UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación

Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico

Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

LEIDY CATERINE CARTAGENA VILLEGAS

GUADALUPE SOSSA GALLEGO

Asesora

HILDUARA VELÁSQUEZ ECHAVARRÍA

Dedicatoria

Dedicamos este trabajo a los niños y niñas participantes y a los que puedan ser beneficiados con los frutos de esta investigación, dado que ellos son la razón de ser de nuestra vocación y compromiso con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Agradecimientos

A la Institución Educativa La Asunción por acogernos y brindarnos el espacio para realizar la Práctica Pedagógica de la cual surge esta investigación.

A nuestra asesora Hilduara Velásquez Echavarría por emprender a nuestro lado este camino de formación e investigación, orientarnos y compartir sus conocimientos con paciencia, sabiduría y amor; lo que permitió valiosas transformaciones en los estudiantes y en nosotras como maestras en formación.

A nuestras familias por brindarnos apoyo y acompañamiento incondicional durante este proceso de crecimiento personal y profesional.

Resumen

El trabajo de investigación se realizó en el marco de la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Se indagó por el fortalecimiento del proceso de Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico en estudiantes del grado 4° de la Institución Educativa La Asunción. La fundamentación teórica se basó en tres conceptualizaciones: el Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2014; Godino, Batanero y Font, 2007); el Razonamiento Algebraico (Godino y Font, 2003; Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Kaput, 2000); y la Resolución de Problemas como proceso de pensamiento matemático (Santos, 2008; MEN, 1998; 2006).

La investigación se desarrolló bajo el enfoque cualitativo orientada por la metodología de Investigación Acción Educativa (Restrepo, 2004). En esta investigación se buscó refinar el proceso de Resolución de Problemas a través de la implementación de tareas asociadas al Razonamiento Algebraico. Las tareas son analizadas a partir de las entidades primarias y las dimensiones duales presentadas en el Enfoque Ontosemiótico.

Durante la experiencia de aula y en las diferentes tareas realizadas por los estudiantes, se evidencian transformaciones en la práctica matemática; dado que logran resolver problemas, identificar patrones y regularidades a través de procesos de generalización, utilizando expresiones algebraicas.

Palabras clave: Razonamiento Algebraico, Resolución de Problemas, Generalización, Enfoque Ontosemiótico.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Abstract

The research was developed in the Pedagogical Internship framework of Basic Education Teaching degree with Emphasis in Mathematics; inquiring into the strengthening of Solving Problems process associated with Algebraic Reasoning in 4th grade students from Institución Educativa La Asunción. The theoretical foundation is based on three conceptualizations: Onto-semiotic Approach (Godino, 2014; Godino, Batanero & Font, 2007); Algebraic Reasoning (Godino & Font, 2003; Bolea, Bosch & Gascón, 2001; Kaput, 2000); and Solving Problems as a process of mathematical thinking (Santos, 2008; MEN, 1998-2006).

The research was conducted under the qualitative approach, guided by the Methodological Approach of Action Research (Restrepo, 2004). This research seeks to refine the Solving Problems process through implementation of seven tasks associated to the Algebraic Reasoning, analyzed from the primary entities and dual dimensions presented in the Onto-semiotic Approach. During the classroom experience and in the different tasks performed by the student, some transformations are evident in the mathematical practice, they are able to solve problems, identify patterns and regularities through generalization process, using algebraic expressions.

Keywords: Algebraic Reasoning, Solving Problems, Generalization, Onto-semiotic Approach.

Tabla de Contenido

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Lista de Figuras

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Lista de Imágenes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Lista de Anexos

Capítulo 1
Contextualización

Descripción del contexto

La Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas para esta investigación, se realizó en la Institución Educativa La Asunción, Institución de carácter público, adscrita a la Secretaría de Educación de Medellín, la cual ofrece el servicio educativo desde el grado preescolar hasta grado 11° en dos jornadas: mañana y tarde, femenino en Bachillerato y mixto en Preescolar y Básica Primaria. Se encuentra ubicada en el barrio Santa Cruz, comuna dos al nororiente del Municipio de Medellín.

A la Institución asisten estudiantes del mismo barrio y de algunos otros que se encuentran aledaños; los hogares de los estudiantes tienen diferentes conformaciones familiares; algunos de ellos provienen de familias monoparentales; que se unen para conformar familias extensas; mientras otros provienen de familias nucleares (están conformadas por los progenitores y los hijos). Generalmente los padres de familia se desempeñan como empleadas del servicio doméstico, conductores, ayudantes de construcción, pequeños comerciantes, vigilantes, entre otros; sin embargo, algunos de ellos tienen formación académica, técnica y tecnológica, lo que hace que algunas familias tengan mejores ingresos y le posibiliten condiciones más favorables a los hijos.

La Institución maneja la modalidad de rotación del estudiantado, es decir, hay un salón dispuesto para cada área, dotado con computador, DVD y grabadora; se cuenta con una biblioteca con libros de texto y material concreto que en el caso del área de matemáticas son: rompecabezas, dominós, ajedrez, loterías, bingos, fichas, sólidos geométricos, tangram, entre otros; que son implementados en el aula como apoyo a la enseñanza de las matemáticas. Estos recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales que ayudan a la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las situaciones problema que permitan el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes (MEN, 2006); de esta manera posibilitan la estructuración de diversas tareas donde los estudiantes tengan la oportunidad de construir de conceptos, fortalecer habilidades matemáticas, y consolidar distintos procesos y tipos de pensamiento matemático.

El modelo pedagógico que adopta la Institución para la formación y transformación de la sociedad, es el modelo cognitivo, cuyo propósito principal es el desarrollo integral del estudiante, tanto individual como colectivo; enfocados en la pedagogía del amor y el aprendizaje armonioso, donde el estudiante hace uso de las habilidades para dar solución a problemáticas propias y del entorno, teniendo en cuenta intereses, necesidades y diferentes estrategias que le permitan acceder al conocimiento. La Institución plantea como Misión, formar en la dimensión espiritual, fortaleciendo la práctica de valores y el desempeño académico con capacidades críticas e innovadoras. Para el 2020 se propone ser una Institución de calidad y de gran prestigio por la formación integral y alto nivel académico, abierta a las nuevas tecnologías y a los retos que la sociedad requiere.

El plan de área de matemáticas está orientado bajo las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN) con los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias

Matemáticas; éste se encuentra estructurado por competencias, unidades de aprendizaje, indicadores de desempeño y objetivos para cada grado, distribuidos en tres periodos escolares. En particular para el grado 4°, se trabaja el área de matemáticas a partir dos asignaturas: aritmética y geometría, en las cuales se desarrollan procesos y componentes relacionados con el pensamiento métrico, numérico, aleatorio y espacial. En lo referente al Pensamiento Variacional, se propone el trabajo con objetos matemáticos como: patrones de cambio, secuencias y variación de manera explícita; sin embargo en las observaciones de clase y revisión del plan de área, se evidencia que la docente le dedica poco tiempo a comparación de los otros pensamientos y no profundiza en los conceptos, aun así, a lo largo de los periodos se trabaja de forma implícita con el fin de posibilitar el aprendizaje de otros contenidos relacionados con los demás pensamientos.

La Práctica Pedagógica se realizó con 40 estudiantes de grado 4° de primaria, cuyas edades oscilaban entre 9 y 11 años, donde predomina el género femenino, en el grupo sólo hay cinco niños, dado que anteriormente era la sede femenina de otra Institución Educativa. Los estudiantes son inteligentes, curiosos, participativos, pero un poco dispersos; la mayoría de ellos cuentan con buen acompañamiento familiar en lo correspondiente a los deberes académicos, sin embargo en algunos casos falta mayor responsabilidad con tareas y talleres, como lo expresa la maestra cooperadora.

De igual forma, se observó que para los estudiantes era difícil acatar las normas del salón de clase y de la Institución en general, a pesar de que los docentes tratan de inculcar el respeto y responsabilidad por la misma, en algunos casos ésta es impuesta en los hogares y el incentivo para el cumplimiento está mediado por el maltrato físico, verbal y psicológico, situación que afecta el desempeño de los estudiantes; otra parte del grupo muestra que interiorizan la norma y se esfuerzan por cumplirla.

En términos generales en los informes de cada periodo los estudiantes presentaban un desempeño básico en el área de matemáticas. En los dos primeros periodos del año escolar 2015, solo el 5% de los estudiantes reprobaron el área, debido principalmente a la falta de atención en las explicaciones, motivación, seguridad en ellos mismos y compromiso con las tareas en el aula y en casa; las cuales son asignadas con el fin de que puedan volver sobre los contenidos y temáticas que se trabajan en clase y así comprender con mayor claridad los conceptos.

Como parte del proceso del diagnóstico se realizó un análisis de los resultados de las Pruebas Saber de matemáticas del grado 3° del año 2014, que corresponde a los estudiantes que para el año 2015 cursaban el grado 4°. En estos resultados, se evidenció que el 35% de los estudiantes están en el nivel mínimo, lo cual indica que ellos se ubican por debajo de lo que debería saber un estudiante en el área de matemáticas de acuerdo a las competencias y componentes que evalúan las Pruebas Saber; el 50% está en un nivel medio y el 15% en un nivel superior.

De otro lado, en la Institución se sigue el libro de texto Matemáticas 4° de la Edición especial de la Serie Proyecto SÉ del MEN en alianza con el Programa Todos a Aprender (PTA), que orienta parte del trabajo en el aula, con las indicaciones de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En él, se establece al final del texto una subunidad dedicada a los Pensamientos Aleatorio y Variacional, en la cual se abordan temáticas referidas a secuencias y variación.

Por último, como parte del diagnóstico, se aplicaron a los estudiantes del grado 4°, cinco actividades enfocadas al Pensamiento Variacional, con el fin de observar y analizar cómo ellos resolvían los diferentes problemas matemáticos en los cuales se hace referencia a la descripción e interpretación de variaciones: en patrones de secuencias, relaciones de dependencia entre cantidades y la construcción de equivalencias; los resultados de estas tareas serán presentadas con profundidad más adelante.

Planteamiento del problema

Los estudiantes del grado 4° de la I. E. La Asunción presentan un desempeño básico en el área de matemáticas, tanto en el proceso que llevan en el aula, como en los resultados de las Pruebas Saber del 2014, en éstas se evidencia que los estudiantes tienen dificultades en las competencias que se evalúan, específicamente en cuanto a la Resolución de Problemas y razonamiento.

En el grado 3°, en lo relacionado con la Resolución de Problemas, las pruebas Saber evalúan los aprendizajes que tienen que ver con: desarrollar situaciones que requieren la estimación de ocurrencia de eventos y; resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa, de análisis de datos, de estimación de medidas con patrones arbitrarios y de utilización de propiedades geométricas para el diseño y construcción de figuras planas; además, de problemas aditivos rutinarios de transformación e interpretación; que son los que generan mayor dificultad en los estudiantes.

Por otro lado, en cuanto a la competencia de razonamiento se evalúan aprendizajes como: el uso de operaciones y propiedades de los números naturales para establecer relaciones entre ellos en situaciones específicas, la construcción de conjeturas que se aproximen a las nociones de paralelismo y perpendicularidad en figuras planas y cuando sobre ellas se ha hecho una transformación, el reconocimiento de diferencias y similitudes entre objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades, la realización de hipótesis acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos, ordenación de objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con atributos medibles y el análisis de regularidades en contextos geométricos y numéricos.

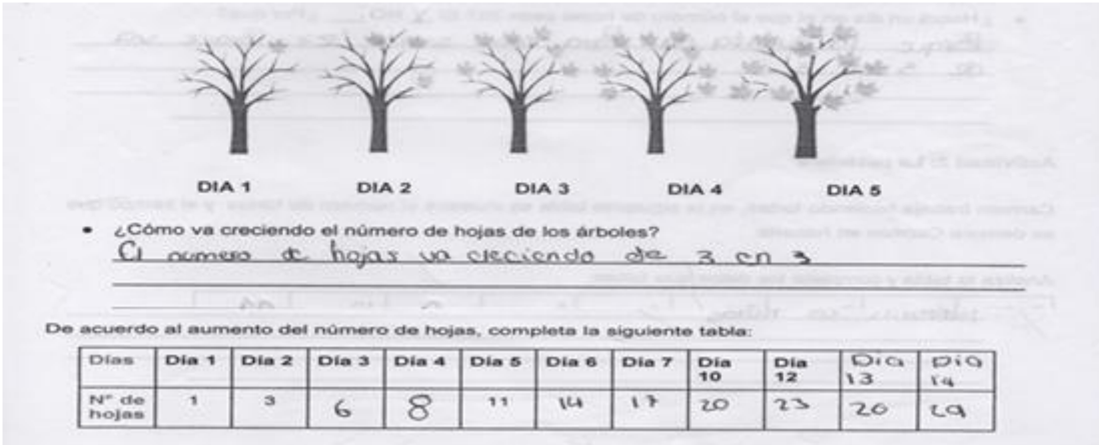
Al respecto, las principales dificultades de los estudiantes radican en establecer conjeturas frente a diversas situaciones matemáticas, lo cual resulta ser un obstáculo para que los estudiantes resuelvan problemas a partir de las experiencias, al establecer un modelo de solución que parta de hipótesis propias.

Con respecto al componente numérico-variacional, referido a la comprensión del concepto de número, su significado, las relaciones que se dan entre los números y las propiedades que están inmersas allí, el reconocimiento de regularidades y patrones, la comprensión de la variación y su descripción en diferentes situaciones; los resultados de las Pruebas Saber arrojan que los estudiantes deben mejorar en la construcción y descripción de secuencias numéricas y geométricas así como el establecimiento de conjeturas acerca de las regularidades en dichos contextos, la descripción de características de un conjunto a partir de los datos que lo representan, el uso de números naturales, sus propiedades y operaciones para establecer relaciones entre ellos, tanto en situaciones específicas como generales y por último la construcción de equivalencias entre expresiones numéricas.

En cuanto al Plan de área de matemáticas, se observa un predominio de los procesos de ejercitación y resolución de las operaciones básicas, se enfatiza en el plan de curso el desarrollo de la parte numérica y aritmética, desde la parte operativa, y sin contextos definidos, ni situaciones problema.

En las actividades diagnósticas se encontró que los estudiantes utilizan diferentes tipos de representación: icónico, lenguaje verbal y simbólico con el fin de dar respuesta a las preguntas planteadas. Estas actividades consistían generalmente en completar secuencias (Actividad 2 y 5), encontrar patrones (Actividad 1 y 5), establecer relaciones de equivalencia, la interpretación y análisis de gráficas y tablas para la solución de diversos problemas (Actividad 3 y 4); en éstas, se hizo evidente que los estudiantes presentan dificultades al momento de reconocer, comprender y generar secuencias y equivalencias entre expresiones numéricas y geométricas utilizando las propiedades de los mismos.

En la actividad 1: "Observando el crecimiento", la cual consistía en analizar el crecimiento del número de hojas de un árbol y de esta manera encontrar el patrón de variación de la secuencia. La mayoría presentan dificultades al seguir las secuencias e identificar patrones y regularidades. En la imagen 1 se observa como los estudiantes no logran identificar que las hojas del árbol crecen de a 2 y 3, ni realizan la equivalencia en la tabla.



DIA 1 DIA 2 DIA 3 DIA 4 DIA 5

- ¿Cómo va creciendo el número de hojas de los árboles?

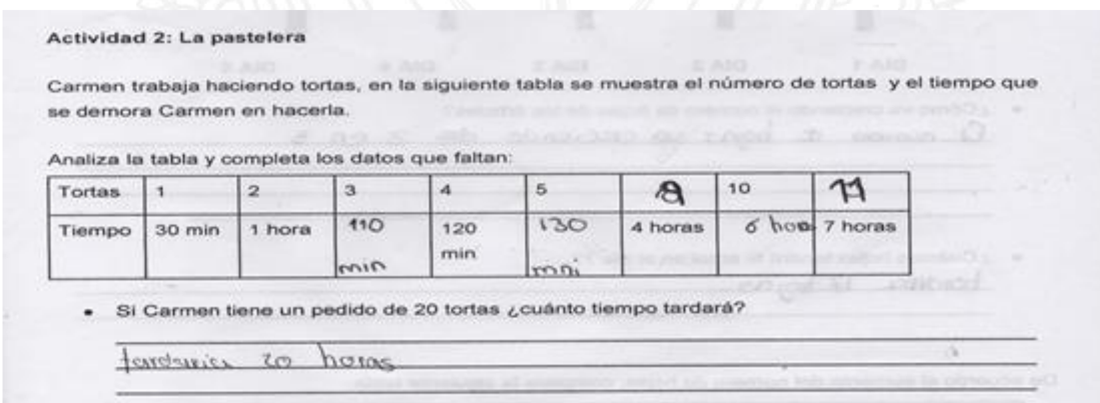
El numero de hojas va creciendo de 3 en 3

De acuerdo al aumento del número de hojas, completa la siguiente tabla:

Días	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7	Día 10	Día 12	Dia 13	Dia 14
Nº de hojas	1	3	6	8	11	14	17	20	23	20	29

Imagen 1. Observando el crecimiento

En la actividad 2: “la pastelera”, los estudiantes debían completar una tabla de acuerdo a una situación con un patrón de tiempo y a su vez realizar algunas conversiones, la mayoría no lograron establecer la equivalencia, ni completar la tabla como se puede observar en la imagen 2.



Actividad 2: La pastelera

Carmen trabaja haciendo tortas, en la siguiente tabla se muestra el número de tortas y el tiempo que se demora Carmen en hacerla.

Analiza la tabla y completa los datos que faltan:

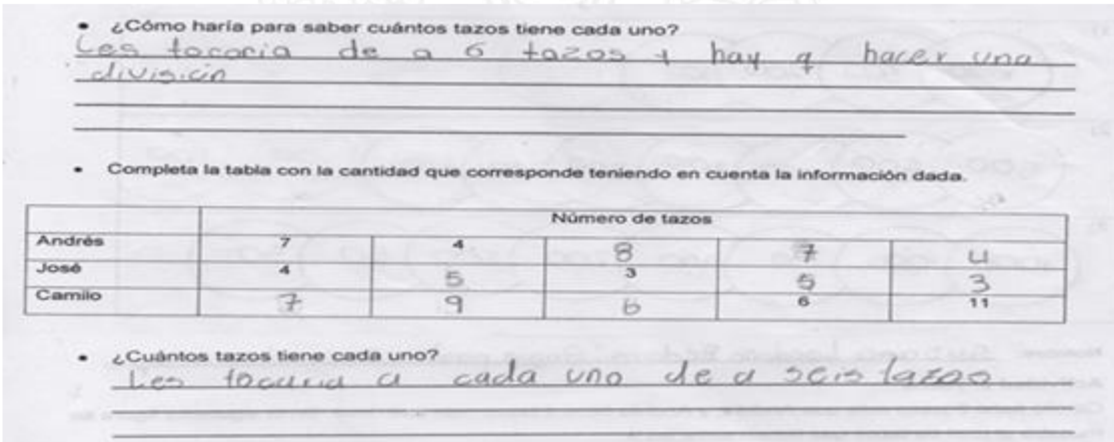
Tortas	1	2	3	4	5	8	10	11
Tiempo	30 min	1 hora	110 min	120 min	130 mi	4 horas	6 hor	7 horas

- Si Carmen tiene un pedido de 20 tortas ¿cuánto tiempo tardará?

tardaria 20 horas

Imagen 2. La pastelera

En la revisión de las actividades 3 y 4, se evidenció que los estudiantes presentaron dificultades en interpretar, seguir las indicaciones que se plantearon para la solución a dichas situaciones y establecer relaciones de equivalencia; de esta manera los estudiantes en su mayoría no logran comprender el enunciado ni realizan un proceso claro y organizado en el que recurran a conceptos y operaciones que les ayude a dar respuesta a las preguntas.



- ¿Cómo haría para saber cuántos tazos tiene cada uno?

Les tocaria de a 6 tazos y hay q hacer una division

- Completa la tabla con la cantidad que corresponde teniendo en cuenta la información dada.

	Número de tazos				
Andrés	7	4	8	7	4
José	4	5	3	5	3
Camilo	7	9	6	6	11

- ¿Cuántos tazos tiene cada uno?

Les tocaria a cada uno de a seis tazos

Imagen 3. Los tazos

Y por último, la actividad 5: “Secuencias pictóricas” consistía en identificar el patrón de formación y completar las secuencias pictóricas y numéricas. Al revisar los procesos de los estudiantes se evidenció que gran parte de ellos tuvieron dificultad en encontrar el patrón de formación en la secuencia pictórica, factor que no ocurrió en las secuencias numéricas, fue fácil en la medida que el aumento estaba relacionado con el dinero; aun así, a algunos se les dificultó cuando tenían que aplicar la reversibilidad en las secuencias que iban en retroceso.

Actividad 5 .

1. Descubre cómo varian las figuras y rellena los espacios faltantes :

¿Qué figura irá en la posición 15? Explica cómo lo encontraste.

Abria un cuadrado
contando apartir de triangulo

¿Qué figura irá en la posición 12? ¿Por qué?

Abria la bolita arriba
tambien contando apartir de la bolita arriba

¿Cómo veria la figura de la posición 20? ¿Cómo lo descubriste?

Quedaria abajo
contando apartir de abajo

Dibuja cómo seria la figura que está dos posiciones antes que la primera.

Según la variación en cada reloj. ¿qué hora tendria que haber en el reloj que esté en la posición 8 ?

serian las 4:05

Imagen 4. Secuencias pictóricas

En relación con los resultados de las actividades diagnósticas y con referencia los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para los grados 4° y 5°, se aprecia que los estudiantes del grado 4° tienen dificultades a la hora de leer y comprender indicaciones, analizar, interpretar y explicar variaciones, identificar relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad y construcciones de igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Estos anteriores aspectos permiten generar la pregunta de investigación del presente proyecto: ¿Cómo fortalecer el proceso de Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico, en los estudiantes del grado 4° de la Institución Educativa La Asunción?

Objetivo General

Refinar[1] el proceso de Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico, en los estudiantes del grado 4° de la Institución Educativa La Asunción.

Justificación

En el contexto de la Educación Matemática existe una relación entre el Razonamiento Algebraico y el Pensamiento Variacional. Ambas conceptualizaciones se refieren a una serie de acciones y procesos matemáticos necesarios para generar refinamientos en el desarrollo y aprendizaje de los estudiantes en torno al estudio de secuencias, regularidades, reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, relaciones de orden, de equivalencia, representaciones simbólicas, gráficas, funciones, ecuaciones, variables, entre otras.

---

[1] Entendiendo **refinar** como perfeccionar algo, adecuándolo a un fin determinado (RAE). De acuerdo a las pretensiones del proyecto, refinar, se asume como un proceso que permita mejorar y perfeccionar las conceptualizaciones, los conocimientos matemáticos previos, así como los procesos y acciones que tienen lugar en la constitución de nuevos conocimientos referidos en este caso en particular, al razonamiento algebraico. Además, está en concordancia con la metodología de investigación, el enfoque de la Investigación Acción Educativa, la cual se desarrolla principalmente en tres fases: la deconstrucción, la reconstrucción y la evaluación de la práctica reconstruida, con el propósito de transformar los procesos de aprendizaje.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

En el contexto colombiano se habla de Pensamiento Variacional y nivel internacional de Razonamiento Algebraico, sin embargo, al hacer un rastreo de lo que concierne a cada uno, es posible plantear que entre ambas conceptualizaciones existen similitudes y aspectos coincidentes en cuanto a los procesos y objetos matemáticos, los cuales serán expuestos con más detalle en el capítulo correspondiente al marco teórico.

En los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas se establece que “el Pensamiento Variacional se desarrolla en estrecha relación con otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el métrico y el aleatorio)” (MEN, 2006, p.66); de tal manera que se transversalicen los diferentes conocimientos. Este proyecto posibilita el desarrollo de dicho pensamiento, a través del fortalecimiento de la Resolución de Problemas, relacionados principalmente con el estudio de regularidades, identificación de patrones, secuencias, interpretación de variaciones y relaciones de equivalencia; para posibilitar el acercamiento a la generalización.

El Pensamiento Variacional está asociado al reconocimiento, percepción, identificación, caracterización, descripción, modelación y representación de la variación en distintos sistemas o registros simbólicos (MEN, 2006). De esta manera, al ser un pensamiento complejo e integrador debe ser cultivado desde los primeros años escolares partiendo de distintos caminos y aproximaciones que causen interés, curiosidad y cuestionamientos relevantes orientados hacia la comprensión, el uso de los conceptos y los procedimientos de operaciones más complejas, teniendo en cuenta cómo los sistemas analíticos definirán la forma de lograr el aprendizaje de conceptos, procesos y aplicaciones de manera significativa y en contexto. Además, el

Pensamiento Variacional es considerado como uno de los pensamientos que debe trabajarse en la escuela primaria, dado que brinda herramientas necesarias para que los estudiantes se puedan enfrentar a problemas de la cotidianidad, basados en el estudio de la variación, el cambio y la modelación de situaciones de distinta índole.

El estudio de la variación se convierte en base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos, los cuales están relacionados intrínsecamente con los procesos de abstracción presentes en el estudio de diversos conceptos, operaciones y variaciones o transformaciones que sufren de acuerdo a la manipulación que se le da a los objetos matemáticos y al análisis que se haga de los mismos. “Muchos de los conceptos de la aritmética y la geometría se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad atrayendo más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional” (MEN, 2006, p. 69).

En la básica primaria emergen ciertos modos de Pensamiento Algebraico con gran naturalidad, lo cual facilita el aprendizaje significativo de los diversos conceptos que lo componen, con el fin de evitar dificultades en los grados superiores en cuanto a la comprensión de temáticas más complejas (Mora, 2012). Además, en el contexto colombiano, se establece el desarrollo del Pensamiento Variacional desde 1° grado de primaria y no exclusivamente en los grados de la secundaria.

En este sentido, Introducir el Álgebra en la Educación Primaria, permite que los estudiantes tengan una mejor comprensión de las Matemáticas y logren aprender con facilidad conceptos más complejos en los grados superiores, este pensamiento coincide con los planteamientos de Mora

(2012) y Kaput (1998 - 2000) gracias a que en primaria se ha iniciado un proceso de acercamiento a objetos matemáticos, relaciones entre ellos y la implementación de tareas que lo requieran. Todo esto permite que el estudiante movilice conocimientos en torno al tratamiento de generalizaciones, validaciones, relaciones de orden, de equivalencia, identificación de patrones de formación en secuencias numéricas, icónicas, simbólicas, entre otros, que lo lleven a la producción de nuevos conocimientos.

Lo anterior muestra la importancia del desarrollo de estos procesos en el aula; sin embargo, en diálogos con algunos docentes de la institución se evidencia una postura tradicional y limitada del álgebra escolar, considerándola simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados. En esta visión, los objetos que se ponen en juego en la "aritmética generalizada" son los mismos- números, las operaciones y relaciones entre ellos; por ende no tienen cabida en los primeros años escolares. En esta concepción el estudio del álgebra se limita a la educación secundaria.

Plantear tareas asociadas al Razonamiento Algebraico, va a posibilitar a largo o mediano plazo, mejores desempeños de los estudiantes, no sólo en los resultados institucionales, sino también en las Pruebas Saber en cuanto al componente numérico-variacional. Se concibe entonces la incorporación del Razonamiento Algebraico elemental en primaria como facilitador de una mejor comprensión de las matemáticas (Kaput, 2000; Davis, 1985; Vergnaud, 1988). De acuerdo con Aké, Godino y Gonzato (2013) a medida que se desarrolla el Razonamiento Algebraico, los estudiantes perfeccionan las habilidades comunicativas al hacer uso de diferentes tipos de leguaje para plantear expresiones algebraicas.

El Pensamiento Variacional "[…]cumple un papel preponderante en la Resolución de Problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales, las sociales y las matemáticas mismas" (MEN, 2006, p.66). En este sentido, la Resolución de Problemas tiene múltiples beneficios en el aprendizaje, permite que los estudiantes doten de sentido los conceptos y procesos mediante la aplicación, dado que "Las actividades de Resolución de Problemas posibilitan la aplicación de conocimientos, conceptos, procesos y el descubrimiento de otros nuevos" (Camacho y Santos, 2004, p 45); por tal razón, la Resolución de Problemas:

> [...] debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. [...] deberá permear el currículo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos. (MEN, 1998, pp.74-75)

En este proceso, los estudiantes pueden desarrollar y potencializar un método inquisitivo[2], como herramienta posibilitadora de la creación de diferentes formas de representar y explorar las ideas matemáticas que van construyendo. Ellos tendrán la oportunidad de producir, desarrollar, analizar o transformar las maneras en las que comprenden y resuelven problemas como resultado de un proceso en el que se cuestionen por las situaciones que se le presenten y puedan responder a ellas a partir de sus posibilidades.

[2] El método inquisitivo consiste en cuestionarse preguntas que hagan reflexionar con profundidad y constancia sobre formas de representar y explorar las ideas matemáticas. Se trata de construir, desarrollar, refinar o transformar las formas de comprender y resolver problemas (Callejo *et al*., 2015).

Capítulo 2

Marco teórico

El marco teórico se basa principalmente en tres fundamentaciones teóricas: el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2014), sobre el cual se cimenta la conceptualización del Razonamiento Algebraico (Godino y Font, 2003; Aké *et al.*, 2013) y la Resolución de Problemas como proceso de pensamiento matemático (Santos, 2008; MEN 1998-2006).

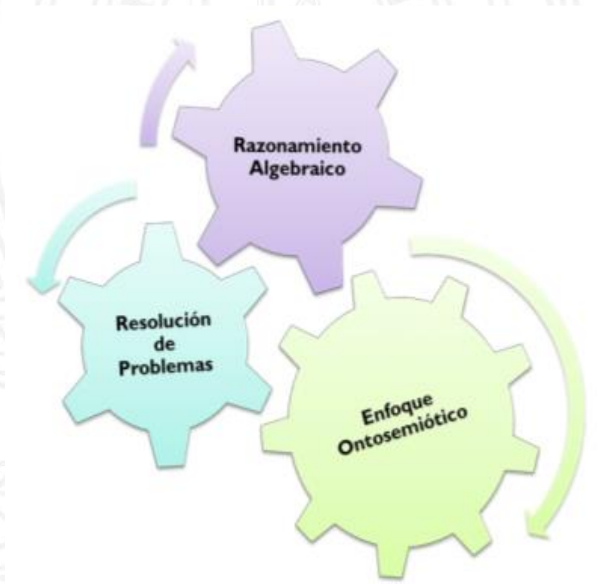


Figura 1. Esquema del marco teórico

El Razonamiento Algebraico se toma de referentes internacionales (Godino y Font, 2003; Kaput, 1999; Mason, 1996; Molina, 2009; Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Aké *et al.*, 2013). Esta conceptualización en el contexto colombiano se asocia con el Pensamiento Variacional (MEN, 1998-2006; Vasco, 2002-2006; Castro, 2012; Mora, 2012). En ambas conceptualizaciones se encuentran coincidencias que se detallan en el desarrollo del marco teórico.

Este proyecto giró en torno a la Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico. Ambas conceptualizaciones están estrechamente ligadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Uno de los propósitos de dicha enseñanza es brindar herramientas para que el estudiante logre constituir conocimientos en y para la vida, favoreciendo en ellos el desarrollo de capacidades y habilidades con las cuales puedan interactuar significativamente con el mundo físico e intelectual al resolver problemas de la cotidianidad, dado que la matemática "es un potente instrumento de intervención en las estructuras de la realidad a nuestro alrededor" (Guzmán, 1997, p. 4).

En este sentido, estas dos fundamentaciones se relacionan con el Enfoque Ontosemiótico dado que brinda sustento teórico y abre las posibilidades de análisis de los procesos que tienen lugar en las prácticas matemáticas.

Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática se concibe como "un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (Godino, 2014, p. 4).

De manera más específica, el EOS posibilita el estudio del Razonamiento Algebraico con "el análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, el desarrollo cultural y personal en el seno de las instituciones escolares" (Godino *et al.*, 2007, p.1) donde se logran constituir "[…] las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos" (Godino *et al*, 2009, p.3). Así, la matemática se articula a la parte social de cada sujeto dotando de sentido las actividades escolares. En este enfoque, dentro de las prácticas matemáticas, se consideran los objetos matemáticos como:

> El sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos (Godino, 2014, p.12).

Los objetos matemáticos son desarrollados a través de las tareas que hacen parte de las entidades primarias (lenguaje, proposiciones, procedimientos, argumentación y conceptos) (Godino, 2014); las tareas se conciben como problemas, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas y ejercicios que inducen a la actividad matemática; en este trabajo, éstas, estarán comprendidas en las cinco entidades propuestas por el autor. El ***lenguaje*** es el mediador para la planeación y solución de las tareas a través de los diversos registros y representaciones; los ***procedimientos*** se refieren a las acciones que emprende el sujeto ante ellas para llegar a una solución; las ***proposiciones*** y ***conceptos*** se aplicarán para la solución de dichas tareas o serán constituidas por los sujetos en este proceso; por último, las ***argumentaciones*** son empleadas por los estudiantes para la validación y explicación de los resultados alcanzados.

Figura 2. Relación objetos matemáticos y entidades primarias. Adaptación de (Godino *et al*., 2007)

Las prácticas matemáticas pueden ser clasificadas en facetas o dimensiones duales que "(...) permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización" (Godino *et al*., 2007, p.9) los cuales permiten un análisis minucioso de cada uno de los procesos y de la participación en la actividad matemática, mediante el cual se puede esclarecer la naturaleza del objeto matemático considerado como una entidad abstracta o ideal.

Es así como se busca "superar la visión parcial y sesgada de los objetos matemáticos aportada por la perspectiva conceptualista/formalista en la que los objetos matemáticos se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos, o simplemente como una entidad abstracta o ideal" (Godino *et al*, 2007, p.11).

Las facetas o dimensiones duales son:

La dimensión dual ***Personal – institucional***, la primera se refiere a las prácticas y construcciones cognitivas que realiza cada sujeto individualmente como resultado del pensar y accionar ante una cierta clase de problemas, y el segundo, también se refiere a las prácticas y construcciones cognitivas pero realizadas por un colectivo como resultado del diálogo, el convenio y la regulación de dichas acciones.

En cuanto a la faceta de lo ***Ostensivo – no ostensivo*** siendo ambas conceptualizaciones relativas al lenguaje, la primera hace referencia a los objetos públicos, es decir, objetos que son reconocidos por una sociedad y los no ostensivos son las ideas o pensamientos que no son perceptibles por sí mismos ya sean personales o institucionales.

La faceta de la ***Expresión – contenido*** se constituye a través de funciones semióticas que establecen una relación lineal entre objetos, en la cual se determina un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado).

Otra de las dimensiones duales es lo ***Extensivo – intensivo***, esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general respectivamente, que sin duda es una cuestión clave en la constitución y aplicación del conocimiento matemático.

Por último se encuentra la faceta ***unitario – sistémico***, en la cual, los objetos matemáticos participan como entidades unitarias que hacen parte de los conocimientos previos de los estudiantes; mientras que otros objetos, participan como sistemas que se deben descomponer para el estudio y análisis.

Razonamiento Algebraico (RA)

El Razonamiento Algebraico se plantea desde diversas investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática y ha sido concebido como factor fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas que facilitan la constitución de nuevos conocimientos, en procesos en los cuales los objetos matemáticos sean dotados de sentido y usados en la interacción con el mundo real. Para Godino y Font (2003) el Razonamiento Algebraico.

> Implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central (p. 774).

En este sentido, el RA está compuesto por un conjunto de procesos, en los cuales el estudiante va refinando conocimientos y habilidades de forma gradual, acercándose cada vez más a construcciones formales. Mora (2012) al igual que Godino y Font (2003), conciben el RA como el proceso que conlleva a representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas, la cual ha llegado a ser conocida como “la ciencia de los patrones y el orden” y en la que es necesario el desarrollo del lenguaje y simbolismo para que como lo menciona Kaput (1999), los estudiantes establezcan generalizaciones sobre datos o relaciones matemáticas, las argumenten y las expresen formalmente.

El RA es un proceso en el que los sujetos se ven en la necesidad de establecer conjeturas, justificar, argumentar y caracterizar comportamientos o variaciones, entre otras operaciones mentales; encaminados hacia la generalización y a su vez a la formalización de las producciones matemáticas.

En este punto es necesario aclarar que aunque este trabajo está enfocado al Razonamiento Algebraico, se alude tanto al Pensamiento Algebraico como al Pensamiento Variacional, los cuales no se desconocen, ni se contradicen, sino que se articulan de manera dinámica en lo conceptual y en lo práctico, por esta razón se explica a continuación las características de cada uno con el fin de establecer las coincidencias.

El Pensamiento Algebraico, está asociado al proceso de algebrización que supone un trabajo cada vez más explícito de generalización (Bolea *et al.*, 2001), el cual está ligado con la noción de variabilidad y estructura algebraica, y donde la simbolización es preponderante en dichas construcciones conceptuales y prácticas. Mora (2012) hace énfasis en la importancia de incluir la enseñanza del álgebra en primaria a través de tareas que posibiliten a los estudiantes de primaria el desarrollo del Pensamiento Algebraico. Por esta razón destaca el "Early Algebra" (Kaput, 1998) como una propuesta, la cual tiene dentro de sus pretensiones desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico en primaria a través de: secuencias, patrones (núcleo o unidad de patrón), representaciones, gráficos, símbolos, y otros. Este enfoque "[…] abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización [...]" (Socas, 2011, p.14).

Dicha propuesta ha influenciado diversos proyectos curriculares como el de Molina (2009) los cuales buscan construir estrategias que permitan desarrollar el Pensamiento Algebraico tanto en la educación primaria como en la secundaria. La autora establece que es posible enseñar álgebra en primaria para facilitar la transición e integración de la aritmética con el álgebra, debido a que estos pensamientos han sido separados, lo cual acentúa y prolonga las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a procesos algebraicos de mayor complejidad.

El Pensamiento Algebraico se encuentra en relación con otros pensamientos que ponen su atención en el estudio de la variación y el cambio, que a pesar de que son estudiados con mayor profundidad por medio de sistemas algebraicos y analíticos, se encuentran en estrecha relación con conceptos y procedimientos referidos a lo numérico, geométrico, métrico y aleatorio; mediados por actividades de visualización, exploración y manipulación, las cuales conllevan a la generalización de patrones, leyes y reglas, que pueden expresarse no solo con representaciones en el sistema algebraico, sino también las gestuales, del lenguaje natural, técnico, las numéricas, las gráficas y las icónicas que tienen como función ayudar en la construcción y reproducción de procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen un patrón (Mora, 2012; MEN, 2006).

De acuerdo con lo anterior, se encuentran similitudes entre el Razonamiento Algebraico y el Pensamiento Algebraico, en cuanto al proceso de generalización; “las expresiones Razonamiento Algebraico y Pensamiento Algebraico se toman como equivalentes, aunque algunos autores establecen distinciones entre las nociones cognitivas correspondientes” (Godino ,Castro, Aké y Wilhelmi, 2012, p.4).

Por otro lado, el MEN (2006) considera que el Pensamiento Variacional involucra conceptos, procedimientos y métodos relacionados con:

> (...)el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p. 66).

Procesos que llevan a los estudiantes a consolidar el desarrollo y aplicación de competencias matemáticas del entorno. Por esta razón es necesario que en los primeros grados escolares se dé lugar al estudio de regularidades (entendidas como unidades de repetición) y criterios para que los estudiantes identifiquen con mayor facilidad el patrón que se repite de manera periódica.

De igual manera, se establece en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que el desarrollo de dicho pensamiento le permite al estudiante "analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas" (MEN, 1998, p.49). En otras palabras lo que se pretende es que los estudiantes desarrollen procesos de pensamiento que le permitan identificar, interpretar, describir, modelar y transformar situaciones o fenómenos de variación y cambio con los que puedan llevar a cabo procesos de pensamiento matemático.

Al respecto, en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, se presentan sugerencias para el estudio del Pensamiento Variacional, donde el estudiante deba:

> Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes,

> oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas (MEN, 2006, p. 67).

Aunque dichas actividades se lleven a cabo en la primaria, se debe tener presente que el desarrollo es lento y complejo, inicialmente los estudiantes generalizan patrones aritméticos y luego el álgebra sirve de base para modelar situaciones en las que hay aspectos de la variación que cambian o que permanecen constantes, por ello no solo debe estar claro en qué momento hacer uso de ciertas variables de acuerdo a los diferentes significados e interpretaciones, sino también conceptos, procesos y estructuras algebraicas que ayuden en la representación y constitución de modelos claves para la Resolución de Problemas en diversos contextos.

Es decir, el Pensamiento Variacional "[...] cumple un papel preponderante en la Resolución de Problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales, sociales y las matemáticas mismas" (MEN, 2006, p. 66).

Por consiguiente, también se encuentran similitudes entre el Pensamiento Variacional y el Razonamiento Algebraico, principalmente en el trabajo del álgebra a partir de la primaria con el estudio de patrones o regularidades presentados en diferentes contextos y simbologías; la aproximación a la generalización y la estimulación para el desarrollo de habilidades lógico matemáticas que permitan que el estudiante llegue a un nivel más avanzado con bases firmes para responder a las necesidades propias de la realidad en cuanto a la variación y el cambio.

A manera de conclusión como se ha mostrado en las tres concepciones teóricas: Razonamiento Algebraico, Pensamiento Algebraico y Pensamiento Variacional, se entrevé que son coincidentes en los aspectos correspondientes a esta investigación y que se pueden observar en la Figura 3.

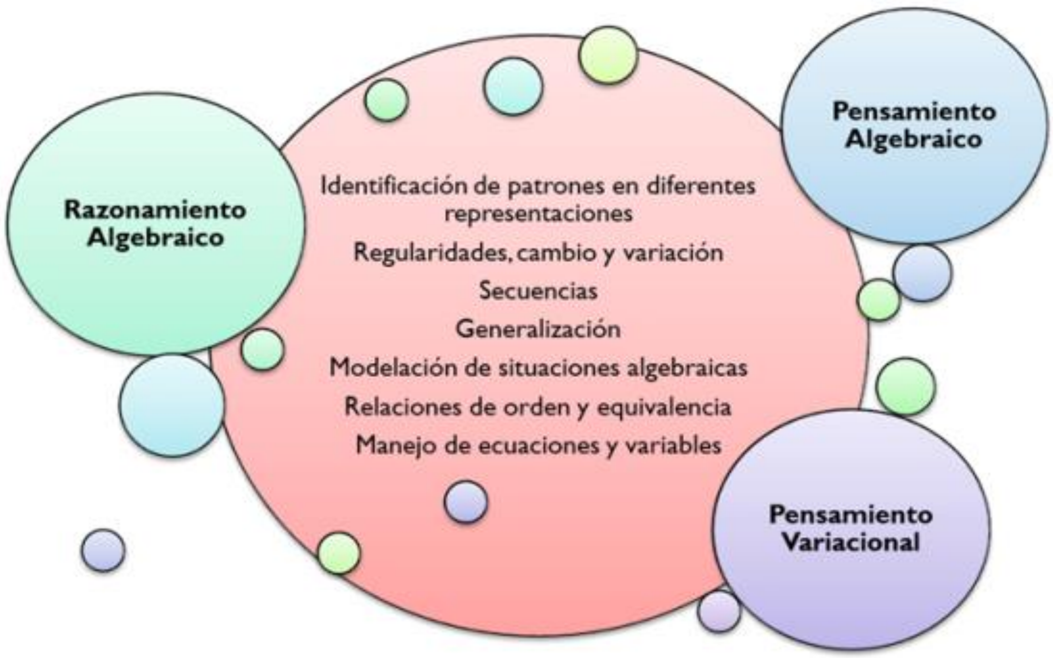


Figura 3. Relaciones coincidentes entre el R.A, P. Variacional y P. Algebraico

Dadas las coincidencias identificadas en las tres concepciones teóricas, en este proyecto se adopta el término de Razonamiento Algebraico en relación con el proceso de Resolución de Problemas, los cuales se entretejen en el proceso de generalización en cuanto a la constitución de objetos matemáticos como los patrones, las secuencias y las relaciones de orden y de equivalencia, como se muestra en la Figura 4.

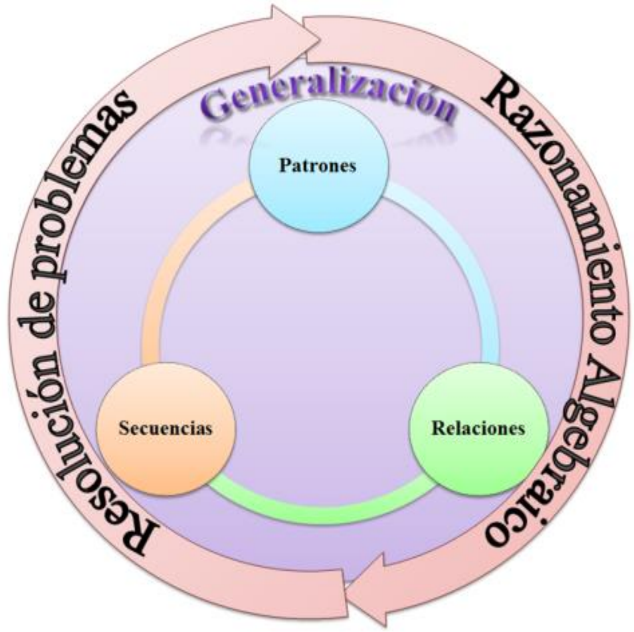


Figura 4. La Generalización como componente del R.A asociado a la Resolución de Problemas

Generalización. Proceso que se encuentra en el centro del Razonamiento Algebraico, dado que al realizar una operación de manera reiterativa se hace necesario recurrir al álgebra, la cual brinda un lenguaje sencillo para describir la acción que se está realizando (Aké, 2013). Se concibe entonces, como objeto y medio de pensamiento y comunicación (Dörfler, 1991; Zaskis y Liljedahl, 2002) que comprende la unión y representación de ideas en las cuales se expresan relaciones matemáticas importantes.

"Generalizar es inducir de casos particulares, identificar aspectos en común, para expandir dominios de validez" (Dreyfus, 1991, p.35) para ello, se llevan a cabo procesos propios de la actividad matemática; debido a la importancia que ésta representa en la producción de conocimiento matemático, Aké (2013) retoma autores como Carraher, Martínez y Shliemann (2008) quienes proponen que una generalización matemática se da cuando se establece una propiedad válida para un conjunto de objetos matemáticos o condiciones, en el momento en que dicho conjunto se amplíe, la propiedad sigue siendo válida para esos nuevos elementos que lo conforman, es decir se generaliza; sin embargo, los autores excluyen procesos de la generalización si éstos no están expresados en lenguaje matemático.

En este orden de ideas, la generalización juega un papel importante en el Razonamiento Algebraico y por lo tanto en el desarrollo del pensamiento matemático.

> La generalización es un rasgo característico del Razonamiento Algebraico, así como los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones). Así mismo, las nociones de relación, operación y estructura son propias del álgebra (Godino *et al*., 2012, p.5).

Al respecto, Mora (2012) expone que existe una serie de fases que se deben dar en el proceso de la generalización, la primera de ellas es **la percepción de un patrón**, que consiste básicamente en visualizar, identificar patrones, regularidades, semejanzas y diferencias entre los términos de la secuencia. La etapa siguiente es denominada **la expresión de la regularidad**, en la cual los estudiantes pasan de visualizar a expresar o comunicar lo que observan e identifican en cierta secuencia. Si bien es cierto que pasar de una a otra fase es complicado para los estudiantes, a los docentes les corresponde orientarlos formulando algunas preguntas que los lleven a realizar estas acciones con mayor facilidad. La tercera etapa se trata del **registro de la regularidad**, es decir, escribir el patrón, sin necesidad de que sea en lenguaje matemático; en ésta los estudiantes tendrán mayor claridad en las ideas que crearon en las fases anteriores. La última etapa se basa en **probar la validez de la regla hallada** mediante la búsqueda, la argumentación, la explicación del patrón hallado y el establecimiento de relaciones entre diferentes expresiones.

En este sentido, “la generalización no se estudia exclusivamente de manera algebraica, ni todas las actividades algebraicas involucran generalización” (Godino *et al.*, 2012, p.491) por lo que es necesario poner especial atención en los procesos algebraicos desarrollados, tener rutas y tareas claras que permitan orientar un camino en el que los estudiantes se vean en la necesidad de retomar elementos matemáticos, que a la vez, impliquen una generalización para interactuar con situaciones y problemas del entorno, además de diversificar los conocimientos. En este sentido, Stacey (1989) establece dos tipos de generalización de acuerdo a cómo se resuelven algunas situaciones; la generalización cercana, se da cuando la situación requiere ser desarrollada paso a paso por medio de un dibujo o contando, y la generalización lejana, tiene lugar cuando dichas situaciones difícilmente se pueden solucionar paso a paso.

> La generalización cercana demanda identificar un esquema numérico que es el patrón de crecimiento de la sucesión numérica, mientras que la generalización lejana implica la coordinación de dos esquemas, el numérico, o identificación del número de elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión, y el espacial, o distribución de los elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión- Radford (como se citó en Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls, 2014).

Patrones. El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del Razonamiento Algebraico, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones (MEN, 2006).

Al respecto se considera que "El núcleo o unidad de un patrón de repetición es la cadena más corta de elementos que se repiten" (Godino y Font, 2003, p.817). Este objeto matemático hace parte indiscutible del Razonamiento Algebraico, el cual se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente.

Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de las sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Se presentan dos tipos de patrones; los **Patrones de repetición,** que se presentan de forma periódica; y los **patrones por recurrencia**, en los que el núcleo cambia según alguna regularidad determinada por los términos de la secuencia; es decir, cada uno de los términos de la secuencia se puede representar con base en los términos anteriores (Bressan y Gallego, 2010).

Secuencias. "Las secuencias son un conjunto de signos (orales, gestuales, físicos, comportamentales, gráficos, numéricos, etc.) ordenados, llamados términos que se constituyen a partir de una regla de repetición de un patrón" (Mora, 2012, p.4). Así mismo, señala que existen diferentes tipos de secuencias:

- Secuencias con el cuerpo, se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos.
- Secuencias manipulativas, se recurre al uso de materiales concretos para manipular, como tapas, fichas de colores, de formas, palillos, dominós, entre otros.
- Secuencias figurativas o icónicas, son figuras que pueden constituir la representación gráfica de las secuencias manipulativas previamente presentadas o simplemente imágenes.
- Secuencias gráficas numéricas, se presentan en gráficos y que se pueden representar con números.
- Secuencias numéricas, se representan básicamente con números.
- Secuencias por recurrencia, cuyos términos se pueden hallar con base en el anterior.
- Secuencias tabulares, se presentan en tablas.

Relaciones de orden y equivalencia. El estudio de las relaciones de orden y equivalencia así como las propiedades son importantes en el estudio del álgebra, y han sido consideradas específicamente en la investigación del álgebra temprana, la cual centra la atención en la comprensión que tienen los estudiantes del signo igual y el significado operacional y relacional, es decir la diferenciación entre el uso del signo igual para señalar el resultado de las operaciones o la equivalencia de dos expresiones Carpenter *et al.*; Stephens; Molina y Castro (como se citó en Godino *et al.*, 2012).

En este punto cabe mencionar que se han establecido dos tipos de relaciones: las relaciones de equivalencia, que conducen más a clasificaciones y las relaciones orden, que conducen a las ordenaciones y seriaciones.

Con respecto a lo anterior, una relación de equivalencia dirige de forma natural a una clasificación, la cual consiste en la partición de la agrupación de elementos en una serie de clases, de manera que dentro de una clase todos los elementos estén relacionados entre sí; es decir, se establece una clase de equivalencia.

En este proceso de clasificación es necesario que se formen subconjuntos o agrupaciones ya sean de objetos, símbolos u otros elementos que lo permitan, de acuerdo a un criterio de igualdad como el color, tamaño, forma, entre otros. Estos elementos que se relacionan mediante un criterio de igualdad ya sea descriptivo, constructivo o funcional y que constituyen una ‘clase’, y los que no se relacionan con éstos se encuentran en otras clases diferentes. Se debe tener en cuenta que en una clase puede existir un único elemento, si no hay otros elementos que se relacionen con él.

Mientras que una relación de orden es una relación definida en un conjunto que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, en la cual se establecen relaciones comparativas entre los elementos de un conjunto y se ordenan ya sea de forma creciente (de menor a mayor) o decreciente (de mayor a menor), de esta manera, los órdenes más comunes son las relaciones $<$ y $>$ en Z y en R.

Existen dos tipos de relaciones de orden, total y parcial, se dice que es total cuando todos los elementos del conjunto sobre el que está definida son comparables por dicha relación, y parcial, si por el contrario existen elementos no comparables.

Resolución de Problemas

La Resolución de Problemas es considerada como “el corazón de la actividad matemática” Halmos y Krygowska (como se cita en Bouvier, 1981). Si un alumno no se plantea y no resuelve diversos problemas no hace matemáticas; este es un proceso que enmarca la construcción, la apropiación y aplicación del conocimiento matemático, el cual lo consolida como una competencia fundamental que todo ser humano debe desarrollar en y para la sociedad (Brousseau, 1983).

La Resolución de Problemas le permite tomar posición y enfrentar múltiples situaciones que se presentan en la vida diaria, de esta manera podrá aprender y aplicar los conocimientos al indagar, analizar, aplicar y evaluar posibles soluciones.

Es así como en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se establece que la Resolución de Problemas es una competencia que requiere de flexibilidad y apertura a nuevas alternativas no necesariamente conocidas, que posibiliten un aprendizaje permanente mediante la búsqueda de un procedimiento adecuado; es decir, el establecimiento de una metodología para la acción y el desarrollo de unas habilidades y actitudes que permitan enfrentar de forma crítica y organizada la realidad para encontrar soluciones con sentido.

Hablar de problemas implica considerar aquellas situaciones que demandan reflexión, búsqueda, investigación y donde para responder hay que pensar en las soluciones y definir una estrategia de resolución que no conduce, precisamente, a una respuesta rápida e inmediata. La aparición del enfoque de Resolución de Problemas como preocupación didáctica surge como consecuencia de considerar el aprendizaje como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones con base en un proceso creativo y generativo Gaulin (como se citó en Coronel y Curotto, 2008).

La enseñanza de las matemáticas desde esta perspectiva, pretende poner el acento en actividades que plantean situaciones problemáticas cuya resolución requiere de analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas. Por tal razón, es necesario que los estudiantes hayan constituido conocimientos declarativos y procedimentales requeridos como indispensables para resolver el problema que se le ha planteado. Esto señala la búsqueda consciente de un modelo que potencie el desarrollo de un estudiante independiente, que en interacción con el conocimiento y el mundo que lo rodea, aprende y organiza el saber como parte de la construcción personal y profesional.

Por otro lado, la Resolución de Problemas es considerado como “El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones (…) de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas” (Lesh y Zawojewski, 2007, p.782), dado que los problemas hacen parte de la vida diaria de los sujetos, lo que implica realizar todo un análisis y constitución de los conocimientos para darle solución; en este sentido, resolver un problema es una actividad que:

> [...] va más allá de hacer una operación y encontrar su resultado, es algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos y responder a esas preguntas (Chamorro y Vecino, 2003, p. 275).

En los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, la Resolución de Problemas se considera como uno de los procesos generales de la Educación Matemática que proporciona el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se presenten estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los estudiantes y a la vez se convierten en ricas redes de interdisciplinariedad (MEN, 2006).

Por lo tanto, la Resolución de Problemas estimula habilidades del pensamiento analítico, crítico y reflexivo respecto a la toma de decisiones e interpretaciones de la situación presentada, a fin de constituir sus propios conocimientos basados en el contexto.

En esta misma línea, la Resolución de Problemas se asume "Como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar respuestas con distintos tipos de argumentos" (Santos, 2008, p.4). Estos argumentos pueden ser verbales, icónicos, algebraicos, entre otros; y la implementación posibilita toda una movilización de conocimientos en el estudiante al unir lo que sabe con nuevos aprendizajes, con el objetivo de hallar una solución.

En el presente trabajo se adopta la postura de Santos (2008) en cuanto a considerar la Resolución de Problemas como una forma, un proceso o una actividad en la cual los estudiantes y el profesor buscan estrategias para resolver situaciones mediante el uso de conceptos propios de la matemática; en este caso, se toman particularmente el estudio del cambio, la variación, la identificación de regularidades, las relaciones de orden y de equivalencia, operaciones, entre otros; y de esta manera lograr el desarrollo del Razonamiento Algebraico, proceso que implica acciones cognitivas de reflexión, análisis, verificación, generalización e interpretación; por lo cual se hace necesario idear un modelo que proporcione una estructura general para resolver diversas tareas y el estudiante logre constituir un conocimiento significativo que le ayude a enfrentar los desafíos de la cotidianidad.

Se considera que los elementos expuestos configuran la red conceptual que fundamenta la propuesta investigativa y el análisis de los procesos llevados a cabo con los estudiantes, en lo relacionado con la Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico desde el Enfoque Ontosemiótico.

Capítulo 3
Metodología

La investigación se realizó bajo el paradigma cualitativo, dado que en éste prevalece el interés por comprender e interpretar las acciones de los estudiantes frente a diversas situaciones, específicamente por y para las matemáticas en el propio marco de referencia de quien actúa; es decir:

> [...] los enfoques de orden cualitativo le apuntan más a un esfuerzo por comprender la realidad social como fruto de un proceso histórico de construcción visto a partir de la lógica y el sentir de sus protagonistas, por ende, desde sus aspectos particulares y con una óptica interna (Sandoval, 2002, p.11).

Así mismo, la investigación se orientó a la comprensión e interpretación de los procesos cognitivos llevados a cabo por los estudiantes al enfrentarse con tareas asociadas a la Resolución de Problemas referidos al Razonamiento Algebraico. Para ello, se pretende estar inmersas como observadoras-participantes en el espacio escolar y así dotar de sentido, comprender y emprender una transformación a nivel general en las experiencias de los estudiantes.

Es un enfoque que se interesa por la "realidad" tal y como la pueden interpretar los estudiantes, respetando el contexto donde ésta es construida; se hablaría entonces de una realidad epistémica que necesita de un sujeto que aprende, en la medida en que es influenciado por una cultura y unas relaciones sociales particulares, en consecuencia, para que ésta realidad pueda ser comprendida dependerá de cómo ese sujeto perciba, piense, sienta y actúe. "La tarea entonces, de comprender esa realidad parte de aceptar la multidimensionalidad de lo humano así como el carácter aproximativo y provisional de dicho conocimiento […]" (Sandoval, 2002, p.36).

Bajo el enfoque interpretativo, el investigador se sumerge en aquello que desea estudiar y valerse de diversas herramientas con el fin de encontrar signos relevantes que permitan otorgar significado y sentido a los datos obtenidos en la práctica de aula, con la idea de interrogar la realidad en cuanto a los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje haciendo énfasis en la subjetividad de los participantes.

La investigación pretende transformar, o mejorar la manera en que los estudiantes perciben, comprenden, analizan y dotan de sentido el mundo y cómo interactúan con el mismo, es por esta razón que la metodología a emplear es la Investigación Acción Educativa (I-A-E) (Restrepo, 2004) siendo ésta una práctica que se centra en el cambio educativo y la transformación social.

La Investigación - Acción (I-A), concebida como una “actividad colectiva que propende la transformación de procesos educativos asociados a procesos sociales y en definitiva por el mejoramiento social” Kemis y Mctaggart (como se citó en Restrepo, 2004); que se hace más efectivo cuando es el maestro quien realiza esta actividad y no queda en manos de investigadores externos sin conciencia pedagógica.

Este tipo de investigación surge de la necesidad de que los maestros comprendan la práctica educativa y la transformen, haciendo una reflexión acerca de ella y busquen nuevas estrategias para mejorar los desempeños de los estudiantes, de esta manera se da una profesionalización orientada al fortalecimiento de las competencias docentes.

En caso específico, la I-A-E se interesa por la enseñanza, la práctica educativa, los procesos académicos, sociales y las relaciones que se entretejen allí. De acuerdo con Restrepo (2004) la I-

A-E se desarrolla en tres fases: Deconstrucción, Reconstrucción y Evaluación de la práctica reconstruida.

La fase de Deconstrucción, se desarrolló en el semestre 2015-1, fase de reconocimiento institucional y de diagnóstico, con miras a delinear la estructura de la práctica en cuanto a debilidades y fortalezas, es decir, una acción reflexiva y crítica respecto a la Práctica Pedagógica.

Por su parte, la fase de Reconstrucción "es una reafirmación de lo bueno de la práctica anterior complementada con esfuerzos nuevos y propuestas de transformación de aquellos componentes débiles, infectivos, ineficientes"(Restrepo, 2004, p.7); es decir, no se trata de empezar de cero y desconocer los hechos exitosos que se han dado en la práctica hasta el momento, sino de repensar y reflexionar la práctica incluyendo experiencias significativas con el fin de pasar de un conocimiento práctico, algo inconsciente a un conocimiento crítico y teórico, construyendo así un saber pedagógico individual. Por lo tanto la labor como docente será aprender constantemente, comprender la estructura de la propia práctica y transformarla de manera permanente y sistemática.

Por último, la evaluación de la práctica reconstruida consiste en juzgar el éxito de la transformación de los estudiantes en el aula de clase. Fase fundamental en este proceso formativo dado que la evaluación es una acción reflexiva, sistemática y rigurosa de indagación sobre la realidad, que atiende al contexto.

De igual manera, la evaluación es una herramienta que alimenta la acción pedagógica del maestro, dado que le posibilita al docente tomar decisiones respecto a la práctica, a la eficacia de las estrategias y enfoques, a lo oportuno de determinado modelo de planeación, a las ventajas o desventajas de la orientación que tienen las interacciones, a la calidad de los instrumentos didácticos, a identificar fortalezas y debilidades en los estudiantes y a hacer seguimientos a aquellos cambios y procesos que ellos experimenten en el aprendizaje.

Tabla 1. *Fases Práctica Pedagógica I-A-E*

Fase 1: Deconstrucción Semestre 2015-1	Fase 2: Reconstrucción Semestres 2015-2, 2016-1	Fase 3: Evaluación Semestre 2016-2
Reconocimiento institucional Revisión del componente teleológico de la Institución Análisis de los resultados de las Pruebas Saber del grado 3° en el 2014 Rastreo bibliográfico Observaciones de clase para identificar cómo se da el proceso de interacción de los estudiantes entre sí, con el conocimiento y con las practicantes en el aula. Diseño, aplicación y análisis de actividades diagnósticas. Análisis del plan de área de matemáticas en 4° grado.	Enseñabilidad Diseño y aplicación de actividades de clase orientadas a la Resolución de Problemas. Revisión bibliográfica. Reflexión constante de la práctica en busca de una transformación y análisis de lo acontecido en la clase.	Evaluación. Sistematización. Revisión, reflexión y análisis de los resultados en las tareas realizadas por los estudiantes del grado 5°; a las luz de las entidades y dualidades propuestas por Godino (2014) y Godino *et al.* (2007) consideradas en el marco teórico.

En la tabla 1 se especifican las acciones emprendidas en cada una de las fases de la Práctica Pedagógica, bajo la metodología Investigación Acción Educativa.

Este proceso en las tres fases se caracterizó por reunir los aspectos necesarios en la constitución de la esencia como docentes en la práctica educativa, donde se enlazan los saberes pedagógicos, específicos y didácticos que orientan la formación como maestros, en la cual construya aprendizajes y se potencie un pensamiento crítico de sí mismo y todo lo que ocurre a su alrededor. Durante estas tres fases se está inmerso en un proceso de acciones y reflexiones constantes en torno al quehacer pedagógico, mediadas por saberes teóricos, pensamientos y la interacción con los estudiantes.

En este proceso, las investigadoras participantes conciben la formación como el espacio que posibilita el descubrimiento y el crecimiento de sí mismos, pensado desde el ser, el saber y el hacer; y por lo tanto favorece el descubrimiento y el crecimiento del mundo que le rodea, el desarrollo integral del ser humano y la comprensión de las propias prácticas; sin embargo, en la práctica que ha dado lugar a esta investigación, el estudiante no es el único participante activo en las clases, también nosotras como practicantes, hemos ido viviendo experiencias de aula de manera consciente y reflexiva, siendo partícipes de una transformación en la que nos hemos constituido saberes que han permitido descubrirnos como seres inconclusos, que hacemos parte de una dialéctica entre nosotras mismas, los otros y la realidad de la que hacemos parte. Es allí donde empezamos a comprendernos como sujetos históricos, productoras de saberes, en y para nuestra labor como docentes.

En este proceso de indagación se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de datos:

Producciones de los estudiantes: Se refiere a las guías y elaboraciones mentales desarrolladas por los estudiantes que dan cuenta del objeto matemático presente y se hacen tangibles a través de las elaboraciones escritas y las participaciones orales que se dieron en las discusiones, socializaciones y demás dinámicas propias de la práctica de aula.

Entrevistas semi-estructuradas: Son los diálogos que se dan con los estudiantes alternando preguntas estructuradas con preguntas espontáneas.

Estos instrumentos han permitido adoptar una postura metodológica, que de acuerdo con Sandoval (2002) es de carácter dialógico, en la que las creencias, las mentalidades, las opiniones e ideas, son aceptadas como elementos de análisis para producir conocimiento sobre la realidad humana; con el fin de descubrir el sentido, la lógica y la dinámica de las acciones humanas concretas, que en el caso en particular, se refiere a la Resolución de Problemas asociados al Razonamiento Algebraico en el aula de clase con una mirada pedagógica.

Capítulo 4
Análisis

En el marco del proyecto "Resolución de problemas asociados al Razonamiento Algebraico" se realizaron 14 sesiones con los estudiantes, en las cuales se aplicaron diversas tareas con el fin de propiciar espacios y experiencias de aprendizaje, donde ellos tuvieran la oportunidad de interactuar con los compañeros en la constitución de nuevos conocimientos propios del Razonamiento Algebraico.

En la experiencia de aula se aplicaron 12 tareas, de las cuales se seleccionaron 7 para el análisis de este informe. Las seleccionadas corresponden a aquellas tareas que representan mayor significación en relación con los intereses de la investigación y el marco teórico del RA y el EOS.

A continuación se presentan los análisis de 7 tareas realizadas por los estudiantes del grado 5 de la I. E. La Asunción, que dan cuenta del avance en cuanto a la Resolución de Problemas y el Razonamiento Algebraico, para ello se toman como unidades de análisis las entidades primarias (Godino, 2014) y las facetas duales (Godino *et al*., 2007), se registran las fecha de realización, como muestra de la transformación progresiva en los estudiantes y la búsqueda por mejorar la manera en que perciben, comprenden, analizan y dotan de sentido el mundo y cómo interactúan con el mismo, es por esta razón que la metodología empleada es la Investigación Acción Educativa (I-A-E) (Restrepo, 2004).

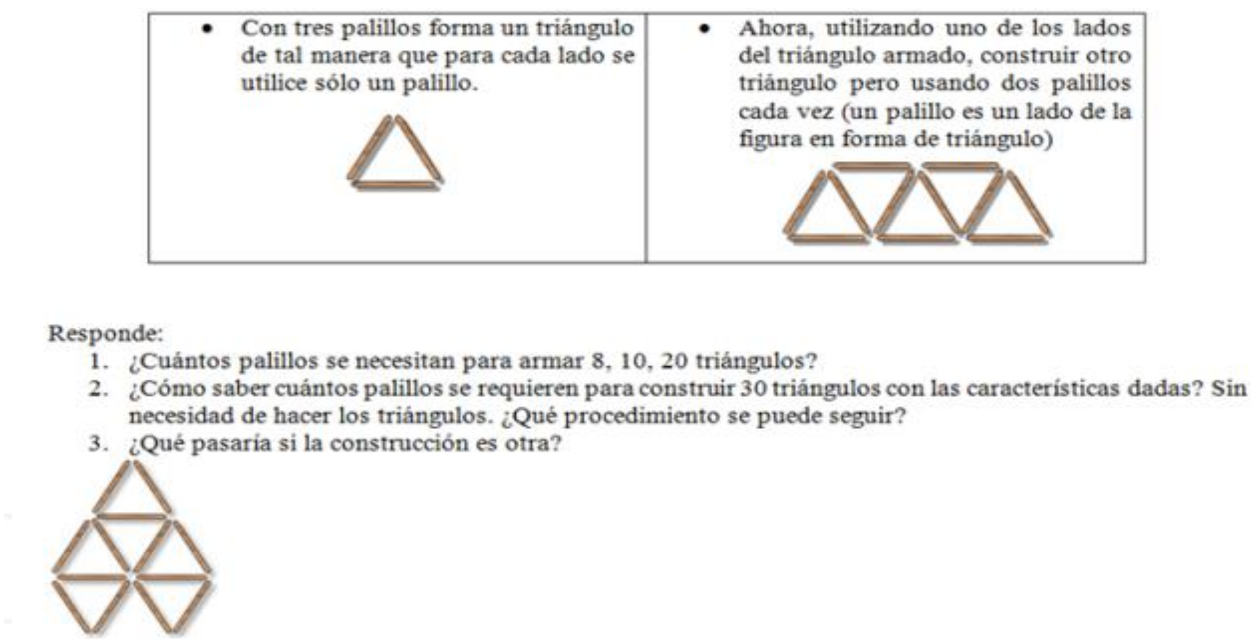
Tarea N°1: Triángulos con palillos

Fecha: 29 de marzo de 2016

Objetivo: Construir la secuencia de triángulos usando los palillos para determinar la cantidad de palillos necesarios en cada triángulo y en la posición enésima.

Materiales: Ficha de la tarea, palillos de dientes

Esta tarea consiste en una secuencia de triángulos utilizando palillos y se indaga por las relaciones entre el número de palillos y el número de triángulos, hasta llegar al proceso de generalización.



• Con tres palillos forma un triángulo de tal manera que para cada lado se utilice sólo un palillo.	• Ahora, utilizando uno de los lados del triángulo armado, construir otro triángulo pero usando dos palillos cada vez (un palillo es un lado de la figura en forma de triángulo)

Responde:

1. ¿Cuántos palillos se necesitan para armar 8, 10, 20 triángulos?
2. ¿Cómo saber cuántos palillos se requieren para construir 30 triángulos con las características dadas? Sin necesidad de hacer los triángulos. ¿Qué procedimiento se puede seguir?
3. ¿Qué pasaría si la construcción es otra?

Imagen 5. Ficha de la tarea "triángulos con palillos"

Los estudiantes para dar respuesta a las preguntas, realizan acciones como contar con los dedos o en la mente, como se puede observar en las siguientes argumentaciones.

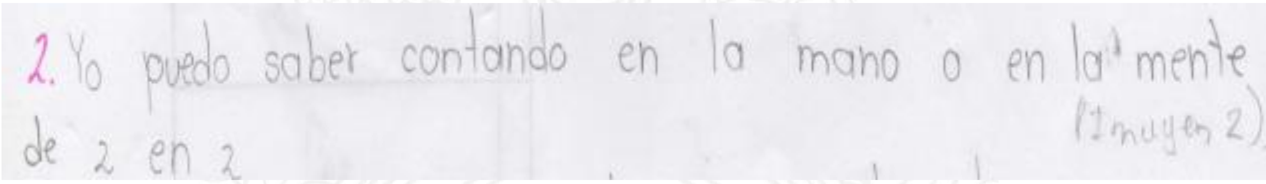

2. Yo puedo saber contando en la mano o en la mente de 2 en 2 (Imagen 2)

Imagen 6. Respuesta de un estudiante

Las diversas representaciones gráficas de las secuencias con los palillos les sirvieron para reconocer el patrón, la regularidad y de esta manera establecer la relación entre la posición y el número de palillos.

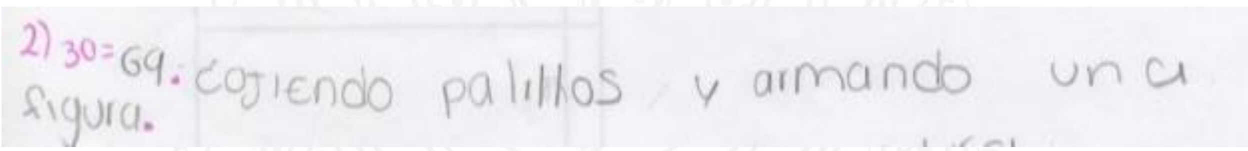

2) 30=69. cojiendo palillos y armando un a figura.

Imagen 7. Respuesta de un estudiante

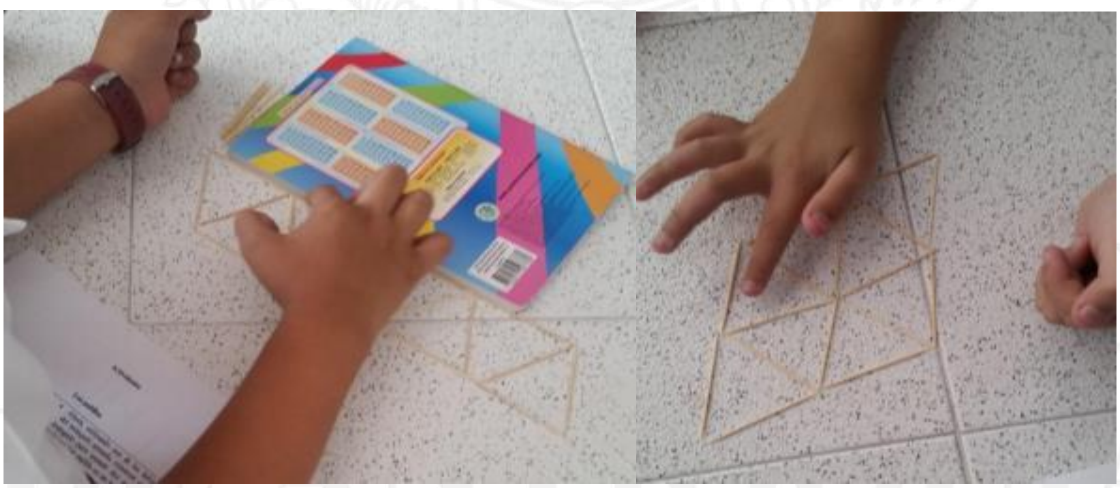


Imagen 8. Formas de realizar la secuencia con los palillos

En este sentido se pueden identificar algunas dimensiones duales en la manera como resuelven la tarea: En la personal, cuando cada estudiante hace la construcción con los palillos y analiza la secuencia descubriendo tres formas de realizarla: de manera lineal como se proponía en la ficha, no compartiendo lados entre los triángulos y la última en forma triangular hacia abajo como se muestra en la imagen 8 y 9.

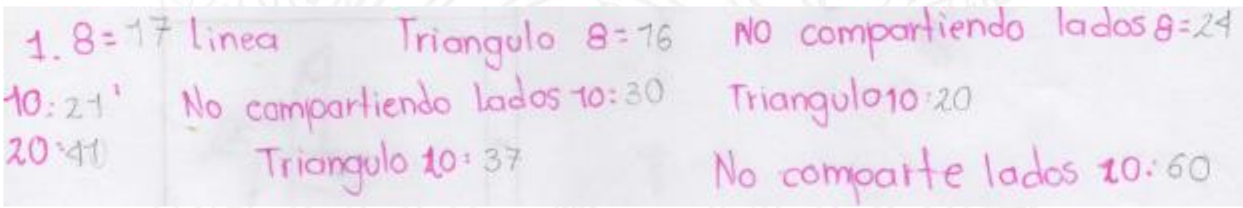
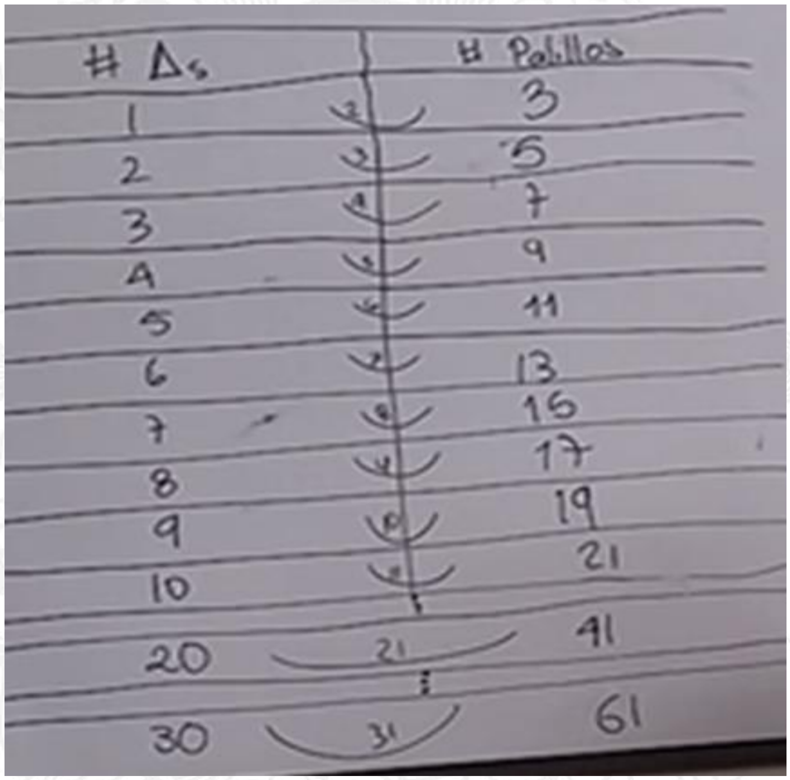


Imagen 9. Formas de construcción con palillos

Al leer nuevamente las condiciones de la secuencia, notan que con el patrón dado, la única forma para poder predecir las siguientes cantidades de triángulos es en forma lineal, porque como lo justifica un estudiante "*es más difícil saber cuántos palillos se utilizan para formar los triángulos de la otra manera que no es en línea, porque en línea se suman siempre dos*"

Por otro lado, la faceta Institucional se evidencia cuando los estudiantes empiezan a comparar las construcciones con las de los compañeros, incluso a compartir los palillos para hacer una secuencia más extensa y así acordar los resultados frente a la cantidad necesaria para armar la secuencia de 8, 10, 20 triángulos y ¿cómo saber cuántos palillos se requieren para construir 30 triángulos?

Luego en el tablero se presentan y discuten las construcciones que han realizado los estudiantes, por medio de una tabla para que todos lograran participar y visualizar lo que hacían los compañeros.



# Δs		# Palillos
1	2	3
2	3	5
3	4	7
4	5	9
5	6	11
6	7	13
7	8	15
8	9	17
9	10	19
10	[illegible]	21
20	21	41
30	31	61

Imagen 10. Tabla construida en colectivo

Se observa en la imagen 10 que los estudiantes logran expresar varias relaciones, una de ellas es entre el número de triángulos y palillos, acerca de esto decían que "*la diferencia entre uno y tres es dos, entre 2 y 5 es tres, entre 3 y 7 es 4 y así va subiendo de a uno", "¡ah! es que los triángulos empiezan en uno, pero los números de la mitad en 2, como uno más*". También reconocen la relación que se genera entre esas diferencias plasmadas en medio de la tabla, en este caso dicen "*van de 1 en 1*" y en cuanto a los números de los palillos expresaron "*son los números impares y van de 2 en 2 empezando en el 3 porque esos son los lados del triángulo*".

En lo referente a lo Extensivo- Intensivo se pueden identificar al completar y establecer las relaciones con la construcción de la tabla; en el momento en que los estudiantes establecen la cantidad de palillos necesarios para un determinado número de triángulos, de esta forma se acercan a la generalización que corresponde a la faceta Intensiva, en la cual logran expresar oralmente cómo harían para determinar la cantidad de palillos en una posición cualquiera. Afirman: "*muy fácil saber con otro número, dígame uno y le sumo el que le sigue y ya me da*".

De acuerdo a lo anterior, los estudiantes recurren a *conceptos* como: figura, triángulo, lado, adición, secuencia geométrica, patrón y la generalización, los cuales se evidencian en las argumentaciones cuando establecen el proceso que siguen para dar solución a la misma, plantean hipótesis sobre la figura y el número de palillos con respecto a las variaciones; hacen operaciones y comprueban los resultados. Dichas argumentaciones están mediadas por el uso de un lenguaje gráfico, numérico, natural verbal y escrito, que surgen cuando las estudiantes ponen en juego los conocimientos previos para desarrollar ideas que sirvan en la solución de la tarea, haciéndose evidente la faceta no ostensiva.

Tarea N°2: La caja mágica

Fecha: 12 de abril de 2016

Objetivo: Describir, interpretar y representar las variaciones que se dan entre la cantidad de monedas y los confites en una caja mágica, identificando las relaciones de dependencia entre ellas.

Materiales: Ficha con la tarea.

1. Resuelve.

Una caja mágica duplica el número de confites que metas en ella, pero después de que se usa cada vez se deben pagar 4 confites. Juan probó e introdujo sus confites en la caja y efectivamente se duplicaron, pago 4 confites y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron pero al pagar los 4 confites se quedó sin dulces. ¿Cuántos confites tenia Juan en un principio?

Imagen 11. Enunciado del problema "La caja mágica"

En algunas de las soluciones, los estudiantes acuden a los *conceptos* de suma y resta para poder resolver el problema; utilizan el procedimiento del tanteo; al respecto García-García, Rodriguez y Navarro (2015) exponen que este es una estrategia que consiste en resolver problemas por ensayo y error, es decir, el estudiante llega a la solución del problema recurriendo a las operaciones que conoce hasta el momento y con distintas aproximaciones. En el caso particular este tanteo lo hacen con sumas, como se observa en la imagen 12.

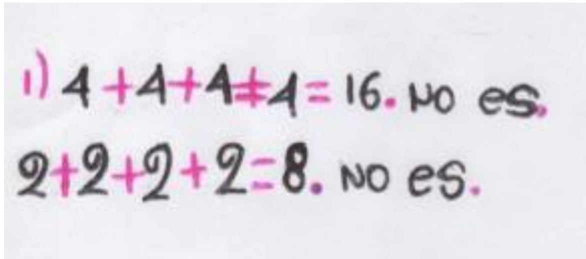

1) 4+4+4+4=16. no es.
2+2+2+2=8. no es.

Imagen 12. Tanteo

En otros casos, los estudiantes usan como *procedimientos* la suma, la resta y la multiplicación como se puede evidenciar en las siguientes argumentaciones.

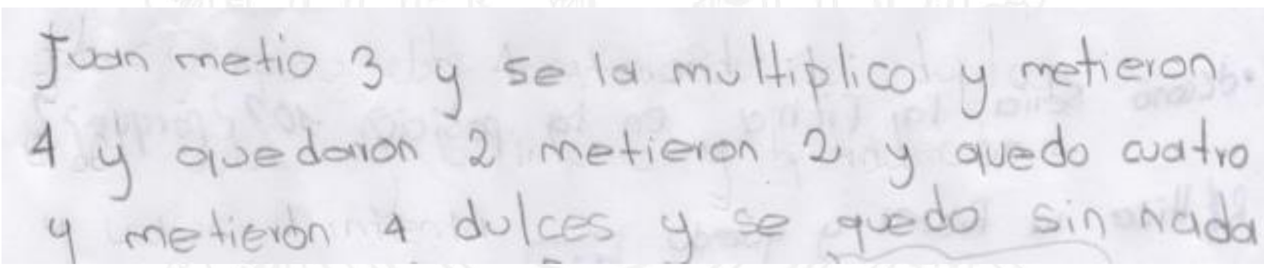

Juan metio 3 y se la multiplico y metieron 4 y quedaron 2 metieron 2 y quedo cuatro y metieron 4 dulces y se quedo sin nada

Imagen 13. Respuesta 1 de un estudiante en la tarea "la caja mágica"

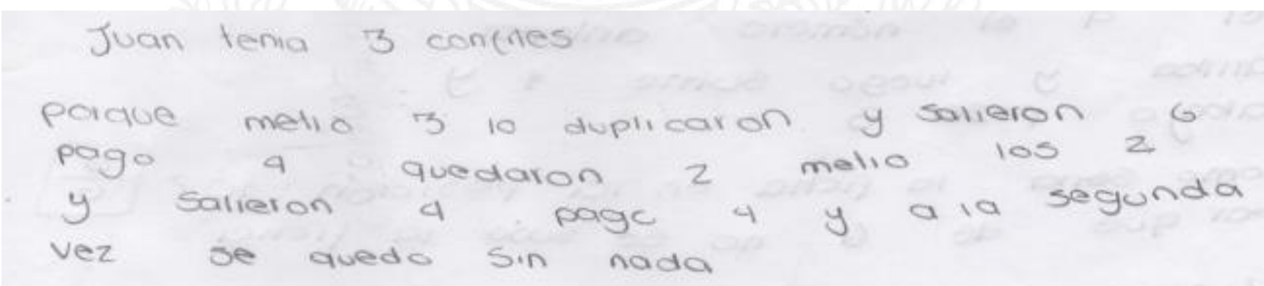

Juan tenia 3 confles
porque metio 3 lo duplicaron y salieron 6 pago 4 quedaron 2 metio los 2 y salieron 4 pago 4 y a la segunda vez se quedo sin nada

Imagen 14. Respuesta 2 de un estudiante en la tarea "la caja mágica"

En las argumentaciones utilizan el *lenguaje* escrito natural donde explican el proceso de funcionamiento de la caja mágica. También lo hacen mediante representaciones icónicas para modelar la situación a través de ésta, donde se muestra una secuencia de todo el proceso, dado que los estudiantes construyen un modelo en el que se simboliza el problema que les sirve como medio para analizarlo, crear hipótesis y decidir qué acciones emprender para la solución del mismo.

En este sentido, la modelación se concibe como “una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas” Treffers y Goffree (como se citó en MEN, 1998, p. 98).

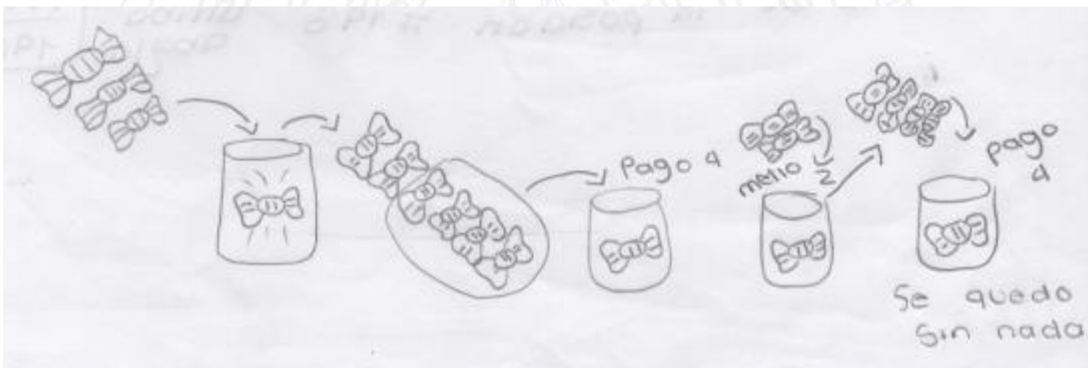


Imagen 15. Representación icónica del problema "la caja mágica"

Otra forma en la que algunos de los estudiantes modelan la situación, fue simulando que la cartuchera era la caja mágica y los colores los dulces, y así realizar los movimientos establecidos en el problema. Aquí se evidencia también la faceta personal dado que los estudiantes en la búsqueda de la solución del problema realizan conjeturas y construcciones cognitivas propias. Algunas expresiones textuales de los estudiantes que dan cuenta de ello son:

“Si meto 3 confites, me salen 6 porque dice que duplicar o sea 2 veces 3, ¿cierto?”

“Siempre se suma dos veces y tengo que pagar 4”

“Ah ya entendí, es que tengo que ir sumando lo que me dan y restando lo que pago”

En otros casos los estudiantes acuden a un *lenguaje* escrito combinado con el gráfico-numérico, como narra la estudiante y representa con puntos rojos las cantidades que van quedando en el proceso.

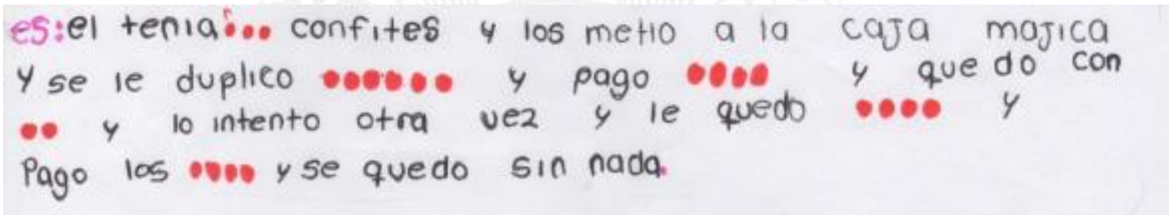


Imagen 16. Respuesta en lenguaje escrito combinado con gráfico-numérico

Tarea N° 3: Baldosas blancas[3]

Fecha: 19 de abril de 2016

Objetivo: Determinar la enésima posición de la secuencia de baldosas, identificando las relaciones entre el número de cuadrados y triángulos de la secuencia.

Materiales: Ficha de la tarea, baldosas en papel

La tarea corresponde a una secuencia geométrica, en la cual se deben completar otras figuras con las baldosas blancas y las sombreadas de forma triangular; se plantean algunas preguntas para indagar por la variación y la regularidad en el número de baldosas que debe completarse.

3 Tarea tomada de: http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_educacion/pregrado/matematicas/documentos/Tesis1.pdf

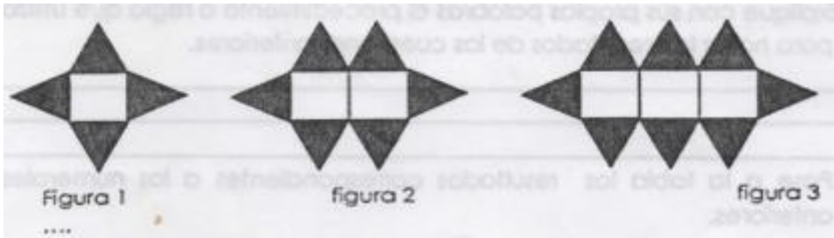


Imagen 17. Secuencia "Baldosas blancas"

En la tarea se reconocen los *conceptos* de secuencia geométrica para identificar el patrón de formación y establecer la generalización; en las respuestas, los estudiantes *argumentan* que la solución la hacen "imaginando y contando"; es decir, los estudiantes hacen el proceso mentalmente, como se muestra en la imagen 17 y 18.

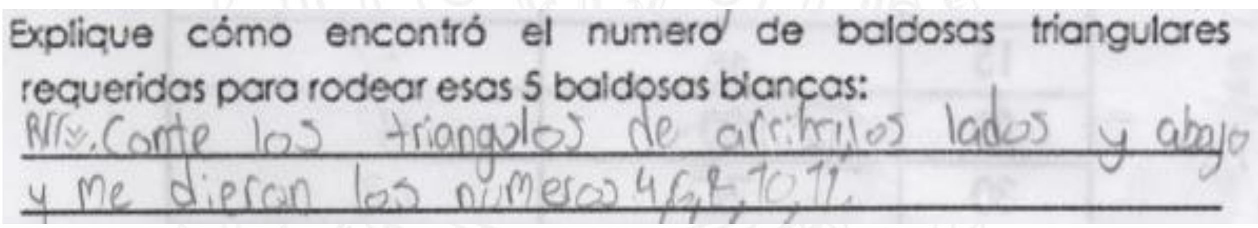
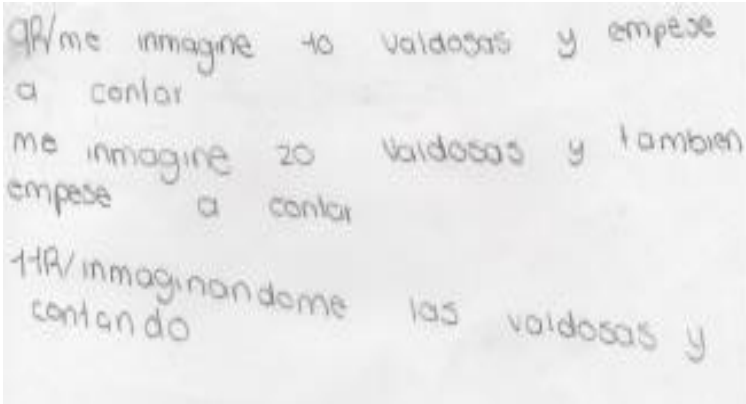

Explique cómo encontró el numero de baldosas triangulares requeridas para rodear esas 5 baldosas blancas:
R/: Conte los triangulos de arriba los lados y abajo y me dieron los numeros 4,6,8,10,12.

Imagen 18. Respuesta de un estudiante en la tarea "baldosas blancas"

Transcripción. Conté los triángulos de arriba, los de los lados y los de abajo y me dieron los números 4, 6, 8, 10, 12...


9R/me inmagine 10 valdosas y empese a contar
me inmagine 20 valdosas y tambien empese a contar
11R/ inmaginandome las valdosas y contando

Transcripción: Me imaginé 10 baldosas blancas y empecé a contar los triángulos alrededor. Me imaginé 20 baldosas blancas y también empecé a contar. Imaginándome las baldosas y contando

Imagen 19. Respuesta 1 de un estudiante sobre la tarea " baldosas blancas"

En cuanto a las *proposiciones* se infiere que los estudiantes aplican la propiedad uniforme de la igualdad, cuando suman a ambos lados la misma cantidad.

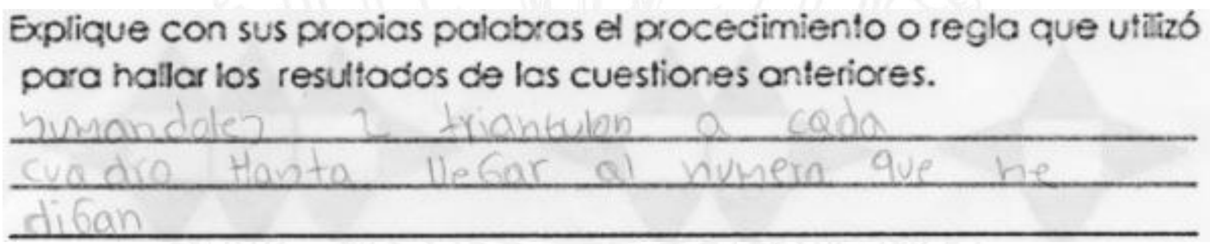

Explique con sus propias palabras el procedimiento o regla que utilizó para hallar los resultados de las cuestiones anteriores.
sumandoles 2 triangulos a cada cuadro Hasta llegar al numero que me digan

Imagen 20. Respuesat 2 de un estudiante en la tarea "baldosas blancas"

En los *procedimiento*s, realizan sumas y multiplicaciones, explican que por cada baldosa blanca se suman dos baldosas triangulares, establecen relaciones entre el número de baldosas blancas y las sombreadas de forma triangular.

Explique cómo encontró el numero de baldosas triangulares requeridas para rodear esas 5 baldosas blancas:

Sumandole 2 mas baldosas

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 2 \\ \hline 40 \\ +2 \\ \hline 42 \end{array}$$

Imagen 21. Respuesta 3 de un estudiante en la tarea "baldosas blancas"

En este caso consideran que 20 son las baldosas blancas, las multiplican por 2 y al resultado le suman dos de los lados y de esta manera encuentran el resultado.

A continuación, se les propone a los estudiantes completar una tabla en la cual plasmen, de acuerdo a la figura y a los cálculos ya realizados, el número de baldosas blancas y a la vez el número de triángulos, de manera que logren visualizar la regularidad, el patrón de formación y en este sentido, alcanzar la generalización. En las siguientes imágenes se puede observar cómo lo resuelven dos estudiantes.

figura	número de baldosas blancas	número de triángulos
1	1	4
2	2	6
3	3	8
4	4	10
5	5	12
9	9	20
15	15	32
20	20	44
30	30	62
50	50	102
60	60	122
70	70	142
80	80	162
n	n	h+h+2 [illegible]

figura	número de baldosas blancas	número de triángulos
1	1	4
2	2	6
3	3	8
4	4	10
5	5	12
9	9	20
15	15	32
20	20	42
30	30	62
. . . .		
n	n	n x2+2

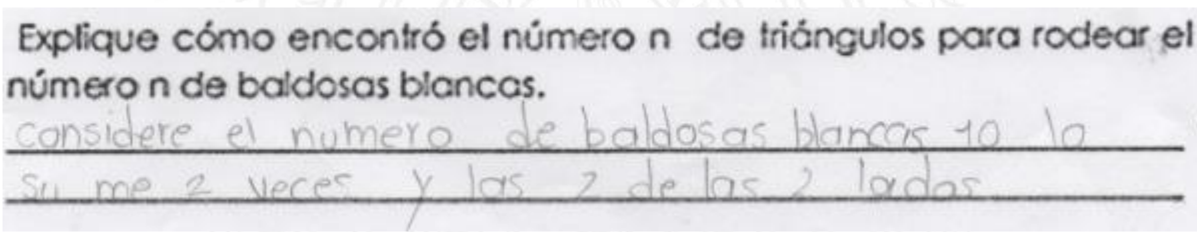
Imagen 22. Generalización mediante la construcción de tablas

En el desarrollo de la tarea, los estudiantes observan y analizan lo que sucede en cada caso, es decir, el número de baldosas triangulares que se requieren para rodear la cantidad de baldosas cuadradas blancas, de esta manera hallan la operación a realizar y cómo sería cuando son $\boldsymbol{n}$ baldosas.

Los estudiantes determinan el número de baldosas y de triángulos en relación con la figura, con estos datos logran identificar un patrón, llegar a la generalización y expresarla simbólicamente para la enésima figura como $n + n + 2$ y en el caso de otro estudiante, lo simboliza como $n * 2 + 2$. En este punto se observa que los estudiantes en un principio establecen los *objetos extensivos* con los casos particulares teniendo en cuenta cierto número de baldosas, pero logran llegar al *objeto intensivo* en el último renglón, el cual tiene que ver con la generalización.

En las imágenes se observa cómo los estudiantes logran llegar a la generalización, uno lo hace a partir de la generalización cercana y otro de la lejana (Stacey, 1989), es decir, en la imagen 22 se observa la generalización cercana dado que el estudiante establece el número de baldosas y de triángulos para varios casos en particular, incluso para más de los que ya estaban dados en la tabla, la estrategia para la solución fue establecer la relación entre el número de la figura, de las baldosas y de los triángulos; y luego se remitió al término anterior en la tabla para expresar una regla general, en este caso algebraica. De esta manera se hizo evidente que el estudiante necesita seguir un proceso, paso a paso para determinar la regularidad en la secuencia; mientras que en la otra imagen se observa la generalización lejana, el estudiante logra construir la regla general con mayor facilidad al ser capaz de coordinar el esquema numérico de la información previa de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica.

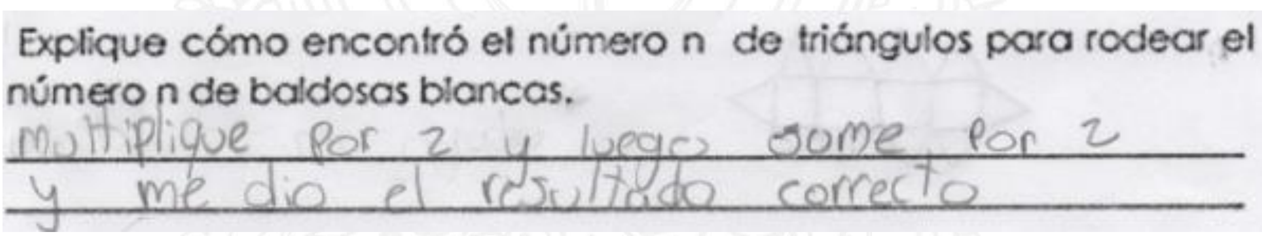
Lo anterior se reafirma en las argumentaciones de los estudiantes, en las que explican y dan cuenta de cómo hallaron el número $\boldsymbol{n}$ de triángulos para rodear el número $\boldsymbol{n}$ de baldosas. En éstas se logra reconocer que algunos recurren a la adición y otros a la multiplicación, según las observaciones, los estudiantes acuden a las operaciones que han constituido de manera significativa en el proceso de aprendizaje, y poco a poco constituyen expresiones más complejas que posibilitan la transformación y mejoramiento del pensamiento matemático en los estudiantes.



Explique cómo encontró el número n de triángulos para rodear el número n de baldosas blancas.

considere el numero de baldosas blancas 10 lo su me 2 veces y las 2 de las 2 lados

Imagen 23. Respuesta 1 de un estudiante en la tarea "baldosas blancas"



Explique cómo encontró el número n de triángulos para rodear el número n de baldosas blancas.

multiplique por 2 y luego sume por 2 y me dio el resultado correcto

Imagen 24. Respuesta 2 de un estudiante en la tarea "baldosas blancas"

La faceta personal, se evidencia a lo largo del desarrollo de la tarea, dado que los estudiantes a medida que se enfrentan a las preguntas van construyendo las soluciones a partir del análisis, el conteo y ejecución de operaciones en forma individual, y en esta medida se constituyen nuevos conocimientos, los cuales socializan posteriormente con el grupo de estudiantes; en esta tarea en particular se logran conocimientos de tipo algebraico.

Tarea N°4: La torre repetidora[4]

Fecha: 26 de abril del 2016

Objetivo: Determinar el patrón de formación de la secuencia de triángulos en la torre repetidora, y hallar la posición enésima.

Materiales: Ficha de la tarea, hojas iris para armar la secuencia de las torres.

La tarea consiste en observar la secuencia de triángulos y responder a las preguntas sobre cuántos triángulos hay en cada figura, completar la tabla de acuerdo al número de la figura y de triángulos, argumentando los procedimientos que realizan.

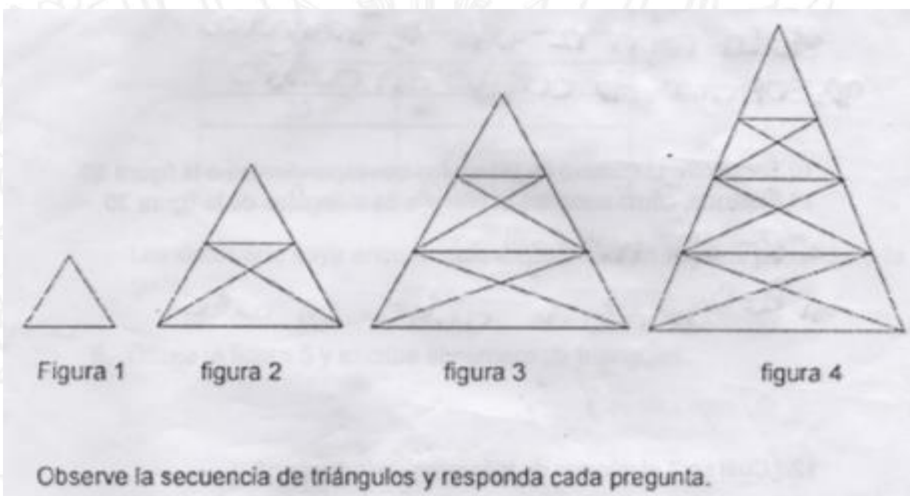
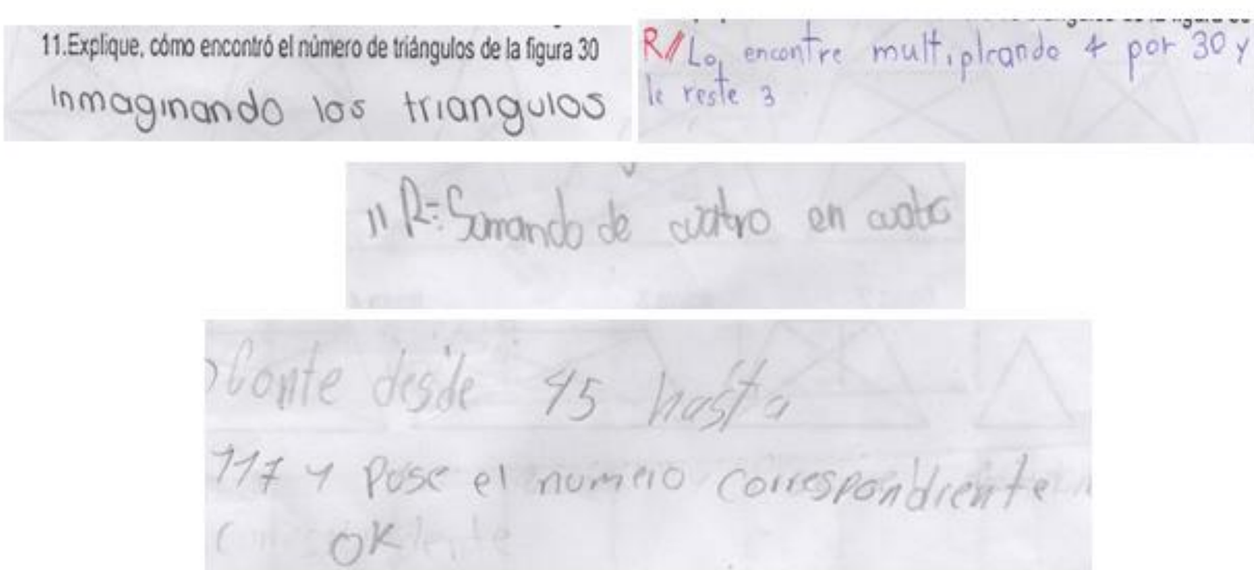


Imagen 25. Secuencia tarea "La torre repetidora"

[4] Tarea tomada de: http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_educacion/pregrado/matematicas/documentos/Tesis1.pdf

Con respecto a las dualidades, se puede observar la Personal- Institucional, cuando los estudiantes individualmente leen, analizan la tarea, y así se hacen una idea de lo que deben hacer para dar respuesta a la misma; en este sentido, recurren a los conocimientos previos como el concepto de secuencia, las características de un triángulo, noción de cantidad y variación; y hacen uso de las habilidades cognitivas tales como cuestionarse sobre los cambios que se generan, sugerir estrategias para la solución y lanzar hipótesis; y habilidades metacognitivas como organizar, revisar y modificar o replantear las ideas frente al proceso de solución de la tarea. Posteriormente cuando socializan los procedimientos y respuestas, los estudiantes confrontan ideas, expresan opiniones y establecen generalidades. En este proceso ejecutan acciones como observar, imaginar, analizar, establecer una ruta metodológica, contar, sumar, restar, multiplicar, comprobar y validar las respuestas; acciones instauradas en el marco conceptual de la aritmética.



11.Explique, cómo encontró el número de triángulos de la figura 30

Inmaginando los triangulos

R/ Lo encontre mult,plcando 4 por 30 y le reste 3

11 R= Sumando de cuatro en cuatro

conte desde 45 hasta 117 y pose el numero correspondiente

OK

Imagen 26. Respuesta de un estudiante en la tarea "la torre repetidora"

Algunos estudiantes se acercan a procesos algebraicos cuando expresan una estructura generalizada, que si bien no es propiamente una expresión totalmente algebraica, si refleja una aproximación de lo que constituye el término enésimo para determinar el número de triángulos de la torre repetidora (Imagen 27).

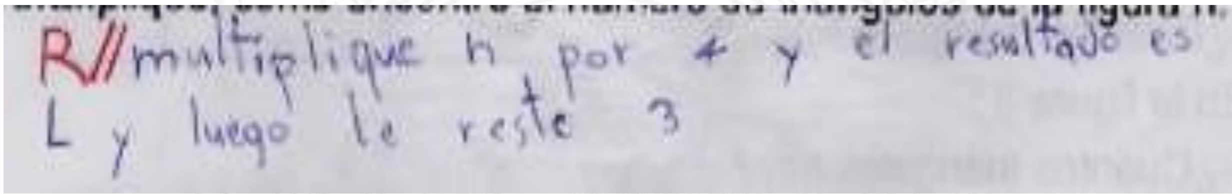


Imagen 27. Respuesta de un estudiante en la tarea “la torre repetidora”

La construcción de los conceptos se ve reflejada en las argumentaciones dadas por los estudiantes, las cuales son empleadas para la explicación y validación de los resultados obtenidos, como se puede observar en la imagen 28.

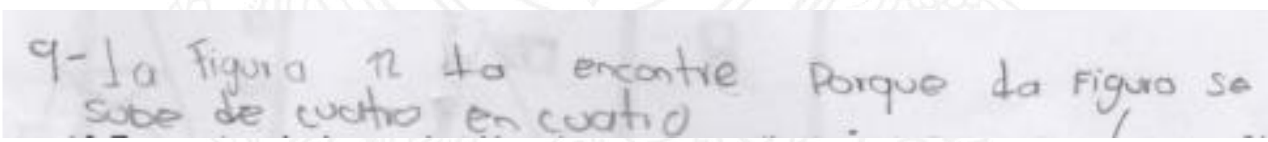


Imagen 28. Respuesta de un estudiante en la tarea “la torre repetidora”

Las argumentaciones de los estudiantes se apoyan en la representación gráfica de la torre repetidora, además del lenguaje numérico, algebraico, escrito y oral, como se muestra en la imagen 29.

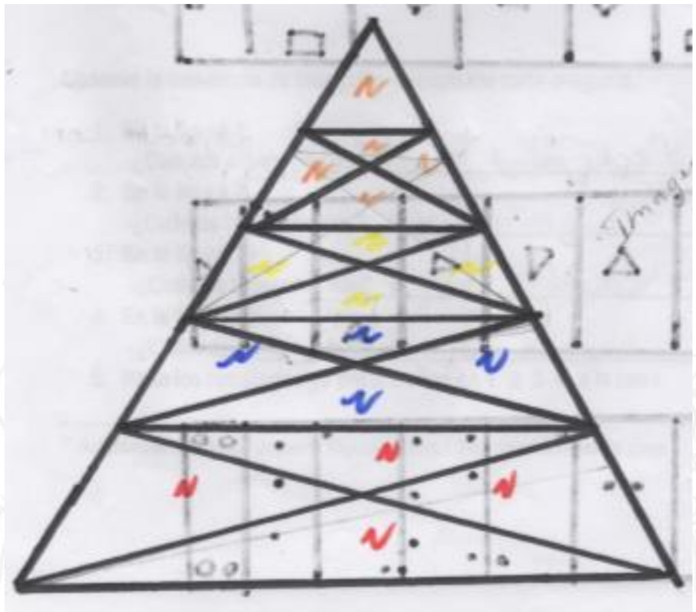


Imagen 29. Representación gráfica de la torre repetidora

La faceta Ostensiva se percibe cuando los estudiantes hacen uso de objetos matemáticos como: números, operaciones, definiciones, conceptos y figuras; y a su vez lo articulan con ideas para llegar al resultado de forma acertada. Lo no ostensivo, por su parte se puede apreciar en los procedimientos, reflexiones y discusiones generadas en torno a la tarea, donde los estudiantes expresan en el colectivo, argumentan y explican los procesos mentales llevados a cabo para llegar a la solución.

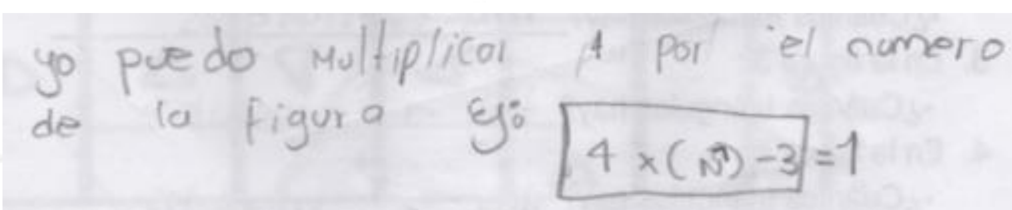


Imagen 30. Respuesta de un estudiante de la regla general en la tarea 4

En este caso, lo que hace el estudiantes es reemplazar el valor de “N” por 1, y dar la respuesta, la tendencia es que los estudiantes inicialmente particularizan en el valor de “N” y luego obtienen la expresión generalizada.

Nº DE LA FIGURA	Nº DE TRIANGULOS
1	1
2	5
3	9
4	13
5	17
6	21
12	45
30	117
...	...
n	4x(N)−3=

Nº DE LA FIGURA	Nº DE TRIANGULOS
1	1
2	8 − 3
3	12 −3
4	16 −3
5	20 −3
6	24 −3
12	48 −3
30	120 −3
...	
n ×4	100×4=400 −3=397

n×4=L−3

*Imagen 31.*Tablas construidas por estudiantes en la tarea de la torre repetidora

De igual manera, en la tabla se evidencia la faceta extensiva cuando los estudiantes realizan la operación matemática para determinar el número de triángulos de acuerdo al número de cada figura; e intensiva cuando los estudiantes identifican el patrón de formación y logran establecer el procedimiento para calcular la cantidad para la figura enésima.

Los estudiantes recurren a diferentes procesos y expresiones algebraicas; en el primer caso, el estudiante establece para la figura “n” la expresión: $4 \times n\ -\ 3 =$, mientras que otro propone la forma $n \times 4 = L - 3$, lo que se puede observar es que ambos llegan a un mismo resultado pero la comprensión y la manera de proceder ante la tarea es diferente, el segundo estudiante realiza un proceso minucioso, denota el resultado de $n \times 4$ con la letra L y a partir de éste le resta 3 para obtener el número de triángulos, que constituye la regla general para el problema. Lo anterior muestra un manejo de las variables en expresiones algebraicas para determinar la generalización de la tarea dada.

Tarea N°5: Consumo de huevos[5]

Fecha: 24 de mayo del 2016

Objetivo: Analizar las variaciones representadas en gráficos y establecer relaciones de dependencia entre cantidades que varían bajo determinadas condiciones.

Materiales: Ficha de la tarea

Para desarrollar esta tarea, previamente se realizó un acercamiento con los estudiantes sobre el proceso de recolección, tabulación y representación de datos por medio de diagramas de barras; en este caso se presentó una situación acerca de las frutas favoritas (imagen 32), con el fin de que los estudiantes lograran relacionar dicha actividad con algunos conocimientos previos y así entender con mayor facilidad la tarea.

[5] Tomada de Ayola, G., Orozco, S. y Osorio, Y. (2016).

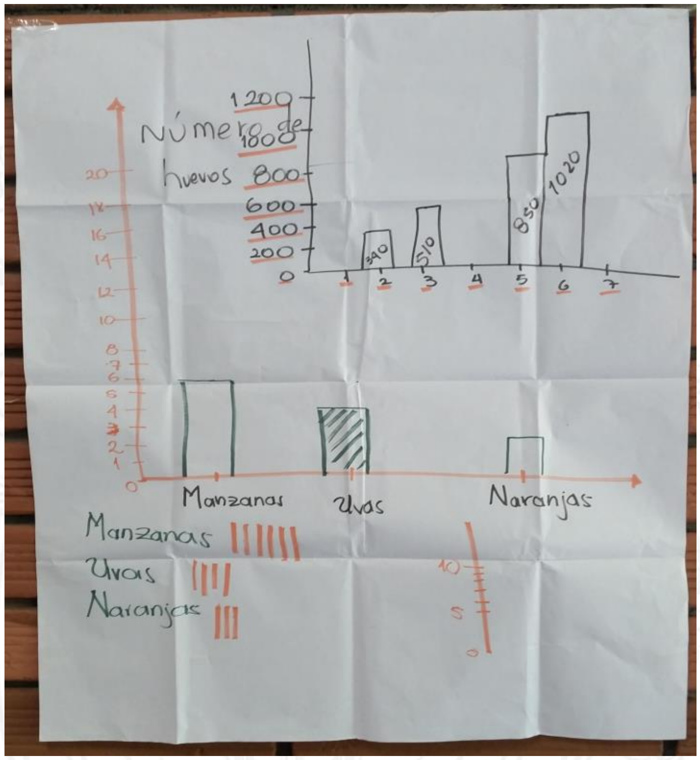


Imagen 32. Cartelera sobre la representación de datos

Posteriormente se presenta la tarea en un gráfico de barras para analizar el número de personas y la cantidad de huevos que éstas consumen al año, teniendo en cuenta que una gallina pone aproximadamente trescientos huevos al año.

En la figura 1se muestra el número de personas y la cantidad de huevos que éstas consumen al año. Además, se sabe que una (1) gallina pone trescientos (300) huevos al año.

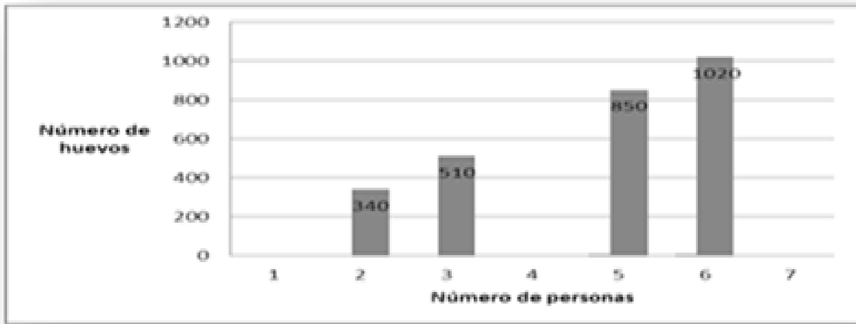
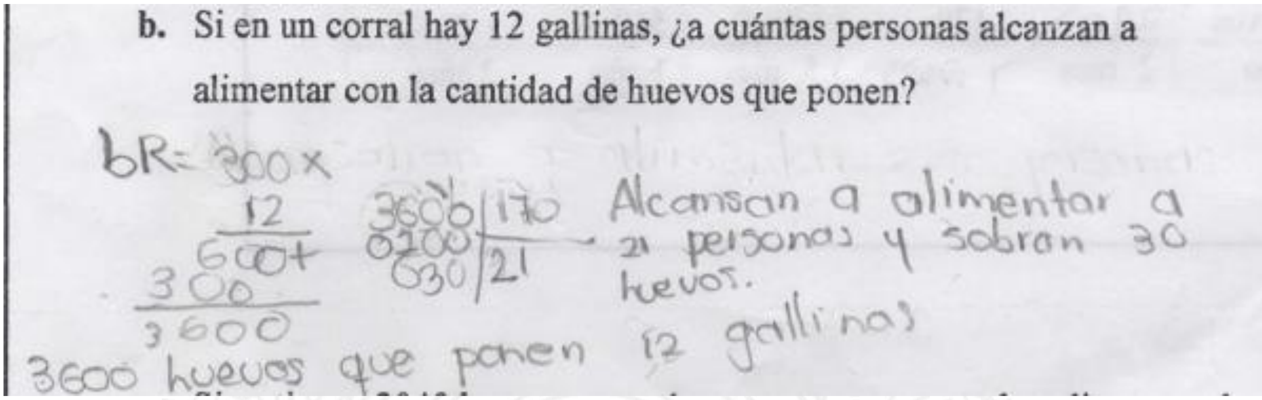


Figura 1. Adecuación de la Tarea 1 - página 81 de la E1 4° grado.

Imagen 33. Enunciado de la tarea “consumo de huevos”

A partir de dicha información los estudiantes analizaron la relación entre el número de huevos producidos por una gallina y el número de personas que los consumen por año, además recurrieron a objetos matemáticos como noción de cantidad, variación, datos, gráfico, adición, sustracción, multiplicación, división, mínimo y máximo, para establecer y ejecutar una ruta de procedimientos y argumentar los hallazgos. En este punto se logra observar la faceta unitaria dado que los estudiantes toman los objetos matemáticos que tenían a su alcance y los integran al proceso de solución y argumentación.


b. Si en un corral hay 12 gallinas, ¿a cuántas personas alcanzan a alimentar con la cantidad de huevos que ponen?

bR= 300 x 12 = 600 + 300 = 3600

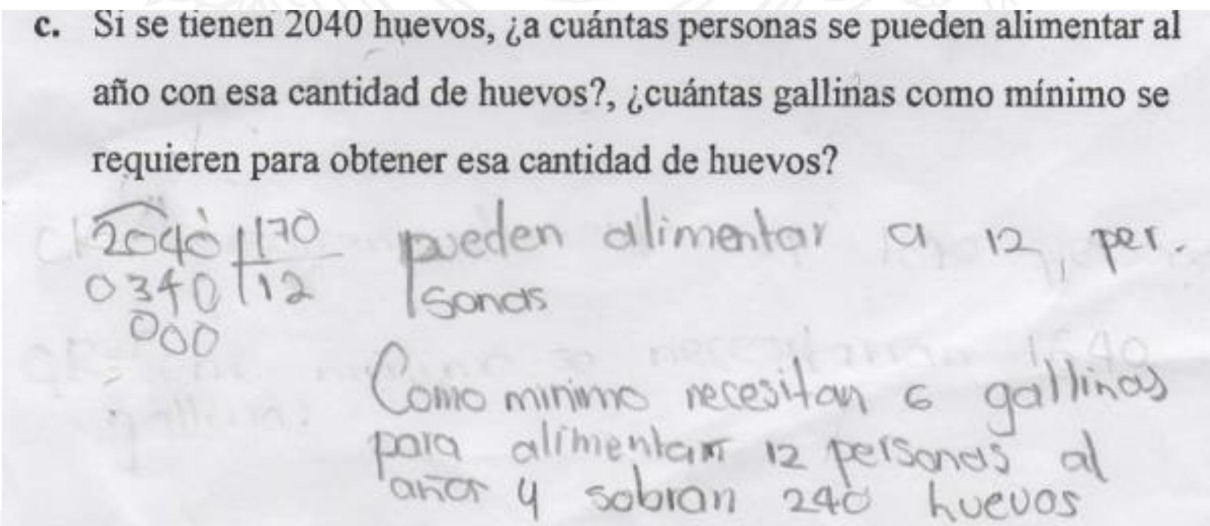
3600 | 170
0200 | 21
030

Alcansan a alimentar a 21 personas y sobran 30 huevos.

3600 huevos que ponen 12 gallinas

Imagen 34. Procedimientos y argumentación de un estudiante en la tarea 5

Los procedimientos estuvieron basados en observar la gráfica, comparar, comprender e interpretar la información en ella, hacer conjeturas y poner a prueba predicciones acerca de la variación de las cantidades y las operaciones que tendrían que hacer para dar solución a cada pregunta y después de realizarlas, descubrir algunos datos que no estaban explícitos, confrontar resultados al compararlos con los compañeros y reflexionar sobre las argumentaciones.


c. Si se tienen 2040 huevos, ¿a cuántas personas se pueden alimentar al año con esa cantidad de huevos?, ¿cuántas gallinas como mínimo se requieren para obtener esa cantidad de huevos?

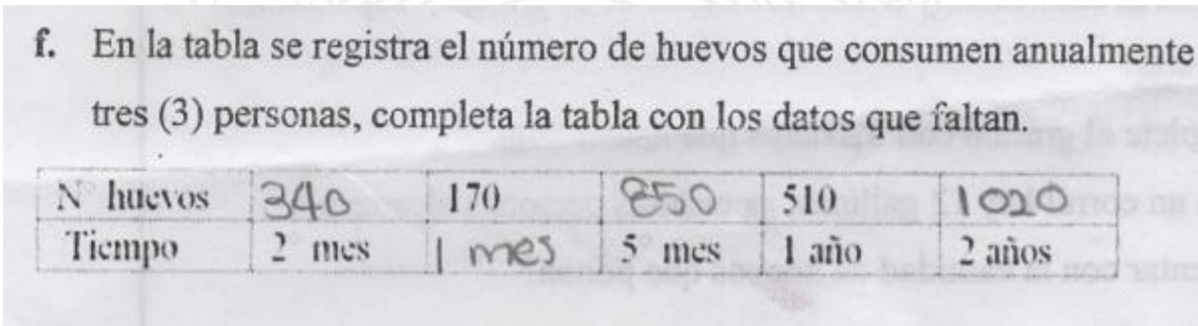
2040 | 170
0340 | 12
000

pueden alimentar a 12 personas

Como minimo necesitan 6 gallinas para alimentar 12 personas al año y sobran 240 huevos

Imagen 35. Procedimientos y argumentación de un estudiante en la tarea 5

En este punto se identifica la dualidad personal- institucional debido a que al inicio cada uno busca las respuestas en las herramientas cognitivas que posee y luego las confronta con los pares; de esta manera logran transformar los objetos no ostensivos a ostensivos dado que hay una materialización y comunicación de conocimientos.



f. En la tabla se registra el número de huevos que consumen anualmente tres (3) personas, completa la tabla con los datos que faltan.

N° huevos	340	170	850	510	1020
Tiempo	2 mes	1 mes	5 mes	1 año	2 años

Imagen 36. Tabla de equivalencias en la tarea 5

Tarea N°6: Crecimiento de la población[6]

Fecha: 7 de junio del 2016

Objetivo: Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos, identificando relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo.

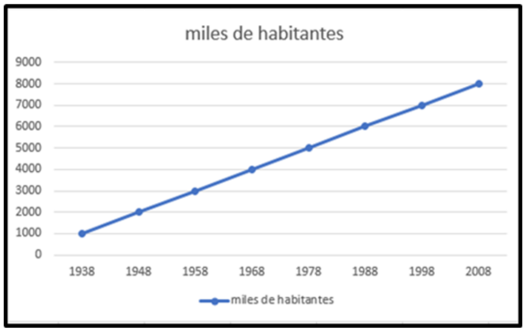
Materiales: Ficha de la tarea

[6] Tarea adaptada de Ayola, G., Orozco, S. y Osorio, Y. (2016)

Se plantea a los estudiantes un problema referente a la variación de la población en Medellín, en el cual se debe observar la gráfica presentada e interpretarla para dar respuesta a las preguntas orientadoras.

Lee con atención y responde a las preguntas.

En la siguiente gráfica se presenta el número de habitantes que hay aproximadamente en la ciudad de Medellín durante los años comprendidos entre 1938 y 2008



1. ¿Cómo varía la cantidad de habitantes de Medellín, respecto a los años entre 1938 y 2008?

2. Si en el año 1938 hubo 1000 habitantes en Medellín ¿Cuántos habitantes había en el año 1928? Explica tu respuesta

3. Si la población continúa creciendo de la misma manera, en el año 2018 ¿Cuántos habitantes aproximadamente habrán? ¿Qué estrategias u operaciones realizaste para hallarla?

4. ¿En qué año podría haber 12.000 habitantes en la ciudad de Medellín?

5. ¿Desde el año 1998, cuántos años más deben transcurrir para que la población aumente 5.000 personas?

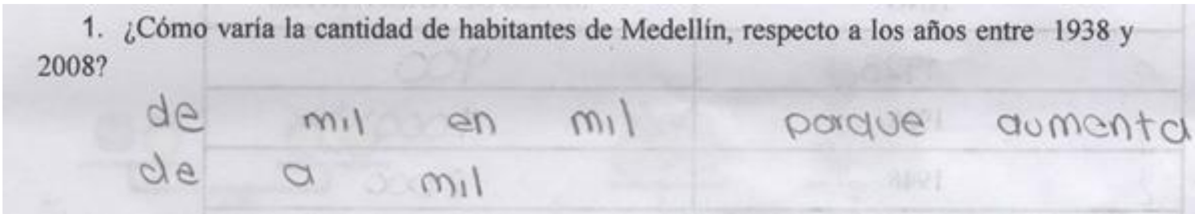
6. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información de la gráfica

AÑO	MILES DE HABITANTES
1938	
1948	
	3000
1968	
	5000
1988	
1998	
2008	
. . .	
n	

7. ¿Cómo harías para averiguar la cantidad de la población en ***n*** años?

Imag*en 37.* Ficha de la tarea "Crecimiento de la población"

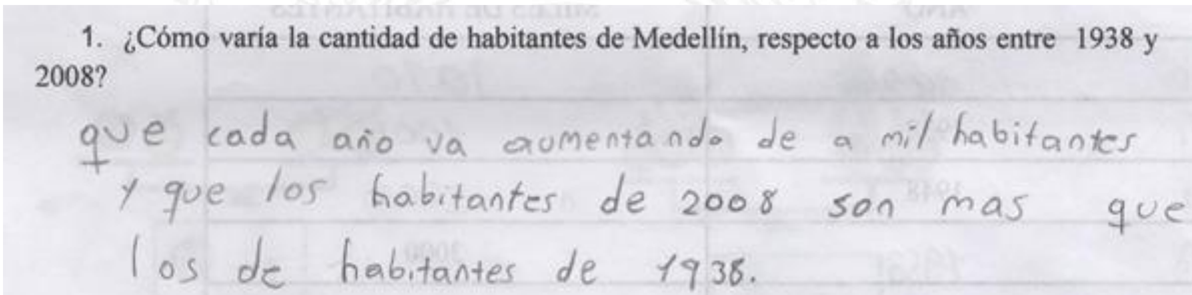
Para dar solución a esta tarea, los estudiantes describen el proceso realizado, explican el porqué de sus respuestas por medio de un lenguaje escrito y a partir de las construcciones mentales a las que llegaron de manera individual en la faceta personal como se puede ver a continuación.



1. ¿Cómo varía la cantidad de habitantes de Medellín, respecto a los años entre 1938 y 2008?

de mil en mil porque aumenta de a mil

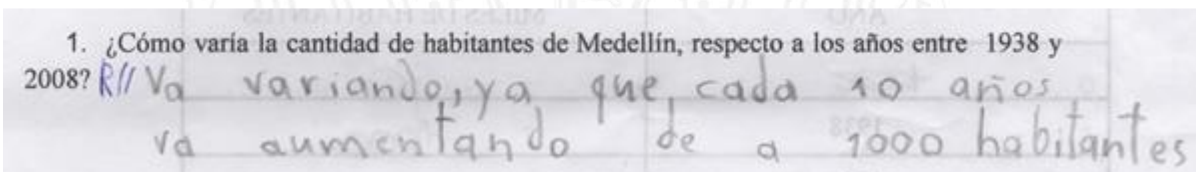
Imagen 38. Respuesta 1 de estudiante en la tarea “Crecimiento de la población”



1. ¿Cómo varía la cantidad de habitantes de Medellín, respecto a los años entre 1938 y 2008?

que cada año va aumentando de a mil habitantes y que los habitantes de 2008 son mas que los de habitantes de 1938.

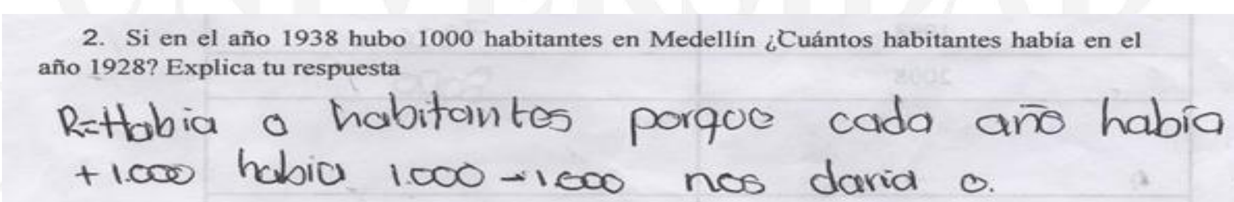
Imagen 39. Respuesta 2 de estudiante en la tarea “Crecimiento de la población”



1. ¿Cómo varía la cantidad de habitantes de Medellín, respecto a los años entre 1938 y 2008? R// Va variando, ya que, cada 10 años va aumentando de a 1000 habitantes

Imagen 40. Respuesta 3 de estudiante en la tarea “Crecimiento de la población”

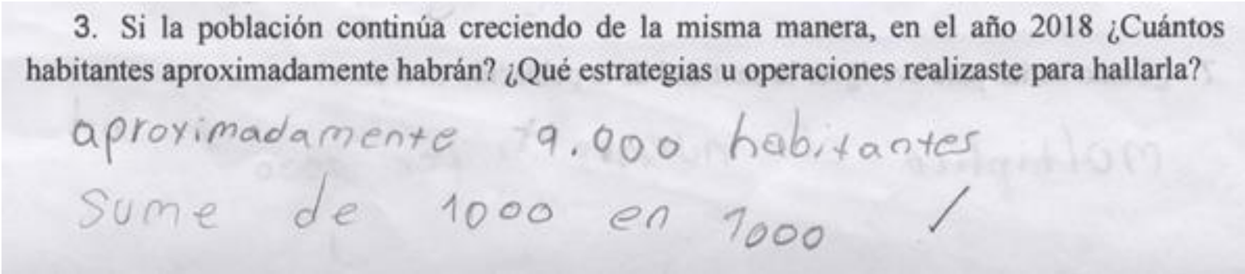
Los conceptos usados fueron variación, secuencia, regularidad, noción de cantidad, adición, sustracción y multiplicación; con esto se evidencia que los estudiantes recurren a sus conocimientos con respecto a las operaciones básicas y de esta forma materializan los objetos ostensivos.



2. Si en el año 1938 hubo 1000 habitantes en Medellín ¿Cuántos habitantes había en el año 1928? Explica tu respuesta

R=Habia o habitantes porque cada año había +1.000 habia 1.000 - 1.000 nos daria o.

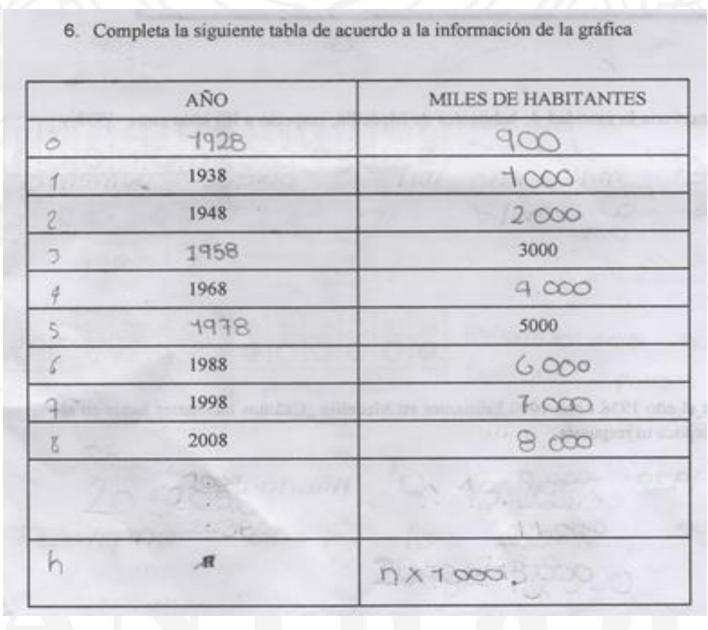
Imagen 41. Respuesta 4 de estudiante en la tarea “Crecimiento de la población”


3. Si la población continúa creciendo de la misma manera, en el año 2018 ¿Cuántos habitantes aproximadamente habrán? ¿Qué estrategias u operaciones realizaste para hallarla?

aproximadamente 9.000 habitantes
Sume de 1000 en 1000

Imagen 42. Respuesta 5 de estudiante en la tarea "Crecimiento de la población"

Los estudiantes debían completar una tabla de acuerdo a la información en la gráfica teniendo en cuenta la posición, el año y el número de habitantes; para ello, recurrieron en cada caso al término anterior y poco a poco establecieron la secuencia. A medida que completan la tabla logran determinar cuál es la regularidad y la relación entre la posición y los habitantes de forma particular; en este punto se hace visible la dualidad extensiva - intensiva dado que logran llegar a la regla general y la expresan a través de un lenguaje algebraico.


6. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información de la gráfica

	AÑO	MILES DE HABITANTES
0	1928	900
1	1938	1.000
2	1948	2.000
3	1958	3000
4	1968	4.000
5	1978	5000
6	1988	6.000
7	1998	7.000
8	2008	8.000
h	n	n x 1000

Imagen 43. Tabla de construcción de la generalización en la tarea 6

Tarea N° 7: Equilibremos la balanza

Fecha: 7 de julio del 2016

Objetivo: Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas.

Materiales: Ficha de la tarea

Se presenta la tarea sobre equivalencias gráficas y numéricas, para ello se le entrega a cada uno de los estudiantes una ficha que consta inicialmente de una serie de imágenes de balanzas con frutas, las cuales deben observar, analizar, establecer la equivalencia entre las frutas y argumentar las respuestas.

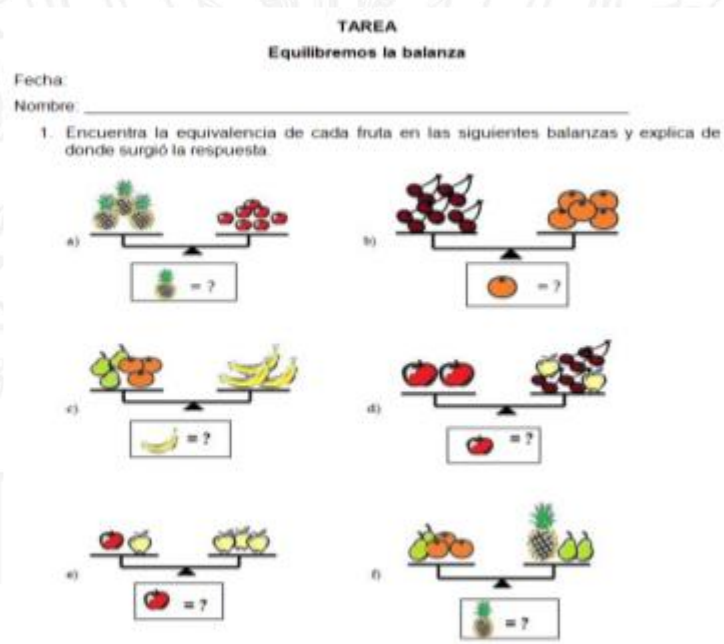


Imagen 44. Ficha de la tarea “Equilibremos la balanza”, Parte 1.

Luego, los estudiantes deben observar las balanzas numéricas y así determinar, coloreando el número de recuadros de la derecha, la cantidad necesaria para poder establecer la equivalencia entre las sumas.

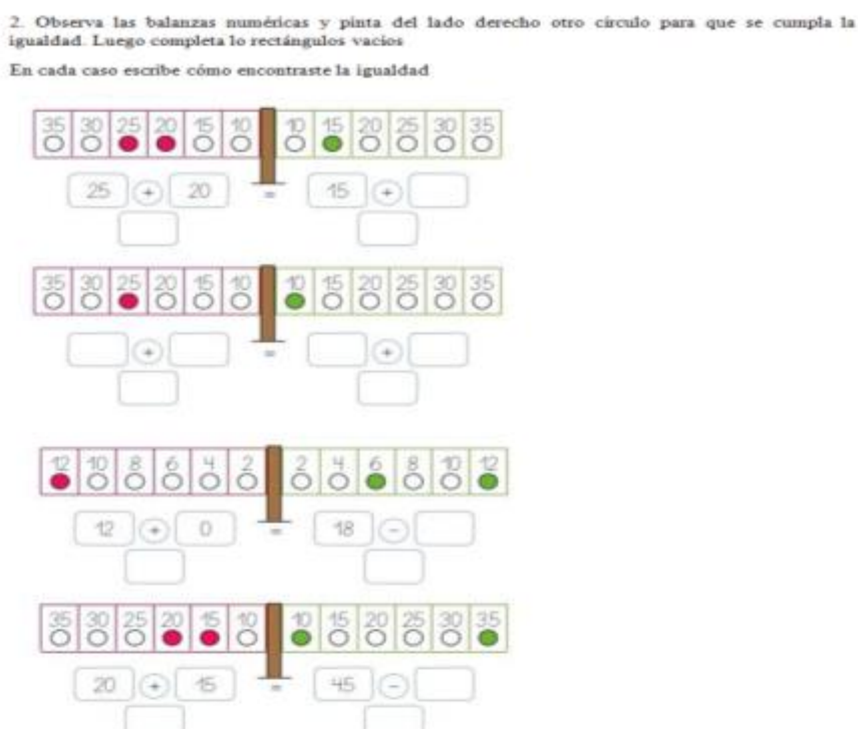


Imagen 45. Ficha de la tarea "Equilibremos la balanza", parte 2.

En el desarrollo de estas tareas, se evidencia la dualidad personal-institucional, la personal cuando cada uno observa, analiza las balanzas, establece hipótesis sobre las equivalencias entre el peso de las frutas; luego se les sugirió que confrontaran las hipótesis en pequeños grupos, en este momento tuvo lugar la faceta institucional, comparten apreciaciones, procedimientos e ideas que surgen para dar respuesta a la situación; utilizan lenguaje escrito y numérico a través de relaciones de equivalencia y las expresan en fracciones.

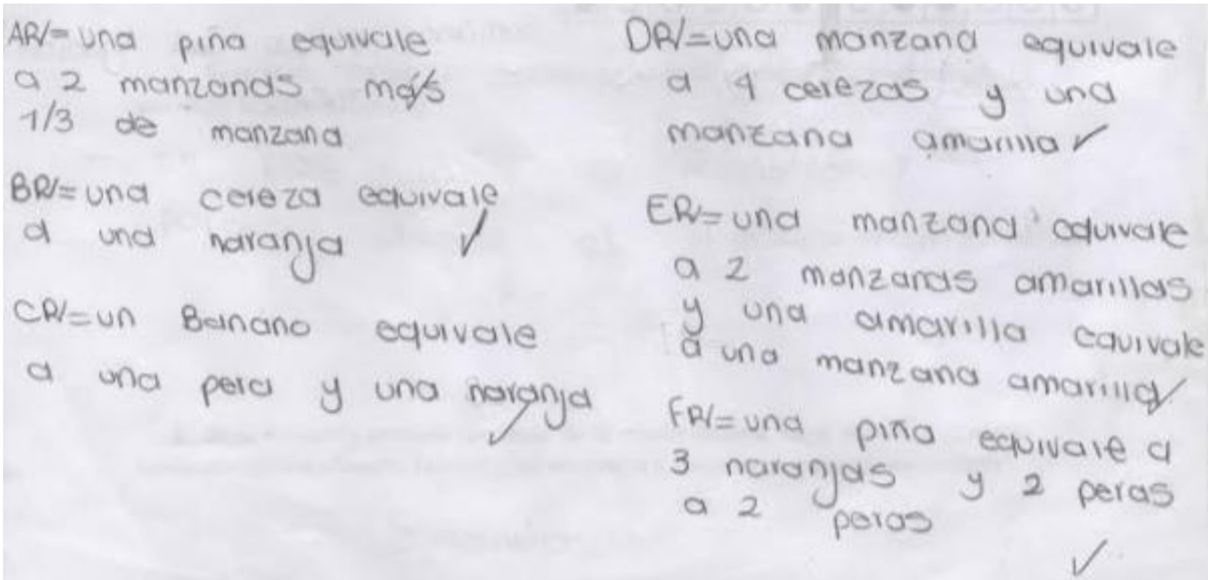


Imagen 46. Respuesta 1 de estudiante en la tarea “Equilibremos la balanza”

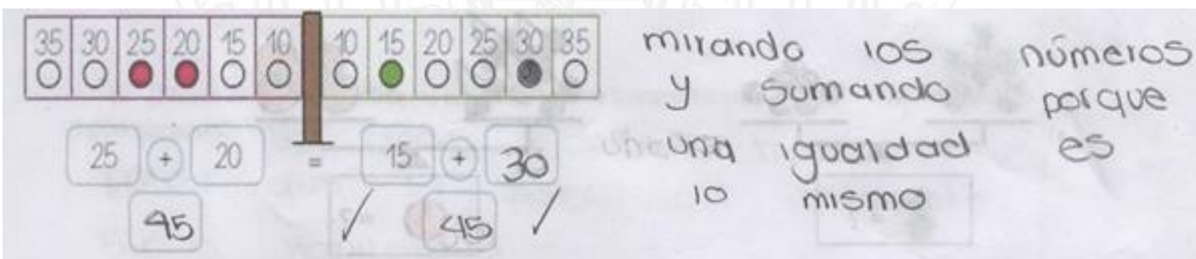


Imagen 47. Respuesta 2 de estudiante en la tarea “Equilibremos la balanza”

Aquí tiene lugar la dualidad unitario-sistémico, los estudiantes toman los conocimientos previos y objetos matemáticos que les sirven para emprender la solución de la tarea, inicialmente de manera aislada, poco a poco encuentran la relación entre ellos y los entretejen en sistemas conceptuales más complejos, de esta manera, constituyen nuevos conocimientos, que en algunos casos son no ostensivos, debido a que unos estaban implícitos en sus discursos matemáticos y otros son ostensivos porque hicieron parte de la solución de la tarea.

Conclusiones

Las consideraciones finales de esta investigación se presentan a partir del propósito de la investigación: el fortalecimiento del proceso de resolución de problemas asociado al Razonamiento Algebraico, y finalmente una apreciación personal como maestras en formación sobre el proceso mismo de investigación.

Durante la experiencia de aula, se evidenció un mejoramiento en el desempeño de los estudiantes de grado 5° al resolver problemas, identificar patrones y regularidades en diferentes contextos matemáticos. Al respecto se concluye:

La aplicación de tareas referidas al Razonamiento Algebraico en el currículo escolar del área de matemáticas, permitió avances significativos en los estudiantes en cuanto al reconocimiento y establecimiento de relaciones de orden y equivalencia, a la identificación y análisis de patrones de cambio y secuencias en situaciones en contexto, para construir y expresar algebraicamente la generalización, lo cual representa el paso de la dualidad extensiva a la intensiva, como rasgo característico del Razonamiento Algebraico.

La estructuración de tareas basadas en la Resolución de Problemas relacionados con el Razonamiento Algebraico y la utilización de diversos materiales, representaciones gráficas y situaciones del contexto, permitieron a los estudiantes el perfeccionamiento de habilidades para resolver los problemas, recurriendo al uso de conceptos propios de la matemática, y a acciones cognitivas de reflexión, interpretación, análisis, verificación y generalización.

El trabajo en equipo y, con este, la generación de espacios para la socialización de los análisis personales e institucionales posibilitó la construcción de argumentaciones claras y estructuradas en la solución de problemas, haciendo uso de diferentes esquemas de representación y el uso de lenguaje algebraico, icónico, escrito, numérico, y verbal más complejos y con mayor fluidez.

Aplicar tareas cercanas tanto a un contexto matemático como a un contexto social de los estudiantes, motivó el aprendizaje de las matemáticas, aspecto que permite constituir conocimientos, expresar puntos de vista o ideas, compararlas con los de los compañeros y negociar significados y sentidos, se logra el planteamiento y socialización de argumentos para las soluciones y validaciones de los mismos.

La incorporación del álgebra en la básica primaria es esencial en la medida que el estudio de la variación es base fundamental para acceder a los procesos de generalización, los cuales están relacionados intrínsecamente con los procesos de abstracción presentes en el estudio de diversos conceptos, operaciones o transformaciones que sufren de acuerdo a la manipulación que se le da a los objetos matemáticos y al análisis que se haga de los mismos.

Finalmente, como maestras en formación, queremos expresar que en los contextos escolares y en el imaginario de los maestros de primaria e inclusive para nosotras al inicio de la investigación, se tenía la concepción de que el desarrollo del Razonamiento Algebraico en primaria era una gran pretensión que difícilmente se logra en los estudiantes de este ciclo; pero esta investigación es una prueba de que se puede lograr este desarrollo a través de la implementación de tareas referidas a la Resolución de Problemas en las cuales sea necesario el reconocimiento y análisis de patrones, regularidades, secuencias, relaciones de orden y equivalencia, que conlleven al proceso de generalización.

Es importante resaltar que esta investigación nos permitió crecer como estudiantes, docentes e investigadoras dado que amplió nuestra mirada a nivel teórico al realizar el rastreo bibliográfico necesario para fundamentar la investigación, y práctico al tener la experiencia de compartir con los estudiantes, orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y aportar en su proceso de formación.

De igual manera, nos ayudó a ser conscientes de que la educación necesita de una constante transformación porque los estudiantes cambian, el contexto varía y el conocimiento evoluciona, de esta manera es tarea de nosotros como docentes reflexionar constantemente sobre nuestro qué hacer con el fin de cuestionarnos, reestructurar nuestras prácticas, analizar y comprender las necesidades de los estudiantes y así replantear estrategias metodológicas que posibiliten la constitución de nuevos conocimientos que los lleve a ser capaces de desenvolverse y actuar frente a las diversas circunstancias que se hacen presentes en el diario vivir.

Cabe añadir que esta investigación nos deja las puertas abiertas para profundizar en estudios acerca del estado de la formación de maestros en el campo del Razonamiento Algebraico y cómo fomentar transformaciones en las prácticas de enseñanza y aprendizaje del algebra elemental en la básica primaria.

Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del Razonamiento Algebraico elemental en maestros en formación* (Tesis doctoral). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Aké, L.P. Godino, J. D. y Gonzato, M. (2013, Marzo). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *Revista iberoamericana de Educación Matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Ake_Godino_Gonzato%20UNION_2013.pdf

Ayola, G., Orozco, S. y Osorio, Y. (2016). *El Pensamiento Variacional-Razonamiento Algebraico en libros de texto de los grados 4° y 5° de primaria* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín.

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathé- matiques*. Paris, Francia: Herman.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21* (3), 247- 304.

Bressan, A. y Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del maestro*, (168), 5-21. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/corre_maestro__matematizacion_progresiva.pdf

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didacüque des Matbémetiques*, *4*(2) ,165-198.

Camacho, M. & Santos, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *NÚMEROS*, 58, 45-60. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/58/Articulo03.pdf

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Callejo, M. L., Camacho, M., Cantoral, R., Carrillo, J., García, G.; Godino, J. D., Santos-Trigo, M. (2015). *Avances y realidades de la educación matemática.* Barcelona, España.

Chamorro M. y Vecino, F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En: M. Chamorro. (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. (pp. 273-299). Madrid: Pearson Educación.

Coronel, M. y Curotto, M. (2008).La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*,7(2), 463-479.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*. *4*(2), 195-208.

Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics'. In A.J. Bishop (Ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching* (pp. 63–85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991). Advanted Mathematical Thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Netherlands: Kluwer.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su didáctica para maestros*. Recuperado de http://matematicassinaloa.com/AreaEspecial/01_ProyectoEdumatMaestros/7_Algebra.pdf

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico elemental. *BOLEMA, 26* (42B), 483-511. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Guzmán, M. (1997). Matemáticas y Sociedad: acortando distancia. *NÚMEROS, (*32), 3-11. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/32/Articulo01.pdf

Kaput, J. J. (1998). Teaching and Learning a new algebra with understanding. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.* Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/eudoxus/Algebra%20Teaching/pdf/Kaput,%20J.,%20Running%20head,%20teaching%20and%20learning%20a%20new%20algebra.%20Teaching%20and%20learning%20a%20new%20algebra%20with%20understanding..pdf

Kaput, J. (1999). 'Teaching and learning a new algebra'. En E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp.133–155). Erlbaum, Mahwah, NJ.

Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from a engine of inequity of an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 Curriculum. *National Center of Improving Student*

Learning and Achievement in Mathematics and Science. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf

Lesh, R y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *The second Handbook of Research on Mathematics and Learning*, 763-804.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp.65-86). London: Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*. Recuperado de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Molina2009PNA3(3)Unapropuesta.pdf

Mora, L. (2012). *Álgebra en primaria*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Restrepo, B. (2004). Una variante pedagógica de la Investigación-Acción Educativa. *OEI-Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/370Restrepo.PDF

Sandoval, C. (2002). Investigación Cualitativa. Bogotá: ARFO editores e impresos Ltda.

Santos, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Investigação em educação matemática XII. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportes de la Investigación. *NÚMEROS, 77(Julio),* 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Vasco, C, (2002). El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En C.E.Vasco. *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas* (68-77). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (2006).El pensamiento variacional y la modelación matemática. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

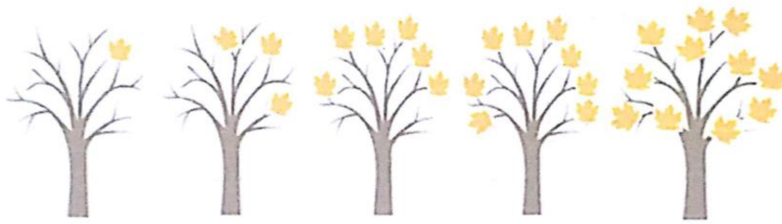
Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

Zaskis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379-402.

Anexos

Actividad 1: Observando el crecimiento

Andrés y su papá notan que les va muy bien sembrando árboles, y deciden sembrar uno más; observan que en este nuevo árbol sus hojas van creciendo así.



DIA 1 DIA 2 DIA 3 DIA 4 DIA 5

- ¿Cómo va creciendo el número de hojas de los árboles?

____
____
____
____

- ¿Cuántas hojas tendrá el árbol en el día 7?

____
____
____

De acuerdo al aumento del número de hojas, completa la siguiente tabla:

Días	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7	Día 10	Día 12		
N° de hojas	1	3			11						

- ¿Habrá un día que el número de hojas sean 22? SI __ NO ___ ¿Por qué?

____
____
____
____

- ¿Habrá un día en el que el número de hojas sean 26? SI __ NO ___ ¿Por qué?

____
____
____

Anexo 1. Actividad diagnóstica 1

Actividad 2: La pastelera

Carmen trabaja haciendo tortas, en la siguiente tabla se muestra el número de tortas y el tiempo que se demora Carmen en hacerla.

Analiza la tabla y completa los datos que faltan:

Tortas	1	2	3	4	5		10	
Tiempo	30 min	1 hora		120 min		4 horas		7 horas

- Si Carmen tiene un pedido de 20 tortas ¿cuánto tiempo tardará?

____

____

____

____

Anexo 2. Actividad diagnóstica 2

Actividad 3: Tazos

Camilo tiene 6 tazos más que Andrés, y Andrés tiene 3 tazos más que José. En la siguiente figura se muestra el total de tazos que tienen entre los 3.

- ¿Cómo haría para saber cuántos tazos tiene cada uno?

____

____

____

____

- Completa la tabla con la cantidad que corresponde teniendo en cuenta la información dada.

	Número de tazos				
Andrés	7	4			
José	4		3		
Camilo				6	11

- ¿Cuántos tazos tiene cada uno?

____

____

Anexo 3. Actividad diagnostica 3

Actividad 4: pagando la cuenta

Andrea debe pagar en la tienda $1.800 por las papitas y el jugo. Si sabemos que Andrea tiene esto en sus bolsillos:

Dibuja cinco formas diferentes en las que Andrea puede pagar la cuenta sin que le den vueltos

1)
2)
3)

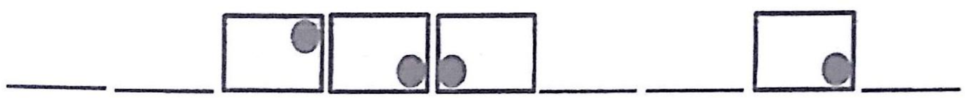
Anexo 4. Actividad diagnóstica 4

Actividad 5 .

1. Descubre cómo varían las figuras y rellena los espacios faltantes :

- 

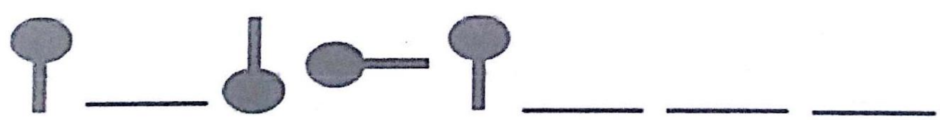
¿Qué figura irá en la posición 15? Explica cómo lo encontraste.

- 

¿Qué figura irá en la posición 12? ¿Por qué?

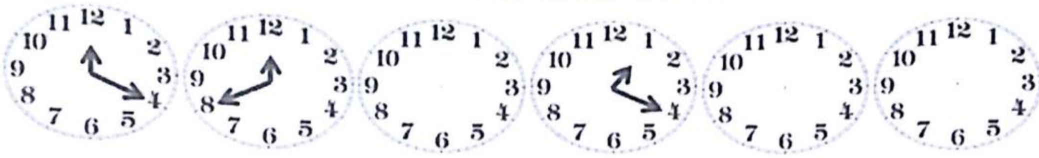
- 

¿Cómo vería la figura de la posición 20? ¿Cómo lo descubriste?

- 

Dibuja cómo sería la figura que está dos posiciones antes que la primera.

Anexo 5. Actividad diagnóstica 5 parte 1



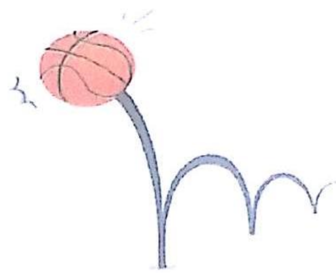
Según la variación en cada reloj, ¿qué hora tendría que haber en el reloj que esté en la posición 8 ?

2. Rellena los espacios y describe cómo varían los números

- 4, 8 , 16 , ___ , 64 , ___ , ___ , ___ , ____ , ____
- 3, 4, 7, _____, _____, _____, _____, 22, _____, _____, 31.
- _____, 48, ______, 72, _____, _____, 108, 120, _____, _____, 156, _____, _____.
- ____, 50, 47, ____, 41, ____, 35, ____, 29, ____, ____, 20, ____, ____, ____, 8, 5.
- _____, 9, _____, _____, 24, _____, 34, _____, 44, _____, 54, 59, 64.
- 1050, 1100, 1150, _____, _____, ______, 1350.

Anexo 6. Actividad diagnóstica 5 parte 2

Una pelota es lanzada desde una determinada altura, la Tabla ilustra el número del rebote y la altura obtenida por la pelota[1].



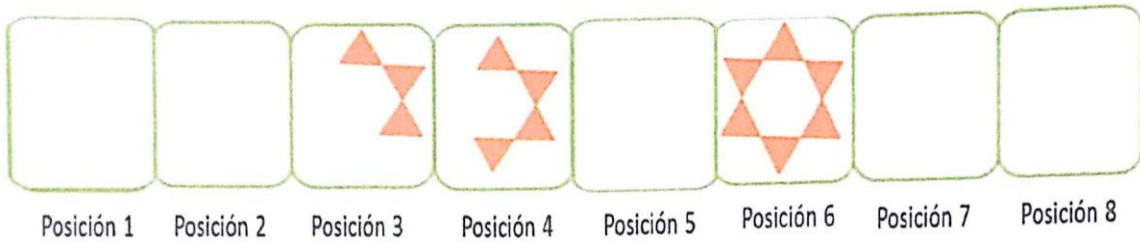
Completa la tabla con los datos que faltan, considerando que los rebotes de la pelota conservan la *regularidad* que se observa en los datos de la tabla y responde las siguientes preguntas:

N° de Rebote	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Altura obtenida	128 cm		32 cm	16 cm		

a. ¿Qué cambio hubo en la altura alcanzada por la pelota entre el 3° y 4° rebote? ¿Qué procedimiento matemático harías para encontrar la altura de la pelota en el siguiente rebote?
b. ¿Qué altura alcanza la pelota en el sexto rebote? ¿Cómo hiciste para encontrarla? ¿Cuántos rebotes debe dar la pelota para que empiece a deslizarse por el suelo, considerando que la pelota se desliza cuando tiene una altura menor de 1 cm?
c. ¿Cómo puedes conocer la altura obtenida por la pelota, conociendo el número de rebotes? Explica tu respuesta.
d. ¿Cómo va cambiando la altura de la pelota a medida que aumentan los rebotes?
e. ¿Cuál es la altura inicial desde donde se lanzó la pelota?

Anexo 7. Tarea "El rebote de la pelota"

Observe la secuencia[2]:



De acuerdo a la secuencia de figuras, completa las posiciones que faltan y responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 2?

b. ¿Cuántos triángulos tendría la figura en la posición 7, posición 10, posición 13?

d. Si una de las figuras tiene 21 triángulos ¿En qué posición se encontraría?

e. ¿Cómo podríamos encontrar la cantidad de triángulos que tiene una figura en cualquier posición?

f. ¿Es posible determinar la posición de cualquier figura conociendo la cantidad de triángulos? Explique

g. ¿Qué relación existe entre la posición de cada figura y el número de triángulos de la figura?

g. Si los lados de cada triángulo se forman con palillos. Completa la siguiente tabla

	Número de triángulos	**Número de palillos**
Posición 1		
Posición 2		
Posición 3	3	
Posición 4		12
Posición 5		
Posición 6		18
Posición 7		
Posición 8		

h. ¿Qué relación hay entre el N° de triángulos y la cantidad de palillos?

i. En alguna posición, ¿habrá una figura con 25 palillos SI ____ NO ____? Justifique

Anexo 8. Tarea “Secuencia de triángulos”

En la figura 1 se muestra el número de personas y la cantidad de huevos que éstas consumen al año. Además, se sabe que una (1) gallina pone trescientos (300) huevos al año.

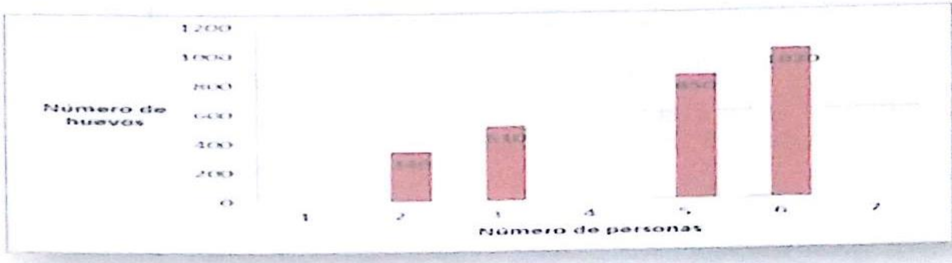


Figura 1. Adecuación de la Tarea 1 - página 81 de la E1 4° grado.

De acuerdo al enunciado y a la información de la gráfica, responda las siguientes preguntas:

a. Complete el gráfico con los datos que hacen falta.

b. Si en un corral hay 12 gallinas, ¿a cuántas personas alcanzan a alimentar con la cantidad de huevos que ponen?

c. Si se tienen 2040 huevos, ¿a cuántas personas se pueden alimentar al año con esa cantidad de huevos?, ¿cuántas gallinas como mínimo se requieren para obtener esa cantidad de huevos?

d. ¿Cómo encontrarías la cantidad de huevos que consumen al año, un grupo de 30 personas?

Anexo 9. Tarea “Consumo de huevos” parte 1

e. Si una familia está conformada por 7 personas ¿cuántas gallinas se necesitan para alimentar a la familia?

f. En la tabla se registra el número de huevos que consumen anualmente tres (3) personas, completa la tabla con los datos que faltan.

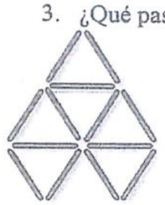
N huevos		170		510	
Tiempo	2 mes		5 mes	1 año	2 años

Anexo 10. Tarea “Consumo de huevos” parte 2

• Con tres palillos forma un triángulo de tal manera que para cada lado se utilice sólo un palillo. 	• Ahora, utilizando uno de los lados del triángulo armado, construir otro triángulo pero usando dos palillos cada vez (un palillo es un lado de la figura en forma de triángulo) 

Responde:

1. ¿Cuántos palillos se necesitan para armar 8, 10, 20 triángulos?
2. ¿Cómo saber cuántos palillos se requieren para construir 30 triángulos con las características dadas? Sin necesidad de hacer los triángulos. ¿Qué procedimiento se puede seguir?
3. ¿Qué pasaría si la construcción es otra?



Anexo 11. Tarea “Los palillos”

1. Completa los espacios

   a. 10 +_____ =35

   b. _____ - 11 = 74

   c. 8 × _____ = 96

   d. 20 = 4 + _____- _____

   e. _____ - 33 + ______ = _______

   f. _____ × 21 = 126 × 2

   g. 3 × _____ = 672

   h. 10 + _____ =15 + 15

   i. 199 = _____ + 57

   j. 5 + 11 = 11 + _____

   k. 2 =2 +_____ - _____

   l. ______ = ______

2. Resolver los siguientes problemas

   a. En la tienda de la I.E. L a Asunción compraron 30 cajas de chocolatinas para regalar el dia del niño. Cada caja contenia 50 chocolatinas. Tres días despúes een un clima caluroso se percataron de que 75 chocolatinas se habían derretido por completo.

      - Cuantas de las chocolatinas quedaron en buen estado?

        ____

      - Si a los tres días se derritieron 75 chocolatinas, ¿cuantas se habrían derretido a los 6 días? ¿Cuantas a los 9, 12, 15 y 17?

      - ¿Cuántos días tendrán que pasar para que se derritan completamente?

        ____

        ____

        ____

      - Describe como llegaste a encontrar los resultados anteriores.

Anexo 12. Tarea "Pensemos matemáticamente"

Se desea rodear de baldosas triangulares a las baldosas blancas como se observa en las figuras.

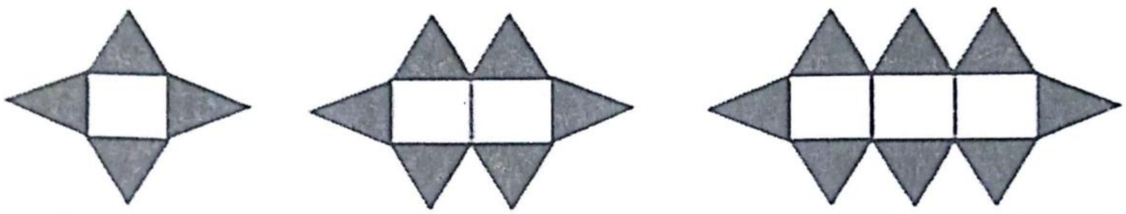


Figura 1 figura 2 figura 3

....

1. ¿Cuántos triángulos son necesarios para rodear 1 baldosa blanca?

___

2. ¿Cuántos triángulos son necesarios para rodear 2 baldosas blancas?

___

3. ¿Cuántos triángulos son necesarios para rodear 3 baldosas blancas?

___

4. ¿Cuántos triángulos serán necesarias para rodear 4 baldosas blancas? Dibuje la figura

___

5. Sin dibujar, ¿Cuántos triángulos serán necesarias para rodear 5 baldosas blancas?

___

6. Explique cómo encontró el numero de baldosas triangulares requeridas para rodear esas 5 baldosas blancas:

___

___

7. Sin dibujar ¿Cuántos triángulos serán necesarios para rodear 10 baldosas blancas?

___

Anexo 13. Tarea "Baldosas blancas" parte 1

8. Sin dibujar ¿Cuántos triángulos serán necesarias para rodear 20 baldosas blancas?

____

9. Explique con sus propias palabras el procedimiento o regla que utilizó para hallar los resultados de las cuestiones anteriores.

____
____
____

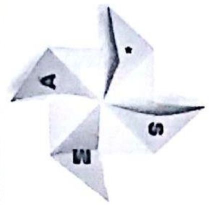
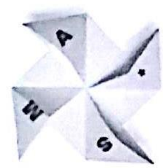
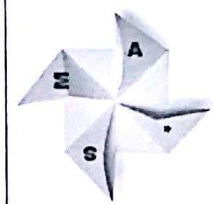
10. Pase a la tabla los resultados correspondientes a los numerales anteriores.

figura	número de baldosas blancas	número de triángulos
1	1	4
2		6
3	3	
4		
5		
9	9	
15		
20	20	
30		
. . . .		
n	n	

11. Explique cómo encontró el número n de triángulos para rodear el número n de baldosas blancas.

____
____
____

Anexo 14. Tarea “Baldosas Blancas” parte 2

					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Con ayuda de tu molino responde:

1. Completa la tabla siguiendo la secuencia y escribe como que hiciste para completar la tabla.

2. Como seria la figura que esta antes de la posición 1? Explica

3. De acuerdo con la secuencia como estaría ubicado el molino en la posición 8? Y en la 10? Por qué?

4. ¿Será que la figura de la posición 2 se repite? ¿En qué posición y porque?

5. ¿Cómo cambia la figura según la posición?

Anexo 15. Tarea “El molino”

1. Escribir algebraicamente las siguientes expresiones y justifica:

a) El doble de un número

b) El triple de un número

c) El doble de un número más 5

d) La mitad de un número más su triple

e) La cuarta parte de un número disminuido 6

2. Hallar el número para cada caso y escribe como lo lograste:

a) Su doble más 5 es 35

b) Al sumarle su consecutivo obtenemos 51

c) Al sumar su doble, su mitad y 15, se obtiene 99

d) Su cuarta parte es 15

e) Si al doble de un número se resta su mitad, resulta 54

f) Calcula un número que sumado con su anterior y su siguiente dé 114

3. Resuelve los siguientes problemas y escribe cómo lo hiciste:

a) En la Feria del Libro, Ximena compró un libro con la mitad de su dinero y una historieta con la mitad de lo que le quedaba al salir de la librería. Le sobraron 2.400 pesos ¿Cuánto dinero tenía Ximena en un principio?

Anexo 16. Tarea "Resolvamos problemas" parte 1

b) En la tienda escolar, al reunir las ganancias del día martes, miércoles y jueves, se obtuvieron 35.000 pesos. Si cada día se recaudó la mitad de dinero del día anterior, ¿cuánto se recaudó el día martes; cuánto, el miércoles y cuánto, el jueves? Explica cómo lo hallaste.

c) La edad de la representante del grado octavo aumentada en 8 años es equivalente al triple de la edad que tendrá el próximo año

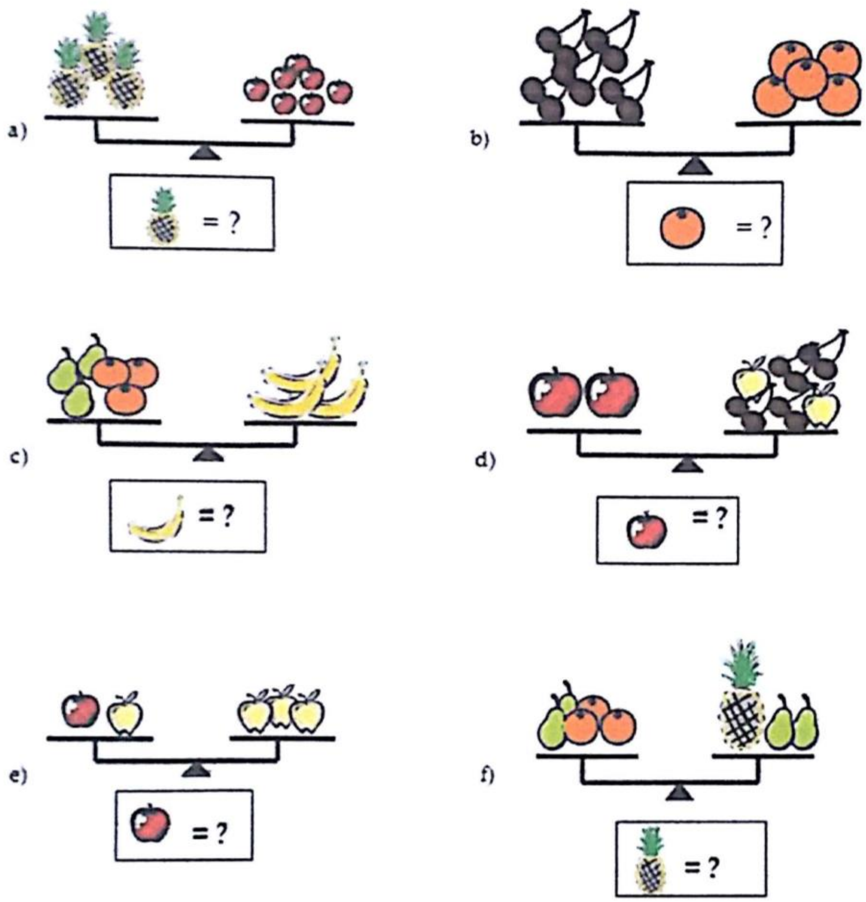
d) Luisa y María Paz están decorando 120 tarjetas para compartir el Día de Amor y Amistad. Si Luisa ha decorado 50 tarjetas más que María Paz ¿cuántas tarjetas ha decorado cada una?¿por qué?

e) En una competencia de atletismo en la clase de educación física se determinó que entre Emmanuel y Manuela recorrieron 1700 mts. Si Emmanuel recorrió 150 metros menos que Manuela. ¿Cuántos metros recorrió Emmanuel?

f) En el tour de Francia el ciclista Nairo en la primera etapa recorrió 98 km, en la segunda etapa 116 Km, en la tercera etapa 129 Km, en la cuarta etapa 147 km y así fue avanzando en las siguientes etapas. Si la distancia aumenta a medida que avanza en las etapas, ¿cuántos Km habrá recorrido en la séptima etapa, en la novena etapa y en la décima etapa? Si son 21 etapas ¿cuántos Km habrá recorrido en total?

Anexo 17. Tarea "Resolver problemas" parte 2

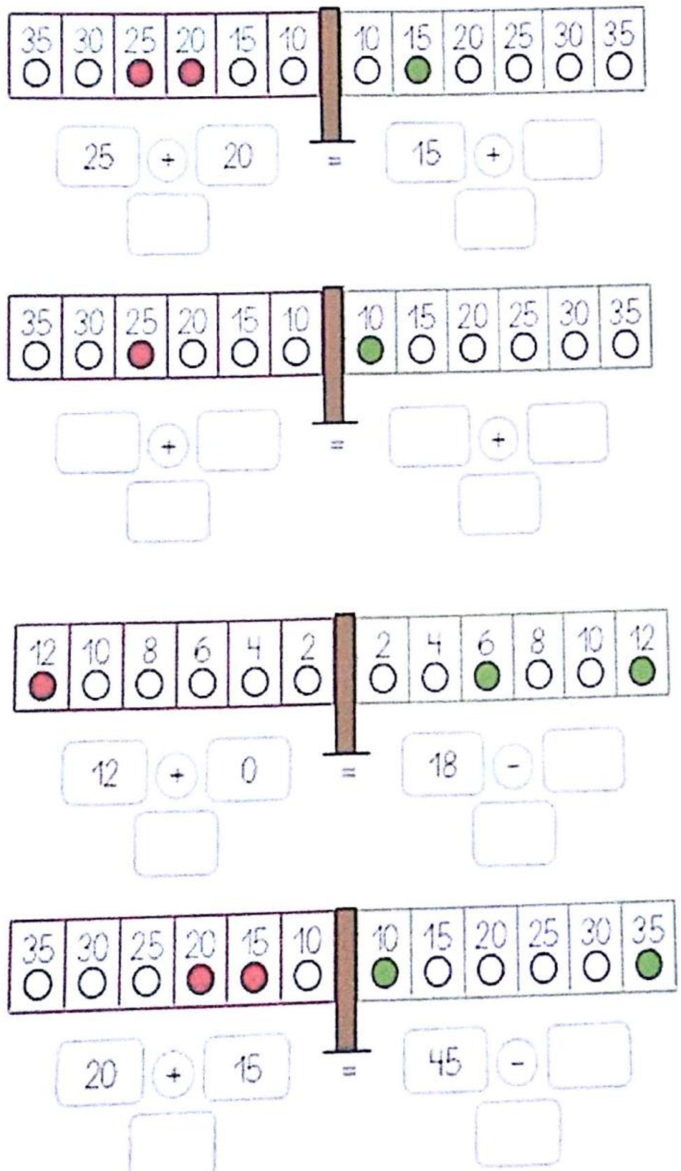
1. Encuentra la equivalencia de cada fruta en las siguientes balanzas y explica de donde surgió la respuesta.



Anexo 18. Tarea “Equilibremos la balanza” parte 1

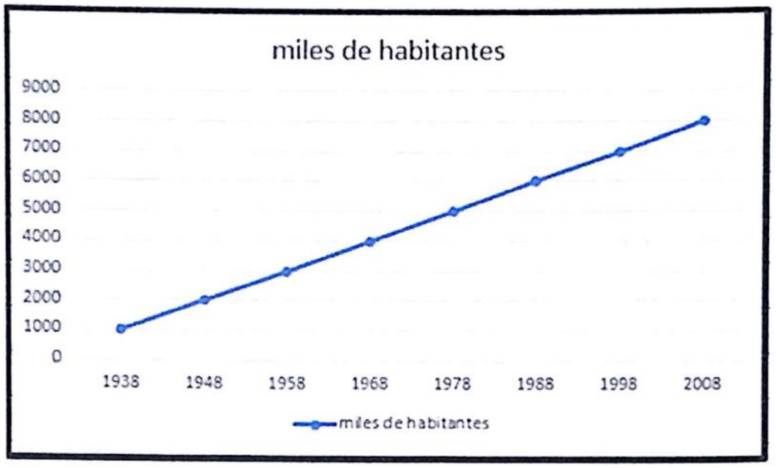
2. Observa las balanzas numéricas y pinta del lado derecho otro círculo para que se cumpla la igualdad. Luego completa lo rectángulos vacíos

En cada caso escribe cómo encontraste la igualdad



Anexo 19. Tarea "Equilibremos la balanza" parte 2

En la siguiente gráfica se presenta el número de habitantes que hay aproximadamente en la ciudad de Medellín durante los años comprendidos entre 1938 y 2008



1. ¿Cómo varía la cantidad de habitantes de Medellín, respecto a los años entre 1938 y 2008?

2. Si en el año 1938 hubo 1000 habitantes en Medellín ¿Cuántos habitantes había en el año 1928? Explica tu respuesta

3. Si la población continúa creciendo de la misma manera, en el año 2018 ¿Cuántos habitantes aproximadamente habrán? ¿Qué estrategias u operaciones realizaste para hallarla?

4. ¿En qué año podría haber 12.000 habitantes en la ciudad de Medellín?

Anexo 20. Tarea "Crecimiento de la población" parte 1

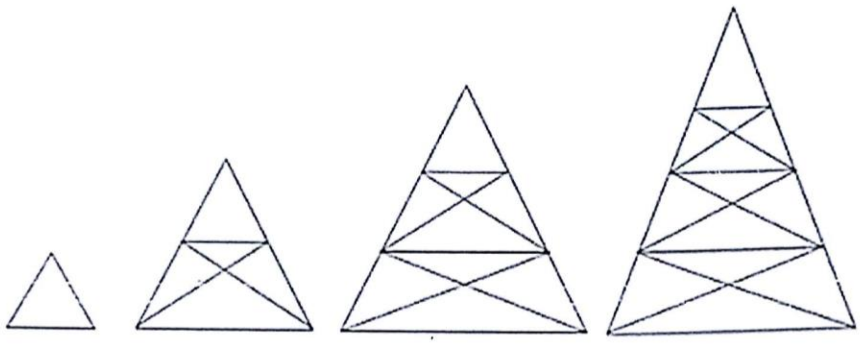
5. Desde el año 1998, cuántos años más deben transcurrir para que la población aumente 5.000 personas?

6. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información de la gráfica

AÑO	MILES DE HABITANTES
1938	
1948	
	3000
1968	
	5000
1988	
1998	
2008	
. . .	
n	

7. ¿Cómo harías para averiguar la cantidad de la población en ***n*** años?

Anexo 21. Tarea "Crecimiento de la población" parte 2



Observe la secuencia de triángulos y responda cada pregunta.

1. En la figura 1:
   -¿Cuántos triángulos hay?____________________
2. En la figura 2:
   -¿Cuántos triángulos hay?____________________
3. En la figura 3 :
   -¿Cuántos triángulos hay?____________________
4. En la figura 4 :
   -¿Cuántos triángulos hay?____________________
5. Pasa los resultados ya encontrados en 1. 2. 3. 4. a la tabla.

Nº DE LA FIGURA	Nº DE TRIANGULOS
1	1
2	
3	
4	
5	
6	
12	
30	
...	
n	

Los datos que vaya encontrando a continuación váyalos pasando a la tabla.

6. Dibuje la figura 5 y escriba el número de triángulos.

Anexo 22. Tarea "Torre Repetidora" parte 1

7. Sin dibujar la figura 6, complete los datos correspondientes en la tabla.
8. Sin dibujar, encuentre el número de triángulos correspondientes a la figura 12.
9. Explique, cómo encontró el número de triángulos de la figura 12.

10. Encuentre el número de triángulos correspondientes a la figura 30.
11. Explique, cómo encontró el número de triángulos de la figura 30

12. ¿Cuál será el número de triángulos de la figura n?

____

____

13. Explique, cómo encontró el número de triángulos de la figura n.

Anexo 23. Tarea “Torre repetidora” parte 2

1. Resuelve.

Una caja mágica duplica el número de confites que metas en ella, pero después de que se usa cada vez se deben pagar 4 confites. Juan probó e introdujo sus confites en la caja y efectivamente se duplicaron, pago 4 confites y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron pero al pagar los 4 confites se quedó sin dulces. ¿Cuántos confites tenia Juan en un principio?

Anexo 24. Tarea "La caja mágica"