# INICIACIÓN EN LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

## (SEGUNDA PARTE)

**Por: Carlos Mario Sierra Duque**
*Universidad de Antioquia*

Este artículo es la continuación de otro publicado en el número anterior de esta revista. Su objetivo es establecer algunas generalizaciones respecto a lo escrito anteriormente y definir otras operaciones y conceptos. Se continúa con la enumeración de títulos, ecuaciones y ejemplos, que se traía en el anterior artículo, correspondiendo iniciar acá con el numeral 4.

### 4. RELACIONES BORROSAS

Sean $U_i$, $i = 1,...,k$, universos de discurso; Una relación borrosa, $\underline{R}$, es un subconjunto borroso definido en $U_1$ X...X $U_k$ . Al igual que un subconjunto borroso en una dimensión, una relación borrosa se puede ver como un mapeo funcional; veamos:

(27) $\mu_{\underline{R}}(u1,...,u_k) : U_1 \text{ X...X } U_k \rightarrow M$

donde $M$ conserva el significado dado hasta el momento

y $u_1 \in U_1,...,u_k \in U_k$, respectivamente.

Empleando la notación vista para conjuntos borrosos, una relación borrosa, $\underline{R}$, puede denotarse como:

(28) $\underline{R} = \int_{U_1 \text{ X ... X } U_k} \mu_{\underline{R}}(u_1,...,u_k)/(u_1,...,u_k)$

Ahora bien, como una relación borrosa es un conjunto borroso definido en varias dimensiones, las operaciones descritas hasta el momento, para aquellos, se conservan también para estas últimas.

A continuación se definirán algunas operaciones sobre relaciones borrosas y también algunos principios o identidades que son fundamentales en la teoría.

*Ejemplo 15.*

Sea ***Semejanza*** la relación borrosa binaria que simboliza el "parecido físico" entre los hijos y sus padres en una familia cualquiera:

***HIJOS*** = {*Carlos, Jorge*}, ***PADRES*** = {*Mario, Olga*}

***Semejanza*** = 0.4/(*Carlos, Mario*) + 0.85/(*Carlos, Olga*) + 0.7/(*Jorge, Mario*) + 0.3/(*Jorge, Olga*)

### 4.1 Proyección de una relación Borrosa.

Cuando se tiene una relación n-dimensional podría ser de importancia definir la manera de generar una relación borrosa en un subespacio del primero, k-dimensional, donde k < n.

Sea $\underline{R}$ una relación borrosa n-aria en $U_1$ X...X $U_n$, . La proyección en $Ui_1$ X...X $Ui_k$ es una relación borrosa k-aria, $\underline{R}q$, definida por:

$$(29) \quad \underline{R}q \ \Delta \ Proy\ \underline{R} \text{ en } Ui_1 \text{ X...X } Ui_k$$
$$\Delta \ Pq\ \underline{R}$$
$$\Delta \int_{Ui_1 \text{ X...X } Ui_k} [\vee_{u(q')} \ \mu_{\underline{R}}(u_1,...,u_k)]/(ui_1,...,ui_k)$$

donde $q$ es la secuencia indexada $(i_1,...,i_k)$; $u(q)\ \Delta\ (ui_1,...,ui_k)$; $q'$es la secuencia complemento de $q$; $\vee_{u(q')}$ es el valor supremo de $\mu_{\underline{R}}(u_1,...,u_k)$ sobre los $u$ que están en $u(q')$.

*Ejemplo 16.*

Se tiene la relación borrosa ternaria **CONTEXTURA GRUESA, *CG*,** (en hombres) comprendida en los universos: EDAD = {*20, 35, 50*}, ***ESTATURA*** = {*1.60, 1.80, 1.90*}, ***PESO*** = {*50, 75, 100*}, así: $U_1$ = *EDAD*, $U_2$ = *ESTATURA*, $U_3$ = *PESO.*

***CG*** = *0.3/(20, 1.60, 50) + 0.5/(20, 1.60, 75) + 1.0/(20, 1.60, 100) + 0.2/(20, 1.80, 50) + 0.4/(20, 1.80, 75) + 0.9/(20, 1.80, 100) + 0.3/(20, 1.90, 75) + 0.8/(20, 1.90, 100) + 0.2/(35, 1.60, 50) + 0.3/(35, 1.60, 75) + 0.8/(35, 1.60, 100) + 0.1/(35, 1.80, 50) + 0.2/(35, 1.80, 75) + 0.7/(35, 1.80, 100) + 0.5/(35, 1.90, 75) + 0.6/(35, 1.90, 100) + 0.1/(50, 1.60, 75) + 0.6/(50, 1.60, 100) + 0.4/(50, 1.80, 75) + 0.5/(50, 1.80, 100) + 0.3/(50, 1.90, 75) + 0.2/(50, 1.90, 100)*

$\underline{CG}_{EDAD}$ = *1.0/20 + 0.8/35 + 0.6/50.*

Para este caso, $q = (1)$, $q' = (2,3)$

$\underline{CG}_{ESTATURA}$ = *1.0/1.60 + 0.9/1.80 + 0.8/1.90,*

donde $q = (2)$, $q' = (1,3)$

$\underline{CG}_{PESO}$ = *0.3/50 + 0.5/75 + 1.0/100*

con $q = (3)$, $q' = (1,2)$

$\underline{CG}_{EDAD,ESTATURA)}$ = *1.0/(20, 1.60) + 0.9/(20, 1.80) + 0.8/(20, 1.90) + 0.8/(35, 1.60) + 0.7/(35, 1.80) + 0.6/(35, 1.90) + 0.6/(50, 1.60) + 0.4/(50, 1.80) + 0.3/(50, 1.90)* . Con $q = (1,2)$, $q' = (3)$

$\underline{CG}_{,EDAD,PESO)}$ = *0.3/(20, 50) + 0.5/(20, 75) + 1.0/(20, 100) + 0.2/(35, 50) + 0.5/(35, 75) +0.8/(35, 100) + 0.4/(50, 75) + 0.6/(50, 100)*. Con $q = (1,3)$, $q' = (2)$

$\underline{CG}_{(ESTATURA,PESO)}$ = *0.3/(1.60, 50) + 0.5/(1.60, 75) + 1.0/(1.60, 100) + 0.2/(1.80, 50) + 0.4/(1.80, 75) + 0.9/(1.80, 100) + 0.5/(1.90, 75) + 0.8/(1.90, 100)* Con $q$= *(2,3)*, $q'$ = *(1)*

### 4.2 Extensión Cilíndrica de una Relación borrosa.

Antes de entrar a la formalización de lo que es extensión cilíndrica, refirámonos a ella de manera intuitiva. Suponga que se tiene una relación borrosa $\underline{R}$ en $U_1$ X...X $U_n$. La pregunta es, si se deseara construir un conjunto borroso $\underline{R}$ en un hiperespacio del primero, y a partir de tal relación borrosa $\underline{R}$, de qué manera lo debería hacer?

Observando la definición de lo que es la proyección de una relación borrosa, se puede determinar que varias relaciones borrosas n-arias en $U_1$ X...X $U_k$ pueden resultar con la misma proyección $\underline{R}q$ en $Ui_1$ X...X $Ui_k$. Ahora bien, dada una relación $\underline{R}q$ en $Ui_1$ X...X $Ui_k$ existe sólo una relación $\underline{R}q$ en $U_1$ X...X $U_n$, la más grande en el sentido que contiene a todas las otras relaciones, cuya proyección en $Ui_1$ X...X $Ui_k$ sea $\underline{R}q$ ; a esta relación se la calcula como:

$$(30)\ \underline{R}q \ \Delta \int_{U_1 X ... X U_n} \mu\underline{R}q(ui_1,...,ui_k)/(u_1,...,u_n)$$

en vista de lo anterior, el valor de $\underline{R}q$ en el punto $(u_1,...,u_n)$ es igual al del punto $(u_1,...,u_n)$ en la misma relación, siempre y cuando los argumentos en $i_1,...,i_k$, en ambas n-tuplas, sean los mismos.

Con base en la definición de extensión cilíndrica, $\underline{R}$ satisface la relación de inclusión:

(31) $\underline{R} \subset \underline{R}q \ \forall\ q$

O sea, "Cualquier relación $\underline{R}$ en $U_1$ X...X $U_n$, está incluida en la extensión cilíndrica, $\underline{R}q$, también en el mismo espacio, de cualquiera de sus proyecciones $\underline{R}q$".

y, por tanto:

(32) $\underline{R} \subset \underline{R}q_1 \cap ... \cap \underline{R}q_k$ para $q_1,...,q_k$ arbitrarios.

Si se establece el caso particular en el que $q_1 = 1,...,q_k = n$ entonces

(33) $\underline{R} \subset \underline{R}_1 \cap ... \cap \underline{R}_n$

donde $\underline{R}_1,...,\underline{R}_n$ son las proyecciones de $\underline{R}$ en $U_1,...,U_n$, respectivamente ,y $\underline{R}_1,...,\underline{R}_n$ son sus extensiones cilíndricas en *U1* X...X *Un*. Si se vuelve a mirar la definición de producto cartesiano, comprobará que

(34) $\underline{R}_1 \cap ... \cap \underline{R}_n = \underline{R}_1$ X...X $\underline{R}_n$.

*Ejemplo 17.*

Retomemos información del *Ejemplo 16*, y obtengamos lo siguiente:

$\underline{CG}_{ESTATURA}$ = *1.0/(20, 1.60, 50) + 1.0/(20, 1.60, 75) + 1.0/(20, 1.60, 100) + 0.9/(20, 1.80, 50) + 0.9/(20, 1.80, 75) + 0.9/(20, 1.80, 100) + 0.8/(20, 1.90, 50) + 0.8/(20, 1.90, 75) + 0.8/(20, 1.90, 100) + 1.0/(35, 1.60, 50) + 1.0/(35, 1.60, 75) + 1.0/(35, 1.60, 100) + 0.9/(35, 1.80, 50) + 0.9/(35, 1.80, 75) + 0.9/(35, 1.80, 100) + 0.8/(35, 1.90, 50) + 0.8/(35, 1.90, 75) + 0.8/(35, 1.90, 100) + 1.0/(50, 1.60, 50) + 1.0/(50, 1.60, 75) + 1.0/(50, 1.60, 100) + 0.9/(50, 1.80, 50) + 0.9/(50, 1.80, 75) + 0.9/(50, 1.80, 100) + 0.8/(50, 1.90, 50) 0.8/(50, 1.90, 75) + 0.8/(50, 1.90, 100)*

$\underline{CG}_{(EDAD,ESTATURA)}$ = *1.0/(20, 1.60, 50) + 1.0/(20, 1.60, 75) + 1.0/(20, 1.60, 100) + 0.9/(20, 1.80, 50) + 0.9/(20, 1.80, 75) + 0.9/(20, 1.80, 100) + 0.8/(20, 1.90, 50) + 0.8/(20, 1.90, 75) + 0.8/(20, 1.90, 100) + 0.8/(35, 1.60, 50) + 0.8/(35, 1.60, 75) + 0.8/(35, 1.60, 100) + 0.7/(35, 1.80, 50) + 0.7/(35, 1.80, 75) + 0.7/(35, 1.80, 100) + 0.6/(35, 1.90, 50) + 0.6/(35, 1.90, 75) + 0.6/(35, 1.90, 100) + 0.6/(50, 1.60, 50) + 0.6/(50, 1.60, 75) + 0.6/(50, 1.60, 100) + 0.4/(50, 1.80, 50) + 0.4/(50, 1.80, 75) + 0.4/(50, 1.80, 100) + 0.3/(50, 1.90, 50) + 0.3/(50, 1.90, 75) + 0.3/(50, 1.90, 100)*

### 4.3 Composición de Relaciones Borrosas.

Sean $\underline{R}$, $\underline{Q}$ relaciones de $U_1$ a $U_2$ (o lo que es lo mismo, en $U_1$ X $U_2$) y $U_2$ a $U_3$, respectivamente, la composición de $\underline{R}$ y $\underline{Q}$ es una relación borrosa en *U1* X *U3* denotada como $\underline{R} \circ \underline{Q}$ y definida por:

$$(35)\ \underline{R} \circ \underline{Q} = \int_{U_1 X U_3} \vee u_2\ [\mu_{\underline{R}}(u_1, u_2).\wedge.\mu_{\underline{Q}}(u_2, u_3)]/(u_1, u_3)$$

Examinando la definición de extensión cilíndrica, se puede suministrar una interpretación intuitiva de lo que es la composición de relaciones borrosas. Suponga que $\underline{R}$ y $\underline{Q}$ son dos relaciones borrosas. Sean, además, $\underline{R}$, $\underline{Q}$ las extensiones cilíndricas de $\underline{R}$, $\underline{Q}$ en $U_1$ X $U_2$ X $U_3$, entonces de la definición de $\underline{R} \circ \underline{Q}$ se tiene que

(36) $\underline{R} \circ \underline{Q}$ = Proy $\underline{R} \cap \underline{Q}$ en $U_1$ X $U_3$.
= Proy $\underline{R}$ X $\underline{Q}$ en $U_1$ X $U_3$.

*Ejemplo 18.*

Se tiene la relación $\underline{R}$ en ***DEPORTES*** X ***PERSONAS***, donde ***DEPORTES*** = {*Ajedrez, Tejo*}, ***PERSONAS*** = {*María, Amparo, Gloria*}, y una relación borrosa $\underline{Q}$ en ***PERSONAS*** X ***COMIDAS*** con ***COMIDAS*** = {*Lasagna, Frijoles, Pollo*}, veamos tales relaciones:

$\underline{R}$ = {*0.6/(Ajedrez,María) + 0.2/(Ajedrez,Amparo) + 0.3/(Ajedrez,Gloria) + 1.0/(Tejo,Amparo) + 0.8/(Tejo,Gloria)* }

$\underline{Q}$ = {*0.8/(María,Lasagna) + 0.5/(Maria, Frijoles) +*

$0.5/(Maria,\ Pollo) + 0.4/(Amparo,\ Frijoles) + 0.4/(Amparo,\ Pollo) + 0.9/(Gloria, Lasagna) + 1.0/(Gloria, Frijoles) + 0.2/(Gloria, Pollo)\ \}$

$\underline{\mathbf{R}} \circ \underline{\mathbf{Q}} =$

$\{\vee[(0.6/(Ajedrez, María) \wedge 0.8/(María, Lasagna)), (0.3/(Ajedrez, Gloria) \wedge 0.9/(Gloria, Lasagna)] + \vee[(0.6/(Ajedrez, María) \wedge 0.5/(Maria, Frijoles)), (0.2/(Ajedrez, Amparo) \wedge 0.4/(Amparo, Frijoles)), (0.3/(Ajedrez, Gloria) \wedge 1.0/(Gloria, Frijoles)]$
$+\vee[(0.6/(Ajedrez, María) \wedge 0.5/(Maria, Pollo)), (0.2/(Ajedrez, Amparo) \wedge 0.4/(Amparo, Pollo)), (0.3/(Ajedrez, Gloria) \wedge 0.2/(Gloria, Pollo))]$
$+\vee[0.8/(Tejo, Gloria) \wedge 0.9/(Gloria, Lasagna)]$
$+\vee[(1.0/(Tejo, Amparo) \wedge 0.4/(Amparo, Frijoles)), (0.8/(Tejo, Gloria) \wedge 1.0/(Gloria, Frijoles))]$
$+\vee[1.0/(Tejo, Amparo) \wedge 0.4/(Amparo, Pollo)), (0.8/(Tejo, Gloria) \wedge 0.2/(Gloria, Pollo)]\}$

$\underline{\mathbf{R}} \circ \underline{\mathbf{Q}} = \{0.6/(Ajedrez, Lasagna) + 0.5/(Ajedrez, Frijoles) + 0.5/(Ajedrez, Pollo) + 0.8/(Tejo, Lasagna) + 0.8/(Tejo, Frijoles) + 0.4/(Tejo, Pollo)\}$

## 5. El Principio de Extensión.†

Es un axioma de fundamental importancia en la teoría, pues suministra el soporte formal para extender los conceptos matemáticos de la teoría no borrosa en ambientes borrosos. Específicamente, en la teoría clásica matemática, las operaciones se efectúan sobre elementos o puntos pertenecientes al dominio o universo de discurso; mediante el principio de extensión se pueden generalizar las definiciones para efectuar las mismas operaciones ya no sobre elementos o puntos del dominio, sino sobre conjuntos o relaciones borrosas del universo en cuestión, veamos:

Considere un mapeo Γ de $\mathbf{U}1$ en $\mathbf{U}2$, denotado por:

(37) $\quad \mathbf{U}1 \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{U}2$

y sea $\underline{\mathbf{A}}$ un subconjunto borroso de $\mathbf{U}_1$ expresado como:

(38) $\quad \underline{\mathbf{A}} = \mu_{\underline{A}}(u_1)/\ u_1 + .... + \mu_{\underline{A}}(u_N)\ /\ u_N$

entonces el principio de extensión asegura que se induce un subconjunto borroso $\underline{\mathbf{B}}$ en $\mathbf{U2}$ de la siguiente forma:

(39) $\quad \underline{\mathbf{B}} = \Gamma(\underline{\mathbf{A}}) = \Gamma(\mu_A(u1)/\ u1 + ... + \mu_{\underline{A}}(uN)/\ uN) \equiv \mu_{\underline{A}}(u1)/\Gamma(u1) + ... + \mu_{\underline{A}}(uN)/\Gamma(uN)$

Si el $Sop(\underline{\mathbf{A}})$ es el continuo, o sea:

(40) $\quad \underline{\mathbf{A}} = \int_{U} \mu_{\underline{A}}(u)/u$

entonces el principio de extensión asume la siguiente forma:

(41) $\underline{\mathbf{B}} = \Gamma(\underline{\mathbf{A}}) = \Gamma\left(\int_{U_1} \mu_{\underline{A}}(u)/u\right) \equiv \int_{U_2} \mu_{\underline{A}}(u)/\Gamma(u)$

Efectuando una generalización del principio de extensión para el caso en que Γ sea un mapeo n-ario desde $\mathbf{U}_1$ X...X $\mathbf{U}_n$ a $\mathbf{V}$, y $\underline{\mathbf{A}}$ un conjunto (relación) borroso de $\mathbf{U}_1$ X...X $\mathbf{Un}$ que está distinguido por su función característica $\mu(u1,...,un)$, con $ui$, $i = 1,...,n$ denotando puntos genéricos en $\mathbf{Ui}$, se obtiene:

(42) $\underline{\mathbf{B}} = \Gamma(\underline{\mathbf{A}}) = \Gamma\left(\int_{U_1 \text{X...X} U_n} \mu_{\underline{A}}(u_1,...,u_n)/(u_1,...,u_n)\right)$
$\equiv \int_{V} \mu_{\underline{A}}(u_1,...,u_n)/\Gamma(u_1,...,u_n)$

Ahora bien, se puede ampliar aún más el alcance del principio de forma que trate con el caso en que el mapeo Γ desde $\mathbf{U}_1$ X...X $\mathbf{U}_n$ a $\mathbf{V}$ sea borroso, o sea Γ, donde $\mu(u_1,...,u_n,v)$, es la función que caracteriza el mapeo borroso Γ, $\underline{\mathbf{A}}$ es un subconjunto borroso de $\mathbf{U}_1$ X...X $\mathbf{U}_n$ con su función característica $\mu(u_1,...,u_n)$, y $\underline{\mathbf{B}}$ es el subconjunto borroso inducido en $\mathbf{V}$,‡ mediante la siguiente forma:

(43) $\underline{\mathbf{B}} = \Gamma(\underline{\mathbf{A}}) = \Gamma\left(\int_{U_1 \text{X...X} U_n} \mu_{\underline{A}}(u_1,...,u_n)/(u_1,...,u_n)\right)$
$\equiv \int_{V} \vee_{(u1,...,un)} [\mu\Gamma\ (u_1,...,u_n, v) \wedge \mu_{\underline{A}}(u_1,...,u_n)]\ /\Gamma(u_1,...,u_n)$

Volviendo al caso de un mapeo no borroso Γ, se puede presentar la posibilidad de que él sea un mapeo funcional $\mathbf{f}$ donde la fórmula adquiere la forma:

(44) $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{A}}) = \mathbf{f}\left(\int_{U1 \text{X...X} Un} \mu\underline{\mathbf{A}}(u_1,...,u_n)/(u_1,...,u_n)\right)$
$\equiv \int_{V} \mu_{\underline{A}}(u_1,...,u_n)/\ \mathbf{f}(u_1,...,u_n)$

que es la forma más frecuente de encontrar el principio de extensión.

*Ejemplo 19.*

Suponga que se tiene la ecuación $x^4 - 4x + y^2 = 0$ que establece la **relación no borrosa** $y = \pm\ x(4 - x^2)^{1/2}$ y, además, el subconjunto borroso de $\mathbf{R}$, $\underline{\mathbf{A}} = 0.9/\text{-}2 + 0.4/(\text{-}3/2) + 1/\text{-}1 + 0.6/(\text{-}1/2) + 0.5/0 + 0.8/(1/2) + 0.3/1 + 0.2/(3/2) + 0.7/2$. La relación no-borrosa puede considerarse como la unión de las dos funciones $\mathbf{f}_1(x) = x(4 - x2)^{1/2}$ y $\mathbf{f}_2(x) = -\ x(4 - x2)^{1/2}$, o sea:

$\Gamma(x) = \mathbf{f}_1(x) \cup \mathbf{f}_2(x)$

Luego,

$\underline{\mathbf{B}} = \Gamma(\underline{\mathbf{A}}) = \mathbf{f}_1(\underline{\mathbf{A}}) \cup \mathbf{f}_2(\underline{\mathbf{A}})$

$= 0.9/f_1(-2) + 0.4/f_1(-3/2) + 1.0/f_1(-1) + 0.6/f_1(-1/2) + 0.5/f_1(0) + 0.8/f_1(1/2) + 0.3/f_1(1) + 0.2/f_1(3/2) + 0.7/f_1(2) + 0.9/f_2(-2) + 0.4/f_2(-3/2) + 1.0/f_2(-1) + 0.6/f_2(-1/2) + 0.5/f_2(0) + 0.8/f_2(1/2) + 0.3/f_2(1) + 0.2/f_2(3/2) + 0.7/f_2(2)$

$= 0.9/0.0 + 0.4/-1.98 + 1.0/-1.73 + 0.6/-0.97 + 0.5/0.0 + 0.8/0.97 + 0.3/1.73 + 0.2/1.98 + 0.7/0.0 + 0.9/0.0 + 0.4/1.98 + 1.0/1.73 + 0.6/0.97 + 0.5/0.0 + 0.8/-0.97 + 0.3/-1.73 + 0.2/-1.98 + 0.7/0.0$

$\underline{B} = 0.4/-1.98 + 1.0/-1.73 + 0.8/-0.97 + 0.9/0.0 + 0.8/0.97 + 1.0/1.73 + 0.4/1.98$

---

† Este tema se puede encontrar en otros fuentes como ***Subconjuntos borrosos inducidos por un mapeo***

‡ A este tema lo pueden tratar en otras textos como ***Subconjuntos borrosos Condicionados***.

# BIBLIOGRAFIA

KAUFMANN, A. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Vol. I. New York, Academic Press, Inc., 1975. pp. 1-87, 167-172.

MOLINA, J.F. Teoría de Subconjuntos Borrosos y Sistemas Expertos. Revista Universidad EAFIT, Medellín, No. 76, pp. 27-40, octubre-diciembre , 1989 .

VIRGIL, N. Expert Systems and Fuzzy Systems. Menlo Park, California, The Benjamin/Cummings Company, Inc., 1985. pp.1-116,165-168.

KANDEL, A. Fuzzy Mathematical Techniques With Applications. Addison-Wesley Publishing Company. 274 p.

PRADE, H. & DUBOIS D. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, Inc. San Diego. 1980. 393 p.