Relación de tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo

Marilyn Londoño Osorio

Geraldine Ramírez Morales

Trabajo de investigación para optar al título de:

Licenciadas en matemáticas

Asesores

John Henry Durango Urrego, Doctor (PhD) en Educación

Sandra Milena Zapata, Doctora (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas

Medellín, Antioquia, Colombia

2024

Cita	(Londoño-Osorio & Ramírez-Morales, 2024)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Londoño-Osorio, M., & Ramírez-Morales, G. (2024). *Relación de tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo* [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES).

Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (EDUMATH).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Vicerrectoría de Docencia

Sistema de Bibliotecas

Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes

Decano: Wilson Antonio Bolívar

Jefe de departamento: Cártul Vargas Torres

Dedicatoria

A Dios, por haberme acompañado y guiado a lo largo de esta linda etapa. Por llenarme de fortaleza y sabiduría para afrontar cada uno de los retos en la culminación de esta carrera. A mi familia, por ser mi apoyo incondicional en todo momento, por guiarme y estar para mi ante cualquier circunstancia A mi hijo Mathías, la persona más importante en mi vida, que es mi motor y mi fortaleza para salir adelante. Tu presencia en mi vida me ha hecho una mejor persona. Por ti, por tu alegría que me ilumina la vida, este triunfo te lo dedico a ti.

Marilyn Londoño Osorio

A Dios, quien ha sido mi guía y mi fortaleza en todo momento. Su amor incondicional y su gracia han sido la luz que ha iluminado mi camino, brindándome la fuerza y la esperanza necesarias para superar los obstáculos y celebrar los triunfos. A mi amada familia. Su apoyo y su amor constante han sido mi fuerza en los momentos más difíciles. Cada uno de ustedes ha sido un pilar fundamental en mi vida. A mi hermosa hija Salomé, quien ha sido mi fuente de inspiración y mi mayor motivo para seguir adelante. Tu luz y tu amor han sido motivación en los momentos de oscuridad, dándome la fuerza y la determinación para perseverar incluso cuando las circunstancias parecían abrumadoras.

Geraldine Ramírez Morales

Agradecimientos

A Dios por haberme dado la sabiduría y la fortaleza para la construcción de este proyecto de vida personal y profesional. Por darme vida, salud y una familia que me acompañó en todo momento. Gracias a Dios, por permitirme culminar esta linda etapa de mi vida.

A mi mamá Angela y mi papá Alfredo por ser mi apoyo incondicional en este proceso formativo, por sus consejos y su amor en cada paso de este camino. Sin ellos esto no hubiera sido posible. Les dedico este título, porque no es solo mío sino también de ellos.

A mi hermana Evelyn por estar conmigo siempre y brindarme su amor y apoyo en todo este proceso.

A mi hijo Mathías por ser mi motor y la luz de mi vida, que me inspira a convertirme en una mejor persona y madre. Espero que cuando crezcas te sientas orgulloso de mi.

A Geraldine por ser mi compañera y amiga en este arduo proceso que con tanto amor y esfuerzo logramos.

A mis asesores John Henry y Sandra, por la paciencia y acompañamiento brindado para que esto fuera posible.

A todas las personas que con palabras de aliento me motivaron constantemente.

Una etapa culmina, nuevos caminos comienzan y sólo queda dar gracias a Dios por esta bonita y enriquecedora experiencia de vida. ¡Con mucho orgullo logré culminar mi carrera profesional!

Marilyn Londoño Osorio

A mi hija Salomé, tu presencia ha sido un regalo invaluable, y por eso te doy las gracias desde lo más profundo de mi corazón.

A mis estudiantes de Sexto del Instituto Industrial Pascual Bravo. Su entusiasmo, dedicación y su pasión por aprender son un recordatorio constante del impacto positivo que podemos tener en la vida de los demás. Ha sido un honor y un privilegio servirles como maestra.

A mis estimados asesores, John Henry y Sandra Milena Zapata, les agradezco sinceramente por su orientación, su sabiduría y su apoyo incondicional a lo largo de la realización de este trabajo.

A Marilyn Londoño, mi amiga y compañera en este proceso. Tu apoyo incondicional y consejos me ayudaron a perseverar y darme fuerza en los momentos difíciles.

Geraldine Ramírez Morales

Tabla de contenido

Lista de figuras

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo analizar cómo se relacionan tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo. Los participantes de la investigación fueron cuatro grupos de estudiantes, con ellos se analizó cómo se relacionan tareas con los estratos del pensamiento algebraico. Se pone especial atención a la propiedad de comunalidad como una característica que compone la generalización de patrones. La recolección de datos de la investigación se realizó en cinco fases: diseño de tareas, implementación de tareas, recolección de información, selección y análisis de la información. Se encontró que los estudiantes pueden llegar a un nivel factual, contextual y simbólico dependiendo de cómo se vinculan los niveles del pensamiento algebraico y los medios semióticos movilizados en el desarrollo de las tareas de patrones de secuencias.

Palabras clave: Pensamiento Algebraico, Estratos del Pensamiento, Medios Semióticos, Comunalidad, Generalización.

Abstract

The objective of this research is to analyze how tasks on patterns of sequences are related to algebraic thinking in the sixth grade of the Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo. The participants of the research were four groups of students, with whom we analyzed how tasks are related to the layers of algebraic thinking. Special attention is paid to the property of communality as a characteristic that composes the generalization of patterns. The research data collection was conducted in five phases: task design, task implementation, data collection, data selection, and data analysis. It was found that students can reach a factual, contextual and symbolic level depending on how the levels of algebraic thinking and the semiotic means mobilized in the development of sequence pattern tasks are linked.

Keywords: Algebraic Thinking, Thinking Strata, Semiotic Means, Communality, Generalization.

Introducción

Esta investigación es un estudio cualitativo enfocado en la relación de tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo. Esta investigación surge con la problemática de trabajar en el pensamiento algebraico desde grados inferiores al grado octavo como propuesta desde el álgebra temprana.

La investigación se encuentra dividida en cinco capítulos. En el primero se encuentra el planteamiento del problema, los antecedentes, la justificación y los objetivos, el general y los específicos.

El segundo capítulo es el marco teórico, el cual se encuentra fundamentado en: transición aritmética álgebra, pensamiento algebraico, estratos del pensamiento, medios semióticos, generalización de patrones, pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico, tareas y patrones de secuencias.

El tercer capítulo aborda la metodología, que se fundamenta en el paradigma y enfoque metodológico. Incluye la descripción demográfica, los participantes, las tareas realizadas, herramientas de recolección de datos, triangulación de datos y las tareas realizadas.

El cuarto capítulo se enfoca en los análisis de las distintas tareas realizadas, las cuales son: Tarea 1: Rompecabezas de patrones, Tarea 2: Patrones rockeros, Tarea 3: Pulsera numérica, Tarea 4: Triángulo de Sierpinski, Tarea 5: Patrones en los movimientos de las ranas, Tarea 6: Secuencias figurales, y Tarea 7: Secuencias en cabaña de playa.

El quinto capítulo se dedica a las conclusiones, las cuales se dividen en consideraciones relacionadas con la pregunta de investigación, consideraciones sobre el objetivo de la investigación, perspectivas de la investigación, limitaciones encontradas, posibles líneas futuras de investigación y recomendaciones generales.

Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas que respaldan la investigación.

1. Planteamiento del problema

En el marco de la Práctica Pedagógica de la *Licenciatura en Matemáticas* de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, se presenta a continuación el problema de investigación, a partir de la observación realizada en el grado sexto de la jornada de la mañana en el *Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo*, ubicado en la ciudad de Medellín (Antioquia), específicamente en el Barrio Robledo. Es una institución pública de carácter mixto, a la que asisten estudiantes de Medellín y de zonas aledañas, cuenta con las jornadas de mañana y tarde desde el grado sexto hasta el grado once. El Instituto tiene como misión la educación de personas integrales con capacidad de intervenir en las decisiones de su contexto, con una formación técnica, con énfasis para el trabajo, la producción, la competitividad y la investigación, con la posibilidad de continuar estudios superiores. Como visión asume el liderazgo en la formación de bachilleres técnico - científicos, constructores de conocimiento, capaces de utilizar y producir tecnología para la solución de problemas propios y de su comunidad, de establecer relaciones armónicas, con cultura ambientalista, sentido de pertenencia en un espacio dialógico, tolerante y participativo.

En el plan de área del grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo compuesto por 4 períodos académicos, se enfoca exclusivamente en el pensamiento numérico. Solo hasta séptimo grado se empieza a aludir al pensamiento algebraico. En el plan de área y en los Estándares Básicos de Competencias[1] se enuncia este pensamiento algebraico como pensamiento variacional. En este documento se menciona que es primordial desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros grados de la educación básica primaria y que la emergencia de este tipo de pensamiento inicia con el estudio de regularidades y las reglas para encontrar el patrón que se repite. Esto dota al estudiante de capacidad para reproducirlo por medio de una fórmula. Se expresa que las actividades de generalización de patrones son actividades adecuadas para preparar al estudiante en el aprendizaje de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico antes de llegar a séptimo y octavo grado. (MEN, 2006).

[1] Los estándares básicos de aprendizaje en matemáticas definen metas educativas fundamentales, abarcando los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, y trabajando los procesos de formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Estos estándares proporcionan un marco integral para el desarrollo de habilidades matemáticas esenciales (MEN, 2006).

La transición de la aritmética-álgebra es un proceso importante y fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico. El reconocimiento y la interpretación de símbolos matemáticos desde la sintaxis, la semántica y la pragmática, son vitales para que los estudiantes se

vinculen con el álgebra en grados superiores. El desarrollo temprano de este pensamiento es una apuesta que se plantea desde la propuesta curricular de Early Algebra. Davydov (1995) propuso que la construcción del pensamiento algebraico debe iniciar en los estudiantes de grados elementales, fomentando con ello la generalidad en el pensamiento. Durante la observación en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, se evidenció que los estudiantes realizan tareas que se vinculan con el desarrollo del pensamiento algebraico, pero que se abarcan desde el pensamiento numérico, buscando ecuaciones y soluciones a incógnitas para la solución de tareas, atendiendo al uso de la regla de tres simple para la construcción de ecuaciones.

Butto & Rojano (2004) reportan que con frecuencia los contenidos matemáticos son desarrollados a partir de fuentes limitadas de significado. De hecho, la educación tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en aspectos manipulativos, ya que se empieza por enseñar las expresiones, las ecuaciones y las manipulaciones en ellas para terminar con la resolución de problemas, entendidos como posibilidad de aplicación de las reglas sintácticas. En las tareas que desarrollan los estudiantes, se enfatiza en el uso de algoritmos, proceso que dificulta el reconocimiento de los símbolos y signos matemáticos. Estas tareas deben de proporcionar sentido y significado, apostándole al desarrollo del pensamiento algebraico por medio de la indagación y búsqueda de variables e incógnitas. Para Herbst (2012) una tarea consiste en las acciones e interacciones orientadas a un objetivo particular; que constituye un contexto práctico en el que los estudiantes pueden llegar a pensar acerca de las ideas matemáticas en juego en un problema.

Los signos de las operaciones básicas, tales como: “+”, “x” y “-” están establecidos como los signos algebraicos en el álgebra, pero los signos también pueden ser palabras o gestos, que son igual de genuinos y que tienen la capacidad de significar. En las tareas para el desarrollo del pensamiento algebraico es importante reconocer otros tipos de manifestaciones del pensamiento que pueden pasar desapercibidas en el aula de clase, cómo: los gestos, palabras y movimientos que dotan de sentido las actividades matemáticas. Estos se pueden definir como los medios semióticos de objetivación, que tienen un papel importante para la elaboración de significados y la objetivación del aprendizaje.

Vergel (2016) plantea la pregunta: ¿Acaso muchos de los procedimientos que hacen nuestros niños y estudiantes jóvenes, sin usar letras, no podrían tipificarse como algebraicos? ¿Por qué hemos desestimado este tipo de procedimientos? (2016, p. 31). Los estudiantes de sexto usan diversas estrategias para el desarrollo de tareas como el uso de sus dedos para contar, señalar o indicar que están haciendo o dibujando palitos para realizar cálculos. Los recursos semióticos constan de la variedad de cosas que los niños pueden seleccionar para apoyar su comunicación o expresar eficazmente el significado en cualquier evento de formación de signos (Kabuto, 2009), estos medios apoyan la interpretación y comprensión de los contenidos matemáticos.

Los estudiantes tienen diferentes formas de pensar algebraicamente aun cuando no están utilizando signos alfanuméricos, Radford (2010) plantea que las maneras que tienen los estudiantes para referirse a las cantidades indeterminadas pasan desapercibidas por el afán de utilizar signos alfanuméricos y considerarlos como la única vía para desarrollar el pensamiento algebraico. Propone entonces que no solo se brinde el privilegio al simbolismo alfanumérico de designar la indeterminación, sino que hay una variedad de maneras de lograrlo, a esto se le llama “zona de emergencia del pensamiento algebraico”. Radford, caracteriza el pensamiento algebraico de la siguiente manera: el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. Desde la caracterización, el pensamiento algebraico brinda una vía para referirse a lo indeterminado desde nuevas formas, donde los medios semióticos que movilizan los estudiantes toman protagonismo y tienen la capacidad de significar y objetivar el aprendizaje y son necesarios para constituir el pensamiento algebraico. En línea con los tres componentes descritos, en 2010, Radford define 3 formas de pensamiento algebraico: Generalización Factual. La indeterminación no alcanza la enunciación. Está presente solo mediante la generalización de hechos particulares, estos términos particulares hallados en una secuencia son utilizados como referencia para encontrar los demás, son movilizados los gestos y las palabras. Generalización Contextual. Los gestos y las palabras son reemplazados por el discurso, por ejemplo, mediante términos deícticos espaciales como: “arriba” y “abajo”. Generalización Simbólica. El discurso es representado por símbolos. (Radford, 2010).

El acercamiento a tareas de patrones y secuencias permitirá el desarrollo del pensamiento algebraico, a través del reconocimiento de los medios semióticos que usan los estudiantes para expresar la generalidad algebraica. Según Rojas et al. (1999) en la transición aritmética-álgebra es importante fomentar espacios que conlleven a procesos de generalización y búsqueda de patrones. Permite que haya un tránsito armónico hacia el trabajo algebraico. Rojas y Vergel (2018) aluden que la transición aritmética-álgebra debe ser un proceso continuo entre los dos campos, debido a que existen relaciones aritméticas que tienen un carácter algebraico. En el contexto escolar son usualmente trabajados de forma aislada y separada, debido a que el álgebra es asumida en forma restrictiva como lenguaje simbólico, que aparece de manera abrupta en la educación básica secundaria.

1.1. Antecedentes

Los referentes teóricos expuestos a continuación guardan relación con los objetos que se preceden en esta investigación y que manifiestan ideas teóricas en torno a los temas de la generalización de patrones, el pensamiento algebraico y el uso de recursos de materiales manipulativos en relación con los medios semióticos de objetivación, con el propósito de desarrollar en el área de matemáticas tareas asociadas al álgebra temprana, de manera específica en el pensamiento algebraico. Con base en esto, mencionamos investigaciones que informan la relevancia y pertinencia de los temas a tratar que fundamentan nuestro trabajo investigativo.

1.1.1. Pensamiento algebraico y estratos del pensamiento

Vergel (2016) investiga sobre la emergencia del pensamiento algebraico en los estudiantes de primaria, indica que gracias a numerosos estudios se ha descubierto que una introducción de manera gradual al álgebra posibilita que los estudiantes puedan tener un paso más ameno a conceptos algebraicos más complejos. Menciona que es necesario entonces explorar las maneras cómo se desarrolla el pensamiento algebraico a través de las tareas sobre generalización de patrones, donde se tiene mayor interés en investigar la manera en la cual los niños se refieren a objetos indeterminados y expresan la generalidad a partir de los estratos del pensamiento (factual, contextual y simbólica). Las ideas teóricas que dieron sustento a la investigación fueron: la teoría cultural de la objetivación según Radford (2006b, 2013a), la mediación semiótica de Vygotsky y el pensamiento algebraico según Radford. En su investigación responde: ¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones. El enfoque de la investigación es cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo, se realizó con una población de 15 estudiantes de 4° y 5° de primaria de un colegio privado de Bogotá, Colombia y la recolección de datos se realizó por medio de grabación de vídeos y hojas de trabajo donde los niños y niñas plasmaron los procesos de resolución de las tareas sobre generalización de patrones. En esta investigación se concluye que a través de las actividades sobre generalización de patrones emergen las formas de pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual. También, afirman que las secuencias figurales posibilitan una articulación de la estructura espacial y numérica, que sirvieron como punto de partida para llegar a la generalización. Radford ha sido un referente para Vergel, siguiendo su línea de investigación enfocada en la Teoría Cultural de la Objetivación.

Vergel y Rojas (2013) se han enfocado en estudiar el proceso de generalización y pensamiento algebraico, enfocado en la generalización de patrones figurales y numéricos. Entre sus ideas principales están, las dificultades que presentan los estudiantes para aprender álgebra, en donde toman como referencia a Kieran (1989) para referirse al cambio en las formas de trabajo de la aritmética por el álgebra, además de esto se posicionan en las ideas de Radford (2006), para la caracterización del pensamiento y los estratos de generalidad.

Los autores plantean la relevancia de las experiencias significativas para el desarrollo del pensamiento algebraico. Estas ideas adquieren sentido para la ruta del trabajo que proponemos, debido a la claridad que establece sobre los estratos del pensamiento, como herramienta evaluadora de los procesos que presentan los estudiantes en el desarrollo de tareas de generalización de secuencias de patrones figurales y numéricos, y como a su vez se vinculan a través del pensamiento numérico, geométrico y variacional.

Zapatela (2021) se enfoca en la introducción del pensamiento algebraico, en donde se propone el desarrollo de tareas de generalización de patrones, relaciones y propiedades. Toma como enfoque teórico la generalización de un modelo algebraico de Radford (2006) e ideas expuestas por Kaput (1999), en las que se concreta esta idea al definir la generalización. Se concluye en la investigación que los estudiantes de primaria están preparados para trabajar la generalización de patrones y que las estrategias más usadas en los cursos inferiores son las aditivas y en los cursos superiores las funcionales.

1.1.2. Pensamiento algebraico y la Teoría Cultural de la Objetivación

Existe un consenso entre varios investigadores acerca del papel que juegan las tareas de generalización de patrones en los inicios del aprendizaje del álgebra (Ramírez, 2017; Olaya, 2014; Pérez, 2022; Valenzuela y Gutiérrez, 2022; Gómez, 2013; Callejo, García y Fernández, 2016; Narváez y Caña, 2016; Vergel, 2015). Asociados al desarrollo del pensamiento algebraico, el cual toma importancia en el aprendizaje desde edades tempranas a partir del proceso de generalización. Las investigaciones usan una metodología cualitativa. Su marco teórico se enfoca en los estratos del pensamiento (2010, 2012) y la caracterización del pensamiento algebraico (2010). Además, la Teoría Cultural de la Objetivación y la Perspectiva Semiótica Cultural propuestas por Radford (2004, 2006, 2013). Como resultados de estas investigaciones se obtienen que: en algunas tareas se potencia el desarrollo del pensamiento algebraico, en ocasiones no se llega a la generalización algebraica sino aritmética y en donde a través de estas tareas emerge el pensamiento algebraico temprano factual y contextual. Tales elementos teóricos, resaltan la importancia de las tareas de generalización de patrones, como una apuesta a la introducción del álgebra escolar, que tiene unos referentes aplicativos y estratégicos para caracterizar el pensamiento algebraico en torno a esta investigación, que proporcionan actividades para introducir este tema, además de las características que se pueden identificar durante este proceso.

1.1.3. Pensamiento algebraico y los medios semióticos de objetivación

Carmona y Velasco (2018) analizan las características del pensamiento algebraico a través de tres tareas sobre generalización de patrones de secuencias figurales, enfocadas en la Teoría de la Objetivación de Radford (2014), el Pensamiento Algebraico y sus formas, en su trabajo se concluye que los estudiantes activan el pensamiento algebraico de tipo factual y contextual en la que hicieron presencia distintos medios semióticos. La investigación de Bayona (2021), se fundamenta en la teoría de la objetivación, la relación entre semiótica y educación matemática, la propuesta de álgebra temprana y pensamiento algebraico, y la generalización de patrones, en donde se interpretan las generalizaciones elaboradas por los estudiantes en tareas de secuencias de patrones. El reconocimiento de los recursos que usa el estudiante para aproximarse al conocimiento es de esencial importancia. Se facilita la comprensión, la interpretación y la demostración de este es un mediador para el estudiante comunicar su conocimiento.

Otra investigación que se enfoca en el marco de semiótica cultural de Radford (2008, 2010a; 2010b) es la de Lasprilla, Vergel y Camelo (2012), ellos en su investigación determinan la importancia de empezar a reconocer que en el trabajo de aula existe diversidad de medios de expresión de la producción matemática de los estudiantes. Se analizan los medios semióticos de objetivación y los estratos de la generalización. En esta investigación se denota que existen formas de evidenciar en un estudiante sus medios semióticos de objetivación, ya sea a través de movimientos, miradas, gestos, palabras, escritos, entre otros. De manera adicional, Lasprilla (2012) plantea una investigación que considera los medios semióticos de objetivación que emergieron, en niños de 8 y 9 años de edad de una institución educativa de Bogotá, en una clase de matemáticas, al tratar una tarea de generalización de patrones figurales, como un proceso de producción de significados. Este autor realizó la investigación en el marco de la teoría cultural de la objetivación (Radford, 2008), los estratos de generalidad y los medios semióticos de objetivación desarrollados por los estudiantes. Finalmente se concluye que los estudiantes emplearon los medios semióticos identificados por Radford (2010) y se ubicaron en un estrato de generalidad factual.

Radford (2014) desarrolla una investigación sobre el origen del pensamiento algebraico no simbólico y la transición al simbólico a la luz de 2 preguntas: ¿Cómo se desarrolla el pensamiento algebraico de los jóvenes estudiantes? y ¿cómo podemos dar cuenta del desarrollo del pensamiento algebraico de los jóvenes estudiantes? que responde en un periodo de 5 años a través de un enfoque cualitativo, en el que se estudiaron niños de 8 años mientras estaban en los grados de 2° al 6° grado. Se puede concluir que las palabras, los gestos y los signos utilizados como medios de objetivación se puede tornar más refinados a través del tiempo que conduce a una contracción semiótica donde se enuncia como un síntoma de aprendizaje y desarrollo conceptual.

1.1.4. Álgebra temprana y pensamiento algebraico

Cardona (2007) propone el desarrollo algebraico, enfocado en la resolución de problemas, al fomentar el desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico, utilizando el marco teórico sobre el álgebra escolar según Palarea (1998), la fundamentación general de la estrategia de resolución de problemas según Resnick y Ford (1990) y elementos de la psicología evolutiva relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra de Woolfolk (1999). En la investigación se evidenció que los estudiantes lograron traducir expresiones verbales al lenguaje algebraico, expresar relaciones numéricas usando el lenguaje algebraico, reconocer, describir y generalizar patrones numéricos, proponer y manejar técnicas adecuadas para simplificar términos semejantes y multiplicar monomios y construir sucesiones de números a partir de una regla dada.

Otra línea que se indaga en coherencia con el desarrollo del pensamiento algebraico es la iniciación del álgebra escolar (Butto, 2005; Durán 1999; Mason, Graham, Pimm, Gowar, 1999), propuesta por González y Velandia (2017) que reportan la influencia de las tareas de generalización de patrones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Ellos en su investigación reconoce una urgente necesidad de iniciar el trabajo algebraico a partir de actividades de secuencias figuras, en una variedad de contextos significativos, que potencien tematizar aspectos semánticos de los símbolos, reconociendo su carácter operatorio. La investigación evidenció un desarrollo por parte de la mayoría de los estudiantes en relación con sus procesos de generalización de patrones, como también con sus procesos de simbolización, al lograr el uso del lenguaje algebraico formal; adicionalmente, se posibilitó dotar de significado el trabajo algebraico desde diversos contextos, tanto matemáticos como extra-matemáticos.

Rojas y Vergel (2018) se enfocan en la iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano y actividades para orientar el trabajo en el aula. En esta investigación se analizan los resultados relacionados con el pensamiento algebraico, en donde se utiliza los procesos de generalización y simbolización. Se exponen las dificultades en el tránsito de la aritmética al álgebra, en ella la concatenación de símbolos, uso de paréntesis y usos del signo igual, con base a esto se torna necesario integrar el pensamiento algebraico desde los primeros grados de Básica Primaria.

Merino, Cañas y Molina (2013) reportan los resultados de una investigación cuyo objetivo es indagar sobre las estrategias y representaciones que utilizan alumnos de quinto de educación primaria cuando tratan una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. El interés de la investigación es indagar la capacidad de generalización de un grupo de alumnos de 5º de educación primaria. Tiene como marco teórico la generalización (Kaput, 1999), los patrones (Polya, 1966), y las representaciones (Castro y Castro, 1997), participaron 20 alumnos de 5º curso de educación primaria, con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, de un colegio privado de Málaga

(España). Finalmente, en la investigación se concluyó que existe una gran variedad de estrategias utilizadas por los alumnos, con relevancia destacada del uso de patrones. Entre estas están, el conteo relacionado con la realización de una representación pictórica ya que los alumnos que usan esa estrategia se ayudan de un dibujo para dar respuesta a cuestiones que implican cantidades pequeñas en la variable conocida. La variedad de representaciones y de patrones identificados en una tarea de generalización, pone de manifiesto que los estudiantes de estas edades tienen los conocimientos y las herramientas necesarias para que este tipo de tareas se trabajen en el aula de primaria.

Chimoni, Pitta y Christou (2020) plantean la importancia de introducir el pensamiento algebraico en grados inferiores para preparar a los estudiantes cuando se enfrenten al estudio formal del álgebra a través de dos cursos instruccionales alternativos con el fin de mejorar las habilidades de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de quinto grado. El marco teórico utilizado fueron las Líneas básicas de contenido de álgebra: aritmética generalizada, pensamiento funcional y aplicación de lenguajes de modelado propuestas por (Kaput, 2008). En esta investigación se trataron las tres líneas de contenido de álgebra donde se logró introducir a los estudiantes en los conceptos algebraicos fundamentales como propiedades de números y operaciones, signo igual, ecuación, variable, notación variable, función y fórmula. Estas propiedades hicieron énfasis en el desarrollo de procesos algebraicos como: notar, generalizar, representar y justificar estructuras y relaciones, y sus formas interrelacionadas de razonamiento, como el razonamiento abductivo, inductivo y deductivo.

Butto y Rojano (2010) muestran los resultados de un estudio sobre la introducción temprana en el pensamiento algebraico mediante el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. El marco teórico que sustentó la investigación se basa en la teoría de los modelos locales desarrollada por Filloy (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2008). Con esta investigación se hace evidente la posibilidad de iniciar en el pensamiento algebraico en los estudiantes de los primeros grados de Básica Primaria, iniciando con conceptos curriculares para tales niveles estimulando su expresión general en un lenguaje simbólico semejante al del álgebra. Además, se puede aseverar que es posible rescatar tópicos de la aritmética (en este caso, el de variación proporcional) y el lenguaje de programación Logo para promover en los estudiantes procesos de generalización que puedan dar lugar a un nivel simbólico-algebraico.

Las ideas expuestas por estos autores son consecuentes con la investigación planteada, debido a que se destaca la importancia del álgebra temprana como vehículo para incluir el aprendizaje de las regularidades en el aula, como también es crucial el análisis del lenguaje como forma de expresión para los procesos.

En el marco de la emergencia temprana del pensamiento algebraico, es relevante investigar sobre los problemas que se evidencian en la transición de la aritmética al álgebra, que proveen de información sobre las dificultades de los estudiantes y dan cuenta de la importancia de realizar un tránsito armónico entre la aritmética y el álgebra, a través de la generalización de patrones. La investigación realizada por Kieran (2004) y la colección didáctica de Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora (1999) convergen en que un problema en la actividad matemática del aula se debe al desfase que existe entre la significación matemática que tiene un concepto matemático y la interpretación que le da el estudiante a través del lenguaje natural. Además, plantean que algunas provienen de: entender el álgebra sólo como una aritmética generalizada, en las interpretaciones de las expresiones algebraicas operar desde un enfoque aritmético y la errada interpretación del signo igual al considerarlo como una forma de operar.

1.1.5. Transición aritmética-álgebra

Radford (2010) presenta la investigación: Niveles de generalidad y tipos de generalizaciones en actividades de patrones, centrando su atención en la caracterización de la generalización algebraica en aras de diferenciar la generalización aritmética de la algebraica, que ayuda a dilucidar que no toda actividad de modelado conduce al pensamiento algebraico. Además, nos muestra las diversas estrategias que utilizan los estudiantes cuando se enfrentan a la generalización de patrones. La propuesta de Radford proporciona a nuestro trabajo la comprensión para determinar las tareas de patrones adecuadas que logren una generalización algebraica y por ende un desarrollo del pensamiento algebraico, también ayuda a prevenir que se propongan actividades en el aula que no conduzcan a la introducción temprana del álgebra.

1.1.6. El álgebra temprana y los materiales manipulativos

Es importante resaltar las investigaciones enfocadas en el uso de materiales manipulativos como medio semiótico en el aprendizaje del álgebra escolar, los autores que se proponen a continuación han enfocado sus trabajos en aras de este, además de las investigaciones que circulan alrededor del álgebra temprana y el pensamiento algebraico.

Solar (2016), destaca el significado que adoptan los patrones cuando los estudiantes son enfrentados a problemas que involucran reconocer patrones de objetos concretos, figuras geométricas, colores, etc. A partir del marco teórico del álgebra temprana, que promueve el estudio de patrones, (Blanton y Kaput, 2005).

Reconocer secuencias de patrones es indispensable para que el estudiante identifique y aprenda del álgebra temprana, en pro de establecer relaciones entre los patrones, características de tamaño y forma, como también de color, e incluso de posición, este es un paso clave para la introducción de la idea de generalización.

Hernández, Muñoz, Mercedes, Ruano y Socas (2008) presentan en su investigación la revisión de algunos recursos y materiales didácticos que podrían ayudar a organizar y fomentar situaciones de aprendizaje que desarrollen el pensamiento algebraico y faciliten el aprendizaje, reconocen los materiales didácticos como representaciones semióticas de los objetos matemáticos que juegan un papel importante en la enseñanza del álgebra. Los autores resaltan la importancia de la visualización para el desarrollo del pensamiento algebraico, en relación con el material concreto.

Proenza (2019) analiza la factorización de polinomios de segundo grado, utilizando materiales manipulativos como recursos didácticos. En el acercamiento con el álgebra y basándose en las propuestas de Jean Piaget, se presenta que el estudiante en una de las etapas del desarrollo necesita experiencias a través de la manipulación de objetos concretos, los materiales manipulativos existentes incluyen: bloques multibase, barras Cuisenaire, fichas de álgebra, cubos de álgebra, geoplanos, tangram, y dados. Con este recurso semiótico del estudiante, se pueden integrar y conectar mejor las ideas en relación con la actividad matemática.

Arreaza y Carvajal (2013) se enfocan en la aritmética y álgebra a través de los bloques de dientes. Expone la preocupación de la didáctica de las matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, como también el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Los autores proponen el uso de materiales manipulativos para mejorar el aprendizaje y donde los estudiantes de forma autónoma construyan sus conocimientos. Con base en esto se propone el uso de bloques de dientes para el desarrollo del pensamiento aritmético en relación con el pensamiento algebraico, con la construcción de secuencias numéricas, manipulando sumas y construyendo las figuras con los cuadros proporcionados.

Las investigaciones mencionadas anteriormente destacan la pertinencia del uso del material manipulativo en el desarrollo del pensamiento algebraico y la relevancia para la construcción del conocimiento de los estudiantes. Con base en estas teorías, nuestra investigación se dotará de elementos significativos y atravesarán el proceso de aprendizaje con el interés de aludir al álgebra escolar, desde componentes concretos. Se considera conveniente implementar en el aula tareas matemáticas que involucren generalización de patrones en aras de observar las diferentes formas de pensamiento algebraico que emergen en los estudiantes del grado Sexto, por lo que se plantea la siguiente pregunta que orienta el trabajo de investigación:

1.2. Pregunta de investigación

¿Cómo se relacionan tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo?

1.3.Justificación

El pensamiento numérico se centra en la comprensión y manipulación de números, así como en la capacidad para realizar operaciones aritméticas y resolver problemas numéricos de manera efectiva. Por otro lado, el pensamiento variacional implica la habilidad para analizar y comprender las variaciones y relaciones entre diferentes cantidades o variables, preponderante para la resolución de problemas de variación y cambio, que mejoran la comprensión y aprendizaje del cálculo numérico y algebraico (MEN, 2006).

Los estándares básicos de competencias mencionan que es primordial desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros grados de la educación básica primaria y que la emergencia de este tipo de pensamiento inicia con el estudio de regularidades y las reglas para encontrar el patrón que se repite en una secuencia, que dota al estudiante con la capacidad de reproducirlo por medio de una fórmula. También, expresa que las tareas de generalización de patrones son adecuadas para preparar al estudiante en el aprendizaje de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico antes de llegar a Séptimo y Octavo grado (MEN, 2006). En línea con el planteamiento realizado en los estándares básicos de competencias, es pertinente estudiar la relación de las tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico.

El objetivo de la investigación es analizar cómo se relacionan tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, teniendo en cuenta la importancia de abordar el álgebra temprana desarrollando tareas enfocadas en la búsqueda de regularidades y de elementos en común que se pueden presentar en ejercicios matemáticos, en donde los estudiantes se vinculen con la resolución de variables e incógnitas que se les presenta en cada una de las tareas de patrones de secuencias. Se destaca así, la relevancia de leer investigaciones que han realizado algunos autores para hacer contraste y leer propuestas en torno a los que nos convoca. Esta investigación, realizada en el Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, ha permitido comprender el contexto en el que surge la problemática identificada. Además, ha influido en la búsqueda de estrategias para abordar el pensamiento algebraico desde los primeros grados, lo cual tiene un impacto significativo en el estudio del Álgebra compleja en niveles educativos superiores.

Esta investigación se basa en la propuesta que hacen Radford y Vergel en el desarrollo de tareas para trabajar los estratos del pensamiento algebraico: factual, contextual y simbólico, como también la estratificación de pensamiento: indeterminación, analiticidad y simbólico. Las tareas que se vinculan con la propuesta de Gómez (2013) de patrones de secuencias, busca que se encuentre eso que es común en los términos de la secuencia haciendo énfasis en cómo se construye en la sucesión.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Analizar cómo se relacionan tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo.

1.4.2. Objetivos específicos

- Desarrollar tareas de patrones y secuencias con los estudiantes de grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo.
- Identificar los medios semióticos movilizados por los estudiantes al realizar tareas de patrones de secuencias.
- Caracterizar el pensamiento algebraico en los estudiantes del grado Sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo al desarrollar las tareas de patrones y secuencias.

2. Marco teórico

El marco teórico depende del problema de investigación, la revisión y consulta de referencias en las bases de datos en torno a las ideas principales que están en el problema de investigación, es un primer paso para la construcción de este, el cual influirá en el desarrollo de tareas y actividades de la investigación. Para Hernández et al. (2014) el marco teórico trata únicamente con profundidad los aspectos relacionados con el problema y vincula de manera lógica y coherente los conceptos y preposiciones existentes en estudios anteriores.

En la investigación, se realizó una revisión detallada sobre la transición de la aritmética-álgebra, el pensamiento algebraico, los estratos del pensamiento, los medios semióticos, la generalización de patrones, pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico, tareas y patrones de secuencias. Para indagar sobre estos conceptos usamos bases de datos académicas como: Centro de documentación CEDED, Revista Educación Matemática, Eric, Springer link, entre otras, se ha llevado a cabo a través de revisión de literatura como documentos, revistas, artículos en bases de datos previos en donde se investiga sobre la problemática que hace referencia a la pregunta de investigación: ¿Cómo se relacionan tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo?

El objetivo de consulta en estas bases de datos es encontrar estudios previos de la investigación, que inciden en la construcción de los antecedentes, que contienen elementos importantes para darle ruta al marco teórico.

Entre los antecedentes reportados, se eligieron 25 de ellos, agrupados en categorías teóricas como: la emergencia del pensamiento algebraico que propone Vergel (2016), niveles de generalidad y tipos de generalizaciones en actividades de patrones que propone Radford (2010), la Teoría de Objetivación propuesta por Radford (2006a, 2014), entre otros.

Hernández et al., 2014 indican que la literatura es útil para detectar conceptos claves y nutrirnos de ideas sobre métodos de recolección de datos y análisis, así como entender mejor los resultados, evaluar las categorías relevantes y profundizar en las interpretaciones (p. 365). Con la revisión de literatura, los conceptos vinculados a la investigación que forman el marco teórico muestran una ruta de desarrollo que ayudan a sustentar el estudio.

A continuación, presentamos un mapa conceptual que muestra los referentes teóricos que se abordan en la investigación, los cuales se desglosan cada uno. Como idea central partimos de la transición aritmética-álgebra, la generalización de patrones y los estratos del pensamiento. Los estratos del pensamiento se vinculan con los medios semióticos y la generalización de patrones con las tareas, la comunalidad, el pensamiento aritmético "sofisticado" proto-formas de pensamiento algebraico y patrones de secuencias. (Ver Figura 1)

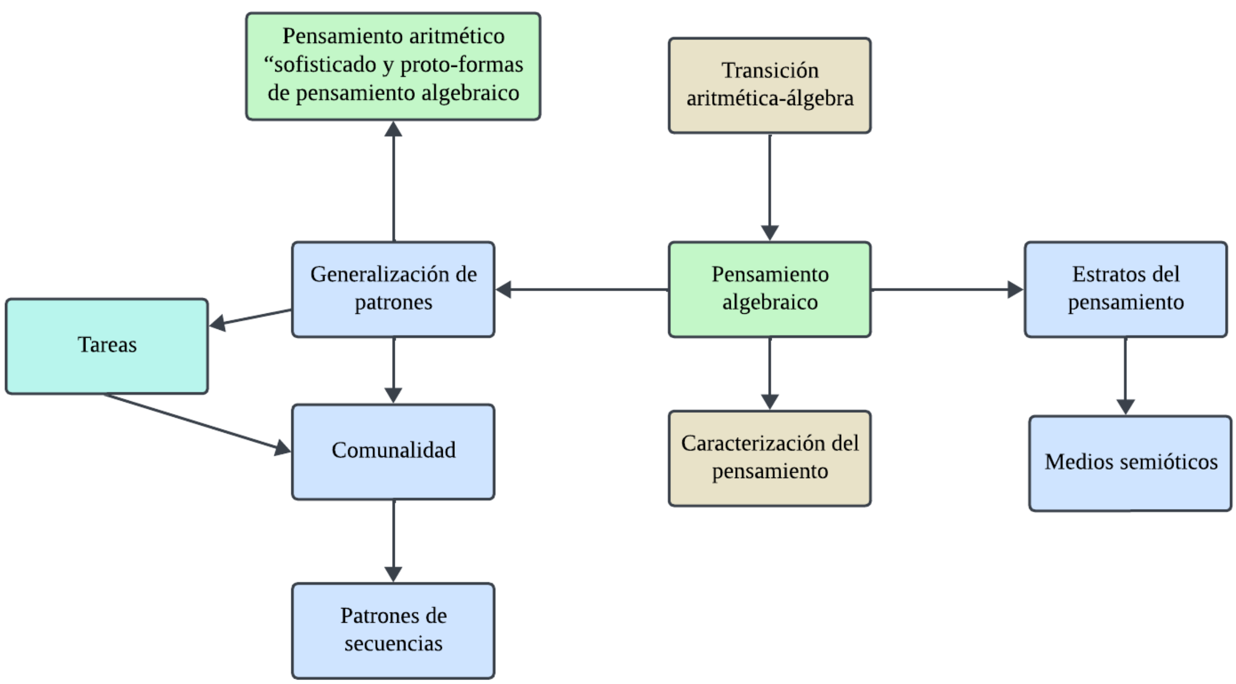


Figura 1. Representación marco teórico

2.1. Transición aritmética-álgebra

Son numerosas las investigaciones que indican que es esencial incluir el pensamiento algebraico de manera gradual en primaria y las dificultades que se pueden presentar al introducirlo de manera abrupta en la educación secundaria (Vergel, 2015a, 2015 b; 2016a, 2016b; Alsina & Mejías, 2020; Kaput, 2000); es por esto que Vergel & Rojas (2018) presentan la transición aritmética-álgebra donde se propone la inclusión del pensamiento algebraico desde grados inferiores a partir de actividades de generalización de patrones. Lo primero que se debe explicitar en esta propuesta es que la aritmética y el álgebra no deben ser vistas por separado. Según Vergel & Rojas (2018) en algunas situaciones aritméticas es necesario que lo indeterminado[2] no se opere analíticamente, es decir, tienen carácter algebraico porque el trabajo con lo indeterminado es una característica del pensamiento algebraico. Este proceso debe ser natural y tranquilo, se debe dar paulatinamente, y no debe realizarse una ruptura entre los dos campos: aritmética y álgebra, ya que trabajar netamente con la aritmética en primaria y luego pasar de manera abrupta al álgebra genera algunos problemas descritos por Rojas y Vergel (2013):

2.1.1. Concatenación de símbolos:

Al pasar de la aritmética al álgebra se realizan cambios de representación, "concatenar" en la aritmética lleva implícito la suma de valores posicionales $45 = 4\ decenas + 2\ unidades$ y en el trabajo algebraico, la concatenación se refiere a multiplicación $3a = 3xa$. Es por esto, que el estudiante puede tener dificultades en estos cambios de significación y empiece a resolver operaciones desde un referente aritmético. Por ejemplo, $2a$ puede ser no visto como $2xa$ sino como $2 + a$.

2.1.2. Uso del igual:

El estudiante entiende el signo igual "=" como una orden para operar y no como una equivalencia. Por ende, puede indicar por ejemplo que la siguiente igualdad es falsa $4 + 5 = 8 + 1$. Debido a los problemas que se pueden encontrar en una transición forzada hacía el álgebra por los cambios semióticos de representación, Rojas y Vergel (2013) indican que los estudiantes se ven en la necesidad de utilizar representaciones semióticas que no corresponden a las propias del álgebra, pero no por eso se deben desestimar, ya que son una vía para el desarrollo del pensamiento algebraico. No con esto, quiere decir que se deban dejar de lado los signos alfanuméricos, ya que la finalidad es poder expresar una generalización a través de una fórmula. Pero esto no se logra súbitamente, se da paso a paso, se debe estar atentos a los medios semióticos que utilizan los estudiantes como los gestos y los movimientos que tienen la capacidad de significar y objetivar el aprendizaje, estos son necesarios para constituir el pensamiento algebraico.

[2] *Radford (2010) define la indeterminancia como los objetos como incógnitas o variables.*

2.2. Pensamiento algebraico

Radford (2010a) aduce que utilizar letras no quiere decir que ya se esté usando un pensamiento algebraicamente, los signos y fórmulas algebraicas pierden su primacía en el enfoque semiótico-cultural y pasan a ser preponderantes los gestos y las palabras, considerados como signos algebraicos tan legítimos como las letras, Radford define el pensamiento algebraico cómo las maneras para referirse a lo indeterminado[1] no solo desde lo simbólico, además es definido por Radford (2010a) como "Una praxis histórica cognitiva mediada por el cuerpo, los signos y las herramientas" (p. 4). Vergel (2014) define el pensamiento algebraico como "una forma particular de reflexionar matemáticamente" (p. 87). Butto y Rojano (2010) destacan que el pensamiento algebraico involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones.

2.3 Estratos del pensamiento

Radford (2010a) propone una tipología para definir las formas de pensamiento algebraico: El primero es el **factual** donde la indeterminación está implícita, los estudiantes utilizan los gestos, las palabras y los movimientos como una acción sobre las fórmulas. El segundo es el **contextual**, la indeterminación empieza a ser explícita dentro del discurso, ya no se utilizan gestos como acción sino a través de palabras o expresiones que pueden señalar un lugar como "arriba quito 2" "abajo quito 1". El tercer nivel es el **simbólico** en este el estudiante expresa la generalización a través de símbolos alfanuméricos. En la línea que propone Radford (2010) el estudiante podrá resolver el problema y estar en la etapa de generalización simbólica, después de pasar por la generalización factual y contextual. En donde se caracteriza el pensamiento por la indeterminación, al desconocer el valor de las cantidades y de las variables.

2.4. Caracterización del pensamiento algebraico

Este pensamiento se encuentra caracterizado por el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica (Radford, 2010). El sentido de indeterminancia son objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro. La analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados. La designación simbólica o expresión semiótica como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

2.5. Medios semióticos

Según Radford (2009) los signos alfanuméricos de las operaciones se han convertido en el sistema semiótico del álgebra escolar, pero desde una perspectiva semiótica los signos pueden ser diferentes a los signos convencionales, como los gestos y movimientos, estos son considerados capaces de significar y expresar la indeterminación de forma analítica y así llegar a la generalización, con esto no se quiere decir que se sustituyen las fórmulas algebraicas pero sí que hay múltiples maneras de objetivar el conocimiento. Si bien en el álgebra es necesario designar los objetos algebraicos, el pensamiento algebraico no puede reducirse al uso de las letras, porque para pensar algebraicamente hay múltiples maneras semióticas diferentes para lograrlo. Podemos decir que los estudiantes pueden llegar a la zona de pensamiento algebraico, aunque aún no recurren a los signos alfanuméricos. Radford (2009) indica que la zona del pensamiento algebraico ha permanecido en gran medida ignorada, como consecuencia de nuestra obsesión por reconocer lo algebraico solo en lo simbólico.

Desde la Teoría Cultural de Objetivación, Radford (2003) expresa que los medios semióticos son entendidos como el discurso, los signos, objetos, herramientas y las expresiones corporales, elementos que se convierten en significantes en las actividades que se desarrollan. Según Solar (2016), desde los primeros niveles de escolaridad, los estudiantes son enfrentados a problemas que involucran el reconocimiento de patrones de objetos concretos, figuras geométricas, colores, entre otros. Con esto, se apuesta a la generalización de patrones figurales, por medio de materiales manipulativos, que es significativo y contribuye a la construcción de esas generalizaciones simbólicas. En relación con esto, los recursos semióticos constan de la variedad de materia o cosas que los niños pueden seleccionar para apoyar su comunicación o expresar eficazmente el significado en cualquier evento de formación de signos (Kabuto, 2009). Estos medios apoyan la interpretación y comprensión de los contenidos matemáticos. Por esta razón se considera importante el uso de materiales manipulativos como medio semiótico en la resolución de tareas de generalización de patrones de secuencias figurales.

Radford (2005) hace referencia a la pregunta ¿Por qué son importantes los gestos? Los gestos importan porque, en los entornos de aprendizaje, cumplen una función importante: son elementos importantes en los procesos de objetivación del conocimiento de los estudiantes. Los gestos ayudan a los estudiantes a hacer evidentes sus intenciones, a notar relaciones matemáticas abstractas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos. Los signos no son considerados como meros indicadores de actividad mental, por el contrario, son parte constitutiva del pensamiento. En este sentido, la noción vygotskiana de signo en Radford incluye gestos, artefactos, ritmo y actividad kinestésica. Esto es, los signos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o resignifican dicha actividad (Vergel, 2013, p. 227).

2.6. Generalización de patrones

Para Radford (2006), la generalización de un modelo algebraico se basa en la capacidad de captar alguna regularidad observada en algunos elementos de una secuencia, siendo conscientes de que esta regularidad se debe aplicar a todos los términos de la secuencia y se puede utilizar una expresión directa para hallar estos términos. La generalización toma sentido cuando los estudiantes reconocen características comunes en las figuras y patrones que se les muestra. En el proceso de generalización entran en juego recursos semióticos para dar sentido y expresar una secuencia. Radford (2016b) considera la generalización de patrones como una de las formas importantes de introducir el álgebra en la escuela, pues, entre otros aspectos, posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que son importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico. Esto sugiere poner atención en los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico en la escuela.

Radford (2008) concreta la generalización de patrones en tres etapas: en la primera etapa, el estudiante observa una propiedad común en algunos términos de una secuencia y extiende la propiedad observada a términos cercanos (generalización cercana), en la segunda etapa, extiende la propiedad a términos lejanos (generalización lejana), y en la tercera etapa, obtiene una regla general que permite calcular cualquier término. Para esto Radford (2013) propone una estructura de generalización algebraica de secuencias, donde amplía la comprensión de esta estructura que es bidimensional:

- *La propiedad de comunalidad*. Reconocimiento de la característica en común en uno de los términos de la secuencia, observada sobre algunos términos particulares. Esta característica se relaciona con la idea que propone sobre la abducción Pierce[2], la cual se podrá desarrollar desde dos enfoques. El primero es la abducción que se posiciona en una generalización aritmética. (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados) o cuando por ensayo y error se llega a la construcción de una fórmula. Esta deducción no se vincula con una expresión directa. El segundo se da cuando esa abducción se hace con la característica en común y es utilizada de forma analítica. Se refiere a una generalización algebraica por el uso de lo común para construir la expresión general y así hallar cualquier término de la secuencia.
- *Generalización de la comunalidad a todos los términos de la secuencia.* Reconocer en todos los términos de la secuencia la característica en común.
- *Deducir una expresión directa.* Con la característica en común crear una expresión general para hallar cualquier término de la secuencia. (p. 7). La figura 2 que se presenta a continuación explica las ideas planteadas.

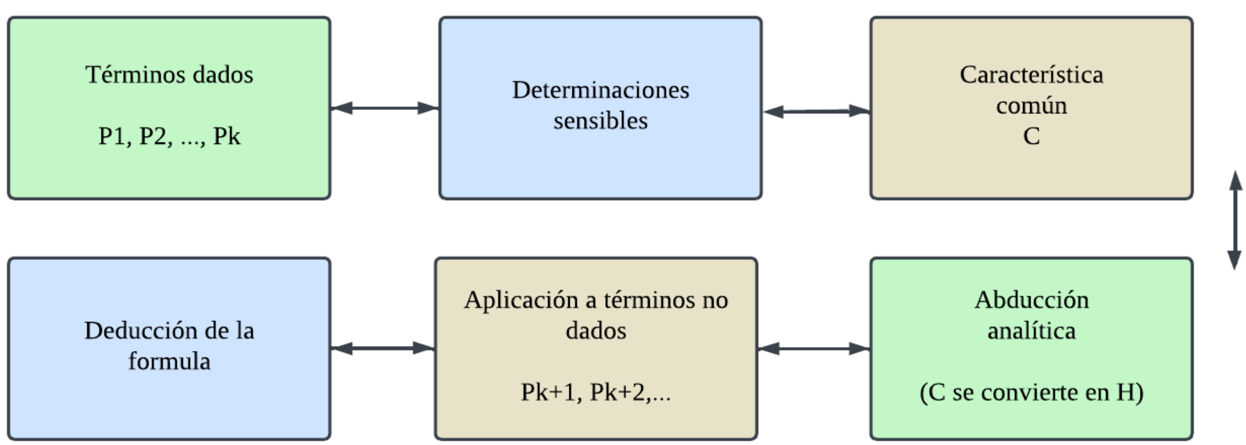


Figura 2. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales.
Adaptado de: Radford (2013, p.7)

2.7. Pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico

Según Radford (2013) cuando la abducción (generalización de la característica común) es utilizada solo para pasar de un término a otro se habla de una generalización aritmética, cuando estamos utilizando la abducción como una simple posibilidad, es decir, encontramos algunos términos de la secuencia hablamos de una analiticidad incipiente o proto-analiticidad que es cuando la indeterminancia no alcanza el nivel de enunciación o el discurso. En este caso estaría presente el estrato de pensamiento factual debido a que la forma cómo se encuentran los términos de la secuencia se basa en un nivel particular o sobre hechos factuales. La zona conceptual de formas de pensamiento aritmético sofisticado y proto-formas de pensamiento algebraico está caracterizada por el solapamiento o entrecruzamiento de estas dos formas de pensamiento matemático y que se puede inscribir en el marco de lo que se ha dado por llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico (Radford, 2010 citado en Vergel & Rojas, 2022).

2.8. Tareas

Rojas y Vergel (2018) consideran la tarea como una categoría didáctica, la cual se enmarca en un contexto dado que puede ser intramatemático o extramatemático en un proceso de instrucción, en donde se pretende desarrollar pensamiento matemático en el sujeto. La tarea, a nuestro juicio, está revestida de una densidad epistemológica, por cuanto su abordaje, por parte de los estudiantes, implica la movilización, a través de signos y de operar con ellos, de ideas y procesos matemáticos, procesos de deducción y de generalización, la conjeturación y formulación de hipótesis, el establecimiento de relaciones numéricas, el trabajo analítico con lo desconocido, entre otros aspectos. Rojas y Vergel (2018) y Herbst (2012) afirman que las tareas consisten en las acciones e interacciones orientadas a un objetivo particular; una tarea constituye así un contexto práctico en el que los estudiantes pueden llegar a pensar acerca de las ideas matemáticas en juego en un problema. Constituyéndose como una herramienta para acercar de forma conceptual y práctica problemas matemáticos.

Radford (2003) presenta una tarea en la que se trabaja los patrones a través de secuencias figurales de palillos, en donde se analiza la solución en cada uno de los estratos del pensamiento (factual, contextual y simbólico), esta tarea se encuentra mediadas por medios semióticos como las palabras, lo gestos y el discurso. Aguayo et.al. (2017) indican que cuando empleamos el término tarea para designar las acciones instructivas estructuradas, referidas a un contenido matemático, que establecen las demandas matemáticas, y la gestión e interacción prevista

2.9. Patrones de secuencias

Gómez (2013) establece la relación de las tareas de secuencias en torno a la identificación del patrón como característica para la construcción de una secuencia. La secuencia se refiere al orden en el que se encuentran los términos que componen la sucesión de elementos con respecto a una figura y su posición. En ella se debe de reconocer en cualquier término de la secuencia, la comunalidad como referencia al patrón, que responderá a la construcción de una fórmula algebraica que permitirá partir de un término particular a una expresión general, que dará cuenta de una generalización algebraica de un patrón. Radford (2006) afirma que generalizar un patrón algebraicamente se basa en la capacidad de captar un punto en común observado en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que este punto en común se aplica a todos los términos de S y siendo capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S.

Hernández y Tapiero (2014) destacan el papel de los patrones en los procesos de generalización, debido a que estos patrones estimulan la observación, la formulación, argumentación y validación de conjeturas. Destacando en ellos, propiedades asociadas a la regularidad con relación a los elementos que se encuentran en una composición. En esta se resaltan los términos que conforman la secuencia. Gómez (2013) indica que la palabra sucesión hace referencia a una serie de objetos o sucesos que están organizados de tal forma que alguno de ellos se identifica como el primero, otro como el segundo, etc. El patrón en los términos de la secuencia permitirá darles orden a elementos de la secuencia que no están en primera instancia en el campo perceptual, sino que requieren de la construcción de expresiones para encontrarlos.

3. Metodología

Este capítulo se enfoca en describir el diseño metodológico, el cual se encuentra compuesto primero por el paradigma y enfoque metodológico, segundo por la justificación y el objeto de estudio, tercero, por los participantes y la descripción demográfica. Por último, la descripción de las tareas y herramientas de análisis. La figura 3 presentada a continuación muestra la representación del diseño metodológico.

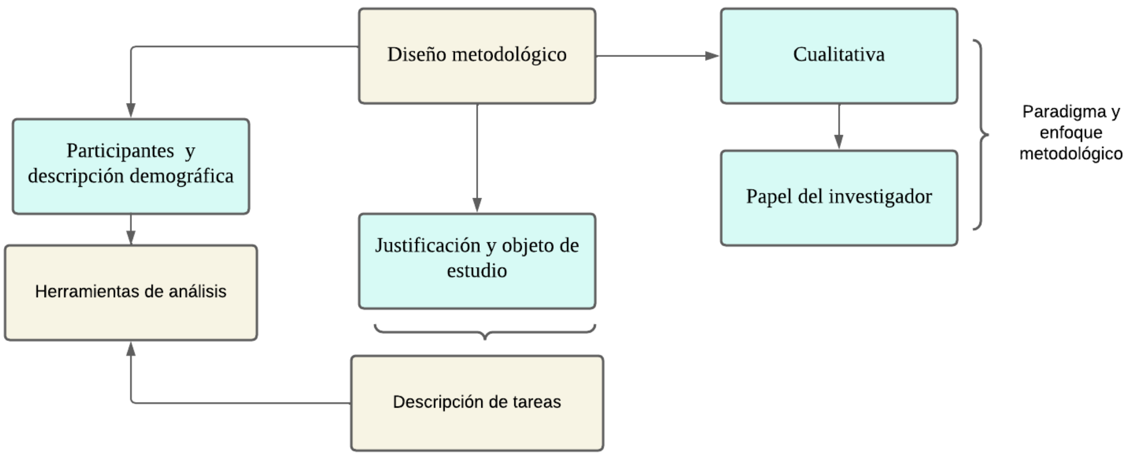


Figura 3. Representación diseño metodológico

3.1. Paradigma y enfoque metodológico

El proceso de investigación llevado a cabo se orienta bajo el paradigma cualitativo porque se encamina en descubrir cómo se origina el pensamiento algebraico en los estudiantes del grado sexto a través de las explicaciones escritas, corporales y verbales de patrones y regularidades mientras desarrollan tareas de generalización de patrones. Asimismo, se encamina en las ideas que establece Hernández et al. (2014) donde enuncian que la investigación cualitativa se enmarca en entender los fenómenos y se estudian a partir de la mirada de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto. La investigación se ajusta a las ideas planteadas por Hernández porque busca descifrar los fenómenos desde el sentido que los estudiantes le dan a dicho fenómeno. Se cataloga como teoría fenomenológica porque según lo planteado por Hernández et al. (2014), el estudio fenomenológico busca explicar y comprender los fenómenos desde la postura de cada uno de los participantes del estudio, a través de la postura creada en común entre todos los participantes.

La finalidad de la investigación de tipo fenomenológica es analizar la relación de las tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo. "En la indagación cualitativa, los investigadores deben establecer formas inclusivas para descubrir las visiones múltiples de los participantes y adoptar papeles personales e interactivos entre ellos" (Hernández et al., 2014, p. 398). En el desarrollo del trabajo de campo el investigador debe estar atento y establecer vínculos de comunicación con los participantes, para así analizar la información proporcionada por ellos, sumado a esto debe tener presente las posibilidades que le está brindando el contexto para recolectar la información. "El mayor reto que tiene el investigador es introducirse al ambiente y mimetizarse con este, pero también en captar lo que las unidades o casos expresan y adquirir una comprensión profunda del fenómeno estudiado" (Hernández et al., 2014, p. 397). Un aspecto importante en la recolección de datos por parte del investigador es estar atento en la observación, ya que no solo se trata de ver sino de aprender a analizar, para que pueda describir, deducir y generar hipótesis respecto a lo que se enfoca en el estudio.

3.2. Participantes y descripción demográfica

"Las primeras acciones para elegir la muestra ocurren desde el planteamiento mismo y cuando seleccionamos el contexto, en el cual esperamos encontrar los casos que nos interesan". (Hernández et al., 2014, p. 384). La muestra para el estudio fue de 45 estudiantes del grado sexto seis; el trabajo se realizó en 7 sesiones de clase. Esta muestra fue elegida, después de plantear la pregunta de investigación. El área en la que se desempeña la investigación son las ciencias humanas, específicamente el sector educativo, la muestra consta de participantes voluntarios y autoseleccionados, ya que por medio de un consentimiento informado aceptaron ser parte de la investigación, dispuestos a que, a través del desarrollo de tareas en las sesiones, se puedan recolectar datos a partir de las observaciones e intervenciones en el trabajo de campo. El consentimiento consta de la autorización de los padres de los estudiantes, quienes son menores de edad para que den el aval para tomar fotografías, grabar audios y grabar las clases.

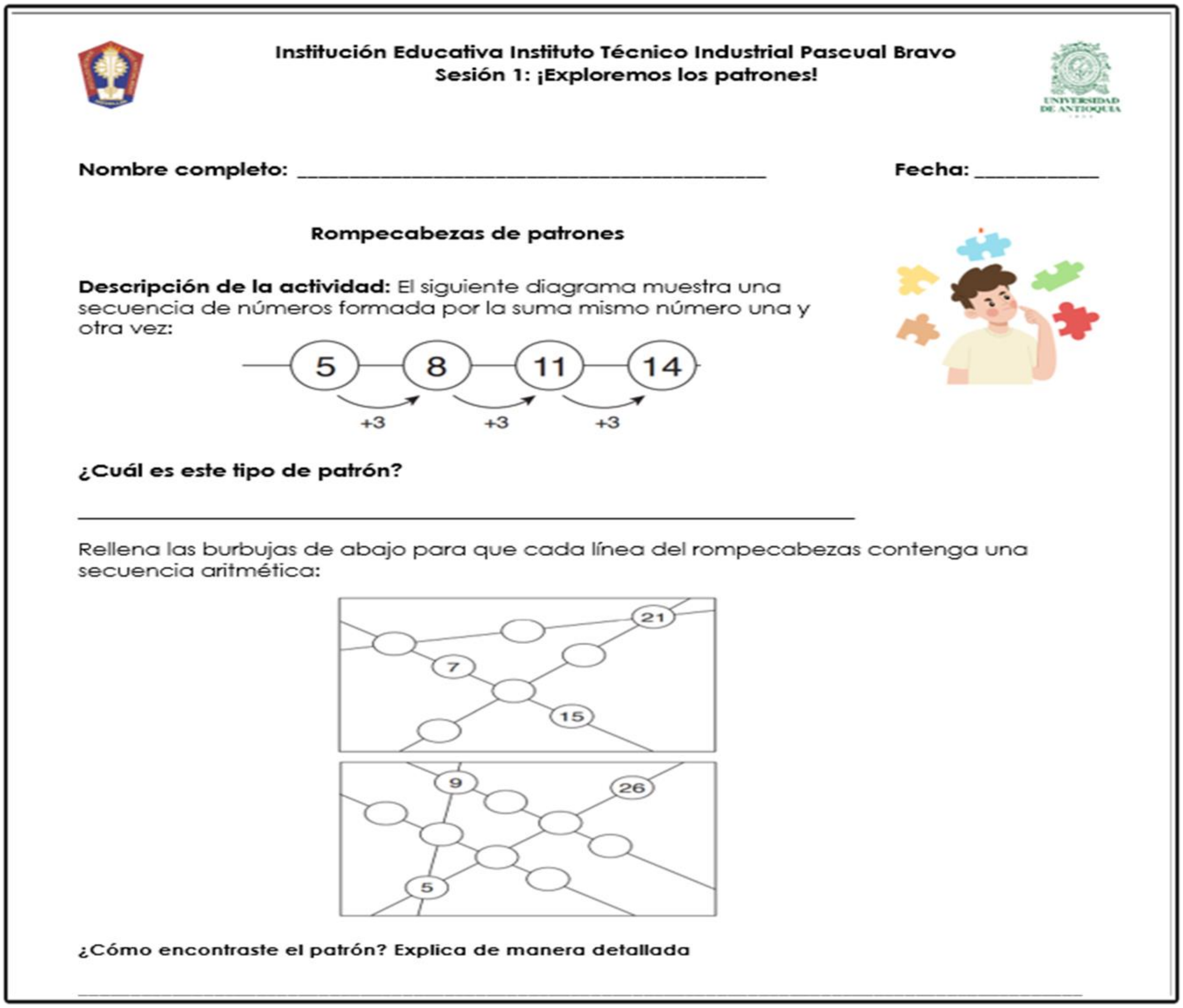
Esta investigación ha sido posible a partir de la observación realizada en el grado sexto de la jornada de la mañana en el Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, ubicado en la ciudad de Medellín (Antioquia), específicamente en el Barrio Robledo. Esta es una institución pública de carácter mixto, a la que asisten estudiantes de Medellín y de zonas aledañas, cuenta con las jornadas de mañana y tarde desde el grado sexto hasta el grado once. "El Instituto tiene como misión la educación de personas integrales con capacidad de intervenir en las decisiones de su contexto, con una formación técnica, con énfasis para el trabajo, la producción, la competitividad y la investigación, con la posibilidad de continuar estudios superiores. Como visión asume el liderazgo en la formación de bachilleres técnico - científicos, constructores de conocimiento, capaces de utilizar y producir tecnología para la solución de problemas propios y de su comunidad, de establecer relaciones armónicas, con cultura ambientalista, sentido de pertenencia en un espacio dialógico, tolerante y participativo". (Instituto técnico Industrial Pascual Bravo, 2023, p. 13).

3.3. Descripción de tareas

El trabajo de campo está sujeto al planteamiento del problema y la revisión de literatura realizada previamente, debido a que, en el desarrollo del trabajo con los participantes de la investigación, se busca responder a la pregunta de investigación: ¿Cómo se relacionan las tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo?, en donde se llevaron a cabo 7 sesiones de clases. En la primera sesión se abordó el concepto de patrón, los tipos de patrones que existen y una actividad denominada Rompecabezas de patrones. En la segunda sesión, se trabajaron los patrones rockeros donde se les presentó a los estudiantes el Ritmograma de la canción **We will rock** y los estudiantes realizaron una percusión corporal. En la tercera sesión denominada pulsera numérica se elaboró una manilla a partir de patrones numéricos. La cuarta sesión denominada Triángulo de Sierpinski estuvo basada en las etapas de construcción de un fractal. La quinta sesión se denominó el juego de las ranas, basada en los patrones aditivos de movimientos de las ranas. La sexta sesión denominada secuencias figurales se enfocó en la construcción de la secuencia con base al patrón encontrado y la séptima sesión denominada secuencia en la cabaña de playa, se trabajaron las secuencias numéricas.

3.3.1. Tarea 1: Rompecabezas de patrones

En esta sesión se le solicitó al estudiante completar 2 rompecabezas, uno constaba de tres líneas que se cruzaban con círculos marcados, y otro de 4 líneas. Se debía crear en cada uno, secuencias aritméticas que se ajustaran a cada línea. Con esta tarea se pretendía realizar una introducción a los patrones de secuencias para que los estudiantes tuvieran una familiarización con este tipo de actividades y observar los recursos semióticos movilizados por los estudiantes.(Ver figura 4).



Institución Educativa Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo
Sesión 1: ¡Exploremos los patrones!

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Nombre completo: ______________________________ **Fecha:** __________

Rompecabezas de patrones

Descripción de la actividad: El siguiente diagrama muestra una secuencia de números formada por la suma mismo número una y otra vez:

5 — 8 — 11 — 14

+3 +3 +3

¿Cuál es este tipo de patrón?

____

Rellena las burbujas de abajo para que cada línea del rompecabezas contenga una secuencia aritmética:

21 7 15

9 26 5

¿Cómo encontraste el patrón? Explica de manera detallada

____

Figura 4. Tarea 1: ¡Exploremos los patrones!

Fuente: Sian, Z. (s.f.). Arithmetic sequence puzzle. Recuperado en

https://www.stem.org.uk/resources/elibrary/resource/422011/arithmetic-sequence-puzzle

3.3.2. Tarea 2: Patrones Rockeros

Se le presentó a los estudiantes el Ritmograma de la canción **We will rock**, ellos debieron seguir los patrones presentados, sin equivocarse. En el video se puede ver cuántas veces se debían repetir los patrones; se presentó primero el video a los estudiantes realizando estas especificaciones antes de que ellos realizaran la percusión. Después de recrear el ritmograma el estudiante tenía que responder una serie de preguntas. La intención de la sesión fue observar si los estudiantes lograban encontrar una comunalidad de las posiciones del ritmograma y a partir de allí vislumbrar las formas de pensamiento algebraico que iban emergiendo a través de los recursos semióticos movilizados. (Ver figura 5)

Institución Educativa Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo
Sesión 1: ¡Exploremos los patrones!

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Nombre completo: ______________________ **Fecha:** __________

Patrones rockeros

Descripción de la actividad: Observa la siguiente secuencia de movimientos corporales que realizaste con tu cuerpo con la canción "We Will rock you":

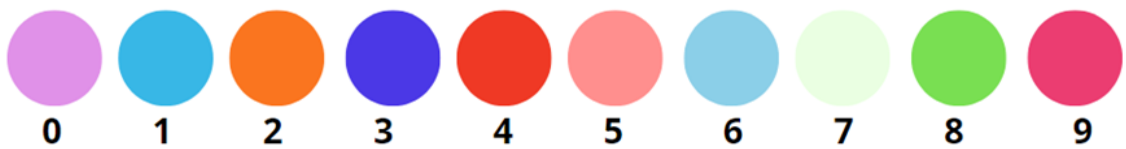
Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué hace que esta canción sea un patrón?
2. Convierta la siguiente secuencia de movimientos corporales en un patrón de letras o numérico
3. Cada movimiento corporal es un tiempo. ¿Qué movimiento harás en el tiempo 15? ¿Cómo lo sabes?
4. ¿Qué harás en el tiempo 20? ¿Cómo puedes predecirlo?
5. ¿Y en el tiempo 99? Explica de manera detallada
6. ¿Qué harás en el tiempo 99?

Figura 5. Tarea 2: ¡Patrones rockeros!

3.3.3. Tarea 3: Pulsera numérica

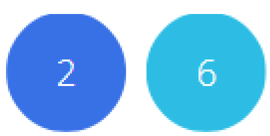
Se les entregó a los estudiantes las siguientes cuentas numeradas del 0 al 9



El estudiante elegía 2 cuentas. Podían tener el mismo número. Para obtener la tercera cuenta, debía sumar los números de la primera y la segunda cuenta. Si la suma era mayor que 9, usaba el último dígito (las unidades) de la suma. Para obtener la siguiente cuenta, suma los números de las dos últimas cuentas que usó y utiliza sólo el dígito de las unidades. Entonces, para obtener la cuarta cuenta, suma los números de la segunda y tercera cuenta y usa el dígito de las unidades. Debía continuar hasta llegar a la primera y segunda cuentas, en ese orden.

Ejemplo:

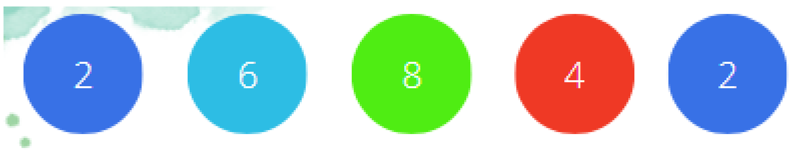
Elija 2 y 6 para la primera y segunda cuenta:



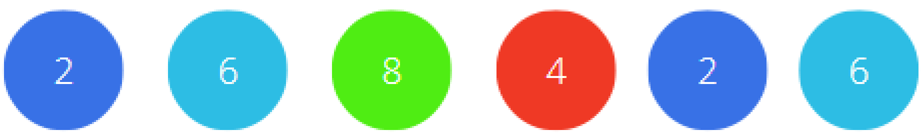
La tercera cuenta es $2 + 6 = 8$:

Para obtener la cuarta cuenta, suma 6 y 8, luego usa solo el dígito de las unidades: $6 + 8 = 14$; utilice 4:

$8 + 4 = 12$; use 2:



$4 + 2 = 6$:

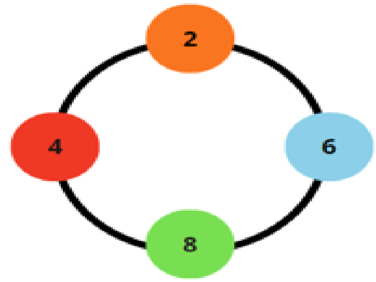


Pero las dos últimas cuentas son iguales a las dos primeras, así que use 2, 6, 8 y 4 en una pulsera. La pulsera de este ejemplo quedaría de la siguiente forma**:**

El estudiante debía hacer mínimo 3 manillas diferentes. La intención de la sesión fue que el estudiante realizara manillas creativas con un patrón de repetición a la vez que intentaba descubrir que sucedía con todos los patrones que podían encontrar con la creación de la manilla, a partir de preguntas como: ¿Cuántos pares de números iniciales puede haber? ¿Cuáles son las diferentes longitudes que puede tener una pulsera numérica? que brindó la posibilidad a los estudiantes de crear conjeturas a través de predicciones y debates entre ellos sobre los múltiples métodos que podían realizar para dar respuesta a los interrogantes. En esta segunda sesión se trató de no intervenir en las conjeturas, se centró más en observar qué notaban, cómo lo comunicaban y cómo trabajaban con sus pares. (Ver figura 6)

- 8 + 4 = 12; use 2:

- 4 + 2 = 6:



Pero las dos últimas cuentas son iguales a las dos primeras, así que use 2, 6, 8 y 4 en una pulsera.

Realiza diferentes manillas con cuentas diferentes y responde:

- ¿Qué tan larga (o corta) puedes hacer una pulsera con números?

  ____

- ¿Una pulsera con números siempre volverá al principio o puedes tener un collar de cuentas que nunca se repita?

  ____

- ¿Cuántos pares iniciales diferentes de cuentas hay? ¿Cómo lo hiciste?

  ____

- ¿Cuántas pulseras con números diferentes hay? Explica tu respuesta

  ____

- Si empiezas con las mismas dos cuentas, pero en orden opuesto, ¿Obtienes la misma pulsera? ¿Obtienes la misma pulsera al revés? ¿Cómo lo hiciste?

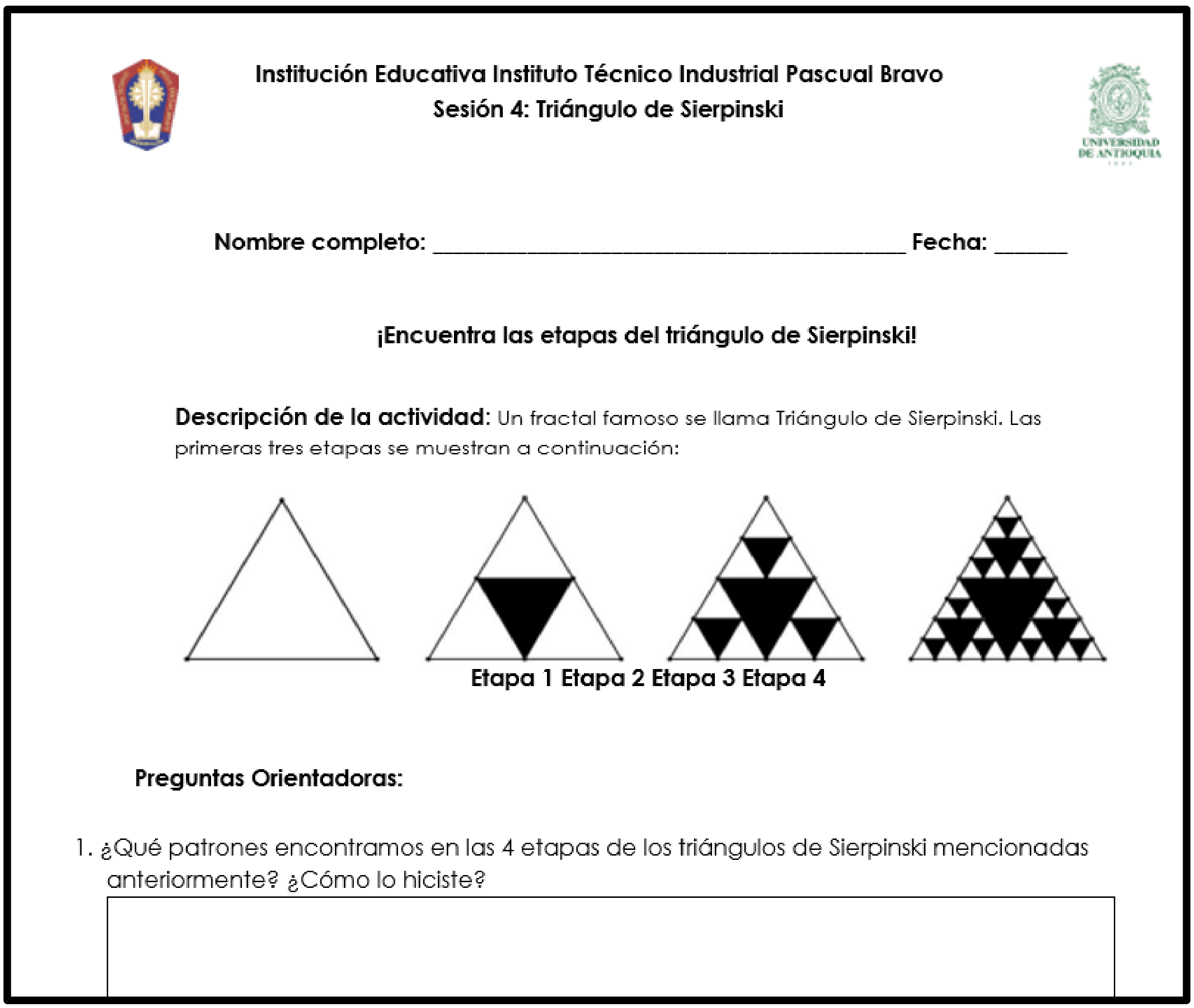
  ____

Figura 6. Tarea 3: Pulsera numérica

Fuente: Marilyn,B (1992). The Number Bracelets Game. Adaptado de: http://www.geom.uiuc.edu/~addingto/number_bracelets/number_bracelets.html

3.3.4. Tarea 4: Triángulo de Sierpinski

En la implementación de esta tarea presentada en la figura 7 y 8 se muestran los 3 primeros términos del triángulo de Sierpinski y se pretendía que el estudiante se enfocara en el objeto que se debía generalizar que en este caso es la cantidad de triángulos blancos para la identificación del patrón a través del reconocimiento de semejanzas y diferencias, para que pudiera encontrar una regularidad que le permitiera predecir el número de triángulos blancos de los siguientes términos. En esta tarea se pretendía orientar y centrar las acciones del estudiante hacia la consecución de una generalización algebraica.


Institución Educativa Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo
Sesión 4: Triángulo de Sierpinski

Nombre completo: ____ **Fecha:** ______

¡Encuentra las etapas del triángulo de Sierpinski!

Descripción de la actividad: Un fractal famoso se llama Triángulo de Sierpinski. Las primeras tres etapas se muestran a continuación:

Preguntas Orientadoras:

1. ¿Qué patrones encontramos en las 4 etapas de los triángulos de Sierpinski mencionadas anteriormente? ¿Cómo lo hiciste?

Figura 7. Tarea 4: Triángulo de Sierpinski

2. Completa la siguiente tabla encontrando un patrón que te permita predecir el número de triángulos <u>blancos</u> en varias etapas:

Etapa	1	2	3	4	5	15 27	102
# de triángulos							

¿Cómo encontraste el # de triángulos <u>blancos</u> que tiene cada una de las etapas?

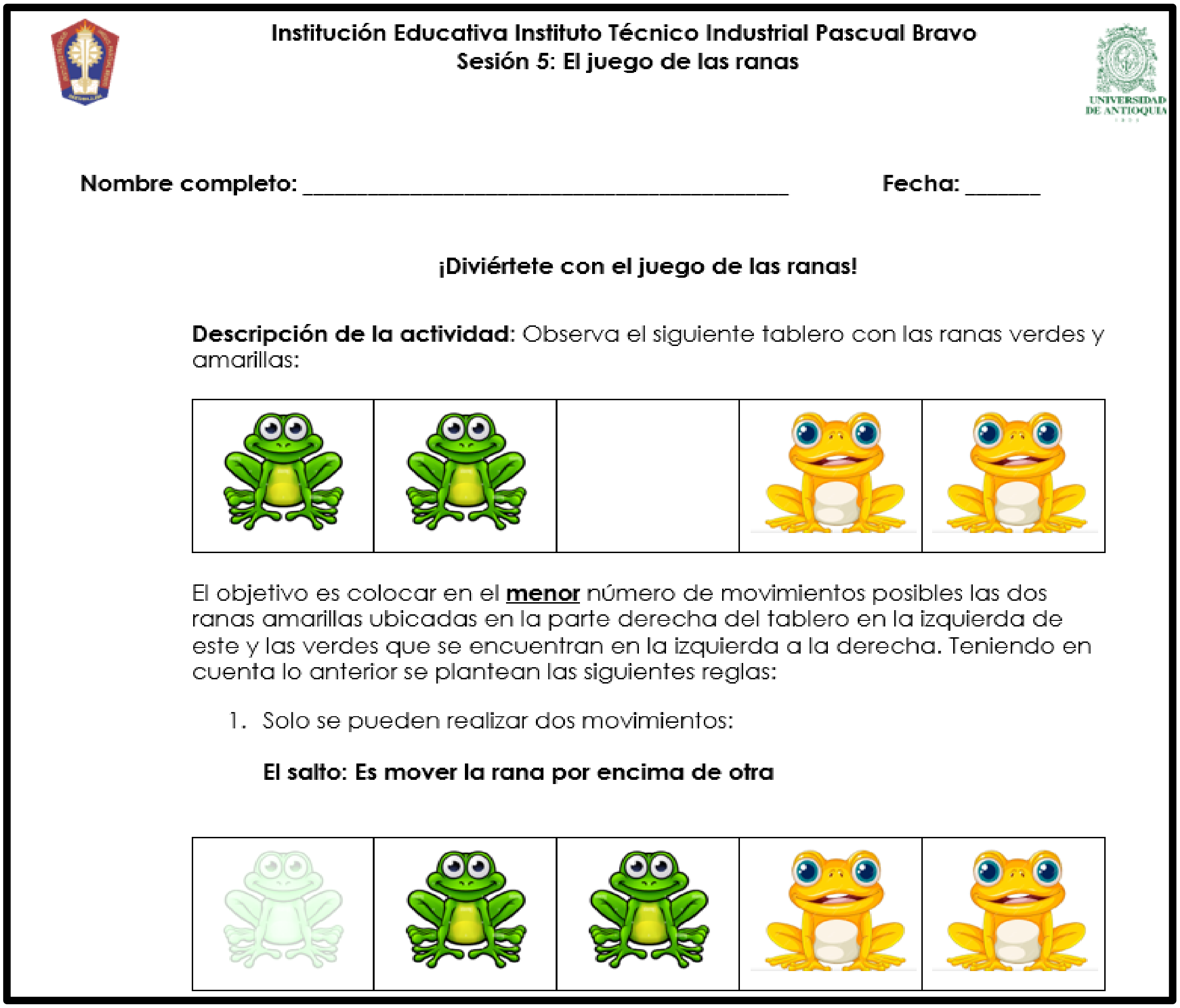
3. ¿Cómo podrías encontrar cualquier etapa **(n)** del triángulo de Sierpinski, construyendo una fórmula matemática que te ayude a expresar la etapa?

4. Escríbele un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de triángulos **<u>blancos</u>** que tiene la etapa 30:

Figura 8. Tarea 4: Triángulo de Sierpinski

3.3.5. Tarea 5: Patrones en los movimientos de las ranas

Esta sesión se basó en realizar un juego llamado “el salto de la rana” donde los estudiantes debían intercambiar dibujos de ranas colocadas sobre un tablero. El tablero consistió en una fila de 13 casillas. En la posición inicial del juego se colocaron ranas de un color en un lado del tablero y otras ranas en el lado opuesto. En este caso colocamos ranas verdes y ranas amarillas. La intención de la sesión fue que el estudiante pudiera ver algún patrón en la secuencia de movimientos necesarios para intercambiar las ranas y de esta manera pudiera describir un método para intercambiar todas las ranas en el mínimo número de movimientos, También, se pretendía analizar como utilizaban lo indeterminado de manera analítica a través de una expresión general. (Ver figura 9 y 10).



Institución Educativa Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo
Sesión 5: El juego de las ranas

Nombre completo: ____ **Fecha:** ______

¡Diviértete con el juego de las ranas!

Descripción de la actividad: Observa el siguiente tablero con las ranas verdes y amarillas:

El objetivo es colocar en el **menor** número de movimientos posibles las dos ranas amarillas ubicadas en la parte derecha del tablero en la izquierda de este y las verdes que se encuentran en la izquierda a la derecha. Teniendo en cuenta lo anterior se plantean las siguientes reglas:

1. Solo se pueden realizar dos movimientos:

El salto: Es mover la rana por encima de otra

Figura 9. Tarea 5: El juego de las ranas

Fuente: Francisco, M (2020). Salto de la rana. Adaptado de: https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/2020/04/27/salto-de-la-rana/

6. Describe el procedimiento que usarías para determinar el número de movimientos para cualquier número de ranas. Explícalo a los compañeros del curso. Prepárate para socializar con el grupo.

7. ¿Cómo podrías encontrar cualquier número de movimientos **(m)** para cualquier número de ranas**(n)**, construye una fórmula matemática que te ayude a expresarlo utilizando la **m** y la **n**

Figura 10. Tarea 5: El juego de las ranas

3.3.6. Tarea 6: Secuencias figurales

En esta tarea se le propuso al estudiante encontrar el número de círculos que había en la figura 5 y 6, también, hallar cualquier término de la secuencia figural que se les presentó a través de una expresión simbólica. La implementación de esta tarea tenía como finalidad que el estudiante lograra descubrir la comunalidad al hallar los términos 5 y 6 de la secuencia figural propuesta y a partir de allí utilizar la indeterminancia de manera analítica para estratificar el pensamiento algebraico. También, analizar los tipos de medios semióticos que fueron utilizados por los estudiantes que permitieron entrever las maneras de comunicar un mensaje a otro compañero y la emergencia del pensamiento algebraico. (Ver figura 11 y 12)

Institución Educativa Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo
Sesión 6: Secuencias figurales

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Nombre completo: ____ **Fecha:**

Descripción de la actividad: Observa las siguientes figuras y analízalas.

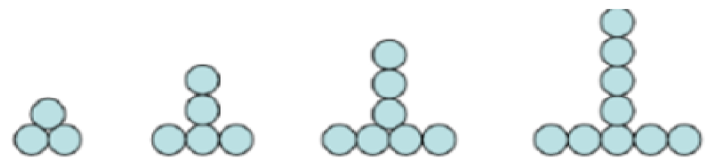


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Preguntas Orientadoras:

1. Dibuja la figura 5 y la figura 6

Figura 11. Tarea 6: Secuencias figurales

Fuente: Rodolfo, V (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. Tomado de: https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano0ay_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf

2. ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100? ¿Cómo lo hiciste?

3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura. Prepárate para exponer en la clase.

4. Escribe una fórmula para encontrar el número de círculos en la figura **n**.

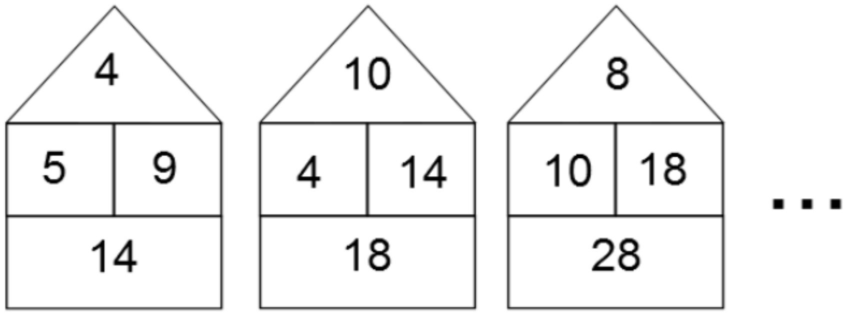
Figura 12. Tarea 6: Secuencias figurales

3.3.7. Tarea 7: Secuencia en la Cabaña de Playa

Esta tarea presentada en la figura 13 se centró en 3 cabañas de playa que formaron una secuencia en sus dos cuadrados del medio, un triángulo en el techo y un rectángulo en el piso, el estudiante debía analizar la secuencia en las 3 cabañas de playa propuestas y responder una serie de preguntas que le permitieron descubrir la regla general que dio respuesta a los números del techo y del piso de cualquier número de cabaña de playa solicitada. Esta tarea indujo a los estudiantes a percibir y explicar patrones y luego generalizar, como cada cabaña de playa tenía varios números vinculados, había diferentes secuencias para analizar y explicar. Además, los estudiantes podían buscar reglas que vincularan los términos de las cabañas a través de una expresión simbólica.

Sesión 7: Secuencia en la Cabaña de Playa

Descripción de la actividad: Estas cabañas de playa forman una secuencia en sus dos cuadros del medio, techo y piso. Analiza la secuencia en la cabaña de playa y responde.



Cabaña 1 **Cabaña 2** **Cabaña 3**

Preguntas orientadoras.

1. Dibuja la cabaña 4 y 5. Justifica como lo hiciste.

2. Si conoces los números de una cabaña, ¿cómo puedes calcular los números de la cuarta cabaña a la **derecha** de ella? ¿O el 10? ¿O el 100...?

3. Si conoces los números de la cabaña 100, deduce la cabaña que está a la izquierda(la 99) y como lo hiciste.

4. Cómo calcular cualquier cabaña. Intenta crear una fórmula para cada número de la cabaña.

Figura 13. Tarea 7: Secuencia en la cabaña de playa

Fuente: Don, S.(s.f.). Number Shacks. Tomado de: https://donsteward.blogspot.com/2013/11/number-shacks.html

3.4. Herramientas de recolección de datos

La recolección de datos se realiza a través de métodos y estrategias que involucran la participación de los equipos de estudiantes y del investigador como observador, para inferir los datos en relación con el tema de estudio a través de diálogos, intervenciones grupales y desarrollos de guías. El investigador como observador y participante fundamental de este estudio cualitativo, es quien precede en el desarrollo de preguntas que sustentan el objetivo de investigación. En "la indagación cualitativa los instrumentos no son estandarizados, sino que se trabaja con múltiples fuentes de datos, que pueden ser entrevistas, observaciones directas, documentos, material audiovisual, etc." (Hernández et al., 2014, p.397). Como se muestra en la figura 14, en la recolección de datos de la investigación se utilizaron entrevistas, grupos de enfoques y documentos, registros, materiales y artefactos.

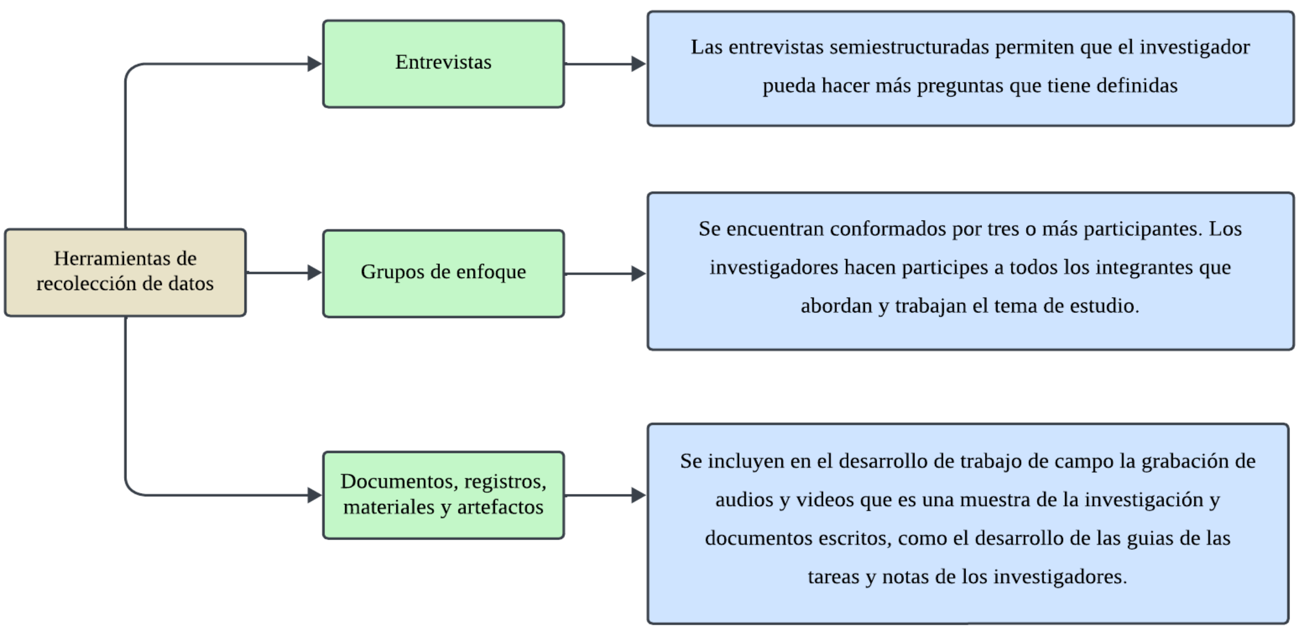


Figura 14. Herramientas de recolección de datos

Adaptado según Hernández et al., 2014

"La triangulación de datos es una herramienta clave, a la que se le atribuye el hecho de utilizar diferentes fuentes y métodos de recolección". (Hernández et al, 2014, p. 418), en la investigación a medida que se hace la observación, se registraron los datos que proporcionaron los estudiantes, a su vez que se establecieron diálogos con los estudiantes en entrevistas que se van grabando en audio y video, lo mismo ocurrió cuando usaron los materiales y las tareas para la ejecución, con ayuda de los registros se analizaron, después de la intervención en cada sesión. En la investigación se utilizó la triangulación de datos como se muestra en la figura 15:

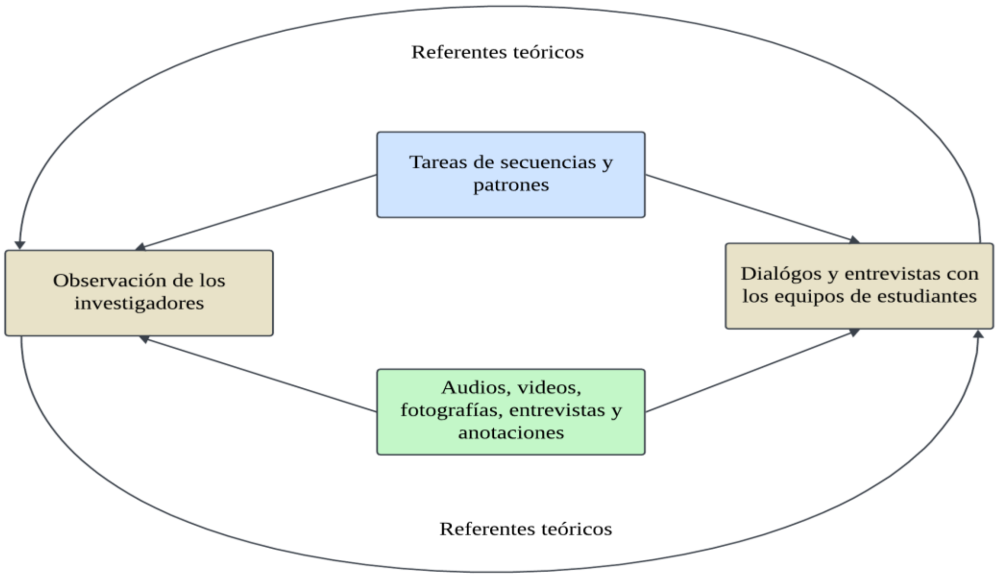


Figura 15. Triangulación de datos

3.5. Fases de la investigación

Para la recolección de la información se realizó el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones. Esta se realizó en cinco fases, como se muestra en la figura 16 a continuación:

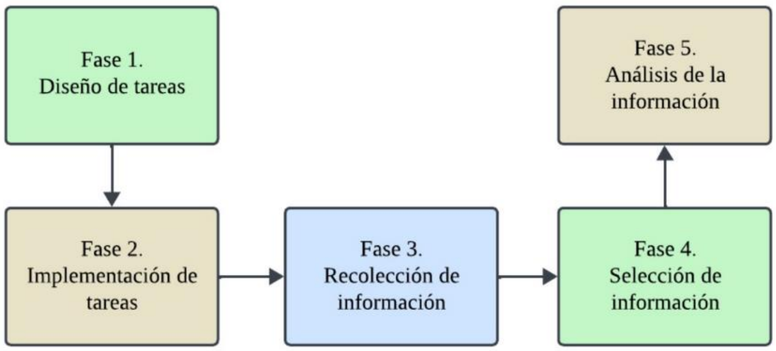


Figura 16. Fases de la investigación

4. Análisis

En este capítulo se presentan los análisis y resultados de esta investigación, que nos da insumos para responder a la pregunta ¿Cómo se relacionan tareas sobre patrones de secuencias con el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes del grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo? Se presentan las tareas desde las categorías emergentes durante el desarrollo de las intervenciones, estas tareas se vinculan con la propiedad de comunalidad y los estratos del pensamiento algebraico. Los estratos del pensamiento se encuentran vinculados con la caracterización del pensamiento algebraico, en las que se realiza un contraste de las tareas desarrolladas con los estudiantes y los cuatro grupos de estudiantes que se eligieron como participantes. Por cuestiones éticas, para el desarrollo de los análisis y resultados se utiliza un pseudónimo por estudiante de los grupos participantes.

Como tarea introductoria al tema de patrones de secuencias se realizó una lluvia de ideas, en la que los estudiantes debían responder con una o dos palabras a la pregunta ¿Qué es un patrón?, en esta actividad los estudiantes de forma individual escribieron sus respuestas y seguido a esto se inició la vinculación con el concepto de que era un patrón, los lugares donde encontramos un patrón, como se relacionan con las matemáticas y en qué momento usamos los patrones. Esta dinámica tuvo como intención contextualizar al estudiante, la cual fue enriquecedora para ellos, ya que expusieron sus ideas dando paso a conocimientos previos que se relacionan con el pensamiento algebraico, ante estos interrogantes los estudiantes respondieron lo siguiente: Serie de número o letras, secuencias repetidas y demás ideas con la socialización de esta dinámica, los estudiantes hicieron especial énfasis en destacar las palabras “siempre” y “orden” que caracterizan la generalización de una secuencia y que fueron importantes en las tareas de las siete sesiones que se presentaron con los estudiantes del grado sexto. Con base al desarrollo investigativo del marco teórico se plantean las siguientes tareas:

4.1.1. Tarea 1. Rompecabezas de patrones

Para el desarrollo de la tarea 1, las investigadoras entregaron a los estudiantes la guía para solucionar y realizar las intervenciones de cómo hallaron el término en común de la secuencia numérica del rompecabezas de patrones que tenían tres líneas de círculos sucesivos, en donde se debía hallar la característica en común en cada línea. Teniendo en cuenta que la secuencia es aritmética, los estudiantes usan una forma aditiva para hallar los números que completan el rompecabezas, encontrando un número en común para cada posición. Utilizan la sucesión de Fibonacci para hallar la secuencia, la característica en común que encuentran es que cada posición es la suma de las anteriores posiciones para completar la secuencia (Ver figura 17). A través del diálogo, los estudiantes expresaron las estrategias que usaron para llegar a estas respuestas, estos diálogos se presentan a continuación.

Entrevista 1

Investigadora: ¿Cómo hallaste el patrón?

Ángel: Como nos habían dicho en las diapositivas que el sistema aritmético era sumar el mismo número en una secuencia entonces cuál es el tipo de patrón, entonces pusimos aritmético y la secuencia era tres.

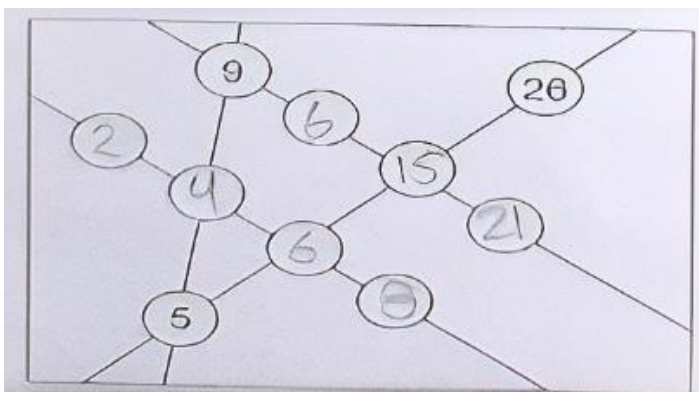


Figura 17. Evidencia equipo 3 y 4 en el desarrollo de la tarea 1

Fuente: Sian, Z. (s.f.). Arithmetic sequence puzzle. Recuperado en https://www.stem.org.uk/resources/elibrary/resource/422011/arithmetic-sequence-puzzle

Entrevista 2

Investigadora: ¿Cómo hallaste el patrón?

Alán: Pusimos que era aritmético porque se suma el mismo número y hacemos lo mismo, se suma 1 + 7 = 8 de ahí 8 + 7 = 15 y así encontramos el valor sugerido.

Los estudiantes, usan los términos anteriores de la secuencia para hallar los demás, escribiendo los números por ensayo y error para construir el rompecabezas que les ayuda a encontrar el patrón. En este primer acercamiento a los patrones no se evidencia explícitamente un tratamiento analítico de los objetos indeterminados, sino una proto- analiticidad. Al no ser la indeterminación parte del discurso, estamos frente a la presencia de un pensamiento factual porque fue hallado por medio de suposiciones y como una simple posibilidad. (Ver figura 18 y 19)

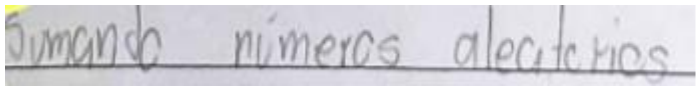


Figura 18. Evidencia equipo 3 y 4 en el desarrollo de la tarea 1

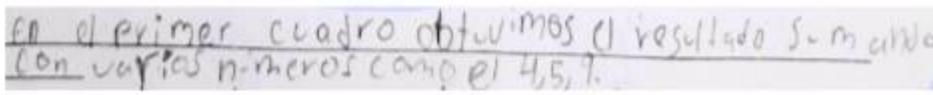


Figura 19. Producción grupo 2, evidencia de presencia de ensayo y error.

4.1.2. Tarea 2. Patrones Rockeros

Para el desarrollo de la tarea 2, las investigadoras les propusieron a los estudiantes realizar una guía con una secuencia rítmica de la canción “We Will Rock You" con ayuda de la percusión corporal. Luego, se les muestra la secuencia rítmica que tuvieron que representar, como se muestra en la figura 20, la cual está compuesta por dos puños y una palmada, dos puños y una palmada y se les pide predecir los diferentes movimientos corporales que debieron realizar en determinada posición (cada movimiento es una posición). Se observa en esta tarea, que los estudiantes identifican una comunalidad en los elementos de la secuencia de patrones al indicar que la palmada se repite cada 6 posiciones, esta regularidad observada fue generalizada a la posición 15 y 20, a partir de allí utilizan estas posiciones. Aunque los estudiantes del equipo 1, 2, 3 y 4, aún no utilizan signos alfanuméricos, se evidencia que están pensando algebraicamente y se encuentran en la zona de emergencia de pensamiento algebraico fáctico, al utilizar la formulación lingüística “**siempre va a ser puño si se cuenta de 20 en 20**”

Entrevista 1

Investigadora: Entonces, ¿Cómo llegaste a la posición 99?

David: Llegamos a la posición 20 porque sumamos de 6 en 6 y cuando llegamos a la posición 20 contamos de 20 en 2 siempre va ser puño, puño, puño hasta llegar a la posición 100 y le quitamos 1.

Entrevista 2

Investigadora: Si tuvieran que encontrar la posición 150 ¿cómo lo harían?

David: Contando desde el 100, sumamos otras 50 posiciones y así hallamos el 150 que da puño, con esto el 50, el 100 y el 150 siempre va a ser el puño porque se cuenta de 50 en 50.

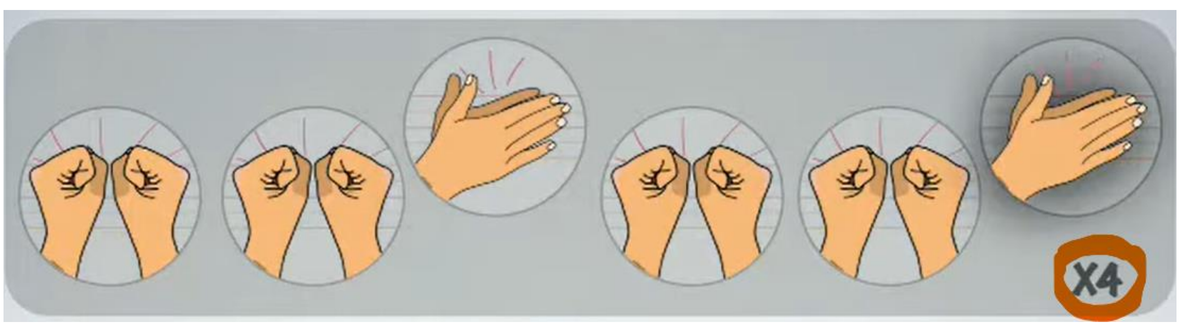


Figura 20. Secuencia presentada en la tarea 2.

Tomado de: Canal del profe (23 de junio de 2021). Ritmograma We will rock you. [Archivo de Vídeo]. [*https://www.youtube.com/watch?v=xshgioG7zjE*](https://www.youtube.com/watch?v=xshgioG7zjE)

Los estudiantes del equipo 1, 2, 3 y 4, identifican una comunalidad en los elementos de la secuencia de patrones al indicar que una determinada posición se repite en cada uno de los múltiplos de esa posición, esta regularidad observada fue generalizada a la posición 20, 40, 60, 90, 100, 150, a partir de allí utilizan estas posiciones como referencia para encontrar las demás. La regularidad es generalizada al comprender que tomando de referencia cualquier posición, pueden hallar los múltiplos de esta posición encontrando que en cada uno de los múltiplos se repite el movimiento de percusión tomado como referencia, así el estudiante puede encontrar cualquier término de la secuencia. A través de recursos semióticos, los estudiantes utilizan signos indexicales al realizar varios señalamientos que recorren deslizando el dedo índice sobre cada una de las posiciones, esto les permite objetivar la generalidad encontrada. (Ver figura 21)

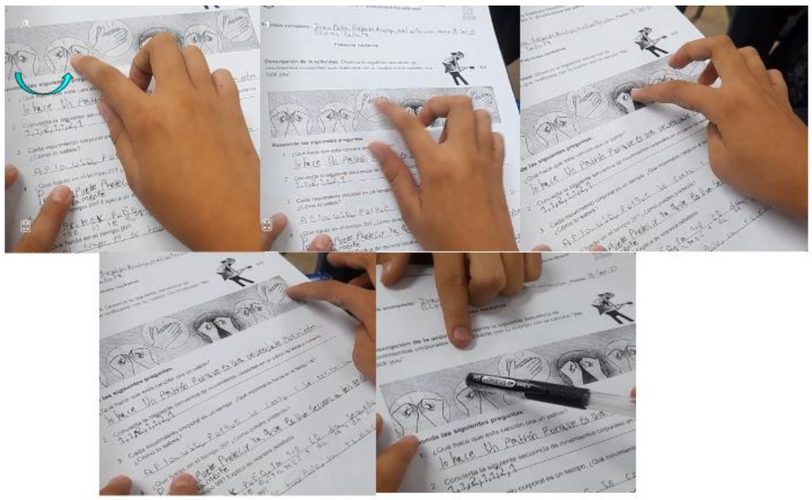


Figura 21. Medios semióticos movilizados por los estudiantes

4.1.3. Tarea 3. Pulsera numérica

Para el desarrollo de la tarea 3, las investigadoras les presentaron a los estudiantes las guías junto a unas cuentas de colores, en donde ellos debían de construir una pulsera siguiendo la secuencia a partir de los números que elegían. Esta tarea fue creativa y centró la atención de los estudiantes por construirla, durante las sumas repetitivas que hacían para pasar de una cuenta a otra, según el color que iban obteniendo. La comunalidad que presentan los estudiantes para hallar el patrón de estas secuencias es basarse en primer lugar en las cuentas que deciden tomar y de cómo deben llegar después de hacer las sumas sucesivas a esas cuentas iniciales que tenían, destacando que la posición de los colores de la pulsera se dirige a una secuencia aritmética, que depende de la cuenta anterior para saber cuál seguía.

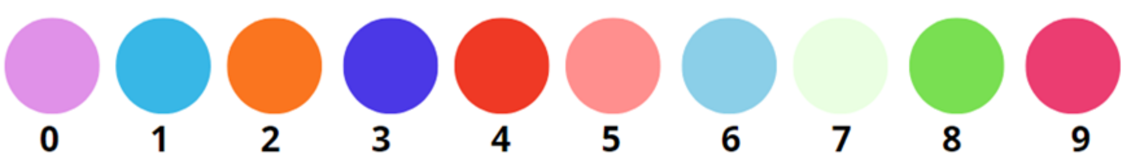


Figura 22. Cuentas de la tarea 3.

Debido a la diversidad que tiene la construcción de la manilla y las diferentes combinaciones que hicieron los estudiantes, el reconocimiento de la secuencia sobre el pensamiento algebraico depende de las cuentas que eligieron, se logró visualizar que la generalización de la secuencia no fue posible, ya que el estudiante utilizó términos anteriores para hallar los demás. Se evidenció un pensamiento factual, el cual se encuentra basado en una abducción que se queda en una posibilidad más que en una generalización algebraica. El uso de materiales manipulativos como las cuentas ayuda a los estudiantes a vincular medios semióticos como señalar con los dedos cómo se construye la pulsera y como se fueron apropiando del discurso para reconocer y dar a entender la idea de secuencia.

4.1.4. Tarea 4. Triángulo de Sierpinski

Para el desarrollo de la tarea 4, nos vamos a detener en el análisis de las fases del triángulo de Sierpinski, para indagar sobre la emergencia del pensamiento algebraico simbólico, desde la secuencia de este fractal, que es tan conocido y que su construcción se sustenta en que a partir de la primera fase, el cuál es un triángulo equilátero, se puede dividir en cuatro triángulos que son iguales y que tienen de diferente a su primera fase es que no se tiene en cuenta el triángulo central (de color negro) sino que se analiza a partir de los triángulos que están a su alrededor (de color negro), de esto los estudiantes infirieron y expresaron sus ideas en la guía que las investigadoras les entregaron y que dan cuenta de esa idea de lo común y cómo podemos estratificar el pensamiento.

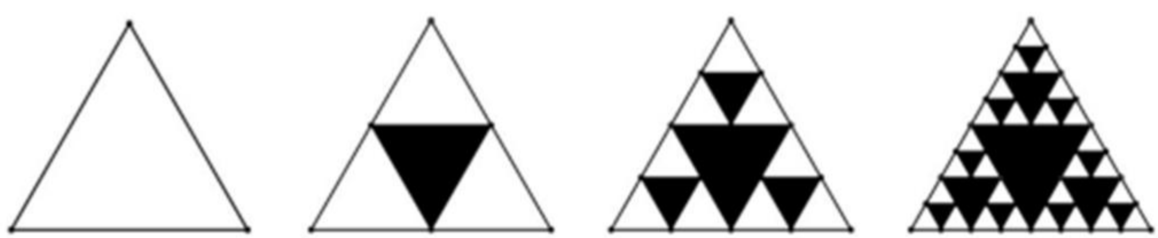


Figura 23. Secuencia presentada en la tarea 4.

En el desarrollo de esta tarea, se evidencia la movilización del recurso semiótico deíctico temporal “siempre” para referirse a la regularidad encontrada. Al preguntarle a los grupos de trabajo por la característica común que tienen los triángulos, el grupo 2 indica: “El número de triángulos blancos **siempre** va a ser múltiplo de 3”, Simón del grupo 3 por su parte reconoce que por cada triángulo blanco hay 3 triángulos negros, indicando que **siempre** se va a tener que multiplicar por 3. Los equipos en general concluyen que la característica principal es que todos los triángulos se multiplican por 3. En el equipo 1, 2, 4 no es utilizada la analiticidad porque no es llevada a los términos de toda la secuencia, sino a términos particulares, usando el resultado de la etapa anterior para multiplicarla por 3 **(regularidad)**, se evidencia una proto-analiticidad. (Ver figura 24)

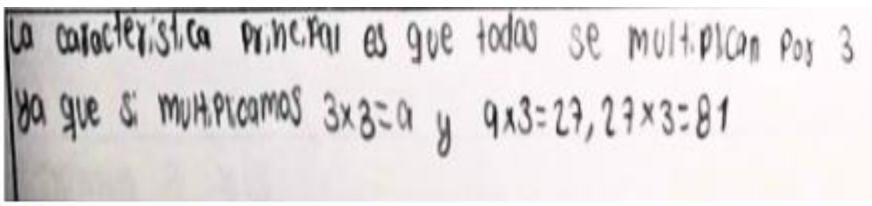


Figura 24 Evidencia de analiticidad intuida en el grupo 1,2 y 4

En el equipo 3 por su parte**,** la indeterminación fue utilizada de manera analítica porque fue llevada a los términos de toda la secuencia, encontrando la fórmula general que les permitió llegar a cualquier fase del triángulo de Sierpinski, esta fórmula es: 3 elevado a la n, donde n es la posición de cada etapa y el número 3 la cantidad de triángulos que se dividen con respecto al triángulo anterior de la secuencia (ver figura 27), son utilizados los términos deícticos espaciales, al describir, de forma contextual, objetos en el espacio(ver figura25), los estudiantes por medio del discurso expresan la indeterminación aunque no llegue a lo simbólico con una construcción de una expresión general. Las posiciones de la secuencia parte de la posición 0 y así sucesivamente (ver figura 26).

Figura 25. Gestos señaladores acompañados de palabras como “siempre”.

Etapa	^{0} 1	^{1} 2	^{2} 3	^{3} 4	^{4} 5	^{8} 15	^{6} 27	^{9} 102
# de triángulos	1	3	9	27	81	19.683	118.098	826.686

Figura 26. Tabla de las fases del triángulo de Sierpinski

encontramos la respuesta elevando potencia por cada etapa que hay elevado a la 3

Figura 27. Pensamiento contextual de la construcción de la fórmula

4.1.5. Tarea 5. Patrones en los movimientos de las ranas

Para el desarrollo de la tarea 5, se propone encontrar el patrón a través del movimiento de las ranas y de la cantidad de ranas que se usen. En la que el posible menor número de movimientos de las ranas le permitió al estudiante llegar a una expresión general, con cuál pudo hallar los movimientos según la cantidad de las ranas.

En el equipo 1 y 2, los estudiantes no encontraron la característica en común, debido a que solo usaron algunas ranas para encontrar la cantidad de movimientos que debían de hacer para moverlas todas. Los estudiantes del equipo 2 y 4, hallaron la comunalidad de la secuencia que se presenta según la cantidad de ranas y los movimientos que se hacen, para así llegar a una expresión general que les permitiera hallar con cualquier número de ranas, los movimientos que se hacen según la reglas que se presentan para su desplazamiento como se menciona en el diseño metodológico, en este caso los estudiantes resaltan que se debe de repetir 3 veces el número de ranas que están movimiento, como se evidencia en el diálogo.

Entrevista 1

Investigadora: ¿Cómo hago para encontrar el número de movimientos que necesito para 24 ranas?

Simón: Debemos sumar del 1 al 24: 1+2+3+4… cuando lleguemos al 23 debemos repetir 3 veces el número 24 que es el número de ranas pedido, luego de poner los 3 dígitos nos devolvemos hasta el 1 y así encontramos el número mínimo de movimientos.

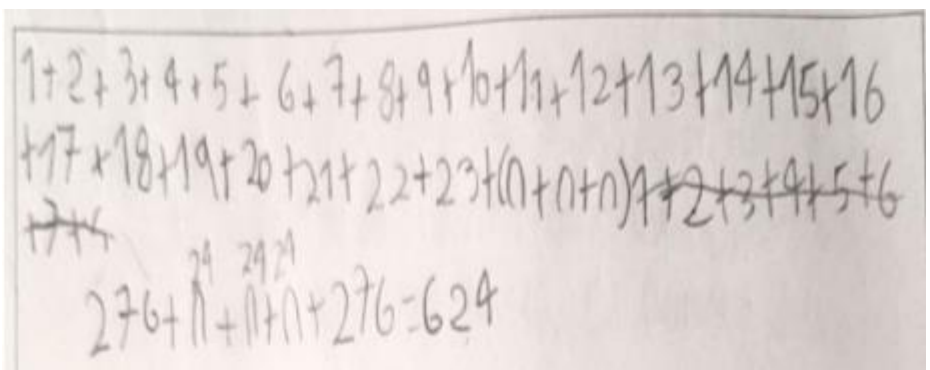


Figura 28. Construcción de la expresión general para encontrar el movimiento de las ranas según su cantidad.

Los estudiantes evidencian un pensamiento algebraico simbólico porque representan el número mínimo de movimientos que se necesitan con cualquier número de ranas a través de símbolos alfanuméricos, suman del 1 hasta el número de ranas dadas, por ejemplo, con 24 ranas suman del 1 al 23 y repiten el 24 tres veces y a esto le llaman 3n. Luego, suman del 23 al número 1. Llegando a una expresión general, en donde la analiticidad se encuentra presente llegando a una generalización algebraica. Como se presenta en la entrevista y en la figura 12.

Entrevista 2

Investigadora: ¿Qué procedimiento usarías para encontrar el número de movimientos mínimos para cualquier número de ranas?

Ana: Sumamos del 1 hasta el número de ranas pedido y le sumamos 3n lo podemos representar así, **n** es el número de ranas y luego nos devolvemos hasta el 1, sumándolos.

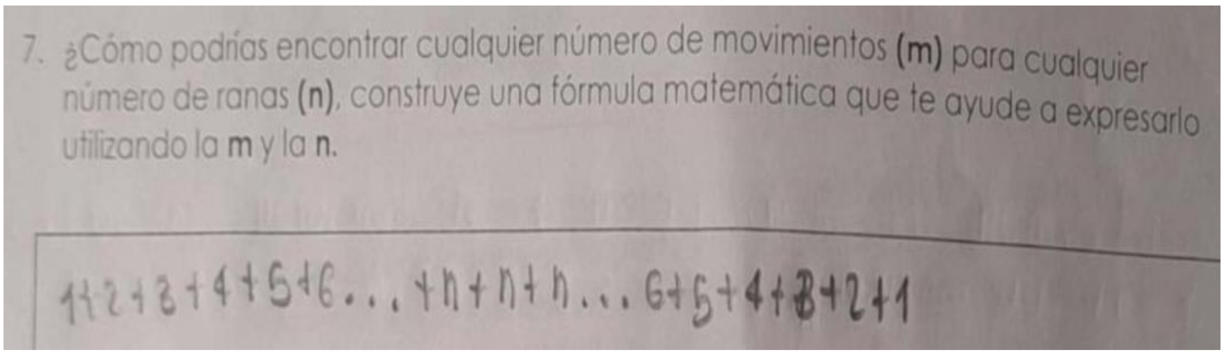


Figura 29. Pensamiento algebraico simbólico

4.1.6. Tarea 6. Secuencias figurales

Para el desarrollo de la tarea 6, los estudiantes identificaron la regularidad que se presenta en la secuencia (ver figura 30). El equipo 1 realiza la formulación lingüística: "En las bolitas de abajo **siempre** se le va a sumar 1 y en las de arriba **siempre** va a tener el número de bolitas que indica la figura". En el equipo 2, los estudiantes lograron objetivar una regularidad encontrando que el número de bolitas de arriba y abajo de cualquier figura es el número de la figura por 2 más 1. Los equipos 3 y 4 utilizan términos deícticos espaciales para referirse que **abajo** siempre hay una bolita más que el número de la figura y **arriba** hay exactamente el número de bolitas indicado en la figura, a la par que utiliza signos indexicales para mostrar el número de bolitas que tiene cada figura arriba y abajo (ver figura 31)

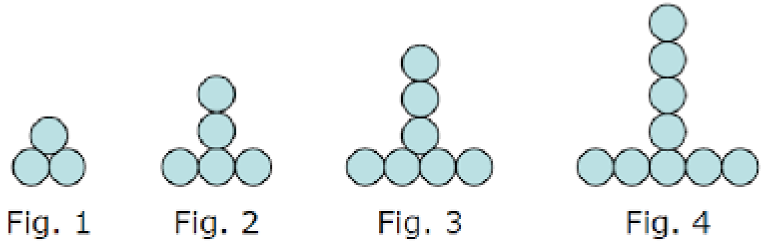


Figura 30. Secuencia figural presentada en la tarea 6

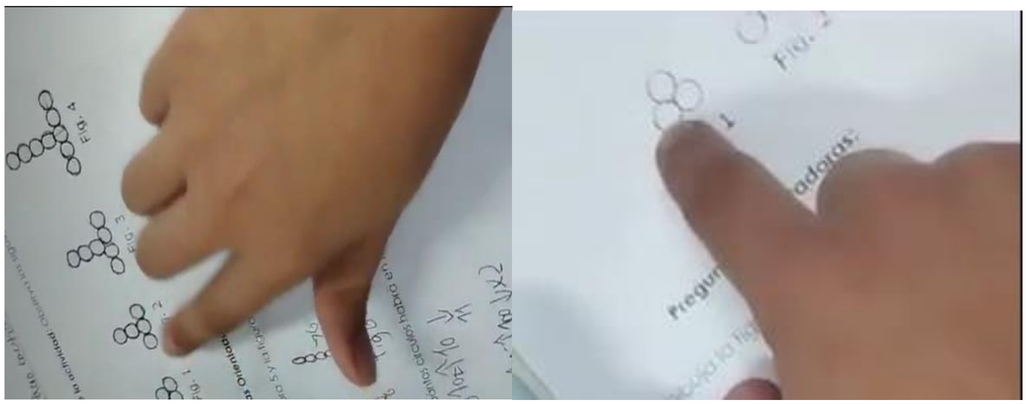


Figura 31. Signos indexicales para mostrar el número de bolitas de arriba y abajo.

Los equipos analizados reconocen el papel que tiene el número de la figura en relación con el número de círculos que hay en la parte de abajo. Se evidencia un pensamiento contextual porque la indeterminación alcanza el nivel del discurso con términos como “arriba” y “abajo”. Los estudiantes no llegan a generalizar todos los términos de la secuencia, ya que no encuentra una expresión general para cualquier término de la secuencia, solo se hace particular a cada figura, aunque se destaque la comunalidad en el patrón que presenta la secuencia. Esto lo podemos evidenciar en las entrevistas que se dieron con base al diálogo durante el desarrollo de la tarea.

Entrevista 1

Investigadora: ¿Cómo hago para encontrar cualquier figura?

Simón: Abajo siempre debe haber una bolita más que el número de la figura y arriba siempre está el número de la figura**.**

Entrevista 2

Investigadora: ¿Cómo es entonces la figura 200?

Simón: Abajo 201 y arriba 200 porque abajo siempre debe haber uno más que en el número de la figura.

4.1.7. Tarea 7. Secuencia en la Cabaña de Playa

Para el desarrollo de la tarea 7, se les propuso a los estudiantes una secuencia que vinculaba las operaciones de suma y resta para hallar el patrón, estas cabañas presentan en el techo el número que da como resultado de la resta de los números de los cuadros intermedios y el piso es el resultado de la suma de los números de los cuadros intermedios como se presenta en la figura 32 a continuación:

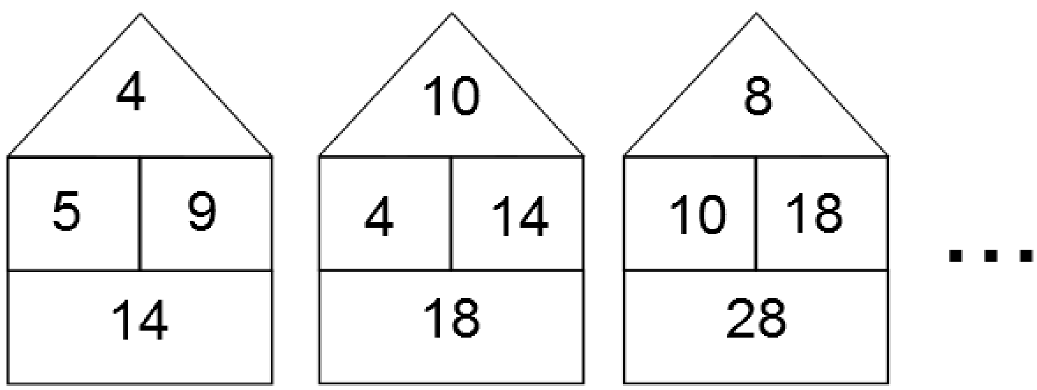


Figura 32. Cabañas de playa Fuente: Don, S.(s.f.). Number Shacks. Tomado de: https://donsteward.blogspot.com/2013/11/number-shacks.html

Los estudiantes del equipo 1, 2, 3 y 4, hallaron la comunalidad del patrón en cada una de las cabañas, a partir de la cabaña 1, los estudiantes llegaron a deducir que sumando y restando los números en los cuadros intermedios se obtienen el techo y el piso, después de completar esta cabaña se obtiene las demás ya que algunos números se repetían en la siguiente cabaña, ya que los números del techo y el piso de la cabaña 1 pasan a ser los cuadros intermedios de la cabaña 2 y así sucesivamente.

El equipo 1, llegó al estrato del pensamiento simbólico, ya que, a través de la construcción de una fórmula, lograron establecer una expresión general, en donde lo indeterminado fue tratado de manera analítica donde la propiedad en común fue generalizada a través de una expresión que contiene signos alfanuméricos del álgebra.

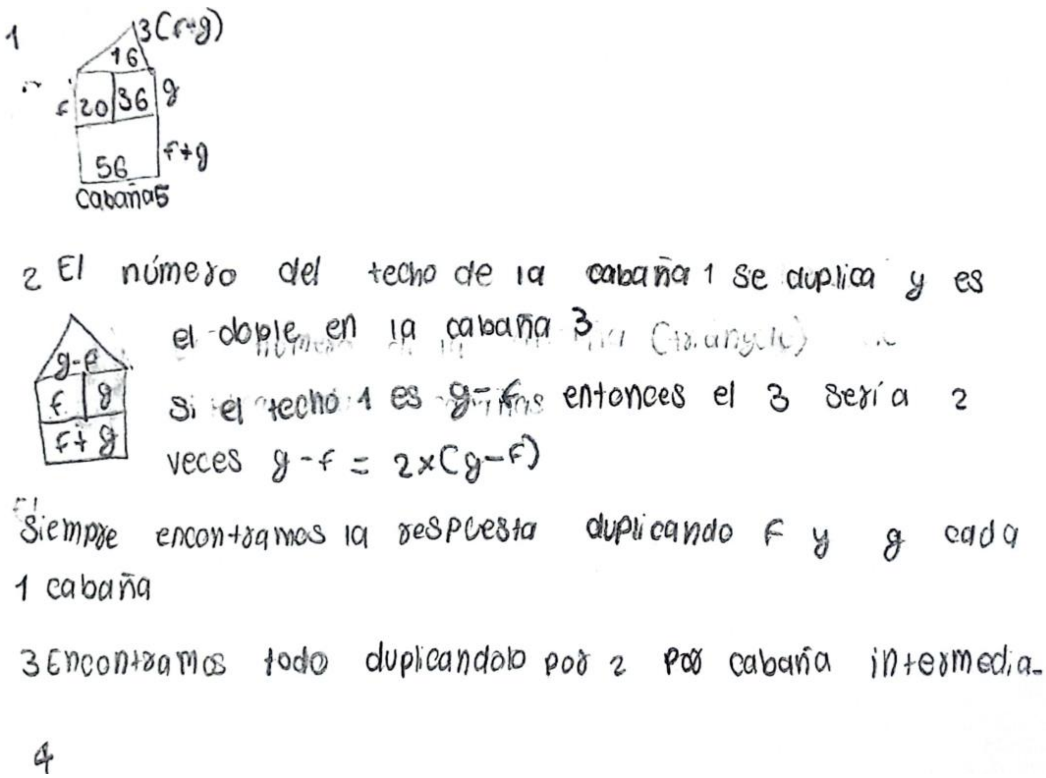


Figura 33. Expresión general de la tarea 7

En general, nuestro interés en el análisis se centró en el proceso de emergencia del pensamiento algebraico en los estudiantes, en aras de responder nuestra pregunta de investigación. Pudimos evidenciar la movilización de varios recursos semióticos que ayudaron a objetivar el conocimiento matemático y que permitieron dilucidar las categorías emergentes en el análisis, la comunalidad y los estratos del pensamiento algebraico, en donde los medios semióticos son un recurso para comunicar, identificar y reconocer las tareas de patrones de secuencias.

5. Conclusiones

5.1. Consideraciones con respecto a la pregunta de investigación

Las tareas sobre patrones de secuencias permitieron evidenciar que se relacionan con el pensamiento algebraico, donde se establecen y se ubican en uno o varios de los estratos del pensamiento algebraico que se vincula con los niveles del pensamiento algebraico. Los estudiantes exploraron diversas formas de manifestar este pensamiento a través de medios semióticos que fueron apoyo para representar y objetivar el conocimiento matemático. Además, se identificó que los estudiantes usan palabras claves con las que evidencian en el discurso un acercamiento para comprender e interpretar la comunalidad en las secuencias, como lo establece Radford (2013) en las categorías para llegar a la generalización de patrones en relación con el pensamiento algebraico.

Se reafirma la relación con los estratos del pensamiento algebraico con base a la caracterización del mismo; si bien los estratos del pensamiento que propone Radford (2013) reportan una avance en la configuración del pensamiento algebraico y su relación con los estratos, se evidenció que algunos equipos de estudiantes podían llegar en una de las tareas a un nivel contextual y en otra llegar solo al nivel factual, lo que da a entender que el pensamiento algebraico no se construye de manera lineal sino que este depende principalmente de que los estudiantes encuentren esa propiedad de comunalidad para que así pueda conectar con el pensamiento contextual y simbólico, también que el estudiante con una tarea puede transitar de un pensamiento factual a contextual y viceversa. Estos estratos se soportan de unos medios semióticos que fueron usados en la investigación, a través de: signos indexicales, formulaciones lingüísticas y deícticos espaciales. Apoyando las construcciones de los estudiantes y complementando las ideas matemáticas que deseaban expresar.

Las tareas se relacionan con el pensamiento algebraico porque se evidencia la construcción de expresiones generales por parte de los estudiantes, después de encontrar el patrón como una regla que erige cualquier término de la secuencia, como parte de la relación de la generalización de un patrón.

5.2. Consideraciones con respecto al objetivo de investigación

La investigación tuvo como objetivo analizar cómo se relacionan las tareas sobre patrones de secuencias con el pensamiento algebraico en el grado sexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo. En relación con el propósito de la investigación se evidenció la importancia de construir e implementar tareas que busquen promover el pensamiento algebraico para que ese tránsito entre la aritmética y el álgebra se dé de forma armoniosa, por ello se busca el diseño y adaptación de tareas que estuvieran direccionadas hacia el desarrollo de patrones de secuencias, pues algunos estudios reportan que estos pueden permitir un tránsito no abrupto entre ambos pensamientos. En el trabajo de campo se reconoció que situar una tarea en uno de los estratos del pensamiento algebraico daría lugar para establecer relaciones con lo que se esperaba que los estudiantes debían identificar en esta, es por esto que se propusieron tareas de secuencias aritméticas y figurales que tenían énfasis en los estratos del pensamiento, pero estos se fueron dando de manera espontánea en los equipos de trabajo.

Las preguntas planteadas en las tareas tenían como propósito relacionar el pensamiento algebraico con las tareas sobre patrones de secuencias, lo que logró que los estudiantes usarán la variable n en una expresión simbólica para encontrar cualquier término de la secuencia. La orientación de las preguntas da cuenta de que la intencionalidad de las tareas debe fomentar que los estudiantes indaguen, identifiquen y reconozcan el patrón en las secuencias para así relacionarlo con las posiciones y las figuras de estas. Además de esto, hay que destacar que la estructura de las preguntas tiene gran influencia en lo que compete analizar los niveles del pensamiento algebraico. Las secuencias que se les propusieron, permitieron evidenciar habilidades perceptivas en los estudiantes para identificar las siguientes posiciones de las secuencias, lo que da cuenta de que esa construcción del pensamiento se da con el apoyo de medios semióticos, como lo hicieron las imágenes, donde a partir de estas, los estudiantes señalaban e identifican con sus dedos la regularidad encontrada, tapando los elementos de la secuencia como guía para establecer puntos de relación con las preguntas de las tareas.

El análisis permitió observar que los equipos de estudiantes de manera discursiva dotaban de sentido los estratos del pensamiento, al usar palabras como “siempre”, “añadir dos más”, “poner círculos arriba y abajo”. Con base en esto, destacamos la relevancia de abordar en este trabajo investigativo la teoría de Radford, que fue fundamental para la construcción de la idea de tareas, de lo que se vincula con un patrón y cómo se puede caracterizar y estratificar el pensamiento algebraico.

5.3. Perspectivas de investigación

La implementación de las tareas de patrones de secuencias fue motivante y capturó la atención de los equipos de estudiantes, el uso de estas tareas permitió el desarrollo de habilidades matemáticas, como la resolución de problemas, el cálculo y el uso de variables, características que hacen parte del pensamiento algebraico y que fueron exploradas de manera progresiva en la complejidad de las tareas. Abordar el pensamiento algebraico desde la perspectiva del álgebra temprana en el grado sexto fue el inicio en el campo del álgebra para los estudiantes, ya que se exploraron en secuencias aritméticas y secuencias figurales, que permitieron evidenciar que el tránsito de la aritmética-álgebra se dio de una forma más cómoda e intuitiva para los estudiantes, no fue un proceso forzado, sino que a través del trabajo en las tareas se fue construyendo de manera paulatina.

Trabajar desde grados iniciales el pensamiento algebraico permite que los estudiantes se relacionen con variables que son indeterminadas y que requieren ser tratadas de forma analítica. Desarrollar tareas que requieren el uso de material manipulativo, permitió que los estudiantes se interesaran por aprender y reconocer patrones en las secuencias, despertando en ellos la curiosidad por explorar cuando se les planteaban preguntas como: ¿Cómo sería la figura n de la secuencia? Por esto se considera importante proporcionar a los estudiantes instrumentos para desarrollar las tareas para que así puedan manipularlos y establecer relaciones con los objetivos de las tareas, este fue un punto importante para llevar a cabo las tareas que fueron potenciales en el grado sexto.

La utilización de medios semióticos por parte de los estudiantes es crucial para expresar el conocimiento matemático. Por lo tanto, es fundamental conectar estos medios con las tareas matemáticas. Estas no solo deben centrarse en que los estudiantes puedan recitar un concepto teórico, sino en que puedan construirlo a través de su propio discurso. Esos peldaños de conocimiento que se van fortaleciendo en las habilidades matemáticas que van consolidando en el pensamiento algebraico, que posibilitará que en grados superiores se puedan enlazar a términos abstractos y complejos que competen al álgebra escolar.

5.4 Limitaciones de la investigación

El trabajo de investigación tuvo algunos limitantes, el primero de ellos fue el desarrollo de las tareas, si bien se realizó una previa planeación y preparación para estas, en algunas ocasiones debido a reuniones y eventos institucionales del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, se debieron posponer. En segunda instancia, por cuestiones de tiempo, algunos equipos no lograron responder todas las preguntas de las tareas, las cuales tenían un enfoque práctico, discursivo y argumentativo enfocado en la búsqueda de fórmulas y expresiones generales que dieran cuenta del pensamiento algebraico simbólico. Además de esto, se identificó, en algunos equipos, que en las tareas presentaban poco sentido de pertenencia por el material manipulativo recibido, el cual tenía la intención de hacer amena la dinámica en vinculación con los medios semióticos.

Un aspecto importante que se identificó fue que para el lenguaje natural que manejan los estudiantes algunos términos matemáticos como la posición, la figura y la fase que se presentaban en las tareas, se tornaron un poco complejos y decisivos para la construcción del patrón de la secuencia, resaltando la importancia de abordar en estudios posteriores tareas que acerquen a los estudiantes a estos conceptos para que puedan deducir términos de las secuencias, partiendo de lo particular para llegar a lo general. En el uso de las guías, se evidenció falta de comunicación asertiva entre algunos equipos, esto indica que se deben proponer tareas previas que se enfoquen en la vinculación y construcción de la comunicación efectiva para que se puedan llevar a cabo de forma exitosa las tareas que se plantean.

5.5 Líneas futuras de investigación

Destacando el trabajo con las propiedades que propone Radford en donde se vincula la comunalidad como característica de lo común, se recomienda abarcar las tareas de patrones de secuencias con el ciclo de la generalización de patrones para próximas investigaciones, ya que se evidenció que es una forma de establecer relaciones con los estratos del pensamiento. Se convirtió en un instrumento para las categorías que emergieron en el análisis y que dio cuenta de los hallazgos en el desarrollo de las tareas de patrones de secuencias, en donde se va concretando el nivel de pensamiento algebraico de la indeterminación, la analiticidad y lo simbólico. También trabajar con material manipulativo, debido a que se destaca como un instrumento potencial y predominante en el desarrollo de las tareas y la exploración de patrones. Donde se puedan plantear tareas secuencias que emergen de otras dinámicas que se vinculen con posiciones, movimientos y figuras.

5.6 Recomendaciones generales

Para futuras investigaciones se recomienda hacer énfasis en las indicaciones para la resolución de las preguntas de las tareas de patrones de secuencias, ya que se logró evidenciar que algunos equipos de estudiantes escribían lo que pensaban de forma rápida sin especificar en el contenido de la tarea y de la pregunta, sino que pasaron por desapercibido y desviaron su atención en algunos elementos que eran fundamentales para las tareas de la investigación. Otra recomendación, sugiere trabajar en tareas que se enfoquen más en las secuencias figurales, pues estas fueron potenciales en la construcción de expresiones generales y fórmulas algebraicas de las secuencias, pues se evidenció la deducción de más generalizaciones a través de estás que a través de las secuencias aritméticas.

Una recomendación adicional, apunta a proponer tareas que estimulen el desarrollo perceptivo de los estudiantes para hallar el patrón en la secuencia. Aunque se explicaba cómo interpretar la secuencia se debe enfatizar en reconocer el patrón. El material manipulativo representó motivación en ellos. También, prestar especial atención en los medios semióticos que movilizan a los estudiantes para comprender los contenidos matemáticos, que, aunque se vinculan específicamente a la Teoría de la Objetivación de Radford, es un instrumento para trabajar en la educación matemática y en el aula de clase. Reconocer cómo mueven los dedos, cuando señalaban un número, letra o elemento que dota de sentido y significado los ejercicios o problemas que se esté resolviendo, esto influye en las interpretaciones y en el reconocimiento que tienen los estudiantes en las tareas de patrones de secuencias y que dan cuenta del pensamiento algebraico.

Referencias

Bayona, L. (2021). Generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria (con edades de 10 y 11 años). [Tesis de doctorado, Universidad Santo Tomás] https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/34520/2021BayonaLiliana.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Butto, C., & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. Educación Matemática, 22(3), 55-86.

Callejo, M., García-Reche, Á., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. Avances de Investigación en Educación Matemática, 10, 5-25.

Canal del profe (23 de junio de 2021). Ritmograma We will rock you. [Archivo de Vídeo]. https://www.youtube.com/watch?v=xshgioG7zjE

Carmona, A., & Velasco, M. (2018). Características del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto grado de la educación básica a partir de tareas sobre generalización de patrones. [Tesis de Maestría, Universidad del Valle] https://hdl.handle.net/10893/19400

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). El impacto de dos tipos diferentes de tareas instruccionales en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los estudiantes. Journal for the Study of Education and Development, 1–50.

Don, S.(s.f.). Number Shacks. Tomado de: https://donsteward.blogspot.com/2013/11/number-shacks.html

Francisco, M (2020). Salto de la rana. Adaptado de: https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/2020/04/27/salto-de-la-rana/

Gómez, J. (2013). La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo (Doctoral dissertation, Universidad Pedagógica Nacional).

González, Á., & Velandia, A. (2017). Procesos de generalización en la iniciación al álgebra escolar: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (Doctoral dissertation, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).

Kabuto, B. (2009). El uso del color como recurso semiótico en los intentos iniciales por formar signos. ECRP: Investigación y Práctica de la Niñez Temprana, 11(2).

Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. In: Kieran, C. (eds) Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs.

Lasprilla, A., & Camelo, F. (2012). Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados. Colombian Applied Linguistics Journal, 14(2), 35-50.

Márquez, M., & Soriano, M. (2007). Desarrollando el Pensamiento Algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas. [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán]. https://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcjm2x1

Marilyn,B (1992). The Number Bracelets Game. Adaptado de: http://www.geom.uiuc.edu/~addingto/number_bracelets/number_bracelets.html

Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia, 2(1), 24–40. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Matemáticas. Bogotá, Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-116042.html

Orellana, R., & Santiago, M. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 17(3), 239-264.

Pincheira H., Nataly, & Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. Educación matemática, 33(1), 153-180.

Pérez, R. (2022). Pensamiento algebraico, conocimiento y actividades basadas en patrones para la transición de primaria a secundaria. [Tesis de Maestría, Universidad de Vallodolib].

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities.PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática,4(2), 37-62.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277.

Ramírez, S. (2017). Generalización de patrones: una forma de desarrollar el pensamiento algebraico. Recuperado de: http://hdl.handle.net/11349/7009.

Rojas, P.; & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En Gallego, Adriana Patricia (Ed.), Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 760-766). Barranquilla: Universidad Distrital.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., & Mora, L. (1999). La Transición aritmética-álgebra. Grupo Pretexto. Gaia: Bogotá.

Sian, Z. (s.f.). Arithmetic sequence puzzle. Recuperado en https://www.stem.org.uk/resources/elibrary/resource/422011/arithmetic-sequence-puzzle

Solar, H. (2016). Orientaciones para el desarrollo de patrones. Uno revista de didáctica de las matemáticas, 45-52.

Valenzuela, J., & Gutiérrez, V.. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. Educación matemática, 30(2), 49-72

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas] http://hdl.handle.net/11349/2608

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA, 9(3), 193-215.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas] https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/algebra_escolar_y_pensamiento_algebraico_aportes_para_el_trabajo_en_el_aula.pdf

Zapatera, A. (2022). La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria. *Educación Matemática*, *34*(2), 134-152.