



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**Facultad de Educación**

***INTERACCIÓN DE UN COLECTIVO DE HUMANOS–CON–MEDIOS  
EN UN CURSO DE MATEMÁTICAS A DISTANCIA VIRTUAL***

**Trabajo presentado para optar al título de Doctor en Educación: Línea de Educación  
Matemática**

**EDISON ALBERTO SUCERQUIA VEGA**

**Asesores:**

**CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ**

Doctor en Ciencias Matemáticas

**RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO**

Doctor en Educación

**Medellín 2016**





UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



***INTERACCIÓN DE UN COLECTIVO DE HUMANOS–CON–MEDIOS  
EN UN CURSO DE MATEMÁTICAS A DISTANCIA VIRTUAL***

EDISON ALBERTO SUCERQUIA VEGA

Tesis para optar al título de Doctor en Educación, Línea de Educación Matemática

**Asesores:**

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

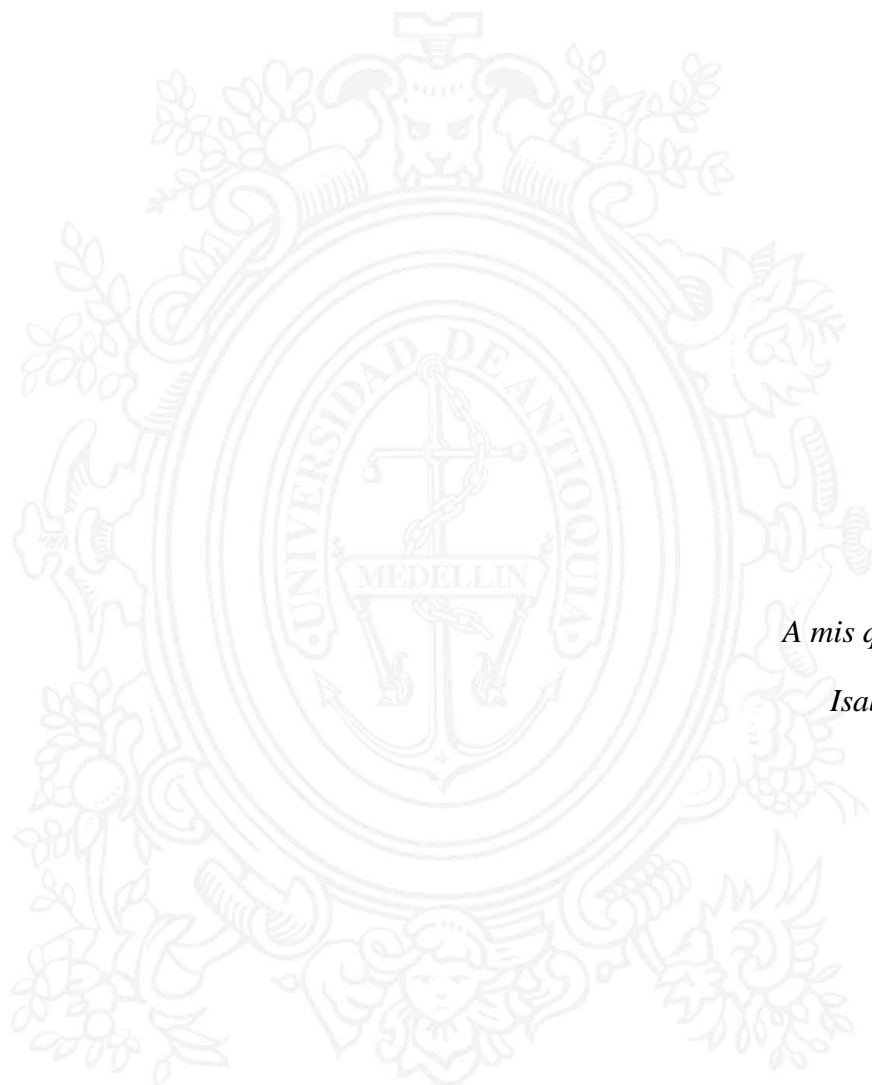
Doctor en Ciencias Matemáticas

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO

Doctor en Educación

Este estudio se enmarca en el proyecto de investigación “La formación posgraduada de profesores de matemáticas en un ambiente de educación online” aprobado por COLCIENCIAS con código N° 111562838729 de la convocatoria 628 de 2013, que se desarrolla entre los grupos de investigación *Educación Matemática e Historia (Udea-Eafit)* - EDUMATH de Colombia y el *Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática – GPIMEM* de Brasil





*A mis queridos hijos,*

*Isabella y Felipe.*

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



## AGRADECIMIENTOS

Este proceso de formación representa un gran logro, tanto académico como profesional, pero no es un mérito sólo individual, se debe también al apoyo de muchas personas que con sus comentarios, sugerencias, críticas y acompañamiento, motivaron el desarrollo de esta investigación. En especial, quiero agradecer en primera instancia a mis asesores, los doctores Carlos Mario Jaramillo López y René Alejandro Londoño Cano, por su incondicional apoyo y acompañamiento durante todo el proceso formativo. De igual manera, extendo mis agradecimientos a los profesores y compañeros del grupo de investigación Educación Matemática e Historia Udea-Eafit – EDUMATH, por su respaldo para desarrollar el proceso de formación doctoral y la presente investigación, así como también a la Dra. Luz Stella Mejía Aristizábal, por sus observaciones y sugerencias.

También quiero expresar mis agradecimientos a la Facultad de Ingeniería, específicamente a la unidad de virtualidad Ude@, quienes desde comienzos de esta investigación apoyaron el trabajo investigativo que se desarrollaba en este contexto, suministrando la información requerida y brindando el espacio para la toma de datos y registros.

De igual manera extendo mis agradecimientos al *Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática* (GPIMEM) de la Universidad Estadual Paulista “Julio Mesquita Filho” UNESP de Brasil, por su acogida durante el tiempo de pasantía y los aportes realizados a la investigación. Así mismo, al Grupo de investigación y desarrollo en TIC (GidiTIC) de la Universidad EAFIT de Colombia, por el espacio brindado para complementar las reflexiones realizadas al proceso investigativo.

En general, quiero agradecer a mis familiares, colegas y amigos, quienes durante todo este proceso de formación, comprendieron su importancia y me apoyaron de diferentes maneras para que alcanzara esta gran meta, que se logra con la culminación de esta investigación.

¡Muchas gracias a todos!



## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	9
CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO .....	15
1.1. Problema de investigación .....	16
1.2. Educación a distancia virtual en Colombia.....	18
1.2.1. Pasado y presente de la educación a distancia virtual.....	19
1.2.2. Concepciones de la educación a distancia virtual .....	24
1.2.3. Proyección de la educación a distancia virtual .....	30
1.3. Ude@ Educación virtual.....	35
1.3.1. Antecedentes históricos de Ude@ .....	36
1.3.2. Modelo pedagógico de Ude@ .....	39
1.3.3. Ambientes virtuales de aprendizaje de Ude@ .....	41
1.3.4. Programas de Ude@ .....	46
1.3.4.1. Pregrados.....	46
1.3.4.2. Posgrados .....	48
1.3.4.3. Vamos para la universidad.....	50
1.3.5. Cursos de Matemáticas en Ude@ .....	52
1.3.6. La interacción en un curso de matemáticas.....	53
1.4. Complejidad de la educación a distancia virtual.....	55
1.5. Pregunta de investigación .....	58
1.6. Objetivos.....	59
1.6.1. Objetivo general.....	59
1.6.2. Objetivos específicos .....	59
CAPÍTULO 2. REFERENTES SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL .....	61
2.1. Constructo teórico humanos–con–medios .....	62
2.2. Interacción y aprendizaje en ambientes virtuales.....	65





2.3.	Concepciones acerca de la interacción.....	68
2.4.	Producción de conocimiento matemático en educación a distancia virtual .....	72
2.5.	Conocimientos matemáticos de un curso de cálculo en educación a distancia virtual .....	76
2.5.1.	Límite.....	78
2.5.2.	Continuidad.....	90
2.5.3.	Teorema fundamental del cálculo .....	95
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA .....		115
3.1.	Enfoque de la investigación .....	115
3.2.	Teoría fundamentada.....	118
3.2.1.	Procedimientos de codificación .....	120
3.2.1.1.	Codificación abierta .....	120
3.2.1.2.	Codificación axial .....	122
3.2.1.3.	Codificación selectiva.....	126
3.3.	Análisis a partir la teoría fundamentada .....	130
3.4.	Trabajo de campo.....	131
3.4.1.	Descripción general.....	131
3.4.2.	Colectivo de humanos-con-medios.....	133
3.4.3.	Técnicas para la recolección de la información .....	134
3.4.4.	Proceso de recolección de los datos .....	134
3.4.5.	Proceso de análisis de la información .....	136
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS.....		139
4.1.	Desarrollo de un curso virtual de cálculo integral .....	139
4.1.1.	Interacciones previas a la producción del teorema fundamental del cálculo .....	143
4.1.2.	Interacciones asociadas a la producción del teorema fundamental del cálculo .....	161
4.1.3.	Interacciones relacionadas con la aplicación del teorema fundamental del cálculo .....	167
4.2.	Proceso de categorización de las interacciones.....	175
4.2.1.	Interacciones asociadas a la producción del teorema fundamental del cálculo .....	175
4.2.2.	Relaciones entre las interacciones.....	180
4.2.3.	Refinamiento de la teoría de la interacción.....	189
4.3.	Teoría de la interacción para cursos de matemática virtuales .....	194
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES .....		199
5.1.	Consecución de los objetivos .....	199





5.2. Aportes a la educación matemática.....	201
5.3. Cursos de matemática en la educación a distancia virtual .....	204
5.4. Potencialidades de la educación a distancia virtual para la enseñanza de las matemáticas .....	210
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	215
ANEXOS .....	221
A. Cronograma de un curso de cálculo integral.....	222
B. Medios de Ude@ .....	225
C. Cursos de cálculo integral semestre 2015-1 .....	226
D. Divulgación de la investigación.....	227
D.1. Participación en eventos.....	227
D.2. Artículos publicados .....	235
D.2.1. Publicación 1.....	235
D.2.2. Publicación 2.....	236
D.2.3. Publicación 3.....	237
D.2.4. Publicación 4.....	237
E. Estadísticas sobre Ude@ .....	239
F. Articulación del estudio en el marco del proyecto CAPES – COLCIENCIAS .....	244

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



## INTRODUCCIÓN

La educación matemática es un campo que actualmente se encuentra en constante transformación y apertura de nuevos objetos de estudio, reconociéndose diversas temáticas de investigación, como por ejemplo: modelos cognitivos y estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; historia, filosofía y epistemología de las matemáticas en la educación matemática; modelación matemática; y tecnologías de la información y la comunicación en la educación matemática.

Este estudio se enmarca en el campo de las tecnologías de la información y la comunicación, especialmente en cursos que se realizan en ambientes virtuales de aprendizaje en educación superior a distancia. Cabe anotar que la investigación se desarrolla en el contexto del programa de educación virtual de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia llamando Ude@, en el que se ofertan programas académicos para la formación profesional de estudiantes de ingeniería y también, se apoyan otros programas de la Universidad a través de la virtualidad.

Derivado de la revisión de la literatura, el trabajo de campo y la experiencia docente en cursos de matemáticas en educación a distancia virtual, se han logrado identificar características relacionadas con procesos de interacción, los cuales, con el desarrollo de esta investigación en el contexto del programa de educación virtual Ude@, se han denominado *categorías de interacción*, que abordan de manera diferenciada una descripción del conjunto de posibles interacciones que puede realizar un colectivo de humanos–con–medios, en relación con la producción de conocimiento matemático en este tipo de contextos. Este estudio centra sus esfuerzos en analizar este conjunto de interacciones en los cursos de matemáticas en educación a distancia virtual lo que, con los resultados del mismo, se consolida como una postura teórica y metodológica que pueda orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de Ude@.



Se emplea el término humanos-con-medios, de acuerdo con los aspectos planteados en el constructo teórico *Humans-with-Media*<sup>1</sup>, que hace referencia a que la tecnología se encuentra estrechamente relacionada con los seres humanos, modificando tanto la conducta del ser humano como la manera en que produce conocimiento matemático y que por tal motivo se considera como una unidad que no puede estar desligada. Este constructo teórico reconoce que uno de los aspectos importantes en el desarrollo de cursos en la educación a distancia es la *interacción*, mencionando que este fenómeno se encuentra involucrado cuando se utilizan las salas de chat, videoconferencia, foros, entre otros. Sin embargo, las características de este fenómeno no se describen de manera detallada en este constructo, lo cual genera interés y motiva para que éste sea observado en el presente estudio, principalmente en cursos de matemáticas de Ude@.

Aunque la producción de conocimiento matemático es un aspecto importante en la investigación, este es un fenómeno complejo, en el cual están involucrados diferentes factores no solo los relacionados con la interacción, sino también, aspectos sociales, cognitivos, experiencias, emociones, entre otros. Sin embargo, se reconoce a partir del constructo teórico que, una producción de conocimiento se considera como un resultado del proceso de interacción. Es por esto que, antes de abordar un estudio centrado en la producción de conocimiento matemático o el tipo de conocimiento producido por un colectivo de humanos-con-medios, es necesario analizar la manera cómo este colectivo interactúa en un curso de matemáticas, considerando así, que la producción es una consecuencia del fenómeno de la interacción.

Dado lo anterior, y con el propósito de realizar aportes de tipo teórico en este campo, se ha identificado que el enfoque investigativo más apropiado es el cualitativo, en el que se pretende analizar, a partir de un fenómeno del contexto real, las características de las interacciones que un colectivo de humanos-con-medios realiza para producir conocimiento matemático. En vista de que no se ha logrado identificar una teoría en este campo para este contexto, se implementa la teoría fundamentada como un procedimiento sistemático cualitativo, de tal manera, que posibilite construir una perspectiva teórica que describa cómo son el conjunto de interacciones llevadas a

---

<sup>1</sup> Su traducción al español será considerada en este estudio como, humanos-con-medios, el cual está unido por los guiones de acuerdo a lo planteado en el constructo teórico, para resaltar que es una unidad pensante entre el colectivo de seres humanos y los medios para producir conocimiento matemático. Estas concepciones serán ampliadas en el Capítulo 2.



cabo por un colectivo de humanos–con–medios en educación a distancia virtual para producir conocimiento matemático, pretendiendo así, realizar dichos aportes teóricos.

El presente estudio es producto del proceso de formación como estudiante de la décima cohorte del programa de *Doctorado en Educación*, adscrito a la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, en la Línea de Educación Matemática. Este programa se encuentra apoyado por el Grupo de investigación *Educación Matemática e Historia (Udea-Eafit) – EDUMATH*, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la misma universidad. Esta investigación se enmarca en una de las líneas del grupo: *Tecnologías de la Información y la comunicación en la Educación Matemática*, específicamente, en cursos de matemáticas que se desarrollan en Educación a Distancia Virtual. A continuación, se ilustra el contenido de esta tesis describiendo cada uno de los capítulos.

El capítulo 1 describe algunos aspectos generales sobre la naturaleza de los programas de educación a distancia en Colombia, centrando la atención en la modalidad de educación a distancia virtual. Posteriormente, se describen las características del contexto educativo en el que se desarrolla el estudio, programa de educación virtual Ude@, retomando algunos momentos significativos que en sus inicios permitieron el desarrollo de cursos a distancia y virtuales, centrando especialmente la atención en la interacción en cursos de matemáticas. Teniendo en cuenta estos aspectos, se describen algunos elementos que se consideran hacen complejo el proceso de interacción en estos ambientes y, por último, se presentan los planteamientos que llevan a fundamentar el problema de investigación y los objetivos.

El capítulo 2 describe algunos referentes teóricos que se revisaron, con el propósito de delimitar posturas conceptuales y teóricas en el campo de la educación a distancia virtual en el contexto de la educación matemática, resaltando principalmente, características y concepciones de la interacción en este tipo de ambientes. Aunque durante el proceso investigativo se realizaron diferentes rastreos bibliográficos, este estudio se identifica con los planteamientos del constructo teórico humanos–con–medios, el cual aborda el uso de las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y presenta algunos ejemplos de cómo se desarrollaron cursos de matemáticas en la educación a distancia virtual.



El constructo teórico humanos–con–medios, plantea diferentes situaciones que han sido objeto de estudio en la educación a distancia virtual en el campo de la educación matemática, entre ellas están: algunos cursos de formación continua de profesores a distancia y virtual en Brasil centrados en video conferencias y diálogos por chat; la producción de conocimiento matemático a través de la noción de colectivo pensante de seres–humanos–con–medios; la visualización de conocimientos matemáticos a través de software de geometría dinámica para la solución de problemas, entre otras. Sin embargo, en relación con la interacción en educación a distancia virtual, se considera que se deben indagar por las características de este fenómeno, especialmente cursos de matemáticas de Ude@, además, es necesario desarrollar estudios que describan las complejidades o dificultades y posibilidades o alternativas que permiten la interacción en cursos de matemáticas en estos ambientes virtuales.

Por otra parte, en este capítulo se describen algunos conocimientos matemáticos, que se abordan en el contexto de un curso de cálculo integral de Ude@, estableciendo una relación entre estos conocimientos y las tecnologías que se utilizan para su enseñanza. Además, se hace énfasis en las interacciones que pueden ocurrir a partir de la naturaleza del conocimiento matemático y los medios propios Ude@.

El capítulo 3 aborda el método investigativo seleccionado que pretende alcanzar el propósito del estudio, es decir, cómo analizar las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios en educación a distancia virtual, de tal manera, que se puedan realizar aportes de tipo metodológico y teórico en este campo. La *teoría fundamentada*, a partir de un diseño sistemático, describe procedimientos de codificación que permiten el análisis de un fenómeno y, a partir de ahí, identificar, en los datos, propiedades y dimensiones que conlleven a el establecimiento de categorías y un esquema teórico que se constituyen en componentes fundamentales para la teorización. Es importante anotar que, aunque este método no parte de una teoría preconcebida, es posible implementarlo para ampliar aspectos de una teoría existente, como lo es en este caso, los relacionados con la interacción en educación a distancia virtual a partir del constructo teórico humanos–con–medios.



El capítulo 4 realiza una descripción y análisis de las interacciones realizadas por un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral de Ude@, a la luz de los procedimientos de codificación abierta, axial y selectiva, presentando progresivamente el análisis de los datos, permitiendo consolidar una postura teórica relacionada con *el fenómeno de la interacción* que ocurren en un colectivo de humanos–con–medios en educación a distancia virtual. En este proceso de análisis se implementaron además de las grabaciones, chats y registros de las plataformas del programa Ude@, algunos instrumentos contruidos para la codificación de las diferentes sesiones de clase, así como también, el diseño de diagramas, mapas y esquemas que representaran el fenómeno analizado.

El capítulo 5, después de descrito el proceso investigativo, desarrolla algunas consideraciones finales que permiten presentar los aportes alcanzados en el campo de la educación matemática, haciendo énfasis en algunas alternativas para interactuar en un curso de matemáticas con las características de Ude@. Así mismo, teniendo en cuenta los resultados observados, es decir, las categorías de interacción en un curso de matemáticas, se realizan algunas proyecciones sobre el desarrollo de cursos de matemáticas, derivada de dichos resultados.

Además, aborda una relación entre los resultados y las contribuciones que se articulan con el constructo teórico humanos–con–medios, teniendo en cuenta el análisis de los datos observados en el contexto del programa Ude@ y las regularidades que ocurren en un curso de matemáticas, describiendo algunos aspectos que, permiten identificar que así como los medios están estrechamente relacionados con los humanos, la interacción también, y que ésta, tampoco se puede desligar de dicha relación.

En los anexos se adjuntan algunos registros que forman parte del proceso investigativo y que pretenden ampliar de fuente primaria algunas características del proceso, entre ellas se encuentran: el contenido del programa de un curso de cálculo integral desarrollado en Ude@; los enlaces a los medios de Ude@; los enlaces a las grabaciones del curso observado durante el trabajo de campo; la divulgación de este proceso investigativo diferenciando; la participación en eventos y un resumen de las publicaciones realizadas; algunas estadísticas del programa de



Ude@ relacionadas el impacto del programa; y por último, la relación de esta tesis con el proyecto de cooperación internacional COLCIENCIAS – CAPES.

Es importante aclarar que, para el análisis de la información, los datos fueron obtenidos de diferentes medios: grabaciones de clase que se encuentran en formato FLASH derivados de las sesiones sincrónicas realizadas en la plataforma WiziQ y registros magnéticos de la plataforma Moodle, así como también, los recursos de Ude@ publicados en sus plataformas, especialmente en Zona Ude@ (Ver enlaces en el Anexo B).



## CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO

En este capítulo, se describen diferentes transformaciones de la educación a distancia que ocurrieron en Colombia y algunos países, especialmente en lo relacionado con la modalidad virtual, analizando algunas características de los procesos educativos en estos ambientes, específicamente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se considera que estas descripciones son necesarias ya que, de manera general, en dichas transformaciones los medios han sido aspectos que han modificado la manera cómo las personas interactúan. Además, este estudio pretende contribuir con aportes de tipo teórico a la consolidación de una postura relacionada con la **interacción** en este tipo de modalidad educativa, para la formación de estudiantes en educación superior en el campo de la Educación Matemática.

De igual manera, en este capítulo, se considera necesario realizar una descripción del programa de educación virtual de la Universidad de Antioquia Ude@, contexto educativo en el cual se desarrolla el estudio, resaltando algunos aspectos históricos o situaciones que llevaron a su conformación; así como también, se retoman las normatividades de la Universidad de Antioquia y de la Facultad de Ingeniería que permitieron su creación, además, se describen especialmente las características actuales de Ude@, en especial, de los cursos de matemáticas que se llevan a cabo, con el fin de hacer énfasis en aquellos aspectos que en este contexto educativo se constituyen como el problema de investigación.

Luego de mencionar el contexto en el cual se realiza la investigación, se resaltan diferentes aspectos que se observan y que se consideran como complejidades de la educación a distancia virtual, especialmente, relacionados con la interacción, haciendo énfasis en la problemática que motiva el desarrollo de este estudio y en el alcance del mismo, justificando el problema de investigación y planteando la pregunta y los objetivos.



### **1.1. Problema de investigación**

En las últimas décadas, se crearon diversas maneras para el desarrollo de programas educativos dirigidos a comunidades o poblaciones con dificultades para acceder a la educación formal en instituciones educativas regulares, entre los más reconocidos se encuentran los denominados cursos semipresenciales o a distancia (cursos en los cuales no es primordial estar siempre en el mismo espacio y/o tiempo). Actualmente, algunos cursos se desarrollan mediante la implementación de diferentes herramientas tecnológicas y metodologías, especialmente a través de la Internet, como alternativa para dichas poblaciones. Por ejemplo, en la unidad de virtualidad Ude@, de la Universidad de Antioquia, se ofrecen cursos para la formación de estudiantes en educación superior, utilizando diferentes plataformas y desarrollando en éstas, clases sincrónicas y asincrónicas.

A partir de la experiencia del investigador en cursos de matemática en educación a distancia virtual que se realizan en Ude@, se reconoce que la participación de los estudiantes es fundamental a la hora de desarrollar una clase, sin embargo, esta participación es escasa y las causas de este fenómeno no son claras, algunas de ellas están relacionadas con dificultades en el manejo de los medios, otras en cambio, con el desarrollo de metodologías acordes a este contexto educativo. Además, durante el desarrollo de cursos de matemáticas virtuales, surgen interrogantes tales como: ¿Cuáles son los aspectos por los cuales un estudiante no interactúa en un curso de matemáticas? ¿Cuáles son las posibilidades que tiene un estudiante para interactuar? ¿Cómo interactuar en un curso de matemática de Ude@? ¿Cualquier interacción está relacionada con la producción de conocimiento matemático?, son preguntas que durante la experiencia como docente en este tipo de cursos fueron surgiendo y que, posteriormente, incitaron al desarrollo de esta investigación, con el propósito de ampliar la mirada tanto teórica como metodológica relacionada con el fenómeno de la interacción en este tipo de cursos.

De manera previa a la investigación, se realizaron indagaciones empíricas con algunas personas de Ude@, sobre la interacción en este tipo de ambientes, manifestando el poco uso que se daba a la plataforma Moodle y la poca participación de los estudiantes y profesores en estos ambientes, además, en ciertos casos, algunos profesores no desarrollaban sus cursos haciendo



uso de WizIq sino que empleaban otro tipo de herramientas para comunicarse con los estudiantes. Estos aspectos, generaron más inquietudes relacionadas con los procesos de interacción, evidenciando la necesidad de esclarecer el fenómeno de la interacción en cursos de matemáticas y la falta de una postura teórica relacionada con este fenómeno.

Por otra parte, en los cursos desarrollados en el contexto de Ude@, la interacción es un aspecto necesario que no se encuentra caracterizada y, hasta el momento, no se han identificado estudios relacionados con la interacción en este contexto, es decir, no se reconocen las diferentes formas de interacción que pueden ocurrir en un curso de matemáticas de Ude@, ni tampoco existen pautas que permitan a un docente reconocer diferentes maneras para interactuar con el fin de orientar la producción de conocimiento matemático.

De otro lado, teniendo en cuenta la revisión de la literatura, en relación con la educación a distancia virtual y la educación matemática, no se identificaron investigaciones que describan características de la interacción que ocurre en cursos de matemáticas similares a los ofrecidos en Ude@, sin embargo, existen algunos estudios que están relacionados con el campo de la educación a distancia virtual y la educación matemática, los cuales hacen mención a que la interacción es un aspecto importante, entre ellas se puede mencionar Borba y Villarreal (2005), Bairral (2007), Zulatto (2007) y Barbosa (2009), algunos de estos planteamientos se retoman en el capítulo 2.

Dado lo anterior, no se podría pensar en un curso de matemáticas en modalidad virtual sin interacción, por lo tanto, se considera un aspecto fundamental para estos cursos, sin embargo, se desconocen teorías relacionadas con este fenómeno, o características que orienten un proceso de interacción hacia la producción de conocimiento matemático en este tipo de cursos, aspectos que se consideran un problema objeto de estudio, ya que podría contribuir a la manera cómo se desarrollan cursos en esta modalidad educativa, especialmente en los ofrecidos en el contexto de Ude@.

En este sentido, la presente investigación centra su atención en cursos de matemáticas que se imparten en educación superior a distancia y virtual, específicamente, los relacionados con el



programa de educación virtual de la Universidad de Antioquia Ude@, con el propósito de establecer fundamentos teóricos y metodológicos que esclarezcan cómo son los procesos de interacción en este tipo de ambientes virtuales. Para esto, es necesario observar este fenómeno en el contexto real, por lo cual, se retoma un curso de matemáticas ya desarrollado y se analiza la manera cómo un colectivo de humanos-con-medios interactúa en este tipo de ambientes.

## **1.2. Educación a distancia virtual en Colombia**

En Colombia, la educación a distancia a lo largo de la historia ha tenido diferentes transformaciones que, de acuerdo con Arboleda (2013), pueden resumirse en tres generaciones. Revisar estas situaciones que se han generado en los procesos educativos a distancia, permite comprender los contextos y características que motivaron la implementación de esta modalidad educativa, identificando que los medios tecnológicos son determinantes en la manera como se desarrollaban, lo que posibilita reflexionar sobre la creación de nuevas alternativas educativas. Estas revisiones se realizan tratando de identificar características de las interacciones que ocurrieron en estos escenarios educativos, reconociendo el papel de la interacción en la producción de conocimiento.

De igual manera, resaltar algunos aspectos epistemológicos sobre la naturaleza de estas generaciones basados en los planteamientos del MEN (2009), los aportes teóricos de autores como Nipper (1989), Chacón (1997) y Taylor (2001), y las transformaciones de éstas en países como Brasil (Borba, Malheiros y Amaral, 2014), nos ayudan a comprender qué factores influyeron en la transformación de la educación a distancia virtual y el impacto que ha generado en el desarrollo de la Educación Matemática en este tipo de ambientes educativos.

En una primera etapa investigativa se consideró necesario indagar por algunos momentos históricos relacionados con la educación a distancia y virtual en Colombia, para tratar de reconocer cuáles características permitieron la transformación de los procesos educativos que allí intervienen. Estos aspectos se retoman en esta tesis con el propósito de ubicar al lector en el contexto histórico, en el que se han desarrollado los cursos educativos a distancia y algunos aspectos que conllevan a su transformación. Sin embargo, se ha podido establecer que la



utilización y creación de diferentes medios tecnológicos y las necesidades educativas en algunos contextos, motivaron la apertura de programas educativos y nuevos modos de **interactuar** para la enseñanza y aprendizaje en diferentes campos del saber.

### 1.2.1. Pasado y presente de la educación a distancia virtual

La educación a distancia puede llevar muchos años de existencia, sin embargo, para efectos de este estudio no se requiere indagar sobre su origen más antiguo, basta con resaltar algunos aspectos que dieron paso de manera formal a la conformación de esta modalidad educativa, para comprender cómo se ha creado y transformado. En la década de los 50', teniendo en cuenta que algunas poblaciones no podían acceder a instituciones educativas ubicadas en sectores urbanos de los municipios o ciudades, debido a su distanciamiento o dificultades de acceso, se iniciaron algunos procesos educativos desarrollados a través de *cursos por correspondencia*, es decir, se crearon instituciones para que las personas recibieran “lecciones” por correo postal a través de módulos y cartillas. Este proceso consistía en realizar actividades propuestas en guías, talleres o tareas, que posteriormente eran enviadas nuevamente por correspondencia para su respectiva evaluación; días después, las personas recibían correcciones y las respectivas calificaciones y certificados.

Este modo de interacción fue considerado como la primera generación en educación a distancia (Arboleda, 2013; Taylor, 2001; Chacón, 1997) en el que las personas realizaban tanto cursos de educación técnica como mecánica, electricidad y reparación de electrodomésticos, así como también procesos formales como la educación secundaria, dirigida principalmente para la población adulta. En este sentido, el medio de comunicación predominante, el correo postal, condicionaba la manera cómo se desarrollaban los procesos educativos, lo que exigía también otras características para su funcionamiento, como por ejemplo: la disciplina de los estudiantes, la entrega oportuna de la información, el diseño de contenidos especializados, entre otros. En algunos casos, esta modalidad educativa continúa siendo una alternativa para el desarrollo de cursos en diferentes áreas del conocimiento, usando principalmente suscripciones a periódicos y revistas, tanto locales como nacionales.



Posteriormente, a medida que incursionaban en la sociedad algunos medios de comunicación como *la radio* o *la televisión* y, dadas las necesidades de vincular una mayor población de contextos rurales al sistema educativo, se implementaron una serie de cursos exclusivos con el uso de estos medios. Por ejemplo, con los programas de radio locales o nacionales, se da paso a una nueva generación de la educación a distancia, que combinados con actividades por correo postal relacionadas con el envío de tareas y trabajos, permitían que los profesores orientaran las clases de manera diversificada, según los módulos y programas diseñados para cursos de matemáticas, ciencias naturales, lenguaje, religión entre otros. Estos medios de difusión de la información, fueron permitiendo que más receptores participaran de estos procesos educativos, conformando así la segunda generación de los cursos que se desarrollaron a distancia.

Esta segunda generación diseñó un sistema de recepción organizada en grupos comunitarios, en la que “el plan para el aprendizaje abierto estaba centrado en cinco componentes curriculares: salud, alfabeto, cálculo aritmético, nociones de economía y, trabajo y espiritualidad” (Arboleda, 2013, p.53). Este plan daba respuesta a necesidades e intereses reales de los individuos y de la comunidad, mediante cursos y programas educativos denominados en Colombia como educación abierta y a distancia en contextos locales, regionales y nacionales.

Es importante mencionar que, aunque los avances de la tecnología han sido significativos, esta modalidad educativa aún sigue vigente con el desarrollo de cursos y programas a través de la radio o la televisión, en diferentes áreas del conocimiento. Para este caso, se resalta que el programa de educación virtual Ude@, desarrolla un curso de matemáticas básicas en directo por el canal TeleAntioquia, producido desde un salón de videoconferencias de la Universidad de Antioquia, con una frecuencia de dos veces en la semana.

De otro lado, durante las décadas de los 70' y los 80', se crearon diferentes programas e instituciones de educación a distancia tanto a nivel nacional como internacional, como por ejemplo, la Open University en el Reino Unido en el año 1970 y la Universidad de Educación a Distancia UNED en España en 1970. De igual manera, se crearon programas en otros países como Alemania, Francia, China, Japón, Brasil, Venezuela y Chile, en los que el correo postal, la



radio y la televisión fueron los principales medios de comunicación implementados en procesos educativos. Esto generó un reto para que los países mejoraran en materia de comunicaciones, redes y conectividad, y también, en materia de procesos didácticos para el diseño de materiales para el autoaprendizaje, tales como la elaboración de guías de autoestudio.

En el contexto nacional, el gobierno del Presidente, Doctor Belisario Betancur Cuartas (1982-1986), permitió impulsar la creación de cursos desarrollados a distancia por diferentes universidades del país, por ejemplo, en 1983 se creó la Universidad del Sur, actualmente denominada Universidad Abierta y a Distancia (UNAD)<sup>2</sup>, que actualmente se encuentra activa en esta modalidad. Así mismo, se crearon políticas educativas en las cuales la educación a distancia era un programa bandera, buscando una mayor cobertura y acceso a la educación superior. Dado lo anterior, se puede interpretar que a medida que se popularizaron los medios, cambiaba la forma como se desarrollaban los programas educativos, impactando en la sociedad nuevas maneras de acceder al servicio educativo y generando otras alternativas para interactuar y producir conocimiento.

En el contexto de la educación superior, Arboleda (2013) afirma que la Universidad de Antioquia fue la primera institución en Colombia en ofrecer programas de educación a distancia en este nivel, y que a través de su Facultad de Educación en 1973, ofertó programas de Licenciaturas en Educación en Matemática, Biología, Química y Español, dirigidas principalmente a profesores que se encontraban en municipios aislados del departamento de Antioquia. En estos programas, se diseñaron “módulos didácticos de autoestudio” que consistían en libros con instrucciones para que los estudiantes realizaran actividades y talleres y se prepararan para las evaluaciones, estos textos fueron apoyados con otros medios tales como audios, video grabaciones, entre otros, generando otras alternativas para la interacción mediadas principalmente por los medios que se utilizaban. Los tutores por su parte, interactuaban con los estudiantes durante los fines de semana vía telefónica, brindando asesorías y aclarando dudas a los cuestionamientos de los estudiantes.

---

<sup>2</sup> Actualmente continua ofertando cursos y programas a distancia en educación superior en todo Colombia, ver: <https://www.unad.edu.co/>



Posteriormente, por la misma época, la Universidad del Valle, la Universidad Javeriana, la Universidad de la Sabana y la Universidad Santo Tomás, entre otras, ofrecieron programas similares, utilizando como principales medios, la televisión, la radio y los textos didácticos, aumentando las posibilidades de acceso a muchas personas que se encontraban fuera de las ciudades o sectores urbanos. Se identifica así que la utilización de estos medios, modificó la manera cómo se desarrollaban los procesos educativos y generó otras **formas de interactuar** que transformaban la naturaleza de la producción de conocimiento.

Con los avances de la tecnología en las dos últimas décadas y la utilización de la Internet, se abre la posibilidad de nuevas formas de interacción y aprendizaje apoyadas en diferentes medios, tal como lo menciona Facundo (2003) “La gama de las tecnologías de comunicación es amplia y creciente [...] a estas aplicaciones se las denomina genéricamente como la educación virtual o aprendizajes electrónicos (e-learning)” (p.170), permitiendo así, el paso a la tercera generación y la creación de la denominada *Educación a distancia virtual*.

En este sentido, Zapata (2002) plantea que con la Internet se estableció un nuevo tipo de relación entre conocimiento y tecnología y que esta nueva forma de comunicarse se convertiría en un estilo de vida, es decir, en un contexto natural de nuestra sociedad actual. Así mismo, afirma que “las nuevas tecnologías han desmaterializado y globalizado la información y por ende los tiempos de espera entre emisor y receptor han producido cambios significativos en las condiciones de vida de los seres humanos” (p.13). Se puede interpretar que la incursión de los medios tecnológicos, entre ellos la Internet, generó nuevos *procesos de interacción* y nuevas maneras de desarrollar procesos de aprendizaje, sin embargo, sería importante indagar si todas las interacciones conllevan a producir conocimiento o de qué manera podríamos orientar dichas interacciones para esta producción.

Con el desarrollo de las primeras experiencias en educación virtual, se obtuvo una respuesta favorable relacionada con la cobertura, así como también “una mayor interacción entre los diferentes servicios educativos gracias a la aparición de herramientas de comunicación cada vez más poderosas” (Ospina, 2015, p.8), lo que fue transformando gradualmente prácticas profesionales y permitiendo la creación de nuevos programas educativos.



Se reconoce que la educación virtual en Colombia tiene sus inicios en la década de los 90', inicialmente se realizaron cursos de formación posgraduada en convenio con universidades extranjeras; países como México, España y Canadá, fueron los primeros. Según Ospina (2015), en 1998 instituciones nacionales iniciaron programas educativos en esta modalidad virtual, específicamente, la Universidad Militar Nueva Granada realizó contribuciones tanto en tecnología como en desarrollo de contenido y en este mismo año, se creó la primera universidad totalmente virtual de nombre, Fundación Universitaria Católica del Norte<sup>3</sup>, que actualmente ofrece programas educativos en diferentes niveles: técnicas, tecnologías, diplomados, pregrados y posgrados.

Teniendo en cuenta los avances de la tecnología y los cambios en las dinámicas de las sociedades actuales con respecto al uso de medios tecnológicos en educación, Zapata (2002) afirma que “la universidad debe responder acorde con estas transformaciones y prepararse para asumir los cambios que se producen en la sociedad, revisar sus estructuras y métodos de enseñanza y aprendizaje hasta encontrar el modelo que el mundo de hoy requiere” (p.14). En este sentido, se considera necesario desarrollar estudios que den cuenta de los cambios sociales y que respondan a las exigencias requeridas por estas transformaciones, en relación con los procesos educativos mediados por las tecnologías y, también, estudios críticos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que están haciendo uso de las nuevas interfaces o medios que actualmente están en constante cambio.

En esta perspectiva, algunas instituciones colombianas de educación superior centran su interés por indagar y mejorar procesos relacionados con la Educación a distancia, la utilización de ambientes virtuales y la aplicación de alternativas metodológicas para el aprendizaje. De manera particular, este estudio centra su atención en procesos relacionados con la interacción entre las personas y la manera cómo ellas pueden utilizar los medios propios del programa Ude@, para el aprendizaje de conceptos relacionados con un curso de matemáticas.

---

<sup>3</sup> Actualmente continua ofertando cursos y programas a distancia en educación superior en todo Colombia, ver: <http://www.ucn.edu.co/>



Hablar sobre una temática como la educación a distancia virtual es complejo, ya que se tienen innumerables experiencias y contextos en los cuales esta modalidad educativa ha permeado. Sin embargo, para efectos de este estudio se trata de delimitar y reconocer algunas concepciones de la educación a distancia virtual en Colombia, basados en la normatividad del país y algunas posturas teóricas relacionadas con el campo de la educación matemática. A continuación, se mencionan algunas de estas concepciones.

### **1.2.2. Concepciones de la educación a distancia virtual**

La educación a distancia virtual en Colombia, se fundamenta en la normatividad de la educación superior, la cual se encuentra reglamentada por la Ley 30 de 1992, cuyo artículo 15 menciona que la educación a distancia es una metodología de la educación superior, lo que ha permitido que cada universidad diseñe una normatividad para actuar con autonomía de acuerdo a sus políticas y necesidades.

La puesta en marcha de los procesos educativos de los programas ofrecidos en educación a distancia por cada universidad adquieren una identidad propia, por ello, para desarrollar estudios en este campo, es importante tener en cuenta los contextos y características de los programas de formación en la educación a distancia virtual, así como también, los medios que se utilizan para estos procesos de formación. Este estudio se desarrolla en el contexto de la Universidad de Antioquia, que ha consolidado programas de formación tanto de pregrado como de posgrado en esta modalidad educativa, a través de su unidad de virtualidad Ude@, que se describirá más adelante en el apartado 1.3.

En el año 2006, mediante la resolución 2755, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) presenta una definición formal de educación superior a distancia y además plantea otros aspectos que regulan esta normatividad. Más tarde, mediante la Ley 1188 del 2008 y el decreto 1295 del año 2010, se plantean los requerimientos para el registro calificado de los programas en educación superior, haciendo una distinción entre la educación a distancia tradicional y la modalidad virtual, pero sin describir características específicas o políticas públicas claras relacionadas con la educación a distancia virtual.



Debido a que esta investigación se desarrolla en el contexto colombiano, es importante tener claro qué se entiende por educación a distancia según el MEN (2009):

La educación a distancia apareció en el contexto social como una solución a los problemas de cobertura y calidad que aquejaban a un número elevado de personas, quienes deseaban beneficiarse de los avances pedagógicos, científicos y técnicos que habían alcanzado ciertas instituciones, pero que eran inaccesibles por la ubicación geográfica o bien por los elevados costos que implicaba un desplazamiento frecuente o definitivo a esas sedes (p. 1).

Aunque la naturaleza de la educación a distancia estaba supeditada principalmente a la posibilidad de acceso a la educación formal y a la cobertura, también se debe resaltar que era la modalidad perfecta para que gran parte de la población se beneficiara de *avances pedagógicos, científicos y técnicos*, de las instituciones. De igual manera, de acuerdo al MEN (2006) la educación superior a distancia:

Es aquella metodología educativa que se caracteriza por utilizar ambientes de aprendizaje en los cuales se hace uso intensivo de diversos medios de información y comunicación y de mediaciones pedagógicas que permiten crear una dinámica de interacciones orientada al aprendizaje autónomo y abierto; superar la docencia por exposición y el aprendizaje por recepción, así como las barreras espacio-temporales y las limitaciones de la realidad objetiva mediante simulaciones virtuales; adelantar relaciones reales o mediadas y facilitar aprendizajes por indagación y mediante la colaboración de diversos agentes educativos (p.1).

Esta definición, muestra la complejidad de lo que significa articular un proceso de educación superior a distancia con las tendencias del desarrollo tecnológico para los ambientes virtuales de aprendizaje, lo que sugiere la necesidad de investigar metodologías que propendan por la indagación y la manera cómo *crear dinámicas de interacción para el aprendizaje*, aspectos que en cursos de matemáticas impartidos a distancia y en ambientes virtuales no son claros y parecen no estar precisados en la política pública de la educación en Colombia.



En otras perspectivas, Salazar y Melo (2013) plantean que la educación a distancia “se define como un conjunto de relaciones pedagógicas entre estudiantes, docentes e institución, basadas o apoyadas en el uso de tecnologías para el desarrollo sistémico de procesos formativos de calidad” (p.102). En esta concepción, se da mayor importancia a la *relación pedagógica* y no a los distanciamientos y dificultades de acceso de las poblaciones más alejadas de los sectores urbanos, centrando la atención en las características metodológicas y teóricas de los procesos educativos.

En otras perspectivas en un contexto internacional, la Ley General de Educación (LGE) de España hace mención a la educación a distancia, que en el artículo 47.1 según Rubio (s.f), plantea que “se han de favorecer las modalidades de enseñanza por correspondencia, radio y televisión a fin de ofrecer oportunidades de estudio a quienes no pueden asistir regularmente a los centros ordinarios” (Sección: En lo relativo a la legislación, párr. 1) concepción que está en correspondencia con la naturaleza de la educación a distancia en el contexto colombiano y que permitió en España, la creación de diferentes cursos y programas educativos orientados bajo esta modalidad.

Actualmente, la educación española, a través de la ley orgánica 2/2006 del 3 de mayo en su artículo 3 numeral 9, plantea que “para garantizar el derecho a la educación de quienes no puedan asistir de modo regular a los centros docentes, se desarrollará una oferta adecuada de educación a distancia o, en su caso, de apoyo y atención educativa específica”. Aunque esta modalidad educativa parece estar más enfocada en la población adulta teniendo en cuenta lo planteado en los artículos 67 y 69 de esta misma ley, el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, imparte la enseñanza a distancia en todo el territorio nacional a través de su Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEAD)<sup>4</sup>.

De igual manera, en países como Brasil, se reconoce que se han desarrollado políticas relacionadas con la modalidad de educación a distancia, con propósitos similares a los planteados

<sup>4</sup> El CIDEAD ofrece en la modalidad a distancia, las enseñanzas de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, ESPAD y Bachillerato, a la vez que participa en la Formación Profesional y Enseñanza Oficial de Idiomas, ver: <http://www.cidead.es/>



anteriormente. En Brasil específicamente, en el artículo 1 del Decreto n° 5.622 de 19 de Diciembre de 2005, se plantea que:

Para los propósitos de este decreto, se caracteriza la educación a distancia como la modalidad educativa en la cual la mediación didáctico-pedagógica en los procesos de enseñanza y aprendizaje ocurre con la utilización de medios y tecnologías de la información y la comunicación, con estudiantes y profesores desarrollando actividades educativas en lugares o tiempos diversos<sup>5</sup> (p.1).

En esta concepción no se especifica que la educación a distancia esté centrada en acercar las poblaciones al sistema educativo, sino que este tipo de modalidad se caracteriza por la *mediación con la utilización de medios*, aspectos que se consideran centrales en este estudio y que por tanto se buscan ampliar o identificar características que describan cómo son estos procesos educativos.

Por ejemplo, en una perspectiva de este mismo contexto de Brasil, la educación a distancia para Moran (2002): “es el proceso de enseñanza y aprendizaje, mediado por las tecnologías, donde profesores y alumnos están separados en el espacio y/o en el tiempo” (p.1). Se considera que esta concepción está en correspondencia con el contexto colombiano, ya que retoma el distanciamiento de las poblaciones y el proceso de enseñanza y aprendizaje, sin embargo, en ésta se resalta que el proceso educativo es *mediado por tecnologías*, lo cual es semejante para las características de Ude@, contexto en el cual se desarrolla este estudio.

Aunque la educación a distancia en España y Brasil se desarrolló tiempo antes que en Colombia, su evolución está marcada por similitudes tanto epistemológicas como conceptuales. Es notorio en estos contextos, que el distanciamiento, los aspectos pedagógicos y los medios tecnológicos, son características de procesos educativos desarrollados a distancia; aunque las reglamentaciones del Ministerio de Educación de cada país hacen énfasis en estos aspectos, es

---

<sup>5</sup> Traducción de: Para os fins deste Decreto, caracteriza-se a Educação a Distância como modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorre com a utilização de meios e Tecnologias de informação e comunicação, com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares ou tempos diversos.



importante cuestionar si cualquier medio tecnológico o metodología se puede implementar en la educación a distancia, teniendo en cuenta también los avances de la Internet y las posibilidades de acceso.

Dado lo anterior, se reconoce que pueden generarse diversos procesos educativos a distancia, teniendo en cuenta las características de la población (relacionado con el distanciamiento), los medios tecnológicos y las estrategias metodológicas implementadas por las instituciones de educación superior, sin embargo, debido al contexto educativo de este estudio, se centra la atención sólo en la modalidad de educación a distancia que actualmente se realiza a través de la Internet. Es importante aclarar que con esto, no se pretende mencionar que las demás alternativas de la educación a distancia no sean relevantes o de interés para otros estudios, sino más bien, se trata de hacer énfasis en el contexto particular del desarrollo de esta investigación.

El Ministerio de Educación en Colombia, concibe la *educación virtual* como "educación en línea" que "se refiere al desarrollo de programas de formación que tienen como escenario de enseñanza y aprendizaje el ciberespacio" (MEN, 2009, sección ¿Qué es la educación virtual?, párr.1). En este sentido, se puede afirmar que las características del programa de educación virtual Ude@ corresponden con esta modalidad y que se encuentran alineadas con la política nacional para propiciar espacios de formación que busquen nuevas formas de enseñar y aprender.

En otras palabras, la educación virtual pone de manifiesto que no es necesario que las personas se reúnan en el mismo espacio y tiempo para lograr establecer un encuentro que permita el diálogo o experiencia de aprendizaje a través de los medios tecnológicos, aspectos en los que Ude@ se fundamenta para el desarrollo de sus cursos. Sin embargo, este tipo de ambientes educativos permiten que, además, se dé un encuentro cara a cara entre el profesor y el alumno y posibilita establecer una relación interpersonal de carácter educativo de manera simultánea, transformando la concepción de "presencialidad" para llevar a cabo un proceso educativo.



Dado lo anterior, la educación virtual es una modalidad de la educación a distancia que implica una nueva visión de las exigencias del entorno económico, social y político, así como de las relaciones pedagógicas y de las TIC. No se trata simplemente de una forma singular de hacer llegar la información a lugares distantes, sino que es toda una perspectiva pedagógica, en la cual se debe tener cuidado en su implementación o abordaje metodológico.

En esta perspectiva, el MEN (2009) plantea que: “la educación virtual es una acción que busca propiciar espacios de formación, apoyándose en las TIC para instaurar una nueva forma de enseñar y de aprender” (p.1). Indagar o generar estudios relacionados con las características de cómo abordar este tipo de procesos educativos es un factor que también motiva esta investigación y que pretende realizar aportes teóricos y metodológicos, especialmente en los cursos de matemáticas que se desarrollan en esta modalidad en Ude@.

En una perspectiva educativa, según Bairral (2007), se pueden distinguir dos clases de modalidades en educación a distancia. La primera, está constituida por un proceso en el cual el individuo regula su propio aprendizaje, apoyado en un material físico o digital construido previamente; el eje fundamental en esta modalidad está centrado en estos medios, y el docente, transmite el conocimiento hacia los estudiantes, de tal manera que los participantes reproduzcan la información y realicen su producción de conocimiento basados en el material previamente diseñado. La segunda, está constituida por un proceso en el que los individuos discuten y construyen información, partiendo de sus conocimientos previos y relacionando nuevos conceptos para una construcción permanente del aprendizaje; el docente, regula las discusiones participando de manera directa para retroalimentar el aprendizaje de los conocimientos respectivos. El eje central de este proceso está en la actividad colaborativa que se puede establecer entre las personas, teniendo en cuenta el uso de los medios que proporcionan los ambientes virtuales.

En otra perspectiva educativa, Borba, Malheiros y Amaral (2014) consideran que la educación a distancia virtual “puede ser entendida como la modalidad de educación que acontece primordialmente mediada por interacciones vía internet y tecnologías asociadas” (p.17), resaltando en esta concepción que esta modalidad es *mediada por interacciones*, interpretando



que pueden no estar determinadas o pueden cambiar de acuerdo a los medios o metodologías propias de un programa educativo. Así las cosas, de manera hipotética se puede afirmar que *las interacciones* son variadas, múltiples, diversas y complejas, aspecto que pretende ser esclarecido con el desarrollo de este estudio.

En consecuencia, la presente investigación concibe la educación a distancia virtual como el proceso de interacción entre un colectivo de humanos–con–medios que no se encuentran en un mismo espacio físico y en el que a través de diferentes interfaces tecnológicas y otros medios, se posibilita un ambiente para el diálogo, la comunicación y la producción de conocimiento.

Se puede identificar de manera general que, para los procesos educativos desarrollados a distancia y virtual, es importante tener en cuenta tanto recursos técnicos (medios tecnológicos), como procesos metodológicos, ambos aspectos caracterizados por los ambientes virtuales que pueden posibilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje, para este estudio, los relacionados con la educación matemática en el contexto de Ude@.

A continuación, se describen algunos aspectos que se consideran como proyección de la educación a distancia virtual, teniendo en cuenta algunas dificultades presentadas en este tipo de modalidades y, de manera hipotética, algunas posibilidades que pueden ser potencializadas a partir de la conjugación de herramientas tecnológicas y procesos metodológicos en el campo educativo.

### **1.2.3. Proyección de la educación a distancia virtual**

Considerando las grandes inversiones requeridas para infraestructura física y los problemas de movilidad de las personas hacia las ciudades o sectores urbanos para acceder al sistema educativo, la creciente creación de programas y cursos en educación superior que se desarrollan actualmente a distancia proyecta un futuro favorable, en tanto que, responde a la urgente necesidad de brindar educación a una amplia población de distintas regiones, especialmente en Colombia, debido a la diversidad geográfica y el distanciamiento de muchas poblaciones de los



sectores urbanos y rurales. Así mismo, la educación a distancia virtual facilita la conectividad y el acceso a programas educativos desde cualquier lugar, teniendo en cuenta las facilidades tanto de la Web 2.0 a través de blog, wikis, ambientes virtuales de aprendizaje, entre otros, así como también de la Web 3.0 que emergen en el campo de la educación.

De otro lado, el aumento de estudiantes matriculados en diferentes regiones del país que hasta el año 2012 llegaba a 698 municipios de Colombia (Alvarado y Calderón, 2013, p.39), muestra que la educación a distancia es una alternativa y una oportunidad para la formación profesional en los diferentes campos del saber. Para el año 2010, se registraban un millón seiscientos setenta y cuatro mil cuatrocientos veinte estudiantes (1'674.420) matriculados en educación superior (Alvarado y Calderón, 2013, p.37), de los cuales en la modalidad a distancia virtual se tenían aproximadamente doce mil (12.000) inscritos en 147 programas con más de un 80% de virtualidad (Alvarado y Calderón, 2013, p. 41). Actualmente, entre el año 2010 y 2015, el Periódico el Tiempo (Lizarazo, 2015) afirma que la demanda ha aumentado en un 500% de estudiantes activos en todos los programas y niveles en la modalidad de educación a distancia virtual, pasando de doce mil a sesenta y cinco mil estudiantes.

En Colombia, tanto el Ministerio de Educación como el Ministerio de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, durante los últimos años han trabajado en políticas públicas que buscan consolidar un *Sistema Nacional de Innovación Educativa con Uso de TIC* cuyo propósito según Martínez (2013) “es aprovechar las ventajas que nos ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación para que los establecimientos educativos innoven en sus prácticas educativas y respondan a las necesidades locales, regionales y nacionales” (p.17). En este sentido, la educación virtual es una de las principales estrategias que pretenden “acompañar la creación o transformación de nuevos programas virtuales para la educación superior” (Rendón, 2012, p.20).



Actualmente, el Ministerio de Educación Nacional a través de la *Oficina de Innovación Educativa con Uso de Nuevas Tecnologías*<sup>6</sup> realiza acciones que fomentan el uso de las TIC y la investigación, entre ellas en la educación virtual, según el MEN (2014):

A través del Proyecto e-Learning, brinda acompañamiento a las Instituciones de Educación Superior-IES para la transformación de programas de educación a distancia en programas de modalidad virtual; y para la creación de programas académicos en todos los niveles de la educación superior. Las acciones de asistencia técnica a las IES se realizan en cuatro dimensiones, a saber: Organizacional, Comunicativa, Pedagógica y Tecnológica, mediante acompañamiento virtual y presencial, propiciando la transferencia y uso efectivo y eficiente de conocimiento, para que las instituciones logren ser autogestoras de procesos de calidad y puedan así contar con capacidad instalada para dar sostenibilidad a los programas ofrecidos en esta modalidad (p.1).

Lo anterior muestra un interés por parte del gobierno nacional para generar estrategias y políticas, en las que la educación virtual es uno de sus componentes, buscando así, responder tanto con la demanda nacional de formación profesional y ampliación de cobertura, como en el contexto internacional que constantemente se transforma y crea herramientas tecnológicas, y con ellas, alternativas para el desarrollo y producción de conocimiento. Un ejemplo de ello está relacionado con los denominados MOOC, por sus siglas en inglés *Masive Open Online Course*, que a nivel internacional están generando nuevos espacios para el aprendizaje y el desarrollo de cursos en línea masivos y abiertos. Aunque en el presente estudio, no se pretenden abordar este tipo de ambientes, es importante resaltar que son una alternativa que deberá ser explorada y analizada por investigadores en el campo de la educación, así como también en Educación Matemática (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

Lo anterior ratifica el crecimiento tanto de programas e instituciones de educación superior, como de estudiantes de diferentes regiones que acceden a una educación en la modalidad a distancia virtual, presentando diferentes alternativas y oportunidades para su desarrollo en diferentes campos del saber. De igual manera, la apertura de programas de

---

<sup>6</sup> Ver: <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/w3-propertyname-3029.html>



cooperación internacional para realizar proyectos de investigación para la innovación en educación entre países como Colombia y Brasil, son un escenario en el cual la educación a distancia virtual tiene grandes oportunidades para realizar avances a nivel teórico y metodológico.

Por otra parte, la creación de nuevos software y aplicaciones de realidad aumentada y realidad virtual que se pueden implementar en cursos en educación a distancia virtual para la enseñanza de las ciencias y las matemáticas (Restrepo y Trefftz, 2005), además de las aplicaciones para Smart Phone que actualmente permitan el acceso a plataformas educativas y que cada día surgen muchas más, son evidencia de la constante transformación, evolución y desarrollo tecnológico tanto de equipos o dispositivos electrónicos como de programas y aplicaciones, creados con el propósito de generar otras formas de interacción de humanos-con-medios, que exigen nuevos retos a la perspectiva didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje, especialmente para determinar aspectos relevantes que pueden mejorar procesos en el campo de la Educación Matemática.

Las políticas públicas tanto en el contexto nacional como internacional, pretenden que cada día la población mundial esté conectada en red a través de la Internet para la constitución de las sociedades del conocimiento. De igual manera, las instituciones de educación superior incrementan los programas de intercambio e integración de las modalidades de educación presencial y virtual, dada la proyección de las tecnologías digitales para consolidar la conexión que se puede establecer entre conocimiento, formación y tecnología (Arboleda, 2013).

El futuro de la educación a distancia virtual está sujeto a la constante transformación de las tecnologías digitales y a la innovación de las instituciones en nuevas rutas metodológicas en diferentes áreas del saber. Las discusiones sobre la forma cómo son utilizadas las tecnologías digitales en el campo de la educación matemática (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014) son elementos fundamentales para realizar contribuciones teóricas y metodológicas. Por lo tanto, consideramos que identificar cómo son los procesos de interacción que ocurren en este tipo de educación, podría contribuir a la exploración de estrategias o alternativas en cada saber



específico, que permitan poner de manifiesto las oportunidades y posibilidades que la educación virtual ofrece, especialmente en este estudio, en el campo de la Educación Matemática.

En este sentido, se puede predecir que el futuro de la educación a distancia virtual está relacionado también con la participación de la comunidad internacional para el fortalecimiento de los diferentes programas educativos, dadas las posibilidades de conectividad e interacción. Además, los cursos desarrollados en esta modalidad con profesores y estudiantes de diferentes países, son procesos que en un futuro veremos continuamente, ya sea a través de MOOC o cursos especializados para un programa de pregrado o posgrado, así como también, proyectos de cooperación internacional como el que actualmente se está desarrollando para el mejoramiento de estrategias metodológicas en un saber específico, como por ejemplo, las matemáticas.

La educación a distancia virtual en el futuro, estará sujeta a la incursión constante de nuevos medios, dados los desarrollos tecnológicos y metodológicos, así como también, a la manera cómo se pueden articular los procesos de interacción en este tipo de ambientes, lo que modificará tanto la conducta del ser humano como la manera en que se puede construir conocimiento, al igual que las transformaciones en el currículo de los programas educativos en educación superior. Analizar la interacción en educación a distancia virtual, es una manera en la que se pueden esclarecer las acciones que realizan las personas para la producción de conocimientos en estos ambientes, y posibilitar a partir de las experiencias, la creación futura de cursos en los cuales los participantes puedan llevar a cabo procesos de interacción acordes con sus necesidades de formación.

En este orden de ideas, esta investigación pretende profundizar en estos aspectos, con el propósito de identificar las interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios en los ambientes virtuales, centrando la atención en el desarrollo de cursos de matemáticas. Por lo tanto, se considera necesario observar, desde un contexto real, un programa de educación a distancia virtual que actualmente oferta cursos en esta modalidad, como lo es el programa Ude@ de la Universidad de Antioquia.



### 1.3. Ude@ Educación virtual

La Universidad de Antioquia a través de su unidad de virtualidad Ude@, viene construyendo espacios para la formación de estudiantes de algunos programas de la Facultad de Ingeniería, así como también, apoyando el desarrollo de diplomados, programas de educación flexible, posgrados y cursos de extensión. En este sentido, Ude@ tiene como misión ser “una unidad universitaria comprometida con la formación integral del talento humano, mediante la aplicación de las tecnologías de la información y la comunicación para la generación y difusión del conocimiento en los diversos campos del saber”<sup>7</sup>. De esta manera, la universidad pretende abordar los grandes retos relacionados con la creciente demanda de los programas académicos y la necesidad de hacer presencia en las regiones, principalmente del departamento de Antioquia.

Hasta el momento en el contexto de Ude@, la Facultad de Ingeniería ha creado cuatro programas de pregrado: Ingeniería Ambiental, Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicaciones, cada uno de ellos con su respectivo registro calificado<sup>8</sup>, los cuales se desarrollan en su totalidad en ambientes virtuales propios de Ude@. De igual manera, Ude@ viene apoyando los procesos de formación de profesores de matemáticas a través de la “Maestría en Enseñanza de las Matemáticas”<sup>9</sup>, programa que se efectúa en su totalidad en la modalidad virtual y que actualmente se encuentra en proceso de admisión de su quinta cohorte para el semestre 2016-1.

Para efectos de llevar a cabo este estudio, Ude@ es un ejemplo particular, que oferta cursos de matemáticas en educación a distancia virtual y, en el que se puede analizar la manera cómo interactúa un colectivo de humanos-con-medios para producir conocimiento matemático. A continuación, se presentan algunas características del contexto de Ude@, centrando la atención en los cursos de matemáticas que se desarrollan.

---

<sup>7</sup> Tomado del sitio web del programa, ver: <http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/acerca-udea/>

<sup>8</sup> Ver descripción detallada de los programas en: <http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/programas>

<sup>9</sup> Programa de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia que se desarrolla en su totalidad de manera virtual, ver: <http://sikuani.udea.edu.co/programasUdeA/paginas/formPrograma.iface?id=60153>  
<http://ciencias.udea.edu.co/maestriaem/>



### 1.3.1. Antecedentes históricos de Ude@

En la década de los 70' la Universidad de Antioquia realizó programas de educación a distancia a través de la Facultad de Educación, en los cuales el modelo de educación a distancia trata “de dar respuesta a las condiciones impuestas por el sistema educativo colombiano y a las características y recursos de las distintas regiones donde hemos ofrecido esta modalidad”<sup>10</sup>. Posteriormente, como una característica de esta modalidad, se denomina la *Educación semipresencial*, que consiste en encuentros esporádicos realizados de manera presencial con un grupo de estudiantes y se realizan las asesorías u orientaciones respectivas, para que posteriormente ellos puedan resolver las actividades de manera autónoma apoyados en los materiales didácticos.

Actualmente, la universidad ofrece en esta modalidad semipresencial para un semestre académico, cursos con una intensidad de sesenta horas en: Lógica Matemática, Lengua Materna, Matemáticas Operativas, Introducción al Cálculo, Química General, Biología General, Física, Inglés, Psicología, entre otros. Sin embargo, durante su trayectoria se han modificado tanto las guías didácticas de autoestudio, como las herramientas de comunicación; por ejemplo, inicialmente se implementaban llamadas telefónicas o mensajes por correo y actualmente, se han transformado a nuevas maneras de comunicación a través de la Internet o salas de videoconferencias especializadas.

La vicerrectoría de docencia de la universidad implementa una modalidad de educación superior denominada *Educación Flexible* que permite cursar asignaturas correspondientes a los primeros semestres de programas de pregrado de la Universidad de Antioquia, a aquellos estudiantes que pasaron el examen de admisión pero no alcanzaron cupo en el programa seleccionado. Esta modalidad se apoya también en aprendizajes apoyados en tecnologías, material impreso y medios audiovisuales, es decir, tiene una connotación de semipresencialidad pero con un mayor uso de las TIC.

<sup>10</sup> Tomado de: [http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/induccin/contenido/modelo\\_educacion\\_distancia.html](http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/induccin/contenido/modelo_educacion_distancia.html)



Ude@ nace como una alternativa que tiene la Universidad de Antioquia frente a la necesidad de afrontar los nuevos desafíos de la educación superior, en la que, reconociendo los cambios actuales del entorno, “invitan a repensar el papel y el sentido de la educación superior en la sociedad moderna y obligan a la Universidad a plantear nuevas formas de producir y difundir el conocimiento de manera más abierta a la sociedad” (Universidad de Antioquia, 2006, p.50). Así mismo, la universidad plantea retos tales como: mayor calidad y pertinencia; ampliación de matrícula; uso de nuevas tecnologías; flexibilidad, interdisciplinariedad y transdisciplinariedad; internacionalización; entre otros.

La Universidad de Antioquia (2006), en el Plan de desarrollo 2006-2016, plantea en relación al reto del uso de la tecnología que:

Las instituciones educativas, sobre todo de nivel superior, están obligadas a ofrecer sus programas y cursos en modalidades total o parcialmente no presenciales. Esto implica transformar los métodos de enseñanza clásicos hacia una universidad con contenidos educativos mediados por entornos virtuales, y exige del cuerpo docente nuevas competencias comunicativas no verbales y un enfoque innovador para acompañar a sus alumnos en el proceso de aprendizaje (p.53).

Dado lo anterior, se resalta la necesidad de transformar los procesos de enseñanza y vincular las nuevas tecnologías de la información y la comunicación para el desarrollo de programas acordes a las necesidades cambiantes de la sociedad, reconociendo además, que las limitaciones de cobertura, de instalaciones físicas, de profesores capacitados e infraestructura tecnológica, son aspectos que también deben ser abordados.

Teniendo en cuenta un entorno global, las exigencias que resaltaban cambios en la educación superior según el plan decenal de la Universidad de Antioquia (2006), se convertían en una oportunidad para el desarrollo de Ude@ los cuales estaban relacionados, entre ellos, con:

- Recreación de los modelos de formación, centrados en el desarrollo de capacidades para aprender a aprender, más que para retener verdades que se agotan rápidamente.



- Emergencia de nuevas modalidades y metodologías de enseñanza–aprendizaje, incremento de la movilidad de los agentes educativos y configuración de redes institucionales y personales, con miras a atender el descentramiento en la generación y acumulación de conocimientos.
- Cambios en la naturaleza del conocimiento que se genera y en las formas como se administra, transfiere, organiza y evalúa en la sociedad, asociados a la necesidad de acceder a nuevas fuentes de financiamiento y a mayores esfuerzos por vincular los productos y servicios de la universidad con la industria y el sector productivo en general (p.34).

Según Ospina (2015), fue necesaria la creación de un modelo de plataforma educativa propia que contemplara estos cambios, y fue así como en Ude@ se dedicaron a la producción de materiales que no dependieran de la conectividad para la autoformación, entre ellos: libros, guías de autoestudio, materiales multimedia en CD-ROOM o DVD. Actualmente, muchos de estos recursos se encuentran a disposición. Posteriormente con la posibilidad de servidores de video, se abre la posibilidad de hacer bancos de recursos con estos materiales, permitiendo el acceso a los mismos, en cualquier punto de red y en cualquier momento, espacio que se denomina **Zona Ude@** (Ver acceso en el anexo B).

Ude@ es una unidad que se alinea al plan de desarrollo de la Universidad de Antioquia como una estrategia que, a partir de la virtualidad, busca orientar la formación de estudiantes de ingeniería y permite llevar la universidad a las distintas regiones aisladas del departamento, convirtiéndose en un motor del desarrollo social (Ospina, 2015). Ude@ también asume el reto en la Facultad de Ingeniería, pues desde hace diez años, desarrolla experiencias en educación a distancia virtual, proyectándose como “líderes en formación de alta calidad mediada por las tecnologías de la información y la comunicación, con impacto regional y proyección global en docencia e investigación, con enfoque social”<sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup> Visión de Ude@ publicada en: <http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/acerca-udea/>



En esta trayectoria de diez años, Ude@ ha venido construyendo en el campo de la virtualidad, un modelo pedagógico basado en diferentes experiencias en una perspectiva constructivista para el aprendizaje, mediado por las tecnologías de la información y la comunicación. A continuación se describen algunos aspectos de este modelo pedagógico.

### 1.3.2. Modelo pedagógico de Ude@

A finales del año 2005, se planteó en un documento rector la transformación curricular para la Facultad de Ingeniería, que según Ospina (2015), el modelo pedagógico está definido de acuerdo a los principios curriculares: la flexibilidad, la transversalidad y la articulación entre la teoría y la práctica, con principios pedagógicos tales como: la solución de problemas, la formación integral, la interdisciplinariedad, la formación en investigación y la libertad de cátedra.

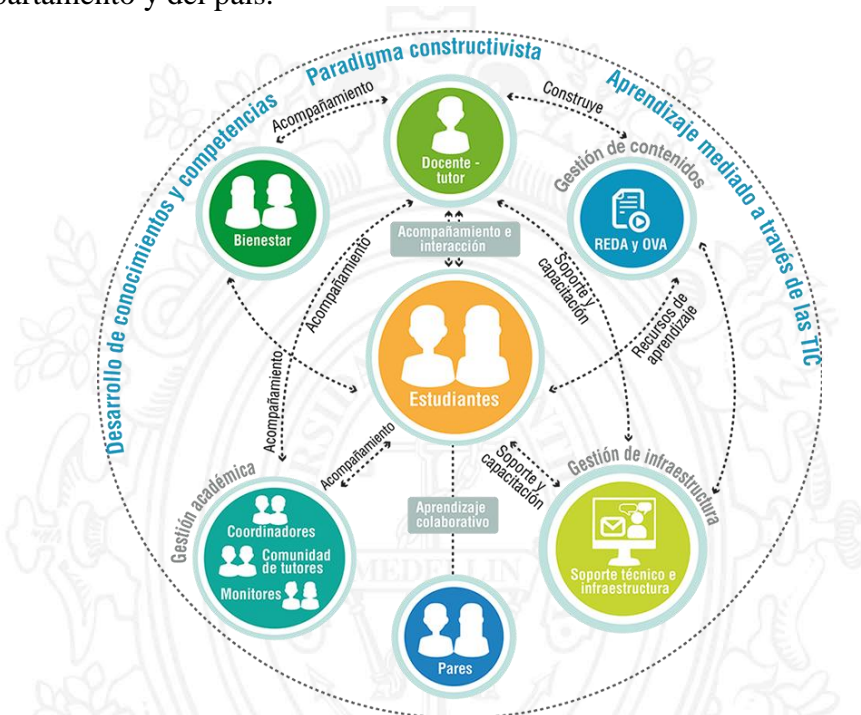
Este modelo se basa en un paradigma constructivista que busca el desarrollo de competencias y conocimientos, colocando al estudiante en el centro de la experiencia de aprendizaje, la cual se desarrolla mediada por las tecnologías de la información y comunicación, propias de Ude@.

En este sentido, dicho modelo debe dar cuenta de las relaciones que configuran el proceso formativo, entendiéndose esto como *relaciones pedagógicas* (Ospina, 2015) que dentro del contexto de Ude@ se pueden distinguir así: entre los sujetos; entre los sujetos y los objetos de conocimiento; entre los sujetos y el contexto; del sujeto consigo mismo. A partir de esto, se reconoce la importancia de analizar las relaciones que pueden ocurrir en esta modalidad educativa, que se entienden como **interacciones**: entre los sujetos; entre los sujetos y los objetos de conocimiento; entre los sujetos y el contexto; así como también, las interacciones entre el sujeto y los medios propios de este contexto educativo.

El siguiente diagrama muestra lo que Ude@ denomina *Ecosistema de aprendizaje*, el cual durante estos 10 años de funcionamiento se ha venido construyendo, enriqueciendo y



consolidando para afrontar los grandes retos de la universidad, relacionados con el acceso en las regiones del departamento y del país.



Ecosistema de aprendizaje Ude@ <sup>12</sup>

En este diagrama se puede observar que Ude@ establece una relación bidireccional entre diferentes actores para conformar un sistema integral, en la que, a través de equipos interdisciplinarios, se propenda por el acompañamiento a los estudiantes en su proceso educativo.

De otro lado, el modelo adoptado por la Facultad de Ingeniería para impulsar la transformación curricular es el desarrollista, el cual según Ospina (2015) “tiene como propósito privilegiar los procesos de formación que potencian las facultades intelectuales del estudiante, que lo hacen protagonista de su proceso formativo y constructor de conocimientos” (p.22). En este sentido, Ude@ busca que el estudiante sea capaz de resolver situaciones nuevas para la transformación de su contexto, además de la construcción de conocimiento a través de procesos investigativos que le permitan el desarrollo de estructuras mentales.

<sup>12</sup> Tomado del sitio web de Ude@, ver:

[http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/modelo\\_educativo\\_Ude@/diagrama\\_1.html](http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/modelo_educativo_Ude@/diagrama_1.html)



A continuación, se describen algunas concepciones de ambientes virtuales de aprendizaje en el campo de la educación, resaltando algunas características y ejemplos derivados de la experiencia en Ude@.

### **1.3.3. Ambientes virtuales de aprendizaje de Ude@**

Se viene observando como las aulas tradicionales de clase ya no son el único espacio en los cuales se generan procesos educativos, debido a que las dinámicas de comunicación plantean otro tipo de retos para la educación. Analizar cómo se desarrollan estos procesos haciendo uso de otras herramientas o ambientes virtuales para la enseñanza y aprendizaje, especialmente de conocimientos matemáticos, es objeto de interés para este estudio. Sin embargo, es necesario identificar cuáles son las concepciones y características de los ambientes virtuales de aprendizaje, específicamente en el contexto de Ude@.

Desde la Vicerrectoría de Docencia de la Universidad de Antioquia, se desarrollan varios programas educativos utilizando ambientes virtuales de aprendizaje, orientados a la formación de profesores y otros cursos de extensión para el manejo de herramientas tecnológicas, entre otros. Es así como en este contexto, Ospina (2008) define ambientes virtuales de aprendizaje como:

Un entorno de aprendizaje mediado por tecnología que transforma la relación educativa gracias a: la facilidad de comunicación y procesamiento, la gestión y la distribución de información, agregando a la relación educativa nuevas posibilidades y limitaciones para el aprendizaje. Los ambientes o entornos virtuales de aprendizaje son instrumentos de mediación que posibilitan las interacciones entre los sujetos y median la relación de estos con el conocimiento, con el mundo, con los hombres y consigo mismo (p.1).

Las diferentes dinámicas de interacción que pueden ocurrir en estos ambientes virtuales y la manera como son usados, permiten establecer diferentes relaciones que influyen y posibilitan o no, los procesos de aprendizaje. Para el contexto del presente estudio, analizar los aspectos relacionados con las interacciones que posibilitan la producción de conocimiento, permitirán



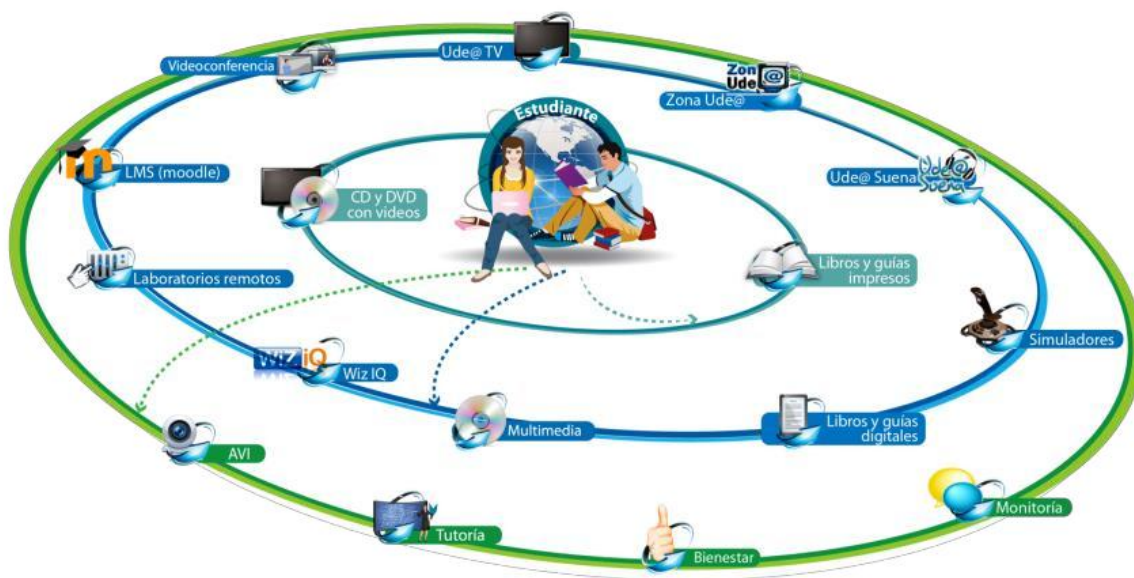
plantear orientaciones teóricas que estén direccionadas a comprender este fenómeno y nuevas posibilidades para emplear estos ambientes de aprendizaje.

Para el contexto de la población que participa en Ude@, en el cual los estudiantes viven en diferentes regiones o municipios que para el momento de los encuentros no están en un mismo lugar geográfico, se busca que, acorde con los planteamientos de Bairral (2007), un ambiente de aprendizaje propicie construir “un espectro diferente de relaciones temporales, espaciales, cognitivas y comunicativas cuyas fronteras no son delimitadas, pues el soporte virtual permite la construcción de vínculos colectivos sin la presencia física” (p.17), características que se encuentran en correspondencia con los ambientes virtuales de aprendizaje propios de Ude@.

Los ambientes virtuales de aprendizaje deben posibilitar además del acceso desde cualquier lugar, el establecimiento de relaciones e interacciones entre los integrantes de un grupo (Borba, Malheiros y Amaral, 2014); la plataforma Moodle de un curso de matemáticas de Ude@ está construida en correspondencia con estas características, en ella los estudiantes pueden acceder a los recursos e interactuar con el conocimiento. Según Bairral (2007), en este tipo de ambientes virtuales, “los aprendices pueden trabajar juntos y se apoyarán mutuamente a medida que utilizan una variedad de herramientas y recursos mediadores” (p.17), esto con el fin de alcanzar los objetivos propuestos y permitir la interacción para una producción de conocimiento matemático.

Ude@ ha venido construyendo un *campus virtual*, que puede entenderse como un conjunto de recursos tecnológicos que permitan no solo acceder a la información específica de los cursos y al conocimiento disciplinar, sino también, generar canales de comunicación entre los diferentes actores del proceso. El siguiente diagrama muestra lo que actualmente se constituye como la *Plataforma Educativa Ude@*:





Plataforma Educativa Ude@ (Ospina, 2015, p.32)

Como se puede observar, este modelo de plataforma Ude@ cuenta con un conjunto de recursos; en un primer nivel más cercano al estudiante, se encuentran los libros, guías de estudio y guías de autoevaluación en formato impreso, de tal manera que si el estudiante tiene dificultades en el acceso a la información en red o en la conectividad, pueda realizar un trabajo autónomo. En un segundo nivel, se encuentran diferentes recursos que se utilizan para acompañar al estudiante en el proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta que muchos de ellos no se encuentran formados en modelos educativos a distancia y virtuales y, requieren de un proceso de transición al modelo que implementa Ude@, entre ellos están:

- Los recursos multimedia
- Libros y guías en formato digital
- Simuladores
- Salas de video conferencia
- Ude@ TV, desarrolla programas de televisión por el canal regional (TeleAntioquia) para realizar clases de algunos cursos, entre ellos de matemáticas



- Zona Ude@, en la que se han publicado los diferentes videos de clases desarrollados por la unidad
- Ude@ suena, un espacio para la producción de contenidos en temas de educación donde se pueden encontrar además de audios, videos y otras opciones para la interacción con el conocimiento
- Plataforma Moodle (*Modular Object Oriented dynamyc Learning Environment* – Ambiente de Aprendizaje Modular Orientado a Objetos), que básicamente es un LMS (*Learning Mannager System* – Sistema de Gestión del Aprendizaje) que administra los contenidos de aprendizaje de cada curso
- Plataforma WizIQ, permite programar encuentros sincrónicos para el desarrollo de clases y asesorías en tiempo inmediato

Los ambientes virtuales de aprendizaje que se utilizan en cada curso de Ude@, entre ellos los cursos de matemáticas, son las plataformas Moodle y WizIQ. La primera, por su naturaleza, está diseñada para almacenar documentos y conformar comunidades de aprendizaje y posibilitar la comunicación entre los participantes a través de foros, mensajes de correo y chats. La segunda, es propicia para establecer videoconferencias, ya que además de establecer una conexión entre los participantes con herramientas de audio y video, ofrece una pizarra (Whiteboard) que permite la construcción conjunta de conocimiento, además de cargar documentos, presentaciones o videos, y compartir escritorio y chat.

Según Ospina (2015), estas plataformas son utilizadas en los diferentes cursos de Ude@ con las siguientes intencionalidades:

La plataforma Moodle se usa para orientar y hacerle seguimiento al proceso de aprendizaje, por medio de ella se publica información completa sobre las generalidades, el programa y el cronograma de los cursos, los materiales de estudio (fundamentales y complementarios), las guías de estudio, las guías de autoevaluación, las ayudas educativas, los videos, las simulaciones o multimedias interactivas, las referencias bibliográficas y cibergráficas, las actividades y las evaluaciones en línea.



La plataforma WizIQ permite tener una relación más cercana entre los estudiantes y entre estos y el tutor en tiempo real, facilita las explicaciones, los diálogos y las presentaciones del grupo, y deja grabadas las tutorías para aquellos alumnos que quieran verlas de nuevo sin importar los horarios (p. 33).

Así, estos ambientes virtuales de aprendizaje se convierten en medios fundamentales en el proceso educativo, tanto para posibilitar un diálogo entre los participantes, como también para generar espacios de producción de conocimiento. Sin embargo, en Ude@ no se han desarrollado estudios que muestren la manera cómo se interactúa con estos medios para la producción de conocimientos matemáticos, específicamente en el campo de la educación matemática. Es por esto que realizar un estudio para analizar estos aspectos en los escenarios de Ude@, se considera pertinente para propiciar el aprendizaje de las matemáticas y describir las características de la interacción, de tal manera que puedan realizar aportes teóricos y metodológicos en este contexto educativo.

Actualmente, Ude@ cuenta además con 19 salas de videoconferencia que facilitan la comunicación y difusión del conocimiento y dan respuesta a las políticas de la Universidad de Antioquia para el acercamiento de las facultades, escuelas e institutos a las regiones, así como también generan una estrategia para vincular otras áreas del conocimiento al proyecto de virtualización en la Universidad de Antioquia.

Además de las plataformas anteriormente mencionadas, se resalta que Ude@ le apuesta a otras alternativas para el aprendizaje, creando nuevos ambientes virtuales, no solo para los estudiantes de Ude@ sino también para el público en general. Es el caso de la *Emisora Ude@ suena* y *Zona Ude@*, donde se han publicado videos de clases de diferentes cursos, entre ellos de matemáticas en el Canal de YouTube, de tal manera que se conviertan en una fuente importante de consulta y apoyo para el aprendizaje. Estos recursos se encuentran disponibles en todo momento y se puede acceder a ellos desde cualquier dispositivo conectado a la Internet.

Actualmente, Ude@ trabaja en el desarrollo de los ya mencionados MOOC, con lo cual se pretende continuar en la labor educativa de la virtualización en correspondencia con las



tendencias internacionales de educación a distancia virtual. De esta manera, se trabaja por nuevos ambientes virtuales de aprendizaje que exigen transformaciones tecnológicas y metodológicas para la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. El primer MOOC que se pretende desarrollar en el año 2016, es un curso de Lectoescritura, sin embargo, no se descarta la posibilidad de desarrollar MOOC en el área de las matemáticas.

Indagar sobre cómo las herramientas tecnológicas utilizadas para interactuar con la información modifican las formas y métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas impartidas en los cursos de matemáticas de Ude@, como también, explorar la manera cómo un colectivo de humanos–con–medios interactúan para producir conocimientos matemáticos asociados a los conceptos desarrollados en un curso de Ude@, podría examinarse si la utilización de diferentes interfaces propician diferentes interacciones, considerando que a medida que se introducen nuevas interfaces, existirá la posibilidad de modificar la naturaleza del aprendizaje.

#### **1.3.4. Programas de Ude@**

Actualmente, Ude@ tiene como objetivo general “Virtualizar programas académicos formales o no formales para la Universidad de Antioquia, la empresa y el estado con el fin de impulsar la formación avanzada de calidad en todo el país mediante la aplicación de modelos pedagógicos coherentes mediados por las tecnologías de la información y las comunicaciones” (Ospina, 2015, p. 38). Hasta el momento, se han consolidado algunos programas de pregrado, posgrado, educación continua y proyectos especiales que se realizan a través de extensión, abordando también diferentes niveles educativos.

##### **1.3.4.1. Pregrados**

Actualmente, Ude@ ofrece cuatro programas de pregrado en la Facultad de Ingeniería en todas las regiones del departamento de Antioquia, las cuales se desarrollan casi en su totalidad de manera virtual, ellas son:



**Ingeniería Ambiental:** este programa se desarrolla en 10 semestres académicos para un total de 160 créditos, otorga el título de Ingeniero Ambiental y aborda las áreas del conocimiento tales como: ciencias de lo ambiental, gestión ambiental y procesos biogeoquímicos. El programa tiene código SNIES 90402.

**Ingeniería de Sistemas:** este programa se desarrolla en 10 semestres académicos para un total de 160 créditos, otorga el título de Ingeniero de Sistemas y busca contribuir al progreso de la nación mediante propuestas innovadoras de docencia, investigación y extensión que posibiliten la formación de profesionales sobresalientes en el campo humano, académico, técnico e investigativo, capaces de asumir los retos y cambios permanentes de nuestra sociedad. El programa tiene código SNIES 51603.

**Ingeniería Industrial:** este programa se desarrolla en 10 semestres académicos para un total de 160 créditos, otorga el título de Ingeniero de Industrial y aborda áreas del conocimiento relacionadas con: Modelación, Evaluación y diseño de proyectos, Sistemas productivos y logísticos e Indagación científica. El programa tiene código SNIES 20609.

**Ingeniería de Telecomunicaciones:** este programa se desarrolla en 10 semestres académicos para un total de 160 créditos, otorga el título de Ingeniero de Telecomunicaciones. Este programa tiene como objetivo planificar, diseñar, implementar y gestionar sistemas y servicios de Telecomunicaciones e informática, para lograr contacto ágil y eficiente entre las personas a través de máquinas, abordando áreas del conocimiento relacionadas con la arquitectura, urbanismo y afines. El programa tiene código SNIES 20370.

Estos programas durante la trayectoria de Ude@, muestran una creciente demanda en la población, tal como se evidencia en la siguiente gráfica:



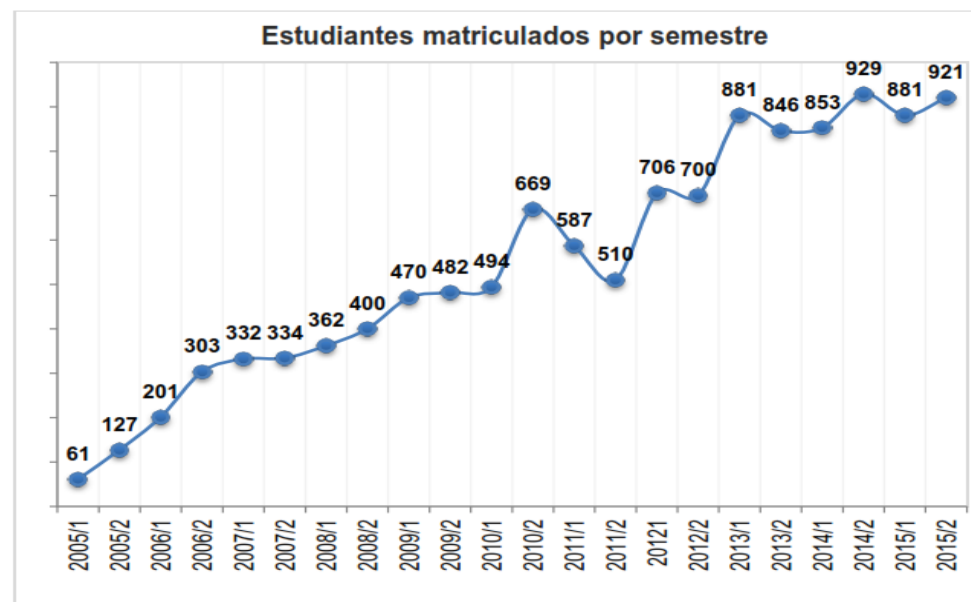


Gráfico tomado de las estadísticas de Ude@ (Ospina, 2015, p. 62)

#### 1.3.4.2. Posgrados

Actualmente, Ude@ apoya los procesos educativos de cuatro programas de posgrados adscritos a diferentes Facultades de la Universidad, ellos son:

**Especialización en Gestión Ambiental:** es un programa adscrito a la Facultad de Ingeniería y se desarrolla en dos semestres académicos, fue el primer programa de posgrado que apoyó Ude@ el cual comenzó en el primer semestre del año 2011; actualmente tiene 25 estudiantes y han egresado 42. El programa tiene código SNIES 90391. Su objetivo es:

Capacitar profesionales para que de manera multidisciplinaria aborden el trabajo tendiente a asegurar un desarrollo sostenible del ambiente, mediante la administración, la planeación y la aplicación de las técnicas y medidas de prevención, mitigación, corrección, control y compensación de los impactos ambientales asociados con las actividades socio-económicas y culturales de las comunidades.<sup>13</sup>

<sup>13</sup> Tomado del sitio web de Ude@, ver: <http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/institucional/unidades-academicas/facultades/ingenieria/programas-academicos/programas-posgrado/contenido/asmenulateral/especializacion-gestion-ambiental-virtual/>



**Especialización Tecnológica en Regencia de Farmacia:** este programa está adscrito a la Facultad de Ciencias Farmacéuticas y Alimentarias y que se desarrolla en dos semestres académicos, es un programa relativamente nuevo, el cual se encuentra en proceso de admisión para la segunda cohorte en el primer semestre del año 2016. El programa tiene código SNIES 103919.

**Maestría en Gestión Ambiental:** es un programa adscrito a la Facultad de Ingeniería, dirigido a profesionales de diversas áreas del conocimiento, principalmente de las ciencias naturales, la ingeniería, las ciencias económicas y las ciencias sociales y tiene una duración de 4 semestres académicos. El programa tiene código SNIES 90950.

**Maestría en enseñanza de las matemáticas:** este programa se encuentra adscrito a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia y se desarrolla en su totalidad en la modalidad virtual de Ude@, con énfasis en *profundización*. Actualmente, ya han egresado 21 estudiantes de su primera cohorte que inició en el primer semestre del año 2013, tiene 82 estudiantes matriculados en los diferentes semestres y se encuentra en proceso de admisión para la quinta cohorte en el primer semestre del año 2016. El programa tiene código SNIES 101929.

La maestría tiene una duración de 4 semestres académicos de 16 semanas cada uno, durante dos años calendario. La intensidad es de 8 horas por semana y los cursos se desarrollan de manera sincrónica a través de la plataforma WIZIQ y con tiempos complementarios en la plataforma Moodle. Esta maestría centra su atención en la formación continua de maestros, profundizando en el saber específico de las matemáticas y en el desarrollo de competencias que pueden ser implementadas en el aula.

La maestría está dirigida a profesores de matemáticas que trabajan en la educación básica, primaria o secundaria y se articula a las políticas del gobierno departamental como una alternativa que propende por la formación de maestros de las regiones, principalmente del departamento de Antioquia.



Aunque este estudio no centra su atención en los cursos del programa de maestría en enseñanza de las matemáticas, los procesos investigativos de éste se pueden adaptar a programas de formación de profesores que se desarrollan en ambientes virtuales y en contextos semejantes a los de Ude@.

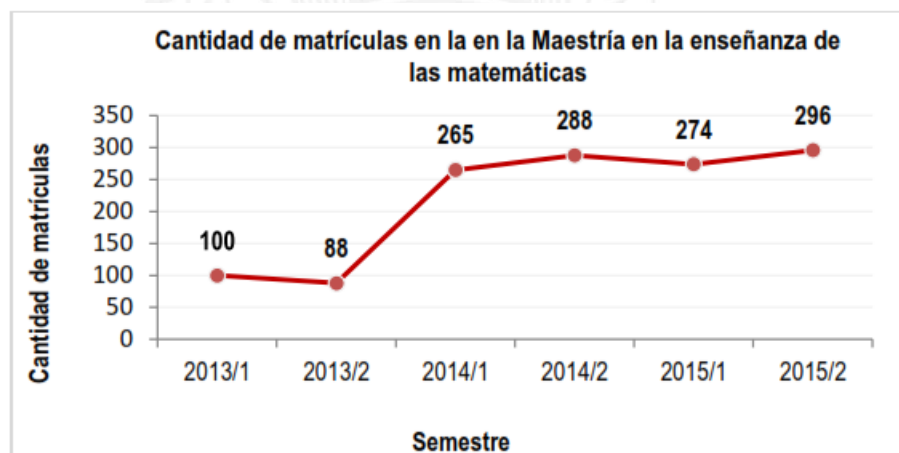


Gráfico tomado de las estadísticas de Ude@ (Ospina, 2015, p.64)

La anterior gráfica muestra la matrícula generada en los diferentes cursos de la maestría, desde su comienzo en el año 2013 hasta el último periodo académico que actualmente se encuentra en desarrollo.

#### 1.3.4.3. Vamos para la universidad

Entre el año 2009 y 2010 se desarrolló una prueba piloto en el municipio de Jericó en el departamento de Antioquia, con el programa *Los bachilleres estudian en la Universidad de Antioquia*, con el propósito de fortalecer las competencias en matemáticas y lenguaje de los estudiantes que cursaban los últimos años de la secundaria. Estos cursos se desarrollaron empleando los medios de Ude@, en la modalidad de educación a distancia virtual, creando ambientes virtuales de aprendizaje en Moodle y utilizando los diferentes recursos del programa tales como libros, guías de estudio, guías de autoevaluación, CD interactivos con mapas conceptuales, videos, audios, tutorías por videoconferencia.



De esta manera, la universidad buscaba generar un espacio de transición para los estudiantes de estos niveles educativos, entre un modelo presencial a uno totalmente virtual, estos estudiantes recibían un curso denominado *Aprendiendo a estudiar a distancia*, en el cual, se les capacitaba en el manejo de las plataformas y medios tecnológicos de Ude@.

De acuerdo con la política gubernamental en este periodo 2013-2015, se busca el mejoramiento de la calidad educativa; para el segundo semestre del 2014, se transforma esta experiencia con los estudiantes de secundaria de las regiones (estudiantes de décimo y once) con un nuevo programa *Vamos para la Universidad* el cual tiene como objetivo general el mejoramiento de las competencias en matemáticas de 14.362 estudiantes de grado 11 pertenecientes a 248 instituciones educativas oficiales del departamento de Antioquia, con el fin de facilitar el paso a la educación terciaria y lograr sostenibilidad en la misma (Ospina, 2015).

A continuación, se presentan los gráficos que muestran por semestre académico, la cantidad de matriculados y cursos que se han desarrollado en este programa.

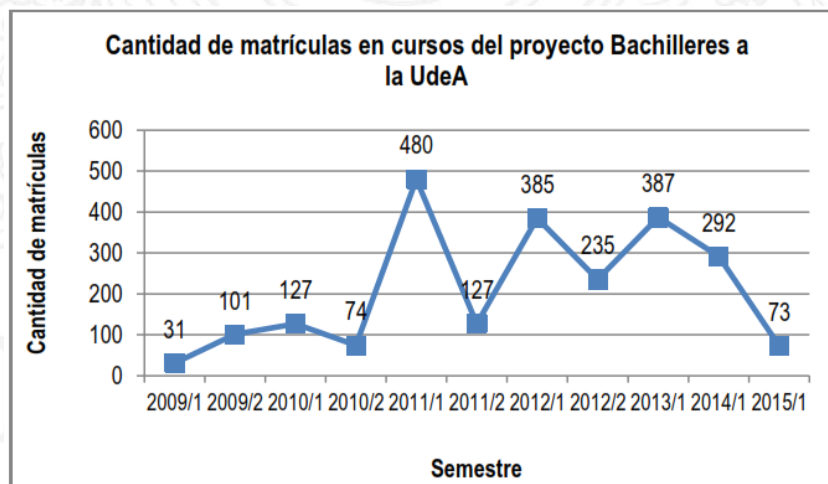


Gráfico tomado de las estadísticas de Ude@ (Ospina, 2015, p.67)



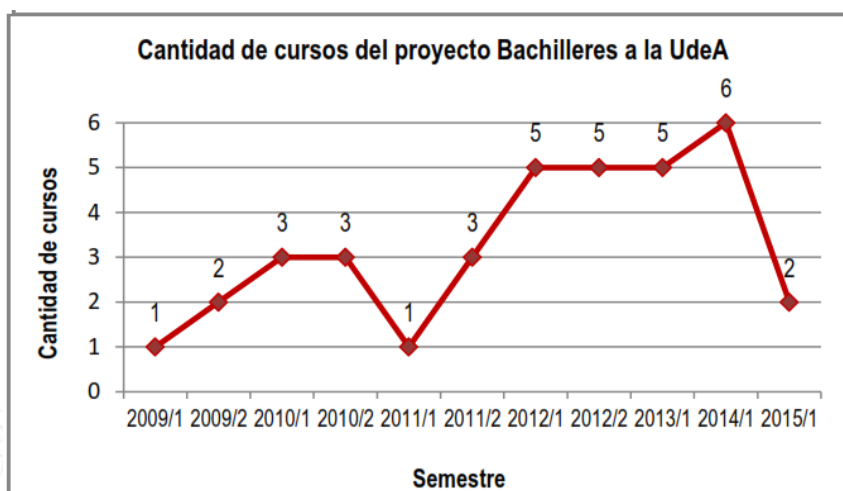


Gráfico tomado de las estadísticas de Ude@ (Ospina, 2015, p.67)

### 1.3.5. Cursos de Matemáticas en Ude@

Los cursos de matemáticas de Ude@ son desarrollados en los dos entornos virtuales mencionados anteriormente, la plataforma Moodle y la plataforma WizIQ. Para los cursos de matemáticas, estas sesiones son programadas durante un semestre académico, con una intensidad de 4 horas por semana. Los estudiantes interactúan con el docente, en diferentes entornos virtuales, generando un espacio académico caracterizado por la manipulación de medios que propende por la construcción y/o producción de conocimiento.

Los cursos de matemáticas en el programa Ude@, son desarrollados durante los primeros semestres en las diferentes ingenierías como cursos básicos, y son orientados por profesores del instituto de matemáticas de la misma universidad. Su currículo, es el mismo de los cursos que se realizan de manera presencial, con la misma intensidad horaria, sin embargo, dadas las características de una modalidad virtual, los cursos se llevan a cabo teniendo en cuenta tanto el modelo pedagógico de Ude@ como las posibilidades que permiten los medios, lo que hace que la metodología sea necesariamente diferente a los cursos de la modalidad presencial.

Si bien es cierto, Ude@ aborda cursos de matemáticas cuyos contenidos son los mismos de un curso de educación presencial, las dinámicas en el desarrollo de la clase mediante las plataformas virtuales y las formas de interactuar, obligan a analizar y repensar las metodologías



y los métodos a utilizar, no obstante, algunos de los docentes de estos cursos, afirman que implementan metodologías semejantes a las utilizadas en un aula de clase de carácter presencial, desconociendo las características históricas, epistemológicas y pragmáticas de la transformación de la educación a distancia virtual.

Los conocimientos matemáticos en general, tienen una característica semejante, son abstractos, por lo tanto, la enseñanza y el aprendizaje de los mismos es un proceso complejo que debe generar estrategias para que los estudiantes puedan desarrollar estructuras mentales que les permitan “visualizar” dichos conocimientos matemáticos. Con los desarrollos de la tecnología, se ha hecho posible experimentar diferentes herramientas para favorecer procesos de visualización, no solo de conceptos matemáticos sino también de fenómenos en los cuales la matemática tiene un campo de aplicación importante.

En este sentido, los diferentes medios que pueden ser implementados en un curso de matemáticas desarrollado en Ude@, hace pensar en múltiples posibilidades para implementar diferentes medios tecnológicos pertinentes de acuerdo a las características de los conocimientos matemáticos que se pretenden abordar. Actualmente, sin la utilización de un software de geometría dinámica, sería más complejo visualizar o comprender las características de algunos conceptos matemáticos. De esta manera, los medios juegan un papel importante en la educación a distancia virtual para la producción de conocimiento. Por tal motivo, indagar sobre la manera como los estudiantes hacen uso de ellos, es un factor que pretende ser abordado en esta investigación.

### **1.3.6. La interacción en un curso de matemáticas**

Cuando se habla de cursos en la educación a distancia virtual, la interacción es un término que se encuentra presente, se habla de cursos que busquen “una mayor interacción” en correspondencia con los medios tecnológicos que lo permitan. En este sentido, ¿Qué debemos tener en cuenta para generar una mayor interacción? ¿Cómo favorecer la interacción en este tipo de ambientes virtuales? ¿Toda interacción conlleva a una producción de conocimiento? son



interrogantes que hacen pensar que “la interacción” tiene múltiples connotaciones y es determinante a la hora de abordar un proceso de enseñanza en este tipo de ambientes.

Teniendo en cuenta las características de un curso de matemáticas que se desarrolla en educación a distancia virtual, los medios tecnológicos y los conocimientos matemáticos que pretenden ser abordados, la interacción puede presentarse de diferentes maneras. Por ejemplo, un curso de Cálculo Integral tiene desde su inicio en la plataforma Moodle, los libros en formato digital y el acceso a videos, recursos que fueron elaborados por profesores del programa y explican los conocimientos matemáticos a ser vistos durante el curso. De esta manera, la interacción puede estar direccionada a la lectura de los documentos o la observación de los videos, modificando el proceso que conduce a la producción de conocimiento, obteniendo diferentes alternativas dependiendo de la interacción seleccionada.

Este estudio pretende aportar a las metodologías de enseñanza de las matemáticas en la educación virtual, partiendo de la hipótesis de que éstas son influenciadas por la manera cómo interactúa un colectivo de estudiantes entre sí y con los diferentes ambientes virtuales o medios tecnológicos. Esto exige no sólo tener en cuenta aspectos complejos intrínsecos en los ambientes virtuales, sino también la manera en que se deben articular los medios tecnológicos, en tanto que, condicionan los procesos de interacción para la producción de conocimiento matemático de un colectivo de humanos–con–medios.

Las posibilidades de interacción en plataformas como WizIQ, tales como “compartir escritorio”, “compartir documentos” o “pasar el lápiz” con los estudiantes de un curso en este tipo de ambientes de educación a distancia virtual, eran poco usuales o novedosas hasta hace poco tiempo, de acuerdo con las tecnologías digitales del momento; actualmente, estas interacciones son más frecuentes y, por lo tanto, generan diferentes posibilidades para la producción de conocimientos, aspectos discutidos por Borba y Zulatto (2006), Borba, Malheiros y Amaral (2014) y, Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), basados en investigaciones relacionadas en el campo de la educación matemática. Ahora, analizar cómo estas interacciones frecuentes en el contexto del programa Ude@ influyen en la manera en que un colectivo de humanos–con–medios produce conocimiento matemático, es el aspecto central del estudio.



#### 1.4. Complejidad de la educación a distancia virtual

Las interfaces y entornos que la Internet ofrece en una modalidad de cursos de matemática virtual, fueron desarrollados en algunos países como Brasil para acelerar los procesos de formación de maestros como política durante los años 2000 al 2002. Actualmente, hacen parte de una modalidad en muchas universidades de Colombia para la formación de estudiantes de ingeniería y otros programas de pregrado y posgrado, inicialmente pensados como una oportunidad de acceso a la educación superior. Sin embargo, tanta diversidad de contextos dificulta establecer orientaciones relacionadas con los procesos de formación de estudiantes de educación superior en esta modalidad.

Una de las principales preocupaciones por parte de las instituciones de educación superior, es la formación de los tutores o profesores que orientan los diferentes programas en educación a distancia virtual, ya que en muchos casos, ellos implementan metodologías propias de una educación presencial en un aula regular, desconociendo que el rol del docente requiere de “altas competencias pedagógicas, metodológicas y tecnológicas específicas acordes con la modalidad y el modelo pedagógico definido por la respectiva institución de educación superior” (Salazar y Melo, 2013, p.107). Se puede afirmar entonces, que el rol del docente exige del dominio de los medios propios de un ambiente en educación a distancia virtual y conocer metodologías propias de estos contextos para abordar los conocimientos matemáticos con las herramientas que provee la tecnología.

En este sentido, para poder determinar algunas dificultades en la enseñanza de las matemáticas en la educación a distancia virtual, se hace necesario indagar por los procesos de formación de profesores de matemáticas relacionados con los cursos en ambientes virtuales, así como también, por las características de un curso de matemáticas que se desarrolla con el uso de estos medios, que pueden ser variados de acuerdo a la institución y su contexto.

Por otra parte, el docente de educación a distancia virtual debe centrar su enseñanza en “el acompañamiento, la interacción e interlocución con el estudiante, para lo cual es fundamental el diálogo proactivo e innovativo” (Salazar y Melo, 2013, p.107), aspectos que hacen parte del



desarrollo del presente estudio para contribuir a la educación a distancia virtual en el contexto de la Educación Matemática en Colombia, mediante propuestas metodológicas que puedan orientar a los docentes de matemáticas que imparten estos cursos.

Por otra parte, a partir de la experiencia docente relacionada con los cursos de matemáticas en Ude@, algunos estudiantes manifiestan la complejidad de pasar de un proceso de formación presencial a un proceso educativo a distancia y en ambientes virtuales; otros argumentan que con el uso de estos medios, se dificulta el proceso de comunicación con el docente y, en algunos casos, no se desarrolla un proceso de interacción que permita el aprendizaje de los conocimientos del curso.

Además de la comunicación, se presentan otros factores que pueden complejizar el proceso, tales como: hábitos de estudio inadecuados, pocos espacios para la interacción del colectivo de estudiantes, mínimo acompañamiento del docente, entre otros aspectos que requieren una metodología acorde a las características de un proceso educativo desarrollado a distancia y en ambientes virtuales. En este sentido, el presente estudio, al cuestionarse por las maneras cómo se desarrollan los procesos de interacción en ambientes virtuales de aprendizaje, pretende ilustrar la complejidad de estos y, con base en los resultados, considerarlos como una alternativa que permita construir una propuesta metodológica que aborde esta problemática.

Salazar y Melo (2013) presentan algunas características de la complejidad de la educación a distancia generada por la incorporación de las TIC en el contexto de la educación superior, entre ellas, se reconoce que su naturaleza “es proclive al uso de las tecnologías disponibles en el momento y de renovar el empleo de las mismas con base en la dinámica del desarrollo tecnológico y el avance de las pedagogías y las didácticas en estos ambientes” (p.100). Esto puede llevar a diversidad de herramientas tecnológicas y procesos de enseñanza, en el que es complejo establecer procedimientos y metodologías pertinentes para los cursos en estos ambientes.

Esta perspectiva, caracteriza la educación a distancia como un aspecto complejo, mencionando que:



Es de significativa importancia que se cuente también con enfoques, metodologías, técnicas y herramientas diferenciadas que posibiliten, no sólo la obtención o renovación de registros calificados, sino el fomento de la acreditación de alta calidad de los programas diseñados y ofertados en las diversas metodologías y mediaciones de la modalidad de educación a distancia (Salazar y Melo, 2013, p.100).

Dado lo anterior, se hace necesario identificar enfoques, metodologías, técnicas o herramientas que pueden implementarse en programas de ciencias, ingenierías y afines, desarrollados en educación a distancia virtual, de tal manera que los procesos de interacción que aquí intervienen estén en correspondencia con los propósitos de alta calidad de los diferentes programas. Aunque se entiende que para realizar estudios de esta índole, se requiere de un cronograma a largo plazo para poder establecer generalidades que estén direccionadas al fomento de acreditación de alta calidad, el presente estudio pretende dar una mirada a dicho proceso y reflejar la complejidad de la educación a distancia virtual, resaltando que la interacción es un factor fundamental para el desarrollo de cursos en estos ambientes que debe ser estudiado.

Este estudio observa que existen otros factores que se vislumbran como dificultades en la enseñanza de las matemáticas a distancia y en ambientes virtuales, entre ellos se puede mencionar: la escasa participación de los estudiantes en las plataformas a través de los foros de discusión; los conocimientos matemáticos previos que deben haber desarrollado los estudiantes; la familiarización de los estudiantes con el manejo de los medios; la falta de implementación de una metodología propia de la educación a distancia virtual por parte del docente; la manera como son usados los medios para la presentación y explicación de los conocimientos matemáticos; los espacios limitados para el diálogo y aprendizaje de los conocimientos matemáticos; la falta de buena conectividad y equipos adecuados; y especialmente, el poco reconocimiento que se tiene de la importancia de la interacción con los medios para la producción de conocimiento matemático, entre otros.



### **1.5. Pregunta de investigación**

Lo presentado en este capítulo, muestra que la educación a distancia es un contexto complejo, en el cual, de acuerdo con los aspectos históricos mencionados, son múltiples los factores que estuvieron involucrados en su desarrollo y evolución, entre ellos se encuentran aspectos políticos, sociales, tecnológicos, culturales, educativos, entre otros. De una u otra manera, estos factores permitieron la creación de la denominada *educación a distancia virtual*, en la cual, se reconoce una gran proyección y diversidad de alternativas para su implementación en el campo de la educación, especialmente en el área de las matemáticas, y así, dar respuesta a las necesidades e intereses que el contexto colombiano requiere.

La interacción por su parte, es un fenómeno inmerso en todo proceso educativo desarrollado a distancia y en la modalidad virtual, además, se reconoce que es un término importante que tiene estrecha relación con los medios propios de esta modalidad y que permiten el desarrollo de cursos y programas de formación en educación superior. Sin embargo, teniendo en cuenta la complejidad de la educación a distancia virtual y la manera cómo se desarrollan procesos de interacción en este contexto, es un fenómeno que parece no estar esclarecido y por lo tanto, se considera de interés para ser estudiado y analizado, especialmente en el campo de la educación matemática.

Dado lo anterior, este estudio centra su atención en abordar la siguiente pregunta de investigación:

*¿Cómo interactúa un colectivo de humanos–con–medios en educación a distancia virtual para producir conocimiento matemático?*



## 1.6. Objetivos

### 1.6.1. Objetivo general

Analizar las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral en educación a distancia virtual, que permitan la producción de conocimiento matemático.

### 1.6.2. Objetivos específicos

- Describir características relacionadas con la interacción en un curso de matemáticas de educación a distancia virtual.
- Identificar relaciones entre las categorías de la interacción asociadas a la producción de conocimiento matemático.
- Proponer categorías que relacionen las interacciones de un colectivo de humanos-con-medios en un curso de matemáticas virtual, para orientar la producción de conocimiento matemático.





UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



## CAPÍTULO 2. REFERENTES SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Con la apertura de programas en educación a distancia virtual en educación superior, se abre la posibilidad de desarrollar también cursos de matemáticas en diferentes universidades y con diversas características. El presente capítulo, pretende ilustrar algunas experiencias en el campo de la educación matemática virtual, relacionadas con la interacción en estos ambientes, así como también características de las mismas en el desarrollo de cursos en educación virtual.

En la educación matemática virtual, algunos investigadores han planteado la preocupación por la naturaleza del aprendizaje, adquisición o producción de conocimientos matemáticos (Borba y Villarreal, 2005; Barbosa, 2009; Zulatto, 2007; Moran (2000); Bairral, 2007; entre otros), al respecto se han planteado interrogantes tales como: “Estudiar y aprender matemáticas por medio de internet, ¿Eso realmente es posible?”<sup>14</sup> (Bairral, 2007, p.9) ¿Cómo la reorganización del pensamiento tiene lugar en los cursos a distancia, realizados a través de la internet? (Borba y Villarreal, 2005, p.173). En las últimas décadas, estos investigadores han trabajado en esta línea, abordando la implementación de estrategias metodológicas para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta ambientes virtuales de aprendizaje relacionados con la educación a distancia.

Actualmente, se reconoce que el constructo teórico *humans-with-media* (humanos-con-medios) planteado por Borba y Villarreal (2005), es uno de los referentes teóricos que discuten el papel de la tecnología en relación con la producción del conocimiento matemático, afirmando que los medios y los seres humanos son una unidad que no puede considerarse de manera separada, conformando así una unidad denominada colectivo de seres humanos-con-medios. En esta perspectiva, el presente estudio identifica a partir de este constructo teórico, que las interacciones que realiza dicho colectivo empleando los medios relacionados con los entornos

---

<sup>14</sup> Traducido del portugués de: *Estudar e aprender matemática por meio da Internet? Isso realmente é possível?*



virtuales utilizados en Ude@ (por ejemplo: Moodle y WizIQ), entre otros medios, son fundamentales para la producción de conocimiento.

De otro lado, también se reconoce que los planteamientos de Bairral (2007) han centrado sus esfuerzos en investigar sobre el aprendizaje de las matemáticas en ambientes virtuales, analizando las diferentes formas de expresión: escrita, oral y audiovisual, enfocándose en los procesos interactivo-discursivos que acontecen en un determinado ambiente de la Educación a distancia, y retomando así, la relación entre interacción y construcción de conocimiento matemático.

Estas dos posturas teóricas abordan experiencias investigativas en el campo de la educación matemática, específicamente, discutiendo el papel de la tecnología en la educación a distancia virtual, realizando aportes teóricos específicamente en esta modalidad en dicho campo. El presente estudio se apoya en algunos de sus planteamientos para esclarecer la concepción de la interacción en la educación a distancia virtual y el papel que juega en la construcción de conocimiento, para poder realizar el análisis respectivo en el contexto de Ude@.

Luego de presentar estas experiencias investigativas, en este capítulo se desarrollan algunos apartados relacionados con conocimientos matemáticos que se consideran fundamentales en el desarrollo de un curso de cálculo integral, gracias a sus relaciones con otros conocimientos y debido a que son transversales para el aprendizaje en el curso. Específicamente, se abordará el concepto de límite, de continuidad de una función y el teorema fundamental del cálculo, resaltando las propiedades geométricas de los conceptos subyacentes a ellos.

## **2.1. Constructo teórico humanos–con–medios**

El constructo teórico humanos–con–medios, propuesto por los investigadores Marcelo Borba y Mónica Villarreal (Borba y Villarreal, 2005), nace de las reflexiones realizadas por los autores sobre la aparente dicotomía que se presenta entre los humanos y la tecnología, si se tiene en cuenta que los medios influyen en la construcción de conocimiento, de acuerdo a cómo son utilizados y por quién son utilizados. Igualmente, abordan la tecnología como herramientas en



interacción con los seres humanos, de tal manera que no se contempla la posibilidad de pensarlos de forma independiente, sino que asumen los humanos y la tecnología como una unidad, la cual finalmente se denomina *humanos-con-medios*. Al respecto, Villarreal (2012) plantea que:

La noción de humanos-con-medios trae dos ideas centrales: por un lado, que la cognición no es una empresa individual, sino social (por eso humanos) y, por otro lado, que la cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce el conocimiento y este componente del sujeto epistémico no es auxiliar o suplementario, sino esencial (p.79).

En relación con estas perspectivas y teniendo en cuenta el contexto de Ude@ y el colectivo de humanos-con-medios en este estudio, está compuesto por los humanos (participantes de un curso de cálculo integral) y los medios propios de Ude@ (las diferentes herramientas tecnológicas, además de la oralidad y la escritura) que están involucrados en la producción de conocimiento matemático.

Borba y Villarreal (2005) reflexionan sobre la articulación de modelos, múltiples representaciones, la experimentación y la tecnología como una manera de producir conocimiento matemático. Además, abordan la noción de la reorganización del pensamiento y la idea de que el conocimiento, es producido por un colectivo pensante de humanos-con-medios, apoyados en los planteamientos de Tikhomirov (1981) y Lévy (1993) respectivamente, quienes discuten la relación entre las tecnologías y los seres humanos y plantean que los medios también son actores importantes en la producción de conocimiento.

La teoría de la reorganización del pensamiento propuesta por Tikhomirov (1981), se apoya en la idea de que las herramientas no son simplemente instrumentos vistos como una extensión de la actividad humana, sino que también la transforman, modificando los procesos de pensamiento del ser humano, de tal manera que estos se adapten a nuevas condiciones y así, se generen nuevas formas de actividad.

La noción de colectivo pensante propuesta por Lévy (1993), se refiere a que la oralidad, la escritura y las tecnologías de la información, son factores que hacen parte de la cognición



humana como una extensión de la memoria, es decir, juegan un papel de tecnologías intelectuales debido a que cambian la visión de quienes las usan, modificando su estructura mental y creando nuevas habilidades que transforman la cognición.

Este constructo teórico enfatiza que “los humanos son constituidos por las tecnologías que transforman y modifican su razonamiento y, al mismo tiempo, los humanos son constantemente transformados por esas tecnologías” (Borba y Villarreal, 2005, p.22), entendiendo así, que los medios son coautores en la producción de conocimiento y que no tiene sentido pensarlos de manera aislada. De igual manera, el constructo teórico presenta algunos ejemplos de diferentes experiencias educativas en matemáticas, realizadas en contextos de la educación a distancia virtual, permitiendo reflexionar sobre la existencia de diferentes alternativas para desarrollar procesos de interacción orientados a la producción de conocimiento.

En los ejemplos que plantean Borba y Villarreal (2005) basados en investigaciones ya desarrolladas, manifiestan la naturaleza de la producción de conocimiento de colectivos conformados por humanos-con-lápiz-y-papel o humanos-con-calculadoras o humanos-con-internet. En este último caso, se plantea que en este tipo de ambientes, se presenta un fenómeno denominado *multidiálogo*, que ocurre cuando hay diferentes diálogos de manera simultánea en el Chat y consideran que es una importante característica en un curso de matemáticas desarrollado en educación a distancia virtual.

En la última década, otros investigadores han desarrollado estudios relacionados con la producción de conocimiento matemático en el contexto del constructo teórico humanos–con–medios, en los cuales se resaltan experiencias abordadas con colectivos de humanos-con-chat, humanos-con-videoconferencias y humanos-con-internet. En ellos, la interacción, el diálogo y la colaboración, son elementos fundamentales para la producción de conocimiento en la modalidad de educación a distancia virtual (Borba, Malheiros y Amaral, 2014). El constructo teórico humanos–con–medios hace énfasis en el papel de los medios, resaltando formas específicas que ocurren cuando la Internet es parte de este colectivo pensante que produce matemática, las cuales pueden ser interpretadas como maneras en que dicho colectivo interactúa.



De acuerdo con esta perspectiva teórica, para que ocurra una producción de conocimiento, es importante tener en cuenta el papel que juega la visualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De igual manera, la comprensión de los conceptos matemáticos requiere de múltiples representaciones y, en particular, de la representación visual, la cual puede transformar la comprensión de sí mismo; Borba y Villarreal (2005) afirman en este sentido, que “la visualización es parte de la actividad matemática y una manera de resolver problemas” (p.96). Por tal motivo, para visualizar la construcción del conocimiento que realiza un colectivo de humanos–con–medios y, al mismo tiempo, observar su proceso de transformación, se considera necesario identificar las interacciones que ocurren en relación con estos aspectos y la manera cómo el colectivo establece relaciones significativas entre los conceptos matemáticos.

Este constructo teórico se retoma como uno de los principales referentes de la presente investigación por los aportes que realiza en el campo de la educación a distancia virtual en educación matemática y por las experiencias investigativas que presenta, en las que se resalta que la interacción es un factor involucrado en la producción de conocimiento matemático. Este estudio pretende continuar empleando estos fundamentos para esclarecer cómo se desarrollan las interacciones por parte de un colectivo de humanos–con–medios en el contexto de Ude@.

## **2.2. Interacción y aprendizaje en ambientes virtuales**

El análisis de las interacciones mediadas por las tecnologías de la información y la comunicación, están siendo objeto de estudio, planteando discusiones teóricas relacionadas con el aprendizaje en cursos a distancia. Es el caso de Bairral (2007), que en el contexto de Brasil, realiza discusiones y contribuciones relativas al aprendizaje a distancia en contextos virtuales, planteando algunos ejemplos en el contexto de la educación matemática y cuestionamientos relacionados con la enseñanza y construcción de conocimiento.

Se puede identificar en esta perspectiva teórica que “la interacción pasa a redimensionar la relación entre los individuos y sus pares y, consecuentemente, las prácticas evaluativas” (Bairral, 2007, p.10), lo que hace necesario analizar las “dimensiones de interacción” que se establecen en las dinámicas de trabajo en ambientes virtuales a distancia. Este referente teórico se considera



pertinente para este estudio, en tanto que hace énfasis en la interacción como un aspecto fundamental en cursos de matemática que se desarrollan de manera virtual y su relación con la construcción de conocimiento, discutiendo las tareas y lo que denomina *dimensiones de interacción* en el proceso de aprender a aprender en ambientes virtuales.

El siguiente cuadro muestra las dimensiones de interacción que se plantean en este referente teórico, como resultado del trabajo investigativo en el campo de la educación matemática virtual, sin embargo, se puede observar que en este referente no se hace explícita la manera cómo son usados los medios o el papel que juegan en el proceso de interacción, aspectos que ya se han mencionado como centrales en los cursos que se desarrollan en Ude@.

Dimensão Cognitiva			Dimensão Social
Características Cognitivas	Características Pessoais	Características Físicas	Características Sociais
-Atitudes gerais -Habilidade visual -Conhecimento prévio -Atenção a estilos e processos de raciocínio diversos	-Motivação para aprender e trocar virtual e continuamente experiências -Atitudes favoráveis com a tecnologia, com a aprendizagem própria, com o conteúdo matemático -Crenças -Curiosidade -Emoções -Auto-estima -Atenção ao controle do formador e a outras normas do cenário	-Habilidades visuais, manipulativas (de desenho, representações variadas, etc.) -Outras habilidades e perfil do professorado (idade, sexo, etc.)	-Colaboração -Compartilhar e conhecer experiências profissionais variadas -Reconhecer e valorizar diferentes relações profissionais (com os companheiros, com autoridades, pesquisadores, etc.) -Elementos diversos do contexto educativo

Quadro 2: Dimensões de interação

Cuadro tomado de (Bairral, 2007, p.37)

Además de estas dimensiones de interacción, se resaltan las características de un proceso comunicativo en ambientes virtuales de aprendizaje que particularmente se enfocan en la construcción hipertextual de mensajes basados en las tareas formativas a través del chat y foros de discusión, planteando que la construcción de conocimiento es un proceso de significación hipertextual, afirmando que el hipertexto es una tecnología más compleja que permite construir redes de argumentación, las cuales constantemente pueden ser modificadas o (re)significadas. Esta perspectiva se apoya en los planteamientos de Lévy (1993) quien plantea “seis



características del hipertexto” (Lévy, 1993, p.15): metamorfosis, heterogeneidad, multiplicidad, exterioridad, topología y movilidad de los centros.

Por otra parte, esta perspectiva analiza las interacciones y la construcción de conocimiento en chats, identificando seis momentos que están involucrados en un proceso de enseñanza y aprendizaje a través de este medio:

- 1) Recepción e identificación del personal; 2) Inspiración; 3) Control y problematización;
- 4) Realización de tareas propuestas basadas en la experiencia; 5) Profundización orientada en diferentes marcos teóricos, con ejemplificación de elementos de la práctica; y 6) Intervención con reflexión docente de carácter más general (Bairral, 2007, p.94).

Estos aspectos también son discutidos y estudiados de manera similar por Borba y Villarreal (2005); Borba y Penteado (2012); Borba y Linares (2012); Borba, Malheiros y Amaral (2014); entre otros, reconociendo que todos los momentos son importantes para discutir y compartir los conocimientos, teniendo en cuenta también factores como el diálogo, la interacción y la colaboración para el aprendizaje.

Teniendo en cuenta que los medios de Ude@, WiziQ y Moodle, contienen ambientes de chat y foros de discusión respectivamente, los planteamientos de Bairral (2007), hacen que en este estudio se tengan en cuenta estas concepciones relacionadas con la interacción y la construcción de conocimiento, con el propósito de facilitar el análisis y el alcance de esta investigación.

Las contribuciones de este referente teórico ayudan también a orientar el diseño metodológico de este estudio, ya que “para analizar la actividad, en estos escenarios, se debe procurar entender esa amplia y compleja red de relaciones cognitivas, interactivas y discursivas” (Bairral, 2007, p.25), aspectos que pretenden ser tenidos en cuenta durante el proceso de análisis de los datos de un curso de cálculo integral de Ude@.



### 2.3. Concepciones acerca de la interacción

Reconociendo que la interacción es un factor a destacar en la educación a distancia virtual, es importante para este estudio revisar algunas concepciones de cómo es entendido el término *interacción* y cuál podría ser su naturaleza, de tal manera que a partir de éstas y los resultados del análisis de los datos del contexto de Ude@, se pueda esclarecer una postura teórica en este campo. En este orden de ideas, a continuación se realiza una revisión de este término, haciendo énfasis en los planteamientos de Borba y Villarreal (2005) y Bairral (2007), como referentes que están directamente relacionados con la educación matemática a distancia virtual.

De manera general, revisando varios diccionarios de la lengua española, el término *interacción* es asociado a la acción que se ejerce recíprocamente entre dos o más objetos, agentes, fuerzas, funciones, etc. (Real Academia Española; Larousse; Collins Spanish Dictionary; Manual de la Lengua Española; Diccionario Enciclopédico; entre otros). En este sentido, se puede interpretar que toda acción que se realice entre los diferentes actores del colectivo humanos–con–medios, es denominada una interacción.

Borba y Villarreal (2005) hacen una descripción de la naturaleza de la interacción en cursos de educación a distancia virtual, además, afirman que ha habido una interacción entre los humanos y la tecnología y que la evolución de la especie humana resulta de esta interacción, hasta el punto de que la fusión de tecnologías en la vida cotidiana, cambia nuestra forma de pensar y actuar. En consecuencia, la interacción es un factor fundamental para la reorganización del pensamiento y evolución, transformando la conducta y la manera cómo aprendemos.

En esta perspectiva, el diálogo se concibe como una manera de interacción teniendo en cuenta sus diferentes manifestaciones orales o escritas y que un ambiente como el chat, puede generarse de múltiples formas, algunas de ellas relacionadas con preguntas sobre un conocimiento matemático o también sobre aspectos administrativos o técnicos, lo que genera diálogos paralelos y diferentes discusiones que complejizan la interacción y que se describe como un fenómeno que se denomina *multidiálogo*.



En el constructo teórico humanos–con–medios, las herramientas tecnológicas son medios fundamentales que condicionan la manera cómo interactuamos, de igual manera Bairral (2007), afirma que “las TIC son elementos constitutivos de los ambientes virtuales, dispositivos específicos que utilizamos para propagar el proceso interactivo y la construcción de conocimiento profesional a distancia” (p.8). De esta manera, se identifica que la interacción está directamente relacionada con la producción de conocimiento, lo que hace pensar como hipótesis de que si comprendemos las diferentes posibilidades de interacción en este tipo de ambientes, podemos direccionar el conocimiento que puede ser producido.

Aunque este no es el primer estudio que aborda las interacciones en educación a distancia virtual, ya que según Bairral (2007) afirma que “la atención a los procesos interactivo-discursivos que acontecen en un determinado ambiente formativo han despertado considerable interés en la investigación actual en EaD” (p.8), se considera importante analizar las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios, de tal manera que se pueda comprender un poco más este fenómeno, basados en un contexto específico como lo es Ude@, realizando contribuciones teóricas basados en los análisis de los datos de un curso de cálculo integral.

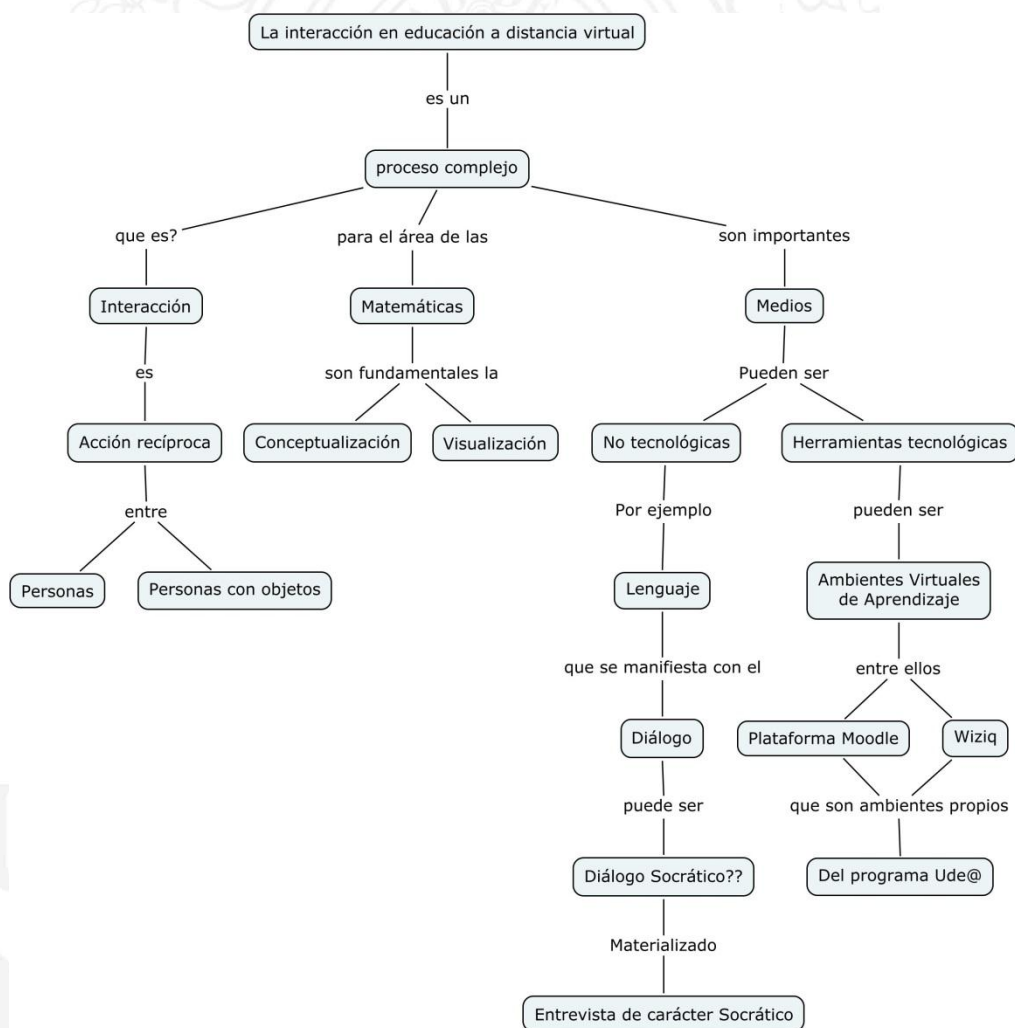
La educación matemática virtual tiene diferentes elementos que pueden ser objetos de estudio tales como el aprendizaje de las matemáticas, metodologías innovadoras, la didáctica, la pedagogía, la evaluación en matemáticas, sin embargo, se considera que la interacción es un elemento inmerso en cada uno de estos elementos, razón por la cual este estudio centra su atención en este fenómeno. Además, algunos autores afirman que las interacciones sincrónicas y asincrónicas son importantes para el desarrollo de cursos en educación a distancia virtual cuando se pretende abordar el aprendizaje en estos ambientes (Bairral, 2007; Borba y Linares, 2012; Borba, Malheiros y Amaral, 2014). Al respecto se puede resaltar que:

Cuando la atención se centra en el aprendizaje de las matemáticas, la interacción es una condición necesaria en el proceso. Intercambiar ideas, compartir las soluciones encontradas para un problema propuesto, exponer el raciocinio, son acciones que constituyen el “hacer” matemáticas. Y, para desarrollar este proceso a distancia, los modelos que posibilitan la



participación de varias personas vienen ganando espacio, de aquellos que se centran en la individualidad. (Borba, Malheiros y Amaral, 2014, p.29)

A partir de esto, se resalta la importancia de la interacción como objeto de estudio que se concibe como un proceso bidireccional que considera una participación conjunta y una implicación activa de todos los actores participantes humanos y no humanos, para construir una amplia red de significados relacionados con el conocimiento matemático.



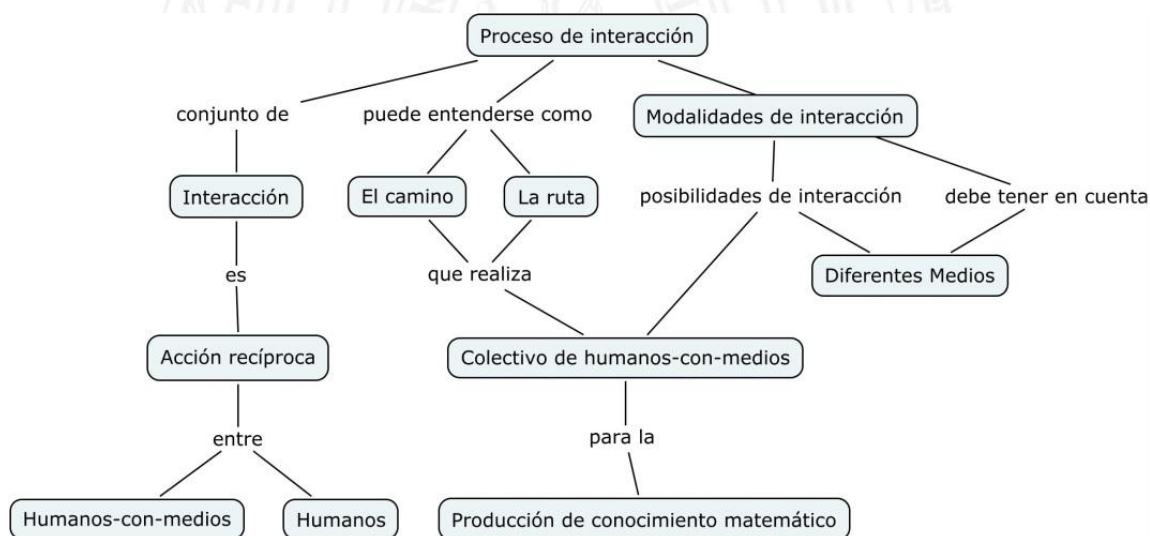
Mapa conceptual construido por el investigador

La interacción va mucho más allá de ser una acción recíproca; realizando una interpretación a partir de los referentes mencionados anteriormente, puede entenderse como una



relación que se establece entre los actores del colectivo de humanos-con-medios y que modifica la naturaleza del aprendizaje. De manera general, se puede mencionar que nuevos medios implican nuevas formas de interacción, así mismo, nuevas interacciones conllevan a la creación de nuevas conexiones e intercambio de significados, lo que hace pensar que así como los medios no se pueden desligar de los humanos, las interacciones tampoco, y son fundamentales para la producción de conocimiento.

A continuación, se presenta un mapa conceptual que representa una descripción de lo que puede ser el proceso de interacción en este estudio.



Mapa conceptual construido por el investigador para describir un proceso de interacción

En este sentido, un proceso de interacción está relacionado con aquellos factores que están involucrados en la producción de conocimiento, sin perder de vista los medios pertenecientes al colectivo y la manera como son usados. Para analizar las interacciones, se requiere de especial cuidado no solo sobre las acciones sino también sobre las relaciones significativas que se establecen entre sí.

Dado lo anterior y, sin perder de vista los análisis del trabajo de campo, el presente estudio concibe la interacción como una relación de comunicación compleja y multidireccional entre los diferentes actores involucrados en la educación a distancia virtual, tanto humanos como no



humanos, concebidos como el colectivo de humanos–con–medios; sin embargo, esta concepción está sujeta a los resultados del análisis de este estudio, en tanto que pretenden ahondar en la naturaleza de la interacción, lo que puede generar otros puntos de vista en relación con esta postura teórica.

Aunque el objeto central de este estudio son las interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral de Ude@, se hace necesario revisar algunas concepciones relacionadas con la producción de conocimiento matemático en este tipo de ambientes, de tal manera que contribuya a facilitar el proceso de análisis de las interacciones que están involucradas en dicha producción. El siguiente apartado trata algunos referentes relacionados con estos aspectos.

#### **2.4. Producción de conocimiento matemático en educación a distancia virtual**

Considerando que los esfuerzos de este estudio están relacionados con el análisis de la interacción que conlleve a una producción de conocimiento de un colectivo de humanos–con–medios, para efectos de este análisis, se hace necesario describir qué se entiende por *producción de conocimiento*, sin embargo, teniendo en cuenta los referentes planteados anteriormente, aunque no se logra identificar una definición formal del término, se presentan algunos ejemplos claros de investigaciones que han abordado su naturaleza, teniendo en cuenta los medios y los ambientes virtuales de aprendizaje.

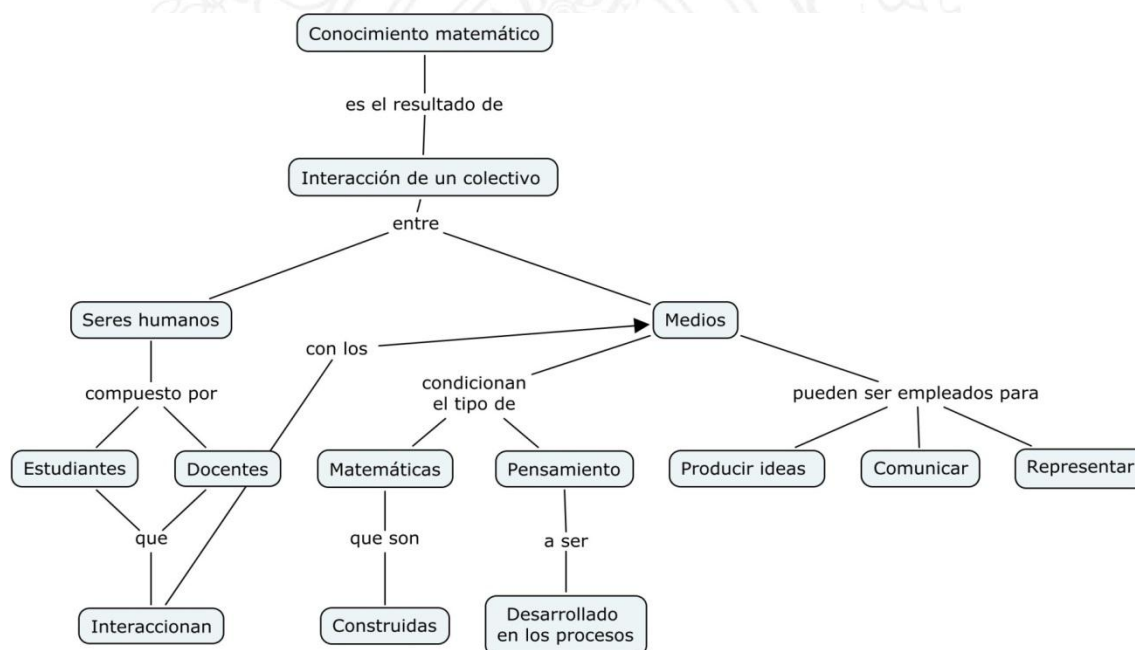
Borba y Villarreal (2005) afirman que el conocimiento es producido por un colectivo de actores humanos y no humanos y que se da con la reorganización del pensamiento y la transformación de la cognición a través de una tecnología de la inteligencia. En esta perspectiva, los medios son actores fundamentales que modifican el pensamiento del ser humano, siendo partícipes directos en la producción de conocimiento.

Aunque en este constructo teórico no se plantea una definición de producción de conocimiento, se desarrollan diferentes ejemplos en el contexto de las matemáticas sobre cómo se genera esta producción, en los cuales se resalta que los medios condicionan el tipo de



matemáticas y el tipo de pensamiento que se produce, por ejemplo, “el tipo de conocimiento producido en sociedades donde la oralidad es el principal instrumento, es diferente del producido en sociedades que tienen alguna forma de escritura” (Borba y Villarreal, 2005, p.179).

El siguiente mapa se construye a partir de la interpretación del constructo teórico humanos-con-medios, para observar algunas relaciones involucradas en la producción de conocimiento.



Mapa conceptual construido por el investigador

De otro lado, la producción de conocimiento va mucho más allá de memorizar, transmitir o recitar información, en este sentido, “construir conocimiento es diferente de un mero intercambio de informaciones” (Bairral, 2007, p.9), o ser un simple proceso de comunicación; puede entenderse como un proceso en el que se establece un significado entre los conceptos o se construye una red de relaciones entre sí, transformando el pensamiento del colectivo de humanos-con-medios produciendo conocimiento matemático.

Barbosa (2009) afirma que la producción de conocimiento matemático, ocurre cuando existe una interacción “externo-interno”, por ejemplo, cuando expresamos externamente algo que



pensamos a través de un medio como la oralidad. Además, enfatiza que el conocimiento matemático no puede ser concebido como una lectura de los conceptos, símbolos o propiedades, sino que requiere de un proceso de interpretación en un ambiente virtual mediado por TIC.

En otras perspectivas relacionadas con la adquisición, generación, construcción o producción de conocimiento en ambientes virtuales, Schreiber (2013) hace un análisis de la relación entre la adquisición de conocimiento y el entorno WEB; en su trabajo plantea no sólo cómo este entorno ha influido en la investigación de la adquisición de conocimiento, sino también, el impacto que ha tenido la adquisición de conocimiento en el mismo. Puede interpretarse que este medio, influye en la manera como se adquiere el conocimiento, lo cual corresponde a los planteamientos del constructo teórico humanos–con–medios.

Gaines (2013) realiza una descripción del pasado, presente y futuro de la adquisición del conocimiento, retomando algunos aspectos de éste en la evolución humana y planteando dicha adquisición en relación con los avances de la tecnología; esto apoyado en algunas investigaciones, en el marco de la adquisición del conocimiento durante los últimos 25 años. Al respecto, plantea que actualmente “La tecnología informática y la interacción humano-computadora han llegado a desempeñar un papel importante en los procesos de conocimiento, facilitando un nivel de generación de conocimiento, la difusión, el acceso y la utilización más allá de lo que hemos conocido” (p.135). Lo anterior, resalta la importancia de la interacción entre humanos–con–medios, en este caso medios tecnológicos, como un aspecto importante para la producción de conocimiento.

Así mismo, Bradshaw (2013) plantea una perspectiva centrada en la adquisición de conocimiento relacionada con el híbrido humano-computador, a partir de escenarios de trabajo en equipo. En este sentido, se reconoce como un aspecto importante para la adquisición de conocimiento, proponer situaciones en las cuales los estudiantes interactúen de manera colaborativa en relación con los conocimientos. Para el presente estudio se observarán los asociados con procesos de razonamiento infinito, propios de un curso de cálculo integral.





Steinbring (2005) se refiere a la producción de conocimiento, como la interpretación interactiva de los conceptos y de las notaciones matemáticas, que son caracterizadas por las múltiples representaciones y pueden ser potencializadas por un ambiente escolar en que los alumnos y profesores utilizan las TIC. De esta manera, se interpreta que el uso de los medios tecnológicos favorecen potencialmente la producción de conocimientos en matemáticas, aspectos que pretenden ser observados y analizados en esta investigación.

Zulatto (2007) realizó su investigación en cursos de geometría a distancia en la modalidad virtual, en los que analiza la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta la interacción en varios cursos de geometría entre los profesores y los medios. En la investigación, el diálogo utilizado en el chat o en las videoconferencias, permitió establecer una discusión de conceptos matemáticos, además de favorecer la visualización de objetos matemáticos. Dado lo anterior, se puede interpretar que estos medios, entre ellos el diálogo, propician la producción de conocimiento matemático.

Barbosa (2009), afirma que “la producción de conocimiento matemático ocurre fundamentalmente, en el contexto de la construcción social y en el proceso de interpretación individual” (p.70). Además, el conocimiento matemático es visto como un proceso y es construido a través de actividades sociales e interpretaciones individuales, lo que hace pensar que se debe tener especial cuidado con aquellas actividades sociales, que en este estudio pueden ser interpretadas como interacciones que ocurren en un colectivo de humanos–con–medios para la producción de su conocimiento matemático.

De esta manera, se observa que las diferentes perspectivas están planteadas en forma general en el constructo teórico de humanos–con–medios, ya que articula: la producción de conocimiento en el contexto de las matemáticas; la interacción de colectivos de personas pensantes; y los medios ya sea tecnológicos o no. Además, presenta algunos ejemplos en educación matemática, en los que diferentes interacciones utilizan diferentes interfaces para la producción de conocimiento matemático.



Este estudio no pretende plantear una definición rigurosa de lo que se entiende por producción de conocimiento matemático, sin embargo, a partir de las concepciones planteadas por los autores descritas anteriormente, si se espera hacer una aproximación coherente, fundamentada en los datos que emergen del análisis, describiendo la manera cómo se desarrolla dicha producción y los medios e interacciones involucradas, en aras de dar respuesta a la pregunta de investigación.

## 2.5. Conocimientos matemáticos de un curso de cálculo en educación a distancia virtual

En los diferentes cursos de cálculo impartidos en el contexto de Ude@, el conocimiento matemático tanto en sus aspectos conceptuales como procedimentales es objeto de estudio; en este sentido, reconocer sus características, definiciones y propiedades, entre otros aspectos, es fundamental tanto para el desarrollo de un curso de cálculo integral como para la presente investigación. Si bien es cierto que la investigación no podrá abordar todos los conocimientos matemáticos de un curso de cálculo integral, ya que la magnitud del estudio sería mucho más compleja y exigiría abordar una mayor diversidad de conceptos y contextos, los esfuerzos estarán orientados a considerar conceptos fundamentales para el desarrollo del curso, para efectos de profundidad y análisis de los datos.

En este sentido, este estudio centra su atención en las interacciones que ocurren en relación al *teorema fundamental del cálculo*, sin desconocer su estrecho vínculo con los conceptos de límite y continuidad, dadas las relaciones de estos conceptos con otros y la importancia de los mismos para abordar otros conocimientos matemáticos, como por ejemplo, las integrales impropias, las aplicaciones de las integrales y las series, asociadas también con procesos de razonamiento infinito.

A partir de la experiencia docente, cuando se abordan estos conceptos, los estudiantes exhiben dificultades para su comprensión; en el contexto de la educación a distancia virtual esto puede suceder quizás, debido a: un uso de medios no adecuados; debilidades en el proceso de interacción con los medios; desconocimiento de algunos medios que permiten la visualización de conocimientos matemáticos; implementación de metodologías no articuladas a la educación





virtual; carencias de técnicas de estudio propias de una modalidad virtual; o la falta de una mayor integración de múltiples medios, a procesos de interacción colaborativa entre estudiantes y docentes; entre otras.

Es importante resaltar que los conocimientos matemáticos en este tipo de cursos, en su mayoría están relacionados con procesos de razonamiento infinito, en los que la noción de límite es un concepto importante en la enseñanza del cálculo (ver también Jaramillo, Londoño y Jurado, 2012), lo cual exige que las clases estén orientadas a la comprensión abstracta de los conceptos y además, que los medios y las interacciones estén direccionados con el mismo propósito.

Los conocimientos matemáticos pueden ser abordados desde sus diferentes componentes conceptuales o procedimentales, teniendo en cuenta sus propiedades geométricas, aritméticas o algebraicas. Por ejemplo, el límite de una función puede ser enseñado haciendo énfasis en sus características geométricas con respecto a la aproximación local, así como también, a partir de la implementación de teoremas o propiedades algebraicas para encontrar el valor de un límite. Aunque ambos casos son relevantes, la manera cómo se aborde el proceso y las herramientas que se utilicen, modificará la naturaleza del conocimiento matemático que será producido por parte del colectivo.

Dado lo anterior, este estudio plantea como hipótesis que las interacciones están condicionadas a las características del conocimiento matemático, es decir, si se pretende abordar un concepto desde su aspecto geométrico, las interacciones requieren del uso de medios que permitan la visualización, direccionadas a generar procesos de abstracción acordes con el concepto en cuestión.

A continuación, en las siguientes secciones, se describen algunas propiedades matemáticas de los conceptos de límite, continuidad y teorema fundamental del cálculo, resaltando algunos aspectos que se consideran puedan estar asociados o relacionados con la producción de estos conocimientos matemáticos, ya que es posible, que algunos de estos elementos sean observados durante el curso de cálculo integral analizado.



### 2.5.1. Límite

Son innumerables los conceptos que se abordan de manera explícita e implícita en un curso de cálculo integral (ver Anexo A), sin embargo, es indudable que la noción de límite es fundamental y transversal para el estudio del cálculo. En este orden de ideas, inicialmente se plantea la conceptualización del límite, resaltando sus propiedades y características, posteriormente, se realiza una descripción de dos problemas fundamentales en el estudio del cálculo que se encuentran relacionados directamente con el límite, *el problema de la recta tangente y el área bajo una curva*.

La preocupación o interés por el comportamiento de algunas funciones que no están definidas en algún punto de su dominio, da paso al análisis de los límites en ese punto. Uno de los ejemplos más comunes que se retoman en un curso de cálculo para ilustrar esta situación, es cuando se pide observar el comportamiento de la gráfica de la función  $f$  dada por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Para valores de  $x$  cercanos a 1, podemos usar técnicas de sustitución de puntos, pero en  $x = 1$  tenemos certeza de que la función no está definida. Para tener una idea del comportamiento de la gráfica de  $f$  en las proximidades de  $x = 1$ , usamos dos conjuntos de valores reales de  $x$ , uno que se acerque hacia 1 por la izquierda y otro que se acerque por la derecha, como puede verificarse en la siguiente tabla:

	Aproximación a 1 por la izquierda				Aproximación a 1 por la derecha			
$x$	0.9	0.99	0.999	0.9999	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.71	2.97	2.997	2.999	3.0003	3.003	3.03	3.3

Podemos notar en ambos casos, que cuando  $x$  se aproxima a 1, la función toma valores cercanos a 3, sin embargo, la función no está definida en este punto (1, 3); esto se interpreta de



manera gráfica como una parábola con un salto o hueco en este punto, tal como lo muestra la siguiente figura.

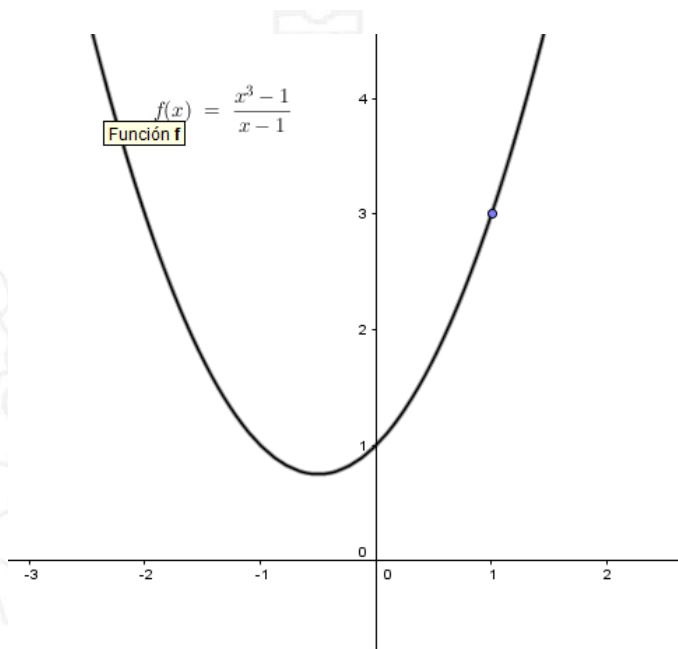


Figura elaborada por el investigador en el software de geometría dinámica GeoGebra

El anterior procedimiento, conlleva a una definición que se emplea comúnmente en cursos de cálculo en ingeniería en Ude@, que no involucra una demostración formal de las propiedades del límite, pero sí una descripción intuitiva que los estudiantes pueden analizar y comprender a partir de una relación gráfica. Se puede asumir esto como una *definición informal o intuitiva del límite* tal como lo plantea Larson y Edwards (2011), “Si  $f(x)$  se hace arbitrariamente próximo a un único número  $L$  cuando  $x$  se aproxima hacia  $c$  por ambos lados, decimos que el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $c$ , es  $L$ ” (p.48). Esto se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

En este sentido, cuando se escribe la expresión  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , es necesario hacer énfasis en dos aspectos, el primero, que **existe** el límite, y el segundo, que el límite es  $L$ .

Para algunas funciones cuando se analiza su tendencia cuando  $x$  se aproxima a  $c$ , tanto por la derecha como por la izquierda y sus límites son diferentes, se deduce entonces que la función



no tiene límite. En otras palabras, si el límite de una función existe, es único; para muchas funciones podemos estimar el valor del límite  $L$  usando una calculadora para evaluar la función en varios puntos muy próximos al valor  $c$ , como se hizo en la tabla del ejemplo anterior.

A partir de lo anterior, se puede orientar a los estudiantes de manera procedimental a emplear *una estrategia para calcular límites*, denominada **sustitución directa**, en el cual se resalta que límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow c$  no depende del valor de  $f$  en  $x = c$ . Sin embargo, si se da la circunstancia de que el límite es precisamente  $f(c)$  para cualquier valor  $c$  de su dominio, entonces decimos que el límite se puede calcular usando esta estrategia. Las funciones que poseen ese *buen comportamiento* en  $c$  se dice que son **continuas en cada  $c$  de su dominio**. En la notación de límites se escribe la expresión de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Para la solución de límites a través de la sustitución directa, se pueden emplear diferentes propiedades básicas del álgebra, tanto de la adición como del producto, lo cual permite conformar **propiedades de los límites** como se plantea en el siguiente teorema:

Si  $b$  y  $c$  son números reales y  $n$  un entero positivo,  $f$  y  $g$  funciones que tienen límite cuando  $x \rightarrow c$ , entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. Múltiplo escalar  $\lim_{x \rightarrow c} [b(f(x))] = b \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$
2. Suma o diferencia  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
3. Producto  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
4. Cociente  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$  Cuando  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$



## 5. Potencia

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

Además de estas propiedades de los límites, existen otros teoremas que se utilizan para la solución de problemas, los cuales normalmente en un curso de cálculo para estudiantes de ingeniería, no son abordadas sus demostraciones o procesos rigurosos, por lo general el estudio de estos teoremas se aborda a partir de su implementación procedimental, denominada mecánica u operativa.

Teorema	Enunciado
<b>Funciones que coinciden salvo en un punto</b>	<p>Sea <math>c</math> un número real y <math>f(x) = g(x)</math> para todos los <math>x \neq c</math> en un intervalo abierto que contiene a <math>c</math>. Si el límite de <math>g(x)</math> cuando <math>x \rightarrow c</math> existe, entonces también existe el límite de <math>f(x)</math> y además</p> $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
<b>Límite de un polinomio</b>	<p>Si <math>p</math> es un polinomio y <math>c</math> es un número real, entonces:</p> $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$
<b>Límite de una función racional</b>	<p>Si <math>r</math> es una función racional dada por <math>r(x) = p(x)/q(x)</math> y <math>c</math> es un número real tal que <math>q(c) \neq 0</math>, entonces:</p> $\lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$



<b>Límites de una función que contiene un radical</b>	<p>Si <math>c &gt; 0</math> y <math>n</math> es cualquier entero positivo, o si <math>c &lt; 0</math> y <math>n</math> es un entero positivo impar, entonces:</p> $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$
<b>Límite de una función compuesta</b>	<p>Si <math>f</math> y <math>g</math> son funciones tales que:</p> $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \qquad \lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ <p>Entonces,</p> $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L)$

De acuerdo con Larson y Edwards (2011), se puede plantear una **estrategia para hallar los límites** como se describe a continuación:

1. Aprender a reconocer los límites que se pueden calcular por sustitución directa.
2. Si el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow c$  no se puede evaluar por sustitución directa, inténtese encontrar una función  $g(x)$  que coincida con  $f$  en todos los  $x$  salvo en  $x = c$ . (Escójase  $g$  de manera que su límite pueda calcularse por sustitución directa).
3. Aplicar el teorema de *funciones que coinciden en todo salvo un punto* para para llegar a la conclusión de que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$$

4. Utilizar una gráfica o una tabla para respaldar la conclusión.



Aunque lo anterior es una estrategia para calcular el valor de un límite, es importante mencionar que algunas no aplica para algunas funciones, es decir, el límite no existe, en estos casos se puede conocer su aproximación tanto por el lado derecho como por el lado izquierdo, este proceso se conoce como hallar los *límites laterales*, que se describe a continuación.

Un límite puede no existir debido a que la función en cuestión tiende a valores distintos por la derecha y por la izquierda de  $c$ . Con el fin de investigar más este fenómeno, es preciso fijarse de antemano en un tipo diferente de límite llamado **límite lateral**. Por ejemplo, cuando hablamos del **límite por la derecha**, queremos decir que  $x$  se aproxima hacia  $c$  por valores mayores que el propio  $c$ . Se escribe esta situación mediante la siguiente expresión:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

De igual manera, se denomina **límite por la izquierda** cuando  $x$  se acerca a  $c$  por los valores menores que  $c$ . Se escribe esta situación mediante la siguiente expresión:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

La importancia de evaluar los dos límites laterales (por derecha y por izquierda), radica en que este proceso permite verificar la existencia de un límite; es decir, si ambos tienden a un mismo valor  $L$ , el límite existe. Esto se encuentra planteado por el siguiente teorema:

Si  $f$  es una función y si  $c$  y  $L$  son números reales, el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende hacia  $c$  es  $L$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

Por lo tanto, lo mencionado anteriormente en relación con el límite, se constituyen en propiedades y conocimientos matemáticos que en un curso de cálculo integral se deben retomar,



buscando que los estudiantes comprendan lo abstracto del concepto de límite y la manera como pueden implementarse estos conocimientos para la solución de problemas. Sin embargo, en el contexto de las matemáticas, no se puede desconocer el significado conceptual del límite que se denomina a través de su *definición formal*, que comúnmente no es desarrollada y analizada en cursos para programas de ingeniería. Esta definición se describe a continuación.

### DEFINICIÓN $\varepsilon - \delta$ DE LOS LÍMITES

Como se había mencionado anteriormente, esta descripción parece procedimental, lo cual hace necesario analizar el significado de las siguientes frases “ $f(x)$  se aproxima a  $L$ ” y “ $x$  tiende a  $c$ ”

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) fue el primero en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases; su *definición  $\varepsilon - \delta$  del concepto de límite*, que aún sigue vigente (“ $\varepsilon$ ” es la letra griega *épsilon* minúscula y “ $\delta$ ” la letra *delta* minúscula).

En la siguiente figura,  $\varepsilon$  representa un número positivo (tan pequeño como se quiera), de tal manera que la frase “ $f(x)$  se aproxima a  $L$ ” significa que  $f(x)$  toma valores en el intervalo infinitesimal  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

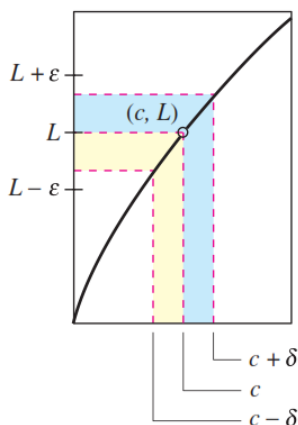


Figura tomada de (Larson y Edwards, 2011, p.52)



En términos de valor absoluto, la expresión algebraica se escribe como

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Análogamente, la frase “ $x$  tiende a  $c$ ” significa que existe un número positivo  $\delta$  tal que  $x$  toma valores en el intervalo infinitesimal  $(c - \delta, c)$  o en el intervalo infinitesimal  $(c, c + \delta)$  lo cual se puede expresar de modo conciso por la doble desigualdad

$$0 < |x - c| < \delta$$

La primera desigualdad  $0 < |x - c|$ , expresa el hecho de que  $x \neq c$ , mientras la segunda  $|x - c| < \delta$ , dice que  $x$  está a una distancia de  $c$  menor que  $\delta$ .

Todo esto nos conduce a la siguiente definición rigurosa de la noción de **límite**, como se enuncia a continuación:

**Definición formal de límite**

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene a  $c$  (salvo posiblemente en  $c$ ) y  $L$  un número real. La afirmación

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

**Nota:** la desigualdad  $0 < |x - c| < \delta$  implica que  $x \neq c$ . En otras palabras, el valor del límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow c$  no depende del valor de  $f(x)$  en  $c$ .



Son innumerables los contextos de las matemáticas y de las otras ciencias, en los que el límite tiene una gran aplicación, sin embargo, especialmente desde sus orígenes, el concepto de límite permitió esclarecer *el problema de la recta tangente*, que consistía en hallar el cambio o la tasa de variación instantánea de una magnitud con respecto a otra (pendiente de la recta tangente a una función en un punto específico).

Para realizar este cálculo de la pendiente, se traza una recta que pase por el punto de tangencia  $P$ , y otro punto cualquiera de la función  $Q$ , como se muestra en la siguiente figura:

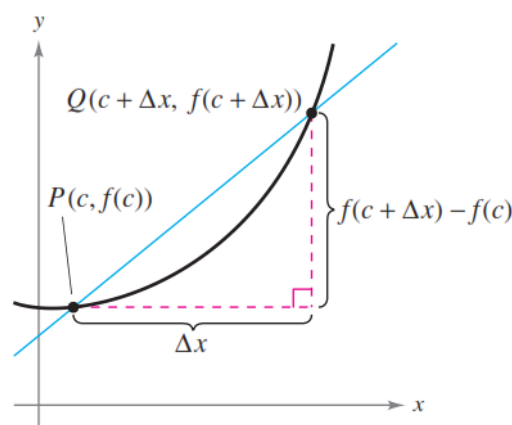


Figura tomada de (Larson y Edwards, 2011, p.45)

Las coordenadas de los puntos serían  $P(c, f(c))$  y  $Q(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ . Recordando que la pendiente a partir de dos puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  está dada por la expresión  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , entonces se puede afirmar que la pendiente de la recta secante que pasa por  $P$  y  $Q$  es:

$$m = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Para determinar la recta tangente en el punto  $P$ , es necesario aproximar  $Q$  hasta  $P$ , tal como se muestra en la siguiente figura:

1 8 0 3



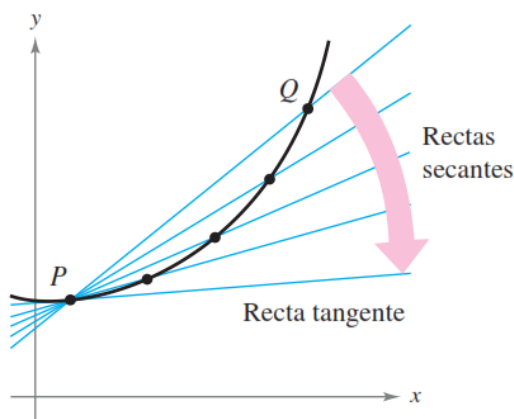


Figura tomada de (Larson y Edwards, 2011, p.45)

Entre más próximo se encuentre  $Q$  de  $P$ , el valor de la pendiente de la recta secante será cada vez más cercano al valor de la pendiente de la recta tangente, lo que permite plantear la ecuación de la recta que pasa por ese punto tangencial  $P$ . Es importante resaltar que entre los puntos  $P$  y  $Q$ , hay infinitos puntos por los que es posible trazar infinitas rectas secantes. El concepto de límite es fundamental para comprender que el proceso de aproximación descrito antes se da, en tanto el cambio de la variable independiente tiende a 0, es decir, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . El valor de este límite corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a una función en un punto, lo que se conoce como *derivada de la función*  $f(x)$  y se escribe:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

El desarrollo de este problema (de la recta tangente), condujo al estudio de las derivadas en otros contextos de aplicación tales como, razón de cambio, velocidad, optimización, entre otros, que permitieron poco a poco consolidar un campo de las matemáticas centrada en el *cálculo diferencial*.

El segundo problema en el cual está involucrado el límite, hace referencia a establecer el área de una región plana irregular delimitada por curvas. Por ejemplo, calcular el área delimitada por las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ , el eje  $x$  y la función  $f(x)$  como lo muestra la siguiente figura, permite emplear diferentes procedimientos relacionados con la suma de áreas de rectángulos, sean



inscritos o circunscritos, y el considerar un número amplio de rectángulos, implica tener una mayor aproximación en el cálculo del área de la región.

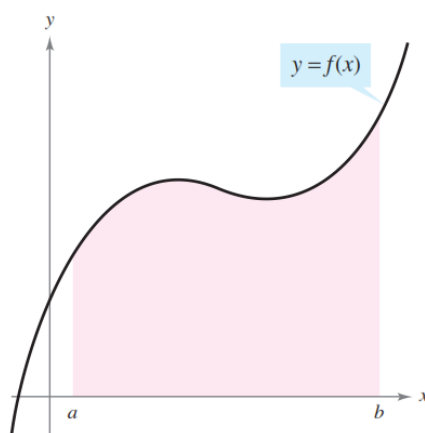


Figura tomada de (Larson y Edwards, 2011, p.46)

El límite de una suma infinita de áreas de rectángulos, permite el cálculo del área de una región, sin embargo, este procedimiento se realizaba con pocas clases de funciones. La siguiente gráfica muestra que a medida que el número de rectángulos aumenta se logra cubrir una mayor parte la región.

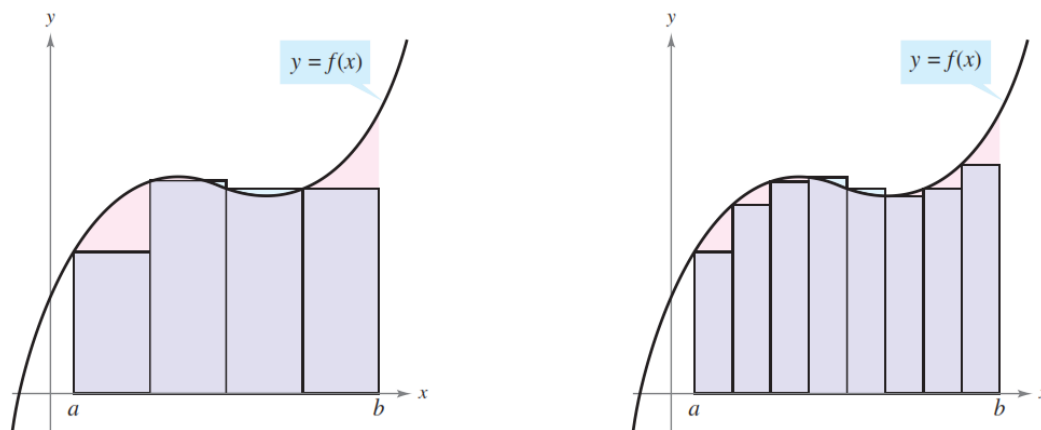


Figura tomada de (Larson y Edwards, 2011, p.46)

Además de estos procedimientos basados en la suma de áreas de rectángulos, también se conoce que con la suma de áreas de trapecios se podría establecer un cálculo aproximado de la región. Sin embargo, el matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 -1866), realizó



procedimientos relacionados con la suma de áreas de rectángulos para establecer una expresión general que incluyera una amplia diversidad de funciones, lo que actualmente se conoce como la *definición de la integral definida*, en la cual, si el límite existe, se dice que la función es integrable en un intervalo  $[a, b]$ ; esta definición se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

El análisis de las características geométricas de este problema, condujo al estudio de las integrales de otros tipos de funciones y sus aplicaciones, entre otras, lo que dio origen al *cálculo integral*. Actualmente, cabe anotar que en cursos de ingeniería se aborda el programa de cálculo integral; de manera específica, esta investigación centra su atención en estos conceptos, considerando las características de la modalidad virtual que desarrolla Ude@.

Estos dos problemas (de la tangente y del área) se habían estudiado de manera aislada por los matemáticos de la época, sin embargo, posteriormente encontraron que éstos tenían una estrecha relación entre sí, lo que se conoce actualmente como el *teorema fundamental del cálculo*. Es así como se puede observar que el concepto de límite está inmerso en la comprensión de este teorema; el estudiante debe identificar que la derivada de una función es la pendiente de una recta tangente a esa función en un punto determinado y, que la integral definida de una función, representa el área de una región bajo una curva.

Para abordar estos aspectos aparentemente aislados, pero conceptualmente relacionados entre sí a través de procesos de razonamiento infinito para llegar al teorema fundamental del cálculo, se requiere de un nivel de abstracción en el que el colectivo de humanos-con-medios evidencie inicialmente propiedades y características de estos conocimientos, ya sea a partir de sus aspectos geométricos, algebraicos o analíticos, lo que en correspondencia con un proceso de interacción articulado a estas características del conocimiento matemático, conlleve a su producción.



### 2.5.2. Continuidad

El término *Continuidad* desde un punto de vista intuitivo, podría tener el mismo sentido en matemáticas que en el lenguaje cotidiano. Decir que una función  $f$  es continua en  $x = c$ , significa que su gráfica no sufre interrupción allí, que ni se rompe ni tiene saltos o huecos. Cuando se habla de que una función no es continua en  $x = c$ , puede suceder al menos una de las siguientes condiciones:

1. La función no está definida en  $x = c$ .
2. El límite de  $f(x)$  en  $x = c$  no existe, es decir, sus límites laterales tienden a valores diferentes o que algún límite lateral tienda a infinito.
3. El límite de  $f(x)$  en  $x = c$  existe, pero no coincide con  $f(c)$ .

Por ejemplo, considérese la función  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

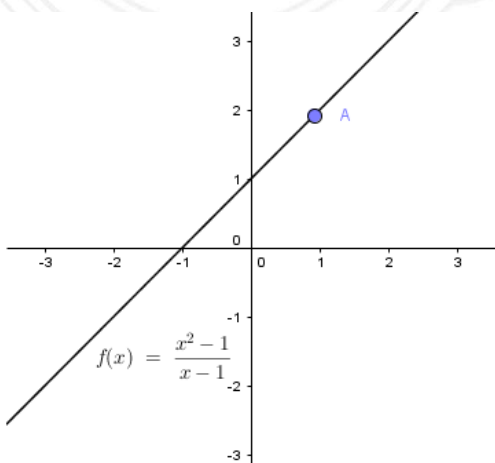


Figura elaborada por el autor en el software de geometría dinámica GeoGebra

De manera directa, podemos identificar que la función cumple con la primera condición planteada anteriormente, ya que no está definida en  $x = 1$ , por lo que se concluye que la función no es continua en este valor.



De manera análoga, se analizan las anteriores condiciones para la siguiente función:

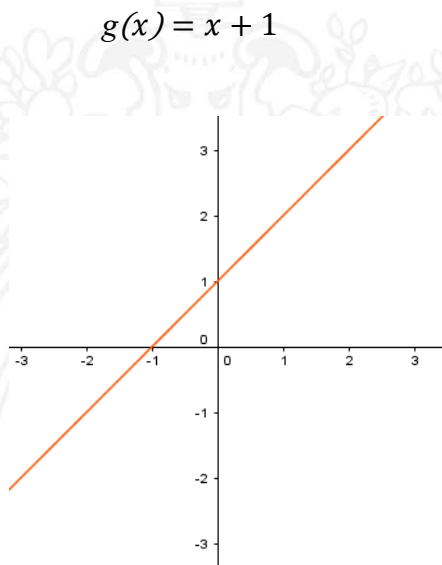


Figura elaborada por el autor en el software de geometría dinámica GeoGebra

Si se asume que  $c = 1$  y analizamos las condiciones planteadas inicialmente, notamos que la función no cumple con ninguna de las condiciones, ya que la función está definida en  $c = 1$ , en efecto  $f(1) = 2$ , el límite en  $x = 1$  es 2 y  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , lo que permite concluir que la función es continua en este valor.

A partir de lo anterior, se pueden establecer criterios para que una función sea continua, los cuales de manera conjunta se constituyen en la *definición de continuidad*, que se enuncian a continuación:

**Continuidad en un punto:** una función  $f$  se dice **continua en  $c$**  si se verifican las siguientes tres condiciones:

1.  $f(c)$  está definido (existe),
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  exista,
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$



**Continuidad en un intervalo abierto:** Una función  $f$  se dice **continua en un intervalo**  $(a, b)$  si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

**Continuidad en un intervalo cerrado:** Una función  $f$  es **continua en el intervalo cerrado**  $[a, b]$  si es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y además:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

La función  $f$  se dice que es continua *por la derecha* en  $a$  y continua *por la izquierda* en  $b$ .

Nota: si  $f$  es continua en toda la recta real  $(-\infty, \infty)$  diremos a veces por brevedad que es una **función continua**.

Se resalta entonces que el concepto de límite de una función está inmerso en la definición de continuidad, lo que evidencia que estos conceptos se encuentran encadenados y que se requieren procesos de abstracción para su comprensión; esto puede analizarse teniendo en cuenta procesos comparativos entre sus componentes geométricos o algebraicos, además de los criterios y su significado.

Para ilustrar lo anterior, consideremos nuevamente las funciones planteadas  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  y  $g(x) = x + 1$ ; si se propone a los estudiantes realizar una comparación entre ellas de manera geométrica o visual, la mayoría podrían pensar que las gráficas son las mismas. De igual manera, cuando se halla el límite, en ambos casos el valor es igual a 2, lo que también les sugiere que se trata de las mismas. Por otro lado, al realizar el siguiente procedimiento algebraico conlleva a preguntar  $f(x) = g(x)$ .

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = (x + 1)$$



Esta es otra razón que hace pensar a los estudiantes que las funciones son iguales, dado que no tienen en cuenta que en la primera, el dominio de la función tiene una restricción en  $x = 1$ , mientras que en la segunda, la función está definida para todos los reales.

Las discontinuidades pueden ser de dos clases: **evitables, removibles o no esenciales e inevitables, irremovibles o esenciales**. Se dice que una discontinuidad en  $x = c$  es evitable si el límite existe y, por tanto,  $f$  puede hacerse continua redefiniéndola en  $x = c$ .

Por ejemplo, si se considera la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Al considerar los tres criterios para examinar la continuidad de una función en un punto, se puede observar que: 1) la función está definida para  $c = 1$ , 2) el límite cuando  $x$  tiende a 1 existe y es igual a 2 y, 3)  $f(1)$  no es igual a  $L$ , por lo tanto, es una función que tiene una discontinuidad en  $x = 1$ . Sin embargo, considerando que se puede redefinir el valor de la función para  $x = 1$ , este es un tipo de discontinuidad evitable o removible, redefiniendo la función de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

De nuevo, considerando  $g(x) = x + 1$ , cabe preguntar si para este caso  $f(x) = g(x)$ , lo cual conlleva a interacciones que permitan discutir en torno a las propiedades y características de las funciones en sus diferentes manifestaciones: geométricas, algebraicas o analíticas, para generar una producción basada en los significados que el colectivo de humanos-con-medios pueda consensuar.



De otro lado, existen funciones con discontinuidades que no pueden ser removibles, es el caso de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

Si se evalúan los tres criterios planteados en la definición, podemos observar que: 1) la función está definida para  $c = 1$ , 2) el límite cuando  $x$  tiende a 1 no existe ya que el límite por la derecha de 1 es igual a 0, mientras que por la izquierda de 1 es igual a 3; en este caso no es posible evaluar el tercer criterio y por lo tanto, es una función que tiene una discontinuidad en  $x = 1$  que no es removible, ya que el límite no existe.

Durante el desarrollo de un curso de cálculo, es necesario ir mucho más allá de emplear criterios o verificar condiciones algebraicas; se requiere que los estudiantes logren realizar estos procesos de abstracción y comprensión de conceptos y propiedades matemáticas, lo cual se constituye en elementos importantes para una producción de conocimiento matemático.

Tal como ocurre con el concepto de límite, existen teoremas que proporcionan propiedades asociadas a la continuidad. Aunque en un curso de cálculo integral no se abordan de manera directa, se considera necesario en este estudio retomar estas propiedades para facilitar en el proceso de análisis la identificación de interacciones que estén relacionadas con estos conocimientos matemáticos. A continuación se enuncian algunos teoremas relacionados con la continuidad de funciones.

Teorema	Enunciado
<b>Propiedades de las funciones continuas</b>	<p>Si <math>b</math> es un número real y <math>f, g</math> continuas en <math>x = c</math>, también son continuas en <math>c</math>, las funciones:</p> <p>1. Múltiplo escalar: <math>bf</math></p>



	<p>2. Suma y diferencia: <math>f \pm g</math></p> <p>3. Producto: <math>fg</math></p> <p>4. Cociente: <math>\frac{f}{g}</math>, si <math>g(c) \neq 0</math></p>
<b>Continuidad de una función compuesta</b>	Si $g$ es continua en $c$ y $f$ lo es en $g(c)$ la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $c$ .
<b>Teorema del valor intermedio</b>	<p>Si <math>f</math> es continua en el intervalo cerrado <math>[a, b]</math>, <math>f(a) \neq f(b)</math> y <math>k</math> es cualquier entre, <math>f(a)</math> y <math>f(b)</math>, entonces existe al menos un número <math>c</math> en <math>[a, b]</math> tal que:</p> $f(c) = k$

De manera específica, el teorema fundamental del cálculo condiciona su aplicación a funciones continuas en un intervalo cerrado y por tal razón, se considera importante estudiar las características, relacionadas con el límite y la continuidad de funciones, para identificar a través de las interacciones, si el colectivo de humanos–con–medios reconoce estas propiedades o conceptos para poder generar producción de conocimiento matemático.

### 2.5.3. Teorema fundamental del cálculo

Se ha mencionado que, en el cálculo, hay dos importantes conceptos relacionados con el límite, el primero se define como la *derivada de una función*, que se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$



El otro se define como la *integral definida* que no es más que el límite de una suma de Riemann (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007; Larson y Edwards, 2011; Leithold, 2007; Stewart, 2008).

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Inicialmente, los matemáticos no habían encontrado una relación entre estos dos límites, sin embargo, la relación entre antiderivadas e integrales definidas dio paso a la denominación del primer teorema fundamental del cálculo, mediante el cual se construyen integrales indefinidas a partir de integrales definidas como lo planteó Isaac Barrow mucho antes que Leibniz y Newton.

Una de las investigaciones recientes que aborda la relación inversa entre las *cuadraturas* y las *rectas tangentes* (Londoño, 2011) y que utiliza la entrevista socrática para favorecer la comprensión de este conocimiento matemático, manifiesta que los orígenes del Cálculo se remontan unos 2000 años atrás, en los trabajos de los griegos sobre áreas y tangentes. Arquímedes (287-22 a.C.) halló el área de una sección de parábola, en términos actuales significa calcular la expresión  $\int_0^b x^2 dx$ . Por su parte, Apolonio (alrededor de 260-200 a.c.) escribió acerca de tangentes a elipses, parábolas e hipérbolas, y Arquímedes analizó las tangentes a ciertas curvas en forma de espiral. En esta época no se tenía conocimiento de que los problemas de área y tangentes estarían relacionados muchos siglos después.

En el siglo XVII, mientras Descartes y Fermat desarrollaban muchas ideas en torno a la Geometría Analítica y el Álgebra, Cavalieri (1598-1647) halló el área bajo la curva  $y = x^n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots, 9$  de acuerdo a un método en el que los cálculos aumentaban a medida que el exponente se hacía mayor. A partir del valor  $n = 9$  aseguró que el patrón debería ser válido para exponentes mayores. En los siguientes 20 años, varios matemáticos justificaron su conjetura, de manera que aún el cálculo del área bajo  $y = x^n$  para un entero positivo  $n$ , que se toma como ejemplo, representaba un gran triunfo. Más tarde, Wallis (1616-1703) halló el área bajo la curva  $y = x^{2/3}$  por un método que tiene mas carácter mágico que matemático. Sin embargo, Fermat obtuvo el mismo resultado con ayuda de series geométricas infinitas.



La situación era propicia para la unión de las técnicas acerca de tangentes y áreas. En efecto, Barrow (1630-1677), profesor de Newton en Cambridge, logró un resultado equivalente al teorema fundamental del cálculo desde un punto de vista puramente geométrico, aspecto que pretende ser resaltado en este capítulo, dada la importancia en la naturaleza de este conocimiento matemático; de alguna manera, sus particularidades ayudan a presentar relaciones entre el conocimiento matemáticos que no es muy clara para los estudiantes en Ude@, pues en el mejor de los casos, muchos resuelven este tipo de situaciones de manera mecánica, sustituyendo las variables como indica el teorema y no dejando ver si establecen la relación entre estas *rectas tangentes y las cuadraturas*<sup>15</sup>.

El teorema fundamental del cálculo va mucho más allá de encontrar una respuesta a un problema desde una perspectiva de producción de conocimiento; se debe buscar comprender la relación entre el área bajo la gráfica de una derivada en un intervalo y las pendientes en la respectiva antiderivada, en otras palabras “la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior variable es el integrando evaluado en ese límite superior” (Stewart, 2008, p. 381), lo cual puede verse apoyado de manera gráfica de la siguiente forma:

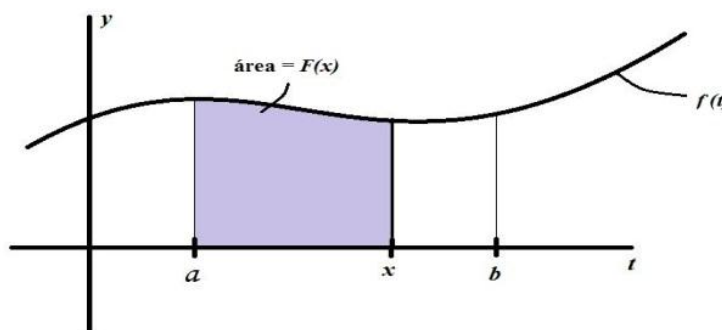


Figura elaborada por el investigador

Se puede apreciar que  $F(x)$  es el área bajo la curva definida entre  $[a, x]$ , es decir,  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  y  $f(x)$  es la derivada de la función  $F(x)$ , ( $F'(x) = f(x)$ ). Esta función  $F(x)$

<sup>15</sup> Término acotado por Londoño (2011), para describir la relación del teorema fundamental del cálculo.



se denomina *función de acumulación*, ya que acumula el área desde un valor fijo (en este caso  $a$ ) hasta un valor variable (en este caso  $x$ ).

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Es importante resaltar que en esta notación el límite superior de la integral definida es una variable  $x$ , luego, se dice que esta integral es una función de  $x$ . Ahora, si se deriva esta función de acumulación, para hallar el cambio que hay en este punto, lo que consolida el *primer teorema fundamental del cálculo* y proporciona una relación inversa entre derivadas e integrales definidas, el cual se enuncia a continuación.

Sea  $f$  continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y sea  $x$  un punto (variable) en  $(a, b)$ . Entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Newton y Leibniz estudiaron de manera independiente esta relación, encontrando que la derivación y la integración son procesos inversos, así como lo son la multiplicación y la división. Una analogía interesante al respecto, tiene que ver con el tratamiento de los infinitesimales, con los cuales, se aproxima el área bajo una curva mediante el producto  $\Delta y \Delta x$ , y para aproximar la pendiente de la recta tangente, se emplea el cociente de  $\Delta y / \Delta x$ . Los procesos de límite empleados para definir la derivada de una función y la integral definida, hacen que se conserve esta relación de inversas a través de lo planteado en el teorema fundamental del cálculo.

Como una extensión al primer teorema, se tiene en cuenta que  $x$  no sea un punto sino una función (en este caso  $g(x)$ ), lo que hace necesario considerar la derivada interna de una función compuesta (regla de la cadena). La siguiente expresión muestra este hecho:

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f(x) \cdot g'(x)$$



Por otra parte, el *segundo teorema fundamental del cálculo* aborda la relación entre integrales definidas y antiderivadas de la siguiente manera: Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y  $F$  cualquier antiderivada de  $f$  en  $[a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La enseñanza de este concepto puede realizarse teniendo en cuenta sus componentes geométricos, aritméticos o algebraicos, sin embargo, durante la revisión de la literatura, la mayoría de los libros de texto consultados centran su atención en la implementación del teorema fundamental del cálculo desde un tratamiento procedimental, lo cual hizo necesario que este estudio pensara en una alternativa que abordara un tratamiento analítico, que reflejara el significado que establece el teorema y que estuviera en correspondencia con las características de un contexto de educación a distancia virtual.

En este sentido, a partir de una revisión de la definición y las características del teorema fundamental del cálculo, se identificó que este conocimiento matemático tiene un alto componente visual geométrico, estableciendo una relación entre áreas y tangentes; esto permitió pensar que el software de geometría dinámica GeoGebra podría facilitar la visualización, construcción y análisis de esta relación y, a través de este medio, generar una explicación del significado del teorema teniendo en cuenta un tratamiento analítico de sus propiedades.

El diseño, construcción y revisión en GeoGebra del teorema fundamental del cálculo, en correspondencia con los referentes teóricos planteados en este capítulo, fue reflejando en una serie de interacciones que serían posibles y pertinentes para desarrollar en el contexto de la educación a distancia virtual, orientadas a la producción de este conocimiento matemático. Por ejemplo, la visualización y el diálogo son algunas de ellas; esto ha permitido proyectar una propuesta metodológica que se articule a este contexto educativo, retomando la interacción y la producción colectiva de conocimiento matemático, a partir de la unidad pensante humanos-con-medios.

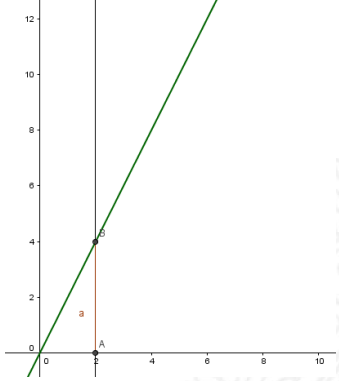
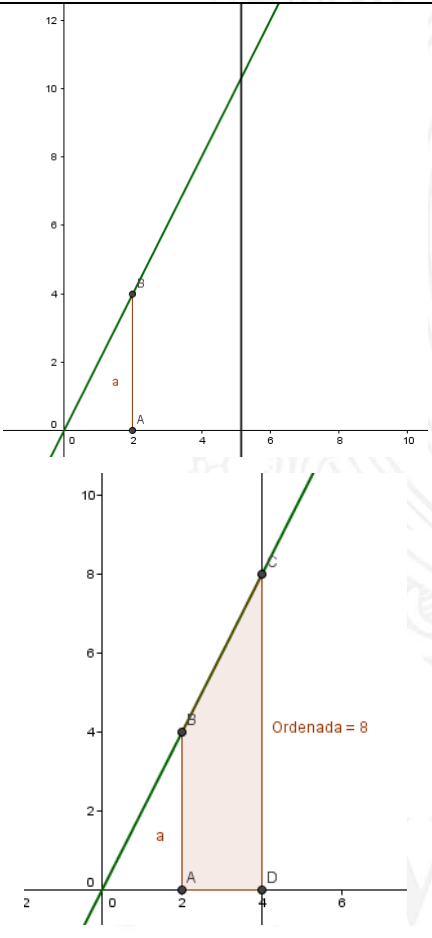


Se considera que este estudio realiza una contribución asociada a la enseñanza del teorema fundamental del cálculo en educación a distancia virtual, ya que presenta un proceso inductivo y explicativo apoyado en GeoGebra, para explicitar el significado de la relación entre integrales definidas y antiderivadas establecidas en el teorema fundamental del cálculo. Es importante anotar que esta ruta metodológica ha sido proyectada para que a partir de interacciones entre el colectivo de humanos–con–medios, se establezcan relaciones significativas entre las propiedades del teorema, mostradas y ejemplificadas a partir de componentes geométricos, aritméticos o algebraicos propios de este conocimiento, de tal manera que estas interacciones estén direccionadas a la producción de este conocimiento matemático.

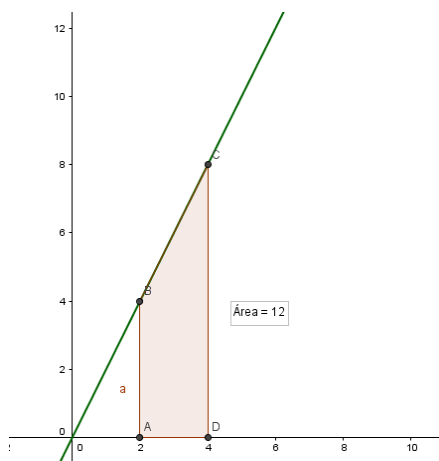
En la siguiente tabla se presentan imágenes construidas en GeoGebra y una descripción de interacciones que pueden ocurrir en un colectivo de humanos–con–medios, con el fin de ir construyendo relaciones entre las propiedades que caracterizan el teorema fundamental del cálculo, apoyados principalmente en la visualización.

Gráficas	Descripción
	<p>Sea <math>f(t)</math> una función lineal cualquiera; a modo de ejemplo, tomaremos <math>f(t) = 2t</math>, que corresponde con la gráfica que se observa.</p>



	<p>Se traza una recta vertical en un punto cualquiera <math>t = a</math>; en este ejemplo el valor será de <math>t = 2</math> que corta la gráfica de la función <math>f(t)</math> en un punto <b>B</b>.</p>
	<p>De igual manera, se traza una recta vertical <math>t = x</math>, que limita por la derecha el área acumulada bajo la función desde el valor <math>t = 2</math>.</p> <p>Considérese la recta vertical <math>t = x = 4</math> para este ejemplo en particular. Con esta nueva recta, se forma un trapecio limitado por <math>f(t) = 2t</math>, <math>t = 2</math>, <math>t = 4</math> y el eje <math>t</math>.</p> <p>Los puntos <b>B</b> y <b>C</b>, tienen coordenadas <b>B</b> (2,4) y <b>C</b> (4,8). Es importante resaltar que para la recta <math>t = 4</math> que limita por la derecha el área acumulada, la ordenada en el punto intersección con la recta es 8, es decir, cuando <math>t = x</math>, entonces <math>f(t) = f(x)</math> y por lo tanto, <b><math>f(x) = 8</math></b></p>





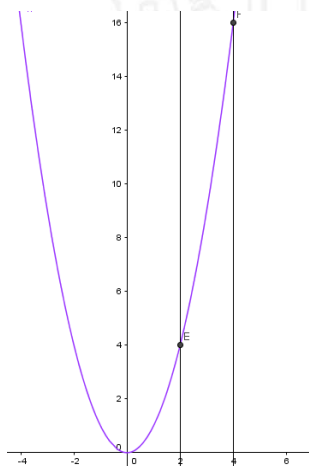
De otro lado, calculando aritméticamente el área del trapecio a través de la siguiente ecuación:

$$A = \frac{B + b}{2} (h)$$

Se tiene:

$$A = \frac{4 + 8}{2} (2)$$

**El área del trapecio ABCD = 12**



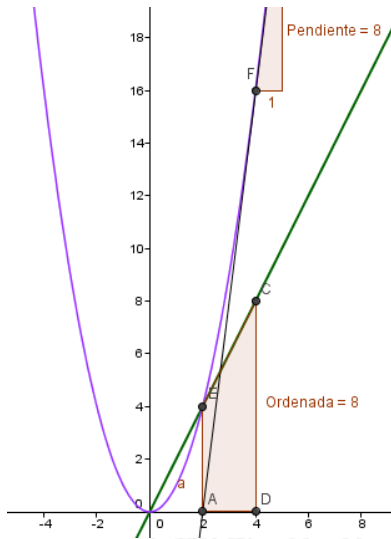
Teniendo en cuenta que la función de acumulación  $F(x)$  es la antiderivada de  $f(t)$ , entonces

$$F(x) = x^2 + C.$$

En la figura se muestra la gráfica de una antiderivada con  $C = 0$ .

Ahora, las rectas  $t = 2$  y  $t = 4$  cortan a la función  $F(x)$  en los puntos **E** y **F** respectivamente, con coordenadas **E** (2,4) y **F** (4,16).

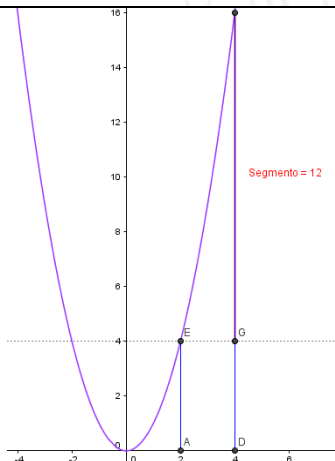




La pendiente en el punto **F**, es la que se ha considerado como la recta  $t = x$  que acumula el área, corresponde a  $F'(x) = 2x$  y como se ha planteado que este valor es  $x = 4$ , entonces la pendiente es 8.

Se puede observar que la derivada de la función de acumulación  $F'(x)$  es equivalente al valor de la función  $f(t)$  en el punto de acumulación  $f(x)$ , independiente del valor inicial  $a$  que se tome. Es decir,

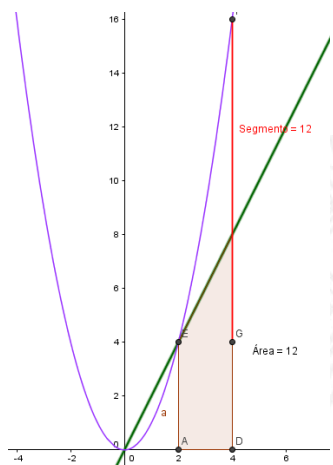
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$



Por otra parte, realizando el cálculo aritmético de la diferencia entre las ordenadas de los puntos **E** y **F**, obtenemos que  $16 - 4 = 12$

Se puede observar que este valor es equivalente al área de la región del trapecio **ABCD**.



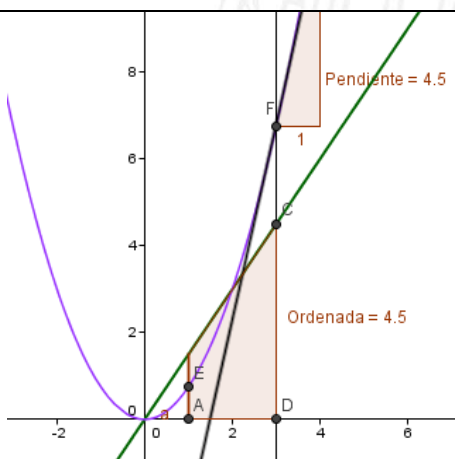


Dado lo anterior, se puede afirmar que el área de la región comprendida entre:

$$f(t) = 2t, t = 2, t = 4 \text{ y el eje } t$$

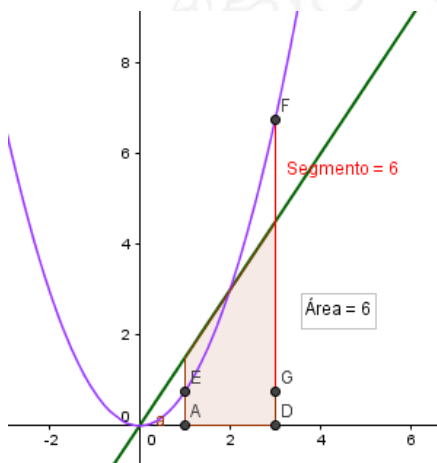
Es equivalente a la diferencia entre las ordenadas de la antiderivada en los puntos  $t = 2$  y  $t = 4$ , es decir:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$



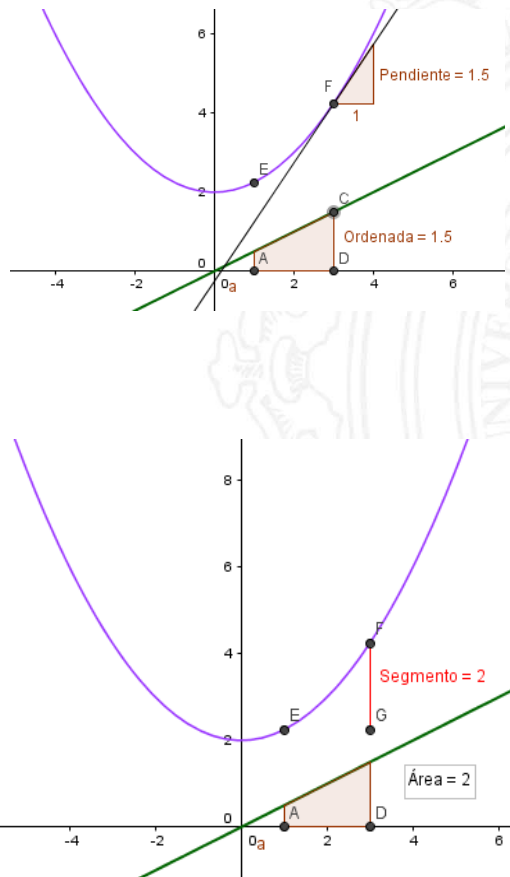
Otro ejemplo que de manera aritmética se puede verificar es tomando:  $f(t) = \frac{3t}{2}$ ,  $t = 1$  y  $t = 3$

Por lo tanto una antiderivada podría ser  $F(x) = \frac{3x^2}{4}$ .



Se puede notar que, la pendiente de la función de acumulación  $F(x)$  en el punto de acumulación  $t = x$ , es equivalente al valor de la función  $f(t)$  en ese punto y, que el área de la región comprendida entre las funciones, es equivalente a la diferencia de las ordenadas de la antiderivada para las abscisas en cuestión.



	<p>Otro ejemplo que de manera aritmética se puede verificar es tomando: <math>f(t) = \frac{t}{2}</math>, <math>t = 1</math> y <math>t = 3</math></p> $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2$ <p>En este caso se hace <math>c = 2</math>, la cual es una antiderivada particular.</p> <p>Se puede notar nuevamente, independiente de la función <math>f(t)</math>, del valor inicial y de la antiderivada que:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. La pendiente de la función de acumulación <math>F(x)</math> en el punto de acumulación <math>t = x</math>, es equivalente al valor de la función <math>f(t)</math> en ese punto:</li> </ol> $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ <ol style="list-style-type: none"> <li>2. El área de la región comprendida entre las funciones, es equivalente a la diferencia de las ordenadas de la antiderivada para las abscisas en cuestión:</li> </ol> $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
--	---

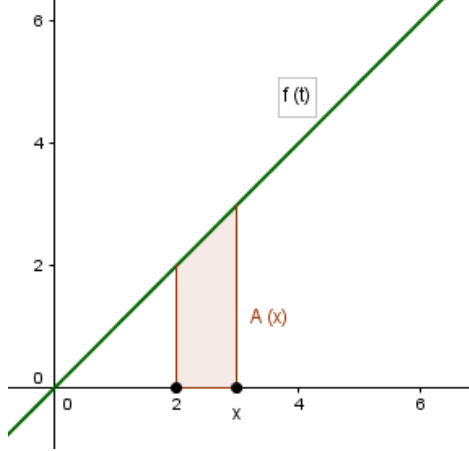
El desarrollo de estas actividades a través del software GeoGebra, permite observar de manera visual la relación geométrica de las antiderivadas e integrales definidas y la estrecha relación entre cuadraturas y rectas tangentes, además de permitir verificar, tal como se hizo en el ejemplo, casos particulares en los cuales de manera aritmética y geométrica se establece la



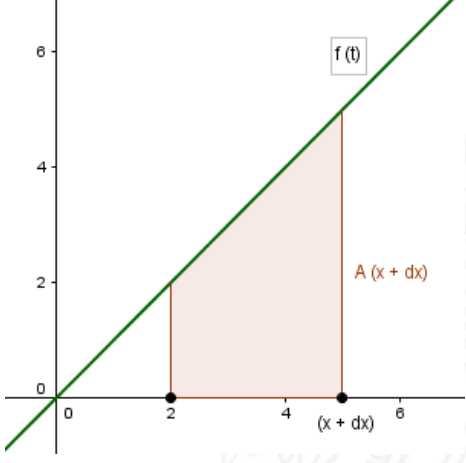
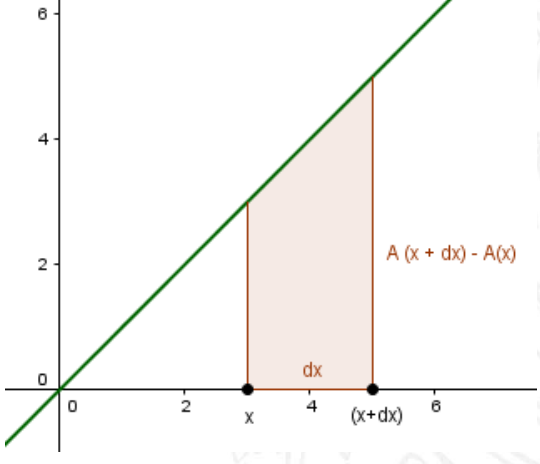
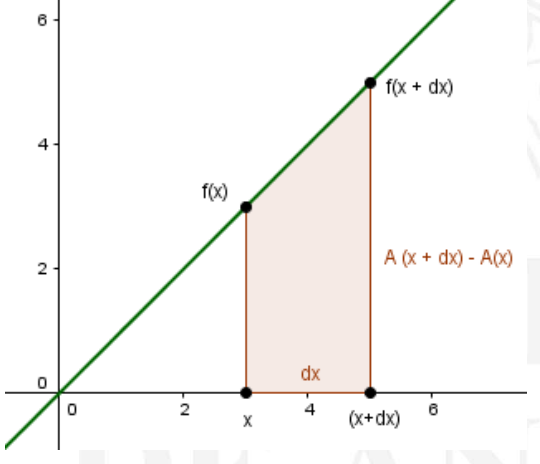
relación planteada en las dos partes del teorema. Debido a la característica dinámica de este software, específicamente de los deslizadores, se puede afirmar que con la ayuda de este medio, las interacciones que se realicen permiten verificar que el teorema se aplica para cualquier caso que cumpla con las condiciones, generando con esto procesos de razonamiento infinito asociados a los conceptos involucrados y relacionados que fueron expuestos en este capítulo.

Lo anterior permite mostrar una relación entre cuadraturas (áreas) y rectas tangentes (derivadas), conceptos que subyacen al teorema fundamental del cálculo. Se considera en este sentido, que la manera como se aborda esta relación, permite el desarrollo de interacciones por parte de un colectivo de humanos–con–medios en el contexto de la educación a distancia virtual para la producción de este conocimiento matemático, teniendo en cuenta no solo un tratamiento procedimental sino también, el significado conceptual del teorema, partiendo principalmente de la visualización de las propiedades geométricas que subyacen a este conocimiento matemático.

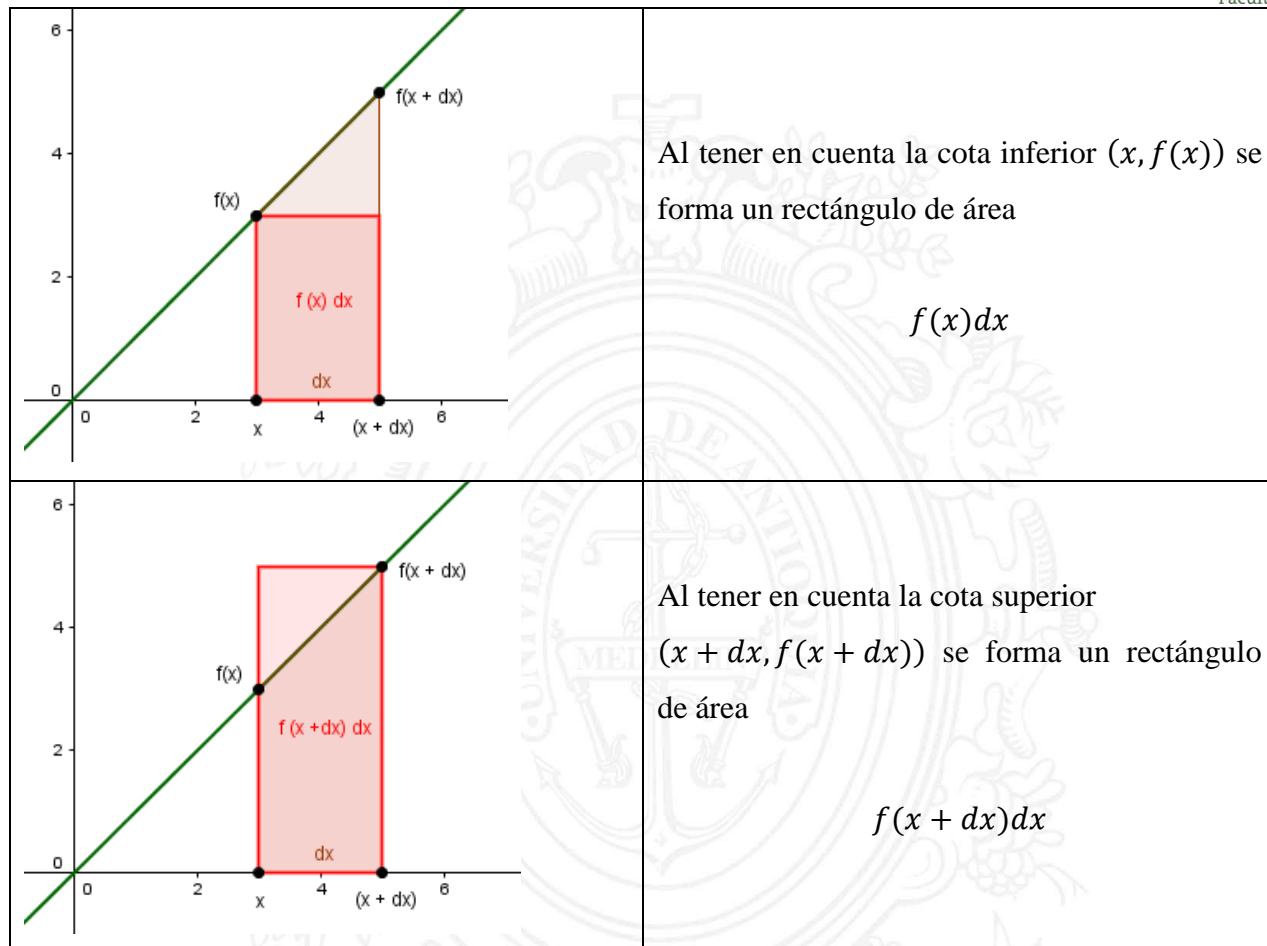
El teorema fundamental del cálculo puede ser abordado también desde su demostración rigurosa, tal como se plantea en los libros de texto (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007; Larson y Edwards, 2011; Leithold, 2007; Stewart, 2008; entre otros), sin embargo, dado el perfil de los estudiantes de ingeniería, no es muy común que se desarrollen estos aspectos formales con los estudiantes, pero no se puede desconocer que es otra posibilidad de interacción que se considera a continuación.

Gráfica	Descripción
	<p>Sea <math>f(t)</math> una función cualquiera y <math>A(x)</math> la función de acumulación que representa el área acumulada bajo la curva.</p>



	<p>Al cambiar <math>x</math>, el valor de la nueva área acumulada está dada por</p> $A(x + dx)$
	<p>Haciendo la diferencia entre las dos áreas anteriores, obtenemos que</p> $A(x + dx) - A(x)$
	<p>A partir de las coordenadas de los puntos, se puede obtener lo siguiente</p>





Dado lo anterior, se puede afirmar que el área bajo la curva  $f(t)$  es mayor que el área del rectángulo más pequeño y mayor que el área del rectángulo más grande, es decir:

$$f(x)dx < A(x + dx) - A(x) < f(x + dx)dx$$

Se puede simplificar la expresión escribiendo:

$$f(x) < \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} < f(x + dx)$$

Al aplicar la propiedad de los límites en cada expresión de la desigualdad, obtenemos:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} f(x) < \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} < \lim_{dx \rightarrow 0} f(x + dx)$$



Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} f(x + dx) = f(x)$$

Y, que el límite corresponde con la definición de derivada:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = A'(x)$$

Entonces, a medida que  $dx$  se hace cero, se puede observar que:

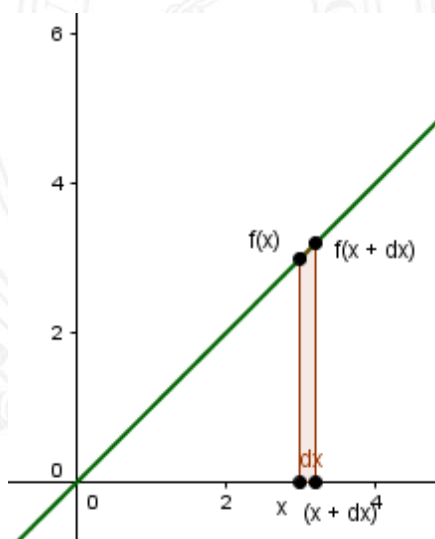


Figura elaborada por el investigador en el software de geometría dinámica GeoGebra

Dado lo anterior, entonces:

$$f(x) < A'(x) < f(x)$$

De acuerdo con las propiedades de las desigualdades, entonces:

$$A'(x) = f(x)$$



Dado lo anterior, se puede concluir que la derivada de la función de acumulación es igual a la función en ese punto de acumulación, tal como lo expresa el primer teorema fundamental del cálculo en la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

De esta manera, se ha demostrado el primer teorema fundamental del cálculo, partiendo de la relación geométrica que se establece entre sus propiedades. De igual forma, el segundo teorema fundamental del cálculo, puede demostrarse teniendo en cuenta sus componentes geométricos. A continuación se realiza una demostración explicitando esta relación.

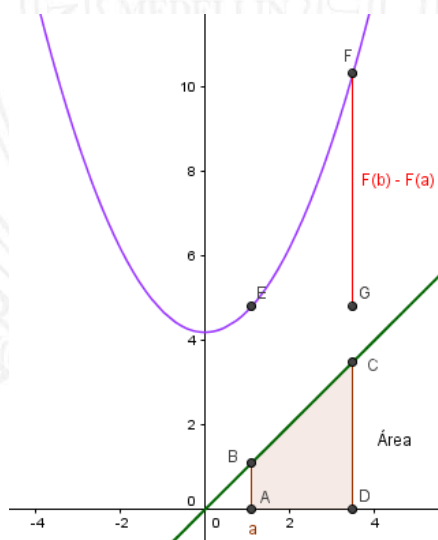


Figura elaborada por el investigador en el software de geometría dinámica GeoGebra

Teniendo en cuenta la figura anterior, de manera geométrica podemos observar que el área de la región es equivalente a la longitud del segmento  $FG$ ; ahora, si el punto  $E$  tiene coordenadas  $(a, F(a))$  y el punto  $F$  tiene coordenadas  $(b, F(b))$ , entonces como el segmento es la diferencia entre las ordenadas de estos dos puntos, su longitud es  $F(b) - F(a)$ . Se puede expresar que el área es equivalente a la longitud del segmento. Esto se puede demostrar de manera algebraica de la siguiente manera:



A partir del primer teorema fundamental del cálculo, la derivada de una función de acumulación (el área bajo una curva) es equivalente a la función, así:

$$A'(x) = f(x)$$

Entonces, la antiderivada es:

$$A(x) = F(x) + C$$

Despejando  $C$ , obtenemos:

$$F(x) - A(x) = C$$

Ahora, si evaluamos  $x = a$ , entonces  $F(a) - A(a) = C$ , en la que  $A(a) = 0$  ya que el valor inicial y el final coinciden y, por tanto, el área es 0. Así,  $F(a) = C$

Luego, si de igual manera evaluamos  $x = b$ , entonces  $F(b) - A(b) = F(a)$

Realizando el proceso algebraico respectivo, se puede concluir que  $A(b) = F(b) - F(a)$ , lo que corresponde con el segundo teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El segundo teorema fundamental del cálculo facilita evaluar integrales definidas reduciendo el procedimiento y evitando emplear la definición a través de sumas de Riemann, además, es muy útil para los contextos de aplicación en los cuales se hace necesario evaluar una integral definida. En la siguiente tabla se enuncian algunos teoremas relacionados con la integral definida, los cuales se consideran que también están involucrados en la producción de conocimiento matemático asociada con el teorema fundamental del cálculo. Estos aspectos



también son importantes a la hora de analizar las interacciones que ocurren para producir conocimiento matemático en este contexto.

Teorema	Enunciado
<b>Propiedad del acotamiento</b>	<p>Si <math>f</math> es integrable en el intervalo cerrado <math>[a, b]</math> y <math>m \leq f(x) \leq M</math> para toda <math>x</math> en <math>[a, b]</math>, entonces</p> $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$
<b>Múltiplo escalar</b>	<p>Si <math>f</math> es integrable en el intervalo cerrado <math>[a, b]</math>, y si <math>k</math> es cualquier constante, entonces</p> $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
<b>Adición o diferencia</b>	<p>Si <math>f</math> y <math>g</math> son integrables en el intervalo cerrado <math>[a, b]</math>, y <math>f \pm g</math> es integrable en <math>[a, b]</math>, entonces</p> $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
<b>Propiedad aditiva de intervalos</b>	<p>Si <math>f</math> es integrable en los tres intervalos determinados por <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math>, entonces</p> $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$





Lo planteado anteriormente permite observar que las interacciones direccionadas desde los componentes geométricos, aritméticos o algebraicos propios de este concepto, son alternativas que un colectivo de humanos–con–medios pueden realizar para la producción de conocimiento matemático, aspectos que pretenden ser observados y analizados en el desarrollo de este estudio.

Lo planteado en este capítulo es fundamental para el análisis de los datos, por cuanto se requiere analizar las interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios en torno al teorema fundamental del cálculo. De esta manera, conocer tanto la concepción de interacción y producción de conocimiento como las características y propiedades del conocimiento matemático, permiten identificar los datos y establecer relaciones que estructuren un esquema teórico en este campo.





UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



## **CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA**

Dado que este estudio se desarrolla en el campo de la educación matemática y que los procesos educativos se asumen como fenómenos sociales, se pretende abordar un enfoque investigativo que permita observar, explorar, describir y analizar los aspectos relacionados con la interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas en educación a distancia virtual, que conlleven a la comprensión e interpretación de este fenómeno, con el propósito de generar una perspectiva teórica y metodológica en este campo. En el transcurso de este capítulo se plantean los aspectos metodológicos de la investigación, direccionados al alcance del objetivo y a responder la pregunta de investigación.

### **3.1. Enfoque de la investigación**

Dado el interés de analizar aquellos procesos de interacción que pueden permitir la producción de conocimiento por parte de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas en educación a distancia virtual, el estudio se aborda a partir de un enfoque cualitativo, ya que en el proceso de interpretación de los datos según Hernández, Fernández y Baptista (2010), los datos cualitativos son “descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones” (p.9), además, “utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación” (p.7). Se considera entonces que este enfoque permite analizar la naturaleza de la interacción en un contexto real, tal como lo es, un curso de matemáticas de Ude@.

En este sentido, el enfoque cualitativo es concebido por Hernández, Fernández y Baptista (2010) de la siguiente manera:

El enfoque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el



análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades (p.9).

Desde esta perspectiva, se identifica que el enfoque cualitativo es pertinente para abordar procesos relacionados con las interacciones entre individuos, grupos y colectividades, lo cual es propicio para el presente estudio, ya que el interés está centrado en las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios. De otro lado, Denzin y Lincoln (2012), plantean que la investigación cualitativa consiste en:

Una serie de prácticas materiales e interpretativas que hacen visible el mundo y lo transforman, lo convierten en una serie de representaciones que incluyen las notas de campo, las entrevistas, las conversaciones, las fotografías, las grabaciones y las notas para el investigador. En este nivel, la investigación cualitativa implica un enfoque interpretativo y naturalista del mundo, lo cual significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en sus escenarios naturales, tratando de entender o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas les dan (p.48).

Bajo estas perspectivas, este estudio se encuentra en correspondencia con estos planteamientos, ya que se pretende discernir sobre la realidad de un colectivo de humanos–con–medios, con el propósito de analizar la naturaleza de la interacción que conlleva a una producción de conocimiento, lo que debe observarse en un ambiente natural en el que el investigador ofrezca una descripción y análisis del fenómeno estudiado; estos aspectos según Albert (2007) y Alvez-Mazzotti y Gewandsznajder (2000), se convierten en argumentos adicionales que señalan que el enfoque cualitativo es el más pertinente para analizar los procesos que ocurren en la interacción de los humanos–con–medios, cuando se trata de producir conocimiento matemático en educación a distancia virtual.

De manera específica, estudiar un fenómeno en un ambiente natural, requiere de un análisis de información no estandarizada y de procedimientos involucrados en el proceso de



aprendizaje, utilizando las interfaces existentes y otros medios que posibilitan la interacción del colectivo de humanos–con–medios. Es así como se realizan observaciones a las diferentes interacciones que puedan ocurrir en las plataformas Moodle o WizIQ propias de Ude@, tanto en momentos sincrónicos como asincrónicos.

Según Hernández, Fernández y Baptista (2010) “en la indagación cualitativa poseemos una mayor riqueza, amplitud y profundidad en los datos, si éstos provienen de diferentes actores del proceso, de distintas fuentes y al utilizar una mayor variedad de formas de recolección de los datos” (p.439). Por lo tanto, en esta perspectiva, este estudio considera que es importante que el investigador describa de manera detallada estas características del proceso de interacción, para tratar de interpretar la realidad del fenómeno estudiado, estableciendo relaciones entre las diferentes interacciones que influyen en la manera cómo un colectivo de humanos–con–medios produce conocimiento matemático.

Para describir de manera detallada el fenómeno observado, se utilizan diferentes instrumentos de indagación con el propósito de obtener un registro aproximado de las interacciones (Borba y Araujo, 2006), entre los cuales están: indagaciones realizadas de los procesos de interacción utilizados por los estudiantes en la producción de conocimiento; grabaciones de las sesiones de un curso que pueden ser utilizadas para analizar las discusiones desarrolladas en los mismos; registros escritos (chats, foros de discusión, correos electrónicos, etc.). Lo anterior, con el fin de identificar cuáles de estas interacciones de un colectivo de humanos–con–medios están relacionadas con la producción de conocimiento.

En la búsqueda de un método que permitiera el análisis de las interacciones que ocurren en la educación a distancia virtual, además de realizar contribuciones teóricas en este campo, se identifica que la *Teoría Fundamentada* “utiliza un procedimiento sistemático cualitativo para generar una teoría que explique en un nivel conceptual una acción, una interacción o un área específica” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p.492), por lo tanto, es la que parece describir cómo interpretar datos que emergen de la realidad y, de manera flexible, plantea diferentes procedimientos para la codificación de la información, de tal manera que permita



construir una teoría teniendo en cuenta que “el análisis es la interacción entre el investigador y los datos” (Straus y Corbin, 2012, p.14).

### 3.2. Teoría fundamentada

La teoría fundamentada fue creada en 1967 por Anselm Strauss y Barney Glaser; su génesis está en el desarrollo de diversas metodologías para el análisis de datos desde un enfoque cualitativo, lo que permite reconocer fenómenos de la realidad. Es un método de tipo inductivo, en el cual la descripción de un fenómeno es la base para la identificación de categorías que permitan interpretaciones abstractas de los datos, y así, la construcción de una teoría. Así mismo, este método “es muy útil para comprender procesos educativos, psicológicos, sociales y otros similares, ya que identifica a los conceptos implicados y la secuencia de acciones e interacciones de los participantes involucrados” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p.495). Dado lo anterior, se considera que este método es adecuado para analizar la naturaleza de las interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas a distancia y virtual para producir conocimiento.

Las diferencias conceptuales entre Strauss y Glaser, generaron que cada uno propusiera un diseño de teoría fundamentada, denominados respectivamente, sistemático y emergente, y en ambos casos la teoría surge de los datos. El primer diseño, se basa en un procedimiento para codificar los datos y consiste básicamente en realizar una *codificación abierta* planteando unas categorías iniciales que posteriormente se refinan creando conexiones, entre ellas, a través de una *codificación axial*; finalmente, en una *codificación selectiva* se refinan aún más las categorías o subcategorías que se pueden derivar de éstas, para crear así una teoría. En el segundo diseño, la teoría se crea a partir de las relaciones que se pueden establecer entre las categorías emergentes de un proceso de codificación abierta; este proceso también se realiza a partir de la comparación constante entre los datos, sin embargo, no se considera que sea necesario preconcebir categorías o seleccionar un eje central, como ocurre en la codificación axial.

Codificar los datos recolectados, es un aspecto central en este tipo de proceso investigativo, con el fin de seleccionar un procedimiento adecuado que permitirá principalmente



validar el presente estudio, así como también, consolidar o no una teoría. Partiendo de la hipótesis de que no todas las interacciones conducen a una producción de conocimiento matemático, es necesario identificar cuáles de ellas están relacionadas con la producción de conocimiento, lo que requiere concebir categorías que estén en correspondencia con lo que se pretende observar. Se considera entonces que para el desarrollo de este estudio, se debe emplear un diseño sistemático basado en los planteamientos de Strauss y Corbin (2012) para el respectivo análisis de la información y, de esta manera, poder realizar aportes teóricos en el campo de la educación matemática.

La teoría fundamentada según Strauss y Corbin (2012) “se refiere a una teoría derivada de datos recopilados de manera sistemática y analizados por medio de un proceso de investigación” (p.13). Este método asume que la recolección de datos, el análisis y la teoría están estrechamente relacionados y al momento de que la teoría emerge es más posible que genere conocimientos, aumente la comprensión y proporcione una guía significativa para la acción (Strauss y Corbin, 2012). La intencionalidad y alcance de este estudio se encuentran en correspondencia con estos aspectos, ya que a partir de las interacciones que ocurren en un curso de matemáticas en educación a distancia virtual, se puede ampliar y refinar una teoría.

De acuerdo con lo planteado por Strauss y Corbin (2012), básicamente la teoría fundamentada aborda tres aspectos: la *descripción*, se refiere a expresar a través de un lenguaje verbal los acontecimientos y sucesos relacionados con un fenómeno y tratar de presentar la mayor cantidad de detalles se puedan mencionar sobre el mismo; el *ordenamiento conceptual*, consiste en organizar los datos en categorías que representan de manera abstracta el fenómeno y; la *teorización*, que consiste en construir, a partir de los datos, un esquema explicativo basado en interrelaciones conceptuales derivadas de las propiedades y dimensiones propias de las categorías.

En este sentido, en correspondencia con la teoría fundamentada, la *teoría* es entendida como un “conjunto de conceptos bien desarrollados vinculados por medio de oraciones de relación, las cuales juntas constituyen un marco conceptual integrado que puede usarse para explicar o predecir fenómenos” (Strauss y Corbin, 2012, p.17). De esta manera, analizar las



interacciones implica comprender la naturaleza de este fenómeno en la educación a distancia virtual y, además, identificar características relacionadas con la interacción, que de forma conjunta, constituyan un marco conceptual en el cual se pueden orientar nuevas prácticas educativas en estos ambientes, teniendo en cuenta los resultados de esta investigación.

### 3.2.1. Procedimientos de codificación

Uno de los conceptos importantes en la teoría fundamentada es *la codificación*, que puede ser entendida como el “proceso analítico por medio del cual se fragmentan, conceptualizan e integran los datos para formar una teoría” (Strauss y Corbin, 2012, p.3). En el contexto de la teoría fundamentada, el investigador debe ser muy descriptivo y detallado, ya que “el uso del lenguaje descriptivo puede convertir los acontecimiento ordinarios en algo extraordinario” (Strauss y Corbin, 2012, p.18), de tal manera que, quien revise el reporte de resultados pueda observar el proceso de desarrollo conceptual y la manera cómo se establecieron las relaciones entre los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). En este orden de ideas, la codificación es un proceso dinámico y flexible que se descompone en una serie de actividades a lo largo del proceso investigativo. A continuación, para efectos del análisis de este estudio, se describen estos procedimientos.

#### 3.2.1.1. Codificación abierta

La codificación abierta según Strauss y Corbin (2012) es “el proceso analítico por medio del cual se identifican los conceptos y se descubren en los datos sus propiedades y dimensiones” (p.18), es decir, es un tipo de codificación que surge del propio texto y los datos, en los que se van asignando códigos según las *propiedades y dimensiones*, las cuales son respectivamente, características de una categoría y escalas en las cuales éstas varían.

Esta codificación permite principalmente el descubrimiento de conceptos, que de manera analítica, se buscan a través de regularidades observadas en el fenómeno estudiado. De manera general, durante el proceso de codificación abierta:



Los datos se descomponen en partes discretas, se examinan minuciosamente y se comparan en busca de similitudes y diferencias. Los acontecimientos, sucesos, objetos y acciones o interacciones que se consideran conceptualmente similares en su naturaleza o relacionados en el significado se agrupan bajo conceptos más abstractos, denominados “categorías” (Strauss y Corbin, 2012, p.111).

Por otra parte, con el propósito de fundamentar este método investigativo y comprender su desarrollo metodológico, se identifica que Hernández, Fernández y Baptista (2010) plantean que en esta codificación “el investigador revisa todos los segmentos del material para analizar y generar —por comparación constante— categorías iniciales de significado” (p.494). En este orden de ideas, el procedimiento se debe realizar con todas las interacciones identificadas en un curso de cálculo integral, buscando reconocer cuáles se encuentran relacionadas y pueden conformarse como categorías.

Dado lo anterior, para alcanzar el objetivo de este estudio, es necesario descomponer y buscar regularidades en las interacciones realizadas por un colectivo de humanos—con—medios, para reconocer categorías que puedan ser conceptualizadas y contribuyan a esclarecer cómo acontece este fenómeno para producir conocimiento matemático.

En este sentido, la conceptualización es fundamental en el desarrollo de una teoría y exige al investigador, reunir argumentos para definir categorías de un fenómeno en particular. Este proceso se debe desarrollar con una clasificación de las características (propiedades) que se puedan asignar al relacionar similitudes o diferencias que sean significativas para el análisis del estudio. Esta clasificación puede darse de múltiples maneras, ya que un mismo objeto o suceso, puede pertenecer a diferentes categorías, dependiendo del significado que el investigador, en función del estudio, logre asignar a dicha clasificación.

El análisis comparativo debe generar en el investigador creatividad para poder evocar imágenes mentales que permitan ver las similitudes o diferencias entre un objeto, acontecimiento, suceso o acción, y así, establecer rótulos o etiquetas que le den un significado a éstos, de acuerdo a la interpretación que realice el investigador. Además de esto, para descubrir



algo nuevo en los datos, es necesario realizar un análisis detallado denominado según Strauss y Corbin (2012) *microanálisis*, que emplea además del análisis comparativo, formulación de preguntas y herramientas analíticas para descomponer los datos y plantear significados potenciales en términos de las propiedades y dimensiones.

En esta codificación, el descubrimiento de categorías y subcategorías requiere de un nivel de abstracción, en el cual el investigador explique el término o el significado del término apoyado en su capacidad de interpretación y descripción del fenómeno. Como una definición de categorías, Strauss y Corbin (2012) plantean que “son conceptos derivados de los datos, que representan fenómenos” (p.124), de igual manera, las subcategorías también son categorías, pero éstas son más específicas y pretenden dar una mayor claridad del fenómeno o explicitar unas variaciones. En este sentido, las categorías o subcategorías surgen del agrupamiento de similitudes o diferencias, es decir, características observadas por el investigador en relación a una situación, acontecimiento, suceso o acción.

Para el presente estudio, en esta codificación se tienen en cuenta las similitudes o diferencias de las interacciones que ocurran en un curso de cálculo integral, para identificar categorías o subcategorías que permitan describir con detalle la naturaleza de este fenómeno y, formular patrones o variaciones con el propósito de construir una teoría en este campo. Sin embargo, aunque se pueden identificar patrones que caractericen una categoría, es posible que las variaciones ayuden a realizar nuevas agrupaciones y conformar subcategorías; este procedimiento se realiza en la codificación axial, que se presenta a continuación.

### 3.2.1.2. Codificación axial

Luego de realizar una codificación abierta e identificar categorías según sus propiedades y dimensiones, en el proceso de generar una teoría a través de este diseño sistemático, se debe continuar con el procedimiento de *codificación axial*, que según Strauss y Corbin (2012), es:

El acto de relacionar categorías a subcategorías siguiendo las líneas de sus propiedades y dimensiones, y de mirar cómo se entrecruzan y vinculan éstas. Tal como se planteó antes,



una categoría representa un *fenómeno*, o sea, un problema, un asunto, un acontecimiento o un suceso que se define como significativo para los entrevistados (p.135).

Además, es importante tener en cuenta que esta codificación se caracteriza por ser explicativa, con el propósito de relacionar categorías y subcategorías para generar explicaciones más detalladas sobre los fenómenos, lo cual implica algunas tareas básicas como se mencionan a continuación:

1. Acomodar las propiedades de una categoría y sus dimensiones, tarea que comienza durante la codificación abierta.
2. Identificar la variedad de contradicciones, acciones/interacciones y consecuencias asociadas con un fenómeno.
3. Relacionar una categoría con sus subcategorías por medio de oraciones que denoten las relaciones de unas con otras.
4. Buscar claves en los datos que denoten cómo se pueden relacionar las categorías principales entre sí. (Strauss y Corbin, 2012, p.137).

Estas tareas básicas exigen para la presente investigación, enfocar la atención en diferencias, contradicciones o similitudes en busca de asociaciones, conexiones o relaciones que se pretenden dilucidar entre las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios; de igual manera, es necesario que se utilicen instrumentos, tales como diagramas, esquemas o mapas conceptuales, entre otros, que permitan tanto visualizar propiedades, categorías, subcategorías y sus relaciones, como también modificaciones a las mismas de acuerdo con lo observado durante el desarrollo del trabajo de campo y su respectivo análisis.

Aunque para esta codificación axial se requiere tener categorías, basta con algunas de ellas para realizar este procedimiento, es decir, no es necesario terminar por completo una codificación abierta para continuar con una axial, no necesariamente son secuenciales. De acuerdo a las características del contexto de educación a distancia virtual de Ude@, se considera que una categoría que obligatoriamente identificaremos es la *interacción con los medios*, sin embargo, las observaciones en el trabajo de campo, deberán reflejar similitudes o diferencias que



permitan establecer relaciones entre categorías y subcategorías, asociadas al fenómeno de la interacción tanto en la codificación abierta como en la axial.

Para establecer relaciones entre las categorías y subcategorías, se pueden emplear análisis derivados de preguntas como: por qué, dónde, cuándo, quién, cómo, con qué, entre otras, y así, relacionar e integrar la *estructura* con el *proceso*, lo que se convierte en una herramienta analítica denominada *paradigma*, que según Strauss y Corbin (2012) es “una perspectiva que se adopta sobre los datos, otra posición analítica que ayuda a recolectarlos y ordenarlos de manera sistemática, de tal modo que la estructura y el proceso se integren” (p.140). Por lo tanto, se convierte en una herramienta importante, para integrar tanto la estructura como el proceso, pero ¿Por qué relacionar la estructura con el proceso?:

Porque la estructura o las condiciones establecen el escenario, o sea, crean las circunstancias en las cuales se sitúan o emergen los problemas, asuntos, acontecimientos o sucesos pertenecientes a un fenómeno. El proceso, por su parte, denota la acción/interacción, en el tiempo, de las personas, organizaciones y comunidades, en respuesta a ciertos problemas y asuntos (Strauss y Corbin 2012, p.139).

Es decir, con la *estructura* se puede comprender el **por qué**, pero con el *proceso* el **cómo**; de esta manera, estudiar tanto la estructura como el proceso ayuda a comprender la naturaleza de un acontecimiento, suceso o situación que en este caso corresponde al fenómeno de la interacción en educación a distancia virtual, que normalmente no es evidente. Este estudio se encuentra en correspondencia con estos aspectos, ya que comprender el por qué y el cómo de la interacción, ayudará a comprender su naturaleza y plantear fundamentos teóricos teniendo en cuenta la estructura y el proceso del análisis respectivo.

Para llevar a cabo la herramienta analítica del paradigma, se proponen tres componentes básicos: *condiciones*, *acciones/interacciones* y *consecuencias*. Según lo planteado en este diseño sistemático (Strauss y Corbin, 2012), el primer componente, “es una manera conceptual de agrupar las respuestas a preguntas de por qué, dónde, cuándo y cómo. Estas formas juntas componen la estructura o conjunto de circunstancias o situaciones en las cuales están inscritos



los fenómenos” (p.140). El segundo, “son respuestas estratégicas o rutinarias dadas por los individuos o grupos a los asuntos, problemas o acontecimientos o sucesos que emergen bajo estas condiciones” (p.140) que es conceptualmente diferente a lo planteado como objeto de estudio en esta investigación (interacciones de un colectivo de humanos–con–medios); por último, el tercer componente, es el resultado de éstas acciones/interacciones que denotan el impacto de las mismas sobre el fenómeno.

Para este estudio, identificar las *condiciones*, es decir, el conjunto de acontecimientos o sucesos relacionados con la interacción, permite conformar patrones para resaltar las características de una categoría y explicar por qué responden de cierta manera, sin embargo, pueden existir múltiples condiciones tanto micro como macro, que se clasifican en: *causales*, que son el conjunto de acontecimientos que influyen sobre un fenómeno; *intervinientes*, que de alguna manera alteran el impacto de las condiciones causales sobre un fenómeno y *contextuales*, que son el conjunto de condiciones específicas que se entrecruzan en tiempo y lugar (Strauss y Corbin, 2012).

Es importante resaltar que el término de *acciones/interacciones* es diferente al objeto de estudio que se analiza en esta investigación, pues este método investigativo es una denominación que se le da a las tácticas estratégicas o rutinarias para manejar situaciones, problemas y asuntos, es decir, las *tácticas estratégicas* “son actos deliberados o ejecutados a propósito para resolver un problema, y al hacerlo moldean el fenómeno de alguna manera” (Strauss y Corbin, 2012, p.146), y las *tácticas rutinarias*, “corresponden a las formas más habituales de responder a las ocurrencias de la vida cotidiana” (p.146). El presente estudio pretende observar interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios en un ambiente virtual para producir conocimiento, es decir, aquellas acciones que realiza o que están involucradas en la producción de conocimiento matemático.

Las *consecuencias* por su parte, dependen de las acciones/interacciones, en tanto que reflejan la manera cómo es afectado un fenómeno y contribuyen a dar explicaciones más detalladas, completas con múltiples variantes, que están determinadas según el impacto que tengan sobre el fenómeno; pueden afectar a una sola situación o tener efecto sobre varias, incluso



algunas consecuencias pueden ser determinantes y alterar por completo un contexto. Esto hace pensar que pueden existir interacciones en el contexto de este estudio, que sean fundamentales a la hora de producir conocimientos matemáticos; en la implementación de esta herramienta analítica, las consecuencias serán un aspecto importante para observar la naturaleza de estas interacciones.

La codificación axial en el contexto de este estudio, es crucial para establecer relaciones entre categorías y subcategorías de las interacciones, centrando la atención en aquellas que están asociadas con la producción de conocimiento matemático en un curso de Ude@, es decir, la codificación axial permitirá comprender tanto la estructura como el proceso de la interacción, basados en condiciones y consecuencias que conllevan a que un colectivo de humanos–con–medios interactúe para producir conocimiento y, de esta manera, buscar profundidad y estructuración en la codificación que dé lugar a contribuir con una teoría que describa este fenómeno.

### **3.2.1.3. Codificación selectiva**

Durante el proceso de codificación expuesto hasta el momento, en la codificación abierta, además de identificar categorías y propiedades que representen un fenómeno, se pretende determinar cómo varían para establecer dimensiones y, posteriormente, en la codificación axial, éstas categorías se relacionan con subcategorías que hacen parte de ellas y tratan de dar claridad o especificidad al fenómeno estudiado en cuanto a sus propiedades y dimensiones. Por último, se desarrolla una codificación selectiva, que según Strauss y Corbin (2012), es el “proceso de refinar las categorías e integrar la teoría” (p.158), con el propósito de consolidar un esquema teórico, que en este estudio, está relacionado con la interacción de un colectivo de humanos–con–medios que produce conocimiento matemático.

De acuerdo con la perspectiva de teoría fundamentada seleccionada para el desarrollo de este estudio, se entiende la codificación selectiva como un proceso integrativo que busca conceptualizar y refinar las categorías planteadas a partir de la revisión de un esquema y de la consistencia y cohesión de las mismas en relación con los datos. Este proceso de codificación es



complejo, ya que se deben tener en cuenta tanto los primeros análisis de los datos, como las últimas observaciones de los mismos, para establecer coherencia y poder dar validez a la teoría que emerge.

Las categorías son conceptos abstractos que representan un fenómeno; en esta codificación, comparar nuevamente estas categorías con los datos es lo que permite conformar el proceso de integración en el cual los resultados deben presentarse como un conjunto de conceptos, propiedades y dimensiones entrelazadas, a partir de un esquema o diagrama explicativo, aunque éste puede no ser único, tal como lo afirman Strauss y Corbin (2012) “no hay *sólo una manera correcta* de expresar las relaciones. El elemento esencial es que se interrelacionen las categorías para formar un esquema teórico más amplio” (p.160).

La teoría fundamentada nos permite construir teorías a partir de los datos y no de supuestos *a priori* o teorías ya estructuradas, estableciendo relaciones significativas entre conceptos, proposiciones e hipótesis. La codificación selectiva ayuda a consolidar la teoría que emerge de los datos, basados en la organización de las categorías y subcategorías en un esquema teórico explicativo que dé cuenta de relaciones entre ellas y los hallazgos que evidencian un desarrollo teórico sobre un fenómeno estudiado.

Para desarrollar una codificación selectiva se pueden emplear diferentes técnicas para facilitar el proceso de integración, entre ellas están: contar o escribir un argumento de la historia; usar diagramas; seleccionar y revisar los memorandos (registros escritos del análisis) o emplear programas de computador para clasificar los análisis (Strauss y Corbin, 2012). Dadas las características de este estudio, se considera que de las técnicas mencionadas, el uso de diagramas puede ayudar a representar las categorías y sus relaciones, tal como lo afirma Strauss y Corbin (2012), “los diagramas son más útiles que contar la historia para organizar las relaciones entre conceptos” (p.167).

En este sentido, un diagrama debe explicitar las relaciones entre los conceptos y al mismo tiempo facilitar la interpretación, lectura, visualización y explicaciones de la teoría que se forma; específicamente, los diagramas “son mecanismos que dibujan las relaciones entre conceptos”



(Strauss y Corbin, 2012, p.237). Aunque existen muchos instrumentos que se pueden emplear para el diseño de un diagrama, se ha identificado que los *mapas conceptuales* son una herramienta que posee la característica de relacionar conceptos, ya que son “un recurso esquemático para la representación de un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones” (Novak y Gowin, 1988, p.33); además, su estructura se refiere a la ubicación y organización de las distintas partes de un todo, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior y los más específicos y menos inclusivos en la parte inferior.

En el proceso de elaboración de mapas conceptuales, se desarrollan nuevas conexiones y se construyen relaciones proposicionales entre conceptos que previamente no se consideraban relacionados, aspectos que pueden comenzarse a establecer en una codificación axial. Además, permiten seleccionar, extraer y separar la información significativa o importante de la información superficial que, en el contexto de la teoría fundamentada, es evitar la saturación, facilitando la organización lógica y estructurada de las categorías y subcategorías, proporcionando un recurso esquemático de todo el proceso de codificación, el cual se integra y refina en esta codificación selectiva.

Refinar la teoría consiste en revisar las categorías en busca de consistencia interna y evitar la saturación de términos que no se encuentren interrelacionados, para esto, es necesario comparar el esquema teórico propuesto con los datos brutos, de tal manera que se puedan completar las categorías poco desarrolladas, evitar inconsistencias y exceso de datos que posiblemente no encajen en la teoría, y así, dar validez al esquema y por ende a la teoría misma.

Dado lo anterior, la codificación selectiva es el procedimiento que permitirá establecer consistencia entre las categorías y subcategorías relacionadas con la interacción, en la cual se pueda construir un esquema explicativo relacionado con este fenómeno. En el proceso de integrar y refinar la teoría, la utilización de los mapas conceptuales y otros diagramas permitirán facilitar dicho proceso y al mismo tiempo, dar validez al esquema teórico. El presente estudio tiene como propósito realizar aportes teóricos relacionados con la manera cómo interactúa un colectivo de humanos–con–medios en educación a distancia virtual, los cuales se ven



materializados con la construcción de una teoría, en tanto que se puede alcanzar a partir del proceso de codificación expuesto en este método de teoría fundamentada.

Básicamente, el procedimiento de codificación abordado en el marco de la teoría fundamentada se puede resumir en 4 etapas como se describe en la siguiente tabla:

Etapa	Descripción
Observación y descripción	Se observarán clases de un curso de cálculo integral en las cuales se describan y resalten las interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios.
Codificación abierta	Teniendo en cuenta la descripción realizada, se procede a agrupar las interacciones, a partir de similitudes o diferencias, para identificar propiedades que permitan plantear unas categorías o subcategorías, al igual que dimensiones.
Codificación axial	En esta etapa, se establecen relaciones entre las categorías y subcategorías, basados en sus propiedades y dimensiones, de tal manera que se pueda construir un esquema teórico que dé cuenta de dichas relaciones, teniendo en cuenta como eje central, aquellas que conlleven a producir conocimiento matemático.
Codificación selectiva	Se revisa, integra y refina el esquema teórico propuesto, con el propósito de consolidar una postura teórica relacionada con el fenómeno estudiado y de esta manera, dar validez al mismo.



### **3.3. Análisis a partir la teoría fundamentada**

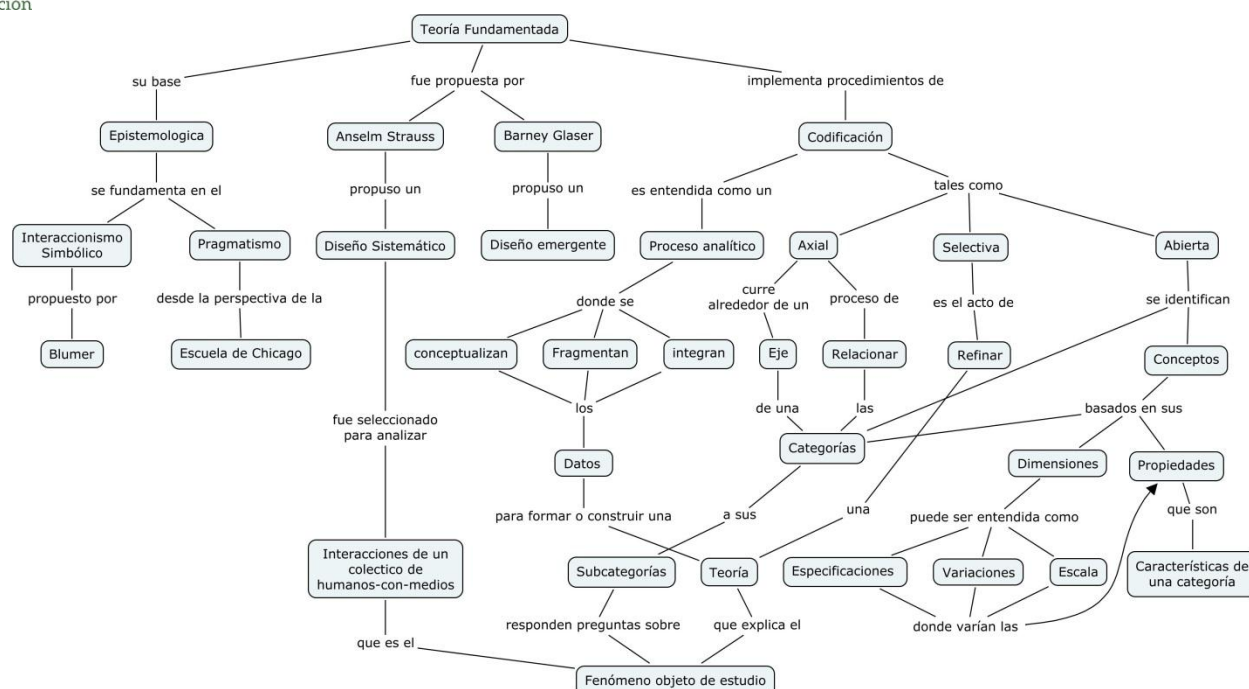
La teoría fundamentada utiliza una serie de procedimientos, que a través de la inducción, generan una teoría explicativa de un determinado fenómeno estudiado. Es un método basado en procesos para el análisis de datos, en el cual los conceptos y las relaciones entre los datos son producidos y examinados continuamente hasta la finalización del estudio. Según Strauss y Corbin (2012) “El análisis *no* es un proceso estructurado, estático o rígido” (p.63), es un proceso continuo y permanente en el que se pueden implementar diferentes técnicas para facilitar el procedimiento de codificación, conceptualización y teorización.

En esta perspectiva, el presente estudio se caracteriza por el análisis de información no estandarizada y procedimientos involucrados en el proceso de interacción, utilizando interfaces existentes y otros medios que posibilitan que un colectivo de humanos–con–medios interactúe para producir conocimiento. Para realizar el análisis respectivo a partir de la teoría fundamentada, se requiere describir de manera detallada el fenómeno estudiado, con el propósito de obtener un registro aproximado de la realidad y conformar un esquema teórico que explique este fenómeno.

El presente estudio está centrado principalmente en analizar el proceso de interacción que realiza un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas a distancia y virtual, además, de crear una nueva teoría relacionada con estos aspectos, es decir, en la teoría fundamentada planteada por Strauss y Corbin (2012), la validez de un esquema teórico desempeña un papel importante, ya que busca evaluar a través de criterios, los hallazgos y la coherencia del análisis realizado en este proceso se debe comparar el esquema con los datos brutos, retomando desde los primeros análisis hasta las últimas conceptualizaciones.

De manera general, se resumen los principales aspectos de la teoría fundamentada presentados en este capítulo en el siguiente mapa conceptual, en aras de orientar el proceso analítico que se desarrolla en este estudio.





Mapa conceptual construido para describir de manera general la teoría fundamentada

En resumen, la teoría fundamentada es un método investigativo propicio para los propósitos de este estudio, en la cual se permite construir una teoría alrededor de un fenómeno de interés, como lo es, la interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral para la producción de conocimiento matemático.

### 3.4. Trabajo de campo

El trabajo de campo está centrado en desarrollar actividades que permitan analizar las interacciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios para producir conocimiento matemático; basados en las características del método investigativo seleccionado y expuesto anteriormente, se pueden identificar pautas que ayudan a direccionar este trabajo de campo.

#### 3.4.1. Descripción general

De manera general, partiendo de las clases de matemáticas de un curso de cálculo integral de Ude@, se realizará una descripción de las observaciones que acontecen en dichas clases,



tratando de ser muy detallados en la acciones que realiza un colectivo de humanos–con–medios para interactuar y producir conocimientos; posteriormente, se deben realizar acciones para llevar a cabo el procedimiento de codificación abierta, axial y selectiva, teniendo en cuenta lo planteado en el desarrollo de este capítulo.

Luego de observar y describir las diferentes clases de un curso de cálculo integral de Ude@ para reconocer las diferentes interacciones que ocurren en este tipo de ambientes, se procede a identificar regularidades, similitudes, diferencias y características de los mismos (codificación abierta), para plantear categorías que permitan agrupar en un concepto abstracto el fenómeno estudiado. En el contexto de este estudio, este trabajo debe tener en cuenta los diferentes medios que pueden ser empleados para interactuar y la manera cómo son utilizados por parte del colectivo de humanos–con–medios.

En la ruta de este método investigativo basado en la teoría fundamentada a partir de las categorías planteadas, se buscan en sus propiedades, características que permitan identificar relaciones entre las mismas (codificación axial), para comenzar con la elaboración de un esquema explicativo del fenómeno estudiado. En este proceso, se considera que los mapas conceptuales, por su naturaleza, ayudarán a establecer relaciones entre las categorías, sus propiedades, dimensiones y subcategorías.

Finalmente, el trabajo de campo requiere de actividades que permitan dar validez al esquema teórico construido, teniendo en cuenta un proceso continuo de revisión, integración y refinación de las categorías, subcategorías y las relaciones entre sí (codificación selectiva) y así, poder dar una explicación teórica al fenómeno estudiado.

Aunque este estudio puede ser abordado en cualquier curso de matemáticas de Ude@, es importante anotar que por la gran cantidad de datos que se generan al tener varios cursos, hubo la necesidad de delimitar el proceso investigativo. Por lo tanto, se observa un curso de Cálculo Integral, en el cual el investigador tiene mayor experiencia docente y en el que se generaron las primeras motivaciones sobre el desarrollo de esta investigación. A continuación, se describe el colectivo de humanos–con–medios que ha sido seleccionado para ser analizado en este estudio,



los instrumentos que se utilizan para el análisis de la información y el proceso de recolección de datos, haciendo énfasis en los datos que serán objeto de análisis.

### 3.4.2. Colectivo de humanos–con–medios

Los estudiantes de Ude@ generalmente viven en municipios distintos y geográficamente retirados entre sí, no sólo del departamento de Antioquia sino también de otros departamentos del país. Este es un aspecto que está en correspondencia con las características de la educación a distancia virtual, con el propósito de que diferentes personas de diversos municipios puedan acceder a la educación superior.

Para este estudio, se observará un curso de cálculo integral conformado por 16 estudiantes de la Facultad de Ingeniería y el respectivo profesor del curso; estos estudiantes viven en municipios tales como: Caucasia, Yarumal, Segovia, Carmen de Viboral, Santa Fe de Antioquia, Turbo, Andes, Envigado y Medellín, los cuales según la geografía del departamento de Antioquia se encuentran en las diferentes regiones: norte, oriente, occidente, suroeste, bajo cauca y nordeste del departamento.

Dado lo anterior y teniendo en cuenta los aspectos planteados en el capítulo 2 relacionados con el constructo teórico humanos–con–medios, el grupo de participantes de la investigación está constituido por un colectivo de humanos, que estará conformado por el docente y los estudiantes de un curso de matemáticas y los diferentes medios propios de Ude@, las plataformas WizIQ y Moodle, constituyendo la unidad pensante denominada en este estudio humanos–con–medios. Además, se cuenta con aval de las directivas de Ude@ y el consentimiento del docente para participar en el estudio de manera libre y voluntaria, con el propósito de emplear los registros de los diálogos (verbales o escritos), grabaciones y demás producciones elaboradas por ellos durante el curso de cálculo integral. La información registrada es objeto de análisis, discusión y contrastación con las hipótesis planteadas.



### 3.4.3. Técnicas para la recolección de la información

Entre los principales instrumentos para la recolección de la información y trabajo de campo, podemos mencionar que el estudio utilizará los registros de un curso de cálculo integral de Ude@, entre ellos, están las *grabaciones* de las sesiones a través de la plataforma WizIQ (ver Anexo C) que podrán ser utilizadas para analizar las discusiones desarrolladas en los mismos y los *registros escritos* (chats en WizIQ) o foros de discusión (en Moodle) en los que se analizan las conversaciones y comentarios elaborados por los estudiantes y el docente.

Teniendo en cuenta que el foco de interés son las interacciones y que éstos generan sucesos o fenómenos inherentes a la producción de conocimiento matemático susceptibles de ser observados y analizados, se hace necesario utilizar instrumentos que permitan tanto visualizar como evidenciar las relaciones entre los conceptos, propiedades y categorías que emergen en el proceso investigativo, en la dirección de lograr el objetivo planteado de acuerdo a las complejidades que pueden suceder en el proceso de análisis de los datos. En este sentido, se retoman los mapas conceptuales como un instrumento que favorezca tanto la visualización de conceptos como el establecimiento de relaciones entre los mismos.

Por otra parte, en el contexto de la educación a distancia virtual, los medios no son sólo aquellas herramientas, interfaces o tecnologías utilizadas; en este sentido, Borba y Villarreal (2005) afirman que el diálogo también es un medio que favorece la comunicación a través del chat, generando un fenómeno particular denominado *multidiálogo* en el cual, de manera simultánea, se pueden generar diferentes discusiones y por lo tanto, diferentes maneras de producir conocimiento. Dado lo anterior, en este estudio el chat es un instrumento importante ya que permite que la comunicación se realice a través de un diálogo, lo que también se consolida como una herramienta que ayudará al análisis de los datos.

### 3.4.4. Proceso de recolección de los datos

En los cursos que se desarrollaban en esta modalidad de educación a distancia virtual orientados por el investigador, se iniciaron observaciones que ocurrían en las diferentes clases



para analizar interacciones del profesor con los estudiantes y entre ellos mismos, así como también, reflexiones acerca de la experiencia en este campo y los aspectos teóricos que estuvieran involucrados con la interacción, con lo cual, de manera intuitiva, se comenzaron a analizar las clases desarrolladas para tratar de comprender este fenómeno.

De manera informal, estos cursos fueron motivo de análisis y recolección de información, que inicialmente ayudaron a comprender que las interacciones no son únicas y tampoco tienen igual naturaleza, lo que las hace complejas y en este caso, objeto de este estudio; estos primeros análisis aunque no se hacen explícitos en esta tesis, fueron una base fundamental para direccionar metodológicamente esta investigación.

En este sentido, a comienzos del desarrollo de esta investigación, se iniciaron procesos de gestión ante las directivas de Ude@, para conseguir autorización que permitiera el acceso a los respaldos y copias de seguridad de las clases relacionadas con cursos de matemáticas y poder así, observar y analizar las sesiones de clase y llevar a cabo los propósitos del estudio. Estas gestiones fueron productivas, ya que a partir de las diferentes reuniones realizadas, la investigación fue reconocida por los administradores del programa Ude@ y se avaló la autorización para tener acceso a la información que ésta requirió: grabaciones de las sesiones, copias de seguridad de las plataformas, datos de los estudiantes, profesores y demás datos.

Para efectos del alcance de los propósitos del estudio, luego de realizar planteamientos de tipo metodológico, se comenzó de manera formal un ejercicio de análisis de un curso de cálculo integral, realizando inicialmente descripciones de algunas clases y tratando de esclarecer el impacto de las interacciones en la producción de conocimiento matemático y, a partir de ahí, plantear y validar una propuesta metodológica en este campo. Sin embargo, se puede afirmar que son complejas y diversas las interacciones que ocurren en un ambiente virtual en el contexto de Ude@, y además, que no se tenía conocimiento sobre este fenómeno en este contexto educativo, por lo cual es difícil establecer dicho impacto y alcanzar los propósitos iniciales. En consecuencia, fue necesario reconsiderar el objeto de estudio y centrar la atención en analizar las interacciones que realiza un colectivo de humanos—con—medios en estos ambientes.



Basados en estos análisis, se realizaron ajustes y delimitaciones al estudio, logrando definir un cronograma para el desarrollo del trabajo de campo y un proceso riguroso de análisis de los datos de la investigación. En el semestre 2015-1, los cursos de cálculo integral fueron distribuidos en 6 grupos con distintos horarios y profesores. Aunque inicialmente, tal como se ha dicho, se observaron los diferentes grupos, por motivos de delimitación del estudio se hizo necesario escoger alguno de ellos para realizar el análisis planteado, ya que cada grupo conformaría colectivos distintos de humanos–con–medios y, basado en el referente teórico, tendrían diferente naturaleza para las interacciones y la producción de conocimiento.

### **3.4.5. Proceso de análisis de la información**

De acuerdo con lo planteado en este capítulo, con respecto a la metodología de investigación seleccionada, a continuación se comienza con el procedimiento de codificación, realizando una descripción del proceso de observación de los datos y resaltando el fenómeno estudiado, es decir, las interacciones que realiza el colectivo de humanos–con–medios en el curso de Cálculo Integral.

Para dicho análisis, inicialmente, se describe el curso de cálculo, resaltando las interacciones que ocurren durante el desarrollo de las diferentes sesiones. Luego, se observan las similitudes o diferencias que permiten la asociación de categorías preliminares. Posteriormente, se identifican relaciones entre estas categorías especialmente las que estén asociadas a la producción de conocimiento matemático y, finalmente, se analizan las categorías propuestas para observar posibles contradicciones y refinar la teoría propuesta en relación a la interacción.

En este análisis de la información, el procedimiento de codificación se realiza teniendo en cuenta los criterios planteados en la sección 3.2.1 de este capítulo, en los cuales se describen cada una de las codificaciones basadas en el método investigativo seleccionado. Para efectos de este estudio, no se emplean códigos que categoricen las múltiples interacciones, se realizan procedimientos de rotulación que muestren las diferencias o similitudes observadas en las interacciones para proponer las categorías y subcategorías que posteriormente serán validadas a través del método propio de la teoría fundamentada.



El siguiente capítulo aborda el análisis y el desarrollo de los procedimientos de codificación realizados en la investigación, describiendo los datos observados en el curso de matemáticas seleccionado y, posteriormente, presentando los análisis respectivos basados en los procedimientos de codificación en función de lo planteado en el método investigativo, finalizando con los resultados teóricos derivados del proceso investigativo.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803





UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



## CAPÍTULO 4. ANÁLISIS

El análisis de los datos es considerado un aspecto central en el desarrollo de una investigación en este tipo de contextos, en tanto que se pretende analizar las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral. Este proceso analítico es continuo y se desarrolla durante toda la investigación, buscando dar respuesta a la pregunta de investigación y validez al estudio realizado.

Analizar las interacciones que ocurren en el desarrollo de cursos de matemáticas en ambientes virtuales, requiere esclarecer de qué manera se realizan estas interacciones que hacen parte de un proceso que permita una producción de conocimiento matemático. Aunque estos aspectos no se consideran fijos, rígidos o únicos para todo colectivo de humanos–con–medios que interactúa en educación a distancia virtual, el análisis está dirigido a identificar regularidades (teniendo en cuenta similitudes o diferencias observadas en el fenómeno) y reconocer procesos de interacción en un curso de matemáticas en los ambientes del contexto de Ude@.

Este capítulo está estructurado principalmente en tres partes; inicialmente, de acuerdo con las características del método investigativo seleccionado, se aborda una descripción de lo que se observa en los datos, enfatizando en las interacciones que realiza el colectivo de humanos–con–medios durante el desarrollo de las clases; luego, se plantea el proceso de codificación respectivo, describiendo el análisis realizado a partir de la codificación abierta, axial y selectiva; y por último, se presentan los resultados de este proceso analítico, explicitando la teorización emergente, con los cuales se pretende dar respuesta a la pregunta de investigación.

### 4.1. Desarrollo de un curso virtual de cálculo integral

Para efectos del análisis de los datos del fenómeno estudiado en esta investigación, realizar el proceso con varios cursos implicaría caracterizar los diferentes colectivos de humanos–con–



medios, identificar interacciones en cada uno de ellos y su naturaleza y, realizar procesos comparativos entre los mismos para establecer conclusiones, sin embargo, basados en los referentes teóricos planteados en el capítulo 2, las características de cada colectivo condicionan la manera cómo se produce conocimiento matemático, con lo cual se obtendrían resultados diferentes relacionados con las interacciones que realizarían, dificultando el proceso de análisis del fenómeno estudiado.

En este sentido, se observaron las diferentes sesiones de clase de uno de los cursos de cálculo integral desarrolladas tanto en la plataforma WizIQ como en la plataforma Moodle; el acceso a estas sesiones grabadas puede hacerse a través de los enlaces publicados en el Anexo C, sin embargo, en esta sección se hace una descripción de las mismas resaltando las interacciones que realiza el colectivo de humanos–con–medios.

De los registros observados en la plataforma Moodle, se puede mencionar que existen algunos foros en los cuales los estudiantes suministran información personal, como el municipio donde viven, el programa que cursan, el correo electrónico, entre otros aspectos, que de manera voluntaria publican como su perfil. Los registros empleados en este estudio, no permiten conocer o hacer seguimiento a este tipo de interacciones entre los estudiantes, ya que se necesitaría acceso o copia de los registros de correo electrónico personal u otros, pero se considera importante señalar que esta posibilidad de interacción ocurre en este colectivo y en algunos casos para efectos de tipo administrativo y organizacional.

En esta plataforma Moodle, el profesor publica a través de foros, mensajes a los estudiantes relacionados con talleres y ejercicios complementarios que pueden realizar para la preparación de las evaluaciones parciales del curso, además de resaltar las fechas para las evaluaciones parciales, la modificación a la programación de las asesorías brindadas por Ude@ y demás novedades relacionadas con el desarrollo de las sesiones en WizIQ.

Cabe resaltar que en esta plataforma Moodle, en uno de los foros, un estudiante invita a los demás a conformar un “grupo de estudio” para la preparación de los exámenes parciales del curso, suministrando además, información personal como número de teléfono y correo



electrónico para que los demás se puedan contactar con él, sin embargo, en esta plataforma no se puede evidenciar si fue conformado dicho grupo o si otros estudiantes se pusieron en contacto a través de estos medios, pero deja claro que los estudiantes buscan otros espacios de interacción, así sea a través de medios diferentes a los de Ude@.

De manera específica en el curso seleccionado, no se evidencian registros de foros que estén centrados en la discusión del conocimiento matemático, solo se encuentran los recursos programados por Ude@ para su desarrollo, por ejemplo, los documentos y videos relacionados con los conocimientos respectivos. En la siguiente imagen se pueden observar los recursos publicados en la plataforma relacionados con el teorema fundamental del cálculo.

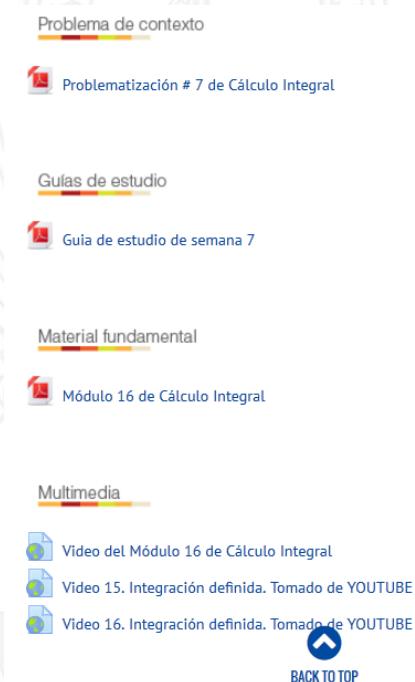


Imagen tomada de la plataforma Moodle, ver anexo C.

De acuerdo con los registros de Moodle, al parecer, los estudiantes utilizan este espacio para acceder a la información general del curso (cronograma), a los talleres publicados por el profesor, a los documentos, videos y demás recursos relacionados con conocimiento matemático, pero no se utiliza para la discusión de éstos o para la comunicación que permita la solución de dudas o inquietudes.



Dado lo anterior, la plataforma Moodle, en este caso, no suministra suficiente información para realizar el proceso de análisis de las interacciones que el colectivo de humanos–con–medios emplea para la producción de conocimiento asociado al teorema fundamental del cálculo, por lo tanto, el proceso de observación estará centrado en este fenómeno que ocurre en la plataforma WizIQ durante el desarrollo del curso.

El proceso de observación se distribuye en tres momentos, teniendo en cuenta las sesiones que ocurren antes, durante y después de abordar el teorema fundamental del cálculo. Aunque esta primera parte del análisis se centra en observar las interacciones que ocurren en el desarrollo del curso, se quiere tener en cuenta las características del conocimiento matemático ya que el fenómeno que se pretenden observar, debe estar relacionado con este teorema.

La plataforma WizIQ es un ambiente que permite la comunicación tanto oral como escrita, además de las herramientas de pizarra y video que puede coordinar el profesor del curso para la participación de los estudiantes, entre otras; son medios que de acuerdo con el constructo teórico humanos–con–medios, son actores fundamentales en la producción de conocimiento y por lo tanto, considerados en este estudio motivo de observación para analizar las interacciones que allí ocurren. En este orden de ideas, para la descripción de las sesiones se tendrá especial cuidado en la manera en que son usados los medios y las diferentes acciones que desarrolla el colectivo principalmente a partir de la Plataforma WizIQ.

Debido a la gran cantidad de datos que se obtuvieron en el desarrollo del trabajo de campo, relacionados con las observaciones de las diferentes sesiones, a continuación se presentan algunas descripciones de lo observado durante todo el curso, retomando las que se consideran fundamentales y que permiten ilustrar el desarrollo del análisis del proceso investigativo.

Es importante anotar que las observaciones, descripciones y análisis de los datos, se realizan teniendo en cuenta los aspectos teóricos abordados en el capítulo 2, relacionados con el constructo teórico humanos–con–medios, las concepciones de la interacción y el teorema fundamental del cálculo. A continuación se realiza el proceso descriptivo abordado.



#### 4.1.1. Interacciones previas a la producción del teorema fundamental del cálculo

En esta primera etapa, en la que se observan las clases relacionadas con los conocimientos previos al teorema fundamental del cálculo, se considera importante iniciar describiendo la primera clase del curso, ya que es la primera interacción entre el profesor y los estudiantes y en la cual, comúnmente se realiza una presentación general del curso y se establecen acuerdos relacionados con la manera cómo se abordarán las clases, las temáticas, los textos guías, las herramientas a utilizar, los canales de comunicación, las evaluaciones, etc.

Durante este proceso descriptivo, se presentarán algunas imágenes tomadas de las grabaciones de las sesiones en WizIQ<sup>16</sup> para ilustrar el fenómeno analizado, realizando una descripción de lo sucedido en la sesión, especialmente de los diálogos ocurridos durante la clase, ya que de acuerdo con lo planteado en el capítulo 2, la oralidad es un medio que permite una manera de interactuar en el colectivo de humanos–con–medios.

En la siguiente imagen, se puede observar el ambiente virtual de WizIQ, en el cual el profesor tiene activo el video, la ventana de chat y la pizarra o whiteboard (zona blanca), en la parte inferior se puede interactuar con la grabación, pausando o reproduciendo la sesión y ver el tiempo que ha durado la clase; cabe resaltar que de esta manera, los estudiantes pueden observar después de las sesiones estas grabaciones en cualquier momento durante el semestre académico.

---

<sup>16</sup> Las imágenes se publican con autorización de Ude@ y del profesor del curso, teniendo en cuenta que son utilizadas con fines educativos y para efectos del análisis del proceso investigativo.



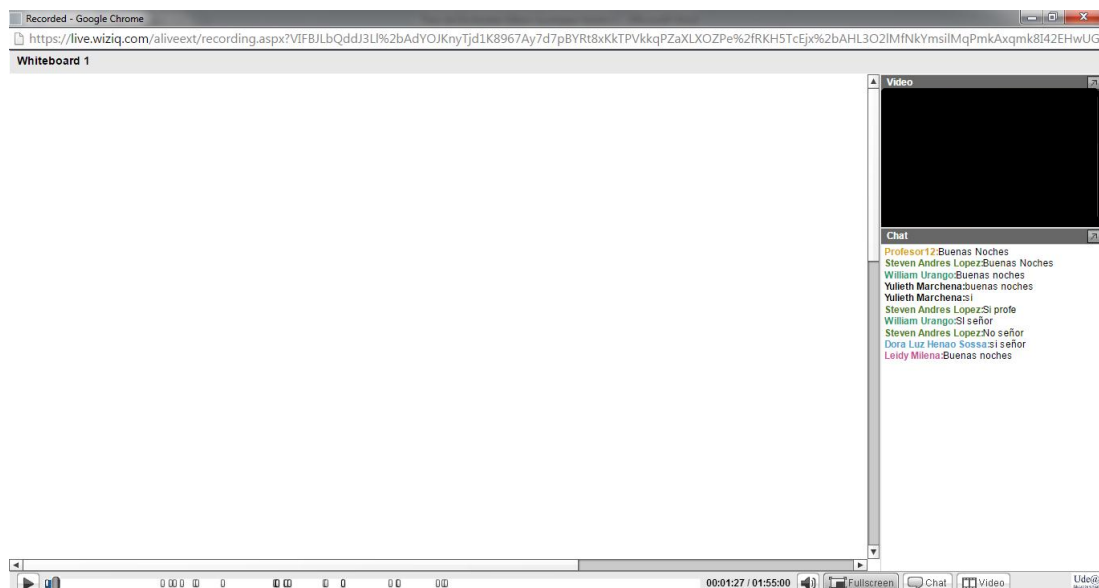


Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

La imagen anterior corresponde con el primer momento de la clase del curso, en la cual, el profesor saluda de manera verbal y escrita y los estudiantes responden en el chat; el profesor pregunta si ellos escuchan bien, a lo que los estudiantes responden en el chat este interrogante. Posteriormente, el profesor realiza su presentación personal, suministrando también el correo electrónico, además, da la bienvenida a los estudiantes al curso de cálculo integral, motivando a la participación y a que hagan preguntas relacionadas con el curso. También hace comentarios relacionados con aspectos técnicos de la plataforma, mencionando que todos tienen inactivas las herramientas de audio, video y pizarra, pero que pueden en cualquier momento de la clase, solicitar su activación.

Luego de realizar una presentación general, el profesor emplea la herramienta de compartir pizarra para presentar la plataforma del curso en Moodle, haciendo énfasis en el cronograma, el libro de texto, los foros (resaltando que son para la comunicación) y la estructura general de la plataforma, mostrando los diferentes recursos y enlaces a los cuales pueden acceder semana por semana para el desarrollo del curso, por último, presenta de manera detallada el cronograma del curso (Ver anexo A) haciendo énfasis en las fechas y las temáticas que corresponden a cada una de las evaluaciones. Es importante resaltar que mientras el profesor presenta las temáticas del



curso, tal como se puede observar en la siguiente figura, tiene visible la ventana de chat, lo que le permite estar atento a la participación de los estudiantes.

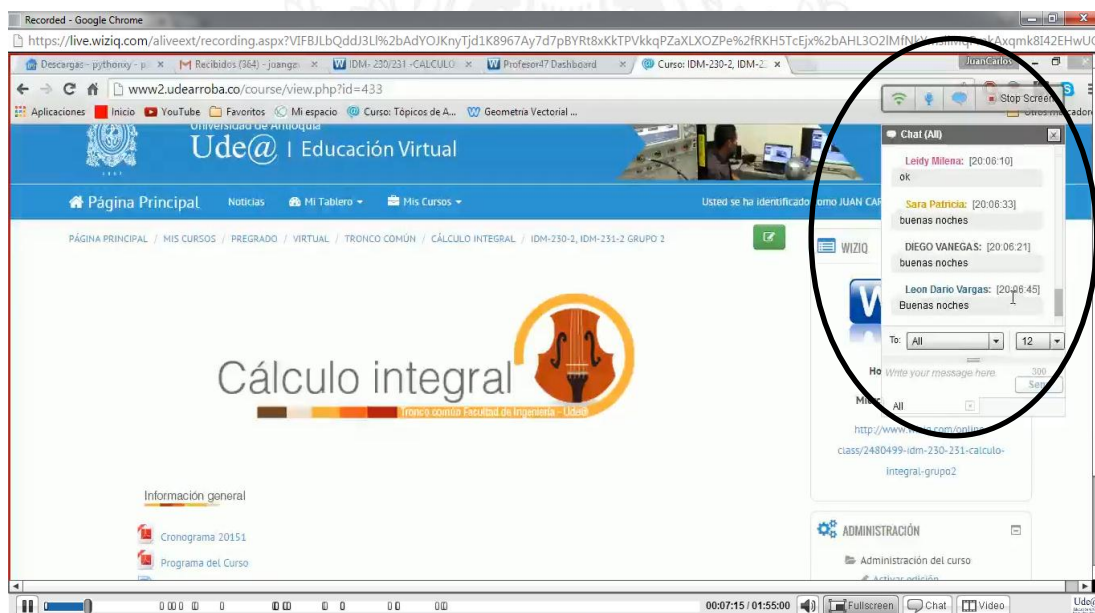


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Después de dicha presentación personal y del curso, el profesor comienza explicando la temática correspondiente con la primera semana (ver Anexo A), describiendo de manera general, los temas del capítulo 1, haciendo lectura de los temas y señalando en la pizarra de acuerdo con el texto guía, aclarando que, normalmente se adjunta en la pizarra el módulo del texto (Del Valle, 2006) que está publicado también en la plataforma Moodle y se hace énfasis en algunas características de las definiciones y, además de las explicaciones, se hace un resumen sobre el tema.

El primer tema corresponde con la *Función primitiva o antiderivada*; resaltando el módulo, tal como se observa en la siguiente imagen, se señala y se hace lectura de la definición, en el cual se hace énfasis en los símbolos de ésta y su significado, es decir, se resalta que  $f$  es una función y  $F(x)$  función primitiva o antiderivada, la cual al ser derivada es igual a  $f(x)$ .



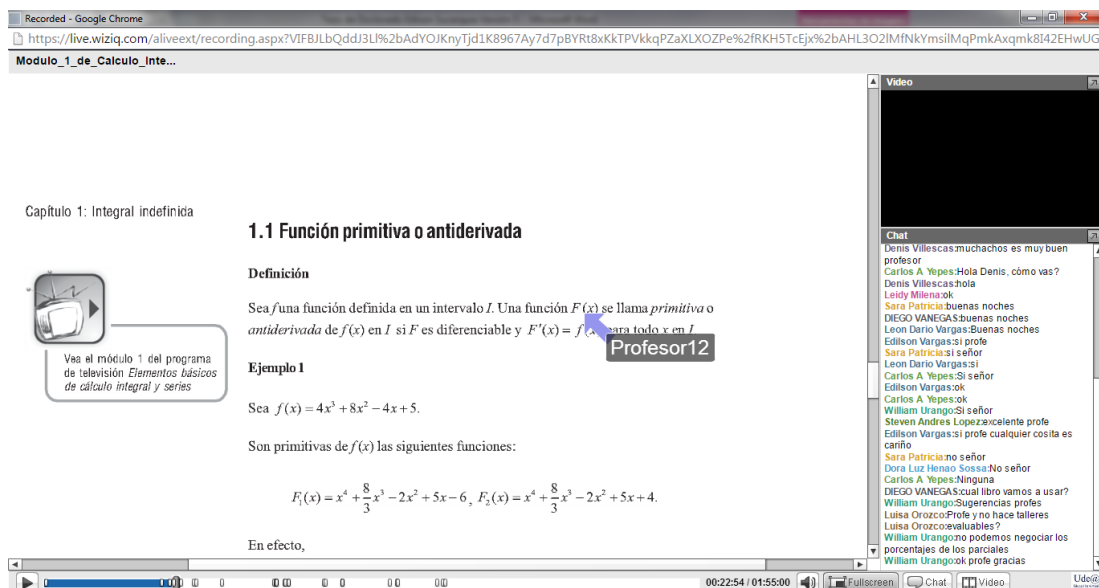


Imagen tomada de la plataforma WIZIQ, ver anexo C grupo 2

Posterior a esta explicación, el profesor realiza un ejemplo que escribe en la pizarra resaltando los aspectos de la definición de antiderivada y mencionando que una función puede tener varias primitivas que se diferencian en una constante  $C$ ; resalta que una función puede tener “infinitas primitivas” y realiza un ejemplo para comprobar que  $F'(x) = f(x)$ , tal como se observa en la siguiente imagen; además, presenta la definición de integral indefinida y hace énfasis en su significado geométrico y relaciona éste concepto con la función primitiva o antiderivada.

Modulo 1  
Funciones primitivas o antiderivadas  
Ej: Sea  $f(x) = x^3 \ln x$   
Tiene como primitivas:  
 $F_1(x) = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C_1$   $C_1 \neq C_2$   
 $F_2(x) = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C_2$

Significado Geométrico de I. indef.  
Si  $f(x)$  en  $I \rightarrow F'(x) = f(x)$   
Representa una familia de curvas que  
se diferencian en una constante

Imágenes tomadas de la plataforma WIZIQ, ver anexo C grupo 2



Estas interacciones evidencian algunos aspectos que se habían planteado de manera hipotética en el capítulo 2, resaltando no sólo en las definiciones sino también en las características geométricas del conocimiento matemático, estableciendo relaciones significativas a partir de las explicaciones realizadas por el profesor para la comprensión de estos conceptos, empleando ejemplos y realizando preguntas a los estudiantes para indagar por dudas relacionadas con el tema en cuestión.

Se presentan algunos ejemplos de expresiones aritméticas y representaciones geométricas de la antiderivada como una familia de curvas, lo que en este estudio se reconoce como importante para abordar el teorema fundamental del cálculo.

Hasta el momento, el profesor realiza los procedimientos para la solución de ejemplos y hace énfasis en los aspectos conceptuales relacionados con la definición de la función primitiva o antiderivada, realizando preguntas a los estudiantes con relación a las explicaciones desarrolladas. De igual manera, realiza interacciones similares para el concepto de integral indefinida, solucionando ejemplos y a través de la pizarra y haciendo algunas preguntas a los estudiantes sobre lo que han comprendido de lo explicado.

En la imagen, se observan las diferentes respuestas escritas de los estudiantes a las preguntas que ha realizado el profesor de manera verbal en la primera parte de esta sesión. Como se puede observar, se evidencia una discusión o intercambio de ideas muy pobre con relación al conocimiento matemático que se pretende desarrollar, con lo que se puede interpretar que no todas las interacciones que ocurren

**Chat**

Profesor12:Buenas Noches  
Steven Andres Lopez:Buenas Noches  
William Urango:Buenas noches  
Yulieth Marchena:buenas noches  
Yulieth Marchena:si  
Steven Andres Lopez:Si profe  
William Urango:Si señor  
Steven Andres Lopez:No señor  
Dora Luz Henao Sossa:si señor  
Leidy Milena:Buenas noches  
Celeny Garcia:buenas noches  
Dora Luz Henao Sossa:Bien profe, feliz de volvermelo a encontrar  
Carlos A Yepes:Buenas noches a todos  
Denis Villescasc:profe tambien das vectorial  
Edilson Vargas:buenas noches  
Denis Villescasc:si yo vi vecto con usted  
Denis Villescasc:muy bien profe y feliz q seas mi profe de integral  
Denis Villescasc:muchachos es muy buen profesor  
Carlos A Yepes:Hola Denis, cómo vas?  
Denis Villescasc:hola  
Leidy Milena:ok  
Sara Patricia:buenas noches  
DIEGO VANEGAS:buenas noches  
Leon Dario Vargas:Buenas noches  
Edilson Vargas:si profe  
Sara Patricia:si señor  
Leon Dario Vargas:si  
Carlos A Yepes:Si señor  
Edilson Vargas:ok  
Carlos A Yepes:ok  
William Urango:Si señor  
Steven Andres Lopez:excelente profe  
Edilson Vargas:si profe cualquier cosita es cariño  
Sara Patricia:no señor  
Dora Luz Henao Sossa:No señor  
Carlos A Yepes:Ninguna  
DIEGO VANEGAS:cual libro vamos a usar?



contribuyen a una producción de conocimiento matemático.

El profesor durante del desarrollo de la sesión de clase, constantemente pregunta a los estudiantes sobre la comprensión del tema abordado, para lo cual los estudiantes responden afirmativamente o hacen algunas preguntas relacionadas, tal como se puede observar en la imagen; aunque en esta sesión no se evidencia que se profundice sobre qué aspectos comprenden los estudiantes, en otras sesiones el profesor indaga por algunos cuestionamientos que se realizan, tratando de dar claridad a las explicaciones realizadas.

Carlos A Yepes:Ninguna  
DIEGO VANEGAS:cual libro vamos a usar?  
William Urango:Sugerencias profes  
Luisa Orozco:Profe y no hace talleres  
Luisa Orozco:evaluables?  
William Urango:no podemos negociar los porcentajes de los parciales  
William Urango:ok profe gracias  
Carlos A Yepes:Esos C1 y C2 serían interceptos?  
Dora Luz Henao Sossa:si  
Alexander Uribe Gonzalez:Buenas noches a todos.  
Alexander Uribe Gonzalez:si sr.  
Luisa Orozco:no señor  
Edilson Vargas:si  
Denis Villegas:bien  
Alexander Uribe Gonzalez:profe al final es c1?  
Alexander Uribe Gonzalez:ok  
Alexander Uribe Gonzalez:si es constante  
Alexander Uribe Gonzalez:no está bien.  
Edilson Vargas:no profe  
Celeny Garcia:no profe  
Camilo Botero:no  
Leidy Milena:no profe  
Edilson Vargas:ok profe

En esta primera sesión se observaron diferentes interacciones relacionadas con el manejo de los medios de las plataformas WiziQ y Moodle, además, de otras relacionadas con procesos de diálogo entre el profesor y los estudiantes, empleando los medios de oralidad y chat principalmente. Por otra parte, se observaron interacciones basadas en los conceptos previos al teorema fundamental del cálculo, como por ejemplo la función primitiva o antiderivada, brindando ejemplos que se desarrollaron de manera operativa y procedimental por parte del profesor del curso, apoyándose en los módulos y recursos de los que disponen las plataformas. A continuación, se presentan otros momentos de las sesiones que se desarrollaron antes de abordar el teorema fundamental del cálculo, resaltando interacciones que se observaron durante este proceso de análisis.

El chat que se observa en la imagen, corresponde a la segunda sesión del curso, la cual inició haciendo un repaso de los conocimientos abordados en la sesión anterior, específicamente resaltando la definición de la integral indefinida. Durante la clase se desarrollaron algunos ejercicios relacionados con la *técnica de sustitución*, para resolver integrales indefinidas;



mientras se realiza esta acción del profesor en la pizarra, los estudiantes participaban con comentarios, preguntas y respuestas, tal como se puede observar en la imagen anterior.

Las interacciones que se observan durante estas primeras sesiones radican en explicaciones por parte del profesor, empleando los medios de la plataforma WizIQ y alternando con preguntas hacia los estudiantes; por su parte, en el chat, los estudiantes responden con respuestas a los interrogantes del profesor o comentarios que en su mayoría están relacionados con la temática que se aborda, las interacciones se establecen a través de diálogos entre lo escrito y lo oral, en el que el profesor está muy atento a la participación de los estudiantes.

Durante el desarrollo de los ejercicios por parte del profesor, éste da un espacio de tiempo para que los estudiantes puedan hacer estos de manera individual y, posteriormente, su respuesta sea confrontada, tal como se puede observar en la imagen. Aunque en la sesión no se pueden evidenciar los medios que emplean los estudiantes para realizar los ejercicios (libros, calculadoras o Internet, etc.), la interacción que realizan en el chat muestra que tienen una participación activa durante el desarrollo de la sesión, que en algunos casos, se ve reflejada cuando hacen correcciones a lo que escribe el profesor en la pizarra, tal como se observa en la imagen anterior.

Durante estas sesiones los estudiantes responden a los interrogantes que realiza el profesor, generándose un diálogo en relación con el conocimiento que se aborda; estos aspectos están en correspondencia con los referentes teóricos planteados en el capítulo 2, en el que se destaca que la oralidad, el chat y el diálogo son factores

**Chat**

Sara Patricia:profe en el ejercicio anterior al plantear el ejercicio te faltó el dx

Sara Patricia:si profe cualquiera se puede equivocar jejeje

Sara Patricia:sobre todo en un parcial

Sara Patricia:😊

Natalia Bernal:profe que pena puedes devolver el tablero yo tomo pantallazo

Leidy Milena:jajaja solo el profe y en clase

Natalia Bernal:gracias

Sara Patricia:du/5

Steven Andres Lopez:Buenas noches

Leidy Milena:si

Camilo Botero:{2(5X-3)^3/2}/15

Camilo Botero:si

Alexander Uribe Gonzalez:profe buenas noches.

Carlos A Yepes:Se le acabo la tinta

Camilo Botero:no

Carlos A Yepes:No he saludado? Que pena.... buenas noches

Luisa Orozco:ok

Luisa Orozco:oharo si da

Carlos A Yepes:un momento, por favor

Carlos A Yepes:Tiempito, para terminar

Leidy Milena:espere un momnetico

Camilo Botero:profe 2 minuticos

Luisa Orozco:si ya dio

Alexander Uribe Gonzalez:por favor lo have

Carlos A Yepes:Ya me dio

Camilo Botero:si profe ya

Camilo Botero:si

Carlos A Yepes:Si

Camilo Botero:si

Alexander Uribe Gonzalez:si profe

Sara Patricia:si profe

Camilo Botero:si

Leidy Milena:1/2

Carlos A Yepes:Profe, creo que ya me dio

Carlos A Yepes:Profe, 3/2



fundamentales en la producción de conocimiento matemático. Sin embargo, en los diálogos presentados anteriormente no se evidencia una profundidad en las discusiones relacionadas con el conocimiento abordado haciendo uso de estos medios. Durante este proceso analítico, estas observaciones conllevan a cuestionar si los medios de comunicación a través de la plataforma WizIQ o Moodle son los únicos medios empleados para las interacciones en el colectivo de humanos–con–medios.

En la imagen a continuación, se puede observar la última parte de esta sesión, en la que se puede identificar que, mientras algunos estudiantes se despedían, un estudiante preguntaba a otra, si tenía Skype, lo que evidencia que en el desarrollo de este curso, algunos de los estudiantes emplean otros medios diferentes a los de Ude@ para comunicarse.

Sara Patricia:profemuchas gracias  
Steven Andres Lopez:Profe mil gracias  
Camilo Botero:gracias profe  
Steven Andres Lopez:excelente clase  
Luisa Orozco:profe muchas gracias  
Alexander Uribe Gonzalez:si sr gracias.  
Sara Patricia:igualmente|  
Alexander Uribe Gonzalez:sara  
Leidy Milena:gracias profe, feliz noche  
Celeny Garcia:feliz noche  
Sara Patricia:señor  
Alexander Uribe Gonzalez:tu tines skype  
Dora Luz Henao Sossa:Gracias profe, feliz noche  
Carlos A Yepes:Gracias profe por la clase. Feliz fin de semana  
Sara Patricia:si saritauru@hotmail.com

Este aspecto es importante a la hora de reconocer interacciones que estén relacionadas con el desarrollo de un curso, ya que cualquier medio de comunicación se convierte en una alternativa diferente para interactuar, aunque en este caso, esto hace más complejo el proceso investigativo para analizar estas formas, asociadas a la producción de conocimiento, sin embargo, deben ser tenidas en cuenta a la hora de realizar un análisis de este fenómeno como aquellas que están involucradas en dicha producción.

De igual manera, este tipo de interacción se realizó en otras clases, tal como se puede observar en la imagen adjunta, lo que hace inferir que no solamente los medios de Ude@ son utilizados para interactuar en el curso y que estos hacen parte también del proceso, constituyéndose esto en otros medios empleados por el colectivo de humanos–con–medios durante el proceso educativo y que se encuentran relacionados con la producción de conocimiento.

Alexander Uribe Gonzalez:luisa  
William Urango:igualmente feliz noche  
Yulieth Marchena:gracias profe  
Leidy Milena:hasta luego, gracias profe  
Alexander Uribe Gonzalez:leidy  
Leidy Milena:dime Alexander  
Carlos A Yepes:Gracias profe por la clase. Chao a todos. Nos vemos el miercoles  
Alexander Uribe Gonzalez:estas en skype  
Leidy Milena:i  
Dora Luz Henao Sossa:Feliz Noche Profe  
Alexander Uribe Gonzalez:ok, ya te contacto.



De acuerdo a lo mencionado en el capítulo 2 sobre el constructo teórico de humanos–con–medios, los medios son actores fundamentales en el desarrollo de un curso en educación a distancia virtual para la producción de conocimiento y en este sentido, observar y describir cuáles de ellos son utilizados por el colectivo es una característica importante en este proceso analítico, además de centrar la atención en la manera cómo son usados para interactuar.

Teniendo en cuenta que la plataforma WizIQ permite enlazar videos de YouTube que pueden ser observados de manera simultánea en el desarrollo de la sesión, en este curso el profesor emplea en algunas sesiones este medio para presentar algunos ejemplos que pueden ser utilizados por los estudiantes como apoyo al proceso desarrollado en clase; de manera alterna, hace comentarios y complementa lo explicado en los videos, relacionando los conocimientos desarrollados en la sesión de clase. A continuación, se describe un momento que ejemplifica esta manera de interactuar.

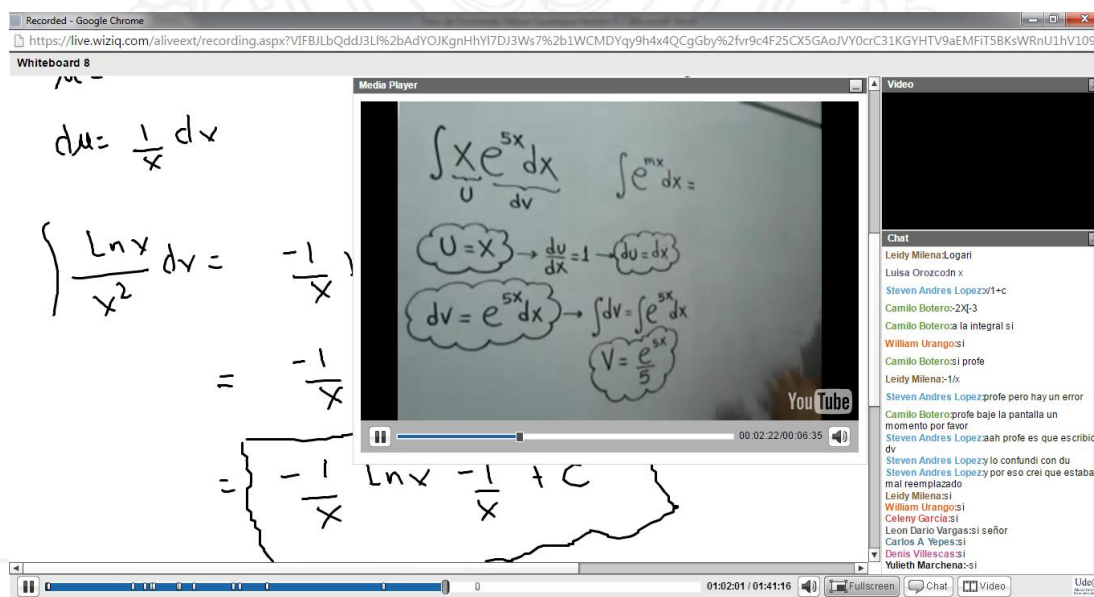


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Mientras el profesor realiza explicaciones relacionadas con la solución de un ejercicio, los estudiantes en el chat, van realizando preguntas o comentando en relación con lo desarrollado; el profesor durante esta clase, interactúa con los estudiantes de manera verbal, respondiendo a los



comentarios de los estudiantes, algunos de ellos *piden claridad en la explicación o manifiestan no entender*, otros en cambio *no realizan comentarios*. Con los estudiantes que no realizan comentarios, quedan algunos interrogantes, ¿Se encuentran en la sesión?, ¿Ha quedado clara la explicación del profesor? o ¿Temen preguntar?. Cuando un estudiante ha manifestado no entender, el profesor, pregunta e indaga al estudiante de manera específica las razones por las cuales cree no entender, generando un diálogo con él en relación con el conocimiento matemático. Se puede notar en la anterior imagen en la que un estudiante afirma que hay un error en la solución del ejercicio, el profesor pregunta al estudiante ¿En dónde está el error? identificando y argumentando que él tiene razón.

En esta sesión, además de presentar un video durante la clase, el profesor publica en el chat los enlaces de los videos observados a modo de complementar las explicaciones que desarrolló, relacionadas con la técnica de integración por partes.

Profesor12:<https://www.youtube.com/watch?v=BETtnGGLATU>

Profesor12:[https://www.youtube.com/watch?v=y2aF8EQ\\_eMQ](https://www.youtube.com/watch?v=y2aF8EQ_eMQ)

Aunque los estudiantes tienen conocimiento de que esta información se encuentra publicada en la plataforma Moodle, ellos esperan que les publiquen en el chat los enlaces de los videos, puede ser para facilitar el proceso de interacción o para evitar acceder a dicha plataforma. El profesor afirma que en Moodle, se encuentran otros videos relacionados e invita a los estudiantes a observarlos.

En otras sesiones de clase, a medida que se daba solución a los ejercicios, el profesor preguntaba por las propiedades que se empleaban para dicha solución; algunos estudiantes daban respuestas, otros en cambio, realizaban nuevas preguntas que al parecer buscaban una mejor comprensión de lo explicado.

Leidy Milena:profe en el primer ejercicio que planteo se puede expresar  $axdx$  como  $adx$  a la 2?

Leidy Milena:ok, gracias

Carlos A Yepes:Diferencia de cuadrados

Leidy Milena:una diferencia de cuadrado

Alexander Uribe Gonzalez:sen. sen

Leidy Milena:lo reemplazo

Leidy Milena:por  $1-\cos^2 x/2$

Leidy Milena:si

Camilo Botero:profe en la integral final reemplazo por la identidad?



Los diálogos generados entre los estudiantes, quienes a través del chat realizan sus comentarios mientras el profesor lo hace a través de la oralidad, son una manera de interacción muy frecuente en este colectivo, teniendo en cuenta que el profesor realiza explicaciones y escribe en la pizarra, está atento a la participación que los estudiantes realizan en el chat, aclara dudas o complementa la información que requiera la explicación, recordando propiedades matemáticas empleadas en los ejercicios o realizando ejemplos que expliciten lo desarrollado.

Durante las diferentes observaciones, se pudo notar que algunos estudiantes respondían a las preguntas que otros hacían al profesor, lo que modifica la naturaleza del diálogo y permite inferir que la comunicación no es bidireccional sino multidireccional, generando el fenómeno descrito en el capítulo 2 denominado multidialógico.

Leidy Milena:muy bueno el ejemplo  
Camilo Botero:si  
Alexander Uribe Gonzalez:si profe por favor me da el linc  
Denis Villescas:muy bueno  
Leidy Milena:Alenxander en la plataforma hay mas videos de julioprofe  
Alexander Uribe Gonzalez:leidy gracias, tu tienes skype  
Leidy Milena:millerroqui2

Estas interacciones conllevan a interpretar que la producción de conocimiento no está condicionada a la información que trae el profesor, sino también, proviene de otras fuentes. Aunque de acuerdo con las grabaciones observadas no se alcanza a profundizar cuáles son los otros medios empleados por los estudiantes, se considera que en el desarrollo de estas clases las acciones permiten asegurar que son maneras diferentes de interacción por parte del colectivo de humanos—con—medios relacionadas con la producción de conocimiento.

En varias clases se puede notar esta situación, en las cuales son los estudiantes los que interactúan entre sí a través del chat para responder inquietudes relacionadas con el conocimiento matemático en discusión.

Alexander Uribe Gonzalez:profe el signo de senOdO como cambió? en du  
Carlos A Yepes:Alex, es la derivada  
Alexander Uribe Gonzalez:ok

Durante las primeras sesiones, se hace mucho énfasis en las técnicas de integración, y la mayoría de estas clases están dirigidas a través de la solución de ejercicios de manera procedimental, resaltando propiedades específicas de las diferentes técnicas y características de las integrales para la toma de decisiones sobre la selección de una técnica. El profesor afirma en



una de las sesiones que estas temáticas son muy importantes, ya que cuando se aborden las aplicaciones de éstas, especialmente de las integrales definidas para calcular el área bajo una curva o un volumen de un sólido de revolución, estas técnicas ayudarán a resolverlas y a facilitar la solución de problemas.

Durante el desarrollo de las sesiones, en algunos casos se identifica que hay interacciones que no están relacionadas con la producción de conocimiento matemático, por ejemplo, en la imagen se observa un comentario realizado por una estudiante que no está relacionado con la clase de cálculo, al respecto esto genera otras interacciones que no corresponden con las discusiones de la clase y no contribuyen a la producción de conocimiento.

Lina María: Levanto mis manos  
El me levantará  
Hagamos guerra espiritual  
Goliat  
Has cambiado Actualy i am study music in the school of music of bello.

Levanto mis manos  
El me levantará  
Hagamos guerra espiritual  
Goliat  
Has cambiado (400,000)  
Actualy i am study music in the school of music of bello.

Lina María: profe un segundo  
Camilo Botero: jajaja se equivoco de clase  
Leidy Milena: jajajajajaja  
Sara Patricia: si se equivoco de clase jajaja

En algunas sesiones el profesor menciona que si tienen algunas dudas, pueden enviar sus preguntas a través de los foros de la plataforma Moodle o a través del correo electrónico, lo que también evidencia que en el desarrollo de este curso, se emplean otros medios diferentes a los de Ude@ para las interacciones. Aunque estos aspectos dificultan las observaciones relacionadas con la interacción, de estas grabaciones, se puede afirmar que existen otras maneras de interacción asociadas con la producción de conocimiento, objetivo central de este proceso de análisis.

En la sección 2.5, se resaltó la importancia de algunos conocimientos matemáticos necesarios para abordar el teorema fundamental del cálculo, entre ellos se encuentra la integral definida, que se retoma con los planteamientos de Riemann. En este curso, también se hace mención de manera previa al teorema de esta definición, que realiza el profesor con apoyo del módulo del curso y de explicaciones a través de la pizarra. La siguiente imagen corresponde con el momento de la clase cuando el profesor hace la introducción al tema, resaltando que se pretende construir el concepto de integral definida.



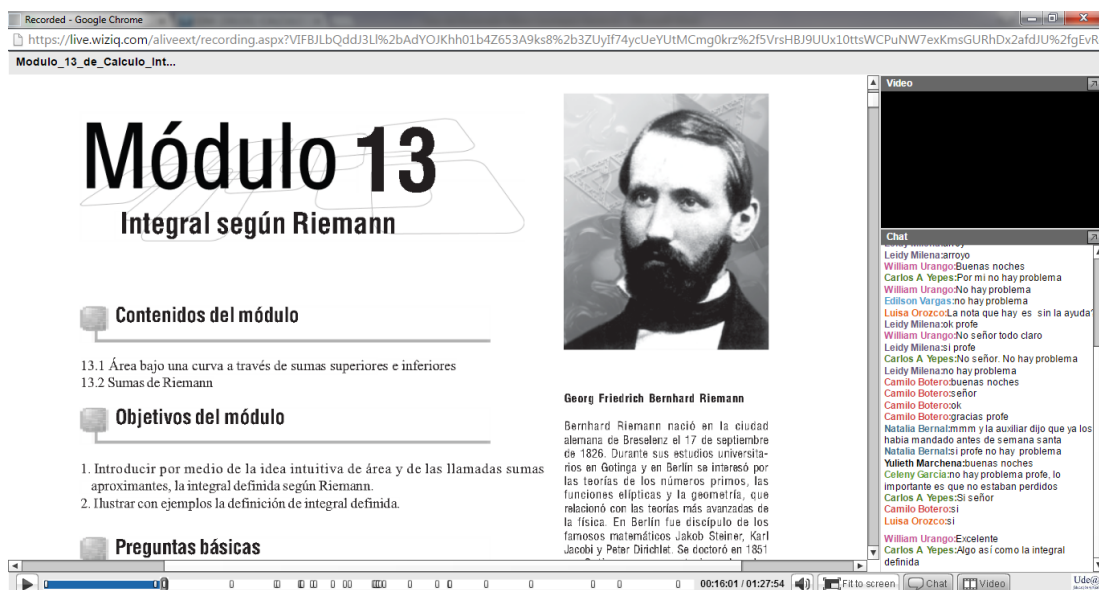


Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

En el transcurso de las explicaciones, el profesor hace énfasis en las características geométricas de este concepto, ya que su naturaleza está relacionada con la necesidad de calcular el área bajo una curva, lo que se puede realizar a través del límite de una suma de áreas de rectángulos. Durante las éstas, el profesor emplea videos, ejemplos y ejercicios relacionados con el cálculo de áreas bajo funciones en un intervalo cerrado, a través del método de partición y suma de áreas de rectángulos, lo que conlleva al límite de una sumatoria de Riemann y, por consiguiente, la definición de integral definida.

De lo anterior podemos concluir entonces que

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

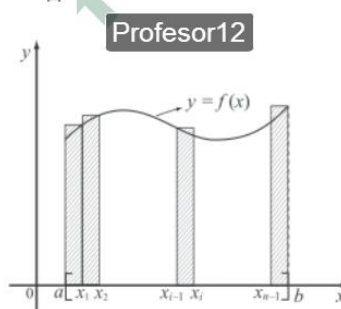


Figura 13.3

Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2



Este tipo de explicaciones están basadas en la solución de ejercicios de manera algorítmica, lo que el profesor describe paso a paso mediante el procedimiento para calcular sumas superiores y sumas inferiores, introduciendo el concepto de límite y estableciendo relaciones entre los aspectos geométricos y algebraicos. La imagen anterior refleja el momento en el que el profesor hace énfasis en la relación que se establece entre las áreas, mencionando que entre más subintervalos se obtengan, más cercano es el valor al área bajo la curva; de manera implícita resalta los procesos de razonamiento infinito involucrados en este concepto, ya que a partir de sumas de áreas de infinitos rectángulos se obtiene el área bajo una curva.

Durante la clase, el profesor realiza ambos procedimientos para calcular el área bajo una curva a través de sumas superiores e inferiores, a partir de ejemplos, retomando la función  $f(x) = x^2$  en un intervalo  $[0, 2]$ . Aunque este ejemplo se encuentra desarrollado en el módulo, el profesor explica paso a paso el procedimiento para resolverlo empleando la pizarra, resaltando la importancia del concepto de límite en este proceso, especialmente los límites al infinito (ver la siguiente imagen); estas explicaciones se ven apoyadas con otras interacciones, en las cuales hace uso del módulo del texto guía del curso, interactuando entre la pizarra y el módulo para apoyar sus explicaciones.

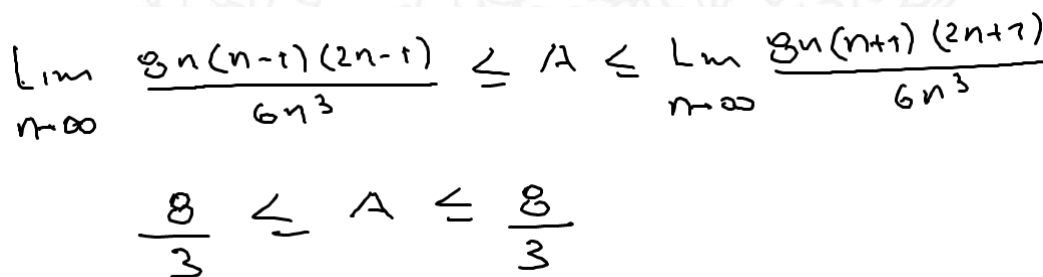

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \leq A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$\frac{8}{3} \leq A \leq \frac{8}{3}$$

Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Es importante anotar que, en esta situación, la interacción de lecturas previas de los módulos parece no ser muy implementada en el curso; por lo general, se desarrollan explicaciones paso a paso por parte del profesor, involucrando otro tipo de interacciones diferentes a las que realizarían los estudiantes sólo con la lectura de los módulos del texto. Es decir, cuando un estudiante realiza lectura de un ejemplo en el módulo, puede encontrar algunas



dificultades, ya que los libros de texto, en algunos casos, omiten pasos de algún procedimiento matemático para la solución de un problema, aspectos que en la interacción con el profesor son ampliados, argumentados, justificados o descritos en la pizarra.

Durante el desarrollo de este ejercicio, un estudiante realiza un comentario relacionado con un error de simbolismo que hay en una de las expresiones algebraicas planteadas por el profesor, éste hace la revisión y corrección del mismo. Los comentarios que realiza el estudiante y la manera en que interactúa comunicando el error que él considera, deja claro que esta interacción permitió modificar la producción que se estaba realizando; aunque la grabación no permite observar si la corrección que realiza el estudiante es derivada de su conocimiento matemático o de la comparación que puede realizar de textos o entre otros medios, se puede afirmar que estas interacciones modifican y condicionan la manera cómo se realiza la producción de conocimiento por parte del colectivo de humanos-con-medios.

Teniendo en cuenta las interacciones en el chat, al parecer, los estudiantes no habían revisado este módulo de manera previa a la sesión, ya que los comentarios realizados están relacionados con preguntas hacia el profesor sobre la manera como está desarrollando el ejercicio, tal como se puede observar en la siguiente imagen.

The screenshot shows a live session interface with the following components:

- Graph (Figura 13.3):** A coordinate system showing a function  $y = f(x)$  and its approximation using rectangles. The x-axis is labeled with points  $0, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, b$ . The y-axis is labeled with  $0, y_1, y_2, \dots, y_n$ . A green arrow points to the first rectangle, labeled "Profesor12".
- Text (Ejemplo 1):**

Sea  $f(x) = x^2$  definida en  $[0, 2]$  y  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición regular de  $[0, 2]$ . Si  $M_i$  es el valor máximo de  $f$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $m_i$  es el valor
- Text (propagación del sonido):**

Riemann presentó un método, actualmente obsoleto, para la integración de una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden en derivadas parciales. Debe mencionarse también el éxito que obtuvo de su exposición rigurosa del concepto de integral definida (integral según Riemann).

Riemann trabajó hasta el día anterior a su muerte, la cual se produjo el 20 de julio de 1866, en Selasca, Italia, por tuberculosis adquirida pocos años antes a causa de su esbelta constitución física. Su último trabajo, que trataba sobre la teoría de la transferencia del sonido desde un enfoque de principios hidráulicos, quedó inconcluso.
- Chat:**
  - Camilo Botero: ¿profe porque ese intervalo de cero a dos?
  - Camilo Botero: ahhh ok
  - Camilo Botero: gracias
  - Leidy Milena: porque al cuadrado
  - Leidy Milena: ?
  - Leidy Milena: a-1
  - Leidy Milena: aaaa ok
  - Carlos A. Yepes: No
  - Luisa Orozco: como señor
  - Carlos A. Yepes: Profe, se puede simplificar?
  - Camilo Botero: por el momento
  - William Urango: Carlos A. Yepes y 4/3
  - Leidy Milena: se rompen los parentesis
  - William Urango: i-1 al cuadrado?
  - Leidy Milena: profe el (-1) tambien esta la cuadrado
  - Leidy Milena: pero internamente, eso dio en la particion
  - Leidy Milena: internamente\*
  - Leidy Milena: claro
  - Yuliett Marchena: s n3
  - Yuliett Marchena: profe no es 6n3?
- Video:** A small video player window showing a black screen.
- Footer:** "Elementos básicos de cálculo integral y series 129"

Imagen tomada de la plataforma WIZIQ, ver anexo C grupo 2



En las clases observadas, se ha expresado que el profesor para realizar sus explicaciones utiliza el módulo correspondiente con la temática, sin embargo, es importante recordar que estos módulos se encuentran publicados desde el inicio del curso en la plataforma Moodle, lo que genera condiciones para su lectura previa a la sesión de clase, aspectos que están relacionados con la producción de conocimiento, no obstante, cabe observar que no se evidencia que los estudiantes realicen este tipo de interacciones.

Luego de realizar ejemplos sobre el cálculo de áreas a través de sumas superiores e inferiores, el profesor centra la atención de los estudiantes en las sumas de Riemann, basándose en la teoría antes de realizar ejemplos y ejercicios para llevarlos secuencialmente a la definición de integral definida, estableciendo relaciones entre los conocimientos abordados hasta el momento, tal como se observa en la siguiente imagen.

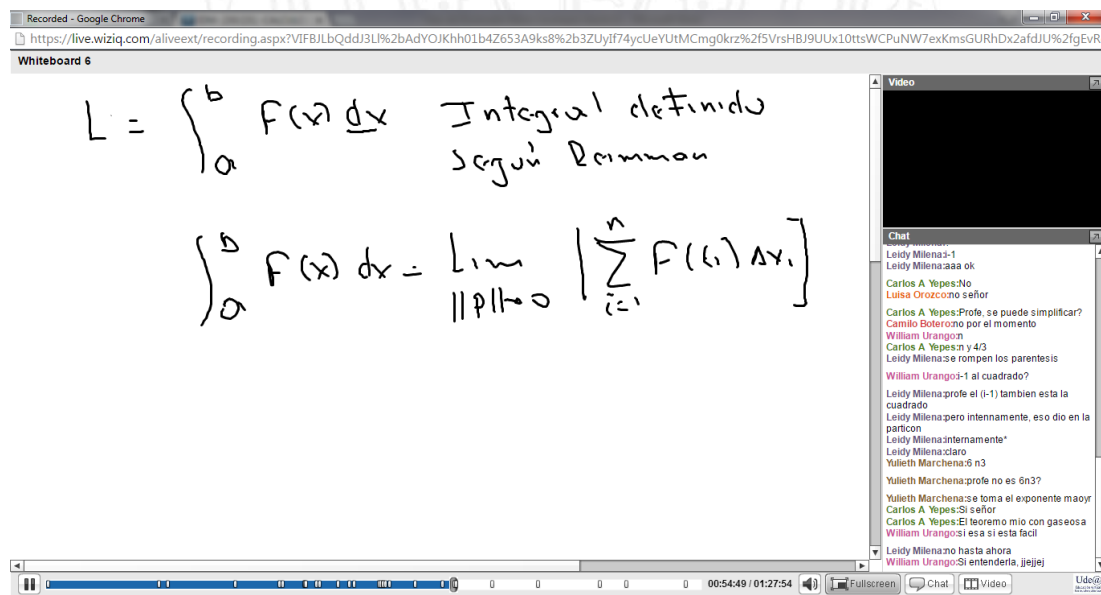


Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

Durante la exposición del profesor, no se plantean comentarios por parte de los estudiantes en el chat, a excepción de respuestas afirmativas a las preguntas que realiza el profesor sobre si están comprendiendo el tema. Posterior a las explicaciones teóricas, se realizan algunos ejemplos para aplicar la definición de Riemann, estableciendo relaciones entre el límite y la integral definida, tal como se muestra en la siguiente imagen.



$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta y_i \right| = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b c dx = c(b-a)$$

Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Estos aspectos se habían considerado importantes en el capítulo 2, ya que para abordar el teorema fundamental del cálculo, reconocer los conceptos previos o relacionados con el límite, es necesario para la producción de este conocimiento. De igual manera, luego de presentar una definición de la integral definida, se exponen sus propiedades, empleando similares procesos de interacción, que de manera general consisten en resaltar los conocimientos matemáticos a partir del módulo, tal como se observa en la siguiente figura y, posteriormente, realizar explicaciones sobre el tema ya sea a través de la oralidad o de ilustraciones en la pizarra.

Recorded - Google Chrome  
https://live.wiziq.com/aliveext/recording.aspx?VIFB/LbQddJ3L%2bAdYOJKhh01b4Z653A9ks8%2b3ZUyji74ycUeYUtmCmg0krz%2f5VrsHBj9UUX10ttsWCPuNW7exKmsGURhDxDx2afdlU%2fgEvRe

Modulo\_14\_de\_Calculo\_Int...

**Teorema 1: Propiedades de la integral definida**

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones integrables en  $[a, b]$ ,  $k$  una constante real y  $a < c < b$ .  
Entonces:

- i.  $kf$  es integrable en  $[a, b]$  y  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .
- ii.  $(f+g)$  es integrable en  $[a, b]$  y  $\int_a^b [f(x)+g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .
- iii. Si  $f(x) \geq 0$  para todos  $x$  de  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
- iv.  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$  y  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .
- v. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $g(x) = f(x)$  para todo  $x$  de  $(a, b)$ , entonces  $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

**Demostración**

La demostración de las partes i, ii e iii pueden hacerse usando la definición de función integrable presentada en el módulo 13, pero considero que no tiene mucho interés demostrarlas en un primer curso de cálculo integral.

Chat:

- Carlos A Yepes: Si señor
- Carlos A Yepes: El teorema mio con gaseosa
- William Urango: Si esa si esta facil
- Leidy Milena: no hasta ahora
- William Urango: Si entendida, jajej
- Luisa Orozco: Profe el segundo parcial si es para 118?
- Camilo Boteros: Si
- Camilo Boteros: solo son estos dos modulos y lo que falta?
- Leidy Milena: para el parcial
- Camilo Boteros: Si profe
- William Urango: Una recta
- Camilo Boteros: Si
- Luisa Orozco: Si
- Yuliett Marchena: Si
- Carlos A Yepes: Si
- Leidy Milena: Si, profe
- William Urango: Si señor
- William Urango: Profe osea que hay una alta probabilidad de que en el parcial salgan demostraciones de esta teoria, o va hacer mas practico
- William Urango: Okay profe
- William Urango: gracias

Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Se resalta de las observaciones realizadas, que el profesor hace énfasis en los conocimientos matemáticos correspondientes con el curso, explicando las definiciones, teoremas, corolarios y demás propiedades matemáticas, teniendo en cuenta sus características y



apoyándose en ejemplos y ejercicios para mostrar la aplicación de estos conocimientos, algunos de ellos tomados de los módulos del curso publicados en la plataforma Moodle y retomados en la sesión de WizIQ. Por ejemplo, es el caso del teorema del valor medio para integrales, el cual es explicado por el profesor, destacando en el módulo, la definición y las propiedades de este conocimiento. La siguiente imagen muestra el momento en el que el profesor emplea interacciones al señalar la definición, explicitar de manera verbal las propiedades y además, estar atento a las preguntas que los estudiantes realizan a través del chat.

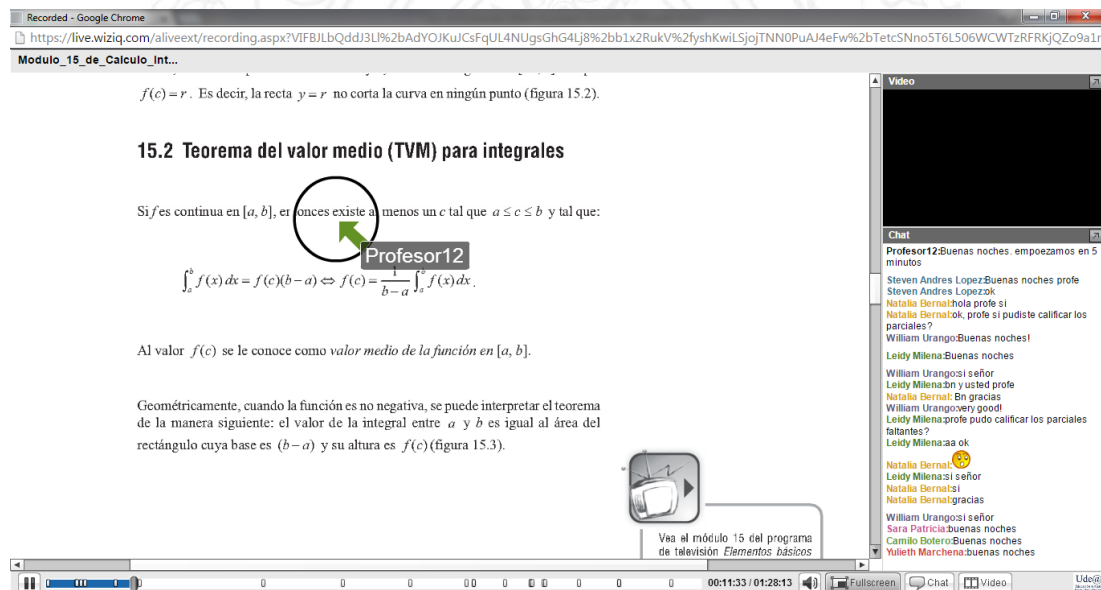


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Las acciones ocurridas de manera previa al momento de abordar el teorema fundamental del cálculo, evidencian diferentes maneras que el colectivo de humanos–con–medios realiza para interactuar, empleando diferentes medios y formas para acceder a la información. De lo expuesto hasta el momento, se puede interpretar que muchas de las interacciones observadas están en correspondencia con lo planteado en el capítulo 2 de esta tesis, reconociendo la importancia de estos conocimientos previos y que algunas de ellas son fundamentales para la producción. En la siguiente sección, se centrará la atención en aquellas interacciones relacionadas con el momento en el cual se aborda el teorema fundamental del cálculo en el curso.



#### 4.1.2. Interacciones asociadas a la producción del teorema fundamental del cálculo

En esta sección se presenta el momento en el cual se desarrolla el teorema fundamental del cálculo, observando y describiendo las interacciones que realiza el colectivo de humanos—con—medios para la producción de este conocimiento matemático. Se puede observar que las interacciones que realiza este colectivo son muy similares a las planteadas en la sección anterior, sin embargo, es preciso reconocer aquellas que están en función del teorema, objeto central en este estudio.

La imagen a continuación, muestra que durante el desarrollo de la clase, se utiliza el módulo 16 que corresponde con este conocimiento, dedicando el resto de la sesión para explicaciones, ejercicios y solución de dudas relacionadas con este tema.

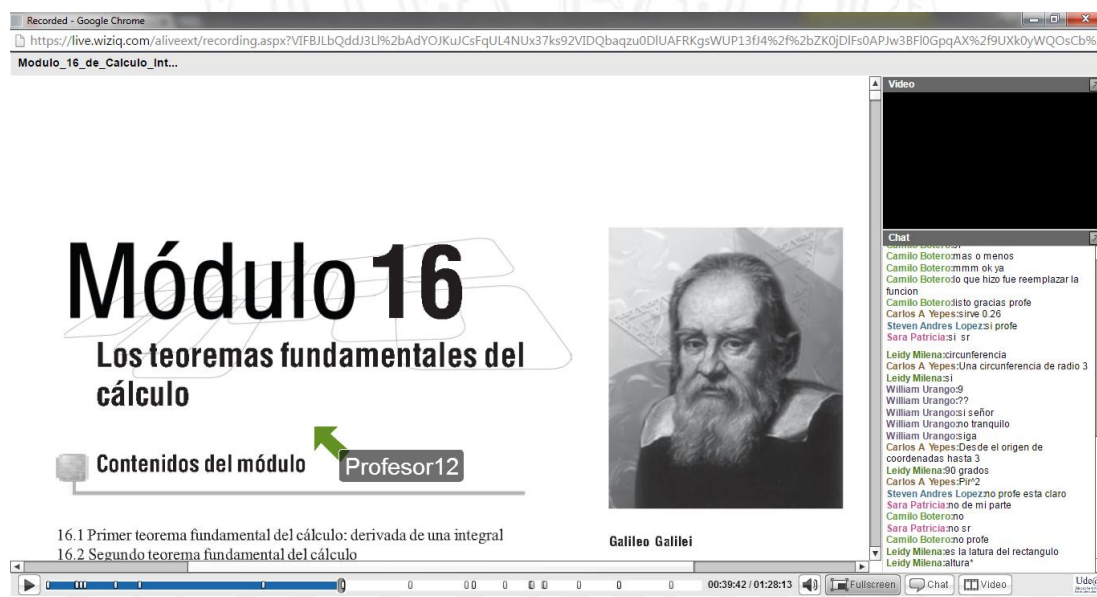


Imagen tomada de la plataforma WIZIQ, ver anexo C grupo 2

Apoyado en el módulo respectivo, el profesor orienta las explicaciones señalando algunas características del teorema fundamental del cálculo y de conceptos desarrollados en momentos anteriores; entre ellas, se aborda la relación geométrica que se establece a partir de la integral definida, manifestando que  $F(x)$  es una función que representa el área bajo la curva  $f(t)$  en un intervalo  $[a, x]$ , tal como se evidencia en la siguiente imagen.



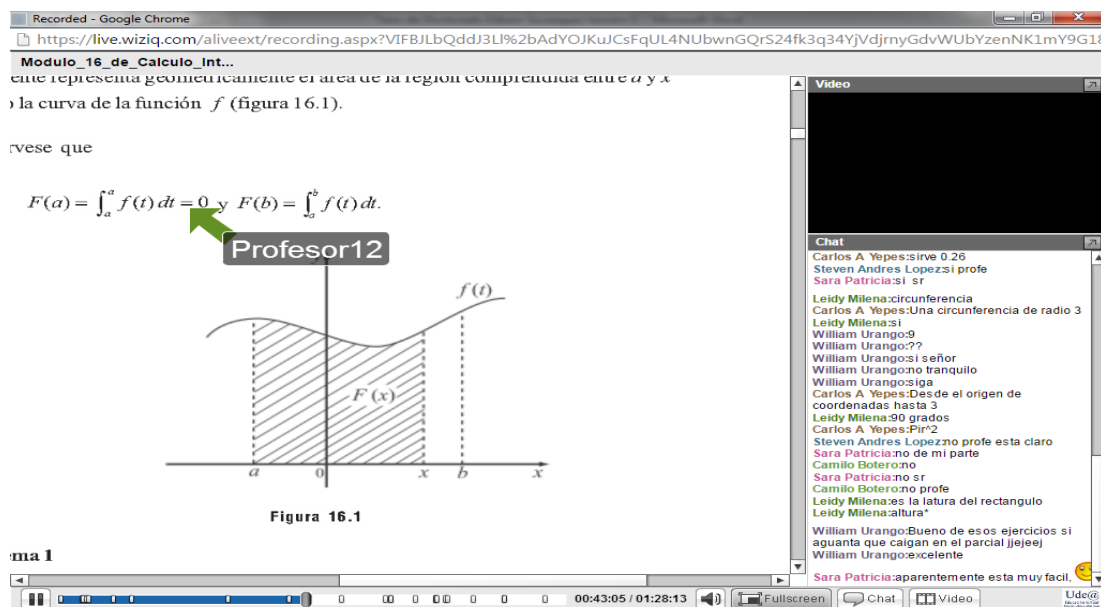


Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

Al parecer, tal como lo afirman algunos estudiantes en el chat, comprenden el significado de la integral definida y la relación geométrica que se establece a partir de la expresión  $\int_a^b f(t)dt$  que representa el área bajo la curva de  $f(t)$ , sin embargo, no se identifican interacciones como las planteadas en el capítulo 2, que profundicen en la relación geométrica entre  $\int_a^b f(t)dt$  y  $F(x)$ .

De manera general, las interacciones que realiza el colectivo para la producción de este conocimiento, parten de la lectura, explicación y revisión del módulo 16 y, a partir de allí, el profesor resalta los aspectos que considera importantes para abordar el tema y dar respuesta a las preguntas que realizan los demás miembros del colectivo, generando un diálogo en torno a este conocimiento. Luego, se procede a resolver algunos ejemplos que evidencien estas características, así como también, a describir la importancia del teorema en el estudio del cálculo.

El profesor escribe en la pizarra la definición del primer teorema fundamental del cálculo, haciendo énfasis, de manera verbal, en sus características, entre ellas resalta que  $f$  es una función



continua en un intervalo  $[a, b]$ , que  $F$  es derivable en ese intervalo y que  $F'(x) = f(x)$ , tal como se observa en la siguiente imagen.

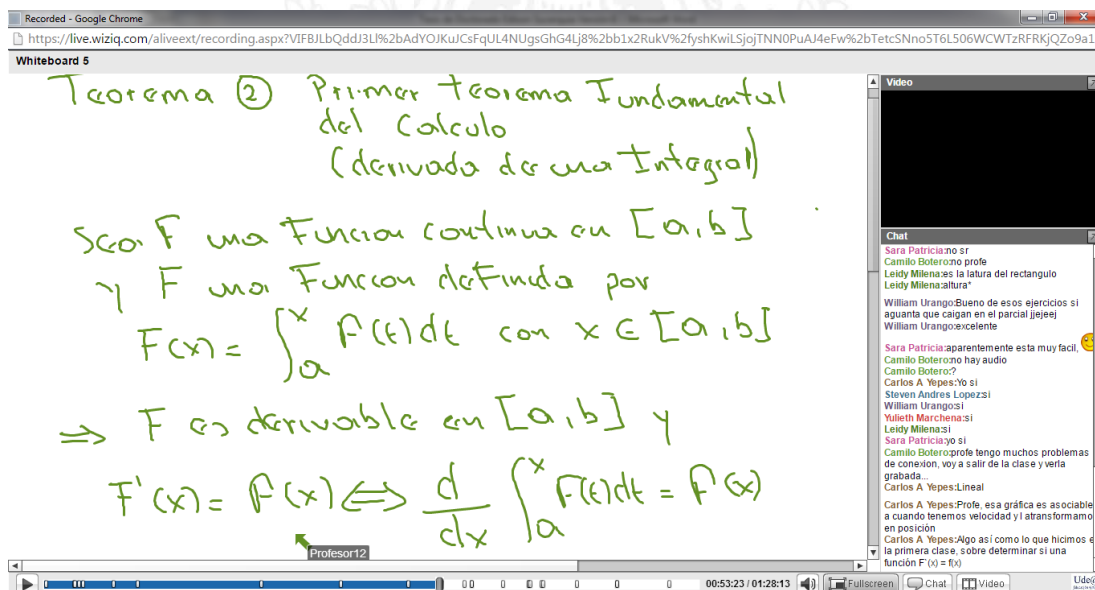


Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

Aunque esta definición está planteada en el módulo 16 como se observa en la siguiente imagen, se resalta que el profesor emplea la interacción de escribir en la pizarra, diferente a lo que está escrito en el módulo. Cabe mencionar que de esta manera, mientras escribe, va empleando otro medio importante que es la oralidad, mostrando en su discurso, un significado del teorema y la relación entre sus componentes al mismo tiempo que realiza la escritura de la definición.

### Teorema 2: Primer teorema fundamental del cálculo (derivada de una integral)

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y  $F$  la función definida por con  $x$  en  $[a, b]$ .

Entonces,  $F$  es derivable en todo  $x$  de  $[a, b]$  y  $F'(x) = f(x)$ .

Imagen del módulo 16, presentado en la sesión de WiziQ, ver anexo C grupo 2



Antes de realizar ejemplos, el profesor hace énfasis en que desea exponer primero la teoría relacionada con este tema, por lo que posteriormente presenta los corolarios que se derivan de este primer teorema fundamental del cálculo, realizando el mismo proceso de interacción de escribir en la pizarra simultáneamente a la descripción y explicación de los mismos. Sin embargo, durante la explicación, muestra en el módulo dichas definiciones para ilustrar a los estudiantes el lugar donde pueden revisar y estudiar posteriormente. A continuación, se muestran las imágenes de esas definiciones presentadas en el momento de la clase.

### Corolario 1

Sea  $h$  una función continua en  $[c, d]$ ,  $V(x)$  una función derivable en  $[a, b]$  y  $c \leq V(x) \leq d$ .

Si  $F(x) = \int_c^{V(x)} h(t) dt$ , entonces  $\frac{dF(x)}{dx} = h(V(x)) \cdot \frac{dV}{dx}$ .

Imagen del módulo 16, presentado en la sesión de WizIQ, ver anexo C grupo 2

### Corolario 2

Sea  $h$  continua en  $[c, d]$ ,  $U(x)$  y  $V(x)$  derivables en  $[a, b]$  con  $c \leq U(x) \leq d$  y  $c \leq V(x) \leq d$ .

Si  $F(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} h(t) dt$ , entonces

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} h(t) dt = h(V(x)) \frac{dV}{dx} - h(U(x)) \frac{dU}{dx}.$$

Imagen del módulo 16, presentado en la sesión de WizIQ, ver anexo C grupo 2

Posterior a estas explicaciones teóricas del teorema fundamental del cálculo, el profesor realiza algunos ejemplos sobre la aplicación del primer teorema y sus corolarios, para ilustrar a los estudiantes las propiedades y características de este conocimiento en función de solucionar algunos ejercicios.



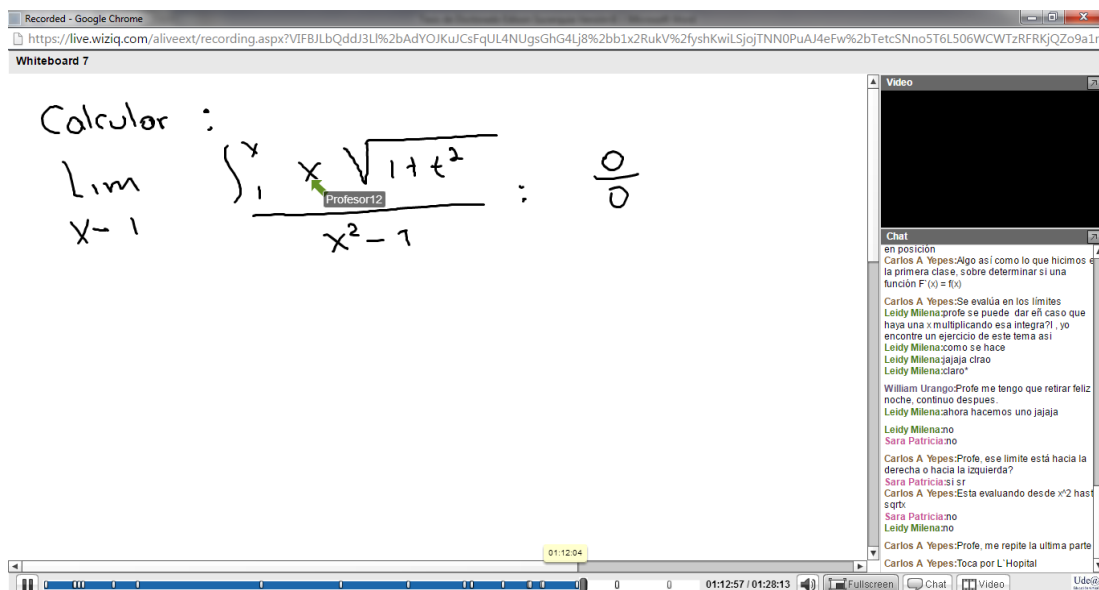


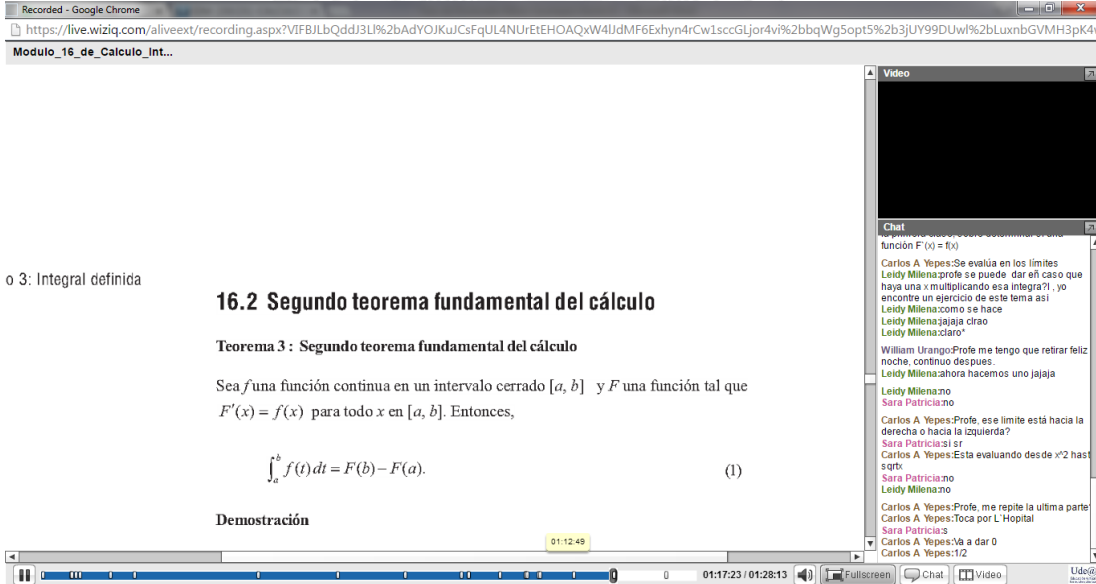
Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

La anterior imagen muestra el ejemplo que realiza el profesor del curso, en el cual se requiere la aplicación del teorema para su solución; en este caso, se plantea que es un límite que al ser evaluado en  $x = 1$  tiene una indeterminación  $0/0$ . Un estudiante responde que se hace necesario aplicar la regla de L'Hopital, que al ser aplicada en el numerador, requiere de la aplicación del teorema fundamental del cálculo. Posteriormente, el profesor procede a realizar en la pizarra los procedimientos algorítmicos necesarios para dar solución al ejercicio, aclarando las propiedades matemáticas de la derivación, el teorema y el límite.

Se puede observar que las interacciones relacionadas con este conocimiento matemático que realizó el colectivo de humanos-con-medios, fue basado en la oralidad del profesor y en la escritura de los estudiantes (en el chat), teniendo en cuenta el módulo, las definiciones y algunos ejemplos, centrando la atención en aquellos aspectos que ayudarán a la comprensión del primer teorema fundamental del cálculo para el desarrollo procedimental u operativo de ejercicios. Aunque se hizo mención de algunos aspectos de este conocimiento relacionados con propiedades geométricas, no se generaron discusiones que permitieran evidenciar la comprensión de los estudiantes de dichas propiedades, aspectos que posiblemente se vean reflejados en las aplicaciones de este teorema para la solución de problemas.



Luego, se hace mención al segundo teorema fundamental del cálculo, empleando interacciones similares, partiendo de las definiciones contempladas en el módulo y posteriormente realizando ejemplos y ejercicios relacionados, aclarando simultáneamente inquietudes que escriben los estudiantes en el chat.



Modulo\_16\_de\_Calculo\_Int...

o 3: Integral definida

### 16.2 Segundo teorema fundamental del cálculo

**Teorema 3 : Segundo teorema fundamental del cálculo**

Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y  $F$  una función tal que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (1)$$

**Demostración**

01:12:48

01:17:23 / 01:28:13

Chat

función  $F(x) = f(x)$

Carlos A Yepes: Se evalúa en los límites

Leidy Milena: profe se puede dar el caso que haya una  $x$  multiplicando esa integral? , yo encontre un ejercicio de este tema así

Leidy Milena: como se hace

Leidy Milena: jajaja ciao

Leidy Milena: claro

William Urango: Profe me tengo que retirar feliz noche, continúo des pues

Leidy Milena: ahora hacemos uno jajaja

Leidy Milena: no

Sara Patricia: no

Carlos A Yepes: Profe, ese límite está hacia la derecha o hacia la izquierda?

Sara Patricia: si es

Carlos A Yepes: Esta evaluando desde  $x=2$  hasta  $x=3$

Sara Patricia: no

Leidy Milena: no

Carlos A Yepes: Profe, me repite la última parte

Carlos A Yepes: Toca por L'Hopital

Sara Patricia: s

Carlos A Yepes: Va a dar 0

Carlos A Yepes: 1/2

Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

Durante el desarrollo de esta sesión, tal como se había mencionado en el capítulo 2, este conocimiento matemático se aborda teniendo en cuenta las características procedimentales en la solución de ejercicios en los cuales se aplica el teorema fundamental del cálculo, en algunos casos el profesor hace preguntas relacionadas con el significado de la respuesta del ejercicio o interpretación geométrica de dicho resultado.

Las interacciones relacionadas con el teorema fundamental del cálculo, fueron abordadas en su aspecto procedimental, que puede considerarse como una producción de conocimiento matemático, en tanto que los estudiantes hacen uso de conceptos relacionados con el teorema y el profesor realiza explicaciones sobre la manera cómo se aplica para la solución de ejercicios relacionados con áreas bajo una curva o la solución de límites en los cuales sea necesario la aplicación del teorema a través de la derivada de una integral; algunos de estos ejemplos de aplicación desarrollados en este curso se describen en la siguiente sección.



### 4.1.3. Interacciones relacionadas con la aplicación del teorema fundamental del cálculo

Posterior al desarrollo de la clase del teorema fundamental del cálculo, en la siguiente sesión, se realiza un resumen de los conceptos abordados para recordar los conocimientos que serán evaluados en el parcial del curso, haciendo énfasis especialmente en la definición de la integral definida, que se realiza con el límite de una suma de Riemann, la derivada de una integral, las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental del cálculo para evaluar integrales definidas.

Durante este resumen, el profesor emplea la pizarra y escribe los aspectos que considera importante resaltar, en esta ocasión la interacción no se realiza haciendo uso de los módulos del texto guía del curso y los conocimientos matemáticos expuestos, sino que parte de definiciones expuestas por el profesor a partir de su saber o experiencia docente.

Este resumen se hace como introducción al concepto de integrales impropias, que se desarrolla posteriormente al teorema fundamental del cálculo (ver anexo A). En este sentido se retoma como ejemplo la siguiente integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

El profesor solicita a los estudiantes evaluar esta integral, los cuales plantean como respuesta menos dos ( $-2$ ), tal como se observa en la siguiente imagen.



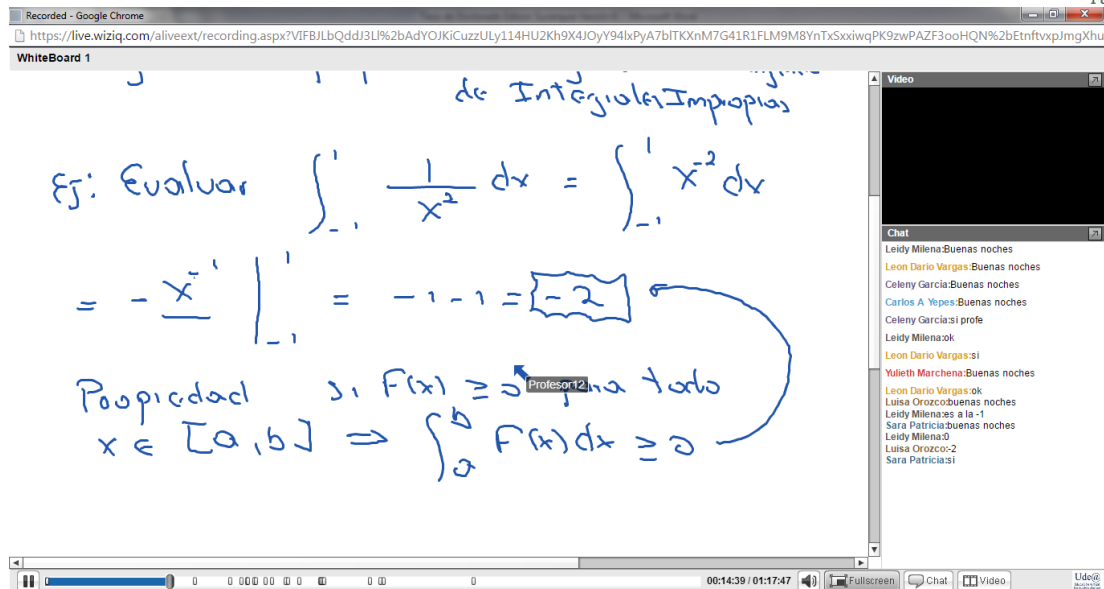


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

A partir de este ejemplo, en la pizarra, el profesor escribe las características de las integrales impropias y además, resalta las propiedades del teorema fundamental del cálculo, en la cual, no es posible evaluar la integral, ya que no cumple con que  $f(x)$  sea continua en todo el intervalo  $[a, b]$ , explicaciones que el profesor resalta de manera oral. Estos aspectos también se habían considerado en este estudio como fundamentales a la hora de abordar el teorema fundamental del cálculo, los cuales fueron presentados en la sección 2.5.

En el resumen de los aspectos abordados en las sesiones anteriores, la interacción del profesor está relacionada con una síntesis de los conocimientos matemáticos que él considera, sin embargo, de acuerdo con lo planteado a partir del constructo teórico humanos-con-medios, también se puede establecer un diálogo que puede surgir mediante la interacción con los estudiantes en relación con estos conocimientos, a partir de preguntas o confrontaciones sobre la validez del procedimiento realizado para el desarrollo de ese ejemplo.

Para complementar la explicación, el profesor se apoya en una imagen del módulo 17, explicando de manera verbal, las características de las integrales impropias y la necesidad de emplear el concepto de límite para calcular el área bajo esta curva, además de presentar, de manera gráfica, los diferentes tipos de integrales impropias, de acuerdo con las características de



la función  $f(x)$ . En la siguiente imagen, se puede observar el momento en el que el profesor realiza este tipo de interacciones.

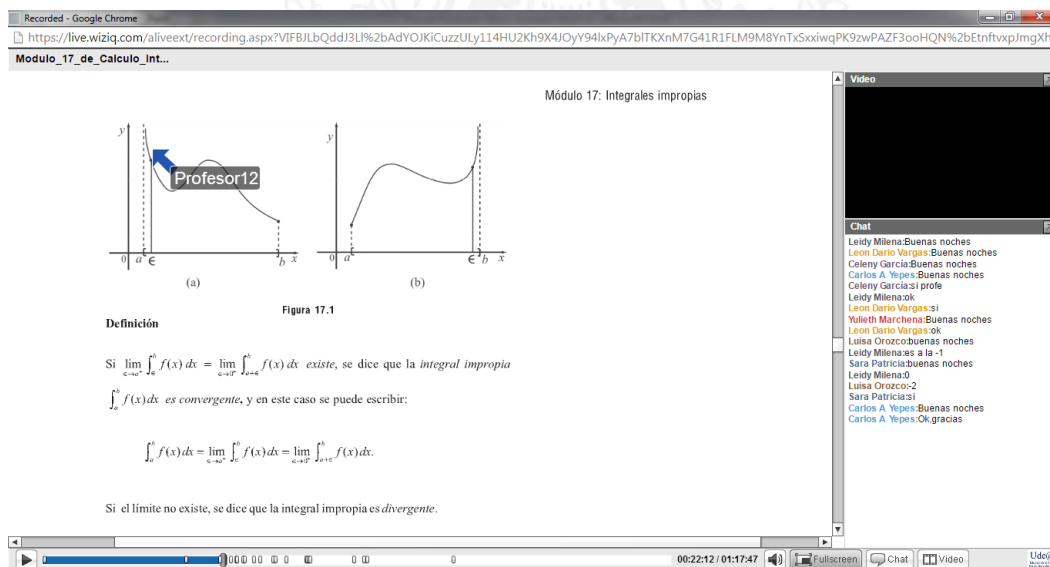


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

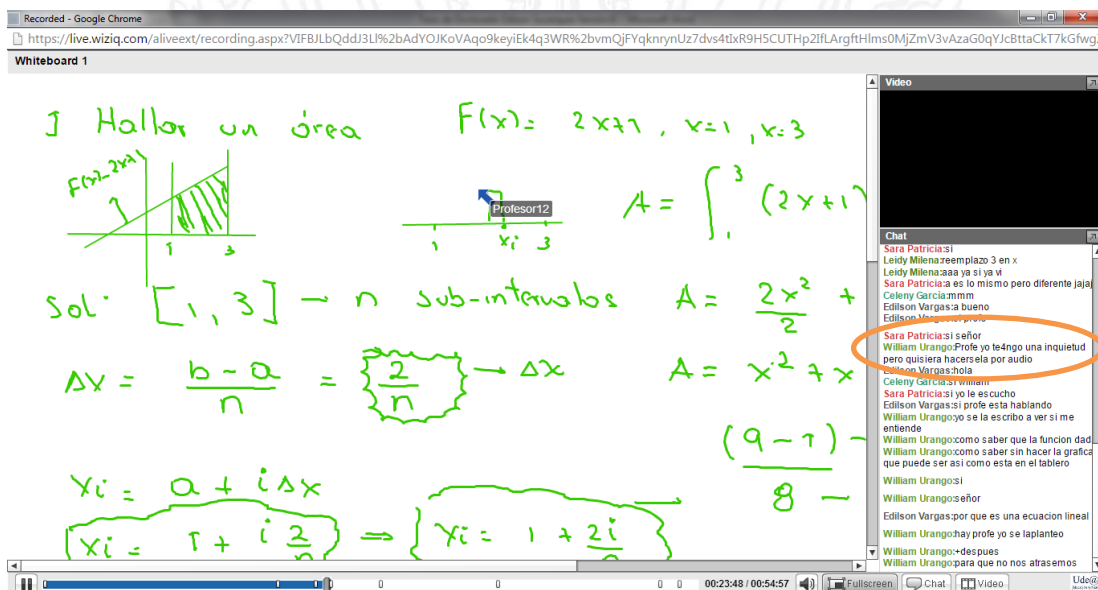
A partir de estas gráficas, el profesor realiza preguntas sobre las características geométricas de las funciones e indaga sobre cuál sería el tipo de integral impropia que corresponde a cada una de ellas. A estos cuestionamientos, una estudiante responde que cuando una función es discontinua en el intervalo  $[a, b]$ , se hace necesario emplear dos integrales impropias, una entre  $[a, c]$  y otra entre  $[c, b]$ , evidenciando de esta manera que aplica los conocimientos abordados anteriormente sobre las propiedades de las integrales definidas, relacionadas también con la aplicación del teorema fundamental del cálculo y teniendo en cuenta el concepto de continuidad de una función en un intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Posteriormente, el profesor plantea un ejercicio para aplicar los conocimientos abordados relacionados con las integrales impropias, realiza indagaciones sobre las posibilidades de solución de acuerdo a las ecuaciones planteadas y al tipo de integral impropia; algunos estudiantes participan de la sesión respondiendo a las preguntas que el profesor realiza. Las interacciones que realiza el colectivo, están relacionadas con la escritura de la solución del ejercicio en la pizarra, además, utiliza herramientas propias de la plataforma para señalar o hacer



énfasis en algunas partes, recordando conocimientos matemáticos asociados con la integral definida y algunas técnicas de integración, ya desarrollados en otras sesiones.

Durante el desarrollo de ejercicios, se pudo observar que las interacciones del profesor, motivaban la participación de los estudiantes, permitiendo que ellos planteen sus inquietudes y las realicen empleando los diferentes medios; en un momento de la clase el profesor activa las herramientas de audio para que un estudiante pueda plantear su inquietud relacionada con el ejercicio que se desarrolla, generándose un diálogo entre ellos y entre otros estudiantes a través del chat; aunque este tipo de interacción no fue muy frecuente, se efectuó en algunos momentos del curso. El profesor aprovecha este tipo de acciones para solicitar la revisión de los ejercicios de los módulos publicados en la plataforma y la revisión de los conceptos abordados. En la siguiente imagen se observa la solicitud del estudiante para la activación de la herramienta de audio, la cual modifica la manera cómo interactuaba este colectivo.



The screenshot shows a live session on the WiziQ platform. The main window is a whiteboard with handwritten mathematical work. The problem is to find the area under the curve  $F(x) = 2x + 1$  from  $x = 1$  to  $x = 3$ . The student has drawn a graph of the line and shaded the area under it. They have also written the integral  $A = \int_1^3 (2x + 1) dx$  and the formula for the width of sub-intervals  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$ . The chat window on the right shows a conversation between Sara Patricia and William Urango. Sara Patricia asks for help with the exercise, and William Urango responds, mentioning that he will activate the audio tool to help her.

Whiteboard 1

Recorded - Google Chrome  
https://live.wiziq.com/aliveext/recording.aspx?VFBJLbQddj3Ll%2bAdYOJKoVaq9keyIk4q3WR%2bvmQjFYqknrynUz7dvs4txR9H5CUTHp2ifLArgftHlms0MjZmV3vAzaG0qY1cBttaCkT7kGfwg2

Whiteboard 1

1 Hallar un área  $F(x) = 2x + 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$

$A = \int_1^3 (2x + 1) dx$

Sol:  $[1, 3] \rightarrow n$  sub-intervalos  $A = \frac{2x^2}{2} + x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \rightarrow \Delta x$

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = 1 + i\frac{2}{n}$

Chat

Sara Patricia: si  
Leidy Milena: reemplazo 3 en x  
Leidy Milena: aaaa ya si ya vi  
Sara Patricia: a es lo mismo pero diferente jaja  
Celery Garcia: mmm  
Edilson Vargas: a bueno  
Edilson Vargas: me parece  
Sara Patricia: si señor  
William Urango: Profe yo te tengo una inquietud pero quisiera hacersela por audio  
Edilson Vargas: hola  
Celery Garcia: ahhhh  
Sara Patricia: si yo le escucho  
Edilson Vargas: si profe esta hablando  
William Urango: yo se la escribo a ver si me entiende  
William Urango: como saber que la funcion dad  
William Urango: como saber sin hacer la grafica que puede ser asi como esta en el tablero  
William Urango: si  
William Urango: señor  
Edilson Vargas: por que es una ecuacion lineal  
William Urango: hay profe yo se la planteo  
William Urango: >despues  
William Urango: para que no nos atrasemos

Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

Después de la solución de este ejercicio, el profesor plantea otros, similares a la evaluación parcial, para que los estudiantes los realicen y da un tiempo aproximado; posteriormente, el profesor realiza los ejercicios, los cuales va desarrollando paso a paso, atendiendo a las preguntas que plantean los estudiantes y modificando o ampliando el lenguaje para que sea comprensible



para ellos. De igual manera se desarrolla el resto de la sesión, realizando ejercicios con la interacción de los estudiantes a través del chat y la solución de preguntas por parte del profesor.

Posteriormente al concepto de integral impropia, se continúa con el capítulo de aplicaciones de la integral definida (ver anexo A), en el cual, durante la presentación del capítulo, el profesor hace énfasis en los diferentes contextos de aplicación que se pretenden abordar, además, en estos casos se emplea el teorema fundamental del cálculo para calcular las diferentes integrales definidas. En la siguiente imagen se presenta el momento en el cual el profesor realiza dicha introducción al capítulo mencionado, empleando la interacción de señalar en la pizarra y la explicación oral.

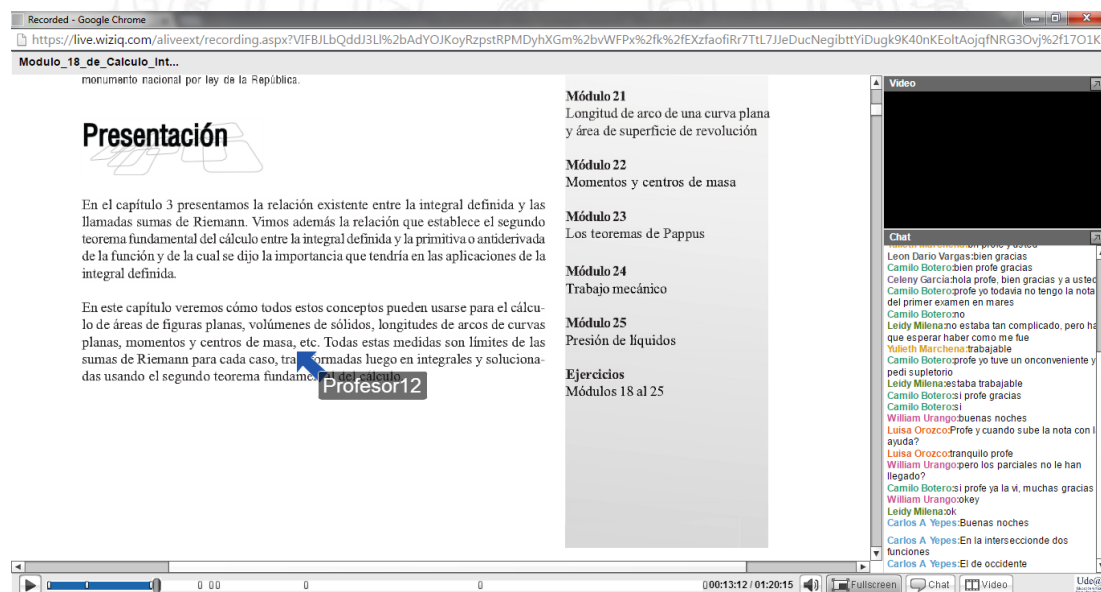


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

Durante estas explicaciones, no se evidencian registros en el chat por parte de los estudiantes, lo cual no permite identificar diálogos o interacciones relacionadas con el conocimiento en discusión. Sin embargo, cuando se comienzan a desarrollar los ejercicios, los estudiantes comienzan a manifestar en el chat preguntas relacionadas con el desarrollo de los mismos, tal como se puede apreciar en la siguiente imagen.



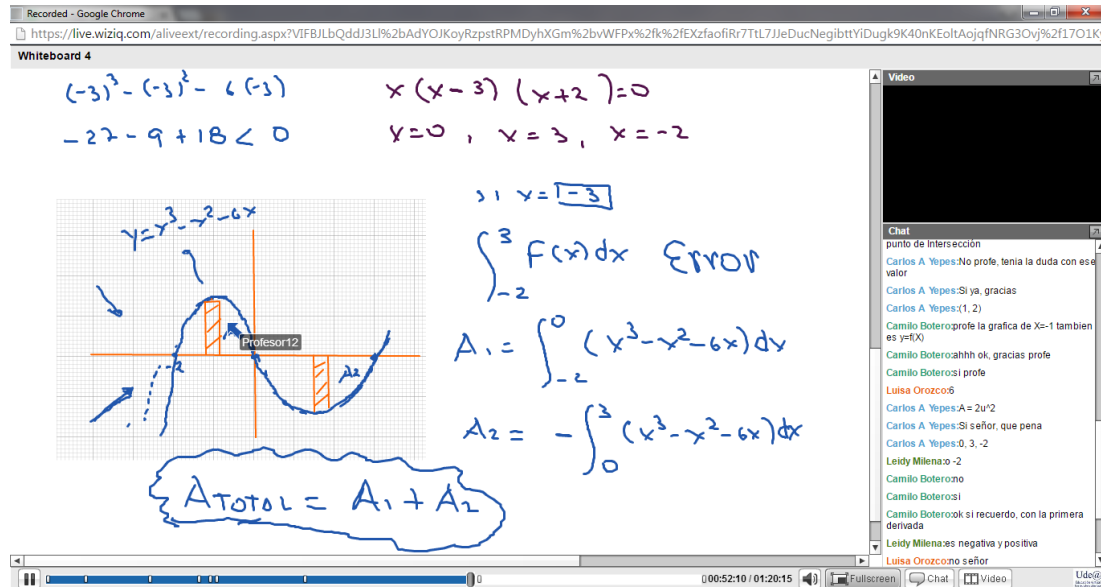


Imagen tomada de la plataforma WiziQ, ver anexo C grupo 2

En el desarrollo de este tipo de ejercicios, el profesor realiza explicaciones que ayuden a los estudiantes a plantear la integral que dé solución a un problema, ya sea con un enunciado o con algunas condiciones para calcular un área entre funciones; además, hace énfasis en los conocimientos matemáticos que se requieren para su desarrollo, resaltando las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental del cálculo, específicamente empleando la expresión:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

En estos ejercicios, el profesor no resuelve la integral planteada, sólo ayuda a su construcción y muestra a los estudiantes cuál es la integral que deben resolver empleando el teorema fundamental del cálculo. En estas sesiones se puede observar que los estudiantes ya reconocen que para evaluar una integral definida deben emplear el teorema, tal como se puede observar en la siguiente imagen.



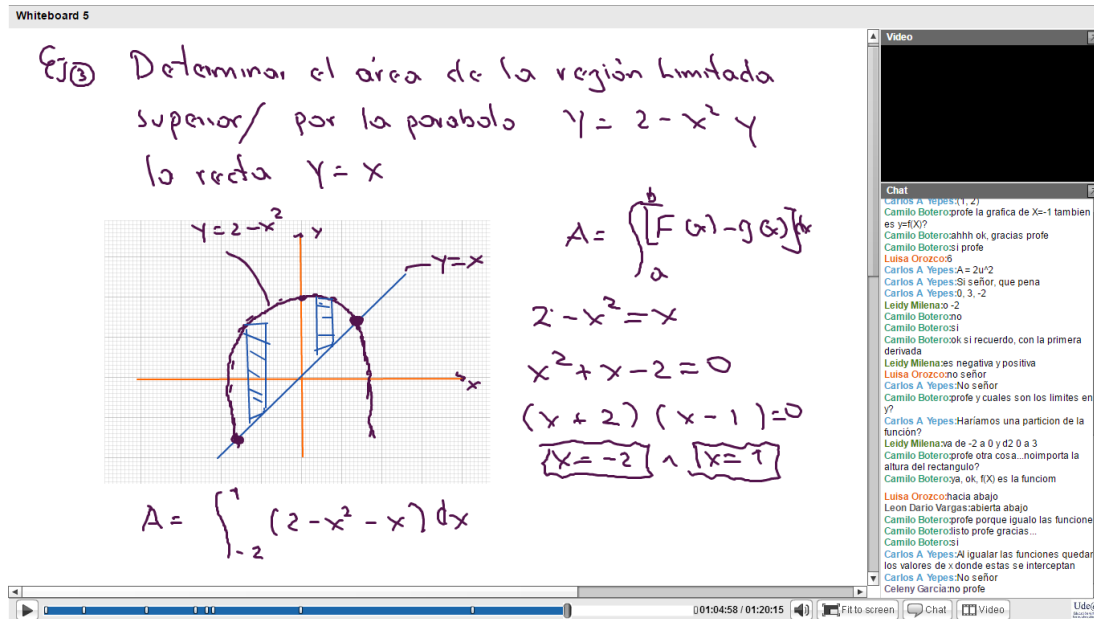


Imagen tomada de la plataforma WizIQ, ver anexo C grupo 2

La aplicación de los conocimientos matemáticos relacionados con el teorema fundamental del cálculo pudo ser observada en estas sesiones de clase, empleando principalmente el segundo teorema para calcular las integrales definidas relacionadas con problemas o ejercicios específicos para el cálculo de áreas, volúmenes o momentos y centros de masa.

Lo anterior, permite observar que la interacción del colectivo está liderada por el profesor, sin embargo, los estudiantes a través del chat interactúan con preguntas o comentarios a los interrogantes que el profesor realiza y éste modifica su discurso oral en función de las reacciones de los estudiantes para tratar de dar claridad al conocimiento abordado. Se evidencia en las grabaciones, que el profesor está atento a la interacción que realizan los estudiantes por medio del chat, lo que exige habilidades específicas para él, ya que además de manipular los medios, realizar explicaciones y modificaciones a las mismas, debe también estar atento a las diversas interacciones que ocurren en el chat.

En una de las grabaciones se pudo identificar que en el proceso evaluativo del curso, el profesor había planteado un ejercicio relacionado con la derivada de una función y otro con el área bajo una curva, en los cuales era necesario la aplicación de los conocimientos matemáticos alcanzados a lo largo del curso. Esta información no fue analizada, ya que el objeto de estudio no



está centrado en las características de la producción de conocimiento o el tipo de conocimiento producido, sino en las interacciones que realiza el colectivo de humanos–con–medios en relación a esta.

De acuerdo a lo planteado en estos tres momentos descritos anteriormente, se pueden observar diferentes interacciones por parte del colectivo relacionadas con: preguntas por parte de los estudiantes acerca del tema, ya sea por chat o verbales; revisión de los conocimientos matemáticos abordados anteriormente; solución de ejercicios por parte del profesor; preguntas del profesor sobre la comprensión de los conocimientos matemáticos; diálogo entre el colectivo para aclarar aspectos relacionados con los ejercicios o con los conceptos matemáticos involucrados en el mismo; utilización de los documentos o textos de la plataforma; entre otros descritos en esta sección.

Este conjunto de interacciones se reconocen como un *proceso de interacción* que permitió en este caso la producción de los conocimientos matemáticos relacionados con el teorema fundamental del cálculo, el planeamiento de ejercicios y la solución de los mismos por parte del profesor con la explicación o aclaración de dudas a los estudiantes y fue una regularidad en este proceso.

El análisis de estos datos a través de los procedimientos de codificación descritos en el capítulo 3, permitirá establecer regularidades en las interacciones observadas y reconocer otros procesos de interacción que conllevan también a producir conocimiento matemático. El análisis de éstas, puede reflejar diferentes maneras de llegar a producir conocimientos en el contexto de la educación a distancia virtual o también, identificar características que permitan mejorar las mismas. De igual manera, el análisis de esta información permitirá ir refinando y contrastando los datos para establecer conclusiones derivadas del estudio y contribuir a dar respuesta a la pregunta de investigación. A continuación se realiza el proceso de codificación empleado.



## 4.2. Proceso de categorización de las interacciones

A partir del método investigativo seleccionado presentado en el capítulo 3, la codificación es un proceso analítico que comienza con las primeras observaciones de los datos, de tal manera que se puedan fragmentar para ser estudiadas a profundidad y comprender sus características constituidas en propiedades y dimensiones. Luego de haber realizado una descripción de los datos observados, a continuación se muestra el proceso de codificación realizado, teniendo en cuenta los datos del curso de cálculo integral de Ude@ y lo planteado a partir del método investigativo de la teoría fundamentada.

### 4.2.1. Interacciones asociadas a la producción del teorema fundamental del cálculo

Retomando que una interacción es concebida como una acción que se ejerce recíprocamente entre dos o más objetos, agentes, fuerzas, funciones, etc. y que, en esta codificación abierta se analizan los datos para tratar de establecer categorías teniendo en cuenta sus propiedades y dimensiones, a continuación se desarrollan estos aspectos basados en las observaciones realizadas y descritas anteriormente.

De acuerdo con los datos observados, son innumerables las acciones (interacciones) que se realizaron en el curso de cálculo integral, por lo tanto, con el propósito de especificar cada una de ellas y lograr un análisis coherente de la respectiva codificación, se presenta una lista de las acciones que durante el desarrollo de las sesiones de clase, pudieron ser identificadas como interacciones realizadas por el colectivo de humanos–con–medios y que se consideran que están relacionadas con la producción de conocimiento asociado al teorema fundamental del cálculo.

- Ingresar a la sesión de WizIQ
- Escribir en el chat en WizIQ
- Presentar video en WizIQ
- Preguntar al profesor
- Ingresar a la plataforma Moodle
- Realizar preguntas escritas en chat
- Realizar preguntas orales
- Responder al profesor de manera escrita



- Lectura de definiciones o propiedades matemáticas
- Escribir en la pizarra de WizIQ
- Compartir escritorio en WizIQ
- Utilizar las herramientas de dibujo de WizIQ
- Adjuntar un documento en la sesión de WizIQ
- Leer uno de los módulos del texto guía
- Diálogo entre estudiantes
- Diálogo con el profesor
- Enviar un mensaje a través de un foro en Moodle
- Proponer otros espacios para la interacción
- Descargar documentos de la plataforma Moodle
- Responder al profesor de manera oral
- Realizar una pregunta de manera oral
- Publicar información (sitios web, documentos, etc.) en un foro en Moodle
- Señalar en la pizarra, para hacer énfasis en algún aspecto relacionado con el conocimiento en discusión
- Compartir enlaces de videos en el chat
- Adjuntar documentos WizIQ para el desarrollo de la sesión
- Envío de mensajes a través de correo electrónico
- Escribir en el chat de manera previa a la clase
- Publicar un video en la plataforma WizIQ

Dado lo anterior, se puede identificar que una característica indiscutible en este tipo de ambientes, es la interacción que realiza el colectivo con las diferentes herramientas tecnológicas involucradas en el desarrollo del curso, entre ellas están principalmente, las relacionadas con las plataformas WizIQ y Moodle, en las cuales por su naturaleza de ambientes virtuales, se constituyen en una regularidad que puede establecerse como una categoría, la cual en este estudio se denominará *interacción con tecnología*.

Se considera que hacen parte de esta categoría las diferentes interacciones involucradas en la manipulación o utilización de herramientas tecnológicas propias de Ude@ u otras que emergieron durante las observaciones realizadas a los datos, entre ellas se pueden reconocer: el acceso a las plataformas, la escritura en chat o foros, la descarga de archivos o documentos, la



publicación y visualización de videos, el compartir el escritorio, la escritura y manejo de herramientas en la pizarra, la comunicación a través de otros medios, entre otras.

En esta categoría, se pueden reconocer diferentes subcategorías de acuerdo con las interacciones que se realizaron en el desarrollo del curso de cálculo integral, entre ellas, se puede mencionar por ejemplo que, el uso de herramientas de video, audio, chat, pizarra, compartir escritorio y publicar documentos, hacen parte de una subcategoría de *interacción con WizIQ*, cada una de ellas evidenciadas en las observaciones realizadas y descritas en este capítulo.

Se considera que las variaciones de esta categoría, es decir, las dimensiones, están relacionadas con la frecuencia y la cantidad de herramientas tecnológicas utilizadas, por ejemplo, en algunos casos el colectivo interactuaba solo con una herramienta tecnológica, el chat, en otras ocasiones, las interacciones se realizaban con varias herramientas de manera simultánea, la pizarra y el chat, generando un fenómeno *multi-interactivo* en diferentes direcciones en el desarrollo de las sesiones de clase.

Otro tipo de característica identificada en las interacciones, está relacionada con los recursos que contienen conocimientos matemáticos, es decir, las fuentes de información utilizadas para plantear conceptos, definiciones, propiedades y demás aspectos matemáticos correspondientes con el curso de cálculo. En este caso, se pueden reconocer las interacciones relacionadas con los módulos del texto guía del curso, los videos específicos y los demás textos utilizados para plantear los conocimientos matemáticos. Este fenómeno de interacción descrito se denomina como una categoría de *interacción con recursos matemáticos*.

Es de resaltar que no todos los conocimientos matemáticos presentados en el curso relacionados con el teorema fundamental del cálculo y conceptos asociados, provenían de estas fuentes, en algunos casos se pudo notar que las definiciones eran propuestas por el profesor, de acuerdo con sus conocimientos y experiencias, interacción que está relacionada con la producción de conocimiento pero no presenta esta característica de interaccionar con textos, documentos u otras fuentes.



Las dimensiones de esta categoría están relacionadas con los diferentes tipos de fuentes en las cuales podemos encontrar definiciones, conceptos, propiedades y conocimientos matemáticos, entre ellas se pueden mencionar las utilizadas en el curso de cálculo integral de Ude@, los videos, los módulos del texto guía y los enlaces a otros sitios Web.

De manera específica, los módulos se emplearon como una fuente de información particular, que en la mayoría de las sesiones, fueron motivo de discusión y análisis relacionados con los conocimientos matemáticos correspondientes con la clase, en este sentido, se puede plantear la *interacción con módulos* como una subcategoría al igual que la *interacción con videos*. Aunque estas subcategorías presentan características pertenecientes a la categoría de interacción con tecnología, el análisis de sus propiedades y la relación entre las mismas, serán analizadas en la codificación axial.

De otro lado, se identificaron otro tipo de interacciones de diferente naturaleza, centradas en la comunicación que se estableció entre los diferentes miembros del colectivo. Las características de estas interacciones se asocian a los diálogos que se generaron entre profesor y estudiantes y entre los mismos, reconociendo categorías denominadas en este estudio, *interacción con el profesor* e *interacción entre estudiantes*. La primera, fue más frecuente durante el desarrollo del curso, la cual se caracterizaba por los diálogos que generaba el profesor a través de la oralidad, y los estudiantes se comunicaban por medio del chat, generando una manera de interactuar y comunicarse a través de los diferentes medios de Ude@.

Teniendo en cuenta lo observado en el curso de cálculo, la comunicación entre el profesor y los estudiantes es una interacción fundamental relacionada con la producción de conocimiento, ya que sin ella, no se pueden establecer en este tipo de ambientes de Ude@ explicaciones, diálogos o discusiones en torno a los conceptos o propiedades matemáticas abordadas. En una clase en la cual el profesor ingresó a la sesión de WIZIQ y manifestó que por dificultades de salud no podía estar, se evidenció que los estudiantes no desarrollaron diálogos o discusiones relacionadas con el tema correspondiente a esa sesión, situación que pudo haberse realizado, dadas las posibilidades que los medios de Ude@ permiten.



Durante el desarrollo del curso, este tipo de interacción se realizaba de diferentes maneras, en algunos casos los estudiantes daban respuesta a las preguntas que realizaba el profesor, en otros, los estudiantes realizaban las preguntas a las cuales el profesor respondía de manera directa. Una variación particular de este fenómeno, eran los diálogos prolongados que se daban en algunas clases entre los estudiantes y el profesor en relación con un ejercicio o problema; en ellas, se daba una mayor participación y la comunicación era multidireccional, de esta manera se pueden contemplar diferentes dimensiones a las propiedades correspondientes con esta categoría.

Teniendo en cuenta los mensajes en el chat, un acontecimiento observado durante algunas sesiones de clase, fue la interacción de comunicación entre estudiantes, de manera especial, en algunas ocasiones, ellos buscaban otros mecanismos de comunicación empleando herramientas tecnológicas diferentes a WizIQ o Moodle; se pudo identificar por ejemplo que empleaban Skype, una herramienta de comunicación que permite hacer llamadas y videollamadas a través del computador o de un SmartPhone. Estas interacciones hacen parte de la categoría, denominada *interacción entre estudiantes*.

Como parte de las variaciones en esta categoría, se identifica que algunos estudiantes se reunían con otro u otros compañeros, en algunos casos conformando subgrupos de estudiantes que interactuaban empleando otros medios o herramientas tecnológicas diferentes a las de Ude@ como Skype o telefonía.

De acuerdo con los registros analizados en las grabaciones de WizIQ y Moodle, no fue posible hacer seguimiento u observaciones a este tipo de interacciones ya que se empleaban medios diferentes a los de Ude@, pero se considera que hacen parte importante del fenómeno estudiado, ya que en algunas sesiones, los estudiantes hacían mención de estos encuentros e interacciones entre ellos, con el propósito de preparar las evaluaciones de los conocimientos matemáticos del curso.

De manera general, en este proceso de codificación abierta, a partir de los datos observados, se puede afirmar que la interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas a distancia virtual, está contemplado en las siguientes categorías:



interacción con tecnología, interacción con recursos matemáticos, interacción con el profesor, y por último, interacción entre estudiantes; estos nombres de las categorías son acotados por el investigador para describir o representar de manera abstracta en un término el fenómeno estudiado, teniendo en cuenta las características, similitudes o diferencias que las constituyen como conceptos.

Estas categorías se constituyen en los primeros planteamientos teóricos relacionados con el objeto de estudio, las cuales pretenden ser refinadas y consolidadas de acuerdo a los otros procesos de codificación correspondientes con la teoría fundamentada.

#### **4.2.2. Relaciones entre las interacciones**

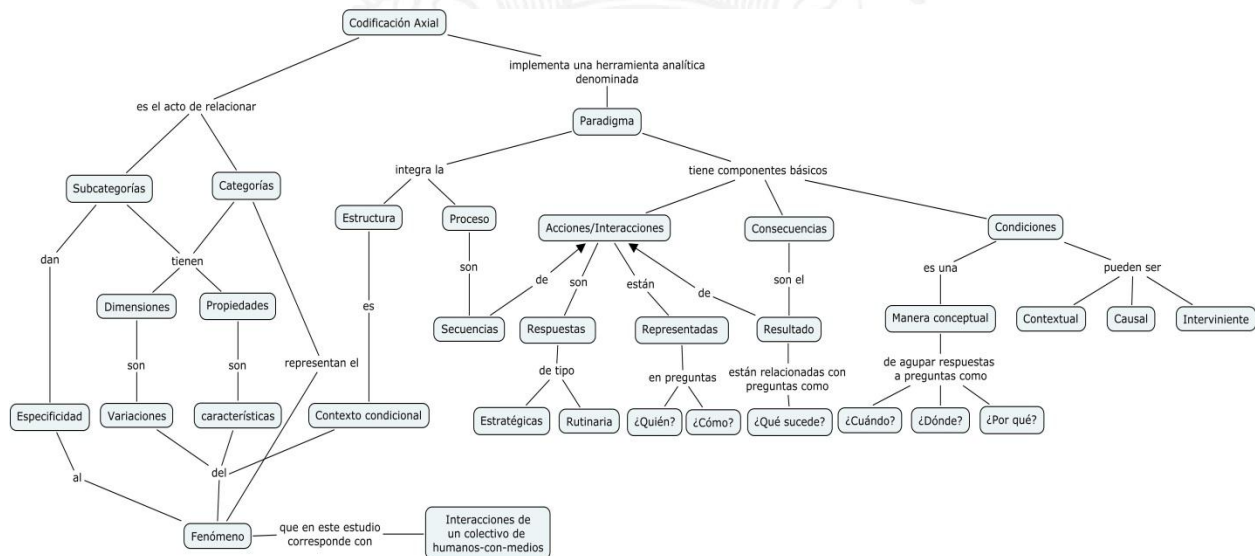
Durante el proceso de codificación abierta, se identificaron inicialmente unas categorías que emergieron del proceso de observación y descripción de los datos, de acuerdo a la descomposición del fenómeno de interacción y teniendo en cuenta características, similitudes o diferencias. En esta sección, el proceso de codificación axial, tal como se ha planteado en el capítulo 3, busca establecer relaciones entre dichas categorías para tratar de explicar con mayor precisión la manera cómo interactúa un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas en educación a distancia virtual.

Tal como fue planteado en el capítulo 3, este método investigativo permite hacer uso de diagramas, esquemas o mapas para facilitar el proceso de análisis, es por esto que durante el proceso de codificación se elaboraron algunos de ellos como una herramienta que facilitara en ésta, el establecimiento de relaciones entre las categorías y subcategorías basados en sus propiedades y dimensiones, por lo tanto, durante la descripción de este proceso analítico, se presentarán algunos diagramas, esquemas o mapas conceptuales para ilustrar las relaciones identificadas y construidas.

Para comenzar con el desarrollo de la herramienta analítica del paradigma, los datos observados y desfragmentados comienzan a ser agrupados teniendo en cuenta relaciones significativas entre las categorías identificadas en la codificación abierta y las propiedades y



dimensiones alrededor de un eje central. De manera general, este proceso de codificación axial se resume en el siguiente mapa, el cual se resalta el fenómeno de *la interacción* de un colectivo de humanos-con-medios y, teniendo en cuenta como eje central, aquellas interacciones que están relacionadas con la producción de conocimiento matemático.



Mapa conceptual construido por el investigador para ilustrar la codificación axial

Para establecer relaciones entre las categorías o subcategorías, es necesario revisar detalladamente, las características, variaciones y especificidades correspondientes a las propiedades y dimensiones de las mismas, tratando de identificar aquellos aspectos que hacen que estén vinculadas entre sí, en relación con lo planteado en el procedimiento de codificación abierta.

Teniendo en cuenta lo analizado, se organizaron las diferentes interacciones por las categorías planteadas, basados en las propiedades que corresponden a cada una de ellas, aunque este proceso se inició en la codificación abierta, se continuó realizando una revisión constante de dichas características, buscando coherencia y evitando contradicciones en los planteamientos realizados. En la siguiente imagen se muestra la manera como se realizó esta agrupación, presentando algunas de las interacciones identificadas en los datos y su clasificación en la categoría respectiva.



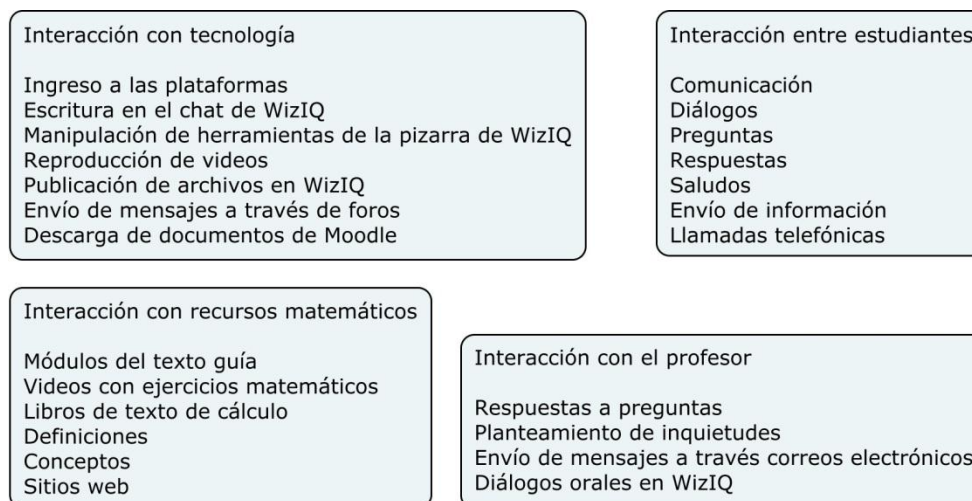


Diagrama para agrupar las interacciones de acuerdo a sus categorías, construido por el investigador

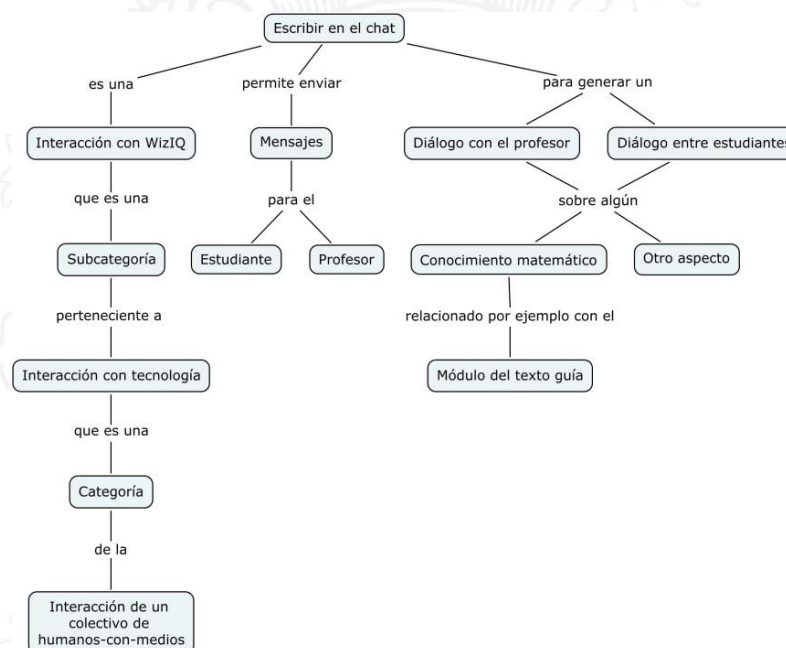
Retomando que las *interacciones con tecnología* son aquellas que están relacionadas con el uso, manipulación o utilización de herramientas tecnológicas, principalmente las que corresponden con Ude@, se analizó esta propiedad y se revisó continuamente en contraste con los datos observados, identificando que existían unas subcategorías que de manera específica ocurrían en el desarrollo de las clases. Entre ellas ya se había mencionado que las interacciones con las herramientas propias de la plataforma WizIQ, conformaban una subcategoría, ya que tenían una naturaleza diferente a la interacción que se realizaba con los foros en Moodle o a través de otro software como Skype.

Como una de las características importantes en esta categoría, interacciones con tecnología, se contemplan aquellas acciones que están asociadas a los diferentes sucesos o acontecimientos que ocurren en las plataformas durante el desarrollo del curso de cálculo. Por ejemplo, de los datos observados, estas acciones corresponden con: la escritura en el chat; el ingreso a las plataformas; la manipulación de herramientas de la pizarra de WizIQ; la reproducción de videos; la publicación de archivos en WizIQ; el envío de mensajes a través de foros; las descarga de documentos de Moodle; entre otras que tengan la misma naturaleza.

Cada una de las interacciones, cumple con dicha propiedad de la categoría y se identifica que está relacionada con otras categorías, por ejemplo, la escritura en el chat además de ser una *interacción con WizIQ*, es una interacción que permite establecer una comunicación ya sea con el



profesor o con otro estudiante, es decir, permite establecer una *interacción con el profesor* o una *interacción entre estudiantes*, lo cual hace que tenga una relación entre categorías y le dé sentido a la manera cómo se interactúa para la producción de conocimiento. Como técnica de sistematización de la información, se ilustra este ejemplo a través del siguiente mapa conceptual.



Mapa conceptual que describe la interacción-en-el-chat, construido por el investigador

Recordamos que en la codificación axial se pretende integrar la estructura con el proceso para tratar de comprender en este estudio, el por qué y el cómo ocurre el fenómeno de la interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas. Para esto, es necesario diferenciar aquellas condiciones, acciones y consecuencias que hacen parte de este fenómeno. En este sentido como parte de las *condiciones* (apartado 3.2.1.2), se identificó que en la categoría de interacción con tecnología, las herramientas tecnológicas como el chat, generan *condiciones causales* para el desarrollo de las interacciones del colectivo; además, que las posibilidades de hacer preguntas relacionadas con un conocimiento matemático específico, se constituyen en *condiciones intervinientes* que permiten generar *acciones* para el desarrollo de las interacciones relacionadas que conlleven como *consecuencia* a la producción de conocimiento matemático.



De acuerdo con lo anterior, la manera conjunta en que se desarrolla este fenómeno de interacción del colectivo en el curso de cálculo integral, se constituyen en *condiciones contextuales* que permiten la manera cómo estas interacciones conllevan a una producción de conocimiento matemático o no.

La interacción de escribir en el chat, fue una de las más frecuentes en el desarrollo del curso además de la oralidad, la cual permitió establecer diálogos entre el colectivo de humanos, entre ellos los relacionados con la producción de conocimiento matemático. Por ejemplo, al analizar una situación que involucra este tipo de interacción en términos de sus condiciones, acciones y consecuencias, se retoma una situación descrita en la sección 4.2.3 en la cual, el profesor presenta un ejercicio para calcular el área bajo una curva (condición causal) y los estudiantes escribían en el chat comentarios relacionados con las preguntas que realizaba el profesor o inquietudes sobre el planteamiento del ejercicio (acciones); estas circunstancias generaban en el mismo chat, la escritura de respuestas que explicitaban los resultados del desarrollo de este ejercicio y al mismo tiempo evidenciaban que se generaba una producción de conocimiento relacionada con el teorema fundamental del cálculo (consecuencia).

De igual manera, se realizaron estos análisis con otras interacciones para establecer relaciones entre las categorías y subcategorías, en las cuales se pudo observar que algunas interacciones no estaban relacionadas con la producción de conocimiento matemático, específicamente el asociado al teorema fundamental del cálculo.

Como un ejemplo de estas condiciones contextuales se plantea, de acuerdo con lo descrito en la sección 4.2, una situación relacionada con una interacción en el chat que al parecer no estaba asociada con la producción de conocimiento; al analizar esta situación a la luz de sus condiciones, se puede establecer que basados en esta condición causal de escribir en el chat, la acción de realizar un comentario por un estudiante, no correspondía con el conocimiento matemático en discusión, es decir, con la consecuencia; además, esta acción no estaba relacionada con una pregunta hacia el profesor u otros estudiantes, lo que generó una distracción para el colectivo de humanos y otras interacciones aisladas de las explicaciones que se desarrollaban en ese momento, es decir, consecuencias diferentes.



La interacción de escribir en el chat puede tener diferente naturaleza, pero se ha identificado que ésta depende de la intencionalidad con que se realiza, es decir, un estudiante puede escribir en el chat para: responder una pregunta específica del profesor; realizar un comentario relacionado con la comprensión de un tema o ejercicio abordado en la clase; solicitar al profesor que muestre un ejercicio realizado en la pizarra con anterioridad en la clase; manifestar alguna dificultad técnica con el uso de los medios, entre otras.

Dichas intencionalidades son interpretadas como acciones que modifican el fenómeno de interacción en el chat, y por lo tanto, el desarrollo de la clase y la manera cómo se produce el conocimiento matemático. En el siguiente diagrama, se puede observar un ejemplo de interacción en el chat y su relación con las demás categorías.

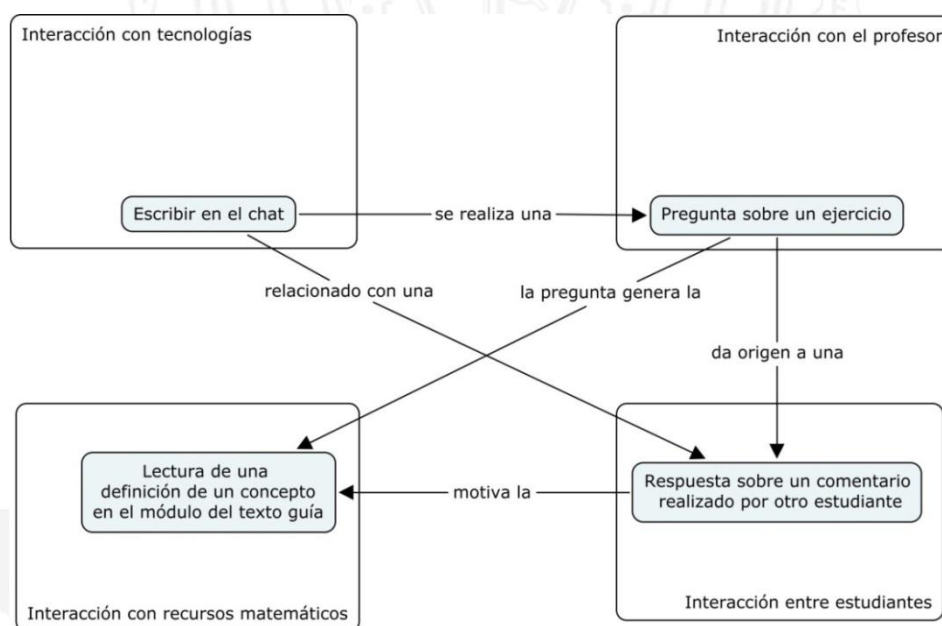


Diagrama construido por el investigador para relacionar las interacciones entre las categorías

El anterior diagrama y la herramienta analítica del paradigma, permitió comprender que este tipo de interacción tiene un significado que va mucho más allá de ser una simple escritura en el chat, además, que el motivo por el cual se interactúe con este medio, permite tener consecuencias diferenciadas relacionadas con la producción de conocimiento matemático. Aunque las grabaciones no permiten identificar o conocer si los miembros del colectivo de



humanos conocían los efectos de sus interacciones, este estudio resalta como un resultado preliminar que, si centran su atención en la manera cómo interactúan, podrán modificar las consecuencias de sus interacciones, especialmente direccionadas a una producción de conocimiento.

Empleando el mismo procedimiento analítico, se presenta otro ejemplo de los análisis realizados en esta codificación axial, relacionado específicamente con el momento el cual se aborda el teorema fundamental del cálculo descrito en la sección 4.2.2. En esta sesión de clase, el profesor realiza explicaciones de este conocimiento de manera oral, haciendo uso de las herramientas de WizIQ, tales como el lápiz y el señalador, así como también del módulo 16 que contiene los conocimientos relacionados con el teorema, definiciones, ejemplos y ejercicios. Es importante anotar que además, se apoya en videos para presentar algunos ejemplos relacionados con este conocimiento matemático.

Durante estas interacciones, los estudiantes manifiestan algunas preguntas relacionadas con estos conocimientos matemáticos y las propiedades de la integral definida; para ellos en la interacción con el profesor, se realizan explicaciones apoyadas en el módulo, la escritura en la pizarra y la oralidad, las cuales generan un diálogo que permite discutir propiedades del teorema así como también, el desarrollo de algunos ejercicios con el propósito de evidenciar la producción de este conocimiento.

Para realizar el análisis correspondiente de las interacciones realizadas por el colectivo de humanos–con–medios en el momento de abordar el teorema fundamental del cálculo, inicialmente se diseñó el siguiente diagrama, de tal manera que permitiera colocar estas interacciones realizadas y establecer relaciones entre las mismas.



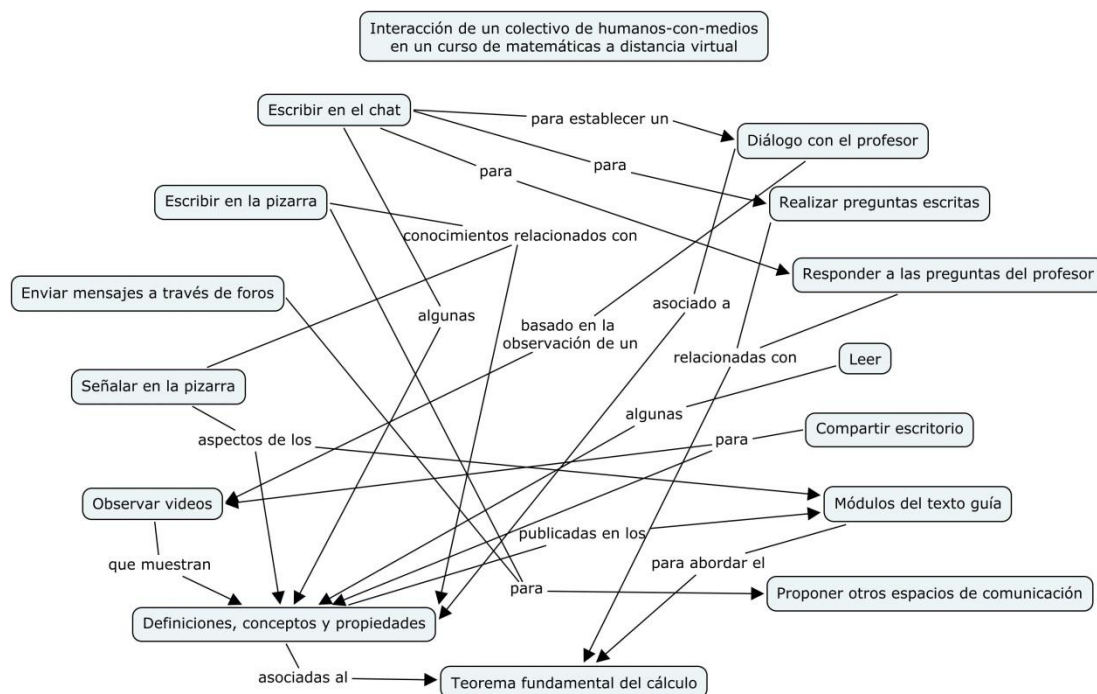


Diagrama construido por el investigador para ilustrar las relaciones establecidas en la codificación axial

El anterior diagrama evidencia una multiplicidad de conexiones entre las interacciones, de acuerdo con las características de la estructura y el proceso de las mismas desarrollado durante la sesión de clase. Para evitar la saturación de datos y relaciones en el diagrama y para efectos de la presentación del análisis y el establecimiento de relaciones entre las categorías, a continuación se describe el proceso analítico realizado con una parte de estas interacciones, teniendo en cuenta los componentes del paradigma empleados en esta codificación axial.

Nuevamente realizando un análisis teniendo en cuenta las condiciones, acciones y consecuencias de este acontecimiento, se puede identificar que: las interacciones de escribir en la pizarra y señalar en la misma (condiciones), corresponden con la subcategoría de interacción con WizIQ, perteneciente a la categoría de interacción con tecnología; además, que las interacciones que realiza el profesor en estos medios están centradas en la oralidad (explicaciones que realiza de manera verbal) apoyadas también en el módulo 16 (acciones) que corresponde con la categoría de interacción con recursos matemáticos. En este sentido, se puede apreciar que esta situación entrelaza diferentes categorías y subcategorías, las cuales pueden observarse en el siguiente diagrama.



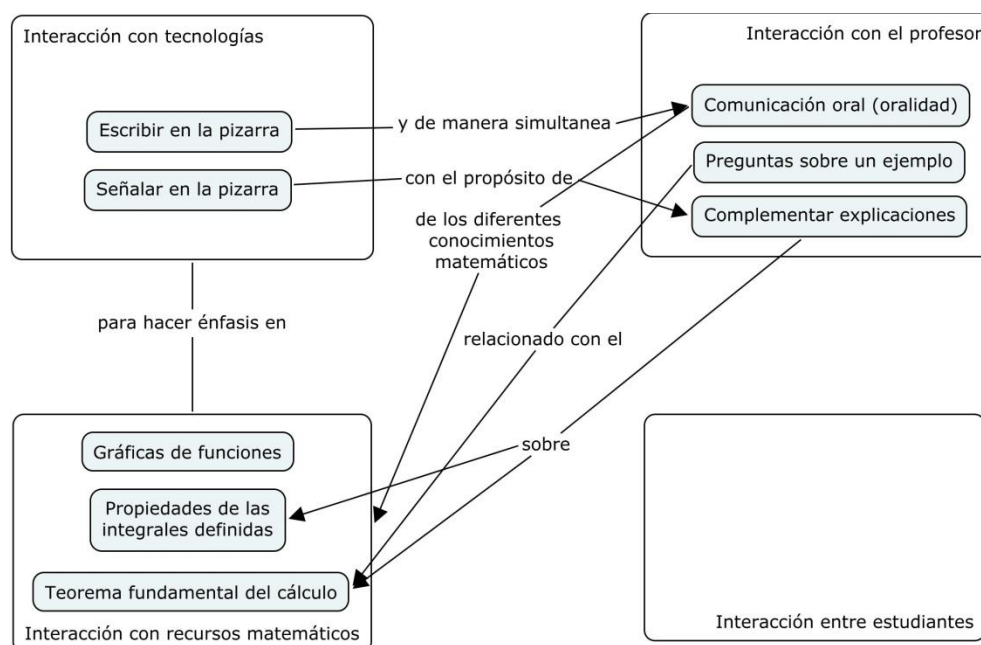


Diagrama construido por el investigador para facilitar el proceso de codificación axial

De igual manera que en el ejemplo anterior, se puede reconocer que una interacción puede generar situaciones que conllevan a diferentes consecuencias. Se puede notar en el diagrama, que en el momento de abordar el teorema fundamental del cálculo, no se identificaron *interacciones entre estudiantes*, sólo se establecían *interacciones con el profesor*, quien realizaba las explicaciones e *interacciones con los recursos matemáticos* para abordar este conocimiento. Así mismo, se puede identificar que una interacción puede establecer relaciones entre otras de diferente categoría o subcategoría, y al mismo tiempo, trazar una ruta metodológica condicionada por las características de éstas.

A partir de estos análisis y en la medida que se describen en detalle las interacciones, sus condiciones, acciones y consecuencias, se evidencia una multiplicidad de relaciones entre las propiedades y dimensiones de las mismas, lo que hace pensar que, tal como se había mencionado en el capítulo 2, la interacción en un curso de matemáticas a distancia virtual, es un asunto complejo que involucra multiplicidad de acciones e interrelaciones entre los actores del colectivo de humanos–con–medios.



Como uno de los resultados de esta codificación axial, se puede resaltar que teniendo en cuenta las condiciones con que se realiza la interacción y específicamente la intencionalidad de la misma, se modifica la consecuencia, que en este estudio está relacionada con la producción de conocimiento matemático.

Dicho de otro modo, comprender las condiciones, acciones y consecuencias, propias de la estructura y el proceso, que hacen parte del fenómeno de la interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas, ayuda a esclarecer la manera cómo ocurre dicho fenómeno y a establecer relaciones entre las propiedades y dimensiones de las diferentes categorías identificadas, reconociendo que algunas interacciones tienen múltiples consecuencias, además, que contribuye a dar un significado a los datos.

Las categorías identificadas inicialmente en la codificación abierta, fueron revisadas a través de la herramienta analítica del paradigma en esta codificación axial, estableciendo relaciones significativas y consolidando dichas categorías como aquellas que describen el fenómeno de la interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de matemáticas a distancia virtual. Los resultados de esta última codificación, serán refinados en el siguiente procedimiento analítico denominado codificación selectiva.

#### **4.2.3. Refinamiento de la teoría de la interacción**

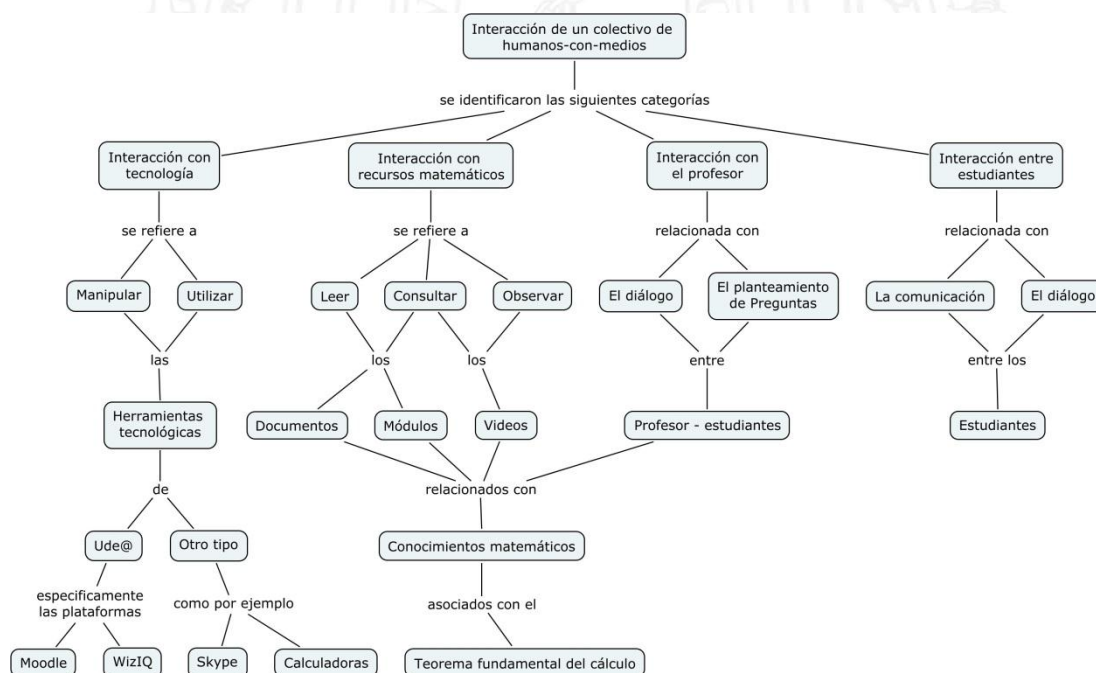
El proceso analítico en la codificación axial, ha permitido establecer relaciones entre las categorías y subcategorías y comprender en este fenómeno, algunos aspectos que permiten que las interacciones conlleven a la producción de conocimiento matemático. Por su parte, en la codificación selectiva, el proceso de análisis tiene el propósito de refinar la teoría construida y verificar si aquellas relaciones establecidas carecen de ambigüedades o contradicciones, tal como se presentó en el capítulo 3.

En esta codificación selectiva, la revisión de las categorías y subcategorías planteadas anteriormente y la organización de las mismas en un esquema teórico, son herramientas analíticas que se desarrollan durante este proceso de codificación. En este sentido, tal como se ha



planteado en el capítulo 3, se implementan la elaboración de diagramas y mapas conceptuales como estrategias para integrar los conceptos y refinar la teoría construida durante el proceso de codificación realizado hasta el momento.

Como parte del proceso de teorización, en esta codificación selectiva, se realiza una revisión de las relaciones establecidas entre las categorías, buscando un significado, sentido y coherencia a las mismas, teniendo en cuenta los datos analizados en las codificaciones anteriores. El siguiente mapa, muestra el fenómeno estudiado y la relación significativa de conceptos que se establecen teniendo en cuenta las propiedades y dimensiones de cada categoría identificada durante el proceso de codificación abierta y axial, abordada en este estudio.



Mapa conceptual que ilustra las categorías de la interacción, construido por el investigador

El mapa conceptual anterior, retoma las relaciones más significativas derivadas del proceso de codificación; aunque se puede observar que este no contempla todos los conceptos o relaciones identificadas en las codificaciones anteriores, se hace con el propósito de evitar la saturación descrita en el capítulo 3, planteada a partir de la teoría fundamentada.



Como parte del proceso de codificación selectiva, se realiza una revisión de las propiedades y dimensiones pertenecientes a cada categoría y subcategoría identificadas durante la codificación abierta y axial, para establecer una coherencia y consolidar un esquema teórico. Ya se había mencionado la importancia de emplear diagramas, mapas o esquemas para facilitar el proceso de construcción de la teoría; en este estudio, se considera que los mapas conceptuales por su naturaleza, son una herramienta propicia para establecer relaciones significativas entre los conceptos y poder así, diseñar un esquema teórico que dé cuenta del fenómeno estudiado y además, dé respuesta a la pregunta de investigación. El siguiente mapa muestra un esquema teórico construido en esta codificación selectiva para establecer relaciones entre las características de las categorías y sus subcategorías.



Mapa conceptual que presenta de manera general la teoría de la interacción

En el primer nivel de conceptos, se encuentran las categorías del fenómeno estudiado, en un segundo nivel, se relacionan algunas de las subcategorías identificadas en los datos, por último se encuentran manifestaciones de estas subcategorías, tratando de ejemplificar la interacción, el medio o la acción relacionada durante el desarrollo de las clases de cálculo integral, específicamente las relacionadas con la producción de conocimiento matemático asociado al teorema fundamental del cálculo.

De acuerdo con los planteamientos realizados en el capítulo 3 sobre la teoría fundamentada, para dar validez a estos esquemas teóricos, se pueden emplear procesos comparativos con los datos brutos, haciendo una revisión de las relaciones significativas establecidas y su correspondencia con las características del fenómeno estudiado. En este



sentido, las categorías y subcategorías planteadas en el esquema teórico anterior son comparadas con una situación del curso de cálculo integral, analizando si estas relaciones corresponden con el fenómeno de la interacción.

En este método investigativo de teoría fundamentada, es posible dar validez al esquema teórico evaluando los hallazgos y revisando la coherencia del mismo a través de ciertos criterios, que pueden ser planteados a través de preguntas tales como: ¿Las categorías principales responden a características diferentes del fenómeno? ¿Los conceptos propuestos están interrelacionados sistemáticamente? ¿Hay variación dentro del esquema teórico? ¿Las categorías agrupan particularidades del fenómeno basadas en sus propiedades y dimensiones? ¿Cualquier manifestación del fenómeno está relacionada con las categorías propuestas?.

Para realizar un proceso de validación del esquema teórico teniendo en cuenta las preguntas planteadas anteriormente, es necesario verificar y contrastar dicho esquema con los datos, y así, refinar la teoría en términos de sus propiedades y dimensiones. Cuando se indaga por *¿Las categorías principales responden a características diferentes del fenómeno?*, podemos realizar un proceso comparativo entre las categorías, centrando la atención en las características que las diferencian.

Al respecto, la interacción con tecnologías está relacionada con aquellas acciones que involucran la manipulación de herramientas tecnológicas; por su parte, la interacción con recursos matemáticos centra su atención en las acciones que se establecen con materiales que contienen conceptos, definiciones o propiedades matemáticas; las interacciones con el profesor, también son de diferente naturaleza, ya que aborda los procesos comunicativos que se realizan con él; por último, la interacción entre estudiantes se caracteriza por aquellos diálogos que se establecen entre ellos. Esta comparación, muestra que este primer criterio resalta que las categorías agrupan características diferentes del fenómeno, abordando las maneras en cómo un colectivo de humanos–con–medios interactúa en relación con la producción de conocimiento matemático.



Los mapas conceptuales y diagramas contruidos en esta codificación selectiva, dan respuesta a la siguiente pregunta, *¿Los conceptos propuestos están interrelacionados sistemáticamente?* evidenciando que las interacciones están relacionadas con una o varias categorías y que dichas relaciones generan un entramado complejo y explicativo al fenómeno de la interacción del colectivo de humanos–con–medios.

Durante este proceso de codificación selectiva, en aras de integrar la estructura con el proceso y darle validez al esquema teórico mediante la respuesta a la pregunta *¿Cualquier manifestación del fenómeno está relacionada con las categorías?*, se evidencia que en la comparación de las categorías con los datos, éstas se encuentran relacionadas con las diferentes interacciones observadas en los primeros análisis: escribir en el chat, realizar preguntas, señalar en la pizarra, hacer lectura del módulo, entre otras, es decir, son interacciones que están asociadas a alguna o varias categorías o subcategorías.

Cuando se plantea la pregunta, *¿Hay variación dentro del esquema teórico?*, se puede notar que las interacciones observadas en los datos, son de múltiple naturaleza, las cuales en algún momento del estudio fueron denominadas complejas; en este sentido, el esquema teórico permite ubicar las interacciones en diferentes categorías o subcategorías, de acuerdo con sus propiedades y dimensiones, especialmente este último aspecto, permite afirmar que el esquema teórico propuesto incluye diferentes variaciones.

Las respuestas a estas preguntas se convierten en argumentos y criterios que permiten dar validez al esquema teórico construido, las cuales fueron planteadas teniendo en cuenta el proceso de codificación selectiva desarrollado y los procesos comparativos e integrativos de los análisis realizados durante todo el proceso de codificación.

A lo largo de este proceso de codificación, los diagramas analizados muestran una relación que le da significado a la estructura y al proceso, reflejando la manera cómo el colectivo de humanos–con–medios interactúa en relación con la producción de conocimiento matemático asociado al teorema fundamental del cálculo.



### 4.3. Teoría de la interacción para cursos de matemática virtuales

En esta sección, se presentan los resultados del análisis desarrollado en los procesos de codificación abierta, axial y selectiva, haciendo énfasis en los aspectos que se constituyen como aportes teóricos derivados de dichos resultados.

La teorización se refiere al proceso desarrollado para construir una teoría; como puede apreciarse, es una actividad compleja que implica formular un esquema lógico, sistemático y explicativo, generando una estructura conceptual interrelacionada por medio de conexiones significativas entre los conceptos, conformando explicaciones del fenómeno estudiado.

Teniendo en cuenta el método investigativo, el propósito de la teoría es establecer un marco conceptual que pueda ser usado para explicar o predecir fenómenos. De acuerdo con esta perspectiva, con los resultados de esta investigación, además de dar respuesta a la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos, se espera que puedan orientar nuevos procesos de interacción que estén direccionados a otras maneras de producir conocimiento matemático.

El análisis de los datos permitió establecer cuatro categorías que describen el fenómeno de interacción de un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral de Ude@: la interacción con tecnología, la interacción con recursos matemáticos, la interacción con el profesor y la interacción entre estudiantes; en cada una de ellas se identificaron subcategorías con las cuales se logró dar una mayor especificidad al fenómeno.

Estas categorías de *interacción* están en correspondencia con las diferentes maneras en que un colectivo de humanos–con–medios interactuó en un curso de matemáticas en educación a distancia virtual; se resalta que éstas deben tenerse en cuenta para relacionar un proceso de interacción con el conocimiento matemático producido por un colectivo de humanos–con–medios y no se descarta la posibilidad de identificar otras maneras que emerjan de acuerdo con las condiciones, acciones y consecuencias que pueden ser modificadas de acuerdo con las



intencionalidades de interacción del colectivo. A continuación, se describen algunos aspectos que caracterizan estas interacciones basados en los resultados del proceso de codificación.

**Interacción con tecnología:** esta es una manera en que los participantes de un curso de matemáticas interactúan con los diferentes medios o herramientas tecnológicas tanto del programa Ude@ (plataforma Moodle, WizIQ, correo electrónico, entre otras) como de otras que puedan utilizarse durante el desarrollo de las clases. Es decir, la interacción corresponde con las acciones de acceder, utilizar, explorar, manipular, entre otras, las cuales, en conjunto, permiten reconocer aquellos procesos que desarrollan el colectivo de humanos-con-medios relacionado con la producción de conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta las observaciones y análisis realizados durante el trabajo de campo, se puede mencionar que en el contexto del programa Ude@, la interacción con los diferentes medios genera la conformación de colectivos de: humanos-con-Moodle, humanos-con-WizIQ, humanos-con-software, humanos-con-procesadores de texto, humanos-con-chat, entre otros. Durante el desarrollo de un curso, no todos los estudiantes interactúan con los diferentes medios; aunque el estudio no alcanza a profundizar en las causas por las cuales no se realizan estas interacciones, algunos estudiantes manifiestan a través del chat que presentan problemas técnicos de acceso a los medios como por ejemplo la conectividad y, de igual manera, algunas dificultades para la interacción se pueden presentar por la falta de experiencia de los estudiantes en el manejo de los medios, por ejemplo en el envío de información o acceso a foros para la participación.

Dado lo anterior, las dificultades presentadas en esta categoría, pueden generar obstáculos en el proceso de producción de conocimiento matemático, ya que estaría limitada su interacción. Así mismo, tener un progreso en esta categoría, permitirá otras posibilidades para el aprendizaje, específicamente relacionados con el teorema fundamental del cálculo, tal como se ilustró en el capítulo 2.

**Interacción con recursos matemáticos:** se considera que las interacciones están relacionadas con la revisión, lectura, exploración, comprensión de los textos, conceptos



matemáticos o temáticas del curso de cálculo. Además, en este tipo de interacciones, el lenguaje, la comprensión, la visualización o la experimentación, son aspectos que están involucrados en esta categoría y directamente relacionados con la producción de conocimiento matemático.

La plataforma Moodle es un administrador de contenidos de aprendizaje (LMS por sus siglas en inglés, Learning Management System), en el cual, para el curso de cálculo integral se publican los módulos, guías, videos y algunos enlaces para acceder a los conocimientos matemáticos. Este medio, registra si un estudiante ingresa a cada uno de ellos, suministrando información adicional de “última visita” realizada a los enlaces. Con base en estos registros sólo se puede determinar si un estudiante accede a la información suministrada en el curso, y no, si el estudiante comprende la información. En este sentido, la interacción en este tipo de ambientes puede ser potencializada, generando espacios para la discusión, el diálogo y la colaboración entre los miembros del colectivo.

Además, la Internet ofrece muchas otras maneras de acceder al conocimiento matemático, tales como sitios Web, blog, diccionarios electrónicos, entre otros, en los cuales se pueden establecer acceso a la información relacionada con los conocimientos matemáticos, sin embargo, es necesario realizar estudios que indaguen por el uso de materiales complementarios por parte de los estudiantes, de tal manera que se pueda identificar si ellos sólo hacen uso de los medios suministrados en Ude@ o utilizan otros adicionales.

La plataforma Moodle tiene disponibles durante todo el semestre académico todos los contenidos temáticos del curso, información, documentos, libros, ejercicios resueltos, videos, entre otros y aunque el colectivo de estudiantes tiene acceso a la plataforma, no garantiza que se realicen las diferentes interacciones con los mismos, de hecho, algunos estudiantes no ingresan durante todo el semestre a dicho espacio. Por lo tanto, el estudio refleja la necesidad de realizar algunas actividades orientadas a favorecer la interacción con estos recursos de los conocimientos matemáticos, de tal manera que se generen otras condiciones y acciones que modifiquen consecuencias propicias para la producción de conocimiento matemático.



**Interacción con el profesor:** se evidencia cuando un colectivo establece procesos de comunicación con el profesor, de tal manera que se posibilite la capacidad de discutir, discernir, reflexionar, cuestionar o innovar en aspectos relacionados con los conocimientos matemáticos o con la interacción con los medios; así mismo, que se pueda hacer una revisión, aclaración o un *feedback* de las temáticas abordadas.

En esta categoría, se reconoce que los participantes establecen una interacción directa con el profesor, respondiendo a planteamientos e inquietudes empleando diferentes medios, chat, oralidad o escritura, sin embargo, dadas las observaciones de este fenómeno en el curso de cálculo integral, muchos de los participantes se abstienen de dialogar con el profesor, aspectos que se consideran que pueden limitar el proceso de interacción y, por tanto, la producción de conocimiento. Esta categoría resalta la importancia de establecer diálogos entre el profesor y los estudiantes, en los cuales se desarrollen procesos comunicativos, direccionados a la producción de conocimiento matemático empleando los diferentes medios de las plataformas de Ude@.

**Interacción entre estudiantes:** se evidencia cuando un colectivo de humanos-con-medios reflexiona, discute, revisa o establece vínculos entre sus integrantes, de tal manera que puedan generar otros espacios de trabajo colaborativo, orientados al aprendizaje de conocimientos matemáticos o al fortalecimiento en el uso de los medios.

Las interacciones ocurridas en esta categoría están relacionadas con la interacción entre estudiantes, los cuales asumen un rol participativo y colaborativo en la producción de conocimiento. Este tipo de acciones han sido evidenciadas cuando en un chat, se generan espacios de diálogo entre ellos para discutir en relación a un conocimiento matemático, buscando aclarar dudas entre ellos mismos o procurando generar otros espacios para el diálogo, la comunicación o la interacción en relación al estudio de conocimientos matemáticos asociados con el curso de cálculo.

Teniendo en cuenta estas *categorías de interacción* antes mencionadas y la combinación entre ellas, se han observado diferentes relaciones que permiten la conformación de colectivos pensantes, como por ejemplo humanos-con-WiziQ, en el cual las interacciones que ocurren al



interior de este, están directamente asociadas con la manera en que producen conocimientos. La teorización generada alrededor de este fenómeno, ha permitido caracterizar la manera en que se conforman estos colectivos y observar el proceso de interacción y su estrecha relación con la producción de conocimiento matemático.

El proceso de construir una teoría o teorizar sobre un fenómeno determinado, abordado en este método investigativo, retoma principalmente tres aspectos: una descripción, un ordenamiento conceptual y una teorización, tal como se describió en el capítulo 3. Durante este análisis, se desarrollaron estos tres aspectos relacionados con la descripción de las interacciones que realizaron un colectivo de humanos–con–medios en un curso de cálculo integral; posteriormente, estos datos fueron organizados de acuerdo a sus propiedades y dimensiones, conceptualizadas en categorías para representar características de este fenómeno, estableciendo enlaces entre ellas y, finalmente, estas concepciones son interrelacionadas de manera sistemática en un esquema teórico que explica el fenómeno estudiado.



## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Este capítulo presenta conclusiones derivadas del proceso investigativo, entre ellas se encuentran: los alcances relacionados con los objetivos propuestos en el estudio; aportes al campo de la educación matemática, teniendo en cuenta las contribuciones teóricas que emergieron en el proceso analítico; algunas reflexiones del proceso investigativo relacionadas con los cursos de matemáticas que se desarrollan en educación a distancia virtual; y por último, algunas consideraciones asociadas con las potencialidades de la teoría de la interacción en educación a distancia virtual, especialmente las correspondientes al proceso de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos en cursos similares al contexto de Ude@.

### 5.1. Consecución de los objetivos

En esta sección se presentan consideraciones basadas en los resultados y la experiencia investigativa desarrollada durante la ejecución de este estudio, relacionadas con el alcance de los objetivos inicialmente planteados.

El método investigativo seleccionado, permitió desarrollar un procedimiento analítico para abordar el fenómeno estudiado, suministrando herramientas para el análisis de los datos, así como también, tratamientos para la codificación, sistematización y validación del mismo. Se considera que la teoría fundamentada, facilitó el análisis de las interacciones de un colectivo de humanos-con-medios, permitiendo construir un esquema teórico explicativo, en relación con este fenómeno y con la manera cómo se desarrolló el curso de cálculo integral de Ude@.

Para el alcance del primer objetivo específico, *describir características relacionadas con la interacción en un curso de matemáticas de educación a distancia virtual*, se seleccionó un curso de cálculo integral de Ude@, en el cual, se observaron y describieron las interacciones que ocurrían en este curso, teniendo en cuenta los aspectos del procedimiento de codificación abierta



descrito en el capítulo 4, lo que permitió descomponer (en términos de la teoría fundamentada) el fenómeno de la interacción de un colectivo de humanos-con-medios, de acuerdo a sus características, similitudes o diferencias, reconociendo en estos aspectos, interacciones de diferente naturaleza para identificar unas categorías iniciales. Posteriormente, continuando con el proceso de codificación, estas categorías iniciales fueron refinadas de acuerdo a sus propiedades y dimensiones, logrando identificar cuatro categorías de interacción: interacción con tecnología, interacción con recursos matemáticos, interacción con el profesor y, finalmente, interacción entre estudiantes.

Para el alcance del segundo objetivo específico, *identificar relaciones entre las categorías de la interacción asociadas a la producción de conocimiento matemático*, se desarrolló el procedimiento de codificación axial, con el propósito de establecer relaciones entre las categorías, así como también con las subcategorías, lo cual, de acuerdo con este proceso analítico, se lograron generar una cantidad de diagramas, mapas y esquemas explicativos que reflejaban las interrelaciones entre los conceptos, algunos de ellos presentados y descritos en el desarrollo de la sección 4.2.2. Considerando que las interacciones son un proceso complejo, este procedimiento de codificación permitió profundizar en el análisis de las interacciones que realiza un colectivo de humanos-con-medios, teniendo en cuenta condiciones, acciones y consecuencias y dando a conocer características de la estructura y el proceso, aspectos complejos que constituyen este fenómeno.

El tercer objetivo específico, *proponer categorías que relacionen las interacciones de un colectivo de humanos-con-medios en un curso de matemáticas virtual, para orientar la producción de conocimiento matemático*, se ha logrado con la propuesta de las categorías: Interacción con tecnología; Interacción con recursos matemáticos; Interacción con el profesor e; Interacción entre estudiantes. Dichas categorías, como se planteó en la sección 4.3, conjugan la manera como un colectivo de humanos-con-medios interactúa para producir conocimiento matemático.

Los resultados de la investigación, muestran que la interacción está inmersa en cada una de las acciones que se realizan en el desarrollo de un curso de matemáticas en educación a distancia



virtual. Continuamente ocurren acciones de diferente naturaleza entre los miembros del colectivo tanto de humanos como de no humanos, estableciendo múltiples conexiones que en su mayoría están relacionadas con la producción de conocimiento. Las categorías propuestas, son el resultado del análisis de las interacciones que responden a la pregunta de investigación *¿Cómo interactúa un colectivo de humanos–con–medios en educación a distancia virtual para producir conocimiento matemático?*

Dado lo anterior, se puede concluir que los objetivos propuestos en esta investigación fueron alcanzados y, que el análisis de las interacciones de un colectivo de humanos–con–medios fue desarrollado, descrito y explicado en el capítulo 4.

## **5.2. Aportes a la educación matemática**

El esquema teórico consolidado, permite reconocer y asociar las interacciones a las diferentes categorías y subcategorías, identificando que la intencionalidad o la manera con que se realicen (acciones), modifican el conocimiento producido. En este sentido, los resultados teóricos de este estudio, permiten cualificar a los profesores para desarrollar cursos de matemáticas en este tipo de contextos, especialmente del programa Ude@. Es decir, adquirir conocimientos que les permitan reconocer las características de la interacción y, además, a partir de estas, plantear estrategias metodológicas alternativas para direccionar y planear sus clases con el propósito de que el colectivo de humanos–con–medios pueda producir conocimientos matemáticos.

En este sentido, podría plantearse el desarrollo de un programa de formación de profesores en contextos virtuales, basados en los planteamientos teóricos correspondientes con los resultados de este estudio, de tal manera que las interacciones contribuyan directamente a la construcción de alternativas metodológicas para la formación continua y posgraduada de profesores de matemática, tanto en el aspecto disciplinar como en el pedagógico, tanto en el contexto del programa Ude@ como para otros contextos en el ámbito nacional como internacional. Es importante anotar que actualmente, esta investigación hace parte de un proyecto de cooperación internacional el cual aborda esta problemática y, en consecuencia, los resultados



de este estudio contribuyen de manera directa a la construcción de dichas alternativas (Ver anexo F), realizando aportes al campo de la educación matemática.

De otro lado, las categorías de las interacciones descritas, están articuladas y en correspondencia con los planteamientos teóricos del constructo humanos–con–medios, ya que se considera que amplían y describen una mirada de la interacción en el contexto de la educación a distancia virtual. Este estudio refleja la importancia de la interacción y su estrecha relación con la producción de conocimiento matemático, es por esto que centró sus esfuerzos en teorizar y argumentar sobre las características de este fenómeno.

La interacción es un aspecto importante para los cursos de matemáticas que se realizan en educación a distancia virtual, pero establecer dichos procesos en relación con la producción de conocimiento matemático, es esencial para los propósitos de formación de estudiantes en esta área y en este contexto educativo. Este estudio estuvo centrado en observar la manera como interactuaba un colectivo de humanos–con–medios, teniendo en cuenta los planteamientos expuestos en la sección 2.5.3 relacionados con el teorema fundamental del cálculo, mostrando la manera como se pueden propiciar interacciones que estén articuladas a dicho conocimiento. Este proceso de observación permite generar alternativas para orientar interacciones que estén relacionadas intencionalmente con la producción del conocimiento.

Dicho de otro modo, las condiciones en las cuales se pueden desarrollar interacciones y la manera cómo son realizadas, permiten direccionar la producción de conocimiento matemático, que en el caso del teorema fundamental del cálculo, aborda tanto las relaciones geométricas y variacionales que establece el teorema, como los significados que subyacen a las propiedades del mismo. En este sentido, se puede concluir que estos resultados no solo aplican para el teorema fundamental del cálculo, sino que se pueden extender a otros conocimientos matemáticos, inclusive podría pensarse que las categorías de interacción, son aplicables a otros conocimientos de otras áreas.

Es importante resaltar que la implementación de medios como el GeoGebra, permitieron en este estudio, establecer relaciones entre las propiedades del teorema fundamental del cálculo,



generando un esquema explicativo sobre dicho conocimiento que puede ser abordado como una alternativa para el desarrollo de interacciones orientadas a la producción de conocimiento, específicamente asociados al teorema en cuestión, en cursos de matemáticas que se desarrollan a distancia virtual.

En este orden de ideas, la manera explicativa como fue presentado el teorema fundamental del cálculo en el capítulo 2, partiendo de su naturaleza geométrica y estableciendo relaciones entre las propiedades de este conocimiento, se construye en una alternativa metodológica para realizar de manera intencionada interacciones que estén relacionadas con su producción. De manera específica, es un ejemplo de las potencialidades que brinda la interacción en este tipo de contextos, teniendo en cuenta las características del conocimiento matemático, los medios que pueden ser implementados en la educación a distancia virtual y la manera cómo son articulados para la producción.

Por lo tanto, se puede afirmar que el proceso de análisis realizado para abordar el teorema fundamental del cálculo, es un aporte al campo de la educación matemática, ya que en la revisión de la literatura realizada, no se han encontrado procesos explicativos de esta índole, que integren las características de este conocimiento matemático, los medios y las posibilidades de interacción en el contexto de la educación a distancia virtual. Además, analizado el proceso de interacción como un conjunto de acciones complejas, permite generar un aporte de tipo metodológico para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo en cursos de matemáticas que se desarrollan en esta modalidad educativa.

Los resultados de esta investigación, centrados en el análisis de las interacciones que ocurren en este tipo de ambientes, permiten analizar los procesos metodológicos desarrollados en los cursos de matemáticas del programa de Ude@ y, a partir de allí, centrar esfuerzos que estén direccionados a la creación de propuestas alternativas metodológicas para la enseñanza de las matemáticas, que aborden la interacción como un aspecto fundamental en la producción de conocimiento del objeto de estudio.



Además, en el contexto educativo de Ude@, el análisis de las interacciones puede ser un factor que utilicen otros profesores de cursos de matemáticas que se desarrollan en educación a distancia virtual, para realizar la programación de sus actividades y puedan orientar sus prácticas educativas hacia la producción de conocimientos matemáticos, partiendo de los resultados de esta investigación y sus respectivas experiencias en este campo.

### **5.3. Cursos de matemática en la educación a distancia virtual**

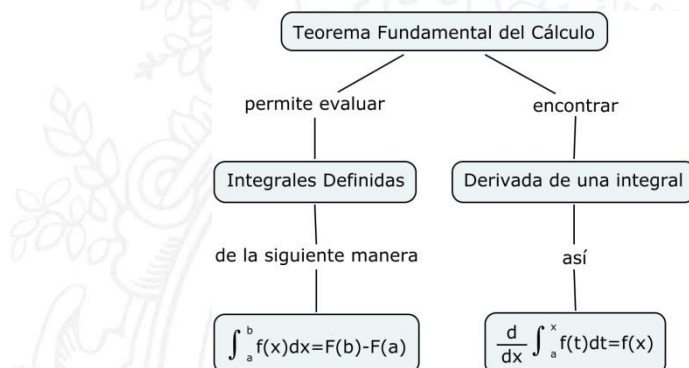
Tal como ya se había mencionado, este estudio fue motivado por la experiencia docente del investigador en cursos de matemática que se desarrollaban en Ude@ y las problemáticas relacionadas con la interacción, específicamente en el cálculo integral. Durante las primeras reflexiones, se desarrollaban diferentes actividades para motivar la interacción de los estudiantes, haciendo una adaptación de metodologías que ya se habían realizado en contextos presenciales. Es el caso de la estrategia de elaboración de mapas conceptuales en matemáticas que cumple una doble funcionalidad, para el aprendizaje y la evaluación; esta, había sido abordada por el investigador en otros estudios en el campo de la educación matemática y en conceptos relacionados con el curso de cálculo integral.

Derivado de esta experiencia, se realizó la publicación de un artículo (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013), en la cual se profundizan y presentan aspectos teóricos y metodológicos que fundamentan estos resultados preliminares (Ver anexo D). Sin embargo, aunque este estudio no continuó desarrollando este tipo de procesos metodológicos, la comparación de estos resultados preliminares con los análisis presentados en el capítulo 4, permiten considerar pertinente que nuevos estudios aborden los mapas conceptuales como una estrategia para generar procesos de interacción direccionados a la producción de conocimiento matemático.

En el presente estudio, el reto por la implementación de los medios (entornos virtuales, software, entre otros) para establecer una relación entre los conocimientos matemáticos, con sus componentes de visualización, las definiciones y aplicaciones, comenzó con la exploración de los mapas conceptuales como estrategia para el desarrollo de trabajo colaborativo y su construcción de manera conjunta entre el colectivo de participantes. Como parte de esta



experiencia, a continuación se presentan dos imágenes de mapas conceptuales elaborados por un estudiante durante el proceso de interacción en uno de los cursos desarrollados por el investigador.

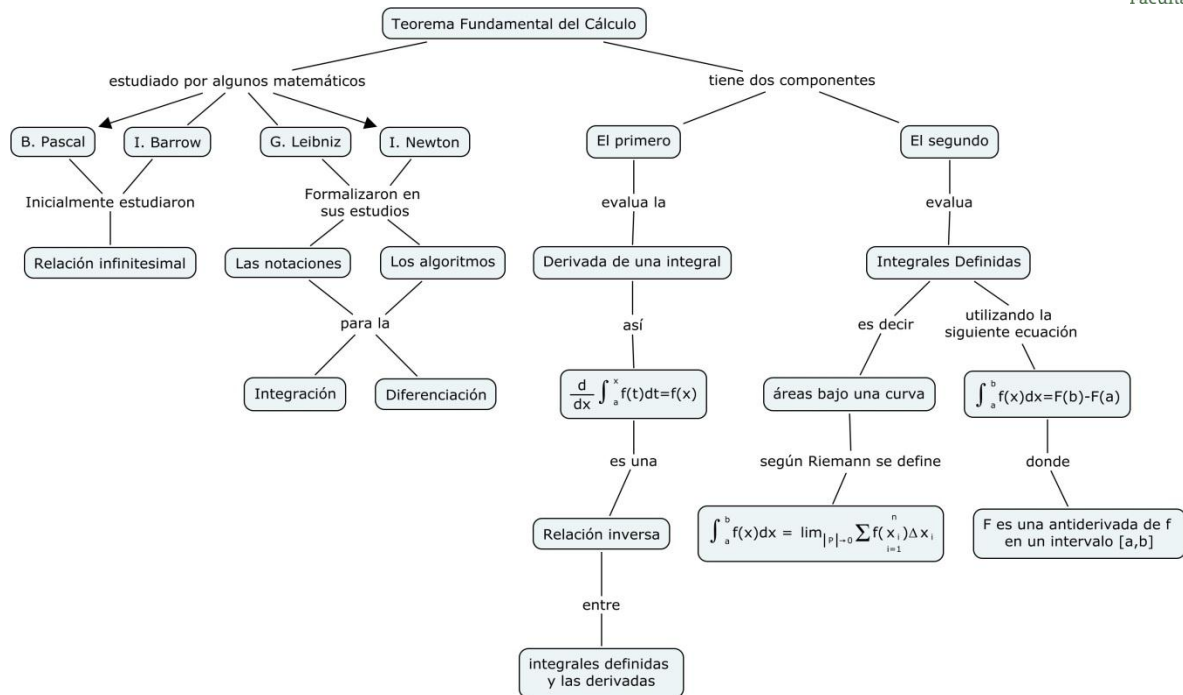


Mapa conceptual tomado de (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013, p.13)

Este mapa, que se considera como una producción de conocimiento matemático del estudiante, permite que él comprenda el teorema fundamental del cálculo como una manera de encontrar una solución algorítmica a ciertas situaciones planteadas en el cálculo, basado en las definiciones propuestas en el libro de texto y realizando una interpretación del teorema de acuerdo a su funcionalidad.

Luego de abordar algunas explicaciones en el curso, orientadas por el docente investigador y algunas interacciones realizadas en el desarrollo de las clases, entre ellas: lectura del módulo; explicaciones y preguntas por parte del docente; inquietudes realizadas por otros estudiantes; diálogos en el chat de WiziQ; discusión sobre la relación entre los conceptos; entre otros; el estudiante elabora nuevamente un mapa conceptual, tratando de involucrar los aspectos abordados como consecuencia de dichas interacciones, proponiendo el siguiente mapa.





Mapa conceptual tomado de (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013, p.14)

Este segundo mapa conceptual, muestra la manera como el estudiante amplía y asocia los conocimientos relacionados con el teorema fundamental del cálculo, además, se puede observar que establece nuevos significados en relación con los propuestos inicialmente, generando relaciones significativas y evidenciando así una producción de conocimiento matemático. Es importante anotar que esta producción es diferente a lo observado y analizado en el desarrollo de este estudio, en el que son abordadas interacciones de diferente naturaleza, independiente de los medios usados en el marco de Ude@.

La elaboración de mapas conceptuales en educación a distancia virtual, específicamente los derivados de experiencias en Ude@, permitieron evidenciar con ese tipo de interacciones la producción de un conocimiento matemático que interrelaciona conceptos, definiciones, propiedades y características. Como resultados de esta experiencia, se pudo identificar que las interacciones eran mucho más complejas de lo pensado y, por lo tanto, el estudio se centró en esclarecer este fenómeno, dejando para futuros estudios, el análisis de la elaboración de mapas conceptuales para la producción de conocimiento matemático en educación a distancia virtual, consolidando una estrategia metodológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.



De otro lado, los procesos de interacción derivados de esta experiencia (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013), conllevan a reflexionar sobre algunas interacciones que son vistas como retroalimentaciones que desencadenan en estos medios, un conjunto articulado de acciones que de alguna manera son invisibles a la conciencia de quienes la efectúan y, en consecuencia, pueden no sufrir el efecto que inicialmente se había deseado. En este sentido, parafraseando a Morin (2011), cuando se refiere a la “ecología de la acción”, este fenómeno puede concebirse como un proceso en el cual se generan inter-retro-acciones, que involucran relaciones mutuas e influencias recíprocas entre las acciones que se ejercen en un acontecimiento determinado. Este fenómeno, un tanto más complejo, amerita ser explorado por nuevos estudios para analizar estas acciones recíprocas, y que de manera voluntaria puedan modificar otras que se realizan enfocadas hacia una producción de conocimiento matemático.

Dicho de otro modo, la interacción en educación a distancia virtual, en el momento en que se inicia, sufre una especie de inter-retro-acción del medio virtual en el que interviene y escapa a la voluntad de quien lo inicia y puede ir en sentido contrario del pensado inicialmente. De esta manera, puede generarse un proceso interactivo mucho más complejo que desencadena una serie de acciones en las cuales se hace necesario que los miembros de un colectivo, desarrollen habilidades retroactivas y una mirada recíproca a las acciones que realizan.

El teorema fundamental del cálculo, de acuerdo a lo observado y analizado en el transcurso del desarrollo de este estudio, es un conocimiento matemático que está directamente relacionado con otros, estableciendo procesos que involucran el razonamiento infinito. Esto propicia varias discusiones en relación a los componentes geométricos del teorema, empleando procesos de visualización que propicien la reflexión sobre sus características y propiedades, modificando de esta manera en un contexto virtual, una enseñanza del teorema que parte de sus definiciones y aplicaciones del mismo, permitiendo además, generar algunas reflexiones sobre la manera como un colectivo de humanos-con-medios construyen este conocimiento matemático. Estos aspectos fueron propuestos en el capítulo 2 con la explicación en GeoGebra del teorema fundamental del cálculo.



En este sentido, el conocimiento matemático abordado en la educación a distancia virtual, requiere del desarrollo del razonamiento abstracto en sus estudiantes, por cuanto, este factor es uno de los aspectos fundamentales que transversa las interacciones que se han estado analizando en la investigación, es decir, de manera implícita, los razonamientos han sido objeto de estudio, y son esenciales para la producción de conocimiento matemático; sin este elemento, no se podría pensar en las consecuencias que conllevarían al desarrollo de interacciones al momento de abordar el objeto de estudio.

De acuerdo con la manera como fue abordado el teorema fundamental del cálculo en el capítulo 2, se considera que la vinculación de medios como el GeoGebra, pueden favorecer la interacción orientada a la producción de conocimiento matemático y, de igual manera, el diseño de aplicaciones en este software que, teniendo en cuenta las características de los conceptos, propiedades y demás conocimientos matemáticos que contengan propiedades geométricas, se convierten en alternativas metodológicas centradas en la interacción con los medios, permitiendo una producción de conocimiento. Por lo tanto, es posible considerar estos aspectos como objeto de investigación en estudios similares en los cuales se retome la interacción y su impacto en la producción de conocimiento, teniendo en cuenta posiblemente los resultados de esta investigación y los planteamientos teóricos del constructo humanos–con–medios.

De manera general, se identifica que en los cursos de matemáticas que se desarrollan en el contexto de la educación a distancia virtual, es posible encontrar diferentes características, reconociendo principalmente, por ejemplo: cursos basados en el manejo de software especializado, en el que los participantes aprenden a manejar, en línea, un programa a través de videos y tutoriales; cursos basados en grupos de discusión para la formación continuada de profesores de matemáticas, empleando plataformas, redes sociales y otros ambientes virtuales (Zulatto, 2007); cursos en línea que permiten a los usuarios acceder al conocimiento matemático a través de documentos y asesorías virtuales, grupos de discusión, videos, sitios web (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013), entre otros. Estos aspectos pueden considerarse como tendencias de la virtualidad en continuo cambio, debido a las necesidades culturales de los programas de formación y, al desarrollo tecnológico y social que cada día permea y transforma los ambientes educativos.



Con los resultados de esta investigación que caracterizan las interacciones realizadas en un colectivo de humanos–con–medios y, además, considerando que el conocimiento es producido por dicho colectivo y que esta producción está relacionada con la interpretación individual y la interacción social, se puede plantear y construir una propuesta metodológica que contemple estos aspectos. En primera instancia, el uso de mapas conceptuales, es una estrategia que permite reflejar y modificar las interpretaciones que ocurren dentro de un colectivo formado por humanos y no humanos (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013) y; en segunda instancia, la entrevista de carácter socrático puede ser utilizada para dinamizar el proceso de interacción social, además de realizar un acompañamiento o seguimiento a dicho proceso (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2015a).

Esta propuesta metodológica, articulada a los resultados de esta investigación, que muestran diferencias significativas entre las interacciones que ocurren en un curso de matemáticas a distancia virtual, debe estar orientada a generar propuestas basadas en los procesos de interacción en relación con la producción de conocimiento matemático.

La entrevista de carácter socrático según Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015a), muestra adaptaciones al contexto de la educación a distancia virtual, que permiten su implementación en este tipo de contextos; además, según Londoño (2011), es una estrategia metodológica que cumple una doble intencionalidad ya que, además de permitir identificar la comprensión que un estudiante tiene en relación con un conocimiento matemático, se convierte en una experiencia de aprendizaje y al mismo tiempo en “un instrumento para recolectar los datos en una investigación” (p.37). Por lo tanto, la presente investigación considera que esta puede ser una estrategia que podría favorecer el proceso de interacción para evidenciar el conocimiento matemático que puede producir un colectivo de humanos–con–medios, de acuerdo al proceso de interacción desarrollado en ambientes de educación a distancia virtual.

En síntesis, en un ambiente de educación a distancia virtual como el programa Ude@, el uso de las interfaces mediante una metodología de interacción social y el proceso de interpretación individual de un colectivo pensante de seres humanos, permite la producción de conocimiento matemático en torno a los conceptos relacionados con el teorema fundamental del



cálculo, siendo los mapas conceptuales y la entrevista de carácter socrático dos componentes esenciales que pueden ser usados en un abordaje metodológico, que permita dinamizar la interacción y por lo tanto, la producción de conocimiento.

#### **5.4. Potencialidades de la educación a distancia virtual para la enseñanza de las matemáticas**

La creación de propuestas educativas con el uso de medios tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas es cada vez mayor; la combinación de software, internet y plataformas educativas son una alternativa que actualmente se está explorando. En este sentido, por ejemplo, la combinación de medios como GeoGebra e internet, es una propuesta que favorece el diseño de módulos de aprendizaje en los cuales, a través de actividades mediadas por GeoGebra y reguladas por entrevistas de carácter socrático diseñadas en contextos virtuales como Blog, formularios Google, entre otros formatos, se constituyen en alternativas que ya se están explorando. La interacción caracterizada por este estudio, puede contribuir a direccionar este tipo de propuestas que favorezcan a que un colectivo de humanos–con–medios, constituido por los medios de Ude@, incluyendo además, GeoGebra, interactúe para producir conocimiento matemático.

De otro lado, durante el proceso investigativo, se pudo observar que la interacción con diferentes medios tecnológicos, genera otras alternativas y nuevas maneras para la visualización de los conocimientos matemáticos. Durante el desarrollo investigativo, se observaron experiencias que hacen uso de medios tecnológicos como la realidad aumentada y la realidad virtual, permitiendo otras formas para la visualización de conocimientos matemáticos, así como también, nuevas maneras de interacción. Las experiencias revisadas, han sido desarrolladas en el contexto de la educación virtual, permitiendo generar un escenario propicio para la articulación conjunta de estrategias para la enseñanza de las matemáticas, teniendo en cuenta realidad aumentada y realidad virtual, educación a distancia virtual y además, interacción de humanos–con–medios.



Durante el proceso investigativo y el trabajo de campo, se identificaron algunos aspectos que siguen siendo motivo de interés y que el análisis de los datos no permitió esclarecer. Por ejemplo, en algunas sesiones de clase, fue notoria la baja interacción de los estudiantes en relación con el conocimiento matemático en discusión; aunque el profesor incitaba a que los estudiantes realizaran preguntas relacionadas con el tema para tratar de profundizar y aclarar algunos aspectos, los estudiantes no se manifestaban al respecto, lo cual genera interrogantes tales como: ¿Cuáles son las estrategias que pueden ser empleadas en un curso de matemáticas en educación a distancia virtual para favorecer la interacción?

Retomando las categorías planteadas en este estudio relacionadas con la interacción, las cuales fueron construidas a partir de la interpretación y análisis de los datos, y reconociendo las características, medios y procesos metodológicos del contexto educativo de Ude@, es importante anotar que éstas permiten orientar el diseño de actividades de tal manera que se modifiquen las condiciones de la estructura de este fenómeno de interacción. Es decir, si se realizan actividades teniendo en cuenta las propiedades y dimensiones de una categoría, se modifica la condición con la que se efectúa este fenómeno, generando así, cambios en la manera cómo se interactúa y por lo tanto, en la manera cómo se produce conocimiento. Aunque estos aspectos planteados no fueron abordados por este estudio, el análisis de las interacciones ocurridas en el colectivo de humanos-con-medios observado, permite concluir que la estructura de las interacciones está relacionada con las condiciones y consecuencias y que el proceso está relacionado con las acciones e intencionalidades con que se desarrolla este fenómeno.

Dado lo anterior, el esquema teórico consolidado en este estudio, se convierte en un potencial para la preparación de actividades de enseñanza en cursos virtuales de matemáticas, ya que al conocer diferentes posibilidades para interactuar, se pueden proyectar condiciones directamente relacionadas con la producción de conocimiento matemático. Motivar el diálogo, realizar preguntas asociadas a las características del conocimiento matemático, crear grupos de discusión en Moodle, realizar procesos inductivos y explicativos de los conocimientos matemáticos, entre otros, permiten potencializar la interacción y, al mismo tiempo, enriquecer el diseño metodológico para la enseñanza de las matemáticas en este tipo de ambientes como el de Ude@.



Aunque este estudio analiza la importancia de la interacción para la producción de conocimiento matemático, dicha producción sigue siendo un factor de interés, en el cual, las estrategias empleadas para el aprendizaje significativo de conocimientos, parecen ser complejas y diversas. En el constructo teórico humanos-con-medios, se considera que los medios son un factor que condiciona la naturaleza de la producción de conocimiento; con los resultados de esta investigación, se puede acotar que además de los medios, la interacción también condiciona dicha producción, lo cual se constituye en un aporte a dicho constructo, sin embargo, su impacto es un aspecto que puede ser ampliado en otros estudios.

De igual manera, la evaluación de conocimientos matemáticos en la educación a distancia virtual, es un factor que requiere análisis y discusión por la comunidad de investigadores, ya que se hace complejo en este tipo de ambientes virtuales, conocer cómo es la comprensión de los conocimientos. En este sentido, es posible indagar por los aspectos que se deben tener en cuenta para el desarrollo de procesos evaluativos en cursos de matemáticas a distancia virtual y por estrategias como el diálogo, que deben ser exploradas como alternativas para investigar por la comprensión de dichos conocimientos; de igual forma, la interacción es un factor que está inmerso en este tipo de procesos y se espera que los resultados de esta investigación, sean un punto de inicio para esclarecer la manera cómo se produce conocimiento matemático en educación a distancia virtual.

Los estudiantes de Ude@, generalmente viven en municipios que geográficamente se encuentran retirados entre sí y en este sentido, se puede afirmar que tienen diversidad de costumbres, hábitos de estudio y han sido formados en la educación básica con diferentes metodologías y conocimientos. De acuerdo con lo planteado en el capítulo 2 relacionado con el constructo teórico humanos-con-medios, este tipo de diversidad puede ser un factor que condiciona la naturaleza del aprendizaje en un ambiente virtual, lo cual también puede ser objeto de análisis relacionado con la interacción; la manera cómo se realizan estos procesos, permite explorar las condiciones de cómo los estudiantes en diferentes regiones construyen un espacio para la interacción y producción de conocimiento en este tipo de contextos educativos.



Finalmente, es posible afirmar que toda propuesta académica que permita captar las relaciones mutuas y las influencias recíprocas entre los medios en el seno de la educación virtual, es incierta y compleja en la medida que requiere una estrategia: la capacidad de modificar la acción durante el proceso de interacción del colectivo de humanos—con—medios en función de los conocimientos que se produzcan o según las informaciones que se reciban en el transcurso del proceso mismo.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3





UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albert, M. J. (2007). *La investigación Educativa: claves teóricas*. Madrid, España: Editorial McGraw Hill.
- Alvarado, M. y Calderón, I. (2013) Diagnóstico Estadístico y Tendencias de la educación Superior a Distancia en Colombia. En N, Arboleda y C. Rama (Eds.), *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades*. (pp. 31-46). Santa Fe de Bogotá, Colombia: ACESAD Asociación Colombiana de Instituciones de Educación Superior con programas a Distancia y Virtual.
- Alves-Mazzotti, A. J. y Gewandsznajder, F. (2000). O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. Pioneira.
- Arboleda, N. (2013). La nueva relación entre tecnología, conocimiento y formación tiende a integrar las modalidades educativas. En N, Arboleda y C. Rama (Eds.), *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades*. (pp. 47-63). Santa Fe de Bogotá, Colombia: ACESAD Asociación Colombiana de Instituciones de Educación Superior con programas a Distancia y Virtual.
- Bairral, M. (2007). *Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distancia*. Rio de Janeiro, Brasil: Universidade Rural do Rio de Janeiro.
- Barbosa, S. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia* (Tese de doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro-SP, Brasil.
- Borba, M. y Araújo, J. (Orgs). (2006). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Coleção Tendências em educação Matemática (4ª Edição). Belo Horizonte, Brasil: Editorial Autêntica.
- Borba, M. y Linares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM Mathematics Education*, 44(6), 697-704. doi:10.1007/s11858-012-0457-3
- Borba, M. y Penteado, M. (2012). *Informática e Educação Matemática*. Coleção Tendências em educação Matemática (5ª Edição) Belo Horizonte, Brasil: Editorial Autêntica.



- Borba, M. y Villarreal, M. (2005). *Humans -with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York, USA: Springer.
- Borba, M. y Zulatto, R. (2006). Different media, different types of collective work online continuing teacher education: would you pass the pen, please? En Novotná, J. Moraová, H. Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.), *Psychology of Mathematics Education*, (p. 201-208) PME 30: Proceedings of the 30th Conference of the International Group For the Psychology of Mathematics Education, Vol 2. Prague.
- Borba, M., Malheiros, A. y Amaral, R. (2014). *Educação distância online*. Coleção Tendências em educação Matemática (4ª Edição). Belo Horizonte, Brasil: Editorial Autêntica.
- Borba, M., Scucuglia, R. R. y Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento*. Coleção Tendências em educação Matemática. (1ª Edição) Belo Horizonte, Brasil: Editorial Autêntica.
- Bradshaw, J. M. (2013). From knowledge science to symbiosis science. *International Journal of Human-Computer Studies*, 71(2), 171-176. [doi:10.1016/j.ijhcs.2012.10.003](https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2012.10.003)
- Chacón, F. (1997). Un nuevo paradigma para la educación corporativa a distancia. En Revista ASUNTOS, Año 1, No. 2. Centro Internacional de Educación a Distancia, Caracas.
- Del Valle, J. (2006). *Elementos básicos del Cálculo integral y series*. Textos básicos de matemáticas diseñados en el contexto del programa. Ude@. Medellín, Colombia.
- Denzin, N, y Lincoln, Y. (2012). La investigación cualitativa como disciplina y como práctica. En: N. Denzin y Y. Lincoln. (Eds.), *Manual de investigación cualitativa Volumen I*. (pp. 43-101) Barcelona, España: Gedisa.
- Facundo, Á (2004). *La virtualización desde la perspectiva de la modernización de la educación superior: consideraciones pedagógicas*. Revista Universidad y Sociedad del Conocimiento. [artículo en línea]. UOC. Vol. 1, nº 1. ISSN1658-580X [Fecha de consulta: 16/12/2014]. <http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/facundo1104.pdf> .
- Facundo, Á. (2003). *La educación superior virtual en Colombia*. La educación superior virtual en América Latina y el Caribe, 165-216.
- Gaines, B. R. (2013). Knowledge acquisition: Past, present and future. *International Journal of Human-Computer Studies*, 71(2), 135-156. [doi:10.1016/j.ijhcs.2012.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2012.10.010)
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. P. (2010). *Metodología de la investigación*. 5a Edición ed. México: Mc. Graw Hill.



- Interacción. (n.d.) *Collins Spanish Dictionary - Complete and Unabridged 8th Edition*. (2005). Retrieved December 14 2015 from <http://es.thefreedictionary.com/interacci%c3%b3n>
- Interacción. (n.d.) *Diccionario Enciclopédico Vox 1*. (2009). Retrieved December 14 2014 from <http://es.thefreedictionary.com/interacci%c3%b3n>
- Interacción. (n.d.) *Diccionario Manual de la Lengua Española Vox*. (2007). Retrieved December 14 2014 from <http://es.thefreedictionary.com/interacci%c3%b3n>
- Jaramillo, C., Londoño, R. y Jurado, F. (2012). *Una metodología alternativa para la comprensión de la noción de límite: El caso de la convergencia de series de términos positivos*. España: Editorial Académica Española.
- Larson, R. y Edwards, B. H. (2011). *Cálculo de una variable*. Novena Edición. México: McGraw-Hill.
- Leithold. (2007). *Cálculo*. Séptima edición.
- Lévy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34.
- Lincoln, Y. y Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. California: Sage Publications, Inc.
- Lizarazo, T. (3 de noviembre de 2015). En un 500 % creció demanda de educación superior virtual en Colombia. *El tiempo*. Recuperado de: <http://www.eltiempo.com/estilo-de-vida/educacion/educacion-superior-virtual-en-colombia/16417604>
- Londoño Cano, R. A. (2011). *La Relación Inversa entre Cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis de Doctorado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Martínez, P. (2013). Prólogo. En N, Arboleda y C. Rama (Eds.), *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades*. (pp. 13-20). Santa Fe de Bogotá, Colombia: ACESAD Asociación Colombiana de Instituciones de Educación Superior con programas a Distancia y Virtual.
- Ministerio de Educación Nacional. (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Lineamientos curriculares. Santafé de Bogotá. Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Resolución 2755 del 5 de junio de 2006. <http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Normal.jsp?i=22447>



- Ministerio de Educación Nacional. (2009). *Educación virtual o educación en línea*. Artículo publicado en: <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-196492.html>. Acceso Febrero de 2013.
- Ministerio de Educación Nacional. (2014). Educación virtual. En *Oficina de innovación educativa con uso de nuevas tecnologías*. Publicado en: <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/w3-article-316667.html> Acceso Enero de 2015.
- Moran, J. M. (2000). Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias. *Informática na Educação: Teoria & Prática*. Porto Alegre, vol. 3, n.1 (set. 2000) UFRGS. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, pág. 137-144. e-ISSN: 1982-1654 Publicado en: <<http://seer.ufrgs.br/index.php/InfEducTeoriaPratica/article/view/6474>>. Acceso: nov. 2013.
- Moran, J. M. (2002). O que é educação a distância. <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/dist.pdf> Acceso Octubre de 2015.
- Morin, E. (2012). *La vía: para el futuro de la humanidad* (2ª Edición) Barcelona, España: Paidós.
- Nipper, S. (1989). Third generation distance learning and computer conferencing. En R.D. Mason y A.R. Kaye (Eds.). *Mindweave: communication, computers and distance education*. (pp. 63-73). Oxford: Pergamon Press.
- Novak, J. D. y Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona, España: Martínez Roca.
- Ospina Pineda, D. P. (2008). *¿Qué es un ambiente virtual de aprendizaje?* <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/boa/contenidos.php/d7dc0502b1cb75fd84814b2952a2435d/144/estilo/aHR0cDovL2FwcmVuZGVlbmxpbmVhLnVkZWEuZWR1LmNvL2VzdGlsb3MvYXp1bF9jb3Jwb3JhdGl2by5jc3M=/1/contenido/> Recuperado en septiembre de 2103.
- Ospina, G. (2015). *Ude@ en el currículo*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Plan de desarrollo 2006-2016. Universidad de Antioquia. Publicado en: <http://www.udea.edu.co/wps/wcm/connect/udea/215c33a8-3909-484c-9b84-c94a8459dc83/plan-dllo-2006-2016.pdf?MOD=AJPERES>
- Purcell, E. J., Varberg, D., y Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo* (Novena ed.). Ciudad de México, México: Pearson.



- Rama, C. (2013). El contexto de la reforma de la virtualización en América Latina. En N, Arboleda y C. Rama (Eds.), *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades*. (pp. 21-29). Santa Fe de Bogotá, Colombia: ACESAD Asociación Colombiana de Instituciones de Educación Superior con programas a Distancia y Virtual.
- Rendón, H. (2012). Políticas de integración de TIC en los sistemas educativos. En *Oficina de innovación educativa con uso de nuevas tecnologías*. Ministerio de Educación Nacional. Publicado en [http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-311722\\_archivo9\\_pdf.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-311722_archivo9_pdf.pdf) Acceso Febrero de 2015.
- Restrepo, J., y Trefftz, H. (2005). Telepresence support for synchronous distance. In *Proceedings of the ACM symposium on Virtual reality software and technology* (pp. 63-67). ACM.
- Rosa, M., Bairral, M. A. y Amaral, R. B. (2015). *Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas*. Editora Livraria da Física, São Paulo. Brasil.
- Rubio, A. (sf). *La educación a distancia en España*. Publicado en: <http://www.lmi.ub.es/teeode/thebook/files/spanish/html/6spain.htm#notes>. Ultimo acceso: agosto de 2015.
- Salazar. R. y Melo, A. L. (2013). Lineamientos conceptuales de la modalidad de educación a distancia. En N, Arboleda y C. Rama (Eds.), *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades*. (pp. 81-111). Santa Fe de Bogotá, Colombia: ACESAD Asociación Colombiana de Instituciones de Educación Superior con programas a Distancia y Virtual.
- Schreiber, G. (2013). Knowledge acquisition and the web. *International Journal of Human-Computer Studies*, 71(2), 206-210. [doi:10.1016/j.ijhcs.2012.10.001](https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2012.10.001)
- Steinbring, H. (2005) *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective*. Dordrecht: Springer. 236 p. (Mathematics Education Library, 38)
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable Trascendentes tempranas*. 6 Edición. México: Cengage Learning.
- Strauss, A. L., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. (2da Edición). Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.



- Sucerquia, E., Londoño, R. y Jaramillo, C. M. (2013). *El teorema Fundamental del Cálculo en la Educación a Distancia Virtual*. En: VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – CIEM - ULBRA Canos /RS - Brasil – ISSN: 2318-7271. Octubre de 2013. Publicado en: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1280/648>
- Sucerquia, E., Londoño, R. y Jaramillo, C. M. (2015a). *La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online*. XIV Conferencia interamericana de Educación Matemática CIAEM. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Junio de 2015. Publicado en: [http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv\\_ciaem/xiv\\_ciaem/paper/view/1167](http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1167)
- Sucerquia, E., Londoño, R. y Jaramillo, C. M. (2015b). *Procesos de interacción en ambientes de aprendizaje online para la formación posgraduada de profesores de matemática*. XXVIII Acta latinoamericana de Matemática Educativa. (p. 1416-1422) Publicado en: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme28.pdf>
- Taylor, J. C. (2001). *Fifth generation distance education*. Instructional Science and Technology, 4 (1). pp. 1-14.
- Tikhomirov, O. (1981). *The psychological consequences of computerization*. En: Wertsch, J (Org.) *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe. Inc. p. 256-278.
- Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. En: *Innovación y Experiencias VEsC*, 3(5), 73 – 94
- Zapata, D. (2002). *Contextualización de la enseñanza virtual en la educación superior*. Bogotá, DC: ICFES. ISSN: 1657-5725  
[http://blade1.uniquindio.edu.co/uniquindio/ntic/lineamientos/nuevos%20libros/arc\\_88.pdf](http://blade1.uniquindio.edu.co/uniquindio/ntic/lineamientos/nuevos%20libros/arc_88.pdf)
- Zulatto, R. (2007). *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente virtual de formação continuada de professores* (Tese de doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro-SP, Brasil.



## ANEXOS

Los anexos se consideran un aspecto complementario al proceso investigativo, suministrando información adicional al estudio realizado, en este sentido, los anexos están relacionados con: un listado detallado de los conocimientos matemáticos de un curso de cálculo integral; los enlaces que permiten el acceso a los diferentes ambientes de aprendizaje y recursos de Ude@; el acceso a las sesiones grabadas del curso de cálculo integral de los diferente grupos programados en el semestre 2015-1; referencias sobre las divulgaciones y publicaciones realizadas durante el desarrollo del proceso investigativo; algunas estadísticas del programa Ude@; y finalmente, la relación de este estudio con el proyecto de investigación que se desarrolla en el marco de un programa de cooperación internacional entre Brasil y Colombia.

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



### A. Cronograma de un curso de cálculo integral

A continuación se presenta el cronograma por semana de las temáticas abordadas en el curso de cálculo integral desarrollado en Ude@ para los diferentes programas de pregrado de la Facultad de Ingeniería.

SEMANA	TEMAS
1	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Función primitiva y antiderivada</li> <li>2. Definición de integral indefinida y notación</li> <li>3. Interpretación geométrica de la integral indefinida.</li> <li>4. Primeras fórmulas de integración.</li> <li>5. Regla de sustitución o cambio de variable.</li> </ol>
2	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ejemplos sobre la regla de sustitución.</li> <li>2. Algunas aplicaciones sobre la integral indefinida.</li> <li>3. Ecuación diferencial de primer orden. Movimiento rectilíneo.</li> <li>4. Métodos de integración. Primera tabla de integrales y su uso.</li> <li>5. Primeros cambios de variable.</li> </ol>
3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Método de integración por partes.</li> <li>2. Integración de potencias de funciones trigonométricas.</li> <li>3. Sustituciones trigonométricas</li> <li>4. Integración por descomposición en fracciones parciales</li> </ol>
4	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Integración de funciones racionales de seno y coseno.</li> <li>2. Otras sustituciones.</li> <li>3. Integración de los binomios diferenciales.</li> <li>4. Ejercicios generales sobre integración indefinida.</li> </ol>
5	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. La integral definida.</li> <li>2. Notación Sigma o de sumatoria.</li> <li>3. Partición de un intervalo. Norma de una partición.</li> </ol>



	<p>4. Partición regular. Ejercicios generales.</p> <p><b>Primer parcial del 25%: Semanas 1- 4 (PRESENCIAL)</b></p>
6	<p>1. Sumas de Riemann.</p> <p>2. Definición de la integral definida según Riemann.</p> <p>3. Relación entre continuidad e integrabilidad.</p> <p>4. Propiedades de la integral definida.</p> <p>5. Teorema del valor intermedio</p>
7	<p>1. Teorema del valor medio para integrales.</p> <p><b>2. Primer teorema fundamental del cálculo: Derivada de una integral.</b></p> <p><b>3. Segundo teorema fundamental del cálculo.</b></p> <p>4. Evaluación de integrales definidas.</p> <p>5. Ejercicios generales sobre integral definida.</p>
8	<p>1. Integrales impropias: Definición.</p> <p>2. Tipos de integrales impropias.</p> <p>3. Ejercicios generales sobre integrales impropias.</p>
9	<p>1. Aplicaciones de la integral definida.</p> <p>2. Áreas entre dos curvas.</p> <p>3. Volúmenes de sólidos de revolución: Método de las arandelas</p> <p>4. Volúmenes de sólidos de revolución: Método de la corteza cilíndrica</p> <p><b>Segundo parcial del 25%: Semanas 5-8 (PRESENCIAL)</b></p>
10	<p>1. Longitud de arco de una curva plana.</p> <p>2. Área de una superficie de revolución.</p> <p>3. Momentos y centros de masas.</p> <p>4. Centroides de una región plana.</p> <p>5. Los teoremas de Pappus</p>
11	<p>1. Sistema de coordenadas polares.</p> <p>2. Curvas en coordenadas polares.</p> <p>3. Áreas entre curvas en coordenadas polares.</p> <p>4. Sistema de coordenadas cilíndricas. Ejemplos ilustrativos</p>



12	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sucesiones y series.</li> <li>2. Definición de sucesión y límite de una sucesión.</li> <li>3. Teoremas sobre sucesiones.</li> <li>4. La serie aritmética y la serie geométrica.</li> <li>5. Criterio del término enésimo para convergencia y divergencia de series.</li> </ol>
13	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Criterio de la integral para convergencia de series.</li> <li>2. Criterio de comparación para convergencia de series.</li> <li>3. Criterio de comparación en el límite.</li> <li>4. Criterio de la razón. Criterio de la raíz. Criterio de Raabe.</li> </ol> <p><b>Tercer parcial del 25%: Semanas 9 - 11 (PRESENCIAL)</b></p>
14	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Las series alternas. Definición.</li> <li>2. Convergencia absoluta y Convergencia condicional de una serie alterna.</li> <li>3. Criterio del cociente para Convergencia absoluta.</li> <li>4. Criterio de la raíz para Convergencia absoluta.</li> </ol>
15	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Series de potencias. Definición.</li> <li>2. Serie de Taylor y serie de Maclaurin.</li> <li>3. Criterios de convergencia de series.</li> <li>4. Intervalo de convergencia y radio de convergencia de una serie.</li> <li>5. Ejercicios de aplicación sobre convergencia de series de potencias.</li> </ol>
16	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Representación defunciones mediante series de potencias.</li> <li>2. Representación de funciones mediante series de Taylor y series de Maclaurin.</li> <li>3. Operaciones con series de potencias: Derivabilidad e integrabilidad.</li> <li>4. La serie binomial. Fórmula de Euler</li> <li>5. Ejercicios generales sobre representación de funciones.</li> </ol>
17	<b>Cuarto parcial del 25%. Semanas 12 – 16 (PRESENCIAL)</b>



## B. Medios de Ude@

La siguiente tabla tiene los enlaces que permiten el acceso a las diferentes plataformas educativas relacionados con Ude@, entre ellas Moodle y WizIQ las fundamentales para el desarrollo de los cursos de matemáticas.

Nombre	Enlace
Acerca de Ude@	<a href="http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/acerca-udea/">http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/acerca-udea/</a>
Plataforma WizIQ	<a href="http://www.wiziq.com/">http://www.wiziq.com/</a>
Plataforma Moodle	<a href="http://www2.udearoba.co/login/index.php">http://www2.udearoba.co/login/index.php</a>
Zona Ude@	<a href="https://www.youtube.com/user/zonaudearobaudea">https://www.youtube.com/user/zonaudearobaudea</a>
Ude@ suena	<a href="http://udearobasuenas.udea.edu.co/">http://udearobasuenas.udea.edu.co/</a>
Biblioteca Digital Ude@	<a href="http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/1541">http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/1541</a>
Banco de recursos	<a href="http://www2.udearoba.co/bancorecursos/">http://www2.udearoba.co/bancorecursos/</a>
Programas virtuales, en pregrado y posgrado	<a href="http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/programas">http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/estudiar-udea/udea-educacion-virtual/programas</a>
Vamos para la Universidad	<a href="http://vamospalauniversidad.co/vplportal/">http://vamospalauniversidad.co/vplportal/</a>
Modelo Educativo de Ude@	<a href="http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/modelo_educativo_Ude@/index.html">http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/modelo_educativo_Ude@/index.html</a>
Redes Sociales	En Facebook: Ude@ Educación Virtual En Twitter: @Udearoba YouTube: Zonaudearoba Facultad de Ingeniería



### C. Cursos de cálculo integral semestre 2015-1

La siguiente tabla contiene los enlaces de acceso a las sesiones grabadas en las plataformas WizIq y Moodle, de los seis cursos del semestre 2015-1.

Plataforma	Enlaces por grupo
WizIQ	<p>Grupo 1</p> <p><a href="http://www.wiziq.com/online-class/2480491-idm-230-231-calculo-integral-grupo1">http://www.wiziq.com/online-class/2480491-idm-230-231-calculo-integral-grupo1</a></p> <p>Grupo 2</p> <p><a href="http://www.wiziq.com/online-class/2480499-idm-230-231-calculo-integral-grupo2">http://www.wiziq.com/online-class/2480499-idm-230-231-calculo-integral-grupo2</a></p> <p>Grupo 3</p> <p><a href="http://www.wiziq.com/online-class/2480510-idm-230-231-calculo-integral-grupo3">http://www.wiziq.com/online-class/2480510-idm-230-231-calculo-integral-grupo3</a></p> <p>Grupo 4</p> <p><a href="http://www.wiziq.com/online-class/2480552-idm-230-231-calculo-integral-grupo4">http://www.wiziq.com/online-class/2480552-idm-230-231-calculo-integral-grupo4</a></p> <p>Grupo 5</p> <p><a href="http://www.wiziq.com/online-class/2480565-idm-230-231-calculo-integral-grupo5">http://www.wiziq.com/online-class/2480565-idm-230-231-calculo-integral-grupo5</a></p> <p>Grupo 6</p> <p><a href="http://www.wiziq.com/online-class/2515050-idm-230-calculo-integral-grupo6">http://www.wiziq.com/online-class/2515050-idm-230-calculo-integral-grupo6</a></p>
Moodle	<p>Las diferentes copias de seguridad de los cursos en Moodle se encuentran en el siguiente enlace, sin embargo se requiere de autorización de Ude@ para el acceso, el cual fue concedido para efectos de esta investigación</p> <p><a href="http://www2.udearroba.co/course/index.php?categoryid=136">http://www2.udearroba.co/course/index.php?categoryid=136</a></p>



## **D. Divulgación de la investigación**

Durante el proceso investigativo se realizaron diferentes publicaciones y participaciones en eventos académicos en educación matemática, con el propósito de dar a conocer a la comunidad los avances de la investigación. En este anexo se presentan tanto los eventos en los cuales se participó como los artículos publicados o en proceso de publicación elaborados durante el desarrollo de la investigación.

### **D.1. Participación en eventos**

Este estudio fue socializado en diferentes eventos de carácter nacional o internacional relacionados con la educación matemática, en los cuales se pudo dialogar con miembros de comunidad académica avances del proceso investigativo. En algunos de ellos, se presentó el contexto investigativo y la problemática a desarrollar, basados en los referentes teóricos revisados en su momento, en otros, el diseño metodológico propuesto en su momento y algunos avances del análisis del trabajo de campo. Durante el proceso de divulgación, algunos participantes realizaron cuestionamientos o comentarios que contribuyeron a crear nuevas ideas para el desarrollo del estudio. Se considera que fueron eventos importantes para el desarrollo del estudio ya que también, la participación en ponencias y trabajos investigativos en la misma línea de este estudio, permitieron ampliar los referentes bibliográficos y la mirada del investigador. A continuación se presenta una descripción de los eventos.



1. V Congreso internacional de formación y modelación en ciencias básicas

**Título:** Algunos conceptos del análisis matemático en el contexto de humans-with-media”  
**Modalidad:** Ponencia  
**Fecha:** 8 al 10 de Mayo de 2013  
**Ciudad:** Medellín – Antioquia  
**País:** Colombia  
**Certificado:**





## 2. VI Congresso internacional de ensino da matemática - CIEM

**Título:** El teorema fundamental del cálculo en la educación a distancia online  
**Modalidad:** Comunicación científica  
**Fecha:** 16 al 18 de octubre de 2013  
**Ciudad:** Canoas – Rio Grande do sul  
**País:** Brasil  
**Certificado:**



Generated by CamScanner from intsig.com

DE ANTIOQUIA  
1803



### 3. VI Congreso internacional de formación y modelación en ciencias básicas

**Título:** Procesos de interacción en la educación matemática a distancia y online  
**Modalidad:** Ponencia  
**Fecha:** 7 al 9 de Mayo de 2014  
**Ciudad:** Medellín – Antioquia  
**País:** Colombia  
**Certificado:**

**VI Congreso**  
Internacional de  
*Formación y  
Modelación en  
Ciencias Básicas*



UNIVERSIDAD DE MEDELLIN


CERTIFICA QUE:

**EDISON SUCERQUIA VEGA**

Asistió en calidad de  
PONENTE científico

Con su presentación: “PROCESOS DE INTERACCIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A DISTANCIA Y ONLINE”, con una intensidad de 1/2 hora, dictado en el marco del VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, realizado en la Universidad de Medellín los días 7, 8 y 9 de mayo de 2014.

  
**LUZ DORIS BOLÍVAR YEPES**  
Vicerrectora Académica

  
**JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ**  
Jefe Departamento  
de Ciencias Básicas



#### 4. Vigésima Octava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa - RELME 28

**Título:** Procesos de interacción en ambientes de aprendizaje online para la formación posgraduada de profesores de matemáticas

**Modalidad:** Reporte de investigación

**Fecha:** 28 de julio al 1 de agosto de 2014

**Ciudad:** Barranquilla – Atlántico

**País:** Colombia

**Certificado:**





## 5. 2d International Congress of Science Education – 2 ICSE

**Título:** Interaction of a collective of teachers-with-media in an online environment  
**Modalidad:** Poster  
**Fecha:** 27 al 30 de agosto de 2014  
**Ciudad:** Foz do Iguaçu – Paraná  
**País:** Brasil  
**Certificado:**





6. **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática - CIAEM**

**Título:** La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online

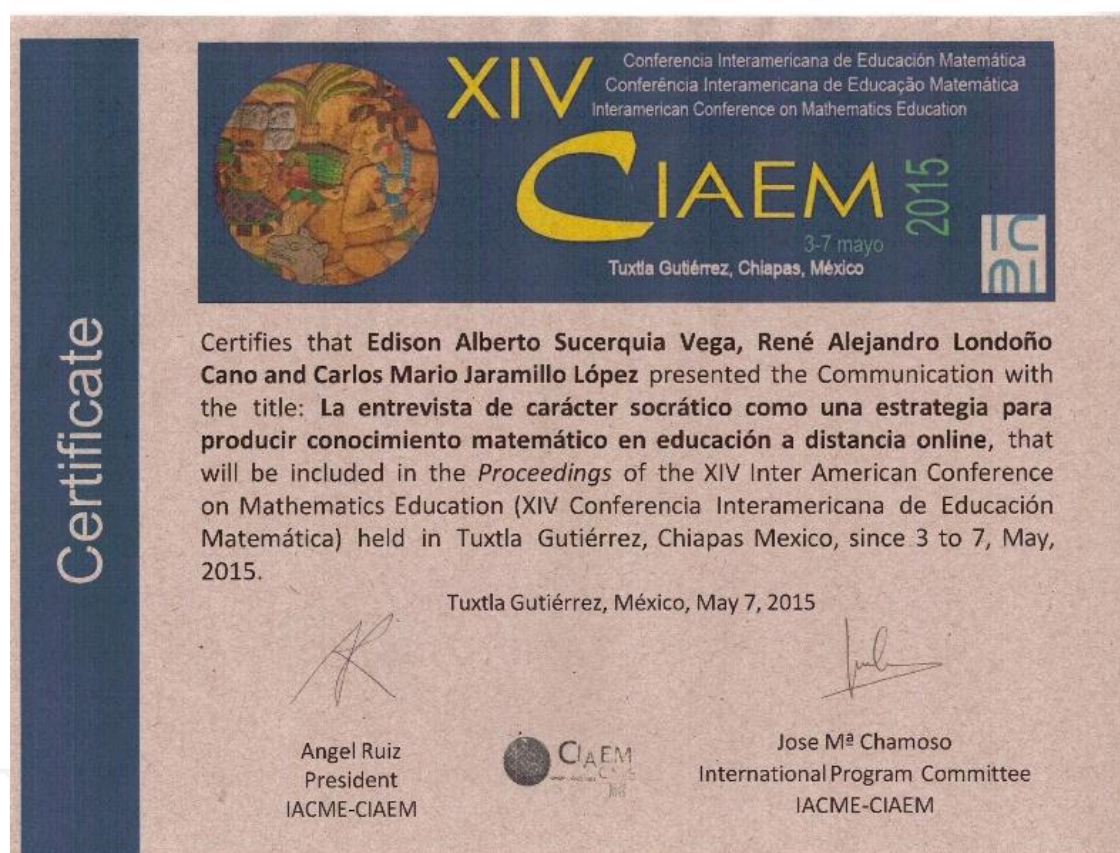
**Modalidad:** Comunicación

**Fecha:** 3 al 7 de Mayo de 2015

**Ciudad:** Tuxtla Gutiérrez – Chiapas

**País:** México

**Certificado:**





**7. 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 4º SIPEMAT**

**Título:** Processo de interação para produzir conhecimento matemático em ensino virtual a distância  
**Modalidad:** Poster  
**Fecha:** 29 de junio al 1 de julio de 2015  
**Ciudad:** Ilhéus – Bahía  
**País:** Brasil  
**Certificado:**





## D.2. Artículos publicados

La participación en los eventos generó la publicación de algunos artículos derivados de las socializaciones, además, en el último año se elabora, presenta y publica un artículo en una revista indexada en B para COLCIENCIAS.

### D.2.1. Publicación 1

**Título:** El teorema fundamental del cálculo en la educación a distancia online.

**ISSN:** 2318-7271

**URL:** <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1280/648>

**Referencia:** Sucerquia, E., Londoño, R., y Jaramillo, C. M. (2013). El teorema fundamental del cálculo en la educación a distancia online. *En VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática*.

**Resumen:** La educación a distancia en la modalidad online, ha sido una de las oportunidades que los estudiantes de algunas regiones de Colombia han tenido para lograr una educación a nivel superior. El programa de Educación virtual “Ude@” de la Universidad de Antioquia, ha ofrecido por más de una década cursos en esta modalidad, sin embargo, específicamente en los cursos de matemáticas, no se han desarrollado estudios que indaguen sobre la manera como los estudiantes producen conocimientos matemáticos asociados al proceso de aprendizaje de esta área. Según los planteamientos del constructo teórico “Humans-with-media”, la producción de conocimiento matemático está directamente relacionada con la interacción social, la interpretación individual y los medios. Teniendo en cuenta estos aspectos, el estudio utiliza una entrevista de carácter socrático, los mapas conceptuales y las interfaces del programa Ude@ para analizar la manera en que un colectivo de estudiantes producen conocimiento matemático en la modalidad online, asociado a uno de los teoremas centrales de un curso de cálculo integral, al cual subyacen una gran cantidad de conceptos



matemáticos que involucran procesos de razonamiento infinito: El Teorema Fundamental del Cálculo.

### D.2.2. Publicación 2

**Título:** La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online.

**URL:** [http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv\\_ciaem/xiv\\_ciaem/paper/view/1167/471](http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1167/471)

**Referencia:** Sucerquia, E., Londoño, R. A, y Jaramillo, C. M (2015). La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online. En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

**Resumen:** En educación a distancia online, uno de los procesos de interacción que ocurren para producir conocimiento, es el diálogo (Borba, et al, 2011), sin embargo, en el campo de la educación matemática, este diálogo debe tener características que permitan progresivamente la producción de conocimiento matemático. El diálogo socrático se reconoce como un método para que un aprendiz encuentre la verdad sobre un conocimiento, así mismo, la entrevista de carácter socrático se ha implementado como una estrategia que permite generar, por una lado, experiencias de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático y por otro lado, identificar el conocimiento que se ha producido (Londoño, 2011). El presente estudio se desarrolla en el marco del proyecto de investigación COLCIENCIAS-CAPES, el cual retoma esta estrategia para propiciar interacciones en un colectivo de estudiantes-con-medios que permita una producción de conocimiento matemático de un curso en educación a distancia online.



### D.2.3. Publicación 3

- Título:** Procesos de interacción en ambientes de aprendizaje online para la formación posgraduada de profesores de matemáticas.
- ISSN:** 2448-6469
- URL:** <http://www.clame.org.mx/documentos/alme28.pdf.pdf>
- Referencia:** Sucerquia, E., Londoño, R., Jaramillo, C. (2015). Procesos de interacción en ambientes de aprendizaje online para la formación posgraduada de profesores de matemáticas.
- Resumen:** El artículo pretende socializar los avances de la investigación “La formación posgraduada de profesores de matemáticas, en un ambiente de aprendizaje online” desarrollada en el marco del programa de cooperación internacional en educación, COLCIENCIAS – CAPES. El estudio indaga por los elementos que se deben tener en cuenta para desarrollar procesos de formación posgraduada en ambientes online para profesores de matemáticas, de tal manera que también atienda a las necesidades e intereses del docente en relación directa con el contexto. Así mismo, pretende establecer aspectos teóricos y metodológicos que contribuyan al mejoramiento de los procesos de formación posgraduada en ambientes online, teniendo en cuenta procesos de interacción y de aprendizaje, propias de estos ambientes, además, pretende reconocer las diferentes interacciones que pueden ocurrir en estos ambientes para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en ambientes online.

### D.2.4. Publicación 4

- Título:** La educación a distancia virtual: desarrollo y características en cursos de matemáticas
- Revista:** Revista virtual Católica del norte – Indexada en B.
- ISSN:** 0124-5821 en línea



**URL:** <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/760/1286>

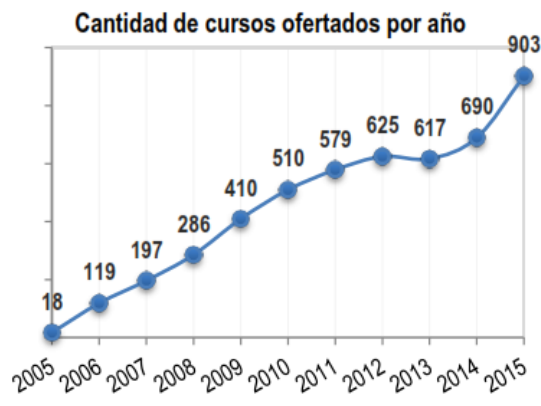
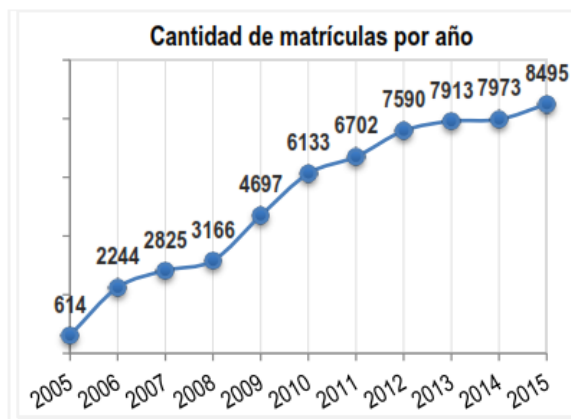
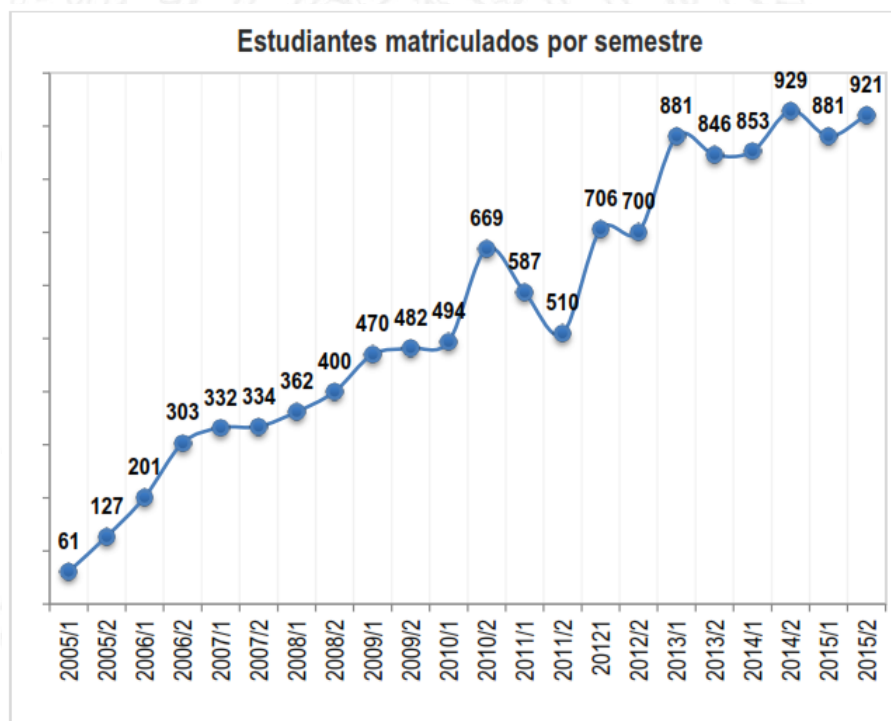
**Resumen:** La educación a distancia virtual es un campo que constantemente se transforma y permite la creación de nuevos programas de formación en diferentes áreas del conocimiento y niveles educativos. En este sentido, actualmente se desarrolla una investigación titulada “Procesos de interacción para una producción de conocimiento matemático en un colectivo de estudiantes-con-medios en educación a distancia virtual”, que busca tanto la formación de un estudiante de doctorado como contribuir a este campo con perspectivas teóricas y metodológicas en Educación Matemática en el contexto del programa de educación virtual - Ude@, a través de un estudio de casos de enfoque cualitativo. Este artículo aborda algunos análisis, reflexiones y características relevantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en este tipo de ambientes virtuales, mediante el planteamiento de estrategias que identifiquen aquellos procesos de interacción que permitan una producción de conocimiento matemático en cursos de educación a distancia virtual.



## E. Estadísticas sobre Ude@

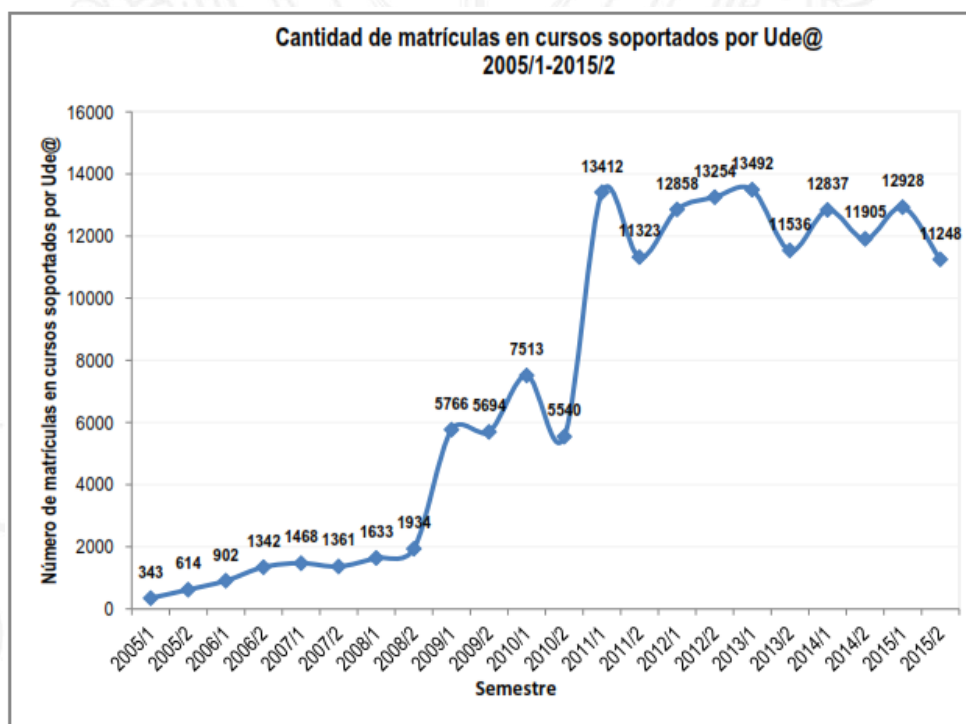
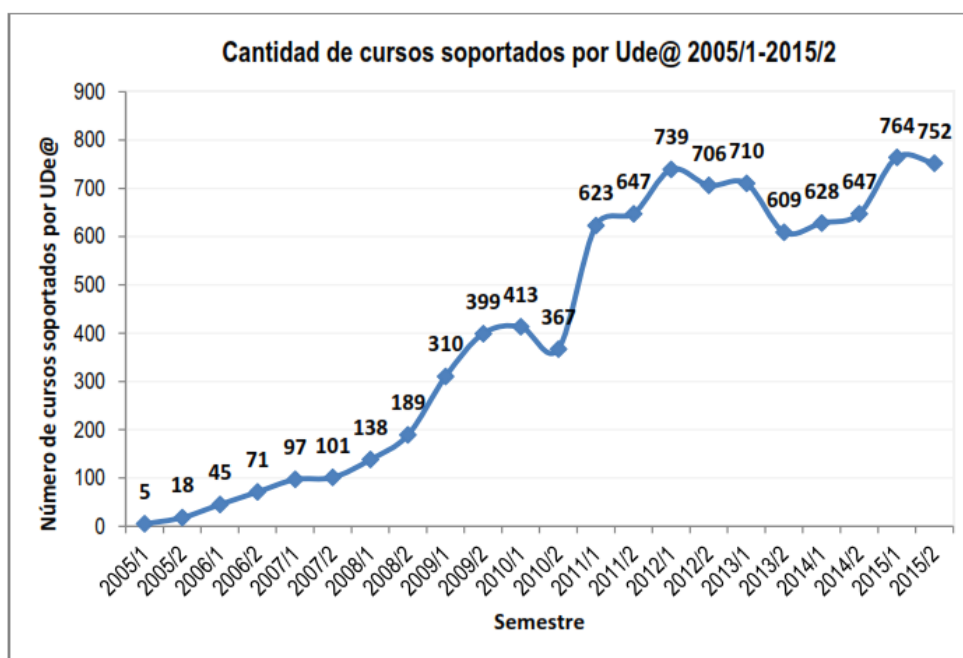
A continuación se presentan algunas estadísticas suministradas por Ude@ (Ospina, 2015) para efectos complementarios de este estudio.

Pregrados virtuales: Ingeniería de Telecomunicaciones, Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental.

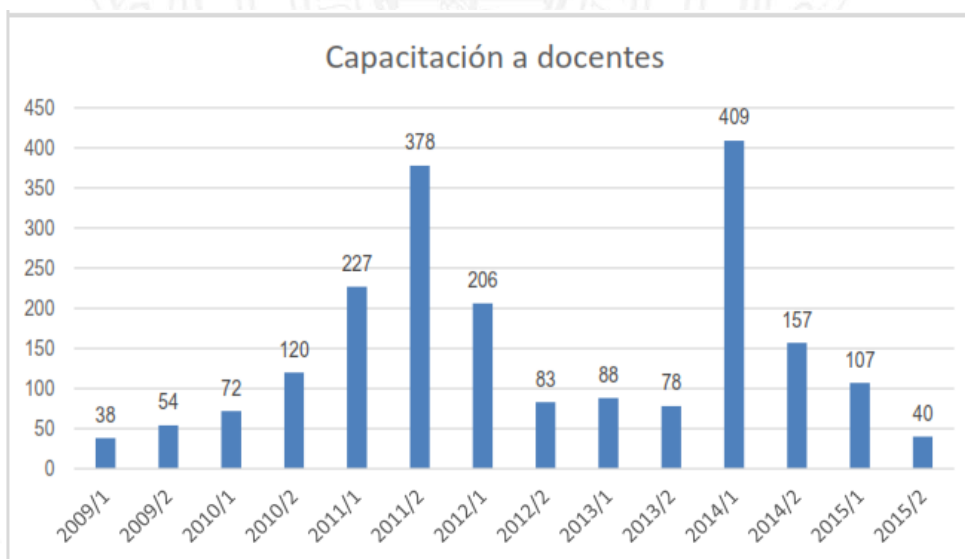
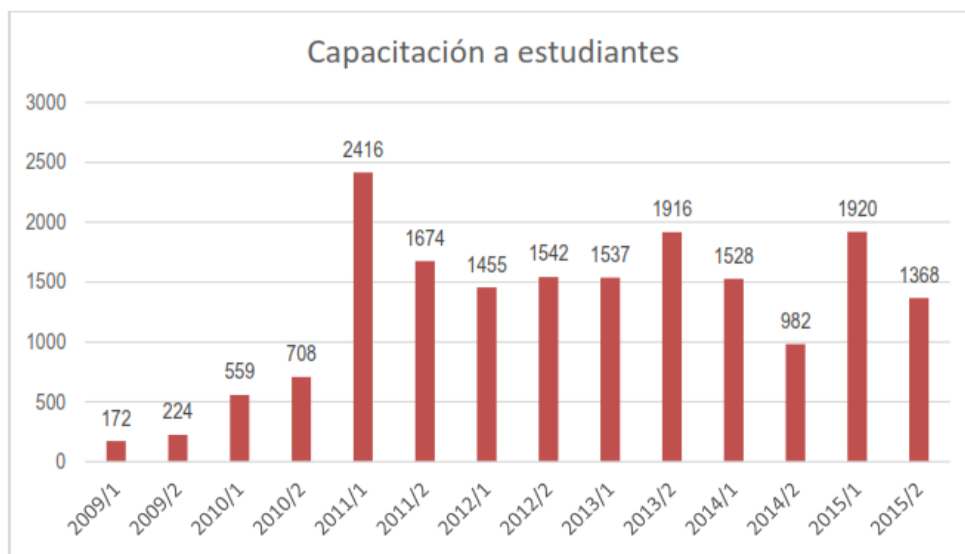


Información de los pregrados virtuales de Ude@







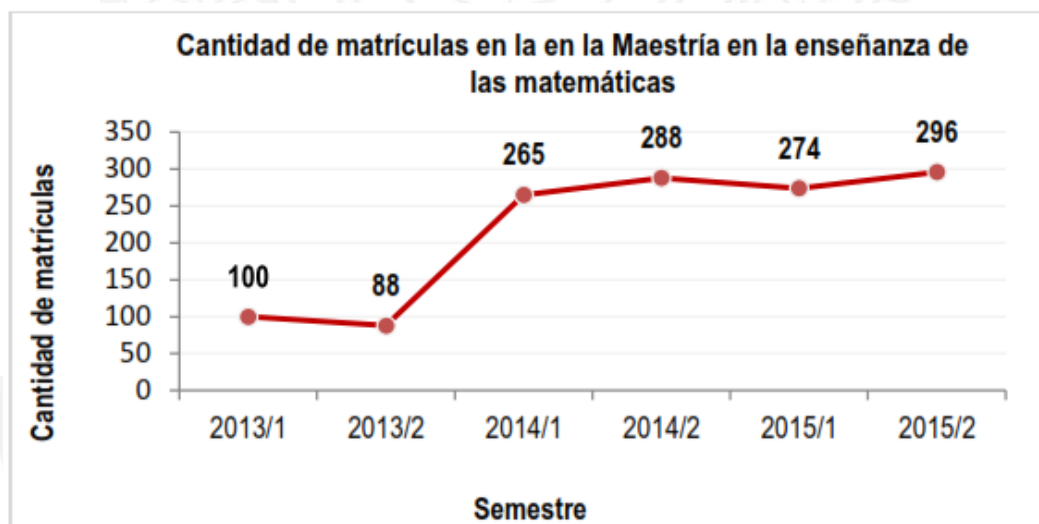


Las anteriores gráficas, corresponden con los procesos de capacitación que ha desarrollado Ude@ para el manejo de las plataformas WizIQ y Moodle de estudiantes y profesores.





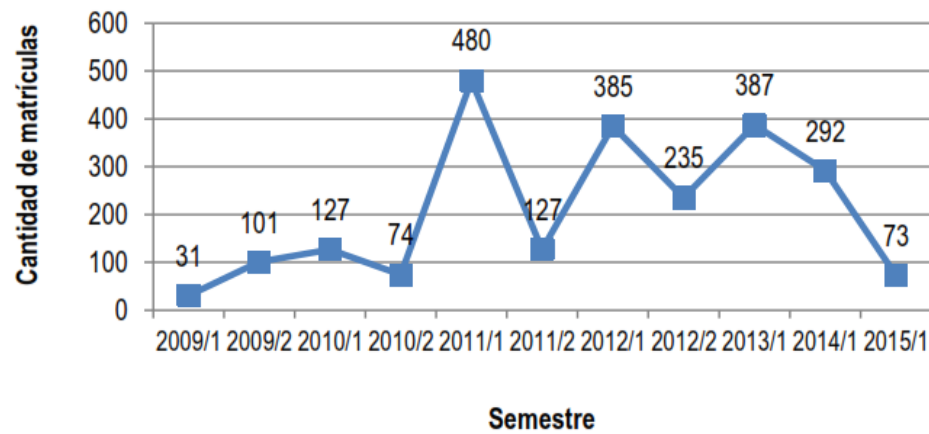
La gráfica corresponde con la cantidad de horas que se desarrollan en WiziQ.



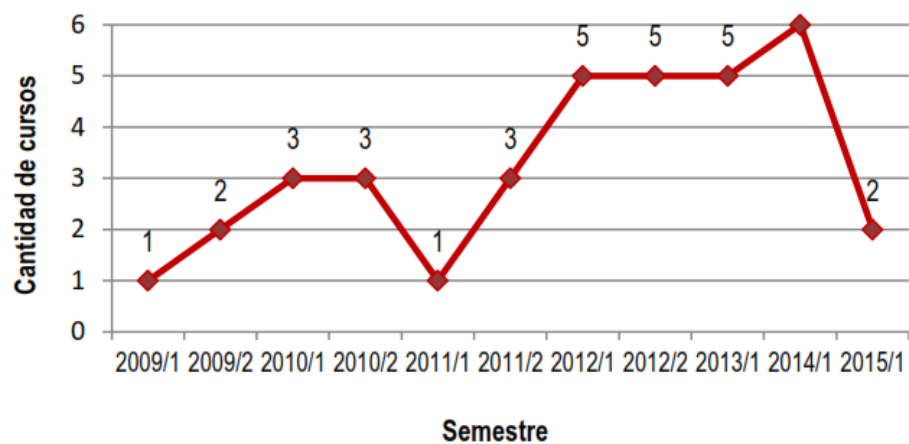




**Cantidad de matrículas en cursos del proyecto Bachilleres a la UdeA**



**Cantidad de cursos del proyecto Bachilleres a la UdeA**





## F. Articulación del estudio en el marco del proyecto CAPES – COLCIENCIAS

Esta investigación se encuentra articulada con un proyecto de investigación que se realiza en el marco de un programa de cooperación internacional para el desarrollo de proyectos conjuntos entre investigadores de Colombia y Brasil, en este sentido COLCIENCIAS en Colombia, aprobó el proyecto de investigación titulado “La formación posgraduada de profesores de matemáticas en un ambiente de educación online” con código N° 111562838729 de la convocatoria 628 de 2013; este proyecto se desarrolla de manera conjunta entre investigadores de los grupos, *Educación Matemática e Historia* (EDUMATH) de Colombia y el *Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática* (GPIMEM) de Brasil.

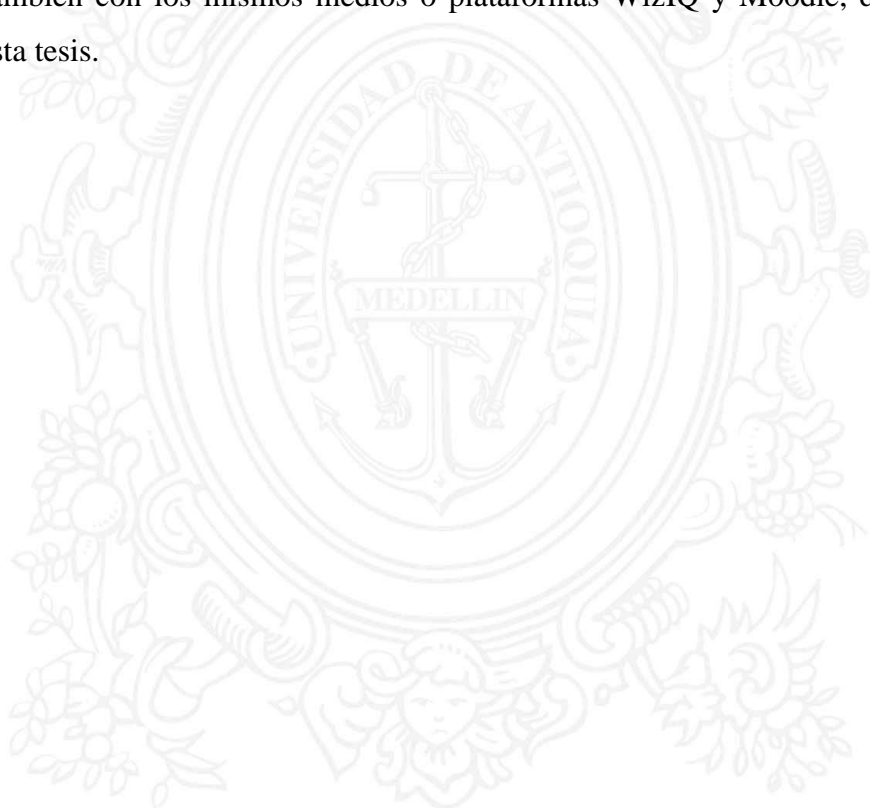
Este proyecto de investigación aborda una problemática de interés para ambos países, relacionada con la formación posgraduada de profesores que se realiza en ambientes virtuales; en el caso de Colombia, se enfoca en el contexto de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas que ofrece la Universidad de Antioquia de manera virtual, a través de la unidad de virtualidad Ude@. En este orden de ideas, con el desarrollo de este proyecto, se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación ¿Cuáles son los elementos que deben tenerse en cuenta para desarrollar procesos de formación posgraduada en ambientes online para profesores de matemáticas, de tal manera que atienda a las necesidades e intereses del docente en relación directa con el contexto?. Con el propósito de realizar aportes teóricos y metodológicos en este campo investigativo.

De manera específica, este proyecto centra su atención en la educación a distancia virtual, la modelación matemática, la visualización y la formación posgraduada de profesores de matemáticas, estableciendo reflexiones sobre la manera cómo se abordan estos aspectos en la Maestría de enseñanza de las matemáticas, con el propósito de establecer aspectos teóricos y metodológicos en este campo.





Los resultados de la investigación presentada en esta tesis, contribuyen de manera directa con el proyecto CAPES – COLCIENCIAS, teniendo en cuenta que los aportes teóricos relacionados con la interacción, pueden ser empleados de manera semejante en los cursos de matemáticas que se desarrollan en ambientes virtuales con características semejantes a las de Ude@, tal como se planteó en las conclusiones de esta tesis, que en este caso del proyecto, se articulan de manera directa al contexto de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, ya que se desarrolla también con los mismos medios o plataformas WiziQ y Moodle, descritos en el desarrollo de esta tesis.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3