Una introducción al estudio de los grupos de Lie

Julián Flórez Berrio

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matematicas
Medellín, Colombia
2023

Una introducción al estudio de los grupos de Lie

Julián Flórez Berrio

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al titulo de:
Matemático

Director:
Ph.D. Pedro Hernandez Rizzo

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matematicas
Medellín, Colombia
2023

Índice General

Introducción

Una de las teorías más relevantes en matemáticas es la teoría de grupos. Para comprender sus propiedades, estructuras y consecuencias, resulta útil estudiar los casos más simples, especialmente los grupos finitos, como los grupos de permutaciones y transformaciones. Estos últimos tienen un gran impacto en áreas posteriores, como la teoría de representaciones de grupos, que a su vez tiene amplias implicaciones en diversos campos, como el estudio de soluciones de ecuaciones algebraicas. Esto se evidencia en las soluciones de Galois y en la teoría que lleva su nombre.

Debido a la complejidad de clasificar y comprender las propiedades de los grupos, es indispensable abordar los desafíos mediante nuevas técnicas y niveles de abstracción para comprender su comportamiento. Un enfoque para lograr esto es estudiarlos utilizando el "cálculo", es decir, dotándolos de la estructura de variedades. Precisamente, un grupo de Lie se refiere a una variedad suave que posee una estructura de grupo compatible con su estructura analítica. Este nombre honra al matemático noruego Sophus Lie, quien fue el pionero en desarrollar la idea alrededor de 1874. Lie propuso crear una teoría para las representaciones de grupos en este nuevo contexto analítico, con el fin de simplificar problemas de ecuaciones diferenciales parciales y geometría, de manera similar a lo que Galois hizo con el estudio de las representaciones de ciertos grupos finitos para las ecuaciones algebraicas.

Así las cosas se define formalmente un grupo de Lie como:

Definición 0.1 (Grupo de Lie)**.** Un grupo de Lie es una variedad suave G que también admite una estructura de grupo, que es compatible con esta estructura diferencial, esto es, las funciones de producto e inversión:

$$m : G \times G \longrightarrow G \quad m(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$$
$$i : G \longrightarrow G \quad i(g) = g^{-1}$$

Son ambas funciones suaves.

Ejemplos de estos grupos son el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$, la esfera $n-$dimensional S^n, el toro $n-$dimensional $\mathbb{T}^n$ y el grupo lineal $GL(n;\mathbb{R})$ y varios de sus subgrupos (cerrados) $SL(n)$, $Sp(n)$, $O(n)$, entre otros.

La estructura de grupo sobre G define una cierta operación bilineal anti-simétrica en el espacio tangente sobre el elemento identidad del grupo G, a saber, $\mathfrak{g} = T_I G$. Con base en esto se presenta la noción de un álgebra de Lie.

Definición 0.2 (Álgebra de Lie)**.** Una álgebra de Lie es un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$, dotado de una operación binaria, bilineal:

$$[-,-] : V \times V \longrightarrow V$$

Que satisface:

1. i)**(Anti-simetría)** $[a,a] = 0$

2. ii)**(Identidad de Jacobi)** $[a,[b,c]]+[c,[a,b]]+[b,[c,a]]=0$

Un ejemplo de álgebra de lie sobre $\mathbb{R}$ es: $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=(End(\mathbb{R}^n),[a,b]=ab-ba)$

Una herramienta fundamental para determinar importantes propiedades de los grupos de Lie es el estudio de sus correspondientes álgebras de Lie. Al describir estas últimas, se comprende la estructura de grupo y, sobre todo, las simetrías que se producen. Para comprender en profundidad estos conceptos, es necesario utilizar herramientas de análisis en variedades, álgebra, geometría, topologia algebraica e incluso teoría de representaciones.

Históricamente, el estudio y la aplicación de los grupos y álgebras de Lie surgieron a partir de la abstracción de ciertos estudios relacionados con las ecuaciones diferenciales. Posteriormente, se aplicaron ampliamente en ejemplos provenientes de la física, especialmente en la mecánica clásica, la mecánica celeste e incluso en la mecánica cuántica. En el ámbito de las matemáticas, estas teorías tienen importantes aplicaciones y consecuencias en la teoría de números, el análisis real y complejo, la geometría diferencial, simpléctica y algebraica, entre otras áreas. Su papel en varias ramas de las matemáticas es de gran valor, lo que la posiciona como un área de alto impacto y con importantes consecuencias en todos los ámbitos de los que participa. Parte de este trabajo es ilustrar la incidencia y aplicabilidad de herramientas del álgebra, análisis, topología algebraica y geometría para atacar problemas relacionados a problemas determinantes de esta teoría.

Esta tesis es organizada como sigue. En el primer capítulo veremos algunas definiciones elementales y resultados que relacionan funciones y los comportamientos de estas con el espacio topológico donde ellas viven. En el segundo capítulo desarrollaremos el concepto de Grupo Fundamental, una definición mas abstracta la cual asocia una variedad con un grupo, ahí, a modo de ejemplo y aplicaciones, calcularemos el grupo fundamental de varios espacios topológicos, como lo son por ejemplo los espacios de matrices o espacios proyectivos, y veremos que esto no es una labor sencilla, por lo que hará falta definir otros conceptos o asociarles propiedades extras que no alteran su topología. Finalmente, en el tercer capitulo serán presentados, a modo de conclusión, las definiciones mas comprensibles de lo que es un grupo y álgebra de Lie, sobre los espacios matriciales, con el objetivo de probar el tercer teorema de Lie. Los resultados en esta sección son compatibles y se siguen cumpliendo con la teoría general de grupos de Lie.

Capítulo 1

Homotopía

En este primer capítulo son presentados algunos conceptos topológicos que más adelante serán indispensables para entender y motivar algunos resultados destacados tanto de los grupos de Lie como de las álgebras de Lie. El primer concepto necesario que establece una conexión entre la topología y el álgebra es lo que se conoce *homotopía*. La homotopía, concepto introducido por Poincaré en su *Analysis situs* de 1895, puede interpretarse informalmente o bien como la deformación continua de funciones (continuas) entre espacios topológicos o bien como un camino que une, dentro del espacio de funciones, a dos funciones continuas dadas. Ambas descripciones son motivadas por razones formales que no estudiaremos con detalles aquí. Para esto le recomendamos al lector las referencias [4] y [1]

1.1. Funciones Homotopicas

Definición 1.1. Sean X, Y dos espacios topológicos. Si $f,g : X \longrightarrow Y$ son continuas, decimos que f es *homotopica* con g, lo que se denota por $f \simeq g$, si existe una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = H(x,0)$, $g(x) = H(x,1)$ para todo $x \in X$. la función H es llamada homotopia entre f y g y, en tal caso, cuando se requiera de cierto contexto, escribimos $H : f \simeq g$

Otra manera, equivalente, de ver una homotopia es considerar para cada $t \in [0,1]$ la función continua $H_t : X \longrightarrow Y$ con $H_t(x) = H(x,t)$. Esto nos da una familia continua de funciones (continuas) a un parámetro H_t, $0 \leq t \leq 1$, tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Esto es, una deformación continua através del tiempo que deforma a la función f hasta llegar a g.

Si el espacio $C(X,Y)$ de todas las funciones continuas de X a Y se le asigna la topología compacta-abierta, entonces la función $h : [0,1] \longrightarrow C(X,Y)$, $t \longrightarrow H_t$ se vuelve continua, y las funciones f y g se pueden unir mediante este camino en esta topología. De igual forma la función $h : I \longrightarrow C(X,Y)_{co}$ define una homotopía entre $h(0)$ y $h(1)$ si X es localmente compacto Hausdorff o metrizable [11]. Esto es, dos funciones son homotopicas si pertenecen a la misma componente conexa.

Proposición 1.1.1. *Sean X, Y dos espacios topológicos. En el conjunto de funciones continuas $C(X,Y)$, la relación "$\simeq$" de homotopía es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean $f,g,h : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Entonces:

1. **Reflexividad** $H : f \simeq f$ donde $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ es definida por $H(x,t) = f(x)$ para todo $x \in X$ y $t \in [0,1]$

2. **Simetría** $H : f \simeq g \Rightarrow G : g \simeq f$ donde $G(x,t) = H(x,1-t)$ para $x \in X, t \in [0,1]$.

3. **Transitividad** $H : f \simeq g, G : g \simeq h$ implica $F : f \simeq h$, donde:

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   Note que $H(x,1) = g(x) = G(x,0)$, así la continuidad de la función F esta garantizada gracias al lema del pegado [8].

$\square$

Las clases de equivalencia son llamadas clases de homotopia. La clase de homotopia de la función $f : X \longrightarrow Y$ es representada por $[f]$. Mientras que el conjunto de clases de homotopia en el conjunto $C(X,Y)$ es representado por $[X,Y] = C(X,Y)/\simeq$.

Lema 1.1.1. *Sean X,Y,Z espacios topológicos, $f,g : X \longrightarrow Y$ y $h,k : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas. Si $f \simeq g$, entonces $h \circ f \simeq h \circ g$. Así mismo, si $h \simeq k$, entonces $h \circ g \simeq k \circ g$.*

Demostración. Si $H : f \simeq g$, entonces es fácil verificar que la función continua $h \circ H : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ es tal que $h \circ H(x,0) = h \circ f$ y $h \circ H(x,1) = h \circ g$.

Por otro lado si $H : h \simeq k$, se define la función $G(x,t) = H(g(x),t), x \in X, t \in [0,1]$. G es continua en la topología producto. En efecto, $G = H \circ (g, Id)$, donde al ser las componentes continúas la afirmación se sigue. Además $G(x,0) = h \circ g(x)$ y $G(x,1) = k \circ g(x)$ i.e. $G : h \circ g \simeq k \circ g$. $\square$

Corolario 1.0.1. *Si $f \simeq g$ y $h \simeq k$, entonces $h \circ f \simeq k \circ g$.*

Demostración. Inmediato de la transitividad de la relación de equivalencia "$\simeq$" y del Lema 1.1.1. $\square$

Podemos entonces decir que la composición de funciones continuas es preservada bajo homotopías. Gracias al Corolario 1.0.1 , el cual puede interpretarse como la preservación de la composición por homotopías, es posible definir la operación composición entre clase. Esto es, para X,Y,Z espacios topológicos definimos $[g] \circ [f] = [g \circ f]$. Esta última clase está bien definida, es decir, no depende de los representantes g y f, como consecuencia del Corolario 1.0.1.

Ejemplo 1.1. Dos funciones constantes $f,g : X \longrightarrow Y$, $f(x) = p$ $g(x) = q$ son homotópicas si y solo si p y q pertenecen a la misma componente conexa en el espacio Y. En efecto si existe un camino $a : I \longrightarrow Y$ que une a los puntos p y q, bastará definir $H(x,t) = a(t)$ $\forall_{x,t}$ $(x,t) \in X \times I$. Recíprocamente, si las funciones constantes son homotópicas, digamos, $H : f \simeq g$ entonces esta define el camino $a(t) = H(x_0,t)$ que conecta a los puntos p y q, para algún $x_0 \in X$.

Ejemplo 1.2. Si $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo. Entonces para cualquier espacio topológico X y dos funciones continuas $f,g : X \longrightarrow Y$ ellas son homotópicas. En efecto, para ello basta definir la homotopía $H : X \times I \longrightarrow Y$ como $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

La homotopía H en el ejemplo 1.2 es llamada *homotopía recta*. Mas generalmente, suponga $Y \subseteq E$ donde E es un subespacio vectorial normado y suponga también que el segmento de recta que une a $f(x)$ con $g(x)$ esta contenido een Y, entonces las funciones f y g son homotópicas a través de una homotopía recta, como es fácil verificar. En particular cualquier función continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es homotópica a una (cualquier) función constante.

Ejemplo 1.3. Considere las funciones $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\|f(x) - g(x)\| \leq \|f(x)\|$ para todo $x \in X$ entonces $f \simeq g$. En efecto, para $0 \leq t \leq 1$ se tiene que $\|t(f(x) - g(x))\| \leq \|f(x)\|$. Así basta con definir la homotopía recta, la cual estará bien definida por la desigualdad anterior (su imagen no contiene al 0).

Ejemplo 1.4. Si $n = 2k-1$ entonces la función antipodal $f : S^n \longrightarrow S^n$, $f(x) = -x$ es homotópica a la función identidad. En efecto, al considerar $S^n \subseteq \mathbb{R}^{2k}$ esta se puede escribir como $S^n = \left\{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| = 1\right\}$ y $H(z,t) = ze^{\pi it}$ define una homotopía entre la función antipodal y la función identidad. Si $n = 2k$ entonces f no es homotópica a la función identidad. Este es un resultado mucho más difícil de demostrar y para un estudio de esta recomendamos [6].

Proposición 1.1.2. *Dadas dos funciones continuas $f,g : X \longrightarrow S^n$, si $f(x) \neq -g(x)$ $\forall x \in X$ entonces $f \simeq g$*

Demostración. En efecto, como $f(x) \neq -g(x)$, entonces el segmento de recta que une los puntos $f(x)$ y $g(x)$ no contiene el origen, esto es $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$ $\forall t \in I$. Para obtener la homotopia H entre f y g se define:

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$$

Asi $H(x,0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x)$ y $H(x,1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x)$ $\square$

Como casos particulares de la proposición se obtiene que:

- Si $f : S^n \longrightarrow S^n$ es tal que $f(x) \neq x$, no tiene puntos fijos, entonces f es homotópica a la función antipodal $\alpha(x) = -x$.
- Si $f : S^n \longrightarrow S^n$ es una función continua con $f(x) \neq -x$ entonces f es homotópica a la función identidad.
- Si $f : X \longrightarrow S^n$ no es sobreyectiva entonces f es homotópica a una función constante $c_p(x) = -p$ donde $p \in S^n \setminus f(X)$

Proposición 1.1.3. *Si existe un campo vectorial continuo no nulo en S^n entonces la función antipodal, α, es homotopica a la función identidad.*

Demostración. Sea $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial continuo no-nulo en S^n, esto es, una función continua y $0 \notin \mathrm{Im}(\nu)$. Defina $f : S^n \longrightarrow S^n$ como:

$$f(x) = \frac{x + v(x)}{\|x + v(x)\|}$$

Evidentemente, f es continua y $f(x) \neq x$. De las observaciones anteriores se obtiene $f \simeq \alpha$. Por otro lado, se tiene que la función identidad, $i : S^n \longrightarrow S^n$, es tal que $i \simeq f$, basta con definir la homotopia H de la siguiente manera:

$$H(x,t) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}$$

Por último, como $\simeq$ es una relación transitiva se concluye que $i \simeq \alpha$ □

1.2. Tipo de Homotopía

Definición 1.2. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe una función continua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq Id_X$, donde id_Y y id_X representan las identidades sobre los respectivos espacios. Decimos que g es la inversa homotopica de f y que dos espacios topológicos son *homotópicamente equivalentes* si admiten una equivalencia homotópica entre ellos. En este caso escribimos $X \equiv Y$, o bien $f : X \equiv Y$

Si g es la inversa homotópica de f entonces ella es única, a menos de homotopías, esto es si existe otra g' tal que $f \circ g' \simeq id_Y$ y $g' \circ f \simeq id_X$, entonces $g \simeq g'$, como es fácil verificar. Además de la definición se puede verificar que la relación "$\equiv$" de "ser homotópicamente equivalente a" define una relación de equivalencia. En efecto:

1. $X \equiv X$, basta considerar $f = g = id_X$
2. Si $X \equiv Y$ entonces gracias a la definición se obtiene de inmediato que $Y \equiv X$
3. Si $X \equiv Y, Y \equiv Z \Rightarrow X \equiv Z$. Para esto suponga que $f_1 : X \longrightarrow Y, f_2 : Y \longrightarrow X, g_1 : Y \longrightarrow Z, g_2 : Z \longrightarrow Y$ son tales que:

   - $f_1 \circ f_2 \simeq id_Y$, $f_2 \circ f_1 \simeq id_X$
   - $g_1 \circ g_2 \simeq id_Z$ y además $g_2 \circ g_1 \simeq id_Y$

   Luego haciendo $f = g_1 \circ f_1$ y $g = f_2 \circ g_2$ se obtiene que $f \circ g \simeq id_Z$ y $g \circ f \simeq id_X$, pues la relación $\simeq$ es transitiva y se preserva por composición, gracias al Corolario 1.0.1

Ejemplo 1.5. $S^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. En efecto, considerando las funciones, de inclusión y proyección radial, $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $i(x) = x$, $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$, $r(y) = \frac{y}{\|y\|}$, se obtiene que $r \circ i = id_{S^n}$ y $i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $i \circ r(y) = \frac{y}{\|y\|}$. Esta última composición es homotópica a la función $id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ gracias a la homotopia lineal. De manera análoga se puede probar que $B^{n+1} \setminus \{0\} \equiv S^n$ donde B^{n+1} es la bola de radio 1 centrada en el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$

Ejemplo 1.6. Todos los subconjuntos convexos no vacios en $\mathbb{R}^n$ son homotópicamente equivalentes gracias al ejemplo 1.2 y su observación.

Evidentemente si $h : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces $X \equiv Y$. Si $X \equiv X'$ y $Y \equiv Y'$ entonces existe una biyección entre $[X,Y]$ y $[X',Y']$ dada por $[f] \longrightarrow [\psi \circ f \circ \varphi]$ donde $\psi : X' \equiv X$ y $\varphi : Y \equiv Y'$.

Definición 1.3. Se dice que un espacio X es *contráctil* si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto ($X \equiv \{p\}$). Una función que es homotópica a una función constante se dice que es homotópicamente nula.

Proposición 1.2.1. *X es contráctil si y solo si la función identidad id_X es homotópica a una función constante*

Demostración. Supongamos $f : X \equiv \{p\}$ y $g : \{p\} \longrightarrow X$ la inversa homotópica de f para algún punto p. Entonces $g \circ f \simeq id_X$ mientras que $g \circ f(x) = g(p)$. Recíprocamente, si $id_X \simeq cte$ entonces $id_X : X \equiv \{cte(x_0)\}$ donde la función cte es la inversa homotópica de id_X y $x_0 \in X$ □

Corolario 1.0.2. *Un espacio X es contráctil si y sólo si si las funciones continuas $f,g : Y \longrightarrow X$, definidas sobre un espacio topológico arbitrario, son homotópicas.*

Demostración. $\Leftarrow$ Tomando $Y = X$ y las funciones id_X y cte, cualquier función constante entonces son homotópicas, luego X es contráctil.

$\Rightarrow$ Suponga X es contráctil, Y cualquier espacio topológico $f,g : Y \longrightarrow X$ funciones continuas. Entonces $id_X \simeq c$ donde c es una función constante, luego $f = id_X \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq id_X \circ g = g$. □

Corolario 1.0.3. *Todo espacio contráctil es conexo por caminos.*

Demostración. Supongamos X contráctil y $x_0, x_1 \in X$. Definamos $c(x) = x_1$ y sea $H : id_X \simeq c$ entonces $a(t) = H(x_0,t)$ es un camino que une los puntos x_0 y x_1 □

Proposición 1.2.2. *Si X o Y es contráctil entonces toda función continua $f : X \longrightarrow Y$ es homotopica a una función constante.*

Demostración. Supongamos que X es contráctil y sea $H : id_X \simeq c$. Luego, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua se sigue que $f \circ H : f = f \circ id_X \simeq f \circ c$ de donde $f \circ c$ es una función constante.

Suponga Y contráctil y sea $K : id_Y \simeq a$ donde $a : Y \longrightarrow Y$ es una función constante. Luego, la función $L : X \times I \longrightarrow Y$ definida por $L(x,t) = K(f(x),t)$ es una homotópia entre f y una función constante. □

Ejemplo 1.7 (Estrellas y Conjuntos Convexos)**.** Un subconjunto X de un espacio vectorial normado E se llama *estrella* si existe un punto p tal que para todo $x \in X$ el segmento de recta que une los puntos p y x esta contenido en X. Si H es la homotópia recta entre id_X y la función constante $X \longrightarrow \{p\}$, H es bien definida y por lo tanto X es contráctil.

Todo conjunto convexo es, en particular, una estrella y así contráctil

1.3. Retracción y Extensión de Funciones

Es bien conocido el teorema de extensión de Tietze y Urysohn (ver [8]) que habla sobre la posibilidad de extender una función continuamente $f : A \longrightarrow Y$ a $X \supseteq A$ siendo A un subconjunto cerrado donde X es un espacio normado y Y un intervalo de números reales. Esto es, encontrar una función continua $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f}|_A = f$. Veremos que el teorema de Tietze-Urysohn seguirá siendo valido si Y es contráctil y del tipo ENP, concepto que será definido en esta sección (ver Definición 1.5)

Proposición 1.3.1. *Sean $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $B^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera $n-$dimensional y la bola de radio uno y centrada en el origen, respectivamente. Sea Y un espacio topológico arbitrario. Una función continua $f : S^n \longrightarrow Y$ es homotópica a una función constante si y solo si f tiene una extensión continua $\bar{f} : B^{n+1} \longrightarrow Y$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos $H : f \simeq c$ donde c es una función constante. $\forall x \in B^{n+1}$ existen únicos $t \in [0,1]$ y $\xi \in S^n$ tal que $x = (1-t)\xi$. Si decimos que $\bar{f}(x) = \bar{f}((1-t)\xi) = H(\xi,t)$ entonces esta define una extensión para f pues si $x \in S^n$ se tiene que $t = 0, \xi = x$ Luego $\bar{f}(x) = H(x,0) = f(x)$. Además $\bar{f}(0) = H(\xi,1) = c$ $\forall\xi$. Como $H = \bar{f} \circ \varphi$, donde $\varphi : S^n \times I \longrightarrow B^{n+1}$ es tal que $\varphi(x,t) = (1-t)x$, para ver que $\bar{f}$ es continua, haremos uso de la siguiente afirmación.

Si $K, L \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos compactos y $\varphi : K \longrightarrow L$ continua y sobreyectiva entonces $g : L \longrightarrow X$ es continua si y solo si $g \circ \varphi : K \longrightarrow X$ es continua. En efecto si φ es continua y sobreyectiva sobre conjuntos compactos entonces, esta será una transformación cerrada. Luego si $V \subset X$ es cerrado entonces $g \circ \varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(g^{-1}(V))$ es cerrado un conjunto cerrado, y como φ es una aplicación cerrada y sobreyectiva se concluye $g^{-1}(V)$ es cerrado, es decir g es continua.

$\Leftarrow$ Supongamos que f tiene una extensión $\bar{f}$ sobre B^{n+1}. Definamos la función $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow Y$ como $H(\xi,t) = \bar{f}((1-t)\xi)$. Entonces $H(\xi,0) = \bar{f}(\xi) = f(\xi)$ y $H(\xi,1) = \bar{f}(0)$, así f es homotópica a la función constante $S^n \longrightarrow Y$, $\xi \longrightarrow \bar{f}(0)$. □

En particular para $n = 1$, si una función continua $f : S^1 \longrightarrow X$ es homotópica a una función constante si y solo si tiene una extensión continua sobre el disco. Este resultado nos ofrecerá, más adelante, una definición alternativa para un concepto fundamental de este trabajo, a saber, conjunto simplemente conexo.

Definición 1.4. Sea Y un subconjunto de un espacio X. Y se le dice *retracto* de X si existe una función continua $r : X \longrightarrow Y$ tal que $r|_Y = id_Y$. En otras palabras, si existe una extensión continua de la función id_Y. En este caso, r es llamada *retracción de X en Y*.

Toda retracción es sobreyectiva, ya que $Y = \{y \in Y \mid r(y) = y\}$, como es fácil de verificar. Además cuando X es Hausdorff entonces Y es un subconjunto cerrado por la expresión anterior. Si X es conexo y Y es un subconjunto disconexo de X entonces Y no podrá ser un retracto de X pues $r(X) = Y$ y r es una función continua.

Ejemplo 1.8.
1. $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, es una retracción.
2. La bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un retracto de $\mathbb{R}^n$.

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es un retracto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{z-eje\}$. La retracción esta dada por la proyección sobre el plano.

Proposición 1.3.2. *$Y \subset X$ es un retracto de un espacio X si y sólo si cualquier continua $f : Y \longrightarrow E$ tiene una extensión continua a X para cualquier espacio E.*

Demostración. Si $r : X \longrightarrow Y$ es una retracción y $f : Y \longrightarrow E$ es una función continua. Entonces $f \circ r : X \longrightarrow E$ es una extensión continua de f pues $r|_Y = id_Y$. Ahora bien, si hacemos $E = Y$ y $f = id_Y$ entonces existe una extensión continua de la función identidad, así Y es un retracto de X. □

Definición 1.5. Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$, decimos que Y es del tipo ENR, de sus siglas en ingles *euclidean neighborhood retract*, cuando existe una retracción $r : V \longrightarrow Y$ donde V es un subconjunto abierto de Y en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 1.9. La esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no es un retracto de $\mathbb{R}^{n+1}$, mientras que si es del tipo ENR, como consecuencia del Ejemplo 1.8, donde $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es un subconjunto abierto.

Proposición 1.3.3. *Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto del tipo ENR. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquier par de funciones $f,g : X \longrightarrow Y$, satisfaciendo $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ son homotópicas.*

Demostración. Suponga $r : V \longrightarrow Y$ es una retracción de una vecindad $V \supset Y$. Como Y es compacto entonces $\varepsilon = dist(Y, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$, y luego si $y \in Y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\|y - z\| < \varepsilon$ entonces $z \in V$, ya que en caso contrario se tendría que $dist(Y, \mathbb{R}^n \setminus V) < \varepsilon$. Observe también que, cualquier punto que pertenece a la recta que une a los puntos y y z esta en V. Así, si $f,g : X \longrightarrow Y$, son tales que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ para cualquier $x \in X$ entonces tenemos que $(1-t)f(x) + tg(x) \in V$ para todo $x \in X$ y todo $t \in [0,1]$. Si $H : X \times I \longrightarrow Y$ es tal que $H(x,t) = r[(1-t)f(x) + tg(x)]$, esta bien definida y además $H(x,0) = r[f(x)] = f(x), H(x,1) = r[g(x)]$ pues $r|_Y = id_Y$. □

Obs. Si M,N superficies diferenciables compactas. Entonces toda función continua $f : M \longrightarrow N$ es homotopica a una función diferenciable [6].

Proposición 1.3.4. *Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ del tipo ENR y $A \subset X$ un subconjunto cerrado de un espacio normado. Toda función continua $f : A \longrightarrow Y$ puede extenderse continuamente a una vecindad de A en X*

Demostración. Supongamos $r : V \longrightarrow Y$ es una retracción de una vecindad $V \supset Y$. Por el teorema de extensión de Tietze-Urysohn la función f tiene una extensión continua $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Como φ es continua entonces $U = \varphi^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de A en X y la función $\bar{f} = r \circ (\varphi|_U)$ es una extensión de f al conjunto abierto U. □

Teorema 1.1 (Borsuk)**.** *Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ un espacio del tipo ENR, A un subconjunto cerrado de un espacio métrico X y $f,g : A \longrightarrow Y$ dos funciones continuas homotópicas. Si f tiene una extensión continua $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ entonces g también tiene una extensión continua $\bar{g}$ tal que $\bar{f} \simeq \bar{g}$*

Demostración. Supongamos $H : f \simeq g$, $H : A \times I \longrightarrow Y$. Sea f_1 la siguiente función continua $f_1 : (X \times 0) \cup (A \times I) \longrightarrow Y$:

$$f_1(x,t) = \begin{cases} \bar{f}(x), & t = 0, x \in X \\ H(x,t), & (x,t) \in (A \times I) \end{cases}$$

f_1, en efecto, es continua gracias al lema del pegado [8] pues A es un subconjunto cerrado. Por 1.3.4 f_1 puede extenderse continuamente a una vecindad W en $X \times I$. Como I es compacto entonces, por el teorema de Wallace [7] existe un conjunto abierto $U \supset A$ en X tal que $W \subset (X \times 0) \cup (U \times I)$. En particular, f_1 tiene una extensión $f_2 : (X \times 0) \cup (U \times I) \longrightarrow Y$. Sea $\lambda : X \longrightarrow [0,1]$ la función de Urysohn para $(A, X \setminus U)$, i.e.

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus U \end{cases}$$

Así la extensión $\bar{H} : X \times I \longrightarrow Y$ de la homotópia H está definida por $\bar{H}(x,t) = f_2(x, \lambda(x)t)$, la cual claramente satisface, $\overline{H}(x,0) = f_2(x,0) = f_1(x,0) = \overline{f}(x)$ y que $\overline{H}(x,1) =: \overline{g}(x)$, es tal que, para cada $x \in A$, $\overline{g}(x) = f_2(x, \lambda(x)) = f_2(x,1) = f_1(x,1) = H(x,1) = g(x)$, lo que queríamos probar. □

Corolario 1.1.1. *Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ un espacio contráctil del tipo ENR. Toda función continua $f : A \longrightarrow Y$, definida en un subconjunto cerrado del espacio métrico X tiene una extensión $\bar{f} : X \longrightarrow Y$*

Corolario 1.1.2. *Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ un espacio del tipo ENR y $A \subset X$ un subconjunto cerrado contráctil del espacio métrico X. Toda función continua $f : A \longrightarrow Y$, tiene una extensión $\bar{f} : X \longrightarrow Y$*

Estos últimos dos corolarios son consecuencia de la Proposición 1.2.2 pues evidentemente toda función constante sobre A posee una extensión continua a X

Corolario 1.1.3. *Sea X un espacio métrico contráctil, $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $Y \subset \mathbb{R}^m$ un espacio del tipo ENR. Una función continua $f : A \longrightarrow Y$ tiene una extensión continua $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ si y solo si f es homotópica a una función constante.*

Demostración. $\Rightarrow$ Si $\bar{f}$ es una extensión continua, como X es contráctil, por la Proposición1.2.2 $\bar{f}$ es homotópica a una función constante c, $\bar{f} \simeq c$, y por tanto usando la inyección $i : A \hookrightarrow X$, $i(x) = x$ se tiene que $f = \bar{f}|_A = f \circ i \simeq c \circ i = c|_A$

$\Leftarrow$ Inmediato del Teorema 1.1 □

Capítulo 2

Grupo Fundamental

En este capítulo estudiaremos el caso particular cuando $X = I = [0,1]$ y las homotópias entre las funciones con dominio I, a lo que llamaremos homotópias por caminos. Dado un camino $\alpha : I \longrightarrow X$, los puntos $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ se llamaran puntos finales. En particular $\alpha(0)$ es el punto inicial y $\alpha(1)$ el punto final. Cuando $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ entonces α se denomina *camino cerrado* con punto base $x_0 \in X$. Como I es un espacio contráctil entonces todo camino α es homotopica a una función constante. De este modo, una restricción adicional será indispensable para obtener otros resultados.

2.1. Homotopía por Caminos

Definición 2.1. Sea X un espacio y sean $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ caminos en X que unen los puntos x_0, x_1 en X. Una homotopía de α a β es una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que $H(s,0) = \alpha(s), H(s,1) = \beta(s)$ para todo $s \in [0,1]$ y $H(0,t) = x_0,\ \ H(1,t) = x_1$ para todo $t \in [0,1]$. Si H existe, se dice que hay homotópia por caminos entre α y β. Escribimos $\alpha \cong \beta$, o bien $H : \alpha \cong \beta$.

Es necesario que ambos caminos α, β tenga los mismos puntos finales. En particular, cuando la homotopía H se da entre caminos cerrados, esta satisface que $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ para todo $t \in I$.

Proposición 2.1.1. *Homotopía por caminos ($\cong$) es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los caminos en X que unen los puntos x_0 y x_1*

La prueba de este último resultado es esencialmente la misma demostración de la Proposición 1.1.1. Solo resta probar que los puntos finales están fijados por las homotopías, lo cual es fácil verificar. A las clases de equivalencia del camino $\alpha : I \longrightarrow X$ con puntos finales $x_0,\ x_1$ las continuaremos denotando por $[\alpha]$.

Ejemplo 2.1. Supongamos X es un subconjunto convexo de un espacio normado. Si α y β son dos caminos cualesquiera que unen a los puntos x_0 y x_1 entonces $\alpha \cong \beta$. En efecto, mediante la homotopía de rectas, $H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$ se ve fácilmente que cumple las condiciones para la homotopía por caminos.

Ejemplo 2.2. Considere los caminos $\alpha(s) = (\cos\pi s, \sin\pi s)$ y $\beta(s) = (\cos\pi s, -\sin\pi s)$, con $0 \leq s \leq 1$, que unen los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. Intuitivamente estas dos funciones no son homotópicas por caminos pues el origen es una obstrucción y no se puede pasar através de él.

Si un camino tiene punto inicial $\alpha(0) = x_0$, hace un recorrido continuo hasta terminar en su punto final $\alpha(1) = x_1$, entonces es natural preguntarse si existe un camino que realice el proceso inverso, es decir, un camino β cuyo punto inicial $\beta(0)$ sea exactamente x_1 mientras que $\beta(1) = x_0$. En efecto, se define el *camino inverso* al camino continuo que cambia de inicio sus puntos finales $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s), \quad \forall s \in I$. En adelante denotaremos por e_x el camino constante tal que $e_x(s) = x$. Las clases de equivalencia tanto del camino inverso como del camino constante las denotaremos por $[\alpha^{-1}] := [\alpha]^{-1}$, $[e_x] := \varepsilon_x$, respectivamente.

Definición 2.2. Sea X un espacio y sean $x_0, x_1, x_2 \in X$. Si $\alpha,\ \beta$ son dos caminos en X que unen x_0 con x_1 y x_1 con x_2, respectivamente ($\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = x_1$ y $\beta(0) = x_1,\ \beta(1) = x_2$). Definimos $\alpha * \beta : [0,1] \longrightarrow X$ como el camino de x_0 a x_2 dado por:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1), \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

la función $\alpha * \beta$ es continua pues en $s = \frac{1}{2}$ se tiene que $\alpha(1) = \beta(0) = x_1$ y por el lema del pegado [8] la función es continua.

Lema 2.1.1. *Suponga que α, α' son dos caminos X que unen a x_0, x_1 y β, β' son caminos que unen a x_1 con x_2. Si $\alpha \cong \alpha'$ y $\beta \cong \beta'$ entonces $\alpha * \beta \cong \alpha' * \beta'$ y $\alpha^{-1} \cong \alpha'^{-1}$*

Demostración. Primero probemos $\alpha * \beta \cong \alpha' * \beta'$. Si $F : \alpha \cong \alpha'$ y $G : \beta \cong \beta'$ podemos definir la función $H : I \times I \longrightarrow X$ como:

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t), \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

De nuevo, gracias al lema del pegado [8], se garantiza que la función H es continua. Mientras que $H(0,t) = F(0,t) = x_0, \quad H(1,t) = G(1,t) = x_2$ y $H(s,0) = \alpha * \beta(s)$, en efecto:

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) = \alpha(2s), \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,0) = \beta(2s-1), \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \alpha * \beta(s)$$

Similarmente $H(s,1) = \alpha' * \beta'(s)$.

Veamos por último que $\alpha^{-1} \cong \alpha'^{-1}$. Si $F(s,t)$ es una homotópia por caminos entre α y α', veamos que $H(s,t) = F(1-s,t)$ es la homotópia buscada. En efecto $H(0,t) = F(1,t) = x_1$, $H(1,t) = F(0,t) = x_0$, $H(s,0) = F(1-s,0) = \alpha(1-s) = \alpha^{-1}(s)$, $H(s,1) = F(1-s,1) = \alpha'(1-s) = \alpha'^{-1}(s)$ □

El símbolo $*$ hace pensar que esta operación es asociativa, es decir si α, β, γ son caminos desde x_0 a x_1, de x_1 a x_2 y desde x_2 a x_3, respectivamente, entonces $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$. Desafortunadamente esta igualdad no es, en general, cierta. Ya que:

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} \alpha * \beta(2s), \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2s-1), \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s), \ 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4s-1), \ \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2s-1), \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha(2s),\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta * \gamma(2s-1),\ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{c} \alpha(2s),\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4s-2),\ \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4s-3),\ \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{array} \right.$$

No obstante, veremos que se cumple que $(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma)$.

Lema 2.1.2. *Sea α un camino en X que une los puntos x_0 y x_1 y sean $\sigma,\ \tau : I \longrightarrow I$ funciones continuas con $\sigma(0) = \tau(0) = s_0$ y $\sigma(1) = \tau(1) = s_1$. Entonces $\alpha \circ \sigma \cong \alpha \circ \tau$, donde ambos caminos $\alpha \circ \sigma$ y $\alpha \circ \tau$ ahora tienen sus puntos iniciales $\alpha(s_0)$ y $\alpha(s_1)$.*

Demostración. Sea α un camino continuo en X. Definamos $H : I \times I \longrightarrow X$ por $H(s,t) = \alpha[(1-t)\sigma(s) + t\tau(s)]$. Es claro que H es una función continua. Y por otro lado, $H(0,t) = \alpha(\sigma(0)) = \alpha(s_0)$, $H(1,t) = \alpha(\sigma(1)) = \alpha(s_1)$, $H(s,0) = \alpha(\sigma(s)) = \alpha \circ \sigma(s)$, $H(s,1) = \alpha(\tau(s)) = \alpha \circ \tau(s)$, lo que queríamos probar. □

Lema 2.1.3. *Si α, β, γ son caminos en un espacio X desde x_0 a x_1, de x_1 a x_2 y desde x_2 a x_3 respectivamente, entonces $(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma)$.*

Demostración. Consideremos la siguiente función $\sigma : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que:

$$\sigma(s) = \left\{ \begin{array}{c} 2s,\ 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ s + \frac{1}{4},\ \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{s+1}{2},\ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{array} \right.$$

La anterior función es continua por el lema del pegado. Además se puede ver que $\alpha * (\beta * \gamma) \circ \sigma(s) = (\alpha * \beta) * \gamma(s)$. En efecto, si $0 \leq s \leq \frac{1}{4}$ entonces $0 \leq 2s \leq \frac{1}{2}$, luego $\alpha * (\beta * \gamma) \circ \sigma(s) = \alpha * (\beta * \gamma)(2s) = \alpha(2(2s)) = \alpha(4s) = (\alpha * \beta) * \gamma(s)$ para todo $0 \leq s \leq \frac{1}{4}$. De forma similar se prueba para las otras regiones del intervalo. Así por el lema anterior usando $\tau = id_{[0,1]}$ se prueba la afirmación. □

Lema 2.1.4. *Sea α un camino en el espacio X que une los puntos x_0 con x_1. Entonces:*

1. $e_{x_0} * \alpha \cong \alpha$
2. $\alpha * e_{x_1} \cong \alpha$
3. $\alpha * \alpha^{-1} \cong e_{x_0}$
4. $\alpha^{-1} * \alpha \cong e_{x_1}$

Demostración. Probaremos tan solo *1* y *3*. Los casos restantes son análogos.

1. Sea σ la siguiente función:

$$\sigma(s) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s-1, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{array} \right.$$

Es fácil ver que $e_{x_0} * \alpha \circ \sigma(s) = \alpha(s)$, aplicando el Lema 2.1.2 con $\tau = id_I$ se obtiene el resultado.

3. Para este caso es necesario tan solo utilizar las siguientes funciones $\tau(s) = 0 \quad \forall s \in [0,1]$ y σ como:

$$\sigma(s) = \left\{ \begin{array}{cc} 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2-2s, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{array} \right.$$

Mientras que $\alpha * \alpha^{-1}(s) = \alpha \circ \sigma(s)$, $e_{x_0}(s) = x_0 = \alpha(0) = \alpha \circ \tau(s)$. De nuevo haciendo uso del Lema 2.1.2 se concluye $\alpha * \alpha^{-1} \cong e_{x_0}$ $\square$

Lema 2.1.5. *Sean* $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ *un camino en el espacio* X *y* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. *Si* $\alpha_i = \alpha|_{[t_i-1,t_i]}$ *entonces* $\alpha \cong (\alpha_1 * (\alpha_2 * (\cdots) * \alpha_n)$.

Demostración. Cuando $n = 1$ es trivial. Si $n = 2$ tenemos entonces $0 = t_0 < t_1 < t_2 = 1$ mientras que:

$$\alpha_1 * \alpha_2(s) = \begin{cases} \alpha_1(2s) = \alpha(2t_1 s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2s-1) = \alpha(2(s+t_1-t_1 s)-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esto es $\alpha_1 * \alpha_2(s) = \alpha \circ \tau(s)$, donde:

$$\tau(s) = \begin{cases} 2t_1 s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2(s+t_1-t_1 s)-1, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Evidentemente τ es una función continua con $\tau(0) = 0,\ \tau(1) = 1$. Usando el Lema 2.1.2 con $\sigma = id_{[0,1]}$ se obtiene el resultado para $n = 2$.

Por inducción, asuma que el resultado se cumple para $n-1$ caminos. Si denotamos por $\alpha' = \alpha|_{[0,t_{n-1}]}$, entonces, a partir de la hipótesis de inducción aplicada a α' se sigue que $\alpha' \cong (\alpha_1 * (\alpha_2 * (\cdots) * \alpha_{n-1})$ en consecuencia $\alpha \cong \alpha' * \alpha_n \cong (\alpha_1 * (\alpha_2 * (\cdots) * \alpha_n)$, lo que prueba el lema. $\square$

2.2. Grupo Fundamental

Todos las afirmaciones probadas en la sección anterior servirán para justificar y dejar bien definido lo que se conoce por el *grupo fundamental* de un espacio X.

Definición 2.3. Sea X un espacio y $x_0 \in X$. $\pi_1(X,x_0)$ es el conjunto de clases de homotópia por caminos cerrados con base en x_0.

Es bien conocido (ver, por ejemplo, [8] [11]) que la esfera S^1 es homeomorfa al espacio cociente $[0,1]/\sim$ obtenido dado por la siguiente identificación $0 \sim 1$ y $x \sim x$ si $x \neq 0,1$. De este modo, a partir de la afirmación anterior un camino cerrado es equivalente a considerar funciones continuas cuyo domino es S^1, por la propiedad universal del cociente. Esto no solo reduce la definición sino también que permite generalizaciones a lo que se conocen como grupos de homotopía de órdenes superiores $\pi_n(X,x_0)$ con $n \geq 1$ (ver, por ejemplo, [5][4])

Si consideramos solo caminos cerrados con base en un punto particular, digamos x_0 podemos decir lo siguiente:

- Por el Lema 2.1.1 se puede decir que si $[\alpha] = [\alpha']$ y $[\beta] = [\beta']$ entonces $[\alpha * \beta] = [\alpha' * \beta']$. Así podemos definir un producto en el conjunto $\pi_1(X,x_0)$ por $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ y por lo dicho previamente, este producto no depende de los representantes.

- En virtud del lema 2.1.3 la operación binaria $*$ es una operación asociativa.

- Finalmente, por el Lema 2.1.4, $\varepsilon_{x_0} = [e_{x_0}]$ actúa como elemento identidad mientras que $[\alpha^{-1}] := [\alpha]^{-1}$ es el inverso de $[\alpha]$ bajo la operación $*$.

Las afirmaciones anteriores son la demostración del siguiente Teorema.

Teorema 2.1. $\pi_1(X,x_0)$ *es un grupo con el producto* $*$.

Proposición 2.2.1. *Cualquier camino σ en X que une los puntos x_0 con x_1 induce un isomorfismo $\sigma_\sharp : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X,x_1)$, donde $\sigma_\sharp([\alpha]) := [\sigma^{-1} * \alpha * \sigma]$. En particular, cuando X es conexo por caminos entonces $\pi_1(X,x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$ para cualquier par de puntos en X.*

Demostración. Note primero que en efecto $\sigma^{-1} * \alpha * \sigma$ es un camino cerrado continuo en x_1. $\sigma^{-1} * \alpha * \sigma(0) = \sigma^{-1}(0) = \sigma(1) = x_1$, $\sigma^{-1} * \alpha * \sigma(1) = \sigma(1) = x_1$, por tanto $\sigma_\sharp$ esta bien definida. Veamos ahora que en efecto $\sigma_\sharp$ es un isomorfismo (de grupos). Primero, probemos es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \sigma_\sharp([\alpha]) * \sigma_\sharp([\beta]) &= [\sigma^{-1} * \alpha * \sigma] * [\sigma^{-1} * \beta * \sigma] \\ = [\sigma^{-1} * \alpha * (\sigma * \sigma^{-1}) * \beta * \sigma] &= [\sigma^{-1} * \alpha * e_{x_1} * \beta * \sigma] \\ = [\sigma^{-1}] * ([\alpha] * [\beta]) * [\sigma] &= \sigma_\sharp([\alpha * \beta]) \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $\sigma_\sharp^{-1} : \pi_1(X,x_1) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)$, donde $\sigma_\sharp([\alpha]) := [\sigma * \alpha * \sigma^{-1}]$ es fácil ver que $\sigma_\sharp^{-1}$ es la inversa de $\sigma_\sharp$, lo que nos permite concluir que $\sigma_\sharp$ es un isomorfismo. □

Asi para un espacio conexo por caminos se hablará del grupo fundamental de X y se denotara por $\pi_1(X)$ sin hacer referencia al punto base.

Definición 2.4. Un espacio X conexo por caminos teniendo como grupo fundamental el grupo trivial, $\pi_1(X) = \{\varepsilon\}$, se le dice espacio *simplemente conexo*.

Ejemplo 2.3. Todo subespacio V convexo en $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo. En efecto, dado cualquier par de caminos α y β en V sabemos ellos son homotópicos via la homotopía lineal $H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$. Luego, todo camino cerrado en V es homotópico al camino trivial y, de este modo, todas las clases en $\pi_1(X)$ se reducen al camino trivial ε.

Proposición 2.2.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua tal que $f(x_0) = y_0$. Si α es un camino cerrado en X con base x_0, entonces $f \circ \alpha$ es un camino cerrado en Y con base y_0 y la transformación $f_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ donde $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. f_* esta bien definida pues si $H : \alpha \cong \alpha'$ entonces se puede verificar que $f \circ H : f \circ \alpha \cong f \circ \alpha'$, así $f_*([\alpha])$ no depende de su representante. Por otro lado:

$$f \circ \alpha * \beta(s) = \left\{ \begin{array}{ll} f \circ \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f \circ \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{array} \right. = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)(s)$$

Esto implica que:

$$f_*([\alpha] * [\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta]).$$

□

Proposición 2.2.3. *1. Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas donde $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$*

2. Si id_X es la función identidad sobre el espacio X entonces $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$, la transformación identidad sobre el grupo $\pi_1(X,x_0)$

Demostración. *1.* Si α es un camino cerrado en x_0 entonces:
$(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*([f \circ \alpha]) = g_* \circ f_*([\alpha])$.
2. Trivial. □

Desde el lenguaje de la teoría de categorías (ver, por ejemplo, [10]) es posible afirmar a partir de la Proposición 2.2.3, que π_1 es, en realidad, un functor covariante de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos.

Lema 2.2.1. *Sean X, Y espacios conexos por caminos, $x_0 \in X$ y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas tal que $F : f \simeq g$. Entonces existe un automorfismo $\sigma_\sharp$ de $\pi_1(Y)$ tal que $g_* = \sigma_\sharp \circ f_*$, donde $f_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ y $g_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X, g(x_0))$. El automorfismo $\sigma_\sharp$ es inducido por el camino σ que tiene como puntos iniciales $y_0 = f(x_0)$ y $z_0 = g(x_0)$ definido por $\sigma(t) = F(x_0,t)$.*

Demostración. Supongamos que $F : f \simeq g$, entonces para cualquier camino cerrado α en $x_0 \in X$ si hacemos $G(s,t) = F(\alpha(s),t)$ es fácil ver que $G : f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$. Para $0 \leq s,t \leq 1$ consideremos:

- $\gamma_t(s) = G(s,t) = F(\alpha(s),t)$
- $\sigma_t(s) = \sigma(st) = F(x_0, st)$

Luego $\gamma_0 = F(\alpha,0) = f \circ \alpha$, $\gamma_1 = F(\alpha,0) = g \circ \alpha$ y $\sigma_0 = F(x_0,0) = f(x_0) = y_0 = e_{y_0}$, $\sigma_1(s) = F(x_0,s) = \sigma(s)$. Sea $\kappa_t = \sigma_t * (\gamma_t * \sigma_t^{-1})$, $0 \leq t \leq 1$, $\kappa_t(0) = \sigma_t(0) = f(x_0)$, $\kappa_t(1) = \sigma_t^{-1}(1) = \sigma_t(0) = f(x_0)$ esto es, κ_t es una familia de caminos cerrados en $f(x_0)$. Esta familia nos dará una homotópia por caminos entre $f \circ \alpha$ y $(\sigma * (g \circ \alpha) * \sigma^{-1})$. Si $K(s,t) = \kappa_t(s)$ entonces K es continua, ya que por definición, $\kappa_t(s)$ es una familia continua de caminos continuos. Además:

1. $K(0,t) = \kappa_t(0) = \sigma_t(0) = F(x_0,0) = y_0$
2. $K(1,t) = \kappa_t(1) = \sigma_t^{-1}(1) = \sigma_t(0) = y_0$
3. $K(s,0) = \kappa_0(s) = \sigma_0 * (\gamma_0 * \sigma_0^{-1})(s) = e_{y_0} * ((f \circ \alpha) * e_{y_0})(s)$
4. $K(s,1) = \kappa_1(s) = \sigma_1 * (\gamma_1 * \sigma_1^{-1})(s) = \sigma * ((g \circ \alpha) * \sigma^{-1})(s)$

Por lo tanto $\sigma * ((g \circ \alpha) * \sigma^{-1}) \cong e_{y_0} * ((f \circ \alpha) * e_{y_0}) \cong f \circ \alpha$, esto es $f_*([\alpha]) = \sigma_\sharp^{-1} \circ g_*([\alpha]) \Rightarrow g_*([\alpha]) = \sigma_\sharp \circ f_*([\alpha])$. □

Obs. En la demostración anterior, se puede prescindir de la hipótesis sobre los espacios X y Y ser conexos por caminos. En este sentido, este resultado es aplicable en una mayor generalidad.

Corolario 2.1.1. *Bajo las mismas hipótesis del lema. Si f_* es trivial (respectivamente inyectiva o sobreyectiva) entonces g_* también lo es. Si $f \simeq c$ donde c es la función constante $c(x) = y_0$ entonces f_* es el homomorfismo trivial.*

Demostración. Trivial. $\sigma_\sharp$ es un isomorfismo. □

Teorema 2.2 (Grupo fundamental invariante por homotopías)**.** *Si dos espacios X, Y conexos por caminos tienen el mismo tipo de homotópia, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.*

Demostración. Supongamos $f : X \equiv Y$ y sea g la inversa homotopíca de f, $f(x_0) = y_0,\ g(y_0) = x_1,\ f(x_1) = y_1$ entonces:

- $F : f \circ g \simeq id_Y$
- $G : g \circ f \simeq id_X$

Así, haciendo uso del Lema 2.2.1, con $\sigma(t) = F(x_0,t),\ \eta(t) = G(y_0,t)$ tenemos que:

- $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \sigma_\sharp \circ (id_X)_* = \sigma_\sharp \circ id_{\pi_1(X,x_0)} = \sigma_\sharp$
- $f'_* \circ g_* = (f' \circ g)_* = \eta_\sharp \circ (id_Y)_* = \eta_\sharp \circ id_{\pi_1(Y,y_0)} = \eta_\sharp$

Aquí f' hace referencia al homomorfismo inducido por $f : X \longrightarrow Y$ donde $f(x_1) = y_1$. Por tanto $g_* \circ f_*$ y $f'_* \circ g_*$ son isomorfismos, luego g_* es sobreyectiva e inyectiva i.e. g_* es un isomorfismo, lo que implica que $f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ también es un isomorfismo $\therefore \pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$ □

Corolario 2.2.1. *Todo espacio contráctil es simplemente conexo*

Demostración. El grupo fundamental de un punto es claramente el trivial pues todos los caminos cerrados son exactamente las funciones constantes. □

Teorema 2.3. *Sean X, Y espacios tal que $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Entonces el grupo fundamental de $(X \times Y, (x_0,y_0)$, $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$, es isomorfo a $\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$.*

Demostración. Sea $p : X \times Y \longrightarrow X$, $q : X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones naturales sobre X y Y respectivamente. Todo camino cerrado $\alpha : I \longrightarrow X \times Y$ con base (x_0,y_0) tiene la forma $\alpha = (\alpha_X, \alpha_Y)$ donde $\alpha_X = p \circ \alpha,\ \alpha_Y = q \circ \alpha$. Tanto α_X como α_Y son caminos cerrados, en este caso sobre x_0 y y_0 resp. Por otro lado, dado $\beta = (\beta_X, \beta_Y)$, se tiene $\alpha \simeq \beta$ si y solo si $\beta_X \simeq \alpha_X,\ \beta_Y \simeq \alpha_Y$. En efecto, si $F : \beta_X \simeq \alpha_X$, $G : \beta_X \simeq \alpha_X$ implica que $H = (F,G) : \beta \simeq \alpha$. Luego la siguiente transformación esta bien definida:

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0),\ \ \varphi([\alpha]) = (p_*([\alpha]), q_*([\alpha]))$$

Mientras que $\varphi([\alpha * \beta]) = (p_*([\alpha * \beta]), q_*([\alpha] * \beta)) = ([(p \circ \alpha) * (p \circ \beta)], [(q \circ \alpha) * (q \circ \beta)]) = (p_*([\alpha]) * p_*([\beta]), q_*([\alpha]) * q_*([\beta]) = \varphi([\alpha]) * \varphi([\beta])$, así φ es un homomorfismo de grupos. Si α es un camino tal que $(\alpha_X, \alpha_Y) \simeq (e_{x_0}, e_{y_0})$, es claro que $(e_{x_0}, e_{y_0}) = e_{(x_0,y_0)}$ entonces $\alpha \simeq e_{(x_0,y_0)}$. Por último si α_1 y α_2 son dos caminos cerrados sobre X y Y respectivamente entonces $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ es un camino cerrado donde $\varphi([\alpha]) = (\alpha_1, \alpha_2)$ □

Corolario 2.3.1. *Si X y Y son simplemente conexos entonces $X \times Y$ es simplemente conexo.*

Proposición 2.2.4. *Si $r : X \longrightarrow Y$ es una retracción, $i : Y \longrightarrow X$ la función inclusión y $y_0 \in Y$ entonces los homomorfimos inducidos $r_* : \pi_1(X, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $i_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, y_0)$ son sobreyectivo e inyectivo respectivamente. En particular, $\pi_1(Y, y_0)$ es isomorfo a un cociente de $\pi_1(X, y_0)$ por un cierto subgrupo (normal) de este.*

Demostración. Como $r \circ i = id_Y \Rightarrow r_* \circ i_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$ por lo tanto r_* es sobreyectiva y i_* es inyectiva. La última afirmación es consecuencia del primer teorema de isomorfismos para grupos (ver [2]). $\square$

Corolario 2.3.2. *Si X es simplemente conexo entonces todo retracto de X es también simplemente conexo.*

2.3. Ejemplos y Aplicaciones

Hasta ahora en el capítulo no se han presentado gran variedad de ejemplos, solo se ha podido identificar algunos isomorfismos entre grupos fundamentales. El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea fácil, y por ello, en esta sección desarrollaremos algunas técnicas para el cálculo de algunos espacios y sus interesantes aplicaciones.

Teorema 2.4 (van Kampen)**.** *Sean A, B subconjuntos abiertos del espacio X tal que $X = A \cup B$, sea $x_0 \in A \cap B$ y $f_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, $g_* : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ los homomorfismos inducidos por la transformación inclusión sobre los conjuntos A y B respectivamente. Si A, B y $A \cap B$ son conexos por caminos entonces el grupo $\pi_1(X, x_0)$ esta generado por las imágenes de f_* y g_*. En particular, si A y B son simplemente conexos entonces X también lo es.*

Demostración. Como A y B son conexos por caminos y su intersección es no vacía entonces X también es conexo por caminos. Sea α un camino cerrado con base en x_0. Como α en particular es continua entonces $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ es una cobertura abierta de I, y sea δ su número de Lebesgue. Luego, existe n tal que $\alpha_i = \alpha|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}$, $i = 1, \ldots, n$ esta contenido en A o B. $\alpha_i(t) = \alpha(\frac{i-1+t}{n})$ $0 \leq t \leq 1$. Para $i = 1, \ldots, n-1$ definamos $x_i = \alpha(\frac{i}{n})$, como A, B y $A \cap B$ son conexos por caminos entonces podemos encontrar un camino β_i con puntos iniciales x_i y x_0 donde el punto inicial es x_i tales que:

1. Si $x_i \in A$ entonces $\beta_i(I) \subset A$
2. Si $x_i \in B$ entonces $\beta_i(I) \subset B$

Por lema 2.1.5 $\alpha \cong \alpha_1 * \cdots * \alpha_n \cong (\alpha_1 * \beta_1) * (\beta_1^{-1} * \alpha_2 * \beta_2) * \cdots * (\beta_{n-2}^{-1} * \alpha_{n-1} * \beta_{n-1}) * (\beta_{n-1}^{-1} * \alpha_n)$. Mientras que cada $\beta_{i-1}^{-1} * \alpha_i * \beta_i$ es un camino cerrado con base en x_0 con imagen sobre A o B. $\square$

Corolario 2.4.1. *Para $n \geq 2$, S^n es simplemente conexo.*

Demostración. $S^n = A \cup B$ donde $A = S^n - \{(1,0,...,0)\}$ y $B = S^n - \{(-1,0,...,0)\}$ son abiertos. Por otro lado $\mathbb{R}^n \approx A \approx B$ así ambos subconjuntos son simplemente conexos, $A \cap B \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$, por tanto, para $n \geq 2$, $A \cap B$ es conexo por caminos. $\square$

Para calcular el grupo fundamental de S^1 tendremos que definir un nuevo concepto, levantamiento de funciones.

Definición 2.5. Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$ Una función continua $f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada levantamiento de la función $f : X \longrightarrow S^1$ si $p \circ f' = f$, i.e. el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

La función p es comúnmente llamada como *función exponencial.*

Lema 2.3.1. *Sea X un espacio conexo y $f', f'' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tal que $p \circ f' = p \circ f''$. Si existe un punto $x_0 \in X$ donde se cumple que $f'(x_0) = f''(x_0)$ entonces $f' = f''$.*

Demostración. Sea $g = f' - f''$, como $p \circ f' = p \circ f''$ entonces para $x \in X$:

$$\begin{aligned} p \circ g(x) &= e^{2\pi i g(x)} \\ &= e^{2\pi i (f'(x) - f''(x))} \\ &= \frac{e^{2\pi i f'(x)}}{e^{2\pi i f''(x)}} \\ &= \frac{p \circ f'(x)}{p \circ f''(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego $g(x) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, como X es conexo y g es continua entonces $g(X) = \{a\}$ para algun $a \in \mathbb{Z}$, como $g(x_0) = 0 \Rightarrow a = 0$ asi $f'(x) - f''(x) = 0 \therefore f' = f''$ $\square$

Teorema 2.5. *Sea X un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ y $x_0 \in X$. Para toda función continua $f : X \longrightarrow S^1$ y todo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(t_0) = f(x_0)$, entonces existe una única función $f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x_0) = t_0$ y $p \circ f' = f$.*

Demostración. Note primero que la unicidad queda demostrada gracias al lema anterior pues todo conjunto convexo es conexo. Por otro lado, podemos asumir, sin perdida de generalidad, que $x_0 = 0$, ya que en caso de ser $x_0 \neq 0$ entonces podemos considerar homeomorfismo $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $L(x) = x - x_0$ que preserva convexidad y compacidad, $x_0 \in L(X)$. Por lo que si existe un levantamiento para $L(X)$, siendo k, $k(0) = t_0$ el levantamiento de $f \circ L^{-1}$, entonces $k \circ L$ es el levantamiento de f como lo muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "L"'] \arrow[drr, "f"] & & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
L(X) \arrow[urr, "k"'] \arrow[rr] & & S^1
\end{tikzcd}$$

Asumiendo entonces que $x_0 = 0$ y X un conjunto compacto, como $f : X \longrightarrow S^1$ es una función continua entonces en particular es uniformemente continua, así que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\|x - x'\| < \varepsilon$ entonces $|f(x) - f(x')| < 2$. Como X es compacto entonces existe n tal que $\|x\| < \varepsilon n$, luego para $j = 0, 1, \ldots, n-1$ y $x \in X$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\frac{(j+1)x}{n} - \frac{jx}{n}\| = \frac{\|x\|}{n} < \varepsilon \\
\Rightarrow |f(\frac{(j+1)x}{n}) - f(\frac{jx}{n}))| < 2
\end{aligned}$$

Esto es $f(\frac{(j+1)x}{n}) \neq -f(\frac{jx}{n}))$, y así podemos definir para cada j las funciones $g_j : X \longrightarrow S^1 \setminus \{e^{i\pi}\}$ tales que:

$$g_i(x) = (f(\frac{(j+1)x}{n}))(f(\frac{jx}{n}))^{-1}, \quad g_i(0) = e^{0i}$$

Así para todo $x \in X$ $f(x) = f(0) \cdot g_0(x) \cdots g_{n-1}(x)$. Por último si definimos f como $f'(x) = t_0 + \ln g_0(x) + \cdots + \ln g_{n-1}(x)$, f' es igual a la suma de funciones continuas, por lo tanto continua, $f'(0) = t_0$, $p \circ f' = f$. □

Una aplicación directa del Teorema en el caso de que o bien $X = I$ o bien $X = I \times I$ y $t_0 = 0$ son los dos siguientes corolarios, que garantizan el levantamiento de caminos y homotopías, respectivamente.

Corolario 2.5.1. *Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ la función exponencial y $\alpha : I \longrightarrow S^1$ un camino tal que $\alpha(0) = p_0$. Entonces existe un único levantamiento α' de α tal que $\alpha'(0) = 0$.*

Corolario 2.5.2. *Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ la función exponencial y $F : I \times I \longrightarrow S^1$ una homotópia tal que $F(0,0) = p_0$. Entonces existe un único levantamiento F' de F tal que $F'(0,0) = 0$.*

Si $\alpha : I \longrightarrow S^1$ es un camino cerrado con base en $p_0 = (1,0) \in S^1$, si α' es su levantamiento tal que $\alpha'(0) = 0$, definimos por el *grado* de α como $grado(\alpha) := \alpha'(1)$. Dado que $p \circ \alpha'(1) = \alpha(1) = \alpha(0) = (1,0)$, se tiene que $\alpha'(1) \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.6. *Sean α, β dos caminos cerrados en S^1 con base en p_0. Si $\alpha \cong \beta$ entonces $grado(\alpha) = grado(\beta)$*

Demostración. Sea $F : \alpha \cong \beta$, esto es $F(s,0) = \alpha(s)$, $F(s,1) = \beta(s)$, $F(0,t) = p_0 = F(1,t)$. Por el colorario 2.5.2 existe una función continua $F' : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(0,0) = 0$, $p \circ F' = F$. Consideremos ahora los siguientes caminos $\alpha' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\beta' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\alpha'(s) = F'(s,0)$, $\beta'(s) = F'(s,1)$ respectivamente. Estos caminos son a su vez levantamientos de α y β por ser F una homotópia. Ahora bien $\alpha'(0) = F'(0,0) = 0$, y

$p \circ F'(0,t) = F(0,t) = p_0$, por lo tanto para todo $t \in I$, $F'(0,t) \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, dado que I es conexo, entonces F' es constante, esto es, $F'(0,t) = 0$, para cada $t \in I$. En particular, para $t = 1$, $F'(0,1) = 0 = \beta'(0) = \alpha'(0)$, esto es, $grado(\alpha) = (\alpha'(1))$, $grado(\beta) = (\beta'(1))$.

Ahora bien como $p_0 = F(1,t) = p \circ F'(1,t)$ entonces $F'(\{1\} \times I) \subset p^{-1}(p_0) = \mathbb{Z}$. De nuevo $\{1\} \times I$ es conexo se tiene que $F'(1,t) = a$ para todo $t \in I$ y algún $a \in \mathbb{Z}$, luego $grado(\alpha) = \alpha'(1) = F'(1,0) = F'(1,1) = \beta'(1) = grado(\beta)$. $\square$

Este último teorema nos permite afirmar que la siguiente transformación esta bien definida $grad : \pi_1(S^1, p_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $grad([\alpha]) = grado(\alpha)$.

Teorema 2.7. *$grad : \pi_1(S^1, p_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos. Entonces $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$.*

Demostración.

1. (*grad es un homomorfismo*). Sean $[\alpha]$, $[\beta]$ dos elementos de $\pi_1(S^1, p_0)$ donde α', β' son los únicos levantamientos de α y β respectivamente. Definamos $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\omega(t) = \begin{cases} \alpha'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(1) + \beta'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\omega(0) = 0$ y además:

$$\begin{aligned} p \circ \omega(t) &= \begin{cases} p \circ \alpha'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p \circ \alpha'(1) \cdot p \circ \beta'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \alpha * \beta(t) \end{aligned}$$

Esto es, ω es un levantamiento de $\alpha * \beta$ y asi:

$$\begin{aligned} grad([\alpha] * [\beta]) &= grad([\alpha * \beta]) \\ &= \omega(1) \\ &= \alpha'(1) + \beta'(1) \\ &= grad([\alpha]) + grad([\beta]) \end{aligned}$$

2. (*Inyectividad.*) Sean $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(S^1, p_0)$ tal que $grad([\alpha]) = grad([\beta])$. Sean entonces α', β' los levantamientos de α y β, respectivamente. Luego $\alpha'(0) = 0 = \beta'(0)$ y $\alpha'(1) = \beta'(1)$. Además podemos definir una homotópia por caminos $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ entre estas dos funciones por la homotópia recta:

$$H(s,t) = (1-t)\alpha'(s) + t\beta'(s),$$

i.e. $H : \alpha' \cong \beta'$ pero esto implica que $p \circ H : \alpha \cong \beta$, luego $[\alpha] = [\beta]$.

3. (*Sobreyectividad.*) Dado $n \in \mathbb{Z}$ el camino cerrado $\varphi : I \longrightarrow S^1, \varphi(t) = e^{2\pi i n t}$ tiene como levantamiento la función $\varphi' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi'(t) = nt$, así $grad([\varphi]) = \varphi'(1) = n$

$\square$

Si α es el camino constante $\alpha(x) = p_0$ entonces el único levantamiento α' de α es, por la definición, exactamente igual a la función $\alpha'(x) = 0, \forall x \in I$, luego $grad([\alpha]) = \alpha'(1) = 0$.

Ejemplo 2.4.

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \equiv B^2 \setminus \{0\} \equiv S^1 \Rightarrow \pi_1(R^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(B^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$
- Por el Ejemplo 1.5 tenemos que para $n \geq 3$ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \equiv S^{n-1} \Rightarrow \pi_1(R^n \setminus \{0\}) = \pi_1(S^{n-1}) = \{\varepsilon\}$
- $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$
- $\pi_1(S^m \times S^n) = \{\varepsilon\}$ para $m, n > 1$

Teorema 2.8. *S^1 no es un retracto del disco unitario B^2*

Demostración. Si S^1 fuera un retracto del disco B^2 entonces por la proposición 2.2.4 $r_* : \pi_1(B^2) \longrightarrow \pi_1(S^1)$ es sobreyectiva, pero esto es un absurdo pues $\pi_1(B^2)$ es el grupo trivial mientras que $\pi_1(S^1)$ no lo es. $\square$

Teorema 2.9 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Toda función continua $f : B^2 \longrightarrow B^2$, donde B^2 es el disco unitario entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $f(z) \neq z$ para todo $z \in B^2$, entonces podemos definir la siguiente funcion continua $g : B^2 \longrightarrow S^1$ como:

$$g(z) = \frac{f(z) - z}{||f(z) - z||}$$

Ya que f no tiene puntos fijos entonces g tampoco tiene, esto es $g(z) \neq z$, luego por proposición 1.1.2 y ejemplo 1.4 se sigue que $g|_{S^1} \simeq id_{S^1}$, luego $grad([g|_{S^1}]) = 1$, mientras que por corolario 1.1.3 como S^1 es del tipo ENR se sigue que $g|_{S^1} \simeq c$ donde c es una función constante, luego $grad([g|_{S^1}]) = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 2.10 (Borsuk-Ulam)**.** *Si $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es continua entonces existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$*

Demostración. Sea f continua tal que $f(x) \neq f(-x)$ $\forall x \in S^2$. Definamos la siguiente función continua $h : S^2 \longrightarrow S^1$, $\frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Y sea $\alpha : I \longrightarrow S^2$ el camino cerrado $\alpha(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$. El camino cerrado $\sigma = h \circ \alpha$ tiene un levantamiento σ' en $\mathbb{R}$. Como $h(-x) = -h(x)$ entonces $\sigma(s + \frac{1}{2}) = -\sigma(s)$ para $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$. Luego $\sigma'(s + \frac{1}{2}) = \sigma'(s) + \frac{2k+1}{2}$ para algún entero k. Luego $grad([\sigma]) = \sigma'(1) = \sigma'(\frac{1}{2}) + \frac{2k+1}{2} = \sigma'(0) + \frac{2k+1}{2} + \frac{2k+1}{2} = \sigma'(0) + 2k + 1$. Luego $grad([\sigma]) \neq 0$ entonces σ no es homotópica a una función constante. Como S^2 es simplemente conexa entonces α es homotópica a una función constante c, i.e. $H : \alpha \cong c$. Así $h \circ H : \sigma = h \circ \alpha \cong h \circ c$, así σ es homotópica a la función contante $h \circ c$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 2.11 (Teorema fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio complejo no constante posee por lo menos una raíz.*

Demostración. Sea $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_0$ y suponga, por contradicción, que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Definamos las siguientes funciones continuas $h_t : S^1 \longrightarrow S^1$ $h_t(z) = \frac{p(tz)}{\|p(tz)\|}$ donde $t \geq 0$ y $F : S^1 \times I \longrightarrow S^1$, $F(z,s) = h_{ts}(z)$ para $t > 0$; si $t = 0$, $h_0(z) = \frac{a_0}{\|a_0\|}$ así h_0 es constante. Luego $F(z,0) = h_0$ y $F(z,1) = h_t(z)$. Por lo tanto $h_0 \simeq h_t$. Como h_0 es constante entonces h_{0*} es el homomorfismo trivial. Por el corolario 2.1.1 h_{t*} también es el homomorfismo trivial.

Observe por otra parte que $\lim_{t\to\infty} h_t(z) = z^n$. Así para t suficientemente grade, $(1-s)z^n + sh_t(z) \neq 0$, $0 \leq s \leq 1$. Si definimos por $H(z,s) = \frac{(1-s)z^n + sh_t(z)}{\|(1-s)z^n + sh_t(z)\|}$, tenemos que H es continua, $H(z,0) = z^n$ y $H(z,1) = h_t(z)$. Esto nos permite concluir que $H : h_t \simeq z^n$ para t suficientemente grande. Luego h_{t*} es distinto al homomorfismo trivial, pues z^n_* es igual al homomorfismo $k \to nk$, lo cual es una contradicción. $\square$

2.3.1. Espacio Proyectivo Real

El espacio proyectivo real $n-$ dimensional es igual al cociente $P^n_{\mathbb{R}} = S^n/\sim$, donde $\sim$ es la siguiente relación de equivalencia

$$x, y \in S^n.\ x \sim y \iff x = y \text{ o } x = -y$$

Cada punto $p \in P^n_{\mathbb{R}}$ entonces se puede ver como el siguiente par $p = \{x, -x\}$.

Representamos la proyección natural de S^n a $P^n_{\mathbb{R}}$ como $\pi : S^n \longrightarrow P^n_{\mathbb{R}}$, $\pi(x) = \{x, -x\}$. Luego la topología de $P^n_{\mathbb{R}}$ es la topología cociente, esto es, $U \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en S^n. Bajo esta topología π es una función continua, $P^n_{\mathbb{R}}$ es Hausdorff y compacto.

Por otro lado como $P^n_{\mathbb{R}}$ es un espacio cociente entonces la función proyección π tiene la siguiente propiedad fundamental:

Si $f : S^n \longrightarrow Y$ es una función continua tal que $f(x) = f(-x)$ entonces existe una única función $\bar{f} : P^n \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$, i.e. el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\ P^n_{\mathbb{R}} \arrow[ur, "\bar{f}"] & \end{tikzcd}$$

Sea $X \subseteq S^n$. Denotamos $-X$ al conjunto de antípodas, $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Si U es un subconjunto abierto de S^n entonces $-U$ es también abierto pues la función antípoda es un homeomorfismo, luego:

1. $\pi : S^n \longrightarrow P^n_{\mathbb{R}}$ es una función abierta. Si $U \subset S^n$ es abierto entonces $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup -U$, luego $\pi(U)$ es abierto en $P^n_{\mathbb{R}}$

2. Sea $x \in S^n$, $V = \{y \in S^n \mid \langle x, y\rangle > 0\}$. Así $V \cap -V = \emptyset$. Evidentemente $x \in V$ donde V es un subconjunto abierto.

Proposición 2.3.1. *Para cada punto $p \in P^n_{\mathbb{R}}$ existe un subconjunto abierto V' sobre $P^n_{\mathbb{R}}$ tal que $\pi^{-1}(V') = V \cup -V$ donde $\pi|_V$ y $\pi|_{-V}$ es un homeomorfismo sobre V'*

Demostración. sea $p = \{x, -x\}$ donde $x \in S^n$, tomemos V como en la observación anterior. Como π es una función abierta entonces $p \in \pi(V) = V'$ es un subconjunto abierto, $\pi^{-1}(V') = V \cup -V$ y las restricciones de π sobre V y $-V$ son homeomorfismos pues π es una función abierta y $V \cap -V = \emptyset$. □

El conjunto abierto V' de p es llamada como *vecindad distinguida* de $p \in P^n_{\mathbb{R}}$.

Proposición 2.3.2. *Considere un camino $\alpha : I \longrightarrow P^n_{\mathbb{R}}$ y un punto $x_0 \in S^n$ tal que $\pi(x_0) = \alpha(0)$. Entonces existe un único camino $\alpha' : I \longrightarrow S^n$ tal que $\alpha'(0) = x_0$ y $\alpha = \pi \circ \alpha'$.*

Demostración. Si $\alpha(I) \subset V'$, donde V' es la vecindad distinguida de $\pi(x_0)$, si $x_0 \in V$, $\pi^{-1}(V') = V \cup -V$ entonces sea $h = \pi|_V$ es un homeomorfismo. Definamos el camino α' como $\alpha' = h^{-1} \circ \alpha$, luego $\alpha'(0) = \pi^{-1}(\pi(x_0)) = x_0$ y $\alpha = \pi \circ \alpha'$.

Como $P^n_{\mathbb{R}} = \bigcup_{p \in P^n_{\mathbb{R}}} V'_p$ donde cada V'_p es la vecindad distinguida de p, luego $I \subset \bigcup_{p \in P^n_{\mathbb{R}}} \alpha^{-1}(V'_p)$. Como I es compacto, usando el número de Lebesgue, entonces existe n tal que $I = \bigcup_{i=1}^n I_j$ donde cada $I_j = [a_j, a_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, n$ $a_1 = 0$, $a_n = 1$ son intervalos consecutivos tal que $\alpha(I_j) \subset V'_j$ donde V'_j es cierta vecindad distinguida. Haciendo $\alpha_j = \alpha|_{I_j}$, bajo el argumento de la primera parte de esta demostración, podemos concluir que tenemos $\alpha'_j : I_j \longrightarrow S^n$ tal que $\alpha'_1(0) = x_0$ y $\alpha_j = \pi \circ \alpha'_j$ donde $\alpha'_j(a_{j+1}) = \alpha'_{j+1}(a_{j+1})$, $j = 1, \ldots, n-1$. Con esto podemos definir, por el lema del pegado, la siguiente función continua $\alpha'(s) = \alpha'_i(s)$ si $s \in I_i$. Evidentemente, α así definida cumple con las condiciones de la proposición.

Para probar la unicidad supongamos $\alpha', \alpha'' : I \longrightarrow S^n$ dos caminos tal que $\pi \circ \alpha' = \pi \circ \alpha''$, así $\alpha' = \pi^{-1}(\pi(\alpha''))$ esto implica que $\alpha'(s) = \alpha'(s)$ o $\alpha'(s) = -\alpha''(s)$. En consecuencia $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = \pm 1$, como I es conexo y $\alpha'(0) = \alpha''(0)$ podemos decir que $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, luego $\alpha' = \alpha''$. □

Llamamos la atención, en que la técnica de construcción de funciones “globales” recurriendo al “pegado” de funciones localmente definidas sobre vecindades distinguidas, será recurrente en este texto.

En $P^n_{\mathbb{R}}$ podemos definir una métrica. Si $p = \{x, -x\}$, $q = \{y, -y\}$ entonces $d(p, q) = min\{|x - y|, |x + y|\}$ cumple con las condiciones para ser una métrica. Por ejemplo, la desigualdad triangular puede ser probada utilizando el hecho de que *min* es subaditiva, $min\{x + y, z\} \leq min\{x, z\} + min\{y, z\}$ En consecuencia, al espacio generado con la topología de la métrica lo denotaremos por $(P^n_{\mathbb{R}}, d)$.

Proposición 2.3.3. *La métrica d genera en $P^n_{\mathbb{R}}$ la misma topología que la topología cociente.*

Demostración. La función $\pi : S^n \longrightarrow (P^n_{\mathbb{R}}, d)$ cumple con la condición de $d(\pi(x), \pi(y)) = min\{|x - y|, |x + y|\} \leq |x - y|$, esto es, π es una función de Lipchitz y por lo tanto continua. Por la propiedad universal del cociente existe una función continua $\bar{\pi} : P^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow (P^n_{\mathbb{R}}, d)$, esta función no es mas otra que la función identidad. Por ultimo como $P^n_{\mathbb{R}}$ es compacto y $(P^n_{\mathbb{R}}, d)$ es Hausdorff entonces $\bar{\pi}$ es un homeomorfismo. □

Como en S^n se cumple que $|x-y|^2+|x+y|^2=2|x|^2+2|y|^2=4$ entonces $d(p,q)$ toma su máximo siempre y cuando $|x-y|=|x+y|=\sqrt{2}$, cuando esto pase diremos que p y q son puntos opuestos en $P^n_{\mathbb{R}}$. Luego, si $d(p,q)=\sqrt{2}$ entonces para $x\in\pi^{-1}(p),\ y\in\pi^{-1}(q)\Rightarrow |x-y|=\sqrt{2}$.

Proposición 2.3.4. $P^1_{\mathbb{R}}\approx S^1$.

Demostración. Consideremos la siguiente función continua $f:S^1\longrightarrow S^1$, $f(z)=z^2$. Claramente $f(z)=f(w)\Leftrightarrow z=\pm w$. Pasando al cociente gracias a la propiedad universal de π tenemos una función biyectiva $\bar{f}:P^1_{\mathbb{R}}\longrightarrow S^1$ tal que $\bar{f}\circ\pi=f$. Como $P^1_{\mathbb{R}}$ es compacto y S^1 es Hausdorff entonces $\bar{f}$ es un homeomorfismo. □

Podemos por lo tanto concluir que $\pi_1(P^1_{\mathbb{R}})=\mathbb{Z}$. Para $n\geq 2$ haremos uso de la proposición 2.3.2. Note que si α es un camino cerrado sobre P^n entonces su levantamiento α' no necesariamente es un camino cerrado en Sn, de hecho si $\alpha'(0)=x_0$ $\alpha'(1)=-x_0$ entonces $\pi\circ\alpha$ es un camino cerrado a pesar que α' no lo es.

Proposición 2.3.5. *Para $n\geq 2$ sea $x_0\in S^n$ y $p_0=\pi(x_0)$. Sean $\alpha,\beta:I\longrightarrow P^n$ dos caminos con punto base p_0 y α',β' los respectivos levantamientos con $\alpha'(0)=\beta'(0)=x_0$. Entonces $\alpha'(1)=\beta'(1)$ si y solo si $\alpha\cong\beta$*

Demostración. $\Rightarrow$ Si $\alpha'(1)=\beta'(1)$ entonces α' y β' son dos caminos con mismo punto inicial y final, pero S^n es simplemente conexo, asi $\alpha'\cong\beta'$, esto implica que $\alpha=\pi\circ\alpha'\cong\pi\circ\beta'=\beta$

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $\alpha=\pi\circ\alpha'\cong\pi\circ\beta'=\beta$. Observe que $\alpha'(0)=\beta'(0)=x_0$ y así $\alpha'(1)=\pm x_0,\ \beta'(1)=\pm x_0$; por lo tanto $\alpha'(1)=\beta'(1)\iff|\alpha'(1)-\beta'(1)|\neq 2$, veremos por lo tanto que esta última desigualdad es cierta.

Si $d(\alpha(s),\beta(s))\neq\sqrt{2}\ \forall s\in I$, entonces estos puntos nunca son opuestos y así $|\alpha'(s)-\beta'(s)|\neq 2$, por continuidad de la función norma y como $|\alpha'(0)-\beta'(0)|=0$ entonces $|\alpha'(s)-\beta'(s)|<\sqrt{2}$ para todo $s\in I$, en particular $|\alpha'(1)-\beta'(1)|\neq 2$ para $s=1$.

De manera general sea $H:I\times I\longrightarrow P^n_{\mathbb{R}}$ la homotópia entre α y β. En particular H es uniformemente continua. De este modo, existen $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ tal que $d(H(s,t_{i-1}),H(s,t_i))<\sqrt{2},\ i=1,2,\ldots,k$. Definamos ahora los siguientes caminos cerrados para cada i, $a_i(s)=H(s,t_i)$. Del caso particular tenemos por tanto que $\alpha'_{i-1}(1)=\alpha'_i(1)$. Por último esto implica que $\alpha'(1)=\alpha'_0(1)=\alpha'_1(1)=\cdots=\alpha'_k(1)=\beta'(1)$

□

Corolario 2.11.1. $\pi_1(P^n_{\mathbb{R}})=\mathbb{Z}_2$ *para* $n\geq 2$

En efecto, gracias a la proposición anterior se concluye de inmediato que si hay una homotópia entre dos caminos entonces sus respectivos levantamientos serán o bien caminos cerrados o bien caminos abiertos con mismos puntos finales, estos son las únicas dos representaciones para la homotópia entre ellos, esto es, las homotópias están generadas únicamente por dos clases, la de levantamientos cerrados y las de levantamientos abiertos.

2.3.2. Fibraciones

Se llama una fibración trivial local, con espacio total E, base B y fibra típica F, a la función continua $\pi : E \longrightarrow B$ si además se tiene que para cada $x \in B$ existe un conjunto abierto $U \ni x$ y un homeomorfismo $\varphi_U : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que $\pi \circ \varphi_U = \pi_U$, donde $\pi_U : U \times F \longrightarrow U$ es la proyección de la primera coordenada. Como φ_U es un homeomorfismo y $\pi(\varphi_U(x,y)) = \pi_U(x,y) = x$ para todo $y \in F$, se sigue que el conjunto $\pi^{-1}(x)$ es homeomorfo con $\{x\} \times F$ o bien, por simplicidad, homeomorfa a F. Al conjunto abierto U se le suele llamar vecindad distinguida. La fibración trivial es una función abierta, gracias a que φ_U es una homeomorfismo donde U es un conjunto abierto.

Proposición 2.3.6. *Sea $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local $\alpha : I \longrightarrow B$ un camino y $z_0 \in E$ tal que $\alpha(0) = \pi(z_0)$. Entonces existe un camino $\alpha' : I \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \alpha' = \alpha$ y $\alpha'(0) = z_0$.*

Demostración. Si $\alpha(I) \subset U$, donde U es una vecindad distinguida. Sea por tanto $y_0 \in F$ tal que $z_0 = \varphi_U(\alpha(0), y_0)$. Si definimos $\alpha'(s) = \varphi_U(\alpha(s), y_0)$ entonces α' es un camino donde por definición, $\pi \circ \alpha' = \pi \circ \varphi_U(\alpha, y_0) = \alpha$.

Como I es compacto, eligiendo el numero de Lebesgue para la cobertura sobre las imágenes inversas sobre todas las posibles vecindades distinguidas, podemos afirmar que existe una descomposición $I = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ de intervalos $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ consecutivos tal que $\alpha(I_j) \subset U_j$ donde U_j es alguna vecindad distinguida para cada $j = 0, \ldots, k$, $t_0 = 0$, $t_{k+1} = 1$.

Tomando entonces $\alpha_j = \alpha|_{I_j}$. Luego para $j = 0$, por la observación inicial existe un camino $\alpha'_0 : I_0 \longrightarrow E$ con $\alpha'_0(0) = z_0$ y $\pi \circ \alpha'_0 = \alpha_0$. Sea $z_1 = \alpha'_0(t_1)$ y $x_1 = \pi(z_1) = \alpha(t_1)$, entonces de nuevo existe un camino $\alpha'_1 : I_1 \longrightarrow E$ con $\alpha'_1(t_1) = z_1$ y $\pi \circ \alpha'_1 = \alpha_1$. De manera inductiva se obtienen caminos $\alpha'_j : I_j \longrightarrow E$ tal que $\alpha'_j(t_j) = z_j$ y $\pi \circ \alpha'_j = \alpha_j$. Luego solo resta definir $\alpha' : I \longrightarrow E$ siendo $\alpha'|_{I_j} = \alpha'_j$. Gracias al lema del pegado y a la construcción, α' es el camino buscado. □

Corolario 2.11.2. *Sea $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local. Si B la base y F la fibra típica son ambos conexos por caminos entonces E también lo es.*

Demostración. Sean $x,\ y \in E$, como B es conexo por caminos, existe un camino $\alpha : I \longrightarrow B$ que une los puntos $\pi(x)$ y $\pi(y)$. Por la proposición anterior, existe un camino α' que une los puntos x y z donde $z \in \pi^{-1}(\pi(y))$. Por otro lado sabemos que $\pi^{-1}(\pi(y))$ es homeomorfo con F, luego $\pi^{-1}(\pi(y))$ es conexo por caminos pues F lo es. Así existe un camino $\beta : I \longrightarrow \pi^{-1}(\pi(y))$ uniendo los puntos z y y. Haciendo $\alpha * \beta$ obtenemos un camino en E que une los puntos x y y. □

Proposición 2.3.7. *Sea $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local, $\pi(z_0) = x_0$. Si la fibra típica F es conexa por caminos, entonces el homomorfismo inducido $\pi_* : \pi(E, z_0) \longrightarrow \pi(B, x_0)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Sabemos que para cada $x \in B$, $\pi^{-1}(x)$ es homeomorfo a F, luego $\pi^{-1}(x)$ es también conexa por caminos.

Sea entonces $\alpha : I \longrightarrow B$ un camino cerrado con base en x_0, por la Proposición 2.3.6 existe un camino $\alpha' : I \longrightarrow E$ tal que $\alpha'(0) = z_0$. Por otro lado, como $z_0,\ \alpha'(1) \in \pi^{-1}(x_0)$

tenemos existe un camino $\beta : I \longrightarrow \pi^{-1}(x_0)$ uniendo estos dos puntos. Luego el camino $\alpha' * \beta : I \longrightarrow E$ es un camino cerrado con base en z_0. Esto implica por lo tanto que $\pi_*([\alpha' * \beta]) = [(\pi \circ \alpha') * (\pi \circ \beta)]$. Pero $\pi \circ \beta = e_{x_0}$ luego $\pi_*([\alpha' * \beta]) = [\pi \circ \alpha'] = [\alpha]$ □

Corolario 2.11.3. *Sea $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local. Si la fibra típica F es conexa por caminos y E es simplemente conexo entonces B también es simplemente conexo.*

En lo que resta del capitulo veremos algunos ejemplos de fibraciones triviales locales como lo es $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, donde $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es el espacio proyectivo complejo.

Sea $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$ la esfera unitaria real. Cada punto $z \in S^{2n+1}$ lo podemos ver por lo tanto como $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ donde $z_i \in \mathbb{C}$ son tales que:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1$$

Por otro lado para cada $u \in S^1$ se tiene que $u \cdot z = (u \cdot z_1, \dots, u \cdot z_{n+1}) \in S^{2n+1}$, donde $u \cdot z_i$ es la multiplicación usual sobre $\mathbb{C}$, pues $|u \cdot z_1|^2 + |u \cdot z_2|^2 + \cdots + |u \cdot z_{n+1}|^2 = |u|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2) = 1$. Por lo tanto $U_z = \{u \cdot z | u \in S^1\} \subset S^{2n+1}$.

Con estas aclaraciones podemos definir formalmente el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n := S^{2n+1} / \sim$ donde $z \sim w$ si y solo si existe $u \in S^1$ tal que $w = u \cdot z$. Gracias a esta relación de equivalencia podemos decir que $S^{2n+1} = \bigcup_{z \in S^{2n+1}} U_z$ es una unión disjunta donde cada U_z es evidentemente, por definición, homeomorfo con S^1

Denotamos por tanto $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ la proyección natural $\pi(z) = [z]$. Como es usual a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ se le asigna la topología cociente, de donde obtenemos que este espacio es compacto y Hausdorff. π tiene la siguiente propiedad universal:

Si $f : S^{2n+1} \longrightarrow Y$ es una función continua tal que $f(u \cdot z) = f(z)$ para todo $u \in S^1$ entonces existe una única función continua $\bar{f} : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$.

Lema 2.3.2. *La función $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es una función abierta.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de S^{2n++1}. Como la función $h_u : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ $h_u(z) = u \cdot z$ es en efecto un homeomorfismo, tenemos también que $u \cdot A = \{u \cdot a | a \in A\}$ es un subconjunto abierto. Luego como $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{u \in S^1} u \cdot A$, es claramente abierto. Luego $\pi(A)$ es un un conjunto abierto en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. □

Proposición 2.3.8. $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *es una fibración trivial local, con fibra típica S^1*

Demostración. El conjunto $V_j = \{z \in S^{2n+1} \, | z_j \neq 0\} \subset S^{2n+1}$ es un subconjunto abierto para cada $j = 1, 2, \dots, n+1$. Luego si hacemos $U_j = \pi(V_j)$ es también un subconjunto abierto en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, mientras que $\pi^{-1}(U_j) = \pi^{-1}(\pi(V_j)) = \bigcup_{u \in S^1} u \cdot V_j = V_j$.

Sea por tanto $[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, como $z \in S^{2n+1}$ existe j tal que $z_j \neq 0$, *i.e.* $z \in V_j$. Si definimos a $\varphi_j = U_j \times S^1 \longrightarrow V_j$ como $\varphi_j([z], u) = \frac{u\bar{z}_j}{|z_j|} \cdot z$. Evidentemente $\varphi_j([v \cdot z], u) = \varphi_j([z], u)$ para todo $v \in S^1$ entonces φ_j esta bien definida. Esta función además es continua pues si $\sigma_j = U_j \longrightarrow V_j$ es tal que $\sigma_j([z]) = \frac{\bar{z}_j}{|z_j|} \cdot z$ esta bien definida (mismo argumento que φ_j), y además $\sigma \circ \pi(z) = \frac{\bar{z}_j}{|z_j|} \cdot z$ es continua y consecuentemente σ_j lo es. Luego $\varphi_j([z], u) = u \cdot \sigma_j([z]$ es por lo tanto una composición de funciones continuas.

Por otro lado $\pi \circ \varphi_j([z],u) = \pi(\frac{u\bar{z_j}}{|z_j|} \cdot z) = [z]$ pues $\frac{u\bar{z_j}}{|z_j|} \in S^1$. Resta solo definir la inversa de la función φ_j. Sea $\varphi_j^{-1} : V_j \longrightarrow U_j \times S^1$ como $\varphi_j^{-1}(z) = ([z], \frac{z_j}{|z_j|})$, la función así definida es evidentemente continua, resta solo verificar que en efecto una es la inversa de la otra.

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_j([z],u) = \varphi_j^{-1}(\varphi_j([z],u)) = \varphi_j^{-1}(\frac{u\bar{z_j}}{|z_j|} \cdot z) = ([z], \frac{u}{|u|}) = ([z],u)$$

Pues $\frac{u\bar{z_j}}{|z_j|} \in S^1$, verificar la igualdad restante solo es cuestión de rutina. □

Corolario 2.11.4. *Para $n \geq 1$ $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es simplemente conexo.*

Demostración. Consecuencia del Corolario 2.11.3. □

2.3.3. Grupo de Rotaciones

Se define $SO(n)$ como el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^n$, o bien como el conjunto de las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que preservan el producto interno, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x,y\rangle$, con $det(T) = 1$. Como estas transformaciones preservan el producto interno entonces $T \cdot T^t = I$ visto de forma matricial, esto es, matrices ortogonales con determinante 1.

Proposición 2.3.9. *$SO(n)$ es una superficie compacta de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$ en $\mathbb{R}^{n^2}$.*

Demostración. Para la demostración haremos uso del teorema de la función implícita. Sea $U \subset \mathbb{R}^{n^2}$ el conjunto abierto de todas las transformaciones lineales con determinante positivo. Como las transformaciones simétricas las podemos identificar con $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ X &\longmapsto X \cdot X^t. \end{aligned}$$

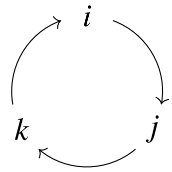
Evidentemente $SO(n) = f^{-1}(I)$. Resta entonces probar que I es un valor regular. Para $X \in SO(n) = f^{-1}(I)$ tenemos que $f'(X)V = XV^t + VX^t$, así, si $S \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ entonces haciendo $V = \frac{S \cdot X}{2}$ se tiene que $f'(X)V = S$ pues S es una transformación simétrica. Así $SO(n)$ es una superficie compacta, las columnas de una transformación ortogonal tienen norma 1, luego un espacio acotado y cerrado, de dimensión $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. □

- $SO(1) = \{1\} \Rightarrow \pi_1(SO(1)) = \{\varepsilon\}$
- $SO(2) = S^1 \Rightarrow \pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$

Para $n \geq 3$ veremos que $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, el cuerpo finito de orden 2. Estudiaremos los casos particulares para $n = 3,4$ que servirán de base para generalizar el cálculo de este grupo fundamental.

Con este objetivo, haremos uso de un importante resultado que relaciona a $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ con $SO(3)$. Precisamente, mostraremos que estos dos espacios son homeomorfos. Para ello será necesario introducir un importante subconjunto numérico, conocido como los cuaterniones.

Un cuaternion es un elemento de $\mathbb{R}^4$ representado de la forma $w = t + xi + yj + zk$ en lugar de simplemente $w = (t, x, y, z)$. Sobre los cuaterniones definimos un producto, no conmutativo que obedece las reglas a seguir. Bastará definir este producto para los elementos de la base i, j, k, para extenderlo bilinealmente. Ahora, se tiene que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $i \cdot j = k$, $j \cdot k = i$ y $k \cdot i = j$. Este es representado a través del diagrama:



La bilinialidad implica que la multiplicación es asociativa y distributiva. Además de esto a todo cuaternion w se le asocia su elemento conjugado $\bar{w}$ siendo $\bar{w} = t - xi - yj - zk$ con esto tenemos que $w \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot w = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 =: |w|^2$. Entonces para todo $w \neq 0$ tiene su inverso definido por $w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$. La norma en $\mathbb{R}^4$ se comporta bien bajo esta multiplicación así definida, es decir, para cualquier par de cuaterniones w, v se tiene que $|w \cdot v| = |w| \cdot |v|$.

En este espacio de cuaterniones identificamos los subconjuntos de la forma $\{t + 0i + 0j + 0k | t \in \mathbb{R}\}$(real puro), $\{0 + xi + yj + zk | x, y, z \in \mathbb{R}\}$(imaginario puro) con los espacios$\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Por otro lado, a S^3 con esta multiplicación es identificado con el subgrupo de todos los cuaterniones de modulo 1.

Lema 2.3.3. *Si un cuaternion w conmuta con todo imaginario puro entonces es real. Si adamas $w \in S^3$ entonces $w = \pm 1$*

Demostración. Sea $w = t + xi + yj + zk$ entonces $iw = -x + it - zj + yk = wi = -x + ti + zj - yk$, de esta igualdad se tiene que $z = y = 0$. Solo resta probar que $x = 0$. Esto se sigue de la igualdad $wj = xk + tj = jw = -xk + tj$. Luego $w = t + 0i + 0j + 0k$, si $|w| = 1 = |t|$ entonces $w = \pm 1 + 0i + 0j + 0k$ □

Proposición 2.3.10. *Existe un homomorfismo continuo y sobreyectivo $\varphi : S^3 \longrightarrow SO(3)$ con kernel $\{1, -1\}$*

Demostración. Sea $u \in S^3$ y definamos la función lineal $\varphi_u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ por $\varphi_u(w) = u \cdot w \cdot u^{-1}$. Como la norma se comporta bien sobre el producto de cuaterniones entonces $|\varphi_u(w)| = |u \cdot w \cdot u^{-1}| = w$. De esta forma, la transformación lineal φ_u es ortogonal. Por otro lado como $\varphi_u(1) = 1$ entonces $\mathbb{R}$ es invariante bajo esta función y por lo tanto su complemento ortogonal $\mathbb{R}^3$ también. Así, la restricción de $\varphi_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi_u(w) = u \cdot w \cdot u^{-1}$, que por abuso de notación denotaremos de la misma manera, está bien definida.

Evidentemente la función así definida, para $u \in S^3$, es continua siendo las columnas de la matriz φ_u continuas. Por otro lado siendo ortogonal $det(\varphi_u) = \pm 1$ para todo $u \in S^3$, como S^3 es conexo y para $u = 1$, $det(\varphi_1) = det(I) = 1$ entonces $det(\varphi_u) = 1$ para todo $u \in S^3$, *i.e.* $\varphi_u \in SO(3)$. Luego la función continua esta bien definida

$$\begin{aligned} \varphi \colon S^3 &\longrightarrow SO(3) \\ u &\longmapsto \varphi_u. \end{aligned}$$

Adicionalmente, observe que $\varphi_{uv}(w) = u \cdot v \cdot w \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} = u \cdot \varphi_v \cdot u^{-1} = \varphi_u \circ \varphi_v(w)$, entonces φ es un homomorfismo de grupos. El kernel de este homomorfismo son los $u \in S^3$ tal que $\varphi(u) = \varphi_u = I$ entonces $u \cdot w \cdot u^{-1} = w$, luego $u \cdot w = w \cdot u$ para todo w imaginario puro, por el Lema 2.3.3 se concluye que $u = \pm 1$, y así $\varphi(x) = \varphi(y) \iff x = \pm y$, φ de donde podemos concluir que φ es localmente inyectiva.

Resta probar que φ es sobreyectiva. Para esto, mostraremos que φ es una función abierta, con lo que llegamos a la conclusión que $\varphi(S^3) = SO(3)$. En efecto, dado que S^3 es compacto, $\varphi(S^3)$ será cerrado en $SO(3)$, dado que también será un abierto y $SO(3)$ es conexo, la conclusión se sigue. Gracias al teorema de rango, como φ es localmente inyectiva, continua y homomorfismo de grupo, su rango es constante y máximo. En particular un difeomorfismo y entonces una función abierta. □

Corolario 2.11.5. *$SO(3)$ y $P^3_{\mathbb{R}}$ son homeomorfos.*

Demostración. Sea φ como en la Proposición anterior. Como $\varphi(w) = \varphi(v) \iff w = \pm v$ pues el kernel es $\{1, -1\}$, pasando al cociente se consigue la función $\bar{\varphi}$ la cual es continua y biyectiva. Como $P^3_{\mathbb{R}}$ es compacto y $SO(3)$ es Hausdorff entonces $\bar{\varphi}$ es un homeomorfismo. □

Como consecuencia de este colorario podemos decir que $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

Proposición 2.3.11. *$SO(4) \approx SO(3) \times S^3$*

Demostración. Consideremos h como la siguiente función continua:

$$\begin{aligned} h\colon SO(4) &\longrightarrow SO(3) \times S^3 \\ T &\longmapsto (T', T(1)) \end{aligned}$$

donde $T' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $T'(v) = T(v) \cdot (T(1))^{-1}$ visto como multiplicación de cuaterniones. En efecto T' está bien definida pues si consideramos $T'' : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es tal que $T''(v) = T(v) \cdot (T(1))^{-1}$ entonces $|T''(v)| = |T(v)| \cdot |T(1)^{-1}| = |v|$, luego es ortogonal, y como $T''(1) = T(1) \cdot T(1)^{-1} = 1$, *i.e.* es invariante bajo $\mathbb{R}$ y por lo tanto invariante bajo $\mathbb{R}^3$, así T' esta bien definida. La inversa de la función h se puede probar que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h^{-1}\colon SO(3) \times S^3 &\longrightarrow SO(4) \\ (A', w) &\longmapsto A \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ v &\longmapsto A'(v) \cdot w \end{aligned}$$

Es fácil ver que h^{-1} es continua y observe que estamos considerando la inmersión usual $SO(3) \subset SO(4)$. Por otro lado, $h(h^{-1}(T', w)) = h(T) = (T'', T(1)) = (T'', w)$ pues $T(1) = 1$ mientras que $T''(v) = T'(v) \cdot w \cdot w^{-1} = T'(v)$. Luego $h(h^{-1}(T', w)) = (T', w)$. La igualdad restante se prueba de manera similar. Así h es además una función biyectiva, con inversa continua y por lo tanto un homeomorfismo. □

Corolario 2.11.6. $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$

Demostración. $\pi_1(SO(4)) = \pi_1(SO(3) \times S^3) = \mathbb{Z}_2 \times \{\varepsilon\} = \mathbb{Z}_2$ □

Proposición 2.3.12 (Poincaré). *No existe función continua* $v : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $v(x) \neq 0$ *con* $\langle x, v(x) \rangle = 0$ *para todo* $x \in S^2$

Demostración. Supongamos que tal función existe, además sin perdida de generalidad sea v tal que $v : S^2 \longrightarrow S^2$ tal que $\langle x, v(x) \rangle = 0$ para todo $x \in S^2$. Luego podemos considerar la matriz ortogonal $M(x) = [x, v(x), x \times v(x)]$ y por lo tanto $M(x) \in SO(3)$. Luego, usando la identificación $SO(2) \subset SO(3)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Podemos ahora definir la función continua $h : S^2 \times SO(2) \longrightarrow SO(3)$ como $h(x,L) = M(x) \cdot L$, cuya inversa, la cual es también continua, es definida por $h^{-1}(T) = (x, M(x) \cdot T^{-1})$ donde $x = T(e_1)$. Por lo tanto $\pi_1(S^2 \times SO(2)) = \pi_1(SO(3))$ lo cual es una contradicción. □

Resta probar por lo tanto que $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 5$ para esto haremos uso de la siguiente fibración trivial local.

Proposición 2.3.13. *La transformación* $\pi : SO(n) \longrightarrow S^{n-1}$, $\pi(T) = T(e_1)$ *es una fibración trivial local con fibra típica* $SO(n-1)$

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto $V = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1} | x_1 > 0\}$, luego para $x \in V$,la siguiente matriz $[x, e_2, \ldots, e_n]$ tiene determinante igual a x_1. Aplicando el proceso Gram-Schmidt a esta matriz se obtiene una matriz ortogonal $\sigma(x) \in SO(n)$ la cual tiene como primera columna el vector x. Entonces podemos definir la siguiente función continua $\sigma : V \longrightarrow \pi^{-1}(V)$ $x \mapsto \sigma(x)$. Evidentemente, construcción, $\sigma \circ \pi = id_V$.

Sea $\varphi_V : V \times SO(n-1) \longrightarrow \pi^{-1}(V)$ definida como la transformación lineal $\varphi_V(x,M) = \sigma(x) \cdot M$. En esta última expresión hacemos uso de la identificación usual de $SO(n-1) \subset SO(n)$. Además, observe que la primera columna de este producto de matrices es x para $x \in V$ y, de este modo, $\pi(\varphi_V(x,M)) = x$. Por otro lado φ_V es en efecto un homeomorfismo, su inversa esta dada por la siguiente función continua $\varphi_V^{-1} : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times SO(n-1)$ $\varphi_V^{-1}(T) = (x, \sigma^{-1}(x) \cdot T)$ donde $x = \pi(T) = T(e_1)$. Verifiquemos la igualdad $\varphi_V^{-1}(\varphi_V(x,M)) = (x,M)$, ya que la otra es similar.

$\varphi_V^{-1}(\varphi_V(x,M)) = \varphi_V^{-1}(\sigma(x) \cdot M) = (x, \sigma^{-1}(x) \cdot \sigma(x) \cdot M) = (x,M)$ pues $\sigma(x) \cdot M(e_1) = \sigma(x)(e_1) = x$.

Lo demostrado hasta ahora se cumple para $e_1 \in V \subseteq S^3$ una vecindad abierta de e_1. De manera general para $y \in S^{n-1}$ podemos elegir $T \in SO(n)$ tal que $T(e_1) = y$ entonces $W = T(V)$ es una vecindad abierta de y, mientras que $\varphi_W : W \times SO(n-1) \longrightarrow \pi^{-1}(W)$, $\varphi_W(x,M) = T\varphi_V(T^{-1}(x), M) = T\sigma(T^{-1}(x)) \cdot M$. □

Como observación, aplicando sucesivamente el Corolario 2.11.2, podemos decir que $SO(n)$ es conexo por caminos pues $SO(1) = \{1\}$.

Como todo lo presentado hasta ahora, también es posible definir el grupo unitario $U(n)$ formado por todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que preservan el producto interno en $\mathbb{C}$, es decir: $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle = x_1\bar{y_1} + \cdots + x_n\bar{y_n}$ donde $x_i, y_i \in \mathbb{C}$; o de manera matricial $TT^* = T^*T = I$ donde T^* es la transpuesta conjugada de T. Si $T \in U(n)$ entonces $|det(T)| = 1$, es decir $det(T) \in S^1$. Se denota $SU(n)$, el grupo especial lineal, al conjunto $SU(n) = \{T \in U(n) |\ det(T) = 1\}$. De manera similar a como se hizo en la Proposición 2.3.13 se demuestra la siguiente proposición, de la cual omitiremos su prueba.

Proposición 2.3.14. *La transformación $\pi : SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$, $\pi(T) = T(e_1)$ es una fibración trivial local con fibra típica $SU(n-1)$*

De igual manera a como se hizo en una observación anterior, podemos concluir que $SU(n)$ es conexo por caminos.

Lema 2.3.4. $U(n) \approx S^1 \times SU(n)$

Demostración. Sea $f : S^1 \times SU(n) \longrightarrow U(n)$ el siguiente homeomorfismo:

$$\begin{aligned} f : S^1 \times SU(n) &\longrightarrow U(n) \\ (u, T) &\longmapsto [u \cdot T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)] \end{aligned}$$

Evidentemente f es una función continua, sus columnas son continuas, mientras que su inversa se puede definir como

$$\begin{aligned} f^{-1} : U(n) &\longrightarrow S^1 \times SU(n) \\ R &\longmapsto (det(R), [\frac{1}{det(R)} \cdot R(e_1), R(e_2), \ldots, R(e_n)]) \end{aligned}$$

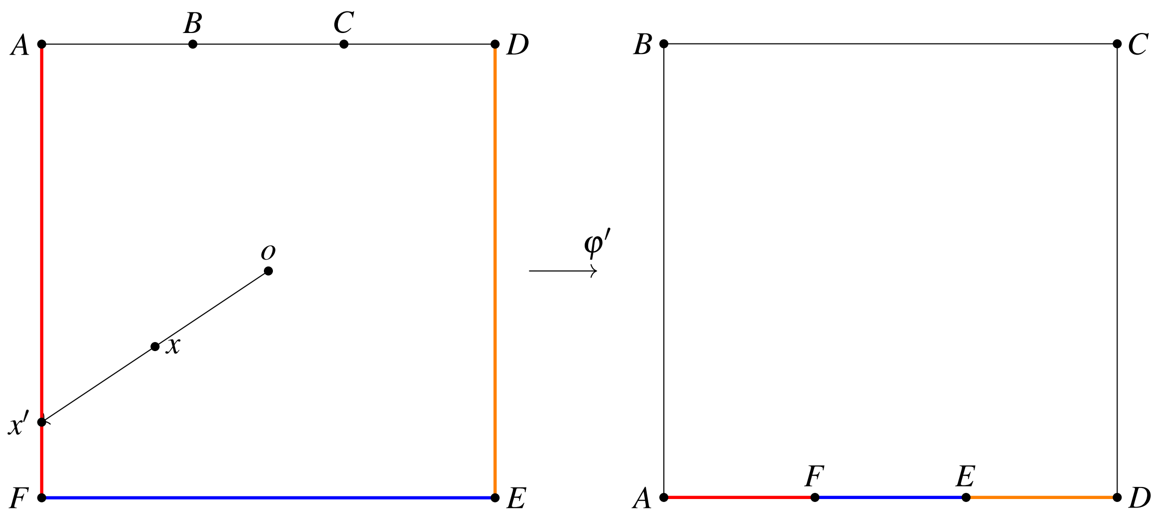
El calculo de $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ es bastante sencillo y por lo tanto omitiremos sus detalles. □

Al contrario de $SO(n)$, para $SU(n)$ veremos que este espacio tiene la particularidad de ser simplemente conexo y por lo tanto $\pi(U(n)) = \mathbb{Z}$. Con el fin de demostrar también estos resultados probaremos los siguientes lemas.

Lema 2.3.5. *Sean $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local y un camino $\alpha' : I \longrightarrow E$. Entonces toda homotópia $H : I \times I \longrightarrow B$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s) = \pi \circ \alpha'(s)$ tiene un levantamiento $H' : I \times I \longrightarrow E$ donde $H'(s, 0) = \alpha'(s)$*

Lema 2.3.6. *Sean $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local, $X = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \cup (\{1\} \times I)$ y $f' : X \longrightarrow E$ una función continua. Entonces toda homotópia $H : I \times I \longrightarrow B$ tal que $H|_X = f = \pi \circ f'$ tiene un levantamiento $H' : I \times I \longrightarrow E$ donde $H'|_X = f'$*

Los anteriores lemas 2.3.5, 2.3.6 son equivalentes, puesto que existe un homeomorfismo de $I \times I$ en si mismo que envía $I \times \{0\}$ en X. Este homeomorfismo es suficiente definirlo sobre la frontera de $I \times I$ pues después es fácil extenderlo a todo el rectángulo por una extensión radial. En efecto, para todo $x \in I \times I$ existe un único x' sobre la frontera tal que $x = (1-t)o + tx'$, así $\varphi(x) = (1-t)o + t\varphi'(x')$ como lo muestra la siguiente figura.



Probaremos por lo tanto tan solo el Lema 2.3.5, en donde haremos uso de la técnica del levantamiento a través de las vecindades distinguidas (ver página 32).

Demostración. Veamos por casos. Si $E = B \times F$ donde $\pi : B \times F \longrightarrow B$ es la proyección de la primera columna, entonces se tendría que $\alpha' = (\alpha, \beta)$, luego podemos definir a H' como $H'(s,t) = (H(s,t), b(s))$.

Si ahora $\varphi : B \times F \longrightarrow E$ es un homeomorfismo, entonces considerando a $\pi \circ \varphi(x,y) = x$ como en el caso anterior existe un levantamiento K de H tal que $K(s,0) = \varphi^{-1} \circ \alpha'(s)$ entonces $\varphi \circ K$ es una homotópia que comienza con α' y además es un levantamiento de H.

De manera general, por la compacidad de $I \times I$, podemos elegir el número de Lebesgue tal que $H(J_i \times I_j) \subset V_{ij}$, donde J_i, I_j son intervalos consecutivos compactos tal que $I \times I = \bigcup_{i,j} J_i \times I_j$ y V_{ij} es una vecindad distinguida. Luego empezando con $J_1 \times I_1$ y aplicando el caso anterior a $\varphi_{11} : V_{11} \times F \longrightarrow \pi^{-1}(V_{11})$ podemos encontrar un levantamiento H'_{11} de $H|_{J_1 \times I_1}$ con las condiciones del lema sobre V_{11} tal que $\pi \circ H_{11} = H|_{J_1 \times I_1}$. Repitiendo un argumento similar, podemos encontrar un levantamiento H'_{1j} de $H|_{J_1 \times I_j}$ tal que $\pi \circ H'_{1j} = H|_{J_1 \times I_j}$. De hecho un levantamiento H'_{ij} para $H|_{J_i \times I_j}$. Por ultimo se define $H'(s,t) = H'|_{ij}$ si $(s,t) \in J_i \times I_j$. $\square$

Proposición 2.3.15. *Sean $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local. Si la base B es simplemente conexa y F, la fibra típica es conexa por caminos entonces el grupo fundamental de E es isomorfo a un cociente del grupo fundamental de F*

Demostración. Sea $x_0 \in E$y $y_0 = \pi(x_0)$, podemos decir por lo tanto $F = \pi^{-1}(y_0) \subset E$. Consideremos por tanto la función inclusión $i : F \longrightarrow E$ y su respectivo homomorfismo inducido $i_* : \pi_1(F, x_0) \longrightarrow \pi_1(E, x_0)$. Para probar por lo tanto el resultado de la proposición resta entonces verificar que i_* es sobreyectivo.

Sea $\alpha' : I \longrightarrow E$ un camino cerrado sobre x_0 entonces $\alpha = \pi \circ \alpha'$ es también un camino cerrado sobre y_0. Como B es simplemente conexo, existe $H : \alpha \cong e_{y_0}$. Definamos ahora la siguiente función continua, gracias al lema del pegado, $f' : X \longrightarrow E$ tal que $f'(s,0) = \alpha'(s)$, $f'(0,t) = f'(1,t) = x_0$ donde X es como en Lema 2.3.6. H coincide con $\pi \circ f$ en X, luego por el mismo Lema 2.3.6 existe una homotópia $H' : I \times I \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ H' = H$ donde $H'|_X = f'$, esto es H' es una homotópia entre α' y $\beta'(s) = H'(s,1)$, así $\pi \circ \beta'(s) = \pi \circ H(s,1) = y_0$, luego β' se puede simplemente considerar como un camino cerrado en $\pi^{-1}(y_0) = F$. Esto es, α' es homotópica a un camino cerrado en F, que es precisamente lo que se quería demostrar. $\square$

Corolario 2.11.7. *$SU(n)$ es simplemente conexo y por lo tanto $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$*

Demostración. $SU(1) = \{1\}$, $SU(2) = S^3$, luego en particular son simplemente conexos como $\pi : SU(3) \longrightarrow S^5$ es una fibración, aplicando la Proposición anterior se tendría que $\pi(SU(3))$ es un cociente del grupo $\pi(SU(2))$ y por lo tanto $\pi(SU(3)) = \varepsilon$, para $n \geq 4$ se puede demostrar de la misma manera. $\square$

Los siguientes Lemas y Proposición son generalizaciones de los Lemas 2.3.5, 2.3.6 y la Proposición 2.3.15, aun así la prueba de estos utiliza argumentos similares a las ya mencionadas anteriormente, por lo que omitiremos sus demostraciones.

Lema 2.3.7. *Sean $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local y un α' camino $g' : I \times I \longrightarrow E$. Entonces toda homotopia $H : I \times I \times I \longrightarrow B$ tal que $H(s,t,0) = g(s,t) = \pi \circ g'(s,t)$ tiene un levantamiento $H' : I \times I \times I \longrightarrow E$ donde $H'(s,t,0) = g'(s,t)$*

Lema 2.3.8. *Sean $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local, $X = \partial(I \times I) \times I$ y $f' : X \longrightarrow E$ una función continua. Entonces toda homotopia $H : I \times I \times I \longrightarrow B$ tal que $H|_X = f = \pi \circ f'$ tiene un levantamiento $H' : I \times I \times I \longrightarrow E$ donde $H'|_X = f'$*

Proposición 2.3.16. *Sean $\pi : E \longrightarrow B$ una fibración trivial local. Si la base B es simplemente conexa y F, la fibra típica es conexa por caminos y además $\pi_2(B) = \varepsilon$. Entonces el grupo fundamental de E es isomorfo al grupo fundamental de F*

Para esta última Proposición, el objetivo de la prueba es seguir la idea de la Proposición 2.3.15 y demostrar que i_* es inyectiva.

Corolario 2.11.8. *Para $n \geq 3$, $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$*

Como para toda función $f : S^2 \longrightarrow S^n$ continua, esta es homotopica a una función diferenciable, por el teorema de Sard donde su imagen es de medida cero. En particular nunca es sobreyectiva, luego homotópica a una constante. Esto es $\pi_2(S^n) = \varepsilon$. Así, por la proposición anterior $\pi_1(SO(3)) = \pi_1(SO(4)) = \cdots = \pi_1(SO(n)) \cdots = \mathbb{Z}_2$

Capítulo 3

Grupos y Álgebras de Lie

En este último capítulo introduciremos las nociones de Grupos y Álgebras de Lie, aunque tan solo de manera matricial. Hasta ahora la mayoría de ejemplos, y de hecho los mas importantes, que se vieron en la sección anterior eran los relacionados con los grupos de matrices, de manera similar se introducirán los grupos de Lie de manera matricial, pues además de ser fácil entender las técnicas de las pruebas y resultados, los cuales se siguen cumpliendo de manera mas general, muchos de los ejemplos mas fundamentales de grupos de Lie son de hecho los grupos de matrices

3.1. Grupos de Lie y Matriz Exponencial

Definición 3.1 (Grupo de Lie)**.** Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable, que también es un grupo, donde el producto

$$\begin{aligned} m\colon G\times G &\longrightarrow G \\ (g_1,g_2) &\longmapsto g_1\cdot g_2 \end{aligned}$$

Y la función inversa

$$\begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Son ambas funciones diferenciales (suaves).

Como un ejemplo, ya vimos anteriormente en la Proposicion 2.3.9 que $SO(n)$ son ejemplos de variedades suaves, donde evidentemente el producto y la inversa son funciones diferenciables, esto es, un ejemplo de grupo de Lie.

Definición 3.2 (Grupo de Lie matricial)**.** Un grupo de Lie matricial G, es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$ junto con la siguiente propiedad: Si A_m es una secuencia convergente de matrices, $A_m \longrightarrow A$, entonces $A\in G$ o A no es invertible

Antes de seguir se deben hacer algunas claridades, La anterior definición en un sentido quiere decir que G es un subgrupo cerrado de $GL(n,\mathbb{C})$, de manera topológica. La convergencia de estas matrices se hace de acuerdo con la siguiente norma:

$$\|X\| := (\sum_{k,l=1}^{n} |X_{kl}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

la cual satisface

$$\begin{aligned} \|X+Y\| &\leq \|X\| + \|Y\| \\ \|XY\| &\leq \|X\|\|Y\| \\ \|X_i\| &\leq \|X\| \end{aligned}$$

Donde X_i son las columnas de X. Con esta definición de norma, se puede definir, como se hace en $\mathbb{R}$, cuando una serie de matrices $\sum_{m=0}^{n} X_m$ converge absolutamente, si las sumas parciales (de números reales)

$$\sum_{m=0}^{n} \|X_m\| < \infty$$

es convergente. En este caso, como en los números reales, si la serie es absolutamente convergente entonces esta es convergente.

Por último, un objetivo de la tesis será probar, si G es un grupo de Lie matricial entonces G, una subvariedad suave de $GL(n,\mathbb{C})$ también es un grupo de Lie, mas no todo grupo de Lie es un grupo de Lie matricial.

Definición 3.3 (Homomorfismos de grupos de Lie)**.** Sean H y G grupos de Lie matriciales. Una función Φ de H a G se dice que es un *homomorfismo de grupos de Lie*, matriciales, si Φ es un homo de grupos y además es una función continua. Si Φ es inyectiva y Φ^{-1} es continua entonces Φ es llamado isomorfismo de grupos de Lie.

La definición, de manera general, para grupos de Lie requiere una condición mas fuerte, donde Φ además es una función suave. En resumen tenemos lo siguiente.

Proposición 3.1.1. *Todo grupo de Lie matricial es una subvariedad suave de $GL(n,\mathbb{C})$ y por lo tanto un grupo de Lie.*

Proposición 3.1.2. *Si Φ es un homo entre grupos de Lie matriciales, si Φ es continua entonces Φ es una función suave*

Para probar estos y otros resultados se hace necesario introducir, estudiar y explorar nuevas propiedades estructurales, características algebraicas que sean compatibles con las estructuras diferenciales, que enriquezcan y permitan caracterizar estos grupos y sus representaciones.

3.1.1. Matriz exponencial

Para toda matriz X cuadrada de orden n, con $n \geq 1$, la matriz exponencial como $e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}$

Proposición 3.1.3. *Si X es una matriz $n \times n$ entonces $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}$ es una serie convergente y e^X es una función continua.*

Demostración.

$$\|e^X\| = \|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|\frac{X^m}{m!}\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|X\|^m}{m!} = e^{\|X\|} < \infty$$

Esto último quiere decir que además la serie es uniformemente convergente, lo que implica que la función e^X es continua pues cada X^m son a su vez funciones continuas. □

Proposición 3.1.4. *Si X y Y son dos matrices cuadradas de orden n entonces:*

1. $e^0 = I$
2. $(e^X)^* = e^{X^*}$
3. $e^{X-X} = I$
4. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$
5. *Si X y Y conmutan entonces* $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$
6. *Si C es una matriz invertible entonces* $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$

Demostración. La mayoría de estos resultados se obtienen de la verificación de 5. Solo demostraremos este hecho.

$$e^X e^Y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!} \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} X^k Y^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^m}{m!} = e^{X+Y}$$

Estas ultimas igualdades se cumplen pues X y Y conmutan, por lo tanto se cumple el binomio de Newton. El resto de las propiedades se realizan con cálculos similares (ver, [3]). □

Proposición 3.1.5. *Si X es una matriz $n \times n$ entonces e^{tX} es una función continua diferenciable en $M_n(\mathbb{C})$ donde $\frac{d}{dt} e^{tX}|_{t=0} = X$*

La prueba de este resultado se realiza diferenciando término por término, dentro de la serie, pues esta converge uniformemente (ver, [3]). Por otro lado el cálculo de la función exponencial es una labor, que en algunos casos, resulta ser rutinaria. Veremos unos casos particulares.

Si A es una matriz diagonalizable entonces $A = Cdiag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)C^{-1}$ para alguna $C \in GL(n, \mathbb{C}) \Rightarrow exp(A) = Cexp(diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))C^{-1} = Cdiag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n})C^{-1}$. Mientras que si A es nilpotente entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$, por lo que la serie infinita de e^A se convierte en una serie finita.

Como también toda matriz X se puede escribir como $X = D + N$ donde D es una matriz diagonalizable y N es una matriz nilpotente (ver, [2] y [3]), las cuales conmutan, entonces $e^X = e^D e^N$, por ejemplo:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = Cdiag(-ia, ia)C^{-1}$$

Donde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$e^X = C \begin{bmatrix} e^{-ia} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{bmatrix} C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$$

3.1.2. Matriz logaritmo

Definición 3.4. Si X es una matriz $n \times n$ entonces definimos $log(X)$ como siendo la siguiente serie, cuando converge.

$$log(X) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m}$$

Esta anterior concuerda con la definición de la función logaritmo, expandido por medio de su serie de potencias. Para el caso de las funciones analíticas se sabe de antemano que el radio de convergencia de la función logaritmo es 1, y que además cuando el argumento tiene norma menor que $log2$ entonces la función inversa esta bien definida. Probaremos resultados similares cuando hablamos de matrices, por tanto hace sentido pensar en la función logaritmo como se tiene en la definición.

Teorema 3.1. *La función log(X) es una función continua en el conjunto de las matrices X tal que $\|X-I\| < 1$. Además si $\|X-I\| < 1$ entonces $e^{log(X)} = X$. Mientras que si $\|X\| < log(2)$ y $\|e^X - I\| < 1$ entonces $log(e^X) = X$*

Demostración. Como $\|(X-I)^m\| \leq \|X-I\|^m < 1$ entonces la serie que define al logaritmo es uniformemente convergente y en particular continua, por las mismas justificaciones de se hicieron acerca de la continuidad de e^X. Por otro lado supongamos que $\|X-I\| < 1$ y además que X es diagonalizable, $i, e.$ $X = Cdiag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)C^{-1}$ entonces $X - I = C(diag(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_n - 1)C^{-1}) \Rightarrow (X-I)^m = C(diag((\lambda_1-1)^m, (\lambda_2 - 1)^m, \ldots, (\lambda_n - 1)^m)C^{-1})$. Mientras que $\|\lambda_i - 1\| \leq \|X - I\| < 1$ y asi:

$$log(X) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m} = Cdiag(log(\lambda_1), log(\lambda_2), \ldots, log(\lambda_n))C^{-1} \Rightarrow$$
$$e^{log(X)} = Cdiag(e^{log(\lambda_1)}, e^{log(\lambda_2)}, \ldots, e^{log(\lambda_n)})C^{-1} = Cdiag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)C^{-1} = X$$

Ahora, en el caso en que X no es diagonalizable, es posible encontrar una secuencia de matrices diagonalizables tal que $X_m \to X$ (ver, [2] y [3]), lo que además implica que $\|X_m - I\| < 1$ para m suficientemente grande. Con esto se tendría que $e^{log(X_m)} = X_m \to X = e^{log(X)}$, pues las funciones exponencial y logaritmo son funciones continuas. El último caso se puede resolver de manera muy similar, utilizando simplemente un X arbitrario. Además, en este caso la función $log(z)$ es una función analítica para $|z| < log(2)$. Aún más, si $|z| < log(2)$ entonces $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - | < 1$ por lo que $log(e^z)$ esta bien definido. □

Proposición 3.1.6. *Existe una constante c tal que $\|log(B+I) - B\| \leq c\|B\|^2$ para todas las matrices tales que $\|B\| \leq \frac{1}{2}$. Esto es $log(B+I) = B + O(\|B\|^2)$*

Demostración.

$$\|log(B+I)-B\| = \|\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(B)^m}{m}\| \leq \|B\|^2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\|(B)\|^{m-2}}{m} \leq c\|B\|^2$$

Donde

$$c = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{m-2}}{m}$$

□

Teorema 3.2 (Formula del producto)**.** *Si X y Y son 2 matrices $n\times n$ entonces:*

$$e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}})^m \tag{3.1}$$

Demostración. Consideremos primero las multiplicaciones de las series $e^{\frac{X}{m}}$ y $e^{\frac{Y}{m}}$, vemos que los primeros tres términos de esta multiplicación son $I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}$. Los siguientes términos todos son una combinación de multiplicaciones involucrando el valor $\frac{1}{m^2}$. Esto es $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})$ lo cual implica $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} \longrightarrow I$, podemos decir entonces que para m suficientemente grande $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}$ esta en el dominio de la función log. Luego:

$$log(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}) = log(I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})) = \frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\|\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})\|) = \frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})$$

Lo cual implica que $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = e^{\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})}$ y en definitiva $(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}})^m = e^{X+Y+O(\frac{1}{m)}}$. Por la continuidad de todas estas funciones se concluye que: $e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}})^m$. □

Teorema 3.3. *Para toda matriz X de tamaño $n\times n$ se cumple que: $det(e^X) = e^{traza(X)}$*

Demostración. De nuevo probaremos este resultado por casos. Si X es una matriz digonalizable entonces: $X = Cdiag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)C^{-1}$, $traza(X) = \sum\lambda_i$,
$det(e^X) = det(diag(e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\ldots,e^{\lambda_n})) = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum\lambda_i}$

Por otro lado si X es nilpotente entonces también existe una matriz invertible tal que $X = CDC^{-1}$ donde $traza(D) = 0$ (ver, [2] y [3]), lo que implica que $traza(X) = 0$ y además $e^X = Ce^DC^{-1}$ donde e^D tiene en su diagonal solo entradas de 1, debido a que la matriz identidad I que hace parte de la suma en la serie de e^D. Con esto $det(e^X) = 1 = e^{traza(X)}$. Si X es una matriz arbitraria entonces $X = D+N$ donde D es diagonalizable y N es nilpotente, donde se puede aplicar los casos anteriores. □

Definición 3.5. Una función $A:\mathbb{R}\longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ es llamada *subgrupo de uno parámetro* si:

1. A es continua
2. $A(0) = I$
3. $A(s+t) = A(s)A(t)$

Teorema 3.4. *Si A es un subgrupo de uno parámetro entonces existe una única matriz X tal que $A(t) = e^{tX}$*

Demostración. Veamos que A es también una función diferenciable, de hecho tenemos que:

$$\begin{aligned} A'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A(h+t)-A(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A(h)A(t)-A(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A(h)-I)A(t) \\ &= A'(0)A(t) = A(t)A'(0) \end{aligned}$$

Luego si hacemos $X = A'(0)$ entonces A en particular satisface la siguiente ecuación diferencial $A'(t) = A(t)X$, $A(0) = I$. Por unicidad de la ecuación diferencial, como e^{tX} también satisface las condiciones del problema de valor inicial se concluye que $A(t) = e^{tX}$. La unicidad de obtiene del hecho que $\frac{d}{dt}e^{tX}|_{t=0} = X$ □

3.2. Álgebras de Lie

En esta sección introduciremos el concepto de Álgebras de Lie, de manera también matricial. Se hace mas fácil estudiar las propiedades del álgebra mas que las del grupo precisamente por la riqueza y simplicidad de los espacios lineales.

Definición 3.6 (Álgebra de Lie)**.** Sea G un grupo de Lie matricial. El álgebra de Lie de G denotada por $\mathfrak{g}$ es el conjunto de matrices X tal que $e^{tX} = A(t) \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$ $(A(\mathbb{R}) \subset G)$.

Calcularemos en particular algunos ejemplos de estas álgebras, de varios grupos que ya sabemos de antemano que son grupos de Lie.

- $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Si X es una matriz arbitraria ya sabemos que $e^{tX} \in GL(n,\mathbb{R})$, por otro lado como $X = \frac{d}{dt}(e^{tX}|_{t=0})$ con lo que X es una matriz real. Esto es $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ es el espacio de todas las matrices reales $n \times n$.

- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. por teorema $det(e^{sX}) = e^{straza(X)} = 1 \Rightarrow s$traza$(X) = 0$. Por otro lado si $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ entonces $det(e^{sX}) = e^{straza(X)} = 1$. luego $s$traza(X) es un múltiplo de $2\pi i$ para todo s, por lo tanto $traza(X) = 0$. Luego $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices con traza 0

- $\mathfrak{o}(n), \mathfrak{so}(n)$ Supongamos por ahora que las álgebras de Lie de $O(n)$ y $SO(n)$ son las mismas. Lo cual es cierto, como será mostrado más adelante en este texto. Por otro lado si $(e^{tX})^{tr} = (e^{tX})^{-1}$ entonces $e^{tX^{tr}} = e - tX$. Esto último es cierto si $X^{tr} = -X$, donde X^{tr} es la matriz transpuesta de X. Diferenciando esta la última expresión que involucra la función exponencial y evaluando en $t = 0$ también se tiene que $X^{tr} = -X$. Luego $\mathfrak{o}(n)$ es el conjunto de matrices X tales que $X^{tr} = -X$

- **El grupo de Heisenberg**. Este grupo es el formado por todas las matrices de la siguiente forma.
$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado cuando se computa la matriz exponencial de una matriz superior, que también es nilpotente.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^C = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego esta matriz exponencial pertenece al grupo de Heisenberg. Por otro lado como $C = \frac{d}{dt}(e^{tC}|_{t=0})$ entonces C debe tener sobre su diagonal 1's, pues e^C ya tiene sobre la diagonal 1's, por la suma de la matriz identidad. Luego C debe pertenecer al grupo de Heisenberg. En conclusión su álgebra de Lie es conformado por las matrices superiores triangulares.

3.2.1. Propiedades del Álgebra de Lie

Proposición 3.2.1. *Sea G un grupo de Lie matricial. Un elemento X esta en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces e^X esta en la componente conexa de la matriz identidad.*

Demostración. Como $A(t) = e^{tX}$ es una función continua, en particular $A|_{[0,1]}$ es una función continua que une a I con la matriz e^X □

Proposición 3.2.2. *Si G es un grupo de Lie matricial. Si $X \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$ entonces $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$*

Demostración. Consecuencia de la Proposición 3.1.4. □

Proposición 3.2.3. *Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, un grupo de Lie matricial, entonces para X y Y en $\mathfrak{g}$.*

1. $sX \in \mathfrak{g} \quad \forall s \in \mathbb{R}$
2. $X + Y \in \mathfrak{g}$
3. $XY - YX \in \mathfrak{g}$

Demostración. Evidentemente 1 se cumple trivialmente, de la definición. Mientras que para 2 se cumple si X y Y conmutan gracias, de nuevo, por las propiedades de la Proposición 3.1.4. En otro caso, si no conmutan, podemos hacer uso del hecho que:

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{m\to\infty} (e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}})^m$$

Como $e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}} \in G$ entonces $e^{t(X+Y)}$ también esta en G, este es un grupo cerrado por definición.

Para verificar la propiedad 3 sabemos que $\frac{d}{dt}(e^{tX}Y|_{t=0}) = XY$, esto porque la función $e^X Y$ es una transformación lineal. Por otro lado, aplicando la Proposición 3.2.3 tenemos que $e^{tX}Ye^{-tX} \in \mathfrak{g}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo que aplicando la regla del producto:

$$\frac{d}{dt}(e^{tX}Ye^{-tX}|_{t=0}) = (XY)e^0 - (e^0 Y)X = XY - YX = \lim_{h\to 0} \frac{e^{tX}Ye^{-tX} - Y}{h}$$

Como $\mathfrak{g}$ es un subconjunto cerrado, topológicamente hablando por las propiedades ya mostradas en esta proposición. Entonces el limite anterior tiene que estar en $\mathfrak{g}$, es decir $XY - YX \in \mathfrak{g}$ □

A este último objeto en $\mathfrak{g}$, lo denotaremos por, $[X,Y] = XY - YX$ y será llamado el *conmutador* de X y Y. Es decir, el conmutador nos da una medida para saber cuan alejados están X y Y de conmutar. Este elemento será de vital importancia para el estudio de los grupos de Lie de manera algebraica.

Teorema 3.5. *Sean G y H dos grupos de Lie y $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie. Si $\Phi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie entonces existe una única transformación lineal $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, donde:*

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$ *para* $X \in \mathfrak{g} \quad A \in G$
2. $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ *para* $X,Y \in \mathfrak{g}$
3. $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})|_{t=0}$
4. *Si $\Phi : H \longrightarrow K$ y $\Theta : G \longrightarrow H$ son homomorfismos entre grupos de Lie, entonces $\Phi \circ \Theta = \Lambda : G \longrightarrow K$ es un homomorfismo de grupos donde la única transformación lineal λ determinada por la afirmación anterior, corresponde a la composición de ϕ y θ que son las transformaciones asociadas a los homomorfismos Φ y Θ respectivamente es $\lambda = \phi \circ \theta$.*

Demostración. Siendo Φ una función continua y homomorfismo, se tiene que $\Phi(e^{tX})$ es un subgrupo de uno parámetro para cada $X \in \mathfrak{g}$. Así se tiene que existe una única matriz Z tal que $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ} \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto $Z \in \mathfrak{h}$. Así podemos definir ϕ siendo $\phi(X) = Z$. Resta verificar que ϕ de hecho es una transformación lineal y que cumple con las propiedades mencionadas.

Dado $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Phi(e^{tsX}) = e^{tsZ} = e^{t\phi(sX)} = e^{ts\phi(X)} \Rightarrow \phi(sX) = s\phi(X)$. Ahora bien, como Φ es un homomorfismo continuo, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
e^{t\phi(X+Y)} = e^{\phi(t(X+Y))} &= \Phi(e^{t(X+Y)}) \\
= \Phi(\lim_{m\to\infty}(e^{\frac{tX}{m}}e^{\frac{tY}{m}})^m) &= \lim_{m\to\infty}\Phi[(e^{\frac{tX}{m}}e^{\frac{tY}{m}})^m] \\
= \lim_{m\to\infty}(\Phi(e^{\frac{tX}{m}})\Phi(e^{\frac{tY}{m}}))^m &= \lim_{m\to\infty}(e^{\frac{t}{m}\phi(X)}e^{\frac{t}{m}\phi(Y)})^m \\
&= e^{t(\phi(X)+\phi(Y))} \\
\Rightarrow \phi(X+Y) &= \phi(X)+\phi(Y)
\end{aligned}$$

Veremos ahora las propiedades que cumple esta transformación:

1.

$$\begin{aligned}
e^{t\phi(AXA^{-1})} &= e^{\phi(tAXA^{-1})} \\
= \Phi(e^{t(AXA^{-1})}) &= \Phi(Ae^{tX}A^{-1}) \\
= \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1} &= \Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A)^{-1}
\end{aligned}$$

Diferenciando esta última expresión, haciendo uso de la derivada de un producto se llega al resultado deseado.

2. Como ϕ es una transformación lineal entonces:

$$\begin{aligned}\phi([X,Y]) =&\phi(\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}|_{t=0})\\ =&\frac{d}{dt}\phi(e^{tX}Ye^{-tX})|_{t=0}\\ =&\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\phi(Y)\Phi(e^{tX})^{-1}|_{t=0}\\ =&\frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}|_{t=0}\\ =&[\phi(X),\phi(Y)]\end{aligned}$$

3. $\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}|_{t=0} = \phi(X)$ La unicidad de la transformación es gracias a esta propiedad.

4. $e^{t\lambda(X)} = \Lambda(e^{tX}) = \Phi(\Theta(e^{tX})) = \Phi(e^{t\theta(X)}) = e^{t\phi(\theta(X))} \Rightarrow \lambda(X) = \phi(\theta(X))$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

$\square$

Proposición 3.2.4. *Si $\Phi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie y $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ su transformación asociada entre álgebras de Lie. Entonces $kernel(\Phi)$ es un subgrupo normal cerrado (y asi, un grupo de Lie) y su álgebra de Lie esta dada por $Lie(kernel(\Phi)) = ker(\phi)$*

Demostración. Evidentemente las propiedades de ser cerrado y normal se deben solo a Φ ser un homomorfismo de grupos de Lie. Mientras que la caracterización de su álgebra es gracias a que $\Phi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)} = I$ si $X \in ker(\phi)$ $\square$

Definición 3.7 (Función adjunta)**.** Sea G un grupo de Lie con $\mathfrak{g}$ como su álgebra de Lie. Entonces para cada $A \in G$ podemos definir la *función adjunta* siendo $Ad_A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ $Ad_A(X) = AXA^{-1}$.

Proposición 3.2.5. *Si G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Entonces la transformación $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ que asocia $A \longrightarrow Ad_A$ es un homomorfismo de G en $GL(\mathfrak{g})$. Donde $GL(\mathfrak{g})$ denota el conjunto de transformaciones lineales invertibles. Además se cumple que para cada $A \in G$;$(Ad_A)^{-1} = Ad_{A^{-1}}$ $\quad Ad_A([X,Y]) = [Ad_A(X),Ad_A(Y)]$*

Aquí como se esta trabajando sobre espacios de dimensión finita entonces $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos k, y así $GL(\mathfrak{g}) \simeq GL(k,\mathbb{R})$, como isomorfismo de espacios vectoriales. Luego la transformación, **continua**, Ad es un homomorfismo sobre grupos de Lie, sobre la cual se le puede asociar su transformación $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad X \longrightarrow ad_X$ con la propiedad de que $e^{ad_X} = Ad_{e^X}$, por el Teorema 3.5

Proposición 3.2.6. $ad_X(Y) = [X,Y]$

Demostración. $ad_X(Y) = \frac{d}{dt}Ad_{e^{tX}}(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}|_{t=0} = [X,Y]$ $\square$

3.2.2. Más sobre la Matriz exponencial

En esta sección simplemente estudiaremos la matriz exponencial como siendo la misma función que asocia a $X \longrightarrow e^X$, mas la estudiaremos sobre un grupo de Lie y su álgebra. Esto es $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$

Teorema 3.6. *Para* $0 < \varepsilon < ln2$ *sea* $U_\varepsilon = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | \|X\| < \varepsilon\}$ *y* $V_\varepsilon = exp(U_\varepsilon)$. *Si G es un grupo de Lie matricial y* $\mathfrak{g}$ *su álgebra de Lie entonces existe* $0 < \varepsilon < ln2$ *tal que para todo* $A \in V_\varepsilon$ *se tiene que* $A \in G \iff log(A) \in \mathfrak{g}$

Antes de probar el teorema veremos que el siguiente lema es válido.

Lema 3.2.1. *Sea* B_m *una secuencia de elementos de G tal que* $B_m \longrightarrow I$. *Si* $0 \neq Y_m = log(B_m)$ *y* $Y_m / \|Y_m\| \longrightarrow Y \in M_n(\mathbb{C})$ *entonces* $Y \in \mathfrak{g}$

Demostración. Evidentemente para cada $t \in \mathbb{R}$ $tY_m / \|Y_m\| \longrightarrow tY$. Mientras que como $B_m \longrightarrow I$ esto implica que $\|Y_m\| \longrightarrow 0$ por lo que es posible encontrar una secuencia de enteros k_m tal que $k_m \|Y_m\| \longrightarrow t$

$$\begin{aligned} e^{k_m Y_m} &= (e^{Y_m})^{k_m} \in G \\ \Rightarrow e^{k_m \|Y_m\| \frac{Y_m}{\|Y_m\|}} &\longrightarrow e^{tY} \in G \end{aligned}$$

Pues G es cerrado. □

Demostración Teorema 3.6. Podemos primero considerar a $M_n(\mathbb{C})$ siendo $\mathbb{R}^{2n^2}$ Como además $\mathfrak{g}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{2n^2}$ podemos ahí considerar a D como su complemento ortogonal. Esto es para cualquier Z existen únicas $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in D$ tal que estas conmutan y $Z = X + Y$. Así podemos definir la función exponencial como:

$$\Phi : \mathfrak{g} \bigoplus D \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \quad Z = X + Y \longrightarrow e^Z = e^X e^Y$$

Es fácil ver que $\frac{d}{dt}\Phi(tY, 0) = \frac{d}{dt} e^{tY}|_{t=0} = Y$, $\frac{d}{dt}\Phi(0 + tX) = \frac{d}{dt} e^{tX}|_{t=0} = X$ por lo tanto la derivada en el punto 0 es exactamente igual a la identidad. Así, haciendo uso del teorema de la función inversa, Φ tiene un homeomorfismo local en una vecindad de I. Sea por contradicción A_m la secuencia de elementos en G tal que $A_m \longrightarrow I$ donde $log(A_m)$ no esta en $\mathfrak{g}$. Haciendo uso de la función inversa(local) de Φ, podemos encontrar $Z_m = X_m + Y_m$ tal que $A_m = e^{X_m} e^{Y_m}$. Como $A_m \longrightarrow I$ entonces $X_m, Y_m \longrightarrow 0$ donde $Y_m \neq 0$, caso contrario $log(A_m) = X_m \in \mathfrak{g}$. Ahora bien $B_m = e^{-X_m} A_m = e^{Y_m} \in G$ pues $X_m \in \mathfrak{g}$, mientras que existe una subsecuencia de $Y_m / \|Y_m\|$ que converge a algún $Y \in D$, $\|Y\| = 1$ pues la bola unitaria es compacta. Luego $Y \in \mathfrak{g}$ pero esto es una contradicción con D ser el complemento ortogonal de $\mathfrak{g}$. □

Corolario 3.6.1. *Si G es un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *entonces existe una vecindad U del* $0 \in \mathfrak{g}$ *y una vecindad V de I en G tal que U y V son homeomorfos bajo la función exponencial (ver,[3]).*

Corolario 3.6.2. *Si G es una grupo de Lie matricial conexo. Entonces todo elemento* $A \in G$ *puede escribirse como* $A = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n}$ *donde* $X_i \in \mathfrak{g}$.

Lema 3.2.2. *Si $A : [a,b] \longrightarrow Gl(n,\mathbb{C})$ es una función continua. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta$ tal que si $|s-t| < \delta$ entonces $\|A(s)A(t)^{-1} - I\| < \varepsilon$*

La prueba del lema se sigue del hecho que la función A es una función continua, y por lo tanto uniformemente continua. Mientras que $\|A(t)^{-1}\|$ también es una función continua sobre un compacto, por lo que $\|A(t)^{-1}\| \leq C$ para algún $C \Rightarrow \|(A(s)-A(t))A(t)^{-1}\| \leq \|A(s)-A(t)\|\|A(t)^{-1}\| \leq C\varepsilon/C$

Demostración Corolario 3.6.2. Sea V_ε como en la prueba del teorema. Entonces dado A, podemos elegir un camino $A : I \longrightarrow G$ tal que $A(0) = I$ y $A(1) = I$. Mientras que por el lema existe δ tal que Si $|t-s| < \delta$ entonces $A(s)A(t)^{-1} \in V_\varepsilon$. Luego si m es tal que $1/m < \delta$ entonces $A(\frac{j-1}{m})A(\frac{j}{m})^{-1} = e^{X_j} \in V_\varepsilon$ para cada $j = 1,\ldots,m$ donde $X_j \in \mathfrak{g}$. Asi:

$$\begin{aligned} A =& A(0)^{-1}A(1) \\ =& A(0)^{-1}A(\frac{1}{m})(A(\frac{1}{m})^{-1}\cdots A(\frac{m-1}{m})^{-1}A(1) \\ =& e^{X_1}\cdots e^{X_m} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.6.3. *Sean G un grupo de Lie matricial conexo y H otro grupo de Lie. Si Φ_1 y Φ_2 son 2 homomorfismos entre grupos de Lie, tal que $\phi_1 = \phi_2$, donde ϕ_i son las transformaciones asociadas a Φ_1 y Φ_2. Entonces $\Phi_1 = \Phi_2$ (ver, [3]).*

Corolario 3.6.4. *Todo grupo de Lie matricial G es una subvariedad suave de $M_n(\mathbb{C})$ y por lo tanto un grupo de Lie.*

Demostración. Eligiendo a ε como en la prueba del Teorema 3.6, luego para $A_0 \in G$ se tiene que $A_0 \cdot V_\varepsilon$ es una vecindad de A_0, luego $A \in A_0 \cdot V_\varepsilon$ si y solo si existe $X \in U_\varepsilon \subset \mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ tal que $AA_0^{-1} = e^X$ o bien $A = A_0e^X$. Luego sobre esta vecindad A_0V_ε de A_0, el grupo G es isomorfo a algún subespacio de $\mathfrak{g}$, esto para todo $A_0 \in G$, es decir G es una subvariedad de $M_n(\mathbb{C})$. Mientras que las funciones multiplicación e inversión de matrices son aplicaciones suaves en $M_n(\mathbb{C})$ que restringidas a G siguen siendo suaves. □

Corolario 3.6.5. *Todo homomorfismo continuo entre grupos de Lie es suave (ver, [3])*

Corolario 3.6.6. *Sea G un grupo de Lie matricial con $\mathfrak{g}$ como se álgebra de Lie. Entonces $X \in \mathfrak{g}$ si y solo si existe una curva suave α en $M_n(\mathbb{C})$ tal que $\alpha(t) \in G$ para todo t y además $\alpha(0) = I$ con $\frac{d\alpha}{dt}|_{t=0} = X$. Es decir, $\mathfrak{g}$ es el espacio tangente en la identidad de G*

Demostración. Si $X \in \mathfrak{g}$ entonces podemos tomar $\alpha(t) = e^{tX}$. En la otra dirección si α es una curva suave con $\alpha(0) = I$, para t suficientemente pequeño podemos escribir $\alpha(t) = e^{\delta(t)}$ donde δ es una función suave en $\mathfrak{g}$. Mientras que la derivada de δ en $t = 0$ es igual a $t\delta'(0)$. Luego por la regla de la cadena

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}e^{\delta(t)}|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\delta'(0)}|_{t=0} = \delta'(0)$$

Como $\delta(t) \in \mathfrak{g}$ se tiene que $\alpha'(0) = \delta'(0) \in \mathfrak{g}$. Aquí $\delta(t)$ hace referencia a $log(\alpha(t))$ para t suficientemente pequeño tal que log esta bien definido. □

3.3. La formula Baker - Campbell - Hausdorff (BCH)

Hasta ahora los grandes resultados que relacionan los grupos con las álgebras de Lie son gracias a las propiedades que tienen los homomorfismos de grupos. Queremos ahora entonces estudiar que consecuencias tienen los homomorfismos y los grupos mismos de Lie cuando se tiene una transformación de álgebras de Lie, como por ejemplo si ϕ es una transformación lineal entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sera que existe un único homomorfismo entre sus respectivos grupos de Lie cumpliendo con las mismas propiedades del Teorema 3.5, i.e por ejemplo $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$. Tal vez habrán casos en que por ejemplo la unicidad o la existencia son imposibles, veremos por ejemplo que es posible cuando G es simplemente conexo. Un reto sera demostrar que si existe Φ entonces en efecto esta es un homomorfismo. Para esto se hace uso de la fórmula BCH que relaciona el logaritmo del producto de 2 matrices exponenciales junto con el conmutador. Por ejemplo para un A cerca de la identidad, gracias al Teorema 3.6 sobre un conjunto abierto U la función Φ tiene la forma $\Phi(A) = e^{log(A)}$ o bien $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$. Mientras, por el contrario, no se sabe si $\Phi(AB) = \Phi(e^X e^Y) \stackrel{?}{=} \Phi(A)\Phi(B)$. Precisamente gracias a BCH podemos decir que si:

$$
\begin{aligned}
Z =& log(e^X e^Y) \\
=& X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \ldots \Rightarrow \\
\phi(log(e^X e^Y)) =& \phi(X) + \phi(Y) + \frac{1}{2}[\phi(X),\phi(Y)] + \frac{1}{12}[\phi(X),[\phi(X),\phi(Y)]] - \frac{1}{12}[\phi(Y),[\phi(X),\phi(Y)]] + \ldots \\
=& log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}) \Rightarrow \\
\Phi(AB) =& \Phi(e^X e^Y) = \Phi(e^X)\Phi(e^Y)
\end{aligned}
$$

Esto es, el producto de matrices es visto como producto bajo su álgebra.

Teorema 3.7. *Si X y Y son dos matrices tales que $\pm[X,[X,Y]] = \pm[Y,[X,Y]] = 0$, es decir, que conmutan con su conmutador. Entonces $e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}$*

Demostración. Como tanto X y Y conmutan con $[X,Y]$ lo anterior se reduce a probar la siguiente ecuación para todo $t \in \mathbb{R}$

$$A(t) = e^{tX} e^{tY} e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} = e^{t(X+Y)} = B(t)$$

En particular para $t = 1$ se prueba el resultado. Esta última ecuación a su vez se reduce a demostrar que el problema de valor inicial de $A(t)$ y $B(t)$ son exactamente el mismo. Luego gracias al teorema de unicidad se obtiene la igualdad. Evidentemente $A(0) = B(0) = I$ mientras que:

$$\frac{d}{dt}B(t) = B(t)(X+Y)$$

Por otro lado para A, aplicando la regla del producto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} =& e^{tX}Xe^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}Ye^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(-t[X,Y]) \\
=& e^{tX}e^{tY}e^{-tY}Xe^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}Y - e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(t[X,Y]) \\
=& e^{tX}e^{tY}e^{-tad_Y}(X)e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}Y - e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(t[X,Y]) \\
=& e^{tX}e^{tY}(X+t[X,Y])e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}Y - e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(t[X,Y]) \\
=& e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(X+Y) = A(t)(X+Y)
\end{aligned}$$

Luego se tiene la igualdad para todo t y en particular para $t=1$. $\square$

Obs. $e^{-tad_Y}(X) = X - t[Y,X] = X + t[X,Y]$ mientras que los términos de orden mayor son cero pues por hipótesis X y Y conmutan con su conmutador (ver, [3])

Ahora bien sabemos del análisis (complejo) que la función $g(z) = \frac{log(z)}{1-\frac{1}{z}}$ es una función holomorfa en el disco $\{|z-1| < 1\}$ luego se puede expresar como una serie de la siguiente forma:

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-1)^m$$

De manera análoga se puede decir que para un espacio vectorial de dimensión finita podemos definir para un operador la siguiente formula:

$$g(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(A-I)^m$$

Sobre el conjunto $\{A \in V : \|A-I\| < 1\}$. Esto con el objetivo de presentar la relación entre el logaritmo y el conmutador de 2 matrices. Así podemos presentar el resultado de BCH.

Teorema 3.8 (Baker-Campbell-Hausdorff)**.** *Para cualquier par de matrices complejas $n \times n$ X, Y de norma suficientemente pequeña se tiene que:*

$$log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 g(e^{ad_X}e^{tad_Y})(Y)dt$$

Antes de probar este resultado se hace necesario probar unos resultados previos. Mientras que la necesidad de exigir en el teorema a X y Y de norma suficientemente pequeña es para garantizar que tanto e^{ad_X} como e^{ad_Y} estén cerca de la identidad y así la formula quede bien definida bajo estos operadores lineales.

Lema 3.3.1. *Si Z es un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita entonces:*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(e^{-\frac{Z}{m}})^k = \frac{1-e^{-Z}}{Z}$$

La prueba de este lema esta fuertemente relacionada con la fórmula de una serie geométrica y las propiedades de la fórmula exponencial, que es una función continua, por lo que damos por hecho este resultado, para mas detalles de la prueba le recomendamos al lector ver [3] . Como consecuencia del lema se tiene el siguiente teorema, que demostraremos y será de gran importancia para verificar la fórmula BCH.

Teorema 3.9 (Derivada de la función exponencial)**.** *Para todo par de matrices complejas X y Y se tiene que:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} =& e^X\left\{\frac{I-e^{-ad_X}}{ad_X}(Y)\right\}\\ =& e^X\left\{Y-\frac{[X,Y]}{2!}+\frac{[X,[X,Y]]}{3!}+\ldots\right\}\end{aligned}$$

De manera mas general:

$$\frac{d}{dt}e^{X(t)}|_{t=0} = e^{X(t)}\left\{\frac{I-e^{-ad_{X(t)}}}{ad_{X(t)}}\left(\frac{dX}{dt}\right)\right\}$$

Demostración. Es suficiente con probar el resultado inicial, la formula general se sigue de este gracias a la regla de la cadena. Denotamos primero a $\frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0}$ como siendo $\Delta(X,Y)$.

Por otro lado sabemos también que para cada m entero se tiene $e^{X+tY} = (e^{\frac{X}{m}+\frac{tY}{m}})^m$. Así, aplicando inducción si es necesario y la regla del producto tenemos que:

$$\begin{aligned}\Delta(X,Y) =& \sum_{k=0}^{m-1}(e^{X/m})^{m-k-1}\left[\frac{d}{dt}e^{\frac{X}{m}+t\frac{Y}{m}}|_{t=0}\right](e^{X/m})^k\\ =& e^{m-1X/m}\sum_{k=0}^{m-1}(e^{X/m})^{-k}\Delta\left(\frac{X}{m},\frac{Y}{m}\right)(e^{X/m})^k\\ =& e^{m-1X/m}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{-\frac{1}{m}ad_X}\right)^k\Delta\left(\frac{X}{m},Y\right)\end{aligned}$$

En esta ultima expresión podemos sacar el termino $1/m$ afuera de la sumatoria por las propiedades lineales de Δ en Y. Luego haciendo tender a $m\to\infty$ el primer término evidentemente tiende a e^X mientras que como Δ es una función continua esta será igual a $\Delta(0,Y)=Y$- Por último aplicando el Lema 3.3.1 a $Z=ad_X$ se obtiene el resultado deseado. □

Con este resultado podemos dar una prueba de la formula BCH. En efecto para $0\le t\le 1$ haciendo $Z(t)=log(e^Xe^{tY})$ para X y Y suficientemente pequeños en norma se tiene que $e^{Z(t)}=e^Xe^{tY}$ luego:

$$e^{-Z(t)}\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = (e^Xe^{tY})^{-1}e^Xe^{tY}Y = Y = \left\{\frac{I-e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}}\right\}\left(\frac{dZ}{dt}\right)$$

Como X y Y son matrices pequeñas entonces $Z(t)$ también lo es y por lo tanto $\frac{I-e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}}$ esta cerca de la identidad, luego es invertible. Mientras que aplicando el homomorfismo Ad a $e^{Z(t)}$ se tiene que $Ad_{e^{Z(t)}}=Ad_{e^X}Ad_{e^{tY}}$ y así $e^{ad_{Z(t)}}=e^{ad_X}e^{tad_Y}$ lo que implica que $ad_{Z(t)}=log(e^{ad_X}e^{tad_Y})$. Podemos afirmar entonces que:

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} = \left\{\frac{I-e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}}\right\}^{-1}Y =& \left\{\frac{I-(e^{ad_X}e^{tad_Y})^{-1}}{log(e^{ad_X}e^{tad_Y})}\right\}^{-1}Y\\ =& g(e^{ad_X}e^{tad_Y})(Y)\end{aligned}$$

Integrando esta ultima expresión y sabiendo de antemano que $Z(0) = X$ tenemos la formula BCH. Esto es:

$$log(e^X e^Y) = Z(1) = X + \int_0^1 g(e^{ad_X} e^{tad_Y})(Y)dt$$

Una manera de ver la fórmula BCH es en forma de serie. Como para $g(z)$ la expansión en serie de Taylor tiene la $g(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{6}(z-1)^2 + \frac{1}{12}(z-1)^3 + \ldots$ entonces en ocasiones resulta mas sencillo expandir esta expresión, en especial cuando por ejemplo X y Y conmutan con algún conmutador y obtener expresiones del tipo $log(e^X e^Y) \approx X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] \ldots$.

En lo que resta del capítulo enfocaremos nuestros esfuerzos en probar algunos resultados que unen lo aprendido en los capítulos anteriores con teoremas y pruebas recién vistas, como lo es en específico las consecuencias de tener un grupo de Lie simplemente conexo.

3.3.1. Grupo vs Álgebra

Teorema 3.10. *Sean G y H grupos de Lie matriciales y $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras. Si G es simplemente conexo y $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo entre álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \longrightarrow H$ tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$.*

Este último teorema prueba la recíproca del Teorema 3.5 cuando G es un grupo simplemente conexo. La prueba del teorema es consecuencia de los siguientes dos lemas.

Lema 3.3.2. *Sea G y H dos grupos de Lie matriciales donde $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son sus respectivas álgebras. Si $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras defina $U_\varepsilon = \{A \in G | \|A - I\| < 1; \|log(A)\| < \varepsilon\}$. Entonces existe ε tal que $f = exp \circ \phi \circ log|_{U_\varepsilon}$ es un homomorfismo local.*

Demostración. Por el Teorema 3.6, si ε es lo suficientemente pequeño, entonces $log(A) \in \mathfrak{g}$ para todo $A \in U_\varepsilon$. Así, para $X = log(A)$ Y $Y = log(B)$ donde evidentemente $AB \in U_\varepsilon$ entonces se tendría que $f(AB) = f(e^X e^Y) = exp \circ \phi \circ log(e^X e^Y)$. Aplicando la fórmula del Teorema 3.8 tenemos que:

$$\begin{aligned}
log(e^X e^Y) =& X + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m (e^{ad_X} e^{tad_Y} - I)^m (Y)dt \\
\Rightarrow \phi(log(e^X e^Y)) =& \phi(X) + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m (e^{ad_{\phi(X)}} e^{tad_{\phi(Y)}} - I)^m (\phi(Y))dt \\
=& log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}) \\
\Rightarrow f(AB) =& exp(log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)})) \\
=& e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)} \\
=& f(A)f(B)
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.3. *Sean G y H dos grupos de Lie matriciales, G simplemente conexo. Si (U, f) es un homomorfismo local de G en H entonces existe un homomorfismo global Φ entre los grupos de Lie tal que $\Phi|_U = f$*

Demostración. Como G es simplemente conexo entonces para cualquier $A \in G$ existe un camino $A(t) \in G$ tal que $A(0) = I$ y $A(1) = A$. Por el Lema 3.2.2 podemos encontrar una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ tal que $A(t)A(s)^{-1} \in U$. En particular $A(t_1) \in U$ pues $A(0) = I$. Luego para A se tiene que

$$A = [A(1)A(t_{m-1})^{-1}][A(t_{m-1})(A(t_{m-2})^{-1}] \cdots [A(t_2)A(t_1)^{-1}]A(t_1)$$

Luego podemos definir a Φ siendo

$$\Phi(A) = f(A(1)A(t_{m-1})^{-1})f(A(t_{m-1})(A(t_{m-2})^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})f(A(t_1))$$

Resta ver que Φ en efecto está bien definido.

Independencia de la partición. Si existe un punto s tal que $t_i < s < t_{i+1}$ entonces se sigue cumpliendo que $A(t_{i+1})A(s)^{-1}$, $A(s)A(i)^{-1}$, $A(t_{i+1})A(i)^{-1}$ están en U y como f es un homomorfismo local se tiene que

$$f(A(t_{i+1})A(t_i)^{-1}) = f(A(t_{i+1})A(s)^{-1})f(A(s)A(t_i)^{-1})$$

Luego agregar puntos a la partición no cambia con el valor de Φ.

Independencia del camino. Si $A_0(t)$ y $A_1(t)$ son dos caminos que unen a I con A, como G es simplemente conexo entonces existe una homotópia $A : I \times I \longrightarrow G$ tal que $A(0,t) = A_0(t)$, $A(1,t) = A_1(t)$ para todo $t \in [0,1]$ y además $A(s,0) = I$, $A(s,1) = A$ para todo $s \in [0,1]$. Gracias al Lema 3.2.2 y usando el número de Lebesgue de la cobertura dada por los U, existe N tal que si $|s-s'| < \frac{2}{N}$, $|t-t'| < \frac{2}{N}$ entonces $A(s,t)A(s',t')^{-1} \in U$. Luego definimos los siguientes caminos para $k = 0,1,2,\ldots,N-1$ y $l = 0,1,\ldots,N$

$$B_{k,l}(t) = \begin{cases} A(\frac{k+1}{N},t) & 0 \le t \le \frac{l-1}{N} \\ A(\frac{k}{N},t) & \frac{l}{N} \le t \le 1 \\ A(\frac{k+l}{N}-t,t) & \frac{l-1}{N} \le t \le \frac{l}{N} \end{cases}$$

Cuando $l = 0$ entonces $B_{k,0}(t) = A(K/N,t)$ para todo $t \in [0,1]$, en particular $B_{0,0}(t) = A_0(t)$. Como G es simplemente conexo podemos deformar continuamente a A_0 en $B_{0,1}$, $B_{0,2}$, ..., $B_{0,N}$ y luego se deforma a $B_{1,0}$ hasta llegar a $B_{N-1,N}$ y finalmente a A_1. Por otro lado el valor de $\Phi(A)$ es el mismo en cada deformación, notado que para $k < l$ $B_{k,l}(t)$ y $B_{k,l+1}(t)$ son los mismos. Por tanto eligiendo a $t = 0 < \frac{1}{N},\ldots,\frac{l-1}{N},\frac{l+1}{N},\frac{l+2}{N},\ldots,1$ da una partición de $[0,1]$ donde podemos evaluar a $\Phi(A)$, notando que bajo esta partición los valores de $B_{k,l}$ y $B_{k,l+1}$ son los mismos. Es decir el valor $\Phi(A)$ es el mismo para cada camino de $B_{0,0}$ hasta $B_{N-1,N}$ y entonces el mismo que A_1.

$\Phi|_U = f$. Si $A \in U$ como U es conexo por caminos se puede encontrar un camino $A(t)$ uniendo a I con A y podemos dividir $[0,1]$ a través de unos $\{t_i\}$ tal que

$$\Phi(A(t_j)) = f(A(t_j)A(t_{j-1})^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})f(A(t_1))$$

En particular para $\Phi(A(t_1)) = f(A(t_1))$. Por inducción se puede ver que si $\Phi(A(t_j)) = f(A(t_j))$ y usando la fórmula anterior se tiene que $\Phi(A(t_{j+1})) = f(A(t_{j+1}))$.

Como f es un homomorfismo, es fácil ver que Φ también lo es. Por último se tiene que cerca de la identidad $\Phi = exp \circ \phi \circ log$ luego

$$\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}|_{t=0} = \phi(X)$$

$\square$

Corolario 3.10.1. *Si G y H son dos grupos de Lie matriciales simplemente conexos con respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathfrak{h}$ entonces G es isomorfo a H*

3.3.2. Espacios de Recubrimiento

Si G no es simplemente conexo no se puede hacer uso de los anteriores teoremas. Por lo que se hace necesario encontrar un grupo o un espacio $\bar{G}$ simplemente conexo con propiedades similares a G, como por ejemplo con álgebras de Lie iguales.

Definición 3.8. Sea G una grupo de Lie matricial conexo. Un recubrimiento universal de G es un grupo de Lie matricial H, simplemente conexo, junto con un homomorfismo $\Phi : H \longrightarrow G$ tal que la transformación $\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ entre las álgebras de Lie asociadas es un isomorfismo. El homomorfismo Φ es llamado función recubridora.

Proposición 3.3.1. *Si (H_1, Φ_1) y (H_2, Φ_2) son dos recubrimientos universales de G entonces existe un isomorfismo $\Xi : H_1 \longrightarrow H_2$ tal que $\Phi_2 \circ \Xi = \Phi_1$*

Demostración. La prueba de esta proposición es consecuencia de los corolarios 3.6.3, 3.10.1 □

Podemos también decir, por las propiedades ya vistas que el recubrimiento universal de un grupo de Lie matricial G es un grupo de Lie $\bar{G}$ tal que el álgebra de Lie de $\bar{G}$ es igual al álgebra de Lie de G. Luego propiedades de las álgebras pueden ser compartidas por G y $\bar{G}$ como se muestra por ejemplo en el siguiente corolario.

Corolario 3.10.2. *Sea G un grupo de Lie matricial conexo y $\bar{G}$ el recubrimiento universal de G. Si H es un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ y $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo entonces existe un homomorfismo $\Phi : \bar{G} \longrightarrow H$ tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$*

Como ejemplo el cubrimiento universal de $SO(3)$ es $SU(2)$. Pero aun así existen grupos de Lie matriciales a los que es imposible asociarles un recubrimiento universal, también matricial, como por ejemplo al grupo $SL(2,\mathbb{R})$ (ver, [6] y [3])

3.3.3. Subgrupos y Subálgebras

Evidentemente si $H \subset G$ donde ambos son grupos de Lie matricial entonces el álgebra de Lie asociada a $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. La pregunta natural seria si se cumple la misma propiedad cuando se tiene una subálgebra de un álgebra de Lie. Responderemos esto probando un teorema que hará uso de la formula BCH.

Definición 3.9. Si H es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$, el álgebra de Lie de H es el conjunto de todas las matrices X tal que $e^{tX} \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Definición 3.10. Si G es un grupo de Lie matricial con algebra de Lie $\mathfrak{g}$ entonces $H \subset G$ es un subgrupo conexo de Lie de G si se cumplen las siguientes condiciones:

1. H es un subgrupo de G
2. El álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H es una subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$
3. Todo elemento de H puede ser escrito de la forma $e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_m}$ donde $X_i \in \mathfrak{h}$

Note que por la definición H es conexo por caminos pues I puede conectarse con cualquier elemento de H por medio del camino $e^{(1-t)X_1}e^{(1-t)X_2}\dots e^{(1-t)X_m}$

Teorema 3.11. *Si G es un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ donde $\mathfrak{h}$ es una subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un único subgrupo de Lie conexo H de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. El subgrupo H es el subgrupo de elementos de la forma $e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_m}$ donde $X_i \in \mathfrak{h}$.*

Si definimos a $H = \{e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_m} | X_i \in \mathfrak{h}\}$ entonces evidentemente H es un subgrupo de G. El reto es demostrar que en efecto el álgebra de Lie de H es $\mathfrak{h}$. Una vez demostrado esto es evidente que H es conexo por lo observado anteriormente. Antes de la prueba del Teorema 3.11, serán necesarios unos resultados preliminares que presentaremos a seguir como lemas.

Lema 3.3.4. *Elija una base para $\mathfrak{h}$. Un elemento de $\mathfrak{h}$ se dice racional si sus coeficientes con respecto a la base son todos racionales. Entonces para todo $\delta > 0$ y todo $A \in H$ existen elementos racionales $R_1, R_2 \dots R_m$ tal que*

$$A = e^{R_1}e^{R_2}\cdots e^{R_m}e^X$$

Donde $X \in \mathfrak{h}$ y $\|X\| < \delta$

Demostración. Sea U como en la prueba del teorema 3.6 y $\varepsilon > 0$ tal que para todo X y Y en $\mathfrak{h}$ con $\|X\| < \varepsilon$, $\|Y\| < \varepsilon$ donde la fórmula BCH se cumple. Denotemos $C(\cdot,\cdot)$ al lado derecho de la fórmula BCH, luego $e^X e^Y = e^{C(X,Y)}$. Evidentemente $C(\cdot,\cdot)$ es una función continua. Luego podemos tomar a $\delta < \varepsilon$ tal que si $\|X\|\ \ \|Y\| < \delta$ entonces $C(X,Y) < \varepsilon$. Podemos escribir a cada $A \in H$ como

$$A = e^{X_1}\cdots e^{X_N}$$

Pues $e^X = (e^{X/k})^k$. Donde cada $X_j \in \mathfrak{h}$ y $\|X_j\| < \delta$. Luego mirando el lema por inducción se tiene que si $A = e^{X_1}\cdots e^{X_{N+1}}$ entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} A =& e^{R_1}\cdots e^{R_m}e^X e^{X_{N+1}} \\ =& e^{R_1}\cdots e^{R_m}e^{C(X,X_{N+1})} \end{aligned}$$

Donde R_i son racionales y $\|C(X,X_{N+1})\| < \varepsilon$. Si elegimos un elemento racional R_{m+1} cerca de $C(X,X_{N+1})$ tal que $\|R_{m+1}\| < \varepsilon$ entonces

$$\begin{aligned} A =& e^{R_1}\cdots e^{R_m}e^{R_{m+1}}e^{-R_{m+1}}e^{C(X,X_{N+1})} \\ =& e^{R_1}\cdots e^{R_m}e^{R_{m+1}}e^{X'} \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.5. *Podemos descomponer a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ como suma directa de $\mathfrak{h}$ y D como en la prueba del Teorema 3.6 y sea V una vecindad del origen en D también como en este teorema. Si $E \subset V$ es definido por $E = \{Y \in V | e^Y \in H\}$ entonces E es contable (ver, [3]).*

Demostración Teorema 3.11. Con lo ya comentado hasta ahora solo resta ver que el álgebra de Lie de H es efecto $\mathfrak{h}$. Supongamos que el álgebra de Lie de H es $\mathfrak{h}'$. Claramente $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$. Para $Z \in \mathfrak{h}'$ podemos escribir para un t suficientemente pequeño.

$$e^{tZ} = e^{X(t)}e^{Y(t)}$$

Donde $X(t) \in U$ y $Y(t) \in V \subset D$ luego $e^{Y(t)} \in H$ pues los otros términos están en H. Si $Y(t)$ no es constante entonces toma infinitos valores para cualquier t suficientemente pequeño, lo cual es imposible por el Lema 3.3.5. Luego $Y(t)$ es constante y como $Y(0) = 0$ entonces $e^{Y(t)} = I$. Así, para $X(t) \in \mathfrak{h}$ entonces $tZ \in \mathfrak{h}$ lo que implica que $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ □

Teorema 3.12. *Suponga que G es un grupo de Lie matricial y H un subgrupo conexo de Lie de G. Entonces H puede tener estructura de grupo de Lie de tal forma que la inclusión de H en G es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Demostración. Para cualquier $A \in H$ y $\varepsilon > 0$ definamos

$$U_{A,\varepsilon} = \{Ae^X | X \in \mathfrak{h}, \|X\| < \varepsilon\}$$

Podemos entonces definir una topología en H, esto es, un conjunto $U \subset H$ es abierto si para cada $A \in U$ existe ε tal que $U_{A,\varepsilon} \subset U$. En esta topología dos elementos A y B son cercanos si $B = Ae^X$ con $X \in \mathfrak{h}$. Esta topología se ve que es mas fina que la inducida por G y además Hausdorff y 2-contable. luego H es localmente homeomorfa con $\mathbb{R}^N$ donde $N = dim(\mathfrak{h})$. Usando un sistema de cartas coordenadas adecuado se puede ver que la función logaritmo esta bien definida y es suave. Finalmente para cualquier vecindad $U_{A,\varepsilon}$ se tiene que la inclusión dada por $X \longmapsto Ae^X$ es una función suave. □

El Teorema 3.12 junto con el teorema de Ado (ver, [12] y [13]), el cual asegura que toda finito dimensional álgebra de Lie, real o compleja es isomorfa a algún álgebra de matrices, se sigue el siguiente teorema.

Teorema 3.13. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real finito dimensional entonces existe un subgrupo de Lie conexo G de $GL(n,\mathbb{C})$ tal que su álgebra de Lie es isomorfa con $\mathfrak{g}$*

Demostración. Por el teorema de Ado podemos identificar a $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ luego por el Teorema 3.11 se tiene que existe un subgrupo de Lie conexo de $GL(n,\mathbb{C})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ □

Corolario 3.13.1. *Toda álgebra de Lie real finito dimensional es isomorfa al álgebra de Lie de algún grupo de Lie matricial.*

Bibliografía

[1] Satya Deo. *Algebraic topology*. Springer, 2018.

[2] A Garcia and Y Lequain. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA, 2022.

[3] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer International Publishing, 2015.

[4] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[5] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, 2012.

[6] E.L. Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq., 1977.

[7] Marco Manetti. *Topology*, volume 91. Springer, 2015.

[8] James R Munkres. *Topology (2nd ed.)*. Prentice Hall, 2000.

[9] K Parthasarathy. *Topology: An Invitation*, volume 134. Springer Nature, 2022.

[10] Steven Roman et al. *An introduction to the language of category theory*, volume 6. Springer, 2017.

[11] Tej Bahadur Singh. *Introduction to topology*. Springer, 2019.

[12] V. S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Springer New York, 1984.

[13] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer New York, 1983.