UNA NOTA SOBRE UN RESULTADO DE EIDELHEIT

por

PEDRO PEREZ CARRERAS[1] y JOSE BONET[2]

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Mediante espacio entenderemos espacio vectorial topológico separado localmente convexo. Si A es un subconjunto de un espacio E, $[A]$ denotará su envoltura lineal. Si E y F son espacios, $E \otimes_\pi F$ será el producto tensorial $E \otimes F$ dotado de la topología proyectiva y $E \hat{\otimes}_\pi F$ su complección. Un espacio E se dice Baire-like si siempre que sea unión creciente de una família numerable de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados, uno de ellos es 0-entorno. Un espacio E es casi-Baire si es tonelado y no se puede escribir como la unión creciente numerable de subespacios cerrados propios raros. Ambas definiciones aparecen en (10).

Un conocido resultado de Eidelheit (2) afirma que todo espacio de Fréchet que no sea Banach posee un cociente topológicamente isomorfo al producto numerable de rectas ω (una prueba de este hecho, utilizando la teoría de la dualidad, puede encontrarse en (6),p. 435). Todo espacio metrizable tonelado es obviamente en subespacio de un espacio de Fréchet.

Proposición 1. *Todo subespacio de codimensión finita de un espacio de Fréchet no normable posee un cociente isomorfo a ω.*

Demostración: Consideremos, en primer lugar, los hiperplanos de $E = \omega$. Es obvio que basta con probar el resultado suponiendo que el hiperplano sea denso en E. Sea H un hiperplano denso de E, sea H' su dual y sea (v_n) una base algebraica de H'. Por el método de Klee (8), construimos sucesiones (u_n) en H' y (x_n) en H tales que forman un sistema biortogonal y tal que la envoltura lineal de (u_n) coincide con H'. Si G denota

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} u_{2k}^{-1}(0),$$

G es un subespacio cerrado de H que ni es de dimensión finita, pues G contiene a $(x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}, \ldots)$, ni de codimensión finita en H. Si G no es completo, hemos construído un subespacio cerrado de H que no es de dimensión finita ni de codimentación finita en H y cuya clausura en E se sale de H. Si G es completo, también es posible construir un subespacio de H de estas características, pues si G_1 es un complemento topológico de G en E, tomamos $F = G_1 \cap H$. Como H es tonelado, H es la suma directa topológica de G y F. Si F fuera completo, H sería completo por (9), 1.3 Prop., lo que no es cierto, y así F es el subespacio buscado. Denotemos mediante L al subespacio de H encontrado. Si $\bar{L}$ denota su clausura en E, sea x un vector de L que no está en L y sea $T: E \to E/\bar{L}$ la subreyección canónica. Es claro que $E = [H \cup \{x\}]$ y que $E/\bar{L}$ es isomorfo a ω. La restricción S de T a H es un homomorfismo sobre $E/\bar{L}$. En efecto, sea U un 0-entorno absolutamente convexo de H y sea V un 0-entorno absolutamente convexo de E tal que $V \cap H \subset \frac{1}{2}U$. Dado $v \in V$ existe un escalar r y un vector $h \in H$ tal que $v = rx+h$. Como $rx \in L$ existe un vector z en L tal que $z \in rx + V \cap \bar{L}$ y así $T(v) = T(h) = T(h+rx-rx+z) \subset T(H \cap 2V) \subset T(U) = S(U)$ y, entonces, S es abierta. Por lo tanto, H/L es isomorfo a ω.

Sea H un subespacio de codimensión finita en E y sea $(y_1, \ldots, y_p)$ una cobase de H en E, siendo ahora E un espacio de Fréchet no normable. Llamamos H_0 a H, H_r a $[H \cup (y_1, \ldots, y_r)]$ $r=1,2,\ldots,p$ con $H_p = E$. Debido al resultado de Eidelheit, H_p tiene un cociente isomorfo a ω. Entonces, basta con probar que si H_r tiene un cociente isomorfo a ω, entonces H_{r-1} también lo tiene. Sea F_r un subespacio cerrado de H_r tal que H_r/F_r es isomorfo a ω. Si F_r está contenido en H_{r-1}, entonces H_{r-1}/F_r es un hiperplano de H_r/F_r y aplicamos lo probado anteriormente. Si F_r no está contenido en H_{r-1}, entonces $F_r \cap H_{r-1}$ es un hiperplano de F_r y, por lo tanto, denso o cerrado en él. Si es denso, determinamos un vector x en F_r que no esté en H_{r-1} tal que $F_r = [H_{r-1} \cap F_r \cup \{x\}]$. Entonces, $H_r = [H_{r-1} \cup \{x\}]$ y se razona como se hizo en la primera parte de la demostración, para concluir que $H_{r-1}/H_{r-1} \cap F_r$ es isomorfo a ω. Si $H_{r-1} \cap F_r$ es cerrado en F_r, aplicamos el segundo teorema del isomorfismo para obtener que $H_r/F_r \cap H_{r-1}/F_r/F_r \cap H_{r-1}$ es isomorfo a $H_r/_{F_r}$ y, por tanto, $H_r/H_{r-1} \cap F_r$ es isomorfo a ω. Pero $H_{r-1}/H_{r-1} \cap F_r$ es un hiperplano de $H_r/H_{r-1} \cap F_r$, que es isomorfo a ω. De nuevo, aplicando la primera parte de nuestra demostración $H_{r-1}/H_{r-1} \cap F_r$ tiene un cociente isomorfo a ω y, por lo tanto, también lo tiene H_{r-1}.

Nota (a) Es sabido que dado un compacto absolutamente convexo de un cociente separado de un espacio de Fréchet, existe un compacto absolutamente convexo en el espacio de Fréchet cuya imagen mediante la sobreyección canónica coincide con el compacto original. Este resultado no es cierto, en general, para espacios tonelados metrizables no completos. Sea E un espacio de Fréchet separable y sea H un hiperplano denso de E con la propiedad de que todo compacto absolutamente convexo genera un espacio de dimensión finita. Por la Proposición anterior, H tiene un cociente isomorfo a ω y ω posee compactos absolutamente convexos de dimensión infinita. El hiperplano mencionado fué construido en (13).

(b) En (14) se prueba que todo espacio de Fréchet que no sea Banach contiene un subespacio denso que es un espacio (LF). El método de construcción es un proceso de "lifting" a partir de unos ciertos (LF) metrizables no completos que existen en ω. Este resultado tampoco es cierto, en general, para espacios E tonelados metrizables no normables, pues basta con considerar el hiperplano mencionado en (a), que no puede contener ningún subespacio que para una topología más fina que la inducida sea un espacio de Fréchet, que contendría compactos absolutamente convexos de dimensión infinita.

En lo que sigue, estudiaremos la incidencia en productos tensoriales de la propiedad de poseer un cociente isomorfo a ω.

***Proposición** 2. Sean E y F espacios tonelados metrizables que tienen un cociente isomorfo a ω. Entonces, $E \otimes_\pi F$ contiene un subespacio denso propio que no es tonelado.*

Demostración: Bajo la hipótesis, $E \otimes_\pi F$ tiene un cociente isomorfo a $\omega \otimes_\pi \omega$ que es separable. Sea G un subespacio de $\omega \otimes_\pi \omega$ de dimensión numerable denso. G no es tonelado, pues si lo fuera coincidiría con φ, (12), lo que no es posible pues $E \otimes_\pi F$, siendo metrizable, no contiene a φ y, por lo tanto, ninguno de sus cocientes separados.

Nota La Proposición 2 también es cierta si F es un espacio Baire-like separable, pues $E \otimes_\pi F$ es también Baire-like, (11) y tiene un cociente isomorfo a $\omega \otimes_\pi F$ que es separable y de dimensión infinita. Como en la prueba anterior, construimos un subespacio denso de $\omega \otimes_\pi F$ de dimensión numerable que no es tonelado, pues si lo fuera, G coincidiría con φ. $\omega \otimes_\pi F$ es Baire-like y G, como subespacio denso y tonelado de $\omega \otimes_\pi F$, también es Baire-like. Pero φ no es Baire-like.

***Proposición** 3. Sea E un espacio tonelado metrizable que posee un cociente isomorfo a ω y sea F un espacio tonelado que no es casi-Baire. Entonces, $E \otimes_\pi F$ no es tonelado.*

Demostración:

Sea E un espacio tonelado metrizable con un cociente isomorfo a ω y sea F un espacio tonelado que no es casi-Baire. Entonces, existe en F una sucesión creciente (F_n) de subespacios cerrados propios (F_n) que cubren F. Elegimos (F_n) de forma que podamos seleccionar vectores $x_n \in F_{n+1} \setminus F_n$ $n=1,2,...$ y formas lineales continuas v_n sobre F con $v_n(x_n) = 1$, $v_n(y)=0$, $y \in F_n$. Definimos $T:F \to \varphi$ mediante $T(x) = (v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x), ...)$ que es obviamente lineal y sobreyectiva. Debido a (12), F tiene la topología del límite inductivo de la sucesión (F_n) y, como T restringida a cada F_n, es claramente continua, entonces T es continua. Puesto que los vectores $(T(x_n) : n=1,2,...)$ forman una base de φ, si definimos la aplicación lineal $S: \varphi \to F$ mediante $S(T(x_n)) = x_n$, $n=1,2,...$ obtenemos una aplicación inyectiva y continua, satisfaciendo que $T \circ S$ coincide con la identidad sobre φ. Aplicando (5).2, 7, prop. 3, se sigue que $S(\varphi)$ es isomorfo a φ y complementado en F. Entonces, $E \otimes_\pi F$ tiene un cociente isomorfo a $\omega \otimes_\pi \varphi$ que no es tonelado, por (4). Entonces, $E \otimes_\pi F$ no es tonelado.

Nota: $D(\Omega) \otimes_\pi D'(\Omega)$ no es tonelado, pues $D(\Omega)$ es un (LF)-estricto y, por lo tanto, un espacio tonelado no casi-Baire. Así, tiene a φ complementado y, por lo tanto, $D'(\Omega)$ tiene a ω complementado. Entonces, $D(\Omega) \otimes_\pi D'(\Omega)$ tiene un cociente que es $\varphi \otimes_\pi \omega$, que no es tonelado.

Nota: El dual fuerte E de un espacio de Fréchet distinguido definido por una familia de normas continuas tiene representación como el límite inductivo numerable de una familia de espacios de Banach, $E = \operatorname{ind}_n B_n$, con cada B_n denso en E. E no es un espacio Baire-like y es casi-Baire. El espacio $s \otimes_\pi H(C_0)'$ no es tonelado, (3), siendo $H(C_0)'$ el dual fuerte del espacio de las funciones holomorfas en el círculo unidad del plano complejo. Así, el π-producto de un metrizable tonelado por un casi-Baire no Baire-like no es necesariamente tonelado.

Si existiera un espacio tonelado metrizable no normable E tal que todo subespacio denso de dimensión no numerable fuera tonelado, entonces E no tendría un cociente isomorfo a ω, puesto que ω tiene subespacios propios densos de dimensión no numerable que no son tonelados. Sin embargo,

Proposición 4. *Sea E un espacio tonelado metrizable no normable que posea una norma continua. Entonces, $E \otimes_\pi \varphi$ no es tonelado.*

Demostración: Sea (q_r) una sucesión creciente de seminormas que definen la topología de E y sea $\varphi\{E\}$ el espacio de todas las sucesiones $y = (Y_n)$ de elementos de E tales que $(q_r(Y_n))$ es un elemento de φ para cada natural r dotado de la tipología U definida por la familia de seminormas

$$q_{u,r}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| q_r(Y_n)$$

para cada $u = (u_n)$ de ω y r=1,2,.... La aplicación $J: \varphi \otimes_\pi E \to \varphi\{E\}$ definida mediante

$$J(\sum_{i=1}^{p} x^i \otimes y^i) = (\sum_{i=1}^{p} x_n{}^i y^i)$$

es un isomorfismo sobre un subespacio denso de $\varphi\{E\}$. Además, el dual de $\varphi\{E\}$ consiste en todas las sucesiones $v = (v_n)$ de E', tales que existe un elemento de ω, $a = (a_n)$, y una sucesión $w = (w_n)$ en E' que es un equicontinuo tal que $v_n = a_n w_n$ para cada natural *n*. La dualidad viene dada por la forma bilineal

$$\langle v,x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n x_n)$$

(ver (7),41.7). Como E no es normable, la diferencia conjuntista $E'_{U^\circ_{n+1}} \setminus E'_{U^\circ_n}$ es no vacía para cada natural n, siendo U°_n el conjunto polar en E' de $U_n = \{x \in E: q_n(x) \leq 1\}$, n=1,2,... Como E tiene una norma continua, $\varphi\{E\}$ es la suma directa $E^{(N)}$ y, por lo tanto, $\varphi\{E\}$, dotado de la topología U, coincide algebraica y topológicamente con $E \otimes_\pi \varphi$. Probaremos la existencia de un conjunto $\sigma(\varphi\{E\}', \varphi\{E\})$- acotado en $\varphi\{E\}'$ que no es equicontinuo. Determinamos $v_n \in E'_{U^\circ_{n+1}} \setminus E'_{U^\circ_n}$, n=1,2,..., y sea $\hat{v}_n$ el elemento de $\varphi\{E\}'$ cuyas coordenadas son nular salvo la n-ésima que coincide con v_n. Es claro que el conjunto $A = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, ..., \hat{v}_r, ...\}$ es $\sigma(\varphi\{E\}', \varphi\{E\})$ - acotado pero no es U-equicontinuo, pues si lo fuera existirían elementos de ω, $\hat{u}_j$, j = 1, 2, . . . , s una constante positiva M y un natural r tales que

$$\sup_n |\langle \hat{v}_n, x\rangle| \leq M \sup_{j=1-s} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_n^j| q_r(x_n) \qquad (*)$$

para cada $x = (x_n)$ de $\varphi\{E\}$. Tenemos un natural p mayor que r. Si z es un elemento de E, aplicamos $(*)$ a (0,...,0,z,0,...) para obtener

$$|\langle v_p, z\rangle| \leq M\, \{\sup_{j=1-s} |u_p^j|\} \cdot q_r(z)$$

de donde se deduce que v_p pertenece a $E'_{U^\circ_r}$ lo que no es cierto por construcción.

Nota: Algunos de los resultados aquí expuestos, aparecerán en un trabajo más amplio sobre tonelación en productos tensoriales proyectivos.

BIBLIOGRAFIA

(1) Bourbaki, N. (1955): "Espaces vectoriels topologiques" Chap. IV Hermann

(2) Eidelheit, M. (1936): Zur Theorie der Systeme linear Gleichungen. Studia Math. *6*, 139-148

(3) Grothendieck, A. (1955): "Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires" Mem. Amer. Math. Soc. No. 16

(4) Hollstein, R. (1977): Über die Tonnerlierheit von lokalkonvexen Tensorprodukten. Manusc. Math. *22*, 7-12

(5) Horváth, J. (1966): "Topological Vector Spaces and Distributions I" Addison-Wesley

(6) Köthe, G. (1966): "Topologische Lineare Räume I" Springer

(7) Köthe, G. (1979): "Topological Vector Spaces II" Springer

(8) Marti, J. (1969): "Introduction to the Theory of Bases" Springer

(9) Roelcke, W., Dierolf, S. (1981): On the three-space-problem for topological vector spaces. Collect. Math. Vol. XXXII, Fasc. 1º, 13-35

(10) Saxon, S. (1972): Nuclear and product spaces, Baire-like spaces and the strongest locally convex topology. Math. Ann. *197*, 87-106

(11) Valdivia, M.: On certain classes of locally convex spaces without C-web. Ann. Inst. Fourier Grenoble (pendiente de publicación)

(12) Valdivia, M. (1971): Absolutely convex sets in barelled spaces. Ann. Inst. Fourier, Grenoble *21*, (2), 3-13

(13) Valdivia, M. (1977): Sur certain hyperplans qui ne sont pas ultrabornologiques dans les espaces ultrabornologiques. C.R.Acad. Sci. Paris t. 284, Série A-935

(14) Valdivia, M. y Pérez Carreras, P.: Sobre espacios (LF) metrizables. (preprint)