Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Obando Z, Gilberto; Vasco U., Carlos Eduardo; Arboleda A., Luis Carlos

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA RAZÓN, LA PROPORCIÓN Y LA PROPORCIONALIDAD: UN ESTADO DEL ARTE

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17, núm. 1, marzo-, 2014, pp. 59-82
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, Organismo Internacional

Gilberto Obando, Carlos Eduardo Vasco, Luis Carlos Arboleda

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA RAZÓN, LA PROPORCIÓN Y LA PROPORCIONALIDAD: UN ESTADO DEL ARTE

The teaching and learning of ratio, proportion and proportionality: the state of the art

RESUMEN

Razones, proporciones y proporcionalidad constituyen un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años. Evaluaciones recientes muestran que estos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes, lo que constituye un certero indicador de la necesidad de hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones de dicha problemática y, por esa vía, lograr mayores impactos en el sistema educativo. En este artículo se revisan y comentan algunas investigaciones recientes sobre razón, proporción y proporcionalidad. De acuerdo con la perspectiva de análisis, se agrupan en tres momentos: cognitivo, epistémico y semiótico-antropológico. Finalmente, se plantean algunos problemas de investigación a manera de conclusión.

PALABRAS CLAVE:

- *Razón*
- *Proporción y proporcionalidad*
- *Razonamiento proporcional*
- *Investigación didáctica*

ABSTRACT

Ratio, proportion and proportionality are a field that has been the object of a wide research in the last fifty years. Recent evaluations show that, for most students, it is still difficult to learn these objects of knowledge, which is an actual indicator that more didactic research should be made in order to come up with new ways to understand these problem areas. This way, it could have a great impact on the educational system. In this article, we revise and we make comments on some of the recent research on ratio, proportion and proportionality. According to an analysis perspective, we classify them into three groups: the cognitive and the epistemic perspective, and the semiotic-anthropological one. We finally pose some problems of research for the conclusion.

KEY WORDS:

- *Ratio*
- *Proportion and proportionality*
- *Proportional reasoning*
- *Didactic research*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2014) *17* (1): 59-81.
Recepción: Mayo 6, 2012 / Aceptación: Marzo 30, 2013. DOI: 10.12802/relime.13.1713

RESUMO

Razões, proporções e proporcionalidade constituem um campo amplamente pesquisado nos últimos cinquenta anos. Avaliações recentes mostram que esses objetos de conhecimento seguem sendo difíceis de aprender para a maioria dos estudantes, o que produz um indicador certeiro da necessidade de promover uma maior pesquisa didática que permita novas compreensões de tal problemática e, por essa via, conseguir maiores impactos no sistema educativo. Neste artigo, revisam-se e comentam-se algumas pesquisas recentes sobre razão, proporção e proporcionalidade. De acordo com a perspectiva de análise, agrupam-se em três momentos: cognitivo, epistémico e semiótico-antropológico. Finalmente, planteiam-se alguns problemas de pesquisa como modo de conclusão.

PALAVRAS CHAVE:

- *Razão*
- *Proporção e proporcionalidade*
- *Raciocínio proporcional*
- *Pesquisa didática*

RÉSUMÉ

Les notions de raison, proportion et proportionnalité font partie d'un champ de recherche largement répandu dans les derniers cinquante ans. Des évaluations récentes montrent que ces connaissances sont toujours difficiles à apprendre pour la plupart des élèves, ce qui constitue un indicateur certain du besoin de faire des recherches en didactique qui permettent une meilleure compréhension de cette problématique et, de cette façon, atteindre des impacts majeurs dans le système éducatif. Dans cet article on révise et on discute quelques recherches récentes sur les notions de raison, proportion et proportionnalité. D'après notre perspective d'analyse, on les agroupe en trois temps : cognitif, épistémique et sémiologique-anthropologique. Finalement, on pose quelques problèmes de recherche en guise de conclusion.

MOTS CLÉS:

- *Raison*
- *Proportion et proportionnalité*
- *Raisonnement proportionnel*
- *Recherche en didactique*

1. Introducción

Razones, proporciones y proporcionalidad (en adelante RPP) han sido conceptos ampliamente problematizados desde los procesos de aprendizaje y de enseñanza. Desde los años sesenta con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de carácter cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de estos objetos de conocimiento sigue vigente.

A nivel curricular, RPP son objetos de conocimiento importantes, toda vez que están presentes en los currículos propuestos e implementados en la mayoría de los países del mundo (Martin, Mullis & Foy, 2008; Mullis et al., 2008; TIMSS, 2009) con notables similitudes de uno a otro en términos de la forma de organización de los temas, las estrategias pedagógicas, los niveles de complejidad cognitiva (Adjiage & Pluvinage, 2007; Bosch, 1994; Ponte & Marques, 2005) y además, estructurados en procesos de estudio atomizados en diferentes momentos de la escolaridad y con pocas conexiones entre sí (García, 2005; Guacaneme, 2002; Lundberg, 2011).

Sin embargo, a pesar de la importancia concedida a las RPP en los currículos, autores como Vergnaud (1988, 1994), Lesh, Post, y Behr (1988), Adjiage y Pluvinage (2007), Martin et al. (2008), García y Serrano (1999) informan que los alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar. Además, estudios comparativos de diferentes periodos de tiempo muestran que los resultados no mejoran significativamente de un año a otro (Hodgen, Kuchemann, Brown, & Coe, 2010; Martin et al., 2008).

Así pues, si bien se reconoce la valoración que a nivel curricular tienen ejes temáticos en torno a las RPP, éstas continúan siendo un problema complejo en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje. A pesar de los importantes avances logrados en la investigación en didáctica de las matemáticas (caracterizaciones finas de los problemas cognitivos y didácticos) aún no se logran consolidar propuestas que modifiquen la forma como las RPP se abordan en los contextos escolares.

Este artículo es un recorrido por la investigación en didáctica de las matemáticas de los últimos años sobre los aspectos cognitivos, matemáticos, epistemológicos y didácticos relativos a los procesos de enseñanza o de aprendizaje de las RPP. Este recorrido se organiza en tres momentos que identifican los énfasis de investigación que han caracterizado diferentes épocas en el desarrollo de la investigación en educación matemática.

2. Un primer momento: los procesos cognitivos

Los trabajos pioneros sobre las RPP se centraron en el desarrollo del pensamiento de la proporcionalidad (razonamiento proporcional). Este enfoque tiene sus orígenes en los trabajos de Piaget sobre el desarrollo del pensamiento lógico (Piaget & Inhelder, 1958), resaltando la importancia del razonamiento proporcional en la constitución de las operaciones formales del pensamiento. Esta forma de razonamiento marca el cambio desde el estadio de las operaciones concretas hacia las operaciones formales, pues supone en los sujetos la capacidad de manejo simultáneo de clases (multiplicación de clases)[1] y del grupo de transformaciones *INRC*,[2] esto es, la coordinación de las inversiones de las operaciones con las reciprocidades de las relaciones, ambas necesarias en los procesos de equilibrio implicados en la comprensión de la proporcionalidad. Esta coordinación muestra la invariancia de un producto lógico ($I{\cdot}N=R{\cdot}C$) que hace esta estructura ideal para describir las formas de razonamiento propias de la proporcionalidad (en términos lógicos, como lo hiciera Russell en su momento), ya que permite explicar los esquemas de coordinación, compensación y conservación necesarios en el reconocimiento de los patrones de variación entre variables ligadas por una variación directamente proporcional. Por lo tanto, para Piaget, la comprensión de la proporción comporta dos aspectos, uno lógico y otro matemático. Bajo el aspecto *lógico*, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón es una relación entre dos variables, y la proporción una relación de equivalencia entre dos razones) e implica el recurso a una lógica de segundo orden. Bajo el aspecto *matemático*, las compensaciones cuantitativas asumen la forma de esquemas proposicionales de equivalencia (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) que permiten garantizar que en el proceso de variación se conserve invariante un cociente o un producto (si $\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$, entonces $xy'=x'y$).

Hacia los años ochenta se produce un giro importante en el curso de las investigaciones sobre el razonamiento proporcional que, sin dejar de poner énfasis en los procesos cognitivos, empieza a mirar el problema del desarrollo del razonamiento proporcional desde la óptica de la escuela: el problema es ahora cómo enseñarlo, cómo lograr que la escuela favorezca procesos de enseñanza orientados a la constitución de tal forma de razonamiento.

Así pues, sobre la base de las etapas propuestas por Piaget e Inhelder para el desarrollo del razonamiento proporcional, se analizan posibles secuencias de enseñanza y, reconociendo la complejidad del campo, se edifican nuevas líneas de investigación en busca de la comprensión de los factores asociados (Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Noelting, 1980; Pulos & Tourniaire, 1985; Tourniaire, 1986). Nos referimos a varios de estos, como los tipos de estrategias elementales

1 Coordinación de los cambios en dos o más variables de tal forma que aumentos o transformaciones en una de ellas den lugar a cambios en las otras, logrando que el efecto total mantenga invariante un determinado fenómeno.

2 Para mayor información sobre el grupo INRC ver Vasco (1989).

en el desarrollo del razonamiento proporcional (acumulaciones coordinadas, valor unitario, comparación de razones, razones intensivas, razones escalares, estrategias erróneas, estrategias de retroceso); los tipos de situaciones que implican razonamiento proporcional (problemas de tasas o de mezclas, de conceptos matemáticos o de otras ciencias, por ejemplo, la física); las variables de tarea centradas en el estudiante (edad, estadio de desarrollo, capacidad mental o M-capacidad, estilo cognitivo, inteligencia, género, actitudes y habilidades) o en la situación (estructurales –razones enteras o no, lugar de la incógnita en la proporción, complejidad numérica; o de contexto –tipos de situación, tipo de magnitud, familiaridad con la situación, uso de materiales manipulativos).

Las investigaciones en este periodo permitieron identificar elementos importantes para la comprensión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en contextos escolares, pero se les puede reclamar que no realizaron un cuestionamiento al conocimiento matemático que se enseña en la escuela sobre las RPP, al asumir que las dificultades de los maestros para enseñar, y de los alumnos para aprender, podían ser completamente tratadas a partir de los avances en la comprensión de los procesos del desarrollo cognitivo y de los fenómenos ligados a las condiciones de contexto.

3. Un segundo momento: la estructura matemática

En los años noventa se produce un nuevo giro: las investigaciones sobre el razonamiento proporcional, además de las variables de orden cognitivo y de contexto, entran a considerar otras de orden epistémico relativas a la estructura, organización y naturaleza del conocimiento matemático en juego.

Este cambio está motivado por los desarrollos que se logran en la didáctica de las matemáticas a lo largo de la década de los ochenta,[3] los cuales, en general, muestran que cualquier intento de problematización didáctica en la escuela tiene

[3] En relación con el razonamiento proporcional, dos vías diferentes fueron determinantes en esta nueva mirada. Una de ellas, desde una perspectiva epistemológica, destaca los trabajos de Guy Brousseau sobre su teoría de las situaciones didácticas y de Yves Chevallard sobre la transposición didáctica. La otra, desde una perspectiva cognitiva, destaca el trabajo de Thomas Kieren sobre los procesos de aprendizaje de los números racionales basados en su noción de constructo matemático, y *The Rational Number Project* coordinado por Merlyn J. Behr, Richard Lesh, Thomas Post, entre otros, iniciado en 1979, actualmente en actividad (http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/default.html).

que considerar el conocimiento matemático como una variable fundamental. Así entonces, se integran en los análisis didácticos consideraciones de orden epistemológico, logrando que los problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje en la escuela sean tratados integralmente.

En general, se pueden caracterizar los aportes de este periodo en los siguientes términos:

(1) *Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales:* caracterización de tales procesos y definición de tipologías de situaciones relativas a la construcción de la unidad, al tipo de magnitud y a la cuantificación de magnitudes (Behr, Harel, & Post, 1992; Behr, Khoury, Harel, Post, & Lesh, 1997; Kieren, 1988; Ohlsson, 1988).

(2) *Razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar:* una mejor comprensión de los conceptos de razón y proporción, de variación y covariación, mostrando sus estrechas relaciones con la multiplicación, la división y las magnitudes (Confrey & Smith, 1994, 1995; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994; Hart, 1988; Lamon, 1994; Lesh et al., 1988; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2000; Steffe, 1994).

(3) *Aritmética de las cantidades:* reconocimiento de que los procesos aritméticos estudiados en la escuela, aditivos o multiplicativos, no sólo requieren operar sobre los números que representan las medidas, sino sobre las cantidades mismas y las magnitudes a las que pertenecen (construcción de diferentes tipos de magnitud); ello exige consideraciones tanto cognitivas como didácticas para la enseñanza y el aprendizaje (Schwartz, 1988).

(4) *Estructura cognitiva y didáctica del pensamiento multiplicativo:* nuevos enfoques en lo que se denominó el razonamiento proporcional en edades tempranas (Kaput & West, 1994; Spinillo & Bryant, 1991, 1999) que permitieron identificar, (*a*) los tipos de procesos de compensación, tanto aditivos como multiplicativos, que son precursores del razonamiento proporcional propiamente dicho, (*b*) la importancia de la coordinación de los procesos de variación entre espacios de medida (a partir de los procedimientos escalares o funcionales) para el desarrollo de los conceptos propios de la proporcionalidad directa, y, (*c*) la necesidad de incluir el papel de las distintas formas de representación sobre la construcción de tal forma de razonamiento.

(5) *Campo conceptual de las estructuras multiplicativas:* se asume que la construcción de los conceptos relativos al razonamiento proporcional se da en un proceso complejo que implica, (*a*) coordinación con otros conceptos interrelacionados, (*b*) coordinación entre tipos de situaciones relacionadas con los conceptos y los procedimientos y (*c*) uso de diferentes formas de representación implicadas en la construcción de los invariantes operatorios relativos a los conceptos (Vergnaud, 1988, 1991, 1994).

Más recientemente se pueden reseñar nuevos aportes en estos mismos campos.

Aportes en relación con los procesos implicados en la comprensión de los números racionales

(1) *La razón como función.* La razón se comprende como una función entre dos magnitudes y la proporcionalidad es vista como una propiedad caracterizada por la linealidad, bien implícitamente a través de los procedimientos escalares, o bien explícitamente a través de los procedimientos funcionales[4] (Gómez, 2007).

(2) *Las fracciones en relación con las medidas de magnitudes (intensivas o extensivas).* La fracción no es tanto un operador que cuenta partes de un todo, sino una relación que cuantifica la medida relativa entre la parte y el todo. Esto es, la fracción $\frac{1}{n}$ se define a partir de la relación *n*-veces, y la fracción $\frac{m}{n}$ a partir de la composición multiplicativa de la fracción $\frac{1}{n}$ (Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, & Myers, 2009; Obando, 2003; Thompson & Saldanha, 2003).[5] Esto también plantea una estrecha relación entre los racionales y las estructuras multiplicativas (Fernández & Puig, 2002; Gómez & Contreras, 2009; Thompson & Saldanha, 2003).

(3) *El aprendizaje de los números racionales y el desarrollo del razonamiento proporcional* (Cortina & Zúñiga, 2008; Howe, Nunes, & Bryant, 2010, 2011; Nunes & Bryant, 2008; Nunes, Desli, & Bell, 2003; Pitta-Pantazi & Christou, 2009). Se asume la noción de razón

[4] Estos trabajos profundizan en la propuesta fenomenológica sobre las fracciones, las razones y la proporcionalidad (Freudenthal, 1983, en especial los capítulos 5 y 6).

[5] Ver Fandiño (2009) para una síntesis sobre las diferentes aproximaciones didácticas, cognitivas y matemáticas a la enseñanza o aprendizaje de las fracciones.

como estructurante de los procesos de constitución del número racional (Lamon, 2012), y el razonamiento proporcional es identificado como la base de los invariantes que caracterizan las covariaciones ligadas por una proporcionalidad directa (Fernández & Llinares, 2010). Esto marca igualmente una nueva mirada al lugar de las cantidades intensivas en el aprendizaje de los racionales y en el desarrollo del razonamiento proporcional (Howe et al., 2010, 2011).

(4) *El aprendizaje de los números racionales y su relación con la medida de magnitudes*. En el aprendizaje de los números racionales, y en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, se reconoce el papel fundamental de la medida de magnitudes y de las representaciones de los mismos en forma de notación fraccionaria o decimal (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2004, 2007, 2008). En particular se asume que la razón es el concepto central para comprender las fracciones, los decimales y los porcentajes, bien a partir de las diferentes experiencias de los estudiantes (Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2012; van Galen et al., 2008), bien en el marco de una construcción relativa a la multiplicación y la división, a través de situaciones de ampliación, reducción, repetición y partición (Lachance & Confrey, 2002). Confrey y Carrejo (2005) proponen comprender la razón como el invariante en una serie de cantidades proporcionales entre sí, y la fracción como emergente de la razón cuando se elige una cantidad arbitraria como unidad y las demás cantidades se comparan con respecto a esta cantidad.

(5) *Campos de investigación y trayectorias de aprendizaje*. Confrey et al. (2009) identifican siete grandes campos de investigación[6] a partir de los cuales definen trayectorias de aprendizaje: de las particiones y los conteos múltiples a la multiplicación y la división; las fracciones, desde la medida y las relaciones parte-todo a la notación decimal con

[6] *Repartos equitativos y partición en partes iguales* como la base cognitiva para comprender la multiplicación, la división, las ratas y las fracciones; *la multiplicación y la división*, derivadas de los repartos equitativos y las particiones en partes iguales y coordinadas con el conteo (y las correspondencias uno a varios y varios a varios); *las razones* (entendidas como relación, como operador, y como fracción-medida), *las proporciones y las ratas; las fracciones*, entendidas en su dimensión de operador sobre cantidades, pero a la vez, como relaciones parte-todo, en donde la relación *n*-ésima parte es comprendida como una relación primitiva; *áreas y volúmenes*; *semejanzas y escalas*; y *decimales y porcentajes* (Confrey & Maloney, 2008; Confrey et al., 2009).

sus respectivas operaciones; razones, ratas[7] y proporciones, que van desde las razones como relaciones entre cantidades hasta las relaciones multiplicativas, áreas y volúmenes, semejanzas y escalas (Confrey et al., 2009).

(6) *Las fracciones como un proceso de acomodación de los esquemas de conteo* (Steffe & Olive, 2010). Se asume el aprendizaje de las fracciones a partir de la constitución de las unidades compuestas y esquemas de fracciones[8] que permiten la medición de las unidades compuestas como partes de un todo (relaciones parte-todo) y la iteración de tales unidades compuestas para la constitución de fracciones no unitarias (propias e impropias). De esta manera, Steffe y Olive rescatan los aspectos aritméticos de las fracciones, pero parecieran no centrar su atención explícitamente en la relación de las fracciones con sus diferentes formas de representación, en particular, con la notación decimal, ni en la medición de magnitudes.

Aportes en relación al razonamiento proporcional

Se identifica la importancia del conocimiento sobre los números racionales para el desarrollo del conjunto de habilidades necesarias en el razonamiento proporcional: la unitización, la variación de cantidades, el pensamiento relativo y la coordinación de conteos iterados crecientes y decrecientes (Pantziarra & Pitta-Pantazi, 2005; Pitta-Pantazi & Christou, 2009). Se precisa el significado del término: se pasa de comprender el razonamiento proporcional como la habilidad para utilizar significativamente conceptos propios de las razones y las proporciones en la

[7] De acuerdo al Diccionario de la RAE, “rata” (Del lat. *rata parte, rata ratione, pro rata*) significa parte proporcional, variación por unidad de tiempo. En inglés se diferencia “ratio” y “rate” que son traducidos en este documento como “razón” y “rata” respectivamente. Así entonces, por lo general, “rata” (“rate”) hace referencia a aquellos casos en los que la razón se establece entre magnitudes de diferente naturaleza, y “razón” (“ratio”) a los casos en los que la razón se establece entre cantidades de la misma naturaleza, aunque en español “razón” se usa en ambos casos sin hacer la distinción. Si es necesario, se suelen utilizar las expresiones “razón heterogénea” y “razón homogénea”.

[8] *Fracción unitaria* –a partir de la relación parte-todo; *composición de fracciones unitarias* –repetición de una fracción unitaria, pero sin superar la unidad; *composición de fracciones* –fracciones de fracciones; *iteración de fracciones* –sucesiones de fracciones homogéneas que pueden incluso superar la unidad; *unidad fraccional* –una fracción unitaria que mide a otras no unitarias; *fracciones iguales*.

solución de situaciones típicas de proporcionalidad directa (fundamentalmente situaciones de cálculo de una cuarta proporcional), a definir aspectos cognitivos y metacognitivos implicados en este tipo de razonamiento (Modestou & Gagatsis, 2009, 2010):

- *Razonamiento por analogías*: capacidad de los estudiantes para identificar regularidades en las variaciones entre variables, generalizar dichos patrones, o aplicarlos en situaciones estructuralmente similares.
- *Solucionar problemas rutinarios de proporcionalidad*: Conjunto de habilidades que deben desarrollar los estudiantes para la solución de las situaciones típicas del cálculo de una cuarta proporcional, y
- *Conciencia metacognitiva de la linealidad*: capacidad de los estudiantes para analizar los procesos de variación entre variables y determinar cuándo dicho proceso puede ser modelado por una proporcionalidad directa.

Otra línea de aportes, relacionada con la anterior, tiene que ver con los trabajos en la "sobre-generalización de la linealidad". Brevemente, esta línea documentó una tendencia generalizada de los estudiantes para aplicar modelos lineales (en general el uso de la regla de tres) en situaciones en donde no eran aplicables (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002, 2007; Van Dooren, De Bock, Gillard, & Verschaffel, 2009; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005; Van Dooren, De Bock, Hessels, & Verschaffel, 2004). La búsqueda de las causas de esta tendencia a la sobre-generalización llegó incluso a proponer la existencia del obstáculo epistemológico de la linealidad (Modestou, Elia, Gagatsis, & Spanoudis, 2008; Modestou & Gagatsis, 2007, 2009), en tanto la linealidad es un modelo fácilmente generalizable que funciona bien en muchas situaciones de la vida cotidiana, pero que a lo largo de los años se hace incluso resistente a los procesos de enseñanza.

Sin embargo, otros trabajos muestran una interpretación alterna: más que un obstáculo epistemológico, la sobre-generalización de la linealidad podría ser el resultado de la enseñanza, y no tanto de la naturaleza implícita de los objetos de conocimiento (De Bock et al., 2007; De Bock, Verschaffel, & Janssens, 2002; Fernández & Llinares, 2012; Fernández, Llinares, Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2011; Van Dooren & De Bock, 2008; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren et al., 2004). Si este fuera el caso, sería necesario reestructurar la enseñanza escolar de tal manera que propusiera a los estudiantes situaciones de modelación matemática, tanto lineales como no lineales, permitiéndoles desarrollar, a la par de los conceptos, la capacidad para describir, interpretar, predecir y explicar situaciones de diferente tipo.

Así pues, si se entiende el razonamiento proporcional en un sentido más amplio ligado al reconocimiento de las variables, de las relaciones entre las variables y de los invariantes operatorios que ligan dicho proceso de variación, la conclusión es que efectivamente los estudiantes no tienen los conceptos propios de la linealidad, y que es precisamente esa falta de conocimiento, y no un conocimiento resistente al cambio, lo que los lleva a aplicar la linealidad fuera de su campo de validez. Adicionalmente, se podría argumentar que los modelos lineales pueden ser una forma natural de organización del pensamiento, una primera aproximación en la comprensión de situaciones o fenómenos más complejos y, por lo tanto, más que un obstáculo epistemológico, es una forma alternativa de organización del pensamiento.

Aportes sobre la comprensión de lo multiplicativo en edades tempranas

Se identifican trabajos que reconocen la importancia de los conteos múltiples y las correspondencias uno a varios, o varios a varios (formación de unidades compuestas y coordinación de dos o más conteos iterados) en la comprensión de la multiplicación en relación con la proporcionalidad directa y las variaciones lineales (Botero, 2006; Bryant & Nunes, 2009; Nunes, 2010). Otro grupo de trabajos muestra que el aprendizaje de lo multiplicativo está estrechamente ligado a los procesos de conteo centrados en el tratamiento de las cantidades, fundamentalmente, en relación con el cambio de unidad (Iannece, Mellone, & Tortora, 2010; Rojas et al., 2011). Finalmente, se identifican trabajos que investigan el aprendizaje de las fracciones en edades tempranas (niños entre 6 y 7 años) mostrando que los conocimientos informales sobre las fracciones se pueden utilizar con éxito en situaciones de relación parte-todo relativas a la multiplicación y la división (Mamede, 2010; Mamede & Nunes, 2008).

4. Un tercer momento: lo antropológico y lo semiótico

En la primera mitad de la década de los noventa, se difunden ampliamente dos enfoques teóricos, que si bien corresponden a tradiciones investigativas diferentes, cada uno a su modo ha proporcionado nuevas formas (metodológicas y conceptuales) de abordar la investigación en didáctica de las matemáticas.

En el marco de la denominada "Teoría Antropológica de lo Didáctico" (TAD), razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales se comprenden en términos de Organizaciones Matemáticas (OM) complejas definidas por tipos de situaciones, prácticas matemáticas, técnicas, tecnologías y teorías, estructuradas alrededor de praxeologías institucionalmente situadas. Diferentes trabajos se han realizado bajo el enfoque de la TAD para el caso de la proporcionalidad (ver por ejemplo, Bosch, 1994; García, 2005; Hersant, 2001).

Los trabajos de Bosch (1994) y García (2005) muestran un conjunto de problemáticas, desde el punto de vista del saber de referencia, que pueden ser la causa de la falta de comprensión de los estudiantes con respecto a la proporcionalidad en la educación básica:

(1) La homogeneidad de las propuestas clásicas para la enseñanza de la proporcionalidad, que centran su estudio en los ámbitos puramente numéricos, separándola de las relaciones funcionales y de otras áreas del currículo en donde la proporcionalidad podría funcionar como una herramienta potente en la solución de los problemas propuestos.

(2) Si bien se identifican elementos praxeológicos en relación con la proporcionalidad directa, inversa y compuesta, estos no se integran en praxeologías globales con mayor coherencia teórica; esto es, se conservan como fragmentos aislados y con un bajo nivel de algebrización, perdiendo los elementos teórico-tecnológicos que permitirían su integración en praxeologías globales más estructuradas (Bolea, Bosch, & Gascon, 2001; Bosch, García, Gascón, & Higueras, 2006; García, Gascón, Higueras, & Bosch, 2006).

Desde un punto de vista epistemológico, Hersant (2001) muestra que es necesario diferenciar dos tipos de teorías en función de los diferentes tipos de situaciones relativos a la proporcionalidad. Una de ellas permite describir la proporcionalidad en términos de razones y proporciones (perspectiva aritmética), y la otra, en términos de funciones lineales (perspectiva algebraica). La autora critica el hecho de que los modelos de aproximación que tiene la escuela hoy en día privilegien la aproximación aritmética sobre la algebraica (Hersant, 2005). Su tipología de “géneros de tarea” descansa sobre la naturaleza de las magnitudes o números implicados en la situación y, por ende, sobre la naturaleza de las relaciones entre las cantidades o magnitudes (situaciones de una relación proporcional, de varias relaciones proporcionales en paralelo, de composición de proporcionalidades, de proporcionalidad múltiple y de proporcionalidad inversa). Por su parte, los tipos de tareas se definen en términos de las acciones que debe realizar el individuo: tipo de cálculo (por ejemplo, calcular una cuarta proporcional, un porcentaje, un coeficiente de proporcionalidad; comparar dos coeficientes de proporcionalidad, dos razones; aplicar una fórmula, un teorema), los registros en que se presenta la situación (reconocer el carácter lineal de una aplicación, interpretar un coeficiente de proporcionalidad, asociar dos representaciones de una aplicación lineal, representar una aplicación lineal) y los procesos de tratamiento o conversión necesarios.

Desde la perspectiva de las representaciones semióticas, se puede rescatar el reconocimiento de que si bien las distintas temáticas sobre las RPP abandonaron sus referentes hacia las magnitudes para centrarse en aspectos puramente numéricos (quizás por el influjo de las matemáticas modernas en los años setenta), en la actualidad aparece de nuevo un llamado a centrar el estudio de las mismas en las magnitudes, en particular, en relación al dominio de las razones (Adjiage, 2007; Adjiage & Pluvinage, 2007). Igualmente se critica la clasificación inicial de Kieren (1980, 1988) en los subconstructos de los números racionales (cociente, medida, número racional y operador multiplicativo), en tanto mezcla aspectos matemáticos y de contexto (situaciones físico-empíricas) en su realización. Así, algunos autores (Adjiage, 1999; Deliyiani, Panaoura, Elia, & Gagatsis, 2008) llaman la atención sobre la necesidad de separar, por un lado, los aspectos representacionales (lo que de hecho implica una distinción de los objetos de conocimiento implicados) relacionados con el aprendizaje de las razones y la proporcionalidad y, por el otro, los aspectos relacionados con las situaciones físico-empíricas. Su trabajo sugiere proponer a los estudiantes diferentes tipos de situaciones físico-empíricas (razones entre dos cantidades heterogéneas, medida, mezcla, frecuencia, dilataciones y cambio de unidad) a partir de marcos representacionales diversos: gráficos (lineales, bidimensionales) y notacionales (fracciones, decimales). Se busca así la integración al interior de, y entre, los marcos representacionales y situacionales para tener perspectivas más amplias con las cuales comprender los aspectos matemáticos relacionados con las razones (relación multiplicativa entre dos cantidades físicas), las proporciones y la proporcionalidad (relación lineal entre dos cantidades variables) (Adjiage, 2005; Adjiage & Pluvinage, 2007).

Estos trabajos representan un giro importante en la investigación en didáctica, pues en aquellas investigaciones centradas en los aspectos cognitivos del desarrollo del pensamiento matemático, las variables de orden contextual no se consideraban como componentes estructurales del desarrollo, sino tan solo como catalizadores de dichos procesos, y las formas de representación no se consideraban en su perspectiva semiótico-cultural (Roth & Radford, 2011), la cual permite verlas como algo más que una externalización de los procesos mentales del individuo, para considerarlas ahora como parte integral del pensamiento; más aún, como instrumentos privilegiados del pensamiento.

5. A manera de conclusión: nuevos campos problemáticos

En términos generales se puede decir que la investigación reportada en este documento se enmarca en lo que en didáctica de las matemáticas se ha llamado el *razonamiento proporcional*, el cual se ha posicionado como un campo privilegiado para las investigaciones en virtud de su lugar central en las matemáticas que se enseñan en la escuela, en tanto pone en relación ámbitos conceptuales necesarios para la comprensión y modelación de múltiples situaciones de las matemáticas, las ciencias naturales y sociales y de la vida diaria.

La persistencia de las dificultades relativas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje es una clara muestra de la complejidad subyacente. Esta complejidad se evidencia en la diversidad de marcos conceptuales elaborados para intentar comprender los conceptos, las situaciones y los procedimientos relacionados con los objetos de conocimiento RPP, y en la falta de orientaciones claras a los docentes para su acción en el aula. Esto ha sido reconocido por diferentes autores en distintos momentos (Karplus et al., 1983; Koellner-Clark & Lesh, 2003; Lamon, 2007), al expresar que –a pesar del cúmulo de investigaciones– es necesario hacer más investigación sobre cómo los chicos y chicas piensan proporcionalmente, de tal manera que sirva como base para orientar los procesos de instrucción.

Aportes importantes en la búsqueda de esos marcos comprensivos se pueden reconocer en los últimos años a través de líneas de investigación que, sobre la base de cuestionar la manera como están estructurados los procesos de enseñanza de las RPP en los contextos escolares (Adjiage & Pluvinage, 2007; Bolea et al., 2001; Bosch, 1994; Comin, 2002; García, 2005; Hersant, 2001; Hersant & Perrin-Glorian, 2005; Pontón, 2012), han mostrado las debilidades de la organización matemática que tienen las propuestas curriculares actuales. De esta manera, se muestra que es necesario construir nuevos tipos de análisis de los procesos escolares de tal forma que en ellos se separen los análisis epistemológicos (orientados a la estructura matemática de la situación), de los análisis cognitivos (orientados a las prácticas de los individuos) y de los análisis instrumentales (orientados a las técnicas utilizables en función de los instrumentos disponibles).

Sin embargo, a pesar de los aportes que van apareciendo en la literatura más reciente (Ben-Chaim et al., 2012; Bryant & Nunes, 2009; Howe et al., 2010, 2011; Lamon, 2012; Nunes & Bryant, 2008; Pontón, 2012; Pontón, 2008; Steffe & Olive, 2010), se puede decir que cuestionamientos como los siguientes son aún problemas didácticos abiertos:

1. Comprender mejor las filiaciones y las rupturas, las líneas de continuidad o los saltos cualitativos entre lo aditivo y lo multiplicativo, de tal forma que los procesos escolares se puedan orientar a potenciar la transformación cualitativa de los razonamientos aditivos hacia los razonamientos multiplicativos. Por ejemplo, preguntas como las siguientes son temas abiertos de investigación: ¿Pueden los enfoques no aritmetizados (construidos sobre las magnitudes o las funciones, en particular las lineales) contribuir a un mejor paso de lo aditivo a lo multiplicativo? ¿Qué tipos de relaciones lógicas (procesos de unitización, relaciones de equidiferencia o de equicociencia, coordinación de conteos iterados, etc.) están en la base de la construcción de las RPP y hasta dónde estas relaciones son construcciones nuevas o generalizaciones sobre procesos aditivos? ¿Cuál es el lugar del conocimiento informal del niño en su vida cotidiana en relación con las RPP (como las particiones, reparticiones, comparaciones, relativizaciones, etc.) en la construcción de los objetos de conocimiento formalizados propuestos en la institución escolar?

2. En consonancia con lo anterior, intentar comprender mejor cómo se establecen las relaciones de continuidad y de ruptura desde los primeros aprendizajes propios de las estructuras multiplicativas (multiplicación, división, fracción, razón, etc.) hasta la comprensión de los números racionales y las relaciones lineales y no lineales, y el lugar que en dichos procesos pueden tener las diferentes praxis matemáticas en torno a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Por ejemplo, las preguntas por las praxeologías propias de los números racionales, esto es, por sus tipos de situación y actividad; por las estructuras matemáticas que soportan tales praxis y, sobre todo, por las líneas de continuidad o ruptura de una a otra son interrogantes que aún requieren de más investigación. En particular, es necesaria investigación que permita la comprensión del desarrollo de las magnitudes, sus cantidades y sus medidas (no tanto desde un punto de vista cognitivo, sino didáctico, físico y matemático), en relación con el impacto de éstas en la construcción de los números racionales, y en general, de la totalidad de las matemáticas que se enseñan y aprenden en la escuela (Lamon, 2007).

3. Comprender mejor el papel (líneas de continuidad y de rupturas del proceso) de los diferentes tipos de proporcionalidad en particular, y de correlación en general, en la construcción del concepto de función, incluso de funciones no polinomiales (trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.). A este respecto se pueden plantear

preguntas de investigación como las siguientes: ¿Cuáles son los procesos y procedimientos implicados en la construcción de las biyecciones asociadas con las covariaciones lineales entre dos o más espacios de medida, característicos de ciertos tipos de situaciones? Si se tiene en cuenta que en la construcción de los isomorfismos de medida las aproximaciones basadas en procedimientos escalares o analógicos ($f(x+y) = f(x)+f(y)$, o $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$) o las basadas en procedimientos funcionales o analíticos ($f(x) = k \cdot x$) responden a dos fenomenologías distintas (Freudenthal, 1983), entonces, ¿se presenta continuidad o ruptura de una aproximación a la otra, o por el contrario, son procesos constructivos paralelos?

Así pues, interrogantes como las anteriores, además de potenciar el desarrollo de investigación empírica y teórica sobre los aspectos cognitivos, matemáticos o epistemológicos ligados a la enseñanza o el aprendizaje de las RPP, contribuyen a diversificar los niveles de análisis sobre las formas de organización escolar de tales conocimientos.

Reconocimientos

Este documento forma parte del proyecto de tesis doctoral (sin publicar) del primer autor titulado “Sistemas de prácticas asociados a las razones, la proporción y la proporcionalidad: el caso de las configuraciones epistémicas en algunos grados de la educación básica”. Esta tesis es un componente del proyecto de investigación “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”, código 111545221093, cofinanciado por COLCIENCIAS y la Universidad de Antioquia (CODI – Programa de sostenibilidad 2011-2012).

Referencias bibliográficas

Adjiage, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial* (Thèse de Doctorat inédite). Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.

Adjiage, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 95-129.

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité: complexité et enseignement au début du collège. *Pétit X, 74*, 5-33.

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*(2), 149-175. doi: 10.1007/s10649-006-9049-x

Behr, M., Harel, G., & Post, T. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a Rational-Number-as-Operator task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 48-69.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B.-S. (2012). *Ratio and Proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. doi: 10.1007/978-94-6091-784-4.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Tesis de Doctorado no publicada). Univesitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Botero, O. (2006). *Conceptualizacion del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 1-20. doi: 10.1016/j.jmathb.2003.12.001

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 26(4)*, 281-300. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.09.001

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3: Rationals and decimals as linear functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(3), 153-176. doi: 10.1016/j.jmathb.2008.07.006

Bryant, P. & Nunes, T. (2009). Multiplicative reasoning and mathematics achievement. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou &, H. Sakonidi (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 217-224). Thessaloniki, Greece: PME.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proporcionalité à l'école et au Collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2-3), 135-182.

Confrey, J., & Carrejo, D. (2005). Ratio and fraction: The difference between epistemological complementarity and conflict. In D. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph,* (Vol. 13). Reston, VA: NCTM.

Confrey, J., & Maloney, A. (2008). From fraction to rational number: Diagnostic e-learning trajectories approach (DELTA) to rational number reasoning. Recuperado desde: http://cse.edc.org/dr-k12/Docs/Confrey_Presentation.pdf

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou &, H. Sakonidi (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345-352). Thessaloniki, Greece: PME.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 135-164. doi: 10.1007/BF01273661

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66-86.

Cortina, J., & Zúñiga, C. (2008). Ratio-like comparisons as an alternative to equal-partitioning in supporting initial learning of fractions. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 385-392). Morelia, México: PME-NA.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311-334. doi: 10.1023/A:1021205413749

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. doi: 10.1007/978-0-387-71164-5.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(1), 65-89. doi: 10.1207/S15327833MTL0401_3

Deliyiani, E., Panaoura, A., Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). Structural model for fraction understanding related to representations and problem solving. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 399-406). Morelia, México: PME-NA.

Fandiño, M. (2009). *Las Fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Fernández, A.; & Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 5*(2), 397-416.

Fernández, C.; & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y mutiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales, 15*(1), 11-22.

Fernández, C.; & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

Fernández, C., Llinares, S., Dooren, W. V., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school? In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353-360). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Fernández, C., Llinares, S., van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students proportional reasoning. *Studia Psychologica, 53*(1), 69-82.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad de Jaén, Jaén, España.

García, F., Gascón, J., Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226-246. doi: 10.1007/BF02652807

García, G., & Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad: una perspectiva social y cultural*. Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En E. Castro & J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico* (pp. 237-257). Granada, España: Editorial universitaria de Granada.

Gómez, B., & Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA, 3*(4), 169-183.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA, 7*(1), 3-42.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: the case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(4), 324-345.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 198-219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège* (Thèse de Doctorat inédite). Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, France.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Revue Repères IREM,* (59), 5-41.

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactic Situations. *Educational Studies in Mathematics,* 59(1/3), 113-151. doi: 10.1007/0-387-30451-7_5

Hodgen, J., Kuchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2010). Multiplicative reasoning, ratio and decimals: a 30-year comparison of lower secondary students' understandings. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 89-96). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Intensive quantities: Why they matter to developmental research. *British Journal of Developmental Psychology, 28*(2), 307-329. doi: 10.1348/026151009X410362

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), 391-417. doi: 10.1007/s10763-010-9249-9

Iannece, D., Mellone, M., & Tortora, R. (2010). Early multiplicative thought: a kindergarten path. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121-127). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value poportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolecents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Adquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York, NY: Academic Press.

Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 32-55). Columbus, OH: ERIC Publications; Reports - Research.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science & Mathematics, 103*(2), 92-98. doi: 10.1111/j.1949-8594.2003.tb18224.x

Lachance, A., & Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 503-526. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00087-1

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 1, pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3ra Ed.). New York, NY: Taylor & Francis.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (eds), Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 336-345). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Mamede, E. (2010). Early years mathematics – the case of fractions. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2607-2616). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Mamede, E., & Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345-352). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Martin, M., Mullis, I., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International mathematics report: Findings form IEA's trends in international mathematics and science study et the fourth and eight grades*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(3), 313-324. doi: 10.1080/00207390701691541

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92. doi: 10.1080/01443410601061462

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2009). Proportional reasoning: the strategies behind the percentages. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 9*, 25-40.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 36-53. doi: 10.1080/10986060903465822

Mullis, I., Martin, M., Olson, J., Berger, D., Milne, D., & Stanco, G. (Eds.). (2008). *TIMSS 2007 encyclopedia: A guide to mathematics and science education around the world* (Vol. 1 A-L, Vol. 2 M-Z). Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I - differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253. doi: 10.1007/BF00304357

Nunes, T. (2010). Continuities and discontinuities between informal and scientific mathematical thinking: insights for education. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 328-332). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: Challenges and insights to pupils´ implicit knowledge. *Anales de Psicología, 24*(2), 262-270.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 7*, 651-657. doi: 10.1016/j.ijer.2004.10.002

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, *8*(2), 157-182.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning an applicational meaning in the semantic of fractions and related concepts. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (Vol. 2, pp. 53-92). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Pantziarra, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). The development of informal proportional thinking in primary school. En Marianna Bosch (ed), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp 363-372). Sant Feliu de Guíxols, Spain: Universitat Ramon Llull.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence* (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2637-2646). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Ponte, J. P., & Marques, S. (2007). *Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study.* In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2443-2452). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Pontón, T. (2012). *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pontón, T. (2008). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pulos, S., & Tourniaire, F. (1985). Proportional Reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204. doi: 10.1007/BF02400937

Rojas, P., Romero, J., Mora, L. O., Bonilla, M., Rodríguez, J., & Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje*. Bogota, Colombia: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2000, Junio de 2010). From quantities to ratio, functions, and algebraic relations. Recuperado desde: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2000-earlier/quantitiesRatios.pdf

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half". *Child Development, 62*(3), 427-440. doi: 10.1111/j.1467-8624.1991.tb01542.x

Spinillo, A., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*(2), 181-197. doi: 10.1080/135467999387298

Steffe, L. (1994). Children's Multiplying Schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). New York, NY: State University of New York Press.

Steffe, L., & Olive, J. (Eds.) (2010). *Children's Fractional Knowledge*. doi:10.1007/978-1-4419-0591-8

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. Recuperado desde: http://ed.sc.edu/ite/nctm2003/FracsMultRsng.pdf

TIMSS. (2009). *TIMSS 2007 user guide for the international database*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in Elementary School. *Educational Studies in Mathematics, 17*(4), 401-412. doi: 10.1007/BF00311327

Van Dooren, W., & De Bock, D. (2008). Pupils' reasoning on proportionality: solving versus classifying missing-value word problems. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369-376). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Van Dooren, W., De Bock, D., Gillard, E., & Verschaffel, L. (2009). Add? Or multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281-288). Thessaloniki, Greece: PME.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86. doi: 10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., & Verschaffel, L. (2004). Students' overreliance on proportionality: evidence from primary school pupils solving arithmetic word problem. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 385-392). Bergen, Norway: PME.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6* (C. Frink, Trad.). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Vasco, C. (1989). Dos nuevos grupos piagetianos en la lógica elemental. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* 17(64), 29-39.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matematicas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (L. O. Segura, Trad.). México, D.F.: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). New York, NY: State University of New York Press.

Autores

Gilberto Obando Z. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación, Medellín, Colombia. gobando1715@gmail.com

Carlos Eduardo Vasco U. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctorado Interinstitucional en Educación, Bogotá, Colombia. carlosevasco@gmail.com

Luis Carlos Arboleda A. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Cali, Colombia. luis.carlos.arboleda@gmail.com