiene la gráfica y se les solicita dibujarla. Una de las dificultades que suelen presentan los estudiantes al momento de hacer graficas en el plano cartesiano tiene que ver con dibujar este de forma correcta y proporcional, en esta pregunta la mayoría de los equipos realizaron correctamente el plano cartesiano y esto gracias al apoyo que les dio la aplicación *Photomath.* Acá se puede observar cómo en su mayoría casi todas las gráficas realizadas tienen una proporcionalidad correcta en los ejes del plano cartesiano (Figuras

16 y 17) y los errores encontrados son mínimos como se observa en la Figura 18, donde se escribe el número dos (2) del eje vertical un poco más arriba de lo que debería estar, sin embargo, se ve que el menos dos (-2) del mismo eje si está bien ubicado junto con los valores correspondientes al eje horizontal.

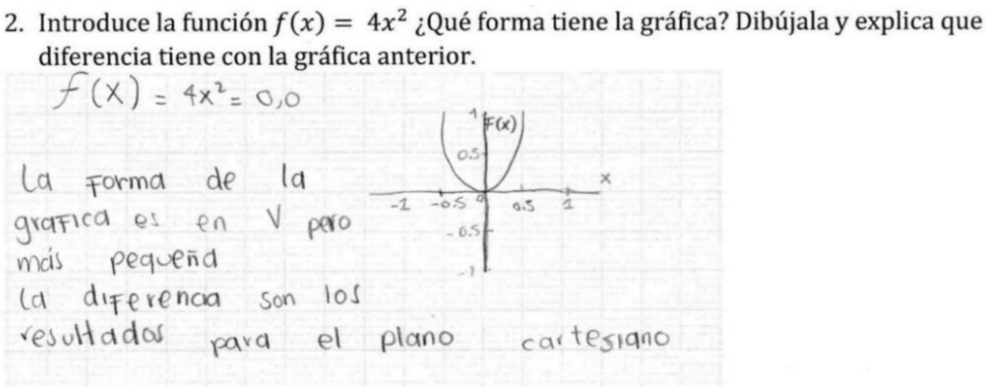
Lo anterior confirma lo planteado en los NCTM (2003) sobre las ventajas de usar un software, pues comentan como la tecnología es una buena base para la comunicación en las clases de matemáticas, ya que cuando los estudiantes interactúan con programas que les permiten generar y examinar objetos matemáticos desde una pantalla, tienen un referente común que enriquece la discusión sobre las ideas matemáticas llevadas a la clase. También indican como el uso de la tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que estas herramientas realizan cálculos de forma precisa y eficiente, dando representaciones visuales de conceptos matemáticos, simplificando la organización y el análisis de los resultados.

Con respecto a la pregunta ¿Qué forma tiene la gráfica? Se encontraron maneras diferentes de dar una misma respuesta. Unos equipos respondieron como se ve en la Figura 16, donde no dicen la forma que tiene la función cuadrática con una palabra, sino con un símbolo que se asemeja más a una V que a una U que es la forma asociada a la gráfica de esta función, mientras que otros equipos respondieron usando la palabra parábola (Figura 17), demostrando así conocimientos previos del tema. Por último, se tiene a los equipos que simplemente realizaron la gráfica más no hablaron de la forma que tenía, cuando se les preguntó a estos estudiantes del por qué no lo hicieron, respondieron que habían entendido que solo era dibujar la gráfica.

Como se enuncia en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), el uso de la tecnología facilita la realización de procedimientos y cálculos matemáticos. En el caso de las funciones, aplicaciones como *Photomath* pueden ser un potente instrumento para la comprensión y el análisis de las gráficas debido a la velocidad de respuesta que estos manejan. Por esta misma razón la implementación de estas tecnologías en los procesos de aprendizaje debe de estar mediado por el profesor, quien deberá generar tareas dirigidas a la comprensión de dichos procesos y no a la automatización de tareas difíciles. Las respuestas también dieron evidencia de lo mencionado en los NCTM (2003) respecto al uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, pues resaltan que implementar estas herramientas en las clases hace que los estudiantes se puedan enfocar en la resolución de situaciones problema, mejorando el análisis y la toma de decisiones.

Figura 19

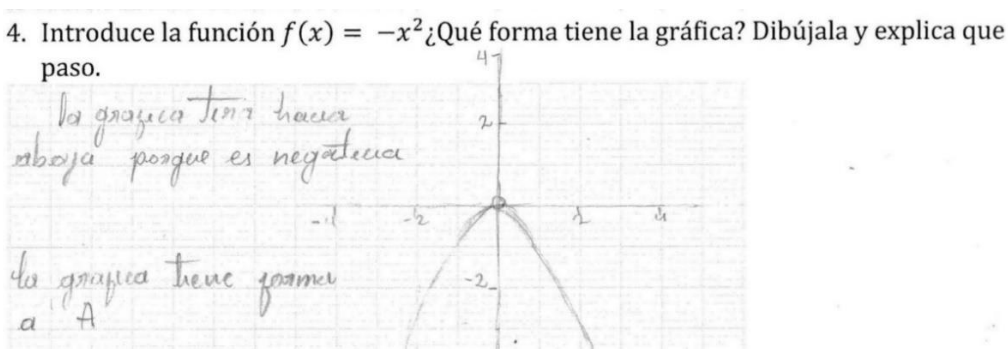
Respuesta Equipo 3 T2-P2



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 20

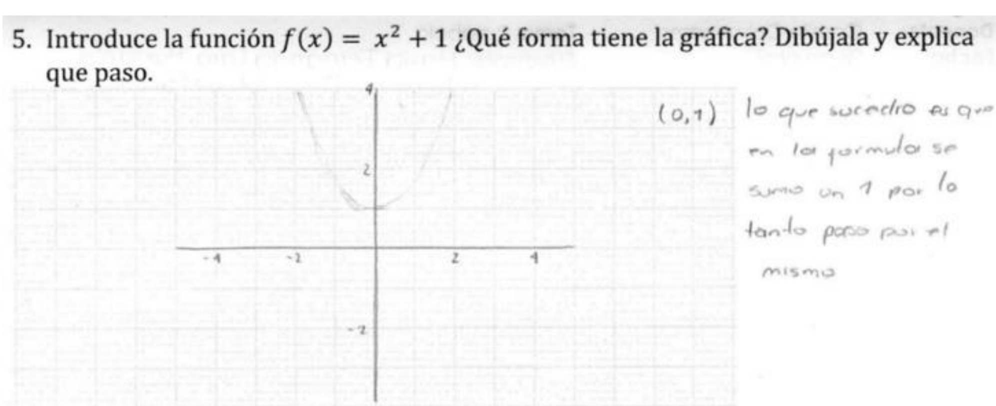
Respuesta Equipo 4 T2-P4



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 21

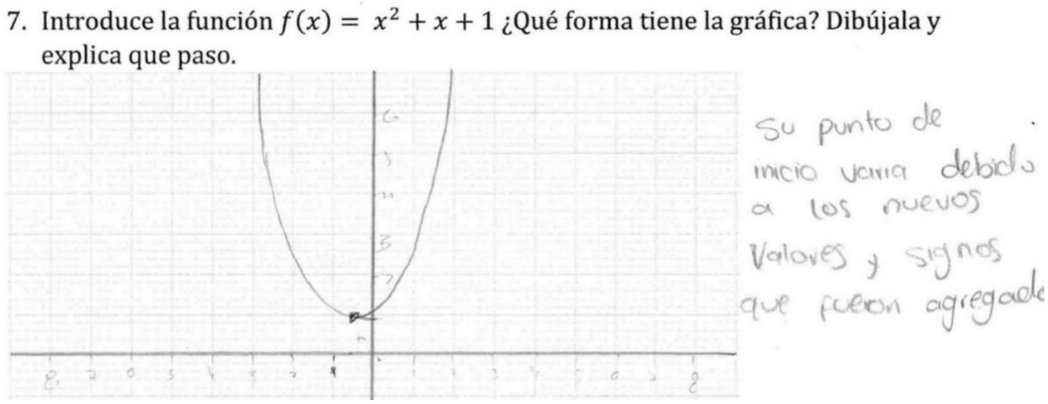
Respuesta Equipo 2 T2-P5



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 22

Respuesta Equipo 5 T2-P7



Nota. Archivo personal del autor.

Como se mencionó al principio en la descripción de la Tarea 2, cada pregunta tenía una función cuadrática diferente para que los estudiantes al introducir esta nueva expresión en *Photomath* pudieran visualizar la información de esta y compararla con la función de la pregunta anterior. Lo solicitado siempre fue lo mismo, se les preguntaba a los equipos por la forma que tenía la gráfica, seguido se les pedía dibujarla y por último debían explicar su diferencia con la gráfica anterior. Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes se volvió a encontrar el mismo fenómeno visto en P1, donde se veía como cada equipo respondía e interpretaba las preguntas según su conocimiento del tema o simplemente según la interpretación que hicieran de esta (ver Figuras 19, 20, 21 y 22).

Lo ocurrido en esta tarea fue interesante para las dinámicas de aprendizaje basadas en la comunicación y en la participación, ya que se pudo ver una gran variedad en las respuestas, no porque estas fueran muy diferentes en cuanto al resultado matemático, pues todas las preguntas sin excepción alguna se respondieron en cierta forma correctamente, llegando estas a la misma gráfica y a el mismo cambio entre funciones. Lo realmente valioso acá fue ver como para registrar una misma respuesta cada equipo uso diferentes palabras y diferentes maneras de dar la información.

Lo anterior respalda lo dicho por Sfard (2008), ya que la autora destaca que la comunicación no se limita solo a escuchar o hablar, sino que tiene que ver con todo lo que hay alrededor de esta dinámica, los lenguajes verbales y no verbales, la escritura, los discursos y los puntos de vista, estando permeado todo esto por las experiencias y el contexto. Con esto se entiende un poco más el porqué de la variedad en la forma de dar la misma respuesta. Por eso el profesor debe de tener mucho cuidado en la lectura de estas, ya que lo que para él puede significar cierta palabra para los estudiantes esa palabra puede tener otro significado, como resultado de esto el emisor no se percata que el mensaje que desea transmitir es entendido de forma muy diferente por su receptor.

En línea con las ideas anteriores, la eficacia de la comunicación depende de la claridad del foco discursivo, siendo este foco lo que es percibido o interpretado por los individuos que se comunican (Sfard 2008). Acá se pudo observar como la aplicación *Photomath* ayudó en la eficacia de estos procesos de comunicación dando claridad a este foco, pues al suministrarle a todos los equipos la misma información en cada pregunta, permitió a cada uno de los estudiantes tener un mismo punto de partida al cual analizar y conjeturar, generando estos a su vez, insumos que les permitieran participar de los espacios de discusión.

Por otro lado, los NCTM (2003) señalan la importancia de que los estudiantes de secundaria tengan la oportunidad de indagar más en el conocimiento de las relaciones y las funciones, dándose esto por la ampliación del catálogo de funciones familiares, este repertorio les permite la modelización de situaciones matemáticas suministrándole así a los estudiantes recursos significativos que les facilitan describir y analizar su entorno. La Tarea 2 cumple con esto, ya que los estudiantes a través de cada pregunta tuvieron la oportunidad de ver estas funciones familiares y aunque los equipos recurrieron a palabras que no se usan normalmente para describir lo ocurrido con las gráficas, lo importante que era identificar los cambios se logró. En la Figura 20 se ve un ejemplo de esto, en donde el Equipo 4 escribe que "la gráfica tiene forma a A", refiriéndose a una parábola que abre hacia abajo. Otro ejemplo lo vemos con el Equipo 2 (Figura 21), acá se tiene una gráfica en la que su vértice cambió del origen a la coordenada (0,1), esto debido a la adición de una constante a la función en P1, lo anterior lo escribió el Equipo 2 de la siguiente manera "lo que sucedio es que en la formula se sumo un 1 por lo tanto paso por el mismo".

Según los niveles de algebrización planteados por Aké y Godino (2018), la realización de la Tarea 2 implicaba estar en el Nivel 4, ya que en este se presentan elementos como registros numéricos y se usan parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones. Es evidente que todos los estudiantes no estaban en el Nivel 4, pues la mayoría estaban en el Nivel 2, sin embargo, esto no fue impedimento para que los equipos analizaran las preguntas y discutieran sobre sus respuestas con los demás compañeros de clase, esto fue posible gracias a la mediación de la aplicación *Photomath* en el desarrollo de la Tarea 2.

Para finalizar, se considera que la Tarea 2 cumplió su objetivo, ya que no solo los estudiantes conocieron la aplicación *Photomath* y comenzaron a usarla, sino que esta misma sirvió como puente entre el conocimiento matemático y la comunicación en el salón de clase, facilitando y enriqueciendo cada proceso de aprendizaje generado durante la realización de la tarea y preparando a los estudiantes para la siguiente tarea, la cual buscaba por medio de la modelación de una situación real afianzar el concepto de parábola.

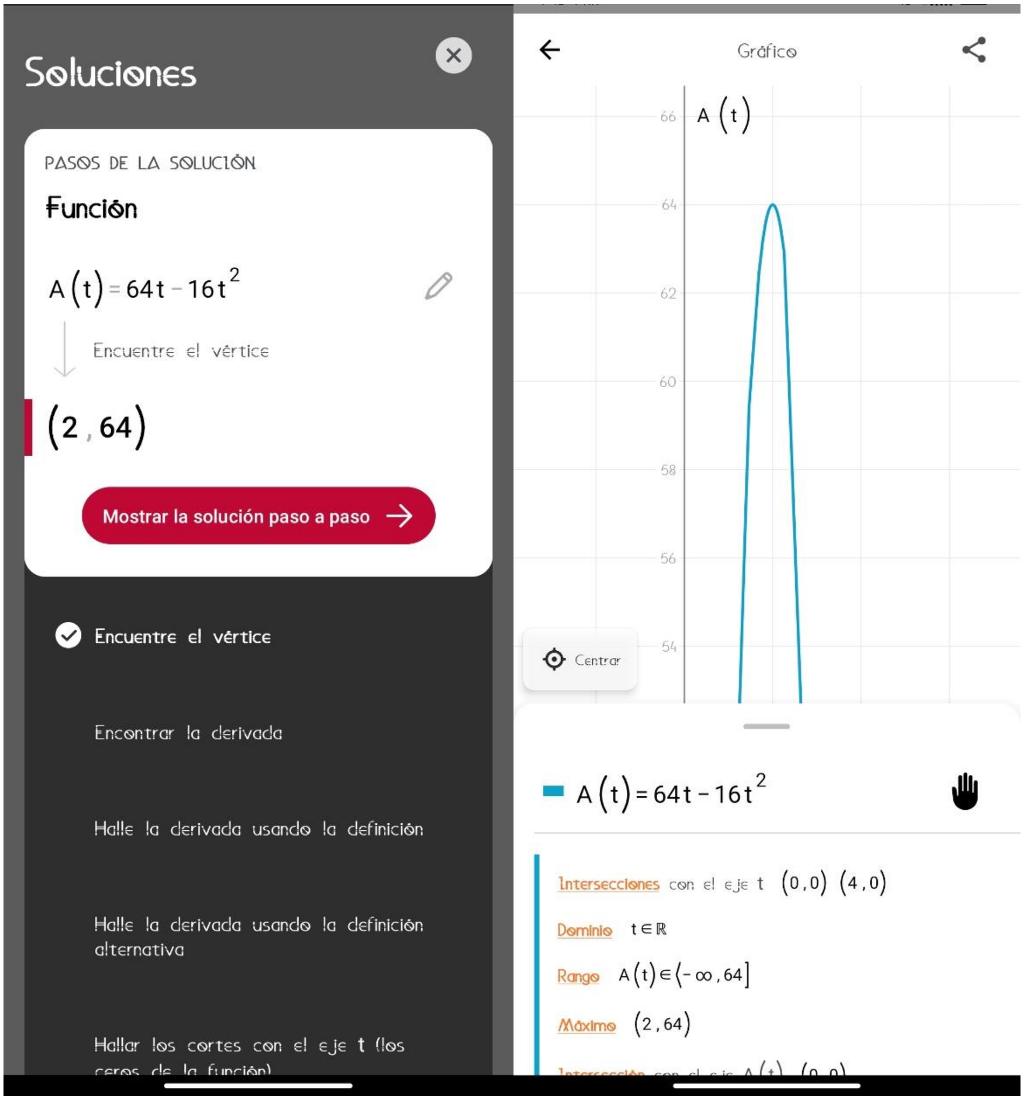
4.3. Tarea 3

Esta tarea buscaba enlazar lo realizado por los estudiantes en las tareas anteriores, para esto se buscó una situación real que les permitiera poner en uso los aprendizajes adquiridos. La tarea toma un lanzamiento parabólico descrito por una pelota de tenis que fue lanzada hacia arriba y les da a los estudiantes la siguiente expresión $A(t) = 64t - 16t^2$ en la cual se relaciona la altura de la pelota (h) en función del tiempo (t), estas variables se trabajaron en metros y segundos respectivamente. Haciendo uso de la aplicación *Photomath* los estudiantes respondieron cuatro preguntas relacionadas con el concepto de parábola y al final hicieron la gráfica de la relación altura y tiempo. Los equipos tomaban una foto de la función dada y hacían una lectura de la información suministrada por la aplicación.

A continuación, se comparte la Figura 23 en donde se puede observar la interfaz de la aplicación en un celular, que era el dispositivo usado por los estudiantes para interactuar con *Photomath*.

Figura 23

Vista de la interfaz de Photomath desde un celular

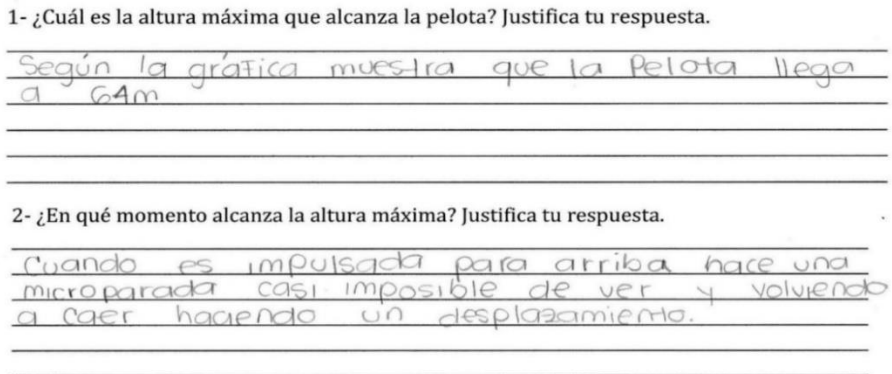


Nota. Archivo personal del autor.

Lo anterior fue el punto de partida para que los equipos respondieran preguntas relacionadas con la altura y el tiempo, variables que intervenían en esta modelación.

Figura 24

Respuesta Equipo 1 T3-P1 y P2


1- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? Justifica tu respuesta.

Según la gráfica muestra que la Pelota llega a 64m

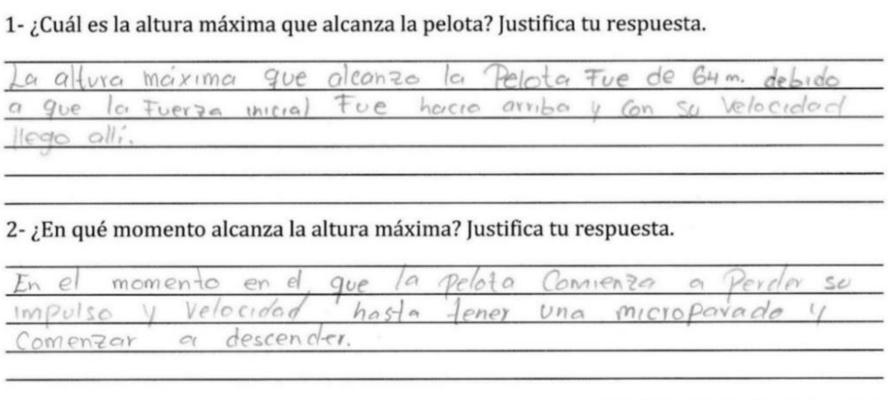
2- ¿En qué momento alcanza la altura máxima? Justifica tu respuesta.

Cuando es impulsada para arriba hace una microparada casi imposible de ver y volviendo a caer haciendo un desplazamiento.

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 25

Respuesta Equipo 5 T3-P1 y P2


1- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? Justifica tu respuesta.

La altura máxima que alcanzo la Pelota Fue de 64 m. debido a que la Fuerza inicial Fue hacia arriba y con su velocidad llego allí.

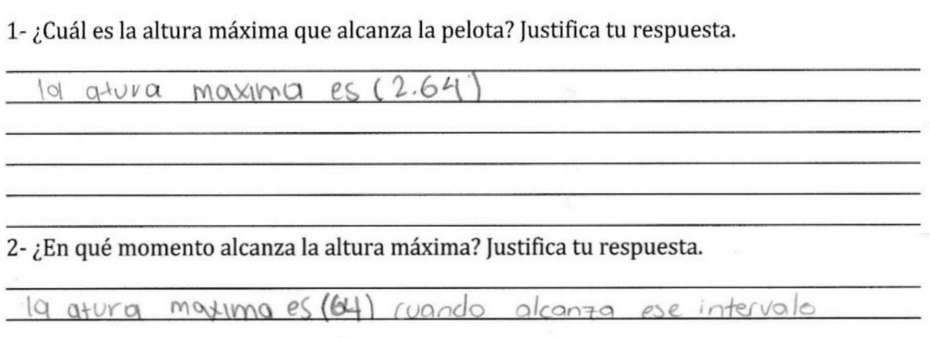
2- ¿En qué momento alcanza la altura máxima? Justifica tu respuesta.

En el momento en el que la pelota Comienza a Perder su impulso y Velocidad hasta tener una microparada y Comenzar a descender.

Nota. Archivo personal del autor.

Figura 26

Respuesta Equipo 6 T3-P1 y P2


1- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? Justifica tu respuesta.

la atura maxima es (2.64)

2- ¿En qué momento alcanza la altura máxima? Justifica tu respuesta.

la atura maxima es (64) cuando alcanza ese intervalo

Nota. Archivo del autor

Durante la realización de esta tarea ocurrió algo muy particular, debido a la situación comentada anteriormente en la metodología, por la cual tres equipos decidieron no participar en la Tarea 3, uno de los equipos que decidió participar lo hizo de forma muy regular y sin disposición, además participó poco de las conversaciones generadas por el profesor entorno a la tarea, realizando esta rápidamente para así entregarla e irse del salón de clase.

Comentado lo anterior, se pudo evidenciar una diferencia muy marcada entre las respuestas de los Equipos 1 y 5, que discutieron la información suministrada por *Photomath,* en comparación con el Equipo 6 que solo se limitó a transcribir la información sin discutirla. En las Figuras 24 y 25 se ve coherencia con las respuestas de P1 y P2, los Equipos 1 y 5 respondieron correctamente y justificaron sus respuestas apoyadas en la información dada por la aplicación. Dentro de lo ocurrido con la discusión de P1 uno de los equipos comentaba que la respuesta no podía ser una coordenada y en medio de la conversación decidieron que lo más acertado era tomar el valor correspondiente al eje Y. Por el contrario, como se ve en la Figura 26, el Equipo 6 solo transcribió la coordenada que estaba en la pantalla, no hicieron ningún análisis ni comentario entre ellos tampoco justificación alguna, asumieron que la coordenada (2,64) era un numero decimal escribiendo como respuesta a P1 “la altura maxima es (2.64)”.

Jiménez y Pineda (2003) hablan de estas interacciones dadas entre los Equipos 1 y 5, indicando que juegan un papel fundamental dentro de las clases de matemáticas, pues la comunicación como proceso de interacción social y el lenguaje como forma de establecerla son un eje articulador entre la comprensión y la argumentación. En este escenario la comunicación actúa como mediadora, ya que la comprensión de un objeto matemático se logra luego de argumentar y contraargumentar sobre su validez, discutir y buscar consensos para llegar a conclusiones y así construir nuevos saberes. Alineado con lo anterior, Sfard y Cobb (2014) hablan del enfoque participacionista el cual describe a las matemáticas como algo inherente a la actividad humana más que como algo que se debe adquirir, por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas es uno de los resultados de esta interacción social.

Al analizar la siguiente pregunta (P2) se observa que los Equipos 1 y 5 respondieron analizando el comportamiento de la gráfica, justificando de manera coherente su respuesta (Figura 23 y 24). Nuevamente se ve al Equipo 6 dar una respuesta con poco análisis ya que ante la pregunta ¿En qué momento alcanza la altura máxima? Escribieron “la altura máxima fue (64) cuando alcanza este intervalo” siendo una respuesta más cercana a P1, aunque no queda claro la magnitud de ese valor numérico dado.

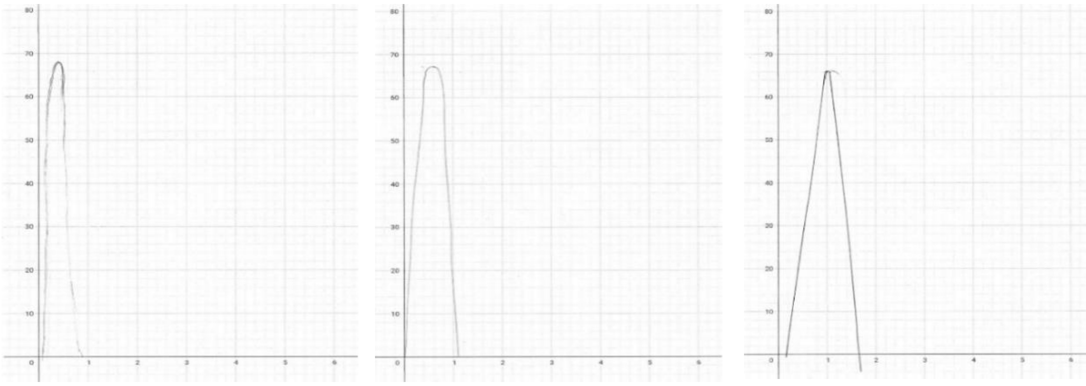
El investigador esperaba que los estudiantes asociaran el intervalo (2,64) con las variables de la función cuadrática siendo la abscisa el tiempo transcurrido y la ordenada la altura en ese instante de tiempo, de tal forma que los equipos respondieran que la altura máxima fue alcanzada a los 2 segundos. Si bien ningún equipo realizó este análisis ni dieron la respuesta esperada, los Equipos 1 y 5 aportaron respuestas más afines a la pregunta describiendo el momento en el que la pelota llega al punto máximo y cambia de dirección (vértice), llamando a esto una “microparada”.

Esta tarea abre un espacio para poder afirmar el concepto de parábola junto con sus características y aplicaciones a situaciones reales, según el MEN (1998) hacer uso de la función en estas situaciones, fortalece el análisis de la relación entre dos conjuntos de datos, facilitando la comprensión de la variable y la escritura de expresiones algebraicas que describan variación y cambio. De igual forma las gráficas cartesianas hacen fácil el estudio dinámico de la variación ayudando con el planteamiento de la dependencia entre variables.

Se considera, según lo observado, que los estudiantes estuvieron cerca de lograr este aprendizaje sobre la variable, de haber intervenido el profesor o los estudiantes haber tenido un nivel de algebrización más alto, fácilmente hubieran visto la relación que hay entre el vértice de la parábola y lo solicitado en las preguntas de la Tarea 3. Sin embargo, la mediación que tiene la aplicación *Photomath* con la solución de la tarea permitió acercar a los estudiantes a un punto en el cual hacer estas inferencias era más sencillo para ellos, y esto gracias a que se puedo recrear un experimento físico por medio de esta aplicación, realizando así un laboratorio mediado por la tecnología como lo sugieren los NCTM (2003).

Figura 27

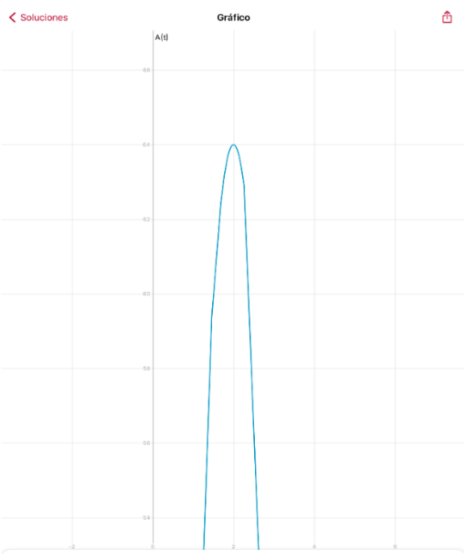
Graficas de los Equipos T3



Nota. Archivo personal del autor.

Figura 28

Grafica interfaz IPad



Nota. Archivo personal del autor.

Una situación se presentó con la realización de la gráfica de altura y tiempo, esta tiene que ver con la interfaz de la aplicación *Photomath*. Cuando el investigador estaba revisando las gráficas realizadas por los estudiantes (Figura 27), se percató que los tres equipos no lograron hacer la gráfica de forma correcta con respecto a su dominio, tiempo que estuvo la pelota de tenis en el aire y su rango, altura máxima alanzada por la pelota. Esto llevó a que el investigador verificara nuevamente de qué forma estaban visualizando los estudiantes la información en la aplicación

Photomath y encontró la razón del porqué del error en las tres gráficas. Al comparar la interfaz de la aplicación para celulares (Figura 23) notó que allí no hay una parametrización del eje horizontal, como si lo tiene el eje vertical, sin embargo, respecto a la información de la gráfica, cabe aclarar que la aplicación dio todo para que los estudiantes lograran deducir la parametrización faltante. Llama la atención que la interfaz de la aplicación en el *iPad* si contiene la parametrización del eje horizontal (Figura 28).

Lo ocurrido con las gráficas hace recordar situaciones en las que la tecnología es motivo de tropiezo para los estudiantes, un ejemplo de esto es el polinomio aritmético $2 + 5 \times 4$, en el que ciertas calculadoras básicas no tienen en su programa el orden jerárquico y por error dan como resultado 28. Si los estudiantes tienen los conocimientos necesarios sobre el tema posiblemente puedan identificar este error. Sin embargo, el tener conocimiento no es garantía para que el estudiante se percate del error ya que en la mayoría de las veces cuando se usa la tecnología para realizar operaciones matemáticas se asume que esta no comente errores y damos los resultados por infalibles, sin pensar que pudo haber ocurrido un error en la manipulación de la tecnología, un ejemplo de esto se da cuando quieren calcular el cuadrado de menos tres, si se ingresa en una calculadora -3^2 el dispositivo dará como resultado -9.

Por lo tanto, es importante las conversaciones y discusiones de resultados en las clases de matemáticas pues sirven también como un filtro ante estas situaciones. A su vez los profesores de matemáticas como mediadores en el proceso de enseñanza necesitan prestar mayor atención a lo que los estudiantes hablan dentro de las clases, lo que ellos dicen entender y no entender, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y sobre cómo se les enseñan, escuchar sus dudas y hasta escuchar lo que no dicen, para poder saber de qué forma están viendo, pensando y razonando las matemáticas y así guiar de manera más efectiva el uso del lenguaje matemático y el desarrollo de las habilidades de la comunicación en los estudiantes (MEN, 1998).

4.4. Resultados

Algunos aspectos que se resaltan de los análisis son:

- La comunicación como apoyo en los procesos de aprendizaje no se limita solo a escuchar o hablar.
- Diferentes niveles de conocimiento implican diferentes formas de comunicarse, los estudiantes escogen que palabras usar.

- Los profesores de matemáticas como mediadores en el proceso de enseñanza necesitan prestar mayor atención a las formas de comunicación dentro de las clases.
- La eficacia de la comunicación depende de la claridad del foco discursivo.
- La socialización de resultados y los contextos de participación permiten tomar discursos y modificarlos.
- La comunicación hace visible el pensamiento matemático.
- La tecnología es una buena base para la comunicación y un potente instrumento para la comprensión.
- Implementar tecnología en las clases de matemáticas ayuda a enfocar la resolución de situaciones problema, mejorando el análisis y la toma de decisiones.
- La tecnología permitió tener un mismo punto de partida al cual analizar y conjeturar.
- La tecnología aporta recursos significativos que les facilitan a los estudiantes describir y analizar su entorno.
- La tecnología y la comunicación sirven de puente entre el conocimiento matemático, facilitando y enriqueciendo cada proceso de aprendizaje (Figura 29).
- La comunicación como proceso de interacción social y el lenguaje como forma de establecerla son un eje articulador entre la comprensión y la argumentación.
- El aprendizaje de las matemáticas es uno de los resultados de esta interacción social.
- La tecnología permitió acercar a los estudiantes a un punto en el cual hacer estas inferencias era más sencillo para ellos.
- La tecnología no es infalible y los que la usan tampoco.
- Las conversaciones y discusiones de resultados en las clases de matemáticas sirven para prever errores.

Figura 29

La tecnología y la comunicación como puente entre el conocimiento matemático

Nota. Elaboración propia.

Capítulo 5: Conclusiones y Recomendaciones

A continuación, se presentan las consideraciones respecto a la pregunta y el objetivo de este trabajo de investigación, seguido se expondrán algunas limitaciones que se encontraron durante la realización del mismo, para luego plantear algunas posibles líneas de investigación que se pueden favorecer con este tipo de trabajo de investigación. Para finalizar se hacen algunas recomendaciones generales para la implementación de trabajos similares a este.

5.1. Consideraciones respecto a la pregunta y el objetivo

La implementación y el análisis de cada una de las tareas propuestas dieron evidencia de como la comunicación se fortaleció, esto gracias a los espacios de socialización y discusión entre los participantes y el profesor en formación. En estos espacios surgieron varias situaciones que, si bien no estaban planeadas dentro de las tareas, enriquecieron los procesos de enseñanza, en este caso sobre el objeto matemático parábola. El hecho de que los estudiantes usaran palabras y representaciones diferentes para dar una misma respuesta, que la lectura de las preguntas fueran entendidas de maneras diferentes por los equipos, o que no todos los estudiantes se encontraran en un mismo nivel de conocimiento respecto al objeto matemático, fueron factores que al momento de la retroalimentación grupal el profesor en formación utilizó a favor del aprendizaje de la parábola y de los elementos que hay alrededor de este concepto.

Lo mencionado anteriormente no hubiera sido posible si la clase de matemáticas no estuviera mediada por la comunicación, las respuestas escritas u orales permitieron evidenciar lo que cada uno de los estudiantes pensaban acerca de la parábola y los elementos alrededor de esta, independientemente que estos fueran acertados o erróneos. El poder generar estos espacios de participación y discusión en los cuales los estudiantes tuvieran la confianza de poder equivocarse y hablar lo que pensaran respecto a la parábola y aun sobre cualquier otra cosa, fortaleció los procesos de comunicación. Estos espacios aportaron a su vez con el aprendizaje de la parábola, ya que la socialización de resultados permitió al profesor en formación tomar lo que los estudiantes sabían o creían saber de esta y modificarlo a favor del aprendizaje de este objeto matemático.

El objetivo en este trabajo de investigación más que fortalecer la enseñanza de la parábola radicaba precisamente en favorecer el proceso de la comunicación durante el aprendizaje de esta, para lo cual se usó la aplicación *Photomath*. Los resultados obtenidos dieron evidencia de como la comunicación se benefició con el uso de esta aplicación, ya que permitió a los estudiantes tener la misma información con la cual podían hacer conjeturas y así tomar decisiones respecto a lo solicitado en las tareas. Lo anterior también permitió a los estudiantes tener un mismo foco discursivo el cual ayudaba a la eficacia en la comunicación. Y es que la implementación de *Photomath* permitió que sin importar en qué nivel de algebrización se encontraran los estudiantes o que tanto sabían sobre la parábola, estos pudieran tener información con la cual participar de las tareas propuestas y de los espacios de socialización en el salón de clase.

Lo anterior da evidencia que tanto la pregunta de esta investigación como su objetivo fueron logrados en este trabajo de investigación. En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la comunicación desempeña un papel fundamental, más allá de la simple transmisión de información, la comunicación se convierte en un medio para explorar y comprender conceptos matemáticos. Reconociendo que la comunicación no se limita solo a escuchar o hablar, pues esta involucra diferentes formas de expresión. Los estudiantes tienen la capacidad de elegir las palabras y expresiones que utilizan al comunicar sus ideas matemáticas, lo que resalta la importancia de la claridad en el lenguaje. En este contexto, los profesores de matemáticas, como mediadores en el proceso de enseñanza, necesitan prestar mayor atención a las formas de comunicación dentro de las clases, ya que la eficacia de la comunicación depende en gran medida de la claridad del foco discursivo.

Usar la tecnología a favor de los procesos de comunicación en el aula, permite a los estudiantes socializar sus resultados y participar en contextos de aprendizaje significativos. Esta actúa como un puente entre el conocimiento matemático y la comunicación, enriqueciendo cada proceso de aprendizaje. La comunicación, como proceso de interacción social, y el lenguaje como su herramienta central, favorecen la comprensión y la argumentación. El aprendizaje de las matemáticas es uno de los resultados de esta interacción social, y la tecnología permite acercar a los estudiantes a un punto de partida común para analizar y conjeturar, facilitando así la inferencia matemática. Es importante tener en cuenta que la tecnología, aunque es valiosa en estos procesos, no es infalible, y su uso debe ser guiado y supervisado.

En resumen, la comunicación y la tecnología actúan en conjunto para hacer visible el pensamiento de los estudiantes y lograr resultados efectivos en la Educación Matemática, estos enriquecen los procesos de aprendizaje ampliando las formas de comunicación, acercando a los estudiantes a los conceptos matemáticos y proporcionándoles herramientas que les facilitan describir y analizar su entorno de manera más efectiva.

5.2. Limitaciones del estudio

Una de las limitaciones fue tiempo para la implementación de las tareas. Si bien la Institución Educativa Compartir facilitó el espacio y los estudiantes para la realización de esta investigación, los horarios de disponibilidad fueron pocos, inclusive esta fue una de las razones por las que al implementar la Tarea 3 varios equipos no participaran de esta ya que se les quito una hora de educación física y esto indispuso a los estudiantes los cuales argumentaban tener muy poco tiempo y estar muy atareados, siendo esta hora de educación física un momento de dispersión y descanso para ellos. Esto también llevo a que las socializaciones al finalizar la Tarea 2 y la Tarea 3 fueran muy cortas.

La redacción de algunas preguntas contenidas en las tareas. El profesor en formación se percató que los estudiantes no comprendieron muy bien ciertas preguntas usadas en las tareas, ya sea porque las palabras que usaba eran muy técnicas o generales o porque el nivel de conocimiento de ciertos estudiantes no les permitía entender a profundidad lo preguntado. Sin embargo, es importante aclarar que fueron solo dos preguntas las que presentaron este percance y fueron unos pocos estudiantes los que no lograron entenderlas. De todas formas, esto es algo a tener en cuenta pues en la implantación de una tarea o de una actividad de clase todo el material a usar debe ser fácil de comprender por todos los estudiantes, sin que quede alguno por fuera de esto.

El uso de celulares. En casi todos los colegios se prohíbe el uso de celulares durante la jornada escolar, esto con fundamento, ya que estos dispositivos pueden llegar a ser un foco de distracción por lo que estos mismos ofrecen. También se presentó que no todos los estudiantes contaban con un celular, o si bien lo tenían, este no cumplía con los requisitos mínimos que le permitieran ejecutar la aplicación *Photomath*.

El uso de la aplicación *Photomath*. Si bien la aplicación cumplió el propósito por el cual se implementó en este trabajo de grado, es pertinente aclarar dos “debilidades” que esta presenta. La primera es que para usar *Photomath* se necesita estar conectado todo el tiempo a internet ya que esta aplicación no cuenta con una versión sin conexión, para el caso de este trabajo de investigación el profesor en formación compartió internet desde su celular a varios equipos. La segunda es que la aplicación cuenta con una versión de pago y si bien la versión gratuita en muy completa y el profesor puede usar esta para implementarla en los procesos de aprendizaje, en el momento que se desee profundizar o hacer uso de alguna opción *premium* se deberá pagar por esto.

5.3. Perspectivas de investigación

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, se considera que la línea de geometría analítica y los niveles de algebrización se pueden favorecer por medio de procesos como la comunicación y la implementación de tecnologías. Si bien estas líneas fueron usadas en este trabajo de investigación, las tareas y los análisis giraron alrededor del proceso de comunicación y de la implementación de la aplicación *Photomath* en función de un objeto matemático, que en este caso fue el concepto de parábola. Durante los análisis se pudo evidenciar como el uso de la aplicación *Photomath* facilitó información considerable para la compresión de la gráfica de las funciones y la relación entre las variables. De igual forma permitió recrear un experimento que modelaba una situación atreves de una función cuadrática, esto es algo que puede llegar a enriquecer el estudio de las líneas de investigación ya mencionadas.

También se puedo evidenciar que la manera en que la aplicación *Photomath* presentaba la información favorecía la lectura y la comprensión de expresiones algebraicas, presentando esta misma los procedimientos con los cuales se llegaba a una respuesta solicitada, como ejemplo de esto la aplicación les daba la opción a los estudiantes de ver paso a paso como encontrar el vértice de la parábola a partir de las ecuaciones de h y k, ver Figura 22. Lo anterior es solo uno de los varios beneficios que la aplicación tiene y que se pueden usar para fortalecer los niveles de algebrización en los estudiantes.

5.4. Recomendaciones generales

Si se desea realizar trabajos de investigación similares a este, se recomienda según lo mencionado en las limitaciones de este estudio, prestar atención al uso de las palabras tanto para hablar con los estudiantes como para la generación de tareas, ya que en los procesos de enseñanza mediados por la comunicación es muy importante que tanto los estudiantes como el profesor estén lo más alineados posible con el leguaje implementado. De igual forma se recomienda que de hacer uso de alguna herramienta tecnológica previamente se verifique si esta tiene una versión sin conexión y si la instalación de esta no tiene requerimientos muy altos de manera que pueda instalarse en la mayoría de los dispositivos usados comúnmente.

También es importante verificar si el software a usar o la aplicación es de uso gratuito o tiene versiones de pago. Para finalizar, usar la tecnología en este trabajo de investigación fue una solución al poco tiempo con el que se contó para la implementación de las tareas, pero a su vez se debió descartar información y elementos que hubieran enriquecido mucho más la investigación por falta de este mismo. Por lo cual se recomienda que para la implantación de trabajos de investigación similares a este se busque contar con un espacio de mínimo una hora y media a máximo dos horas por cada intervención.

Capítulo 6: Referencias

Andrés, M., Coronel, M., Rico, E., Luna, J. y Sessa, C. (2021). El papel de las representaciones en la pantalla de GeoGebra en el trabajo matemático del aula. Investigación colaborativa en torno a la enseñanza de funciones en la Escuela Secundaria. *Educación Matemática*, *33*(3), 7-38. https://doi.org/10.24844/em3303.01

Aké, L. y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, *30*(2), 171-201. doi:10.24844/EM3002.07

Bakhtin, M. (1981). *La imaginación dialógica: cuatro ensayos*. Prensa de la Universidad de Texas.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Camargo, L. (2021). Perspectiva y aclaración de términos. En *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y análisis*. Editorial Universidad de Antioquia.

Carlsen, M. (2018). Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. *Educational Studies in Mathematics, 99*(3), 277-291. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9844-1

Dolores, C. y Mosquera, G. (2022). Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas. *Educación Matemática*, *34*(2), 217-244. https://doi.org/10.24844/EM3402.08

Erath, K., Prediger, S., Quasthoff, U. y Heller, V. (2018). Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: The case of explaining to learn and learning to explain. *Educational Studies in Mathematics*, *99*, 161-179. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9830-7

Godino, J., Aké, L., Contreras, Á., Estepa, A., Fernández, T., Neto, T., Wilhelmi, M., Díaz, C., Oliveras, M., Lacasta, E. y Lasa, A. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias Revista de investigación y experiencias didácticas, 33*(1), 127-150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468

Gravemeijer, K. y Prediger, S. (2019). Topic-Specific Desig Research: An Introduction. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (33-57). ICME-14 Monografs. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_2

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGrawHill.

Günster, S. y Weigand, H. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-020 01179-1

Jiménez, A. y Pineda, L. (2015). Comunicación y argumentación en la clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, (16), 101-116. https://doi.org/10.19053/01207105.3243

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* MEN.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

León, O. y Calderón, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas: ¿una relación necesaria?, hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Universidad del Valle.

Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó. y Samper, C. (2021). Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula. *Educación Matemática*, *33*(2), 87-114. https://doi.org/10.24844/em3302.04

Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(3), 215-229. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y

Sfard, A. (2008). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. *En aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional.* Programa editorial Universidad del Valle.

Sfard, A. y Cobb, P. (2014). Research in mathematics education: What can it teach us about human learning? En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 545-564). Cambridge University Press. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139519526.033

Watson, A., Ayalon, M. y Lerman, S. (2018). Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula. *Educational Studies in Mathematics*, *97*, 255-272. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9798-8

Zaldívar, J. y Briceño, E. (2019). ¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas. *Educación Matemática, 31*(2), 212-240. https://doi.org/10.24844/em3102.09

Anexo

A continuación, se comparte el enlace de la carpeta que contiene todas las evidencias previamente mencionadas en este trabajo de investigación.
https://drive.google.com/drive/folders/1_pKZ5zQvS8XYgN2zuH8QIGinu8gPe4TO?usp=sharing