UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

MANERAS DE GENERALIZAR PATRONES LINEALES A PARTIR DE SECUENCIAS PICTÓRICAS POR NIÑOS DE QUINTO GRADO

JUAN SEBASTIÁN CUARTAS CARMONA

Asesor
WALTER FERNANDO CASTRO GORDILLO
Doctor en Didáctica de la Matemática

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2015

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a Marta y a Carolina, mi madre y mi hermana, por el incondicional apoyo que me han ofrecido durante la realización de la maestría.

Agradecimientos

Agradezco la realización de este trabajo a Dios por darme la oportunidad de encaminarme en esta maestría; a mi asesor por sus sabias recomendaciones; a Sor Sara Cecilia Sierra, rectora de la Institución Escuela Normal Superior María Auxiliadora de Copacabana, por aceptar la realización de este trabajo en dicha institución; a Mónica Triana, profesora titular de quinto grado durante el año 2014, por acompañarme y motivarme en la toma de decisiones para el trabajo de campo; a los niños de quinto grado por acogerme en su grupo y facilitar la producción de información; a los integrantes del grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad (MES) que aportaron en la consolidación de esta maestría a partir de los comentarios que hacían en las diversas reuniones; a la Universidad de Antioquia por concederme la beca que me permitió cursar mis estudios de maestría; y a todos aquellos que de alguna manera contribuyeron en la realización de este trabajo.

Contenido

Tablas

Figuras

PRESENTACIÓN

Este trabajo de maestría fue realizado entre los años 2013 y 2015 en el programa *Maestría en Educación*, el cual fue ofrecido por la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, y fue inscrito al Grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad (MES).

En el presente documento se informa sobre las maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado. Estos niños respondieron unas tareas asignadas de forma escrita, y participaron de unas sesiones de entrevista semiestructurada. Este estudio presenta un diseño metodológico cualitativo, en el cual se analizan datos producidos por algunos niños que fueron elegidos a partir de unos criterios establecidos durante las observaciones de clase realizadas por el investigador[1]. El documento consta de cinco capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el capítulo 1 *Planteamiento del problema*, se presenta una justificación de tres tipos: personal, curricular, y teórica. En este capítulo, se declaran tanto la pregunta como el objetivo de investigación.

En el capítulo 2 *Marco teórico de referencia,* se enuncian algunos estudios relacionados con la pregunta y con el objetivo de investigación planteados en el primer capítulo, y se asume una postura frente a los conceptos relacionados con el problema de investigación.

En el capítulo 3 *Diseño metodológico*, se mencionan tanto el enfoque, como el método y los instrumentos empleados para la producción de la información, los cuales orientan al investigador en cuanto a la manera de responder la pregunta de investigación.

[1]En este documento, cada que se emplee la expresión “el investigador”, sin alguna referencia bibliográfica en el mismo párrafo, se entenderá que la persona mencionada es el autor de este trabajo de maestría.

En el capítulo 4 *Análisis*, se describen las respuestas dadas por los niños mediante los instrumentos propuestos en el tercer capítulo, y se categorizan las estrategias identificadas por el investigador en estas respuestas.

En el capítulo 5 *Conclusiones*, se da respuesta a la pregunta de investigación, y se informa sobre la consecución del objetivo de investigación. Adicionalmente, se ofrecen unas líneas de investigación que podrían derivarse de este trabajo.

Este trabajo contiene un documento adjunto en el cual se encuentran cuatro Anexos: Tareas, Permiso de los padres de familia, Respuestas escritas por cada niño, y Transcripción de entrevistas. Estos anexos complementan la información que contienen los cinco capítulos mencionados en los párrafos anteriores, por lo tanto se sugiere al lector que tenga en cuenta esta información para la lectura del documento.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo está conformado por dos componentes. En el primero se presenta la Justificación, en la cual se dan consideraciones personales, curriculares y teóricas para la realización de este trabajo; y en el segundo componente se presentan tanto la pregunta como el objetivo de la investigación.

Justificación

Este trabajo surge por un interés del investigador, por propuestas curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) y del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), y por una revisión de literatura. Por este motivo, a continuación se presentan tres tipos de justificación: personal, curricular y teórica.

Justificación personal

En este apartado, el investigador declara inicialmente su postura epistemológica con relación a las matemáticas y a la educación matemática. Además, se hace referencia a la experiencia que ha permitido identificar un problema de investigación.

Para comenzar, se declara la postura epistemológica con respecto a las matemáticas, en la cual se asume que el conocimiento matemático es falible porque es construido por personas, que pueden equivocarse (Lakatos, 1981, 1989). Es decir, cuando se estudia algo, es posible cometer errores pero interesa conocer el modo en el que cada uno expone su comprensión de una situación, a partir de las respuestas que ofrece. Por tanto no interesa refutar las conjeturas expresadas en las respuestas dadas por cada niño. Cuando un niño reconoce que se ha equivocado, puede tener una nueva comprensión al objeto de conocimiento, y la explicación expuesta en este reconocimiento constituye para el investigador una manera de identificar tal comprensión. De este modo se reconoce la relevancia de entender el conocimiento como una construcción personal falible.

Para reconocer la concepción epistemológica de la educación matemática que se asume en este trabajo, es preciso mencionar la concepción de estudiante, maestro[2], instrucción, para vincular posteriormente estas concepciones con los intereses del investigador.

La concepción de estudiante, en esta perspectiva, es la de aquel que no recibe pasivamente el conocimiento, sino la de aquel que lo construye (Sierpinska y Lerman, 1996). Lo anterior sugiere que los estudiantes aprenden matemáticas a partir de un proceso de producción de conjeturas, las cuales pueden ser valoradas por ellos mismos. El rol del maestro consistiría entonces en proponer tareas para que el estudiante tenga sus propias experiencias, y pueda elaborar sus propias explicaciones, de acuerdo con los modos en los que se acerca a un objeto de conocimiento -en el caso de este trabajo, los patrones lineales-. El maestro tiene mayor interés por exponer los procesos evolutivos del conocimiento matemático que por indagar acerca del fundamento de la validez de los conocimientos matemáticos (Sierpinska y Lerman, 1996).

En coherencia con el interés de los maestros, en esta perspectiva, la instrucción es entendida como aquel proceso que debe favorecer el desarrollo de las operaciones mentales, mediante experimentos que pretenden construir generalidad en el pensamiento (descubrir leyes generales). En la construcción de las leyes matemáticas, la intuición y la lógica interactúan; una en el proceso de invención, la otra en su verificación. En este trabajo, la intuición se vincula con las maneras de generalizar patrones por los niños, y la lógica se asocia con la aceptación de la validez o falsedad de una proposición relacionada con la respuesta dada por un niño.

[2] Se declara una postura de “maestro” aunque el investigador no fungió como maestro.

Con estas concepciones -estudiante, maestro, e instrucción-, el conocimiento matemático puede entenderse como un proceso de construcción de representaciones internas que el individuo hace del mundo físico. De aquí la idea de que el pensamiento no tiene fronteras, es decir, el individuo es activo en su estructura psíquica (Moreno y Waldegg, 2002), y esta actividad le brinda la posibilidad de ser creativo, y de manifestar su creatividad en las respuestas que da a las diversas tareas que se le presentan.

Con respecto a la relación entre el estudiante y el conocimiento falible se presume que el estudiante puede relacionarse con el conocimiento a medida que conjetura y posteriormente elabora pruebas o refutaciones sobre sus propias conjeturas (Lakatos, 1989). Para esta actividad conjetural existe una lógica interna, de la cual están dotados todos los individuos. Para dar relieve a la actividad conjetural, esta postura difiere de los presupuestos que definen una epistemología estructuralista, en la cual se entienden las matemáticas como un todo unificado, en el que el significado y la significación de cada parte es una función del papel que juega en ese todo. El proceso evolutivo de las matemáticas, en una perspectiva estructuralista, está centrado en la axiomatización. Mientras que en una postura que admite la posibilidad de equivocarse, los procesos de conjetura y prueba son esenciales en la producción de conocimiento matemático.

La postura epistemológica del investigador admite la construcción de conocimiento matemático, por parte de los niños, como un proceso caracterizado por la posibilidad de equivocarse. El rol del investigador –o del maestro cuando sea caso - será estudiar las maneras de comprensión manifestadas por los estudiantes frente a tareas matemáticas.

Aunque la postura del investigador concuerda con algunos aspectos del constructivismo (Moreno y Waldegg, 2002) el investigador diverge con las etapas de desarrollo psicológico que proponen en esta postura para determinar los contenidos matemáticos y las edades pertinentes para su implementación en clase. Este aspecto será profundizado en la justificación teórica. En síntesis, el investigador asume una postura epistemológica en la cual predomina el constructivismo. Se emplea la palabra "predomina" porque no se consideran todos los supuestos que en esta postura se declaran, aunque hay una afinidad con los aspectos mencionados en este documento.

Los patrones identificados por el investigador en errores que cometían tanto estudiantes del programa *Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas* de la Universidad de Antioquia como estudiantes del *Semillero de matemáticas* dirigido por el mismo investigador en la Institución Educativa Escuela Normal Superior María Auxiliadora de Copacabana, años atrás, han sido motivos de una constante preocupación para el investigador.

Estos errores pueden ser entendidos como patrones, en sentido que aparecían frecuentemente en las respuestas de los ejercicios propuestos. Estos patrones, a su vez, eran considerados como generalizaciones cuando eran aceptados por dichos estudiantes como regla, aunque esta regla no respondiera correctamente el ejercicio propuesto. Además, algunas discusiones generadas en el seminario de *Tendencias de Investigación en Educación Matemática*, en el contexto de la Maestría en Educación, sirvieron al investigador para indagar por algunas investigaciones recientes las cuales informan sobre esta problemática en estudiantes que están cursando los primeros grados de escolaridad; investigaciones que reconocen la importancia de promover la generalización de patrones desde los primeros grados, para que los estudiantes tengan acceso y permanencia en niveles superiores de formación, en clases de matemáticas.

Vale mencionar que estos estudios recientes están enmarcados en los procesos de aprendizaje y enseñanza del álgebra escolar, y asumen diversas posturas sobre temas como: el estudio del *álgebra* desde los primeros grados de escolaridad, la *generalización* como proceso involucrado en toda la actividad educativa del estudiante, los *patrones* como base para la generalización, las *representaciones* como las expresiones involucradas en el estudio de patrones.

Esta problemática ha conducido al investigador a una búsqueda de la fundamentación curricular y a una revisión de literatura, relacionada con la generalización de patrones por estudiantes que se encuentran cursando los primeros grados de escolaridad.

Justificación curricular

De acuerdo con los planteamientos de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) los estudiantes empiezan su desarrollo del razonamiento matemático en los primeros grados apoyados en los recursos que les permite percibir regularidades y relaciones; predecir y conjeturar; explicar coherentemente; proponer interpretaciones y respuestas, con la posibilidad de aceptarlas o rechazarlas. Particularmente, al culminar el grado quinto (5°) los estudiantes deben estar en condiciones de justificar regularidades y propiedades de los números, así como también establecer relaciones y operaciones entre números; además, el estudiante debe interpretar y describir representaciones gráficas que presentan variaciones, y representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales, en este caso, el estudiante produce las reglas verbales a partir de secuencias pictóricas (Kieran, 2004; MEN, 2006). Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (1998) afirman que razonar en matemáticas tiene que ver, entre otros aspectos, con la identificación de patrones para expresarlos matemáticamente.

Dichos documentos (MEN, 1998; MEN, 2006) ofrecen indicios sobre la importancia de la generalización a partir de la identificación de patrones, pero no hacen un tratamiento de este asunto a profundidad, en el sentido que hay declaraciones amplias que no muestran posibles rutas para producir generalizaciones a partir de esa identificación de patrones, que mencionan.

El NCTM (citado por Kieran, 2004) propone que en los primeros grados los estudiantes deben identificar o construir patrones numéricos y geométricos, describir verbalmente patrones, establecer relaciones entre cantidades para proponer conjeturas, explicar generalizaciones vistas en casos particulares, explorar propiedades de los números y expresar generalidad a partir de símbolos convencionales. El NCTM trasciende la identificación de patrones al proponer, además, que los estudiantes deben expresar y explicar generalizaciones producidas por ellos mismos, desde los primeros grados.

Al comparar las versiones de los Estándares de la NCTM, Molina (2009) encuentra que antes del año 2000 se recomendaba empezar a enseñar el álgebra como aritmética generalizada, teniendo en cuenta que no debía enseñarse en todos los grados, pero después del 2000 la enseñanza del álgebra es considerada desde los primeros grados, con la finalidad de fundamentar el aprendizaje de modo que prepare a los estudiantes para el álgebra en los grados superiores, tratando de evitar tensiones o dificultades que se han generado con respecto al estudio del álgebra.

Justificación teórica

Diversas investigaciones informan sobre dificultades en el aprendizaje del álgebra causadas por la presunción de etapas de desarrollo psicológico en los estudiantes, lo cual justifica postergar el estudio del álgebra para los últimos grados de educación secundaria (Kieran, 2004; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnes, 2006; Molina, 2006; Molina, 2009; Merino, 2012).

Esta postergación responde a una visión del álgebra como una extensión de la aritmética, caracterizada por el uso de letras, en la cual se enfatiza el tratamiento simbólico y el uso de símbolos para modelar problemas. Si bien, el álgebra sirve para generalizar la aritmética y permite el uso de un lenguaje simbólico, no se reduce solo a esto (Van Amerom, 2002; Molina, 2006). La declaración de extensión de las operaciones y estructuras aritméticas al álgebra no es suficiente para orientar las acciones didácticas de los maestros ni cumple fin alguno para los estudiantes.

En este sentido, diversas investigaciones han identificado aspectos de la enseñanza y del aprendizaje del álgebra que son difíciles para los estudiantes; de acuerdo con Kieran (1989, 1992), las dificultades se centran en el significado de las letras, el cambio de convenciones entre la aritmética y el álgebra, y el reconocimiento de la estructura. En lo didáctico, el problema del álgebra se puede ubicar en dos niveles:

- ✓ La naturaleza del conocimiento aritmético
- ✓ La naturaleza del conocimiento algebraico

En el primer nivel no se brinda atención suficiente a la estructura algebraica propia de la aritmética y solo enfatiza el aspecto computacional, mientras que en el segundo nivel se tiende a enfatizar los procesos sintácticos del álgebra. Al parecer una vía de solución es la vinculación de los dos niveles brindando atención a la estructura algebraica propia de la aritmética desde el dominio computacional que los estudiantes puedan tener (Kieran, 1989; Molina, 2006; Van Amerom, 2002). Sin embargo la tarea tiene muchas facetas que dificultan resolver el problema del álgebra en la escuela.

En los siguientes párrafos se refieren algunas de tales dificultades, que evidencian la complejidad del campo de estudio, y que ponen de manifiesto que una propuesta de solución tal como vincular los niveles mencionados en el párrafo anterior, tropieza con muchos obstáculos.

A continuación se enuncian algunas de las áreas problemáticas, en la transición de la aritmética al álgebra, que han merecido la atención por parte del investigador. La identificación de las áreas así como los estudios incluidos en cada una de ellas no pretende ser exhaustiva. La intención de esta enumeración es múltiple. De un lado se desea referenciar estudios sobre las dificultades y temas de estudio, por otro lado intenta ubicar el interés de esta investigación en el ámbito de investigaciones sobre el Razonamiento Algebraico Elemental (Castro, 2011), de otro lado pretende mostrar que el asunto de la introducción del razonamiento algebraico elemental tiene varias vías de acción, y la nuestra es tan solo una de ellas.

Cabe mencionar que el *Razonamiento Algebraico Elemental* se entiende como una habilidad intelectual de los niños para estudiar álgebra en la primaria, para promover la comprensión en clase de matemáticas (Castro, 2011). Esta habilidad se manifiesta en diversas respuestas escritas y verbales que ofrecen los estudiantes; y en las conjeturas que presentan los estudiantes al responder, un profesor o investigador puede tener indicios sobre la comprensión que tienen estos estudiantes con respecto a un objeto matemático. Aquí se asume la postura del conocimiento falible, donde el razonamiento conjetural cobra fuerza para valorar las respuestas que dan los estudiantes ante determinada tarea o determinadas preguntas que surgen en la interacción con el estudiante.

Las áreas indagadas son: el lenguaje, el sentido operativo, el enfoque estructural, el signo igual. A continuación, se presenta la Tabla 1 que sintetiza estas áreas problemáticas indagadas, y que serán discutidas en las siguientes páginas.

Tabla 1. Áreas problemáticas indagadas

Área problemática	**Característica de la dificultad**
Lenguaje	Identificar matices del lenguaje matemático (Anghileri, 1995; Puig, 2012). Expresar, en notación algebraica, operaciones simples y relaciones entre números y cantidades (MacGregor y Price, 1999; Kieran y Filloy, 1989). Usar descripciones verbales e icónicas, para evitar el uso de la notación algebraica (Yerushalmy, 1997).
Sentido operativo	Seleccionar una operación aritmética considerada como apropiada para resolver un problema (Greeno, 1991).
Enfoque estructural	Emplear estrategias recursivas, que no necesariamente están asociadas con problemas que antes había resuelto (Molina, 2010).
Signo igual	Generalizar las propiedades y el uso de los símbolos que tanto los estudiantes como los maestros, en grados anteriores, han dado a operaciones aritméticas puesto que el signo igual había sido usado para exponer el resultado de una operación (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2006; Carpenter, Frankle y Levi, 2003; Kieran y Filloy, 1989).

El investigador ha decidido ubicar, en la Justificación Teórica, estas áreas problemáticas que serán descritas a continuación para mostrar la importancia que puede tener la generalización en diversas investigaciones. Por esta razón, estas áreas problemáticas no necesariamente se discutirán en el resto del trabajo, sino que intentan mostrar que hay un problema de investigación que se vincula con la generalización.

El lenguaje

Se considera que una de las principales causas de dificultad para los estudiantes son los matices del lenguaje matemático (Anghileri, 1995; Puig, 2012) porque la relación cercana entre las palabras que describen los contextos reales y los procedimientos usados para resolver los problemas en esos contextos caracteriza los estadios iniciales del aprendizaje de las matemáticas. Se asume entonces que los niños no solo necesitan entender los significados de los símbolos matemáticos y la polisemia del vocabulario sino también interpretar las palabras matemáticas en función del contexto en el cual se ubican.

MacGregor y Price (1999) afirman que uno de los obstáculos iniciales en el aprendizaje del álgebra es expresar, en notación algebraica, operaciones simples y relaciones entre números y cantidades. Kieran y Filloy (1989) reportan que algunos estudiantes que se inician en el estudio del álgebra se ven forzados a formalizar procedimientos, tarea que tal vez nunca antes les había preocupado.

Se debe reconocer que este trabajo parte de secuencias pictóricas, indagando por la forma de generalizar, en vez de estar enfocado en la formalización de expresiones o procedimientos. Al formalizar procedimientos, se presentan dificultades relacionadas con la *aceptación de la falta de cierre*, es decir, con el reconocimiento de una respuesta que no necesariamente está expresada como un número, sino como una expresión algebraica (Kieran y Filloy, 1989).

A los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra les cuesta asumir una expresión formal como una herramienta que le facilite la resolución de problemas o ecuaciones, puesto que deben familiarizarse inicialmente con la estructura y emplear propiedades o reglas que reconocen como *generales*. Pero debe tenerse en consideración que "extender la generalización sobre la base de lo que era correcto en aritmética puede conducir a los alumnos que empiezan con el álgebra a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos" (Kieran y Filloy, 1989, p. 230).

En esta área problemática, los llamados problemas de palabras han constituido un tema de gran dificultad para los estudiantes. Se suelen distinguir dos aspectos en el estudio de las dificultades que presentan los estudiantes: el primero, el de las relaciones entre los datos y las variables, expresable finalmente en una ecuación y el segundo, es el aspecto sintáctico que suele referirse como los "aspectos contextuales".

"A menudo los niños que son capaces de resolver problemas verbales no pueden escribir las ecuaciones que representan las relaciones cualitativas de la situación del problema" (Kieran y Filloy, 1989, p. 231) y cuando se les pide que escriban una ecuación, frecuentemente los estudiantes interpretan que deben escribir las operaciones efectuadas en la resolución del problema, sin incluir incógnitas y, en vez de esto, escriben las operaciones en el miembro izquierdo de la igualdad y el resultado en el derecho.

Para Hall, Kibler, Wenger y Truxaw (1989) los problemas de palabras usualmente propuestos a los estudiantes, brindan información acerca de las condiciones iniciales y de los objetivos perseguidos, sin embargo, los operadores de transición que transforman el texto en una solución cuantitativa son difícilmente bien definidos; agregan además, que el uso del formalismo algebraico es de poca ayuda en la comprensión de los aspectos cuantitativos del problema.

Estos autores reportan que los estudiantes no usan las ecuaciones para resolver los problemas, que mostraban inseguridad frente al uso apropiado de las variables, y que las variables debían ser reemplazadas con valores numéricos antes de efectuar las operaciones.

Otros autores han puesto su mirada en las características del lenguaje que se usa en los problemas de palabras, entre ellos se cita el trabajo de Yerushalmy (1997) quien trabajó con alumnos de séptimo grado que se inician en el estudio del álgebra. La autora se concentró en los aspectos lingüísticos de la modelación, y en las estrategias de los estudiantes, específicamente en los usos de descripciones verbales e icónicas, para evitar el uso de la notación algebraica.

Este trabajo no considera precisamente los problemas de palabras, sin embargo coincide con la estructura de los enunciados propuestos por Yerushalmy (1997) puesto que se diseñaron tareas que contienen enunciados verbales los cuales contenían términos empleados por los estudiantes y, además, representaciones pictóricas que pudieron vincular con formas conocidas para ellos.

El sentido operativo

El sentido operativo es un concepto que ha sido objeto de diversas indagaciones para determinar su papel en la transición de la aritmética hacia el álgebra. Greeno (1991) presenta el *sentido numérico* al que define como el sentido que sirve para seleccionar una operación aritmética considerada como apropiada para resolver un problema. Este autor caracteriza el sentido numérico de los estudiantes a partir del cálculo numérico flexible, la estimación numérica y el juicio cuantitativo y la inferencia. El cálculo numérico flexible consiste en generar una expresión equivalente de uno o varios números mediante operaciones y números que no necesariamente coinciden con los de la expresión inicial. La estimación numérica es el reconocimiento de valores aproximados para realizar una operación. El juicio cuantitativo y la inferencia es el significado otorgado al resultado de una operación, en el contexto del problema o el ejercicio planteado.

Greeno (1991) sugiere que en clase de matemáticas deben proponerse actividades que permitan la exploración de relaciones entre números y cantidades, incluyendo la construcción de patrones y enfocando la clase de matemáticas hacia la generalización.

El enfoque estructural

Algunos autores consideran que para tener éxito en el álgebra, se debe desarrollar el sentido de la estructura. Linchevski y Livneh (1999) propusieron la frase *sentido de la estructura*, y sugieren que las dificultades de los estudiantes con la estructura algebraica se deben en parte a su falta de comprensión de las nociones estructurales de la aritmética.

De acuerdo con Sfard y Linchevski (1994) el álgebra posee una estructura jerárquica en la cual lo que puede ser considerado como operativo en un nivel puede ser estructural en otro. Las autoras mostraron que "los estudiantes no eran conscientes que la cadena de símbolos se puede interpretar de diversas maneras, dependiendo del contexto" (p. 222). No se ha alcanzado consenso entre los investigadores acerca de lo que es el sentido de la estructura, sin embargo, los aspectos considerados por los investigadores podrían ser útiles si se acompañan con otros aspectos propios del álgebra.

Molina (2010) distingue entre el enfoque procedimental y el enfoque estructural del álgebra, a partir de la resolución de problemas. En el enfoque procedimental, el estudiante emplea un procedimiento *estándar* que ha aprendido, valiéndose de operaciones y estrategias relacionadas con problemas que ha resuelto con anterioridad y que le permiten manipular información, posibilitando así que el estudiante practique para que tenga habilidad en la resolución de problemas del mismo tipo. En el enfoque estructural, el estudiante fija su atención en las características o los patrones involucrados en el problema, valiéndose de estrategias recursivas, que no necesariamente están asociadas con problemas que antes había resuelto, es decir, atiende a toda la expresión para relacionar la información de tal manera que construya su propia estrategia para la resolución del problema, teniendo la posibilidad de alcanzar una mayor comprensión del problema.

Comprensión del signo igual

El signo igual ha sido el foco de indagaciones que han subrayado la importancia de una comprensión del mismo como relación de equivalencia más que como indicador de operación a realizar.

Molina (2006) desarrolla su trabajo alrededor del concepto de igualdad y de una característica asociada, la relación, expresada en lo que llama el *pensamiento relacional*. La indagación de la autora versa sobre las igualdades y relaciones establecidas entre números, expresadas en sentencias numéricas.

Freiman y Lee (2004) reconocen la importancia de la comprensión del signo igual como parte del proceso de introducir a los estudiantes al álgebra. El símbolo de la igualdad es asumido por los estudiantes como una señal del resultado de una operación aritmética en vez de ser usado como un signo que representa una equivalencia; esta definición operacional permite que la igualdad anteceda un total o un resultado, en vez de mostrar una relación.

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2006) enfatizan en que los estudiantes generalizan las propiedades y el uso de los símbolos que, en grados anteriores, han dado a operaciones aritméticas puesto que el signo igual es usado para exponer el resultado de una operación, aunque el tratamiento de expresiones algebraicas requiere una definición relacional. Al respecto, Carpenter, Frankle y Levi, (2003) reportaron que niños de preescolar y de primer año de escuela primaria, exhiben la creencia que después del signo igual debe ubicarse el resultado de la operación.

Algunos maestros asumen que diversas ecuaciones son vistas por los estudiantes como expresiones equivalentes y pueden generalizar el *método* para explicar el proceso de resolución de una ecuación que involucra letras, como si el tratamiento de ecuaciones fuera un acto espontáneo para los estudiantes.

Por otra parte, "El que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad" (Kieran y Filloy, 1989, p. 230). Esta interpretación del signo igual como una acción que se realiza sobre números que están a la izquierda y cuyo resultado se escribe a la derecha, hace que sea difícil asumirlo en términos de relación.

Relación entre las áreas problemáticas indagadas y la generalización

Se ha reportado que los niños presentan dificultades para entender significados de los símbolos matemáticos, interpretar las palabras matemáticas en función del contexto en el cual se ubican (Anghileri, 1995; Puig, 2012), y formalizar procedimientos (Kieran y Filloy, 1989). En el uso del lenguaje hay un problema asociado con la generalización en la medida que los estudiantes asumen que el significado de los símbolos y las palabras matemáticas deben emplearse en todos los casos, y de igual manera, donde se presenten situaciones parecidas.

Además, el símbolo de la igualdad es asumido por los estudiantes como una señal del resultado de una operación aritmética en vez de ser usado como un signo que representa una equivalencia (Kieran y Filloy, 1989; Molina, 2006). En la comprensión del signo igual hay un problema de generalización cuando el estudiante asume que todas las ecuaciones deben ser resueltas de la misma forma que el profesor lo ha hecho previamente, es decir, a partir de una ecuación que acaba de resolver.

Por aparte, los niños pueden presentar dificultades para seleccionar una operación aritmética, considerada por ellos mismos como apropiada, para resolver un problema (Greeno, 1991). Esta área problemática tiene que ver con otra problemática que será expuesta a continuación.

En el enfoque procedimental, el estudiante emplea un procedimiento "estándar" que ha aprendido. En el enfoque estructural, el estudiante fija su atención en las características o los patrones involucrados en el problema, valiéndose de estrategias que no necesariamente están asociadas con problemas que antes había resuelto (Molina, 2006, 2009, 2010). En el enfoque procedimental, el estudiante tiene su propia tipología de problemas y acomoda un problema a uno de esos tipos; aquí el estudiante ya había generalizado. En el enfoque estructural, el estudiante generaliza a partir de la identificación de características o patrones.

Estas áreas indagadas (lenguaje, comprensión del signo igual, sentido operativo, enfoque procedimental y enfoque estructural) ofrecen indicios, en primer lugar, sobre las problemáticas que se han presentado en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, la cual puede constituirse en un factor de discriminación y exclusión en clase de matemáticas para los estudiantes en el sentido que el estudiante puede decidir no seguir prestando atención en sus clases de matemáticas y, en segundo lugar, sobre la importancia de la generalización como eje transversal del álgebra escolar porque en estas áreas es posible identificar que hay problemas relacionados con la generalización. Se presume que una mala experiencia temprana con el álgebra, y en particular con la generalización, podría evitar el acceso a niveles superiores de formación y podría ser un factor que impida que los estudiantes continúen su formación matemática (Moses, 2001; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012).

En síntesis, los estudiantes de secundaria tienen dificultades con el aprendizaje del álgebra por la forma como son introducidos en su estudio, que se caracteriza por la presencia de fórmulas y procedimientos sintácticos que parecen carentes de significado (Mason, 1999; Molina, 2006; Molina 2009; Godino, et al., 2012). De donde el estudio temprano, desde la primaria, del álgebra que enfatice otros aspectos, como la justificación en clase de matemáticas, podría ser una alternativa de soluciona este problema en la secundaria (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007). Carraher, Martinez y Schliemann (2008) proponen que la notación algebraica no debería ser la forma de iniciar a los estudiantes en el estudio del álgebra, debido a que los objetos matemáticos se asocian a una forma de representación.

Surge entonces el interés por estudiar el álgebra a partir de una forma de representación diferente la “simbólica”. Rivera y Becker (2011) proponen que la generalización puede trabajarse en la escuela a partir de tareas que contienen figuras y que involucran patrones porque estas permiten apreciar otros aspectos, además del numérico. Por esto, la presente investigación contiene tareas propuestas a partir de secuencias pictóricas.

Una propuesta de solución de las problemática presentadas anteriormente es la denominada Early-Algebra que sugiere la introducción del álgebra desde los primeros grados, teniendo en cuenta enfoques como la generalización que está involucrada con la actividad matemática del estudiante en todos los niveles de escolaridad (Lee, 1996; Van Amerom, 2002; Molina, 2006). Con esta propuesta, se aprecia una vez más que hay un interés por la producción de reglas generales por los estudiantes, producción entendida como una construcción personal, que no necesariamente tiene que coincidir con las reglas establecidas por una comunidad matemática. Por esta razón, en esta investigación se considera la propuesta de Lakatos (1981) en la cual se asume que el conocimiento es falible, en vez de asumir una postura formalista tanto en clase de matemáticas como en este trabajo.

Además, el conocimiento y manejo de notaciones algebraicas se alcanza a partir de la generalización de patrones, los cuales proveen la motivación para tener un acercamiento con el simbolismo algebraico (Dörfler, 2008). Así el estudio de tareas matemáticas vinculadas con procesos de generalización es una vía alterna para la introducción temprana al estudio del álgebra. El reconocimiento de patrones y su posterior generalización involucra el uso espontáneo de características consideradas como prototípicamente algebraicas: reconocimiento de una regularidad, reconocimiento de la indeterminación o indeterminancia- término que no se conoce pero sobre el cual se puede operar-, expresión de esa regularidad, justificación de la misma y expresión simbólica –formal o informal-.

Sin embargo, debe ser claro que la introducción del álgebra en la escuela primaria no presupone replicar el modelo del álgebra de la escuela secundaria. Esto requiere un cambio en la concepción epistemológica sobre el álgebra, y surge entonces la propuesta Early-Algebra como una solución.

El interés por la generalización de patrones, en el estudio del álgebra a partir de los primeros grados de escolaridad, motivó al investigador para ampliar la revisión de literatura, teniendo en cuenta las acepciones encontradas en diversas investigaciones y que se relacionan con el presente trabajo. Estas acepciones se discuten en el Marco teórico de referencia. Tales acepciones son: Early-Algebra, generalización, patrones, representaciones, secuencias pictóricas.

Pregunta y objetivo de Investigación

Antes de mencionar la pregunta y el objetivo de investigación, es preciso aclarar que la decisión de realizar la presente investigación en quinto grado de escolaridad fue tomada en conjunto por el investigador, la rectora y la profesora titular del curso, y se debe a la pertinencia que los “patrones lineales” tenían dentro del plan de área de la Institución Educativa.

El problema descrito en la justificación, sugiere una investigación orientada por la siguiente pregunta: ¿Cómo generalizan patrones lineales, a partir de secuencias pictóricas, niños de quinto grado? El objetivo es: Analizar maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado.

Se debe mencionar que tanto en la pregunta como en el objetivo se pretende indagar por las maneras, las cuales se entienden en esta investigación como las “formas de hacer”, en las cuales se pretende indagar por el *conocimiento procedimental* de cada niño. El conocimiento procedimental se entiende como un conjunto de acciones que “[…] se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente” (MEN, 2006, p. 50). En esta investigación, tales acciones son respuestas escritas y verbales que fueron producidas por cada niño.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este capítulo se describen algunos estudios previos relacionados con el problema de investigación bajo estudio en la tesis que aquí se reporta, y se declaran algunas posturas teóricas asumidas para este trabajo. Estas posturas teóricas están vinculadas con el análisis elaborado en el capítulo 4.

Early-Algebra

Una vía que intenta abordar algunas de las dificultades reportadas con el aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria es su introducción curricular temprana mediante la propuesta denominada Early-Algebra. Una de las alternativas propuestas por el Early-Algebra es estudiar la generalización desde una perspectiva que supera la declaración de esta como la extensión de la aritmética (Blanton y Kaput, 2006; Blanton y Kaput, 2009; Molina, 2006; Molina, 2009; Van Amerom, 2002).

Molina (2006) reconoce que la enseñanza del álgebra basada en el simbolismo ha generado inquietudes, que han conducido a investigadores a desarrollar la propuesta Early-Algebra. Así mismo, Molina (2009) se apoya en investigaciones recientes (Carraher y Schliemann, 2007) para distinguir entre la pre-álgebra, en la cual se pretende facilitar la transición de la aritmética al álgebra, después de que los estudiantes de educación primaria hagan un tratamiento *suficiente* de lo numérico y lo aritmético; y la Early-Algebra, que considera la enseñanza del álgebra desde los primeros grados, debido a que las dificultades manifestadas por los estudiantes en el aprendizaje del álgebra están relacionadas con la forma en que se enseña a los estudiantes para trabajar las matemáticas elementales.

Mason (1996) también coincide con la Early-Algebra, al reconocer que los estudiantes tienen capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar generalidad, de modo que el desarrollo de su razonamiento algebraico depende, esencialmente, del tratamiento que se da al álgebra, desde los primeros grados.

La Early-Algebra, como una propuesta para abordar el problema descrito, está basada en la introducción del álgebra, de manera transversal, gradual y sistemática, en todos los grados de escolaridad. Esta propuesta es vista como una forma de pensamiento y expresión a partir de objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, con la finalidad de promover una enseñanza y un aprendizaje para la comprensión y facilitar el estudio formal del álgebra, promoviendo así un mayor grado de generalidad en el pensamiento de los estudiantes y aumentando su capacidad para expresar la generalidad (Molina, 2006).

De acuerdo con este planteamiento, una de las dos cuestiones que abordan Blanton y Kaput (2011) es ¿cómo integrar el pensamiento algebraico en los primeros grados de manera que prepare a los estudiantes de matemáticas para los grados superiores?, los autores afirman posteriormente que desde los primeros grados deben incluirse patrones, conjeturas y justificaciones en el currículo, para construir generalidad matemática.

Estos autores (Blanton y Kaput, 2006; Molina, 2006; Molina, 2011) coinciden en que el álgebra puede enseñarse a partir de los primeros grados y puede servir como una preparación para el estudio del álgebra en grados superiores, y exponen el caso de la generalización como un enfoque a través del cual se hace factible esta propuesta. Otros enfoques son: la resolución de problemas, la modelación y la función; pero el investigador se interesa por la generalización debido a la importancia que se le dio en el problema descrito anteriormente. Estos enfoques se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Enfoques para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Van Amerom, 2002)

Enfoques para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra	
Generalización	Si se asume el álgebra como el resultado de tareas de generalización, su propósito debe ser la generalización a partir de expresiones relativas a propiedades de los números.
Resolución de problemas	La elaboración y la resolución de ecuaciones para resolver problemas han estado presentes en algunas propuestas curriculares en cuanto al estudio del álgebra.
Modelación	Los estudiantes deben desarrollar habilidades para describir e interpretar fenómenos del mundo que los rodea. Esto implica el reconocimiento de diferentes representaciones como gráficas, tablas, fórmulas, que les permita transitar de una representación a otra.
Función	Este enfoque se basa en el establecimiento de relaciones numéricas entre conjuntos de números. Una clasificación de funciones y una concepción sobre variables pueden surgir al respecto.

Van Amerom (2002) afirma que esta separación de enfoques es artificial, de hecho son complementarios y no pueden desligarse en un acercamiento al álgebra escolar, sin embargo, esta clasificación sirve para centrar el análisis en un enfoque y delimitar el problema de investigación.

En la matemática escolar, se destacan cuatro enfoques -generalización, relaciones y funciones, modelación, resolución de problemas- para la enseñanza del álgebra. Con respecto a estos cuatro enfoques, Lee (1996) afirma que “No es difícil demostrar que la función, la modelación, y la solución de problemas son todas actividades de generalización, que el álgebra y todas las matemáticas trata con generalización y patrones" (p.102). Además, esta autora sostiene que los estudiantes generalizan cuando producen una expresión o representación sucinta a partir de la comprensión que tienen. Por esto, se entiende la generalización como el enfoque del álgebra que orienta esta investigación.

Generalización

Carraher et al., (2006) presentan la generalización como una actividad intelectual que realizan los individuos habitualmente y que consiste en detectar regularidades y generar una *expresión* para estas. Sin embargo, Blanton y Kaput (2011) plantean que los profesores norteamericanos tradicionalmente proponían problemas para completar secuencias o para encontrar el término general que representaba dicha secuencia, pero los estudiantes necesitan ir más allá, en sentido que deben construir, expresar y justificar la generalización de patrones. Esto sugiere que las tareas propuestas por los profesores no solo deberían valorarse por la capacidad del estudiante para seguir instrucciones sino también por el proceso de generalización; además, este argumento justifica la pertinencia de promover tareas de generalización a partir de los primeros grados.

Con respecto a la generalización, en el marco de la educación escolar, Carraher et al., (2008) distinguen entre la generalización matemática y la generalización en educación matemática, argumentando que la primera se centra en la validación de pruebas para ser aceptada como tal mientras que la segunda tiene en cuenta las expresiones empleadas y el razonamiento involucrado en estas. Al respecto, Mason (1999) emplea la expresión *en general*, en matemáticas, para referirse al reconocimiento de una declaración aceptada como verdadera para cualquier caso, es decir, para siempre. El investigador presta atención al enfoque de generalización, el cual está dirigido hacia las expresiones que permiten describir propiedades o relaciones entre números a partir de la identificación de regularidades y que no necesariamente corresponden al simbolismo convencional.

A diferencia de la generalización matemática, en la cual se concibe una expresión que considera todos los casos, esta investigación tiene una perspectiva de la generalización en educación matemática, donde se valora la exploración de patrones y la consideración de nuevos casos, a partir de una regla, que no necesariamente coincide con el simbolismo convencional. Esta afirmación es ratificada por Rivera y Becker (2011) quienes afirman que los estudiantes habitualmente parten de lo numérico o lo figural para expresar la generalidad de las tareas que implican patrones.

Harel y Tall (citado por Zazkis y Liljedahl, 2002), mencionan tres clases de generalización. Expansiva, en la cual se consideran nuevos casos sin que haya necesidad de reconstruir el esquema; reconstructiva, donde el esquema existente se reconstruye con el fin de incluir otros casos que no tenían lugar en el esquema anterior; y disyuntiva, donde un nuevo esquema se construye al pasar a un nuevo contexto, es decir, ninguno de los elementos coinciden, con respecto al esquema que se tenía anteriormente.

Radford (citado por Rivera y Becker, 2011) considera la generalización como la regularidad que captan los estudiantes, a partir de relaciones establecidas sobre particularidades en la secuencia, extendiendo esa regularidad a la secuencia. Esta regularidad debe permitirles expresar algún término de la secuencia. También, Dreyfus (citado por Rivera y Becker, 2011) afirma que las tareas de generalización implican la producción de una propiedad o característica que se ha presentado de forma regular e invariante a partir de unos cuantos casos conocidos, y la extensión, aplicación y proyección de esta propiedad o característica a casos desconocidos.

Cañadas, Castro y Castro (2012) afirman, desde una perspectiva semiótica, que los estudiantes generalizan cuando tienen la capacidad de identificar un patrón, a partir de ciertos casos y también aplican esta característica común a otros casos particulares, que no se habían considerado hasta el momento.

Radford (2007) argumenta que la generalización de patrones descansa en la capacidad de identificar una regularidad en algunos casos particulares, y extender esa regularidad a otros términos, permitiendo así una expresión vinculada con todos los términos de la secuencia. Este autor reconoce diferentes aspectos involucrados en esta definición; en primer lugar la identificación de una regularidad que aplica para algunos casos de la secuencia, luego se generaliza esa regularidad aplicando a todos los términos de la secuencia. También argumenta que la generalización de patrones no depende del uso de notaciones sino del tratamiento que se da a la secuencia.

Stacey (1989) hace una distinción entre la generalización cercana, que consiste en la identificación de un patrón a partir de una estrategia de conteo, un dibujo o una tabla; y la generalización lejana, que se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere. Esta distinción es pertinente para clasificar las tareas que se han considerado en el marco teórico y el diseño metodológico para la producción de datos de los estudiantes.

Algunas investigaciones (Zazkis y Liljedahl, 2002; Dörfler, 2008) distinguen entre la generalización empírica, basada en el reconocimiento de elementos o cualidades comunes en los objetos, pero que no va más allá de un análisis sobre los casos particulares, y la generalización teórica, que consiste por el contrario en extender el dominio, en cuanto a los casos que se refiere. “(…) La generalización empírica necesita un gran número de casos o ejemplos; la generalización teórica analiza un caso típico y genérico por transformaciones constructivas. Los conceptos empíricos son mayoritariamente figurativos, teóricos y relacionales” (Dörfler, 2008, p. 147).Esta distinción permitirá caracterizar las respuestas de los estudiantes ante las tareas propuestas por el investigador.

Cañadas, Castro y Castro (2008) reportan que la generalización verbal cobra importancia sobre otras formas de expresión de la generalización. De acuerdo con sus resultados la justificación es más recomendable que la simbolización para introducir los estudiantes al estudio del álgebra en los primeros grados de escolaridad. La justificación es una expresión verbal, ya sea dicha o escrita, caracterizada por el uso de palabras; la justificación pretende convencer sobre la veracidad de una afirmación (Cañadas, 2007; Merino, 2012) y hacer explícito el reconocimiento de patrones de los estudiantes, a partir de sus conjeturas (Mason, 1999).Para esta investigación los estudiantes justificarán, en sesiones de entrevista, las respuestas de las tareas de generalización.

La validación es la aceptación como verdadera de una expresión y la justificación de la respuesta dada por el estudiante ante la tarea presentada (Lannin, 2005; Merino, 2012). Hay validación cuando el estudiante vincula las configuraciones expuestas en la tarea con una regla de formación de patrones que hace referencia tanto a las configuraciones presentes como a las ausentes en la tarea. Es decir, para que haya validación, debe haber generalización. Este asunto corresponde al problema semiótico (Radford, 2013), con relación a la generalización de patrones.

Radford (2013) estudia la generalización de patrones a partir de tres problemas: fenomenológico, epistemológico y semiótico.

El problema fenomenológico se refiere a la atención que presta el estudiante sobre los objetos, es decir, la caracterización de un objeto y la identificación de sus semejanzas y diferencias con otros objetos a partir de atributos como la forma, la cantidad, el color, la distancia entre los objetos (cuadrados, triángulos…). Este autor menciona que una dificultad de orden fenomenológico consiste en que los alumnos tienden a centrarse en la dimensión numérica y también se dejan llevar por la apariencia, sin verificar sobre la veracidad o falsedad de una presunta figura en determinada posición. En las tareas propuestas, en este trabajo, la estructura numérica responde a la pregunta ¿cuántas figuras? Mientras que la estructura espacial responde a ¿dónde ubicarlas?

El problema epistemológico está relacionado con la comprensión del objeto y con la decisión o selección sobre aquello que se considera y aquello que se descarta. También se caracteriza por la identificación de una propiedad común entre los términos de la secuencia y generación de una estrategia para encontrar algún término, esto ocurre cuando se pregunta por términos remotos de una secuencia, por ejemplo, el término 25.

El problema semiótico está vinculado con la denotación del objeto, denotación que puede tomar varias formas de representación. De acuerdo con Radford (2013) la generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación.

La generalización algebraica de secuencias se caracteriza por el reconocimiento de una propiedad común, a partir de la observación de ciertos términos particulares; la generalización de la propiedad identificada a cada término de la secuencia; y la habilidad para usar esta propiedad común, con la finalidad de generar una expresión que permite determinar el valor de cada término de la secuencia (Radford, 2013).

La diferencia entre la generalización algebraica y la generalización aritmética está en la forma en que el estudiante usa el patrón que identifica. Cuando el patrón sirve para contar y, de este modo, encontrar la cantidad correspondiente a un término de la secuencia, hay generalización aritmética; pero cuando el patrón se usa como un principio que permite encontrar cualquier término de la secuencia, hay generalización algebraica (Radford, 2013). En el diseño metodológico se presentan las tareas de generalización y las sesiones de entrevista como las formas de indagar acerca de la presencia de generalización aritmética o algebraica en las respuestas de los estudiantes participantes de la investigación y en el análisis se delimita la terminología requerida para la elaboración del marco teórico en función de la investigación en curso. De este modo, Radford (2013) presenta la generalización de patrones como un asunto que puede ser estudiado en la escuela a partir de los primeros grados de escolaridad.

Los estudios mencionados, en este documento, admiten asumir para esta investigación que un niño generaliza cuando tiene la posibilidad de enunciar el cumplimiento de una regla de formación que permite construir una configuración correspondiente a una secuencia dada. Esta definición sugiere que los niños que no enuncian también pueden generalizar, aunque el investigador no tenga evidencias para documentarlo, y por tal razón no se considere en el informe de investigación.

En relación con la Early-Algebra, estos estudios permiten asumir que la generalización es una vía de entrada al razonamiento algebraico elemental y puede entenderse como parte de un breviario de opciones de acceso al álgebra desde la escuela primaria.

Se asume la generalización de patrones como reconocimiento, expresión y validación de reglas de formación. El *reconocimiento* es la habilidad intelectual que posee cada individuo para identificar una característica común, que se supone, puede volver a presentarse en una situación –en este caso, la situación está constituida por la secuencia presentada en una tarea- y que por tanto le permite obtener una regla de formación para la secuencia; la *expresión* es la representación que permite registrar y comunicar el reconocimiento que han tenido previamente los estudiantes; la *validación* puede ser la aceptación mediante la asignación de un valor de verdad (verdadera o falsa) para una expresión o la justificación de la respuesta dada por el estudiante ante la tarea presentada.

Estudios sobre patrones

Un patrón puede entenderse como un camino para discernir reglas generales, es decir, es una vía hacia la generalización (Merino, 2012). Por esto, a continuación se presentan algunas investigaciones relacionadas con el estudio de patrones.

A diferencia de otros temas, la exploración de patrones no siempre ha sido destacada como una actividad en clase de matemáticas (Zaskis y Liljedahl, 2002). Sin embargo, a continuación se mencionan algunas investigaciones que han indagado por la exploración de patrones, y que están relacionadas con la generalización de patrones en estudiantes de diversos grados de escolaridad.

Castro (1995) se interesa por la identificación de patrones numéricos, mediante expresiones simbólicas, a partir de configuraciones puntuales. La autora considera patrones de repetición, lineales, cuadráticos o de otra naturaleza, enfocándose en la simbolización. Este estudio es pertinente para estudiantes de secundaria, que ya han tenido un acercamiento con expresiones simbólicas.

Warren (2005) informa sobre dificultades que han experimentado estudiantes al acercarse al estudio del álgebra y, en particular, a la generación de expresiones algebraicas a partir de la exploración visual de patrones. Este estudio se enfocó en dos aspectos: Describir secuencias en términos de la posición y encontrar el término de una posición cualquiera, reconociendo que las dificultades que presentaron los estudiantes se deben a las limitadas experiencias que tienen con secuencias aritméticas. Esta autora también reconoce que las descripciones orales y escritas que producen los estudiantes cuando construyen patrones deben estar interrelacionadas, constituyéndose en un aspecto metodológico a tener en cuenta en la investigación.

Molina (2009) propone que en las clases de matemáticas, desde los primeros grados, debe promoverse la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para cultivar hábitos de pensamiento, atendiendo así a una enseñanza matemática estructurada.

Otros estudios también proveen unas definiciones de *patrones* que tiene afinidad con la presente investigación, y que se enuncian a continuación.

Un patrón matemático es una regla de formación que considera algunos casos, pero que no se reduce a esto, puesto que se consideran nuevos casos, en los cuales también se cumple esta regla (Cañadas y Castro, 2007).

Los patrones lineales se entienden como listas de elementos cuya organización está determinada por una razón de cambio, una suma o un incremento constante. Esta constante permite definir el *patrón* como "… lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57). En esta investigación, las situaciones son las diversas configuraciones que correspondan a las posiciones de una secuencia pictórica. Como este estudio se refiere a los patrones a partir de secuencias pictóricas, "lo común" se entiende como la atribución de una característica en las partes de una figura o en varias figuras de la secuencia, como las relaciones que tienden a repetirse entre las figuras y que suponen una estrategia para continuar la secuencia, y como la manera que tiene el niño para responder las tareas propuestas.

Estudios sobre representaciones

Este apartado presenta una tipología de las representaciones, y en esta, una caracterización de las representaciones pictóricas. Además, se mencionan diversas formas de expresión para estas representaciones. Es menester mencionar que la generalización de patrones lineales se analiza en esta investigación a partir de secuencias pictóricas; por este motivo, se considera la pertinencia de indagar sobre diferentes tipos de *representaciones* para presentar ulteriormente una conceptualización sobre las *secuencias pictóricas* en este trabajo.

La representación matemática es la herramienta, ya sea un signo o un gráfico, mediante la cual un individuo expresa un concepto o procedimiento matemático, permitiendo así que el individuo pueda registrar y comunicar su conocimiento matemático (Rico, 2009; Merino, 2012). Merino (2012) distingue entre las representaciones: verbal, tabular, pictórica, simbólica. La Tabla 3 muestra una tipología de las representaciones.

Tabla 3. Tipos de representación (Merino, 2012)

Tipos de representación	
Verbal	La representación verbal es una forma de exponer la información mediante el uso del lenguaje natural.
Tabular	La representación tabular es una tabla de datos que sirve para organizar, relacionar y representar cantidades numéricas, desde cualquier otra forma de representación.
Pictórica	La representación pictórica es una forma visual de representación, que ayuda a interpretar y relacionar información. Se caracteriza por la ausencia de notaciones simbólicas. La representación pictórica contiene dibujos.
Simbólica	La representación simbólica incluye la numérica (números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático) y la algebraica (uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar).

En este trabajo se consideran las expresiones verbales en las justificaciones que presentan los estudiantes por escrito en las tareas de generalización y en las respuestas que dan en las sesiones de entrevista. También pueden haber representaciones múltiples, las cuales resultan de combinar los tipos de representación mencionados (Merino, 2012).

Rico (2009) distingue entre las representaciones simbólicas y las representaciones gráficas: las primeras corresponden a representaciones formadas por letras y números, caracterizada por una forma escritural que está precedida por reglas procedimentales; las segundas son las representaciones de tipo figurativo, analógico, caracterizada por una forma escritural constituida principalmente por reglas de composición e interpretación. Sin embargo, se considera la tipología descrita en la Tabla 3 por ser más amplia, y porque precisa sobre el tipo de representación que contienen las tareas diseñadas para este estudio.

Mason (1999) reconoce tres formas de expresión: verbal, mixta y simbólica. En este trabajo se consideran las expresiones verbales en las justificaciones que presenten los estudiantes por escrito en las tareas de generalización y en las respuestas que den en las sesiones de entrevista. En la Tabla 4 se clasifican las formas de expresión, como: verbal, mixta y simbólica.

Tabla 4. Formas de expresión (Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999)

Formas de expresión	
Verbal	La expresión verbal es aquella que se escribe completamente con palabras del idioma usual, sin el uso de símbolos especiales (como +, x), excepto los dígitos, que también pertenecen a nuestro mundo simbólico.
Mixta	La expresión mixta es una forma que resulta de la combinación entre la forma verbal y la símbolos (p. 54). Esta forma de expresión se caracteriza porque permite simplificar las expresiones verbales en frases descriptivas que codifican las variables particulares, y usar símbolos matemáticos para indicar operaciones.
Simbólica	La expresión simbólica se caracteriza porque no contiene palabras, solo admite el uso de letras, números, símbolos matemáticos o figuras para representar una variable clave. Esta forma de expresión también puede contener palabras a medias.

Estas formas de expresión se caracterizan porque favorecen la expresión de la generalidad y, por lo tanto, son algebraicas (Mason, et al., 1999).

Kieran (2006) informa que se han presentado dificultades en el aprendizaje del álgebra debido a la ausencia de múltiples representaciones y de vínculos entre estas, que permitan a los estudiantes tomar acciones apropiadas para responder a una tarea. Lo anterior justifica la presencia de representaciones pictóricas en las tareas propuestas a los participantes de esta investigación.

Van Amerom (2002) ofrece otra caracterización de las representaciones, distinguiendo entre simbolización y esquematización, reconociendo que lo primero se refiere a la construcción y al uso de los símbolos que convencionalmente se emplean en matemáticas como por ejemplo números, letras, operadores, expresiones en sí; mientras que lo segundo refiere a las representaciones visuales como gráficos, tablas, diagramas, marcas que indican relaciones, además de los símbolos mencionados anteriormente. Es decir, la esquematización incluye la simbolización. Como históricamente se ha considerado al álgebra como una aritmética avanzada, su estudio estaba ligado a la simbolización, pero los enfoques del álgebra permiten estudiar el álgebra a partir de la esquematización (Van Amerom, 2002), este es el caso de la presente investigación.

Estudios sobre secuencias

Beckmann (2005) define una secuencia como una lista de elementos que están ubicados en un orden específico. También Collins (citado por Castro, 1995) afirma que “Una secuencia es un número de cosas o acontecimientos que se presentan uno detrás del otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón definido, por lo general moviéndose en etapas hacia un resultado particular” (p. 44).

Beckmann (2005) afirma que las secuencias aritméticas se producen por la suma repetida de la misma cantidad, a partir de una primera cantidad. Las secuencias aritméticas también se han denominado *sucesiones* o *progresiones* (Cañadas, 2007).

De acuerdo con las definiciones de secuencia y representación pictórica discutidas en la revisión de literatura, se entienden las secuencias pictóricas como listas de dibujos que se caracterizan por estar organizados de cierto modo y que obedecen a una regla. La persona que responde alguna de las tareas, propuestas en este trabajo, está encargada de asignar las características que definirían la organización de una secuencia pictórica y la regla de formación para la secuencia de dicha tarea. En las tareas propuestas para esta investigación, los dibujos se presentan de izquierda a derecha.

Esta revisión de literatura sugiere que este trabajo informe sobre el desempeño de niños de grado quinto en las tareas de generalización de patrones lineales. Si bien las investigaciones revisadas recomiendan la generalización de patrones como un punto de partida para la enseñanza del álgebra en los primeros grados y ofrecen un acercamiento al problema descrito, el autor de este trabajo no ha encontrado investigaciones sobre la transición desde las secuencias pictóricas hasta la generalización de patrones lineales. Así, el tema específico de la investigación puede verse como un aporte al ámbito de la investigación sobre generalización.

Otros aportes se pueden ubicar en los resultados de la investigación, en tanto que se puede informar a la comunidad de maestros e investigadores las “maneras” o estrategias de generalización manifestadas por niños de grado quinto, igualmente se puede informar sobre las dificultades que los niños manifiestan durante el proceso de generalización. Las tareas empleadas para esta investigación así como los criterios de agrupación también se pueden considerar como un aporte. Es preciso mencionar que las tareas tienen la finalidad de generar una expresión de nuevos casos particulares o del término general, a partir de la información presentada (Merino, 2012). La tesis informará sobre el desempeño de estudiantes de grado quinto en las tareas propuestas. Se debe aclarar sin embargo, que la denominación *patrones lineales* hace referencia al tipo matemático de patrones que se utilizan, pero el concepto de linealidad no es tema de estudio en este trabajo, y tampoco se debe colegir que la identificación de patrones lineales, por parte de niños de quinto grado, abona el terreno para el estudio de la función lineal. Los patrones se han escogido de tipo lineal por la simplicidad de estos y por su pertinencia dentro del plan de estudios definido por la Institución Educativa.

CAPÍTULO 3: DISEÑO METODOLÓGICO

El modo de entender la generalización de patrones lineales, en este trabajo, sugiere un diseño cualitativo porque la investigación cualitativa se caracteriza por la descripción y producción de datos tales como palabras dichas o escritas, conservando su naturaleza textual, es decir, sin necesidad de acudir a técnicas estadísticas (Rodríguez, Gil y García, 1996; Deslauriers, 2004).

Las maneras de generalizar patrones lineales se analizan en las producciones de los estudiantes participantes, a partir de las respuestas que dan a las tareas y a los diálogos que surgen en la entrevista semiestructurada. Se ha escogido la entrevista semiestructurada en tanto que la misma incluye preguntas diseñadas con antelación y se considera cuestionar sobre asuntos que surgen durante el dialogo con el entrevistado. En cuanto a lo metodológico, es necesario aclarar que se analizan las descripciones que ofrecen indicios acerca de la generalización de patrones en las producciones de los estudiantes participantes.

Las preguntas de las entrevistas se generarán a partir de las respuestas que los estudiantes darán durante la realización de cada tarea. Por esta razón, cada entrevista es individual y se generará después que los estudiantes respondan cada tarea.

Los resultados de esta investigación reportan información sobre las formas o los modos de generalización de patrones lineales manifestados por los estudiantes participantes. No hay un interés por evaluar ni la validez matemática ni la formalización propuesta por los estudiantes en estas generalizaciones. Interesa estudiar las justificaciones que los estudiantes ofrecerán para proponer el patrón, aun en el caso en que los estudiantes generalicen incorrectamente, tales generalizaciones serán motivo de estudio. Por esto, la revisión de literatura declara que este trabajo atiende a una concepción de generalización en educación matemática, consecuente con la definición presentada por Carraher, Martinez y Schliemann (2008).

Roles de los niños en clase de matemáticas

La presente investigación se desarrolla en la Institución Educativa Escuela Normal Superior María Auxiliadora de Copacabana, Colombia. La Institución es de carácter público, de naturaleza mixta y ofrece educación básica y educación media. Hay 48 estudiantes matriculados en el grupo, del cual se eligen los participantes. No se presta atención al género en esta indagación. Los niños suelen hacer silencio para escuchar instrucciones de la profesora. Debido a que los niños resolvieron las tareas de forma individual, y en completo silencio, se pudo prescindir del uso de grabadoras para registrar las voces de los niños mientras resolvieron las tareas en el aula de clase.

Se ha decidido trabajar con niños individualmente por varias razones: la primera es que las respuestas de un estudiante pueden influenciar las respuestas de los otros niños participantes; la segunda es que interesa estudiar las justificaciones que cada niño da a su respuesta; la tercera es que la Institución no recomienda extraer a varios niños de la clase al mismo tiempo. Cabe aclarar que interesa saber cómo generaliza cada niño y no se presta atención a la interrelación entre ellos. La razón para esta decisión es de carácter administrativo, en tanto que el investigador no tiene acceso al grupo total ni puede modificar las condiciones de aula.

Durante algunas de las clases, cada niño resolvió tareas propuestas por el investigador. La intención de estas tareas fue discutida con la profesora titular del curso, y las mismas no presuponen una alteración del transcurso de la clase. Mientras los niños resuelven la tarea, el investigador y la profesora deambularán en el salón, e identificarán, según los requisitos expuestos más adelante, los estudiantes que fueron invitados a discutir, en privado, sus respuestas al investigador.

Por estas razones, las entrevistas realizadas a los niños escogidos se llevaron a cabo en la biblioteca del colegio, después de que los estudiantes resolvieran una tarea. Esta elección requiere de un consentimiento informado, que es el proceso en el cual el individuo decide si quiere participar de la investigación (Cohen, Manion y Morrison, 2011). De acuerdo con este requerimiento, el investigador ha elaborado un listado en el cual se indaga acerca del interés que tiene el individuo para participar de la investigación. En este trabajo, dicho individuo es el estudiante, quien:

- Tiene libertad para tomar la decisión de participar en la investigación, esta decisión es tomada cada que deba responder una tarea y estar en una sesión de entrevista.
- Asume la responsabilidad en la participación de la investigación, esta responsabilidad se evidencia en que responde cada tarea y responde a las preguntas que surgen en la entrevista.
- Conoce riesgos y beneficios. Entrevistar a los estudiantes de forma individual permite no solo obtener una mejor calidad de grabación sino también que el investigador pueda indagar sobre los detalles del proceso de solución propuesto por los niños. Adicionalmente, las entrevistas en un ambiente más tranquilo favorecen que las respuestas de los estudiantes no estén sesgadas por los comentarios y actitudes de los otros compañeros o por la presencia de la profesora. Se ha considerado informar a los directivos, profesora y padres de familia los posibles riesgos que se asumen cuando se entrevista a los niños. Estos riesgos son: sentirse inseguro por el desplazamiento a la biblioteca, temor de ser señalado por sus compañeros, al ausentarse del salón, entre otros que serán identificados e informados en las sesiones de entrevista. Cuando los estudiantes manifiesten estar incómodos, se estudia la posibilidad de

elegir a otros niños para este estudio. Es preciso acotar que la bibliotecaria o alguna de sus dos asistentes siempre están presentes en la biblioteca más no participan en la entrevista en razón al cumplimiento de normas institucionales que rigen el contacto entre profesores visitantes y los niños.

- Es tratado con respeto, porque el investigador reconoce su condición de persona y también es consciente que las respuestas del estudiante son interesantes para la investigación ya que el rol del entrevistador, con relación al conocimiento del estudiante, es neutro para evitar sesgos en las posibles respuestas del estudiante y porque cada pregunta del investigador tiene la intención de reconocer la generalización del estudiante en vez hacerle reconocer un error o refutar su respuesta.
- Estará en el anonimato, porque el investigador utilizará un seudónimo cada vez que quiera referirse a este estudiante, con la finalidad de proteger su identidad.
- Puede manifestar que desea retirarse del proceso cuando se sienta incómodo. En este caso, y de ser necesario, el investigador buscará otro estudiante para continuar la investigación.
- Sabe que sus acudientes, la profesora y las directivas están enteradas, cada que el estudiante vaya a responder una tarea o participar de la entrevista.
- No tendrá repercusiones con sus calificaciones, al decidir si va a participar de la investigación, y por lo tanto puede responder tranquilamente.
- Confiará en que su información será confidencial, porque no será usada para fines diferentes a los de esta investigación, y porque solo será publicado aquello que acepte que pueda publicarse. Esto ocurre cuando el investigador exponga el análisis y los resultados ante la

profesora, las directivas, los acudientes y los estudiantes participantes de esta investigación. Esta exposición tendrá lugar en la Institución Educativa.

Descripción de las tareas

Las tareas que se han diseñado proponen estudiar el reconocimiento de diversos tipos de patrones (fenómenos de generalización de patrones lineales a partir de secuencias pictóricas); de expresión de ellos (mediante diversos modos de representación) y de validación (mediante diversos modos de justificación).

En este apartado se describen los criterios de agrupación de las tareas (la continuación, la compleción, el ordenamiento, la construcción y la descripción); así mismo se afirma que se proponen dos tipos de tareas de generalización: posición cercana y posición lejana. Para la primera se explora la continuación, la compleción y el ordenamiento; para la segunda se explora la construcción. Estas tareas son descritas después de presentar una definición sobre: tareas, tareas de posición cercana, y tareas de posición lejana.

En el presente estudio se entiende la tarea como una pauta escrita en la cual el estudiante asume que debe dar una respuesta (Merino, 2012), y se considera la tarea en esta investigación como aquella que involucra secuencias pictóricas que obedecen a un patrón, que deben ser reconocidas, expresadas y validadas por los estudiantes.

Las tareas se entregan por escrito para que los estudiantes de quinto grado de educación primaria respondan a las cuestiones planteadas en la tarea. Las cuestiones se vinculan con: el reconocimiento, la representación, el registro, la justificación y la validación de los patrones presentes en las secuencias pictóricas. La acción de registrar, como expresión de ese reconocimiento, ocurre cuando el estudiante representa por escrito una regularidad identificada en la secuencia (Mason, 1999).

El investigador propuso las tareas a los estudiantes para que las resuelvan y además les pidió que no borraran sus procedimientos y que, cuando se equivocaran, reescribieran sin borrar lo que habían escrito. Se les propone que encierren o resalten sus errores con un color, y sigan trabajando en la misma hoja o en otra, para que entreguen la tarea al finalizar cada sesión, que dura aproximadamente una hora. Inicialmente se realizarán 5 sesiones durante el período que dura la producción de datos, pero se estudia la posibilidad de incluir otras sesiones, teniendo en cuenta las respuestas que den los estudiantes en la resolución de cada tarea y cada sesión de entrevista, a medida que surjan aspectos considerados por el investigador como relevantes en su justificación.

Se han diseñado tareas de generalización para que los estudiantes identifiquen características de algún elemento de la secuencia que esté localizado ya sea en una posición cercana o en una posición lejana en la enumeración.

Este estudio denota por *tareas de posición cercana* a aquellas tareas en las cuales el estudiante debe continuar, completar u ordenar una secuencia y por *tareas de posición lejana* a aquellas tareas que demandan la construcción de una regla de formación.

A continuación se describen los dos tipos de tareas mencionados: posición cercana y posición lejana. Para la primera, se explora la continuación, la compleción y el ordenamiento; para la segunda se explora la construcción. Estas tareas, descritas a continuación, son producidas por el investigador a partir de una reflexión que surge de la toma o adaptación de tareas propuestas en otros trabajos. Se aclara que los rótulos de estas tareas son asignados por el investigador, quien consideró algunas características de cada tarea.

Continuar una secuencia (Tarea A)

Esta tarea pide al estudiante que dibuje el *siguiente elemento* o los *siguientes elementos*, a partir de una secuencia dada. De este modo, los enunciados que permiten identificar la presencia de esta tarea son:

- Dibuja las figuras siguientes.
- Determina la cantidad de elementos ubicados en una posición cercana, en la secuencia.
- Explica el dibujo o la cantidad determinada para la continuación de la secuencia.

Completar una secuencia (Tarea B)

Esta tarea se propone para que el estudiante encuentre la configuración correspondiente a una posición que se encuentra entre dos posiciones dadas, y cuyas configuraciones son conocidas. No se formulan configuraciones en las que falten muchas posiciones intermedias. En ocasiones, también se puede indagar por la primera posición cuando se han dado posiciones posteriores. Se quiere así explorar el uso *inverso* del patrón identificado por el estudiante. Así, esta tarea se presenta a través de los siguientes enunciados:

- Dibuja figuras que faltan, entre los dibujos de algunas posiciones dadas.
- Determina la cantidad de elementos correspondiente a una configuración faltante, en la secuencia.

Ordenar elementos de una secuencia (Tarea C)

Esta tarea pretende que el estudiante determine la posición de cada elemento de una secuencia y, a la vez, identifique elementos que no pertenecen a esta. Los enunciados que dan cuenta de esta tarea son:

- Identifica la posición de algunos elementos de una secuencia.
- Construye una secuencia, cuyos elementos se encuentran desordenados.
- Reconoce elementos que no pertenecen a una secuencia.
- Justifica la disposición de las figuras, en una secuencia.

Construir un elemento que corresponda a cualquier posición de la secuencia (Tarea D)

Esta tarea indaga por las características que el estudiante reconoce y expresa ante una secuencia presentada, y que puede extender a cualquier posición de la misma. Esta tarea se reconoce en los enunciados:

- Elabora un procedimiento para construir un elemento de la secuencia en una determinada posición.
- Dibuja la figura correspondiente a una posición que el estudiante decida, en la secuencia.
- Determina la cantidad correspondiente a cualquier figura de la secuencia.

La Tabla 5 presenta, a continuación, una tipología de tareas que atiende a una categorización según la posición y la pauta que se da al estudiante en cada tarea.

Tabla 5. Tipos de tareas

Tareas		
Tareas de posición cercana	Continuar una secuencia	Dibuja las figuras siguientes. Determina la cantidad de elementos ubicados en una posición cercana, en la secuencia. Explica el dibujo o la cantidad determinada para la continuación de la secuencia.
	Completar una secuencia	Dibuja figuras que faltan, entre los dibujos de algunas posiciones dadas. Determina la cantidad de elementos correspondiente a una configuración faltante, en la secuencia.
	Ordenar elementos de una secuencia	Identifica la posición de algunos elementos de una secuencia. Construye una secuencia, cuyos elementos se encuentran desordenados. Reconoce elementos que no pertenecen a una secuencia. Justifica la disposición de las figuras, en una secuencia.
Tareas de posición lejana	Construir un elemento que corresponda a cualquier posición de la secuencia	Elabora un procedimiento para construir un elemento de la secuencia en una determinada posición. Dibuja la figura correspondiente a una posición que el estudiante decida, en la secuencia. Determina la cantidad correspondiente a cualquier figura de la secuencia.

La justificación que ofrece el estudiante para el patrón que ha identificado en las secuencias cuando este continúa, completa, ordena, construye y describe, ofrece datos para que el investigador analice la generalización de patrones, entendida como la identificación y la representación de un único patrón, de una reconstrucción del patrón o de la producción de otro patrón. Al respecto, Harel y Tall (citado por Zazkis y Liljedahl, 2002), clasifican la generalización como: Expansiva, en la cual se consideran nuevos casos sin que haya necesidad de reconstruir el esquema; Reconstructiva, donde el esquema existente se reconstruye con el fin de incluir otros casos que no tenían lugar en el esquema anterior; y Disyuntiva, donde un nuevo esquema se construye al pasar a un nuevo contexto, es decir, ninguno de los elementos coinciden, con respecto al esquema que se tenía anteriormente. Esta caracterización es posible por la justificación que ofrece el estudiante.

Todas las secuencias pictóricas presentes en las tareas de generalización, expuestas en esta investigación, son tomadas o adaptadas de los trabajos de Portan y Costa (1996), Mason (1996), Mason (1999), Becknamm (2005), Blanton y Kaput (2005), Villa (2006), Warren y Cooper (2008), Rivera y Becker (2011), del Moral (2012), Merino (2012), Ortega (2012).

Descripción de la entrevista

La entrevista es una reunión entre dos personas, como mínimo, para conversar e intercambiar información (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010). “El fin de la entrevista es el de saber lo que la persona piensa y aprender cosas que no se pueden observar directamente como los sentimientos, las ideas, las intenciones” (Deslauriers, 2004, p. 34). En este trabajo, la entrevista sirve para profundizar en aquellos asuntos de interés para el investigador y que complementan las respuestas que los estudiantes dan en las tareas de generalización, en la intención de comprender las generalizaciones de patrones que producen los estudiantes. Los entrevistados expresan la comprensión que tienen sobre las tareas de generalización propuestas y sobre las respuestas ofrecidas a las tareas en cuestión.

La preparación de la entrevista va más allá de las lecturas sobre el tema de investigación o sobre la redacción de las preguntas. La preparación de la entrevista supone la convivencia con los participantes, el conocimiento del lugar para que ellos se familiaricen con la presencia del investigador.

Antes de cada entrevista, los participantes conocen la fecha, la hora y el lugar correspondiente a la entrevista, teniendo el permiso de sus acudientes y de su profesora. Además de informar sobre los riesgos de la investigación y que pueden tanto negarse a participar como retirar los datos obtenidos con los niños. Además de solicitarles su autorización para grabar las entrevistas.

Cada entrevista grabada se transcribe lo más pronto posible (Deslauriers, 2004). Para registrar las entrevistas se emplea la transcripción verbatim, la cual implica escuchar una y otra vez la grabación para lograr un registro fiel sobre los comentarios surgidos en la entrevista (Deslauriers, 2004).

Las entrevistas semiestructuradas son guías sobre temáticas o preguntas que permiten agregar preguntas para profundizar en la comprensión del asunto que se estudia (Hernández, et al., 2010).Las preguntas que dieron inicio a estas entrevistas atienden a la percepción que tienen los niños acerca de una tarea, en cuanto a la dificultad que le representó al estudiante, y después surgieron otras preguntas con base en las respuestas que el estudiante daba. Es preciso mencionar que los niños se entrevistaron individualmente, lo cual permitió un diálogo fluido, además, los entrevistados pudieron escuchar con claridad las preguntas y, así mismo, el entrevistador escuchó las respuestas de los estudiantes y pudo generar preguntas a partir de estas respuestas (Hernández, et al., 2010).

Enfoque de la investigación

Este estudio tiene un enfoque *fenomenológico–hermenéutico* el cual se caracteriza por la comprensión que alcanza el investigador (Sánchez, 1998).

Con respecto al nivel teórico, y de acuerdo con el falibilismo, esta investigación se interesa por indagar sobre el significado que los estudiantes le otorgan a las respuestas de las tareas de generalización. La entrevista favorece indagar sobre las múltiples interpretaciones que se generan durante la interacción con los estudiantes. En consonancia con lo anterior, se evidencia una orientación fenomenológica cuando se relaciona la producción textual con su significado, teniendo en cuenta el contexto de los estudiantes.

La concepción de ciencia en este trabajo se fundamenta en la hermenéutica, a partir de la búsqueda de una comprensión del fenómeno, que supone indagar por el sentido que los estudiantes otorgan a sus representaciones geométricas y numéricas y, de allí la necesidad de revelar los supuestos implícitos que posibilitan la generalización de los estudiantes.

El enfoque fenomenológico-hermenéutico va de la parte al todo, y esto ocurre cuando las representaciones de las tareas de generalización permiten generar una entrevista, pasando así hacia el discurso y, desde allí, avanzar hacia la generalización, que es un proceso. De modo que el conocimiento de los estudiantes pueda valorarse como un todo comprensivo.

Al asumir que el ser humano está en permanente interacción con su medio, la entrevista semiestructurada favorece una interacción entre el estudiante y el investigador por medio del habla que, a su vez, es la herramienta que permite lograr una interpretación sobre la comprensión del estudiante. En esta interacción se evidencia un interés comunicativo, propio del enfoque fenomenológico-hermenéutico.

El análisis de los datos producidos por cada niño, se realizó teniendo en cuenta que esta investigación tiene un enfoque interpretativo que se interesa por indagar sobre las soluciones que los estudiantes otorgan a las tareas de generalización. La entrevista favorece indagar sobre las múltiples interpretaciones que se generan durante la interacción del investigador con cada uno de los estudiantes. Dado que se indaga por el sentido que los estudiantes otorgan a sus respuestas escritas, se consideró pertinente complementar cada tarea propuesta con una sesión de entrevista.

Estos presupuestos epistemológicos sugieren un método que permita producir y analizar información con la intención de estudiar un fenómeno a profundidad para informar sobre la comprensión del tema que se investiga, es por esto un estudio de caso sería un método adecuado para encontrar una respuesta a la pregunta de investigación.

Método: Estudio de casos

"… El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1999, p. 11). En esta investigación el caso es la generalización de patrones lineales, en la cual se pretende analizar las producciones escritas y verbales de los estudiantes en las tareas y en las entrevistas. Los datos utilizados para efectuar el análisis son obtenidos de dos fuentes: las respuestas a las tareas de generalización y las transcripciones de las entrevistas. Las edades de los participantes oscilan entre los 9 y 10 años.

Este estudio busca hacer una interpretación de la generalización de patrones por cada uno de los cuatro niños, lo cual sugiere un enfoque interpretativo.

Los participantes del estudio son seleccionados por el cumplimiento de los siguientes requisitos:

- El estudiante está matriculado en el grado quinto.
- El estudiante asiste a clase casi siempre o siempre.
- El estudiante participa activamente o responde -de forma verbal o escrita- en clase.
- El estudiante declara que se siente cómodo con la presencia del investigador y con la grabadora, en las sesiones de clase a las cuales asiste el investigador –como observador-.
- La profesora cree que el estudiante producirá información relevante para la investigación.
- Las directivas de la institución autorizan la participación del estudiante en la investigación.
- Los acudientes han autorizado la participación del estudiante en la investigación, es decir, en la resolución de tareas y las sesiones de entrevista.
- El estudiante afirma que quiere participar en la entrevista cada vez que su tarea ha sido escogida. El estudiante será informado en cada ocasión que puede negarse en tanto que ni la actividad ni la entrevista tienen carácter obligatorio.

Aunque la producción de los estudiantes puede servir para otras investigaciones, el interés de este trabajo está puesto en el caso de la generalización de patrones lineales. Por esto, en el análisis se seleccionan datos relevantes en la consecución del objetivo de investigación. En cuanto a la producción de los estudiantes, el Razonamiento Algebraico Elemental de los participantes en esta investigación se manifiesta en las expresiones escritas o verbales que dan cuenta de la generalización de patrones, a partir de las respuestas dadas en tareas propuestas por el investigador. Es pertinente mencionar que el Razonamiento Algebraico Elemental sugiere un estudio del álgebra “en” primaria, mientras que la Early-Algebra sugiere un estudio del álgebra “a partir” de primaria, por este motivo, se ubica el Razonamiento Algebraico Elemental en la propuesta Early-Algebra.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS

En este capítulo se admite la postura de Rodríguez, Gil y García (1996) quienes afirman que el análisis es un examen sistemático conjunto de elementos informativos –verbales, escritos, gestuales- para delimitar partes y descubrir relaciones entre los mismos. Estos autores también aseveran que el análisis de datos cualitativo es el tratamiento de datos, conservando su naturaleza textual, es decir, sin necesidad de acudir a técnicas estadísticas.

En este trabajo, el investigador asume el compromiso de darle significado al cúmulo de materiales procedentes de diversas fuentes de información. En este trabajo, los materiales están constituidos por los documentos que contienen las respuestas escritas dadas por cada niño, y las transcripciones de las sesiones de entrevista.

Para el análisis se siguieron los siguientes cuatro pasos propuestos por Fernández (2006): El primer paso consiste en obtener la información (ver Anexo *Permiso de los padres de familia*). La información se obtuvo proponiendo tareas y sesiones de entrevista, y fue posterior a la autorización de los acudientes, de la rectora, de la profesora, y de los niños participantes de la investigación.

El segundo paso consiste en capturar, transcribir y ordenar la información (Ver Anexos *Respuestas escritas por cada niño* y *Transcripción de entrevistas*). En este segundo paso se utilizó una grabadora de audio, y se recogieron las respuestas escritas.

El tercer paso consiste en codificar la información. En el primer apartado de este capítulo se agrupan las respuestas a partir de una tipología; en el segundo apartado se agrupan las respuestas por cada niño; y en el tercer apartado se agrupan las respuestas por categorías emergentes.

El cuarto paso consiste en integrar la información. Esto se evidencia en la medida que se relacionan las categorías entre sí, y también se relacionan con la literatura.

El presente análisis tiene tres apartados. En el primer apartado, se agrupan las respuestas dadas por los niños en relación con la generalización de patrones. En el segundo apartado, se describen las respuestas dadas por cada niño, y se comparan estas respuestas con algunos estudios relacionados en el campo de la generalización en educación matemática. En el tercer apartado, se presentan las categorías emergentes de las respuestas y consideraciones de carácter matemático dadas por los niños.

Respuestas a cada tarea

En esteapartado se dan las respuestas de los niños a cada una de las tareas propuestas en esta investigación. El conjunto de tareas se encuentra en el Anexo A: Tareas. Se aclara que el nombre de las tareas- tarea A, tarea B- obedece al orden secuencial en el cual fueron propuestas a los niños. Las tareas fueron ordenadas de este modo porque con cada una se le preguntaba a cada niño por posiciones más lejanas con respecto a la secuencia dada, lo cual sugería otras estrategias, además del dibujo y el conteo que usaron los niños al responder la primera tarea. Cada tarea tiene numerales, y cada numeral hace referencia a una acción.

Respuestas a la Tarea A

A continuación se presentan las respuestas dadas por los niños a la Tarea A. Se le recuerda al lector que la intención de esta tarea es “continuar secuencias”.

Respuestas a la Tarea A Numeral 1

En este numeral se le pedía a cada niño dibujar la figura que va en la posición 5, dadas las cuatro primeras posiciones, las cuales se presentan a continuación en la Figura 1 (Tomada de Portan y Costa, 1996; del Moral, 2012).

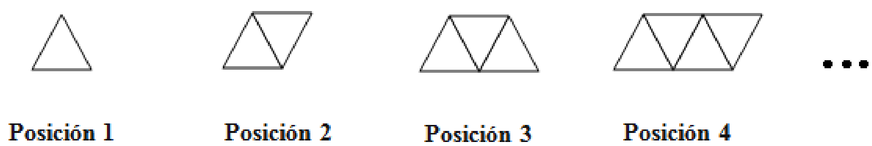
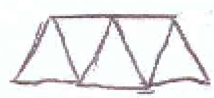
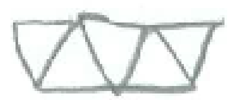


Figura 1. Secuencia de la Tarea A Numeral 1

La respuesta dada por cada uno de los cuatro niños en este numeral se presenta a continuación en la Tabla 6.

Tabla 6. Respuestas a la pregunta “Dibuja la figura que va en la posición 5”

Camilo	David	Jhony	Lucía
			

Todos los niños respondieron acertadamente a esta cuestión. Los niños dibujaron la misma cantidad correcta de triángulos, pero utilizando disposiciones diferentes. Por ejemplo, Jhony afirma “en cada posición se va aumentando un triángulo…” (Entrevista, 19 de septiembre de 2014), mientras que Lucía afirma “porque cada vez que se pasa a otra posición se suman triángulos variando los lados” (Entrevista, 19 de septiembre de 2014). Esta respuesta dada en la entrevista se complementa con la respuesta dada por escrito (Tabla 7).

Tabla 7. Respuestas de Jhony y Lucía para explicar la disposición de las figuras dibujadas en el Numeral 1 de la Tarea A

Jhony	Lucía
En cada posision se va aumentando un triangulo. Posision 4:4 triangulos Posision 5:5 triangulos	Por que cada vez que se pasa a otra posicion se suman triangulos variando los lados

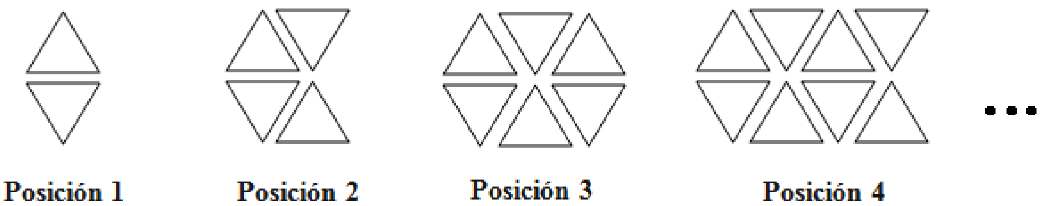
Se aprecia que Jhony agrega un triángulo cada vez. El triángulo que se agrega, a la derecha del triángulo inicial, una vez tiene su vértice hacia arriba, y la siguiente hacia abajo. Mientras que para Lucía al triángulo inicial se le agrega un triángulo, dos triángulos, o tres triángulos a izquierda de manera alternada. Para Lucía siempre se agrega con referencia al primer triángulo. La respuesta de los dos niños es correcta en cuanto a la cantidad de triángulos, pero difieren en el proceso de compleción o acomodación.

Para esta tarea se observaron dos características en las respuestas de los estudiantes. La primera es que los estudiantes dibujan la figura correcta que debe ubicarse en la quinta posición. La segunda es que, en conjunto, los estudiantes utilizaron dos métodos de respuesta.

Respuestas a la Tarea A Numeral 2

El numeral dos incluye tres cuestiones: Dibujar, explicar y determinar la cantidad de triángulos en una posición dada (Figura 2, Tomada de Warren y Cooper, 2008). Se aprecia que a diferencia del numeral 1 donde se pide dibujar la figura en la siguiente posición, en esta se pide dibujar la figura ubicada dos lugares más a partir de la última posición mostrada.

Hay dos triángulos en la posición 1, cuatro triángulos en la posición 2, seis triángulos en la posición 3, ocho triángulos en la posición 4



Dibuja la figura que va en la posición 6 (A.1.)

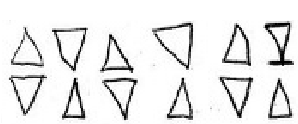
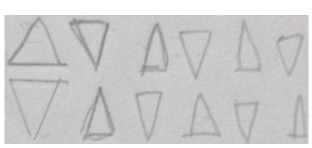
Explica el procedimiento que realizaste para dibujar la figura de la posición 6 (A.3)

¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 6? (A.2)

Figura 2. Tarea A Numeral 2

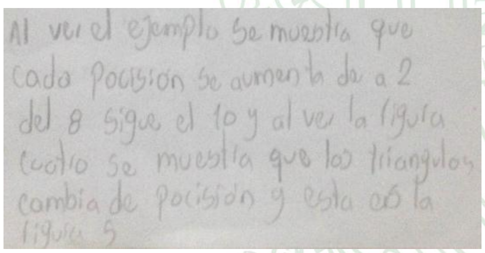
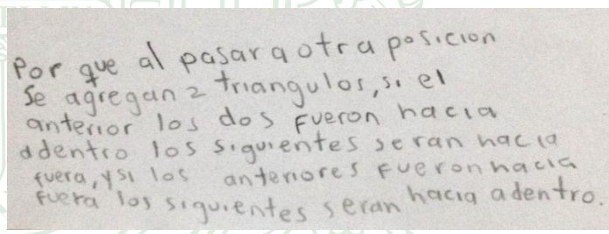
Las respuestas para la primera cuestión (Dibujar) se pueden agrupar en dos tipos. En el primer tipo de respuesta, David, Camilo y Jhony adicionan siempre a la derecha, y en el segundo tipo de respuesta, Lucía adiciona de "otra manera", sin embargo las respuestas son correctas respecto a la cantidad. El lector puede apreciar en la Tabla 8 que los dibujos de los dos tipos de respuesta lucen "diferentes".

Tabla 8. Respuestas en el Numeral 2 de la Tarea A

David	Camilo	Jhony	Lucía
			

Cuando se considera la segunda cuestión "Explicar", se aprecia que las respuestas son de tres tipos. El primer tipo corresponde a una adición, según cantidad, de dos triángulos, la posición de ellos es irrelevante. En el segundo tipo los niños reconocen que "van de dos en dos", y algunos usan la tabla de multiplicación del dos. Por su parte, el tercer tipo inicia en la cuarta posición -en la última- para agregar luego dos triángulos. También se aprecian dos tipos de respuesta para explicar la disposición de las figuras (Tabla 9).

Tabla 9. Respuestas de Camilo y Lucía para explicar la disposición de las figuras dibujadas en el Numeral 2 de la Tarea A

Camilo	Lucía
 Al ver el ejemplo se muestra que cada Pocisión se aumenta de a 2 del 8 sigue el 10 y al ver la figura cuatro se muestra que los triangulos cambia de pocisión y esta es la figura 5	 Por que al pasar a otra posicion se agregan 2 triangulos, si el anterior los dos fueron hacia adentro los siguientes seran hacia fuera, y si los anteriores fueron hacia fuera los siguientes seran hacia adentro.
Transcripción: Al ver el ejemplo se muestra que cada posición se aumenta de a 2 del 8 sigue el 10 y al ver la figura cuatro se muestra que los triangulos [sic] cambia de posición y esta es la figura 5	Transcripción: Porque al pasar a otra posición se agregan 2 triangulos [sic], si el anterior los dos fueran hacia adentro los siguientes seran [sic] hacia fuera, y si los anteriores fueron hacia fuera los siguientes seran [sic] hacia adentro.

En este Numeral se aprecia que los cuatro niños dibujaron la configuración pedida, pero ninguno dibujó por separado la configuración intermedia, la quinta. Esto permite suponer que los estudiantes dibujan la configuración intermedia pero sobre ella construyen la siguiente.

Por su parte la tercera cuestión "determinar cantidad" fue respondida correctamente por tres de los cuatro niños. Camilo fue el único que dio una respuesta diferente. Sin embargo, en la entrevista afirma que creyó que esta cuestión indagaba por la cantidad de triángulos correspondiente a la quinta posición, pero que si se hubiese fijado que le preguntaban por la sexta posición, habría escrito otro número. Si Camilo hubiese respondido por escrito como lo hizo en la entrevista, coincidiría con la respuesta dada por los otros tres niños.

Respuestas a la Tarea A Numeral 3

En esta tarea se aprecian tres cuestiones: dibujar, explicar a partir de la descripción de un procedimiento, y determinar cantidad (Figura 3, Tomada y modificada de Ortega, 2012).

2. Observa la siguiente lista de triángulos

Dibuja las tres figuras que siguen

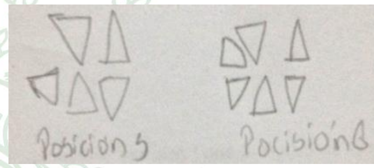
Escribe el proceso de construcción para las figuras construidas anteriormente

¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 10?

Figura 3. Tarea A Numeral 3

Las respuestas al Numeral 3 se caracterizan porque los niños adicionan triángulos para “hacer un círculo” y aquí se aprecian dos tipos de respuestas: el primero sugiere que al completar el círculo, la secuencia termina; mientras que el segundo sugiere que al completar el círculo, la secuencia sigue, y se continúa agregar junto a un triángulo del “círculo” (Tabla 10).

Tabla 10. Tipos de respuestas en el Numeral 3 de la Tarea A

David	Camilo
	

Para la respuesta del primer tipo, Lucía sugiere que puede seguir añadiendo triángulos al extremo derecho, desde la posición séptima, mientras que David lo hace al extremo izquierdo. Para la respuesta del segundo tipo, Jhony afirma que “debe seguir… pero no sabe cómo”, mientras que Camilo afirma que ahí termina la secuencia como la había considerado y por lo tanto, cualquier posición pedida, a partir de la sexta, contiene la misma cantidad de triángulos de la sexta posición.

Respuestas a la Tarea A Numeral 4

En este Numeral se le pedía a cada niño dibujar la configuración correspondiente a la quinta posición de la secuencia, dadas las configuraciones de las cuatro primeras posiciones. La Figura 4 (Tomada y modificada de Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999) permite apreciar esta cuestión.

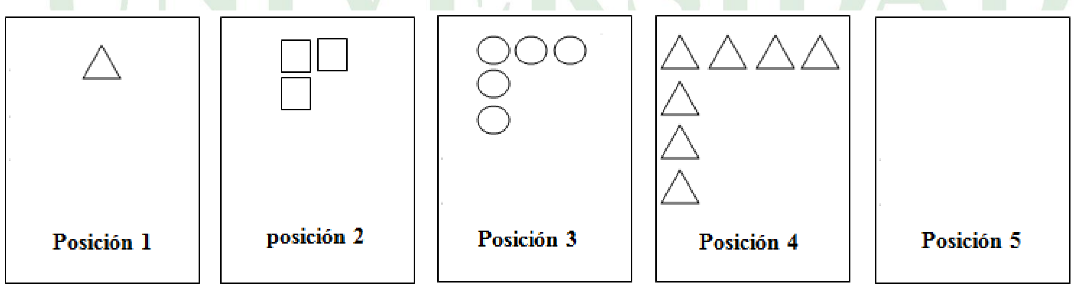
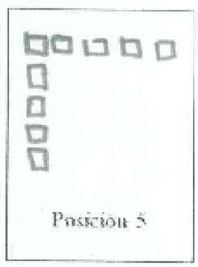
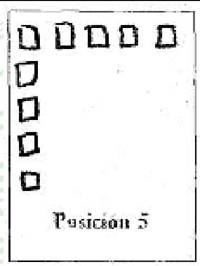


Figura 4. Tarea A Numeral 4

En este Numeral se presentan respuestas de dos tipos (Tabla 11). El primer tipo se caracteriza por la presencia de una figura conocida para el niño, pero diferente a las que se habían empleado en las primeras configuraciones. En este caso, Camilo afirma que la secuencia contiene triángulos, cuadrados y circunferencias, pero falta el rectángulo en las configuraciones expuestas, y por tal motivo, había que seguir la secuencia con rectángulos. El segundo tipo se caracteriza por la presencia de un ciclo en el cual se muestran triángulos en la primera posición, cuadrados en la segunda posición, y circunferencias en la tercera posición, entonces la presencia de triángulos en la cuarta posición sugiere que estas figuras se repiten en el orden mencionado y de forma sucesiva.

Tabla 11. Respuestas al Numeral 4 de la Tarea A

Camilo	Lucía	David	Jhony
			

Respuestas a la Tarea B

A continuación se presentan las respuestas dadas por los niños a la Tarea B. Se le recuerda al lector que la intención de esta tarea es "dibujar las configuraciones faltantes en una secuencia, a partir de otras configuraciones dadas en posiciones consecutivas y contiguas a esta".

Respuestas a la Tarea B Numeral 1

El Numeral 1 de esta tarea se le pedía a cada niño que completara la secuencia, dibujando la configuración que hacía falta (Figura 5, Tomada y modificada de Rivera y Becker, 2011).

Figura 5. Tarea B Numeral 1

Este Numeral fue respondido correctamente por tres de los cuatro niños, en tanto dibujaron la cantidad de estrellas correspondiente a la posición pedida. Sin embargo, Carlos dijo en entrevista que se había equivocado en el dibujo que había hecho (Figura 6), y sugirió que la respuesta debería ser otra. Lo cual coincidiría con la respuesta dada por los otros tres niños.

Figura 6. Respuesta de Camilo en el Numeral 1 de la Tarea B

Respuestas a la Tarea B Numeral 2

El Numeral 2 de esta tarea también se le pedía a cada niño que completara la secuencia, dibujando la configuración que hacía falta (Figura 7, Tomada y modificada de Warren y Cooper, 2008) pero, a diferencia del Numeral 1, no había configuraciones que antecedieran aquella por la cual se indagaba.

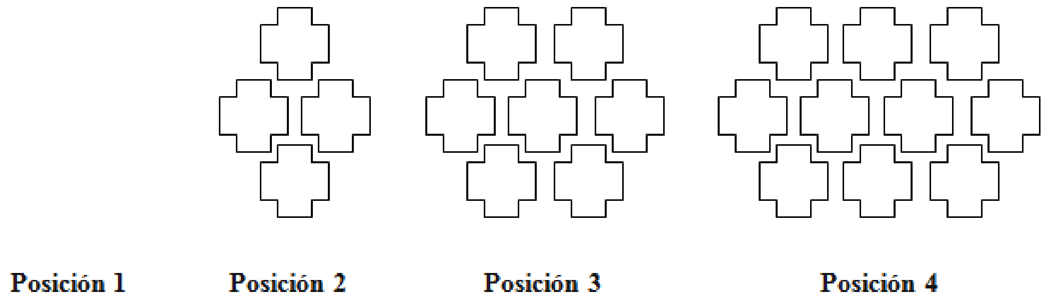


Figura 7. Tarea B Numeral 2

Los cuatro niños respondieron esta cuestión de forma acertada, sin embargo, David afirmó que se había equivocado en el proceso, y por este motivo había tenido que volver a dibujar (Figura 8). Este reconocimiento del error cometido fue posible a partir de la verificación que él mismo hizo antes de entregar la tarea, verificación que consistió en contar nuevamente la cantidad de figuras en cada posición y encontrar que debería haber una regularidad entre posiciones consecutivas. El siguiente episodio da cuenta de esto: "Yo pensé que se le añadía un punto más, una cruz más. Entonces aquí [en la posición uno] eran tres, aquí [en la posición dos] cuatro, aquí cinco [en la posición tres]. Pero aquí son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, espere, sí eran siete" (Entrevista, 23 de septiembre de 2014).

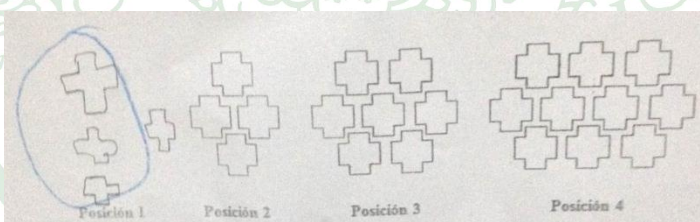


Figura 8. Respuesta de David en el Numeral 2 de la Tarea B

Respuestas a la Tarea C

A continuación se presentan las respuestas dadas por los niños a la Tarea C. Esta tarea contiene nueve numerales, en cada uno de los cuales hay una secuencia pictórica, para que cada niño responda de acuerdo a la secuencia. Se le recuerda al lector que la intención de esta tarea es "determinar la posición correspondiente a cada elemento de una secuencia presentada, e identificar las configuraciones que no pertenecen a una secuencia".

Respuestas a la Tarea C Numeral 1

En este numeral se le pedía a cada niño escribir la posición correspondiente a cada configuración de la secuencia dada, donde se suponía que los elementos podían estar en desorden (Figura 9, Tomada y modificada de Beckmann, 2005). Esta tarea permitía que el investigador indagara por la estrategia empleada por cada niño para ordenar secuencias, puesto que la posición de cada configuración se suponía desconocida; mientras que en las dos tareas presentadas anteriormente se daba la posición correspondiente a cada configuración en una secuencia que se suponía que se había dado ordenada.

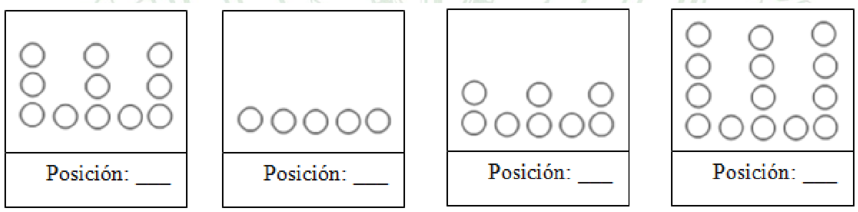


Figura 9. Respuestas al Numeral 1 de la Tarea C

En las respuestas dadas por los niños se aprecia que todos asignaron la posición a cada configuración, a partir de un ordenamiento creciente, es decir, de menor a mayor. Por ejemplo, Camilo menciona que el criterio empleado para ordenar la secuencia presentada consiste en "Que la primera siempre es la menor, y que la última siempre es la mayor" (Entrevista, 29 de septiembre de 2014), y que las posiciones siguientes tienen más figuras que las anteriores al afirmar que "(…) siempre la primera tiene menor, la segunda se va aumentando, la tercera se va aumentando, y la cuarta ya está toda completa" (Entrevista, 29 de septiembre de 2014). En esta respuesta se aprecia que Camilo hace una comparación cuando emplea la palabra "menor" para referirse al aumento en la cantidad de figuras de las posiciones consecutivas que logra mencionar. La Figura 10 muestra la respuesta escrita que da Camilo, en la cual se aprecia la posición que este niño asignó a cada configuración dada.

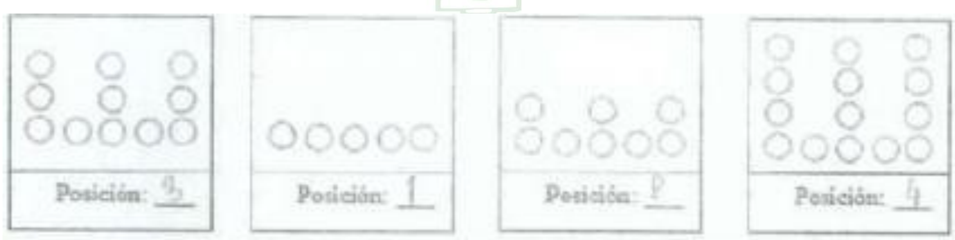


Figura 10. Respuesta de Camilo en el Numeral 1 de la Tarea C

Respuestas a la Tarea C Numeral 2

En este numeral, igual que en el anterior, se le pedía a cada niño que asignara la posición a cada configuración dada (Figura 11, Tomada y modificada de Mason, 1996; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999).

Figura 11. Numeral 2 de la Tarea C

Del mismos modo que en el numeral anterior, los cuatro niños ordenaron la secuencia de menor a mayor, según la cantidad de figuras que había en cada configuración. Por ejemplo, David afirma que “La posición uno siempre va a ser la base […]”. A partir del reconocimiento de una base, David (Entrevista, 29 de septiembre de 2014) afirma que:

> Se encontraba la base y, después, ahí se buscaba cuánto se aumentaba. Entonces la posición uno sería la del medio, que solo tiene un cuadrito; la posición dos, el mismo cuadrito en la mitad, y se le añaden dos: arriba y abajo; en la posición tres están los mismos dos cuadritos, y se le añaden dos a los lados; posición cuatro, se le añade un cuadrito arriba y uno abajo.

Esta estrategia empleada por David sugiere que siempre habría que adicionar, una misma cantidad, de manera recurrente, y a partir de una configuración que representa la base (Figura 12).

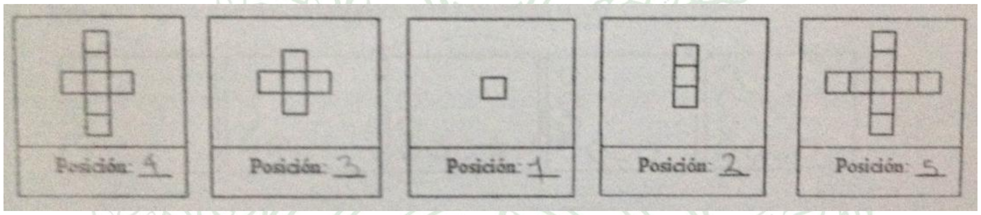
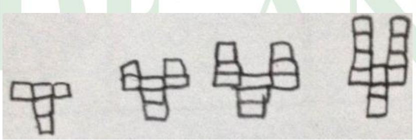
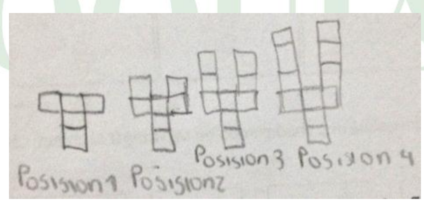


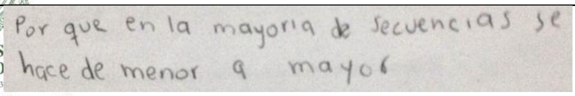
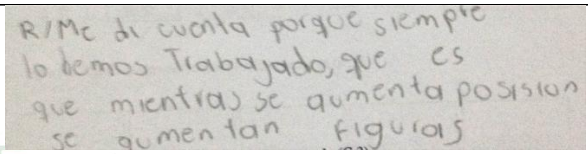
Figura 12. Respuesta de David en el Numeral 2 de la Tarea C

Respuestas a la Tarea C Numeral 3

Los cuatro niños hicieron dibujos similares para responder este numeral. Sin embargo, Camilo y David afirman que la segunda posición de una secuencia está determinada por un aumento hecho a la configuración de la primera posición, y las siguientes posiciones se construyen a medida que se sigue aumentando la cantidad de figuras en la configuración. Por su parte, Lucía y Jhony mencionan que las anteriores tareas (Tarea A y Tarea B) sugieren aumentar cierta cantidad entre posiciones consecutivas, y de esta manera Lucía y Jhony hicieron sus dibujos. A continuación, se presenta en la tabla 12 el dibujo y la descripción dadas por Lucía y por Jhony para responder, por escrito, esta cuestión (Tomada de Beckmann, 2005).

Tabla 12. Respuestas de Lucía y Jhony en el Numeral 3 de la Tarea C

Respuesta de Lucía	Respuesta de Jhony
	

	
Transcripción: Porque en la mayoria [sic] de secuencias se hace de menor a mayor	Transcripción: Me di cuenta porque siempre lo hemos trabajado, que es que mientras se aumenta posicion [sic] se aumentan figuras

Respuestas a la Tarea C Numerales del 4 al 9

En estos seis Numerales se pretendía que cada niño identificara las configuraciones que no correspondían en cada una de las secuencias dadas (Figura 13). Estas respuestas fueron agrupadas porque tenían la misma intencionalidad, la cual consistía en identificar las características que cada niño destacaba para determinar la pertinencia o la exclusión de una configuración en una secuencia.

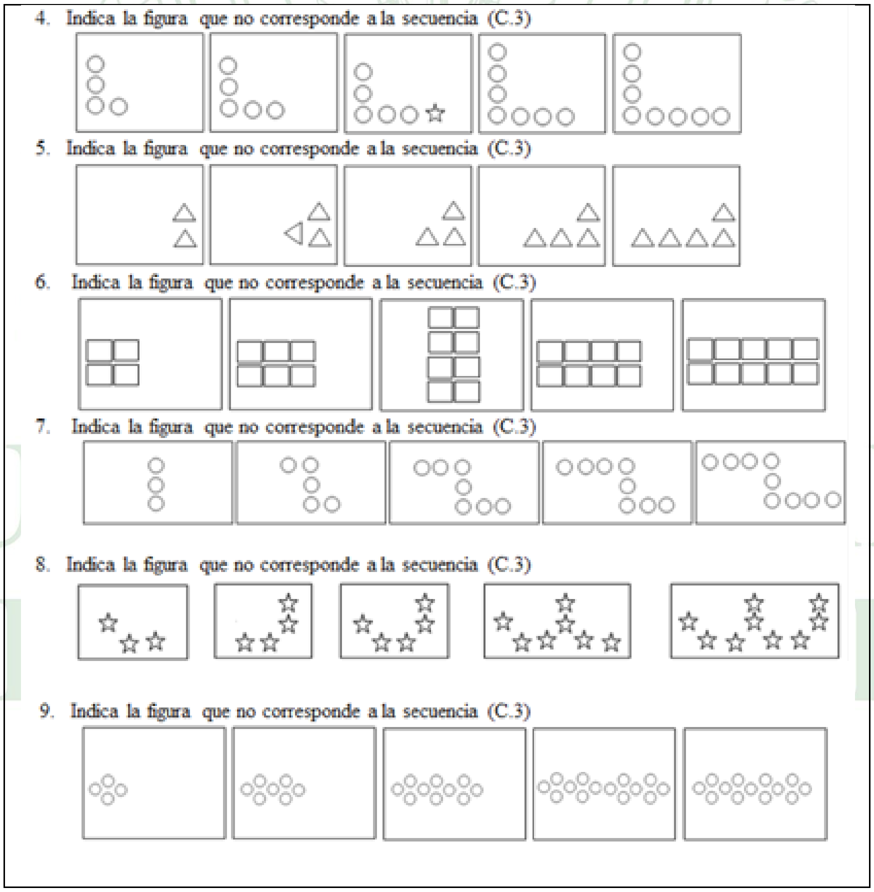


Figura 13. Numerales 4 a 9 de la Tarea C

De estos numerales, solo se analizan por separado las respuestas dadas por los niños en los numerales 7 y 8 por ser aquellos en los cuales se dieron respuestas diferentes, puesto que en los otros (4, 5, 6, 9) la respuesta coincidió, y el criterio que dieron fue el mismo: en el Numeral 4 afirman que hay una figura diferente a las demás en alguna de las configuraciones; en el Numeral 5 mencionan que se presentan las mismas figuras (triángulos congruentes entre sí), pero uno de ellos tiene una disposición diferente a la de los demás; en el Numeral 6 la orientación de los cuadrados sugiere un aumento en una dirección (hacia la derecha) pero en una configuración el aumento se presenta verticalmente (hacia arriba); en el Numeral 9 hay un aumento que no concuerda, es decir, no es constante, con respecto a la cantidad que se había aumentado entre configuraciones consecutivas, lo que genera que un círculo esté en un lugar que no correspondía incluirlo.

En el Numeral 7 hay dos tipos de respuestas (Figura 14): el primer tipo se caracteriza por la ausencia de la forma (letra Z) en una configuración de la secuencia, y por tal motivo Lucía ha marcado ésta como la respuesta; mientras que la segunda se caracteriza por el aumento constante que no se presenta en una de las configuraciones, como lo han mencionado los otros tres niños.

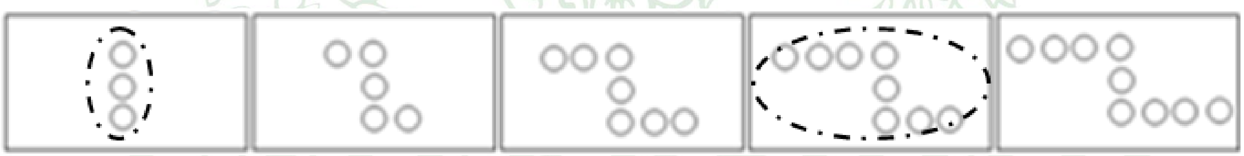
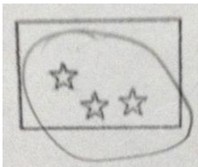
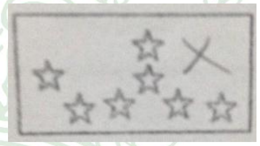
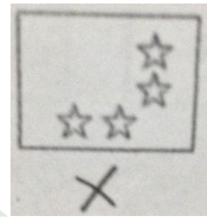


Figura 14. Tipos de respuestas en el Numeral 7 de la Tarea C

En el Numeral 8 hay cuatro respuestas diferentes (Tabla 13), las cuales pueden agruparse en dos tipos. A continuación se describe la respuesta dada por cada niño en este numeral, para luego enunciar los dos tipos de respuesta encontradas por el investigador.

Tabla 13. Respuestas dadas por los niños en el Numeral 8 de la Tarea C

David	Lucía	Camilo	Jhony
			

En la primera respuesta, David afirma que tanto la primera como la segunda configuración deben tener la misma base, sin embargo hay algo que las diferencia, y el criterio para decidir acerca de la base es comparar la segunda con la tercera configuración y, en esa comparación, David encuentra que a la segunda se le agrega una figura, y por esto la que no corresponde sería la primera, puesto que a la segunda configuración se le puede adicionar "algo" para formar la tercera.

En la segunda respuesta, Lucía afirma que el aumento que sugiere la primera configuración parece que se debe hacer hacia la derecha, mientras que en las otras configuraciones parece que el aumento fuera hacia arriba, entonces, por la forma como se debe adicionar, la niña afirma que debe excluirse la primera configuración presentada en este numeral.

En la tercera respuesta, Camilo aprecia que se va adicionando de modo que se va formando una figura que el algún momento puede cerrarse (una forma circular), y por este motivo el niño selecciona la cuarta configuración como la incorrecta; luego, menciona en la entrevista que se ha equivocado porque cuenta y se da cuenta que hay una secuencia que consiste en adicionar dos estrellas cada vez, y así, la respuesta sería una diferente a la dada inicialmente, sugiriendo entonces que la respuesta sería otra.

La cuarta respuesta consiste en determinar la cantidad de estrellas que tiene cada configuración, y comparar las cantidades obtenidas, encontrando que siempre se puede adicionar de a dos estrellas en una configuración para formar la siguiente; con este criterio, Jhony sugiere quitar la configuración en la cual no haya un aumento de dos, con respecto a las posiciones contiguas, a partir de un ordenamiento de menor a mayor.

La selección de la configuración que no corresponde a la secuencia se hace, en un primer tipo de respuesta, según la forma como parece que fuera aumentando la cantidad y, en un segundo tipo de respuesta, según la cantidad de figuras que deben agregarse a una configuración para formar la siguiente.

Respuestas a la Tarea D

A continuación, se presentan las respuestas dadas por cada niño en la Tarea D. Esta tarea contiene cuatro numerales, y en cada uno de ellos se muestra una secuencia pictórica, a partir de la cual se espera que los estudiantes respondan. Se le recuerda al lector que esta tarea pretende que el niño “construya un elemento perteneciente a cualquier posición pedida en una secuencia”.

Respuestas a la Tarea D Numeral 1

En este Numeral se le pedía a cada niño que describiera el procedimiento realizado para construir la siguiente configuración, es decir la de la quinta posición, a partir de las cuatro configuraciones que presentaba la secuencia, y además se indagaba por la cantidad de palos que tendría la configuración de la décima quinta configuración en la misma secuencia (Figura 15, Tomada de Blanton y Kaput, 2005; Ortega, 2012).

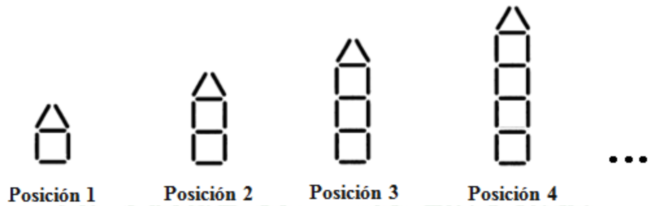
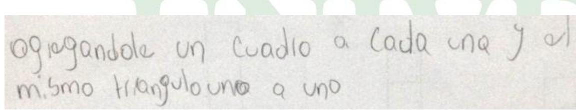
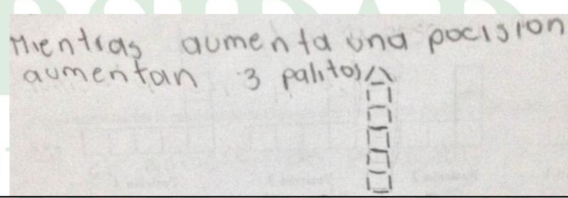


Figura 15. Numeral 1 de la Tarea D

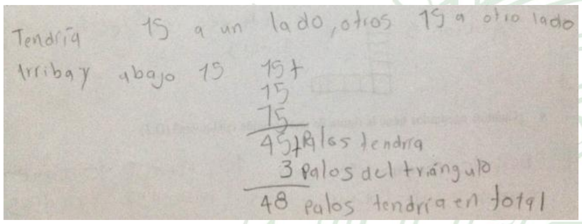
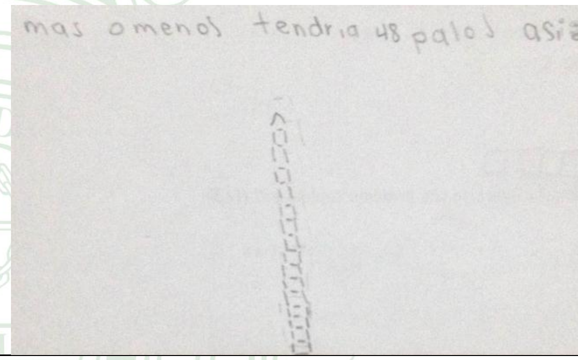
Las respuestas dadas a esta tarea para describir el procedimiento empleado son de dos tipos: En el primer tipo se aprecia que tanto Camilo como David mencionan la adición de un cuadrado, por cada posición consecutiva que se quiera construir; los cuadrados adicionados se caracterizan por compartir un lado con el cuadrado de la configuración a partir de la cual se va a construir la siguiente, y respetando la orientación, es decir, cada cuadrado que se adiciona permite ver que un cuadrado queda sobre otro; y después de formar cuadrados, se procede a contar segmentos (palos). En el segundo tipo se aprecia que tanto Lucía como Jhony agregan tres segmentos (palos) que han descrito como verticales los cuales son adicionados a izquierda y derecha, y horizontales que se adicionan en la parte inferior de la configuración. A continuación se presenta la Tabla 14, en la cual se aprecia cada tipo de respuesta.

Tabla 14. Respuestas según la forma que se agrega

Camilo	Jhony
	
Transcripción: agregandole [sic] un cuadro a cada una y el mismo triangulo uno a uno	Transcripción: Mientras aumenta una pocision [sic] aumentan 3 palitos

En cuanto a la cantidad de segmentos (palos) que contiene la configuración de la décima quinta posición, hay dos tipos (Tabla 15): El primer tipo consiste en la elaboración del dibujo correspondiente a la posición mencionada, y el posterior conteo. El segundo tipo consiste en el empleo de un algoritmo para responder a la cuestión propuesta en este numeral.

Tabla 15. Respuestas según la estrategia empleada

David	Lucía
	
Transcripción: Tendria [sic] 15 a un lado, otros 15 a otro lado arriba y abajo 15	Transcripción: mas [sic] o menos tendria [sic] 48 palos asi [sic]

Respuestas a la Tarea D Numeral 2

En este numeral se le pedía a cada niño que escribiera la cantidad de estrellas que deberían estar en la décima cuarta posición. Como en el numeral anterior, en este también se daban las configuraciones correspondientes a las cuatro primeras posiciones de la secuencia pictórica presentada (Figura 16, Tomada de Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999).

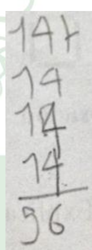
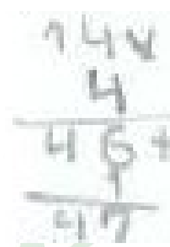
Figura 16. Numeral 2 de la Tarea D

En este numeral se aprecian tres tipos de respuesta, los cuales se ilustran en la Tabla 11: En el primer tipo de respuesta, Camilo hace un dibujo que tiene catorce estrellas horizontalmente y catorce estrellas verticalmente, haciendo coincidir una estrella vertical con una horizontal, y en la entrevista afirma que debía sumar de dos en dos hasta llegar a la posición pedida, la posición catorce.

En el segundo tipo de respuesta, David menciona que en el centro de cada configuración está la base, la cual tiene cuatro estrellas, y afirma que una posición tiene cuatro estrellas más que la posición inmediatamente anterior; y por esta razón suma 14, que es la posición pedida, cuatro veces, que es la cantidad de estrellas que deben adicionarse cada vez.

En el tercer tipo de respuesta, tanto Lucía como Jhony sugieren que debe multiplicarse 14x4 y luego sumar 1 al resultado de la operación efectuada; sin embargo, obtienen resultados diferentes porque Jhony al escribir el algoritmo de la multiplicación, escribe como resultado "46".

Tabla 16. Respuestas al Numeral 2 de la Tarea D

Camilo	David	Lucía	Jhony
			

Las respuestas dadas por los cuatro niños coinciden en el empleo de una estrategia en la cual pueden encontrar cualquier posición pedida sin hacer el conteo sucesivo, es decir, en lugar de adicionar sucesivamente una cantidad hasta llegar a la cantidad correspondiente a una posición de la secuencia, encontraron operaciones “como la multiplicación” para generar una expresión escrita de su respuesta.

Respuestas a la Tarea D Numeral 3

En este numeral se le pedía a cada niño que respondiera por una cantidad indeterminada, a partir de una secuencia dada (Figura 9, Tomada y modificada de Merino, 2012). Este numeral se diferencia de los anteriores, incluso de las tareas anteriores, por la ausencia de una cantidad específica por la que se indagaba. En este numeral cada niño podía determinar la cantidad y responder para ese caso particular (posición de la secuencia) que había elegido, o podía responder con independencia del caso que se considerara.

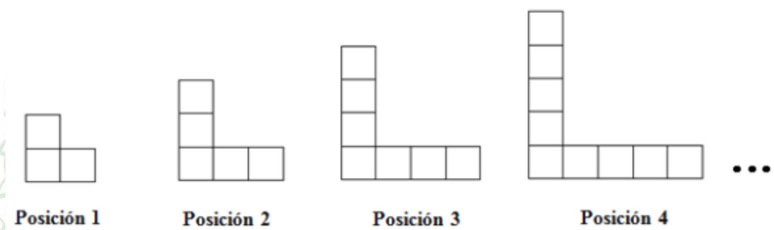


Figura 17. Numeral 3 de la Tarea D

En este numeral se aprecian tres tipos de respuesta: En el primer tipo, Camilo afirma que cuenta verticalmente y aprecia un aumento en las configuraciones dadas, luego cuenta de manera horizontal y aprecia un aumento entre las configuraciones dadas, y así descubre que entre posiciones consecutivas la secuencia va aumentando de a un cuadrado tanto vertical como horizontalmente.

En el segundo tipo, David y Lucía afirman que las posiciones se forman sucesivamente a medida que se adiciona un cuadrado (en la parte superior) verticalmente y otro (en la parte inferior derecha) horizontalmente; David en otras respuestas ha mencionado que este aumento se hace a partir de una figura que se supone como “la base”, es decir, el punto de referencia para adicionar figuras y construir las configuraciones de las siguientes posiciones.

En el tercer tipo, Jhony afirma que las configuraciones tienen forma de letra “L” y de forma sucesiva va adicionando de a dos cuadrados; en esta respuesta se aprecia que Jhony adiciona con respecto al todo (forma de “L”), mientras que los otros tres niños mencionan por separado el aumento vertical, y luego el aumento horizontal, para luego referirse al aumento con respecto a toda la configuración. A continuación se presentan las descripciones escritas que ofrecieron los niños como respuesta a las cuestiones planteadas en este numeral (Tabla 17).

Tabla 17. Respuestas al Numeral 3 de la Tarea D

Nombre del niño	Respuesta
Camilo	En cada lado se aumenta un cuadro
	Transcripción: En cada lado se aumenta un cuadro
David	cada vez se le hace 1 más
	Transcripción: Cada vez se le hace 1 más
Lucía	Solo se va incluyendo otro cuadrado a cada lado
	Transcripción: Solo se va incluyendo otro cuadrado a cada lado
Jhony	Mientras aumenta una posicion aumentan 2 cuadritos (1 a cada lado).
	Transcripción: Mientras aumenta una posicion [sic] aumentan 2 cuadritos (1 a cada lado).

Respuestas a la Tarea D Numeral 4

En este numeral se presentaba una secuencia pictórica (Figura 18, Tomada de Villa, 2006) a partir de la cual se pretendía indagar por tres cuestiones: Dibujar la configuración de una posición pedida, determinar la cantidad de figuras correspondiente a una posición lejana en la secuencia, y elaborar un procedimiento para encontrar la cantidad de figuras que conforman una posición cualquiera e indeterminada.

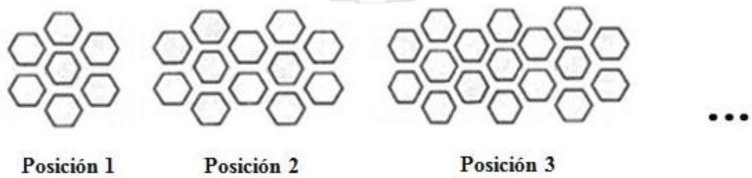
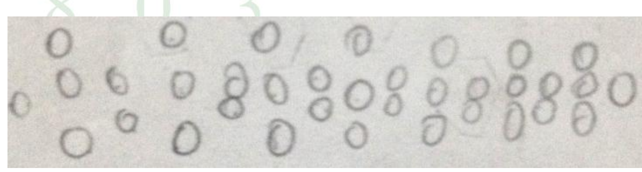


Figura 18. Numeral 4 de la Tarea D

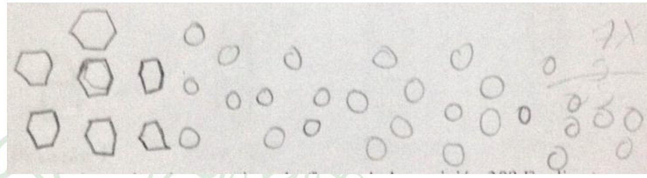
Para la primera cuestión, se encontraron dos tipos de respuesta (Tabla 13): El primer tipo se relaciona con las figuras que empleó cada niño para responder, puesto que Jhony y Lucía dibujaron solo hexágonos, mientras que David comenzó haciendo hexágonos y terminó con circunferencias, y se presume que tomó esta decisión por lo dispendioso que le resultó, y Camilo dibujó solo hexágonos e informa que tomó esta decisión de hacer circunferencias por lo complicado que sería dibujar los hexágonos que requería la resolución de esta tarea.

El segundo tipo se relaciona con la distribución de las figuras en la configuración, puesto que únicamente Jhony dispuso las figuras como se había mostrado en la tarea, mientras que los demás presentaron una variación en su respuesta.

Tabla 18. Dibujos que responden al Numeral 4 de la Tarea D

Niño	**Dibujo**
Jhony	
Lucía	
Camilo	

David



Los niños responden esta cuestión a partir de una representación pictórica que es una forma visual de representación y que ayuda a interpretar y relacionar información. La representación pictórica contiene dibujos y está caracterizada por la ausencia de notaciones simbólicas (Merino, 2012). Todos los participantes respondieron de esta manera cuando se les pedía “dibujar”

Para la segunda cuestión, se encontraron tres tipos de respuesta (Tabla 19): En el primer tipo, Camilo y David multiplican el número de la posición por la cantidad de figuras que se aumenta siempre entre una configuración y la siguiente. En el segundo tipo, Jhony multiplica como lo hacen Camilo y David, y además adiciona siempre otra cantidad. Adicionalmente, Jhony aprecia que por cada posición se adicionan dos filas, una con dos hexágonos y otra con tres hexágonos, es decir, por cada posición se adicionan cinco hexágonos. Esta relación que establece Jhony entre las partes (filas) en las cuales descompone la configuración y el aspecto numérico de las secuencias pictóricas, al encontrar una cantidad que corresponde a un aumento constante y otra cantidad que siempre debe adicionar, le permite responder correctamente para cualquier posición que se le pida, sin embargo esto se encontró en la entrevista porque la respuesta escrita no da suficiente información para hacer esta aseveración. En el tercer tipo se aprecia cuando Lucía afirma que la cantidad de triángulos de la posición 30 es igual al producto entre la cantidad de triángulos de la posición 3 y la cantidad de veces que debería sumarse esta posición para obtener 30; dicha cantidad de veces debería ser 10. Es decir, la operación 3 x 10=30 le permite establecer esta relación entre la posición y la cantidad de figuras, porque ella multiplica la cantidad de triángulos de la posición 3 con 10, bajo el presupuesto de que 30 es lo mismo que 10 veces 3, y en este caso, ella asume que 10 veces se debe sumar la cantidad de figuras de la posición 3 para obtener la cantidad de figuras correspondiente a la posición 30.

Tabla 19. Determinación de una cantidad correspondiente a una posición en la Tarea D

Niño	Respuesta
David	30x 5 150 Hexágonos
Camilo	150 Hexagonos 30x 5 150
Jhony	152 hexagonos
Lucía	tendria 170 porque si en la tres hay 17 por diez da 170

Para la tercera cuestión, se encontraron tres tipos de respuesta (Tabla 20):En el primer tipo, tanto David como Camilo propusieron que para otras posiciones escogidas por ellos mismos tanto en la tarea escrita como en la entrevista, esta estrategia de multiplicar también serviría, es decir, mencionaron algunos casos particulares para intentar mostrar, que también sirve esta estrategia que emplearon. En el segundo tipo, Jhony enuncia una regla de formación para determinar la cantidad de figuras correspondientes a cualquier posición que se desee. En el tercer tipo, Lucía propone dos estrategias, la primera consiste en adicionar cinco hexágonos por cada posición, y de forma sucesiva; la segunda consiste en establecer una correspondencia entre una posición considerada por Lucía y la cantidad de veces que debe multiplicarse dicha posición para obtener la posición pedida, permite suponer que esta niña generaliza que debe efectuar una multiplicación (multiplica la cantidad de figuras presentes en una configuración correspondiente a una posición dada en la tarea o que puede dibujar fácilmente, y otro factor) para determinar la cantidad de hexágonos que habrá en alguna posición pedida en la secuencia. Es menester mencionar que estas dos estrategias propuestas por Lucía no están correlacionadas.

Tabla 20. Respuesta a la pregunta por una posición indeterminada

Niño	Explicación
David	cada vez se le añaden 5 exágonos
Camilo	multiplicando 6 × 5 = 30 Hexagonos
Jhony	el numero de posicion se multiplica por 5 y se le suma 2
Lucía	Teniendo en cuenta que a cada posicion se le agregan cinco hexagonos más

En ocasiones, estos niños generalizan a partir de ejemplos en los cuales se cumple la regla que enuncian, como pudo apreciarse en este numeral, aunque no necesariamente respondan acertadamente a la secuencia pictórica que se está proponiendo.

Respuestas dadas por cada niño

A continuación se presentan las respuestas dadas por cada uno de los participantes de la investigación: Camilo, David, Lucía y Jhony. Estas respuestas se comparan con algunos estudios. Adicionalmente, estas respuestas ofrecen información que permite presentar las categorías emergentes, lo cual se desarrolla en el tercer apartado del análisis. Se le recomienda al lector ir al Anexo A: Tareas, o dirigirse al apartado anterior para ver las tareas que fueron propuestas a los niños.

Respuestas dadas por Camilo

En el Numeral 1 de la Tarea A, Camilo menciona que se "fijó" inicialmente en la configuración de la posición 1, y luego miró la posición 2 para encontrar que "algo" cambió, ese algo es el triángulo que se le adicionó al costado derecho de la posición 1. Sin embargo, afirma que siguió verificando en las configuraciones de las posiciones 3 y 4 respectivamente para comprobar su sospecha, y como aprecia que funciona la estrategia de adicionar cada vez un triángulo en el costado derecho, decide dibujar la configuración de la quinta posición a partir de la reproducción de la cuarta posición y adicionar un triángulo. Al comparar las dos primeras configuraciones de la secuencia y sospechar que debía adicionar un triángulo por cada posición consecutiva que fuera a construir, lo cual comprueba en las otras posiciones dadas, Camilo encuentra un patrón (Castro, Cañadas y Molina, 2010). En la respuesta escrita representa con una flecha el lugar en el cual debe adicionar un triángulo a partir del dibujo de la cuarta posición (Figura 19).

Figura 19. Respuesta de Camilo al Numeral 1 de la Tarea A

En el Numeral 2 de la Tarea A, Camilo menciona la cantidad de triángulos que hay en cada posición para explicar su decisión de adicionar dos triángulos a la última configuración mostrada, y así dibujar la correspondiente a la siguiente posición. Además afirma "[…].

Entonces, en la posición cinco puse la misma posición que está en la cuatro y seguí como yo creo que es la circulación". La presencia de un enfoque funcional parece estar sugerido por la manifestación verbal de posición versus cantidad (Van Amerom, 2002; Molina, 2006).Esto denota que construye la siguiente a partir de la reproducción de la última configuración dada y añade lo que corresponda, según el cambio que haya visto entre otras configuraciones consecutivas de la secuencia dada. Además, Camilo emplea la palabra *circulación* para denotar la que en la literatura (Queensland Studies Authority, 2005) se conoce como *patrón de repetición* cuando describe la forma como deben añadirse los triángulos, los cuales cambian de lugar entre sí, y presentan una estructura cíclica.

En el Numeral 3 de la Tarea A, Camilo afirma que los triángulos formaban "como un círculo", es decir, los triángulos generaban una configuración que se iba cerrando. Al construir la configuración de la sexta posición, afirma que no encuentra una estrategia para continuar esta secuencia, razón por la cual decide responder que a partir de la sexta posición hay seis triángulos en la posición pedida, posición 10. Sin embargo, afirma que respondió por la última posición conocida para él, lo cual no significa que la secuencia sea finita, puesto que en este caso su respuesta está condicionada por la cantidad de figuras que pueda dibujar.

En el numeral 4 de la Tarea A, Camilo afirma que deben emplearse todas las figuras conocidas y por tal motivo decide dibujar rectángulos, puesto que "[…] es la última figura que falta. Ya está el cuadrado, ya está el triángulo, ya está el círculo". Además, tiene en cuenta las figuras que deben ubicarse en las posiciones, sin tener en cuenta la cantidad como una característica de esta secuencia, para dibujar esa cantidad de figuras en la posición requerida. Con respecto al problema fenomenológico que propone Radford (2013) para la generalización de patrones, se aprecia que Camilo atendió a las formas sin considerar la cantidad como una característica de esta secuencia.

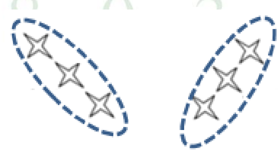
Estas características permiten inferir que Camilo ha identificado patrones, porque reconoce que hay algo que cambia, ya sean formas o cantidades, entre las configuraciones mostradas en la secuencia. Además, él hace una generalización *cercana* (Stacey, 1989) porque se basa en las figuras mostradas para construir las configuraciones siguientes, algunas veces por las cantidades y otras por manera en que deben disponerse las figuras. Es preciso mencionar que la generalización no hace referencia exclusivamente a las respuestas correctas. En las respuestas de Camilo también hay generalización porque él identificó unas características (Castro, Cañadas y Molina, 2010) que le permiten hacer predicciones sobre las configuraciones que conformarán la secuencia, en caso de decidir continuarla.

Camilo responde de manera flexible, entendiendo la *flexibilidad* como una habilidad cognitiva para cambiar el proceso de resolución de una tarea, ante una pauta diferente en la cuestión que plantea tal tarea (Molina, 2011; Callejo y Zapatera, 2014). En el Numeral 1 de la Tarea B se aprecia la flexibilidad cuando Camilo menciona que puede responder a partir de la operación "resta" al comparar configuraciones consecutivas de derecha a izquierda, y la operación "suma" al hacer la comparación de izquierda a derecha.

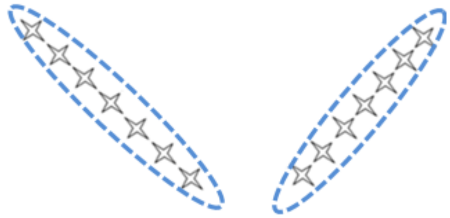
> Investigador: Ah. Entonces, lo que quiere decir es que para pasar de la posición dos a la tres, hay que sumar. Pero, para pasar de la cuatro a la tres, hay que restar.
> Camilo: Porque aquí [señalando la posición dos] hay tres en cada una [de las diagonales], y aquí [señalando la posición cuatro] ya hay siete. Entonces, yo me puse a contar cuánto le falta al tres para llegar al siete. Y me di de cuenta que, le faltan, le faltan cuatro. Entonces, aquí generalmente van a ir cuatro para que aquí se aumenten tres. Acá, hasta aquí, llega el cuatro, y vea que se aumentan las tres.
> Investigador: Entonces, cuando usted dice que "aquí van cuatro", ¿es desde un extremo hasta la mitad?
> Camilo: No, cuatro toda la línea. Hasta, de aquí a aquí, que vayan, que hayan cuatro.
> Investigador: ¿Cuatro estrellas?
> Camilo: Sí.

Camilo afirma que verificó su respuesta antes de iniciar la entrevista, y en la entrevista reconoce que cometió un error. Este reconocimiento consiste en que Camilo asegura que una posición cualquiera debe tener menos figuras que la posición siguiente, y al comparar la cantidad de figuras de su dibujo correspondiente a la posición 3 y la cantidad de la configuración dada para la posición 4, encontró que no se cumplía esta condición. Después de reconocer el error, Camilo propone una estrategia para seguir construyendo la secuencia (Tabla 21). El niño afirma que en cada una de las dos diagonales debe sumar dos estrellas (una estrella en cada extremo) al mirar dos posiciones consecutivas de izquierda a derecha. Sin embargo, también afirma que debe restar dos estrellas por cada diagonal al mirar dos posiciones consecutivas de derecha a izquierda. La siguiente tabla ilustra la estrategia propuesta por Camilo, después de haber reconocido el error.

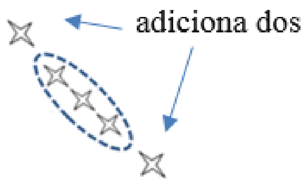
Tabla 21. Estrategia de Camilo en el Numeral 1 de la Tarea B

Respuesta	Descripción
“Como puede ver, me equivoqué”	Camilo reconoció, después de haber entregado la tarea escrita, que se había equivocado. En esta respuesta escrita se aprecia que Camilo dibuja las estrellas, según las diagonales que menciona en la entrevista. 
“Hay tres en cada una”	Camilo cuenta la cantidad de estrellas que hay en cada diagonal de la segunda posición. 

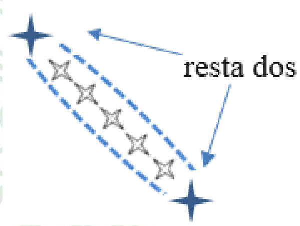
"Aquí hay siete"	Camilo encuentra que hay siete estrellas en cada diagonal de la cuarta posición.



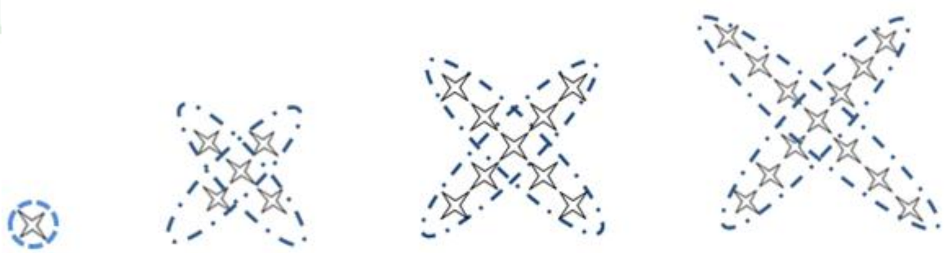
"Hay que sumar"	Para construir la configuración de la tercera posición, a partir de la segunda posición, Camilo adiciona dos estrellas en cada diagonal: adiciona una estrella en cada extremo, conservando la configuración de la segunda posición.



"Hay que restar"	Para construir la configuración de la tercera posición, a partir de la cuarta posición, Camilo resta dos estrellas en cada diagonal: resta una estrella en cada extremo, conservando las demás estrellas de la configuración.



Esquema de la respuesta dada por Camilo durante la entrevista	Camilo aprecia dos diagonales, a partir de la segunda posición, para referirse a la manera como debe adicionarse. Camilo encuentra que se adicionan dos estrellas en cada una de las diagonales, a medida que se considere cada posición de izquierda a derecha. Camilo propone que se restan dos estrellas, por cada posición que se considere de derecha a izquierda.



En el Numeral 2 de la Tarea B, Camilo identifica la cantidad de figuras que debe "quitar" a una configuración para obtener la configuración de la posición anterior. Verifica fijándose que entre las posiciones siguientes se conserva la diferencia. Sin embargo, afirma que la resta no es el único procedimiento porque sugiere que desde la posición cuatro hasta la uno puede ir restando, y desde la posición uno hasta la cuatro verifica que la suma sea constante. Camilo responde este Numeral sin fijar una base porque afirma que puede "quitar" de varias formas, para formar la configuración de la primera posición, es decir, las figuras pueden quitarse del costado derecho o el izquierdo, y esto es indiferente para responder correctamente esta cuestión. Camilo responde este numeral de manera flexible (Molina, 2011; Callejo y Zapatera, 2014) porque emplea múltiples estrategias para responder una misma cuestión, puesto que sugiere que una estrategia consiste en quitar a un costado, otra estrategia consiste en quitar al otro costado, y otra estrategia podría ser la suma de la misma cantidad entre posiciones consecutivas de izquierda a derecha.

En los Numerales 1, 2 y 3 de la Tarea C, Camilo afirma que pudo asignar posiciones a las configuraciones que se habían dado en desorden "Porque la primera debe ser la que menos tiene y la última la que más tiene" y con este criterio organiza las configuraciones de menor a mayor, según la cantidad de figuras que contengan.

En los Numerales 4, 5, 6, 7, 8 y 9 de la Tarea C, Camilo discrimina en las secuencias presentadas algunas características fenomenológicas (Radford, 2013) tales como la forma de cada figura (Numeral 4) y de cada configuración (Numeral 8), disposición (Numeral 5), orientación (Numeral 6), y cantidad (Numerales 7 y 9) para decidir acerca de las configuraciones que deberían excluirse de cada secuencia, por el incumplimiento de alguna de las características mencionadas en cada numeral. Camilo responde que los Numerales 4 y 5 son diferentes porque en este último, aunque se presentan las mismas figuras, había que fijarse en otra característica.

En el Numeral 1 de la Tarea D, Camilo afirma que dibujó un cuadrado en la parte inferior, agregó otros cuadrados sobre este cuadrado, uno sobre otro, y finalmente dibujó un triángulo en la parte superior. Luego contó segmentos (palitos) que conforman el dibujo que ha hecho. Cuando se le pidió escribir la cantidad correspondiente a una posición pedida, hizo un dibujo y contó a partir de este. Es decir, su estrategia fue dibujar la configuración correspondiente a la posición pedida y luego contar segmentos.

En el Numeral 2 de la Tarea D, independiente de que cuente de forma horizontal o vertical, Camilo afirma que hay tres figuras en una de las configuraciones dadas. El lector puede verificar que de cualquiera de estas dos formas que se cuente, se obtiene la misma cantidad. Por esto, hay que tener en cuenta que él dice "se va aumentado de a dos" pero en dos direcciones.

> Camilo: Primero miré las figuras, en qué secuencia estaban. Entonces, primero miré, en la primera hay tres. Y vi que, en la segunda, ya hay un uno, dos, tres, cuatro, cinco. Entonces, me di de cuenta que se va aumentando de a dos.

En el Numeral 3 de la Tarea D, Camilo menciona que hay un cambio vertical y un cambio horizontal, para explicar la formación de la figura en cada posición de la secuencia. Es decir, reconoce un cambio en dos direcciones (hacia arriba y hacia el lado derecho).

> Camilo: En la primera posición, hay dos. Y para el que está caído, hay uno. Entonces, aquí ya hay tres [verticalmente, en la segunda posición], y aquí habían dos [horizontalmente, en la segunda posición, sin contar el extremo izquierdo, que coincide con el extremo inferior de la vertical]. Aquí ya hay dos [verticalmente, en la primera posición], y aquí [horizontalmente, en la primera posición, sin contar el extremo izquierdo] ya había uno. Y mi estrategia fue seguirle aumentando a cada lado.

En el Numeral 4 de la Tarea D, Camilo emplea la multiplicación como estrategia para determinar la cantidad de hexágonos que habría en cualquier configuración. Por ejemplo, para la posición 7, escribe 7 x 5 y afirma que habría 35 hexágonos en esta posición, dibujando una configuración que tiene esta cantidad de hexágonos; para la posición 30, escribe 30 x 5, y responde que habría 150 hexágonos. Cuando se le preguntó por una posición indeterminada de la secuencia, Camilo escogió una posición, en este caso la sexta posición, dibuja la configuración que estaría en la sexta posición y escribió 6 x 5, respondiendo así que en la sexta posición habría 30 hexágonos. En las configuraciones usadas por Camilo se aprecia que no dibujó en los extremos (izquierdo y derecho) las dos figuras que presenta la secuencia en las primeras posiciones dadas, sino que en ambos casos dibujó solo una figura en cada extremo. De esta manera, al comparar la operación efectuada con el dibujo, se aprecia una correspondencia.

Cuando se le pregunta explícitamente por la estrategia empleada para responder, Camilo afirma que debe multiplicar, y enuncia de manera verbal otra secuencia con la que funciona la estrategia que ha propuesto, y así justifica la estrategia que empleó para responder este numeral.

> Digamos que usted me dio la posición número siete. Entonces, yo multiplico la posición número siete con la cantidad de hexágonos que se están aumentando en cada posición. Por ejemplo, en la primera, digamos que hay dos, y en la segunda, ya hay cuatro. Entonces, mi estrategia sería ir aumentando de dos en dos, en cada posición. Se multiplicaría siete por dos (Entrevista, 17 de octubre, 2014).

En esta respuesta se aprecia que Camilo multiplicó la cantidad correspondiente a la posición pedida y la cantidad correspondiente al aumento que él estableció entre dos posiciones consecutivas. Camilo también informó antes de comenzar la grabación de la entrevista que tomó la decisión de dibujar circunferencias en lugar de hexágonos por lo complicado que sería dibujar los hexágonos que requería la resolución de esta tarea.

Respuestas dadas por David

En el Numeral 1 de la Tarea A, David da indicios de que ha identificado un patrón, a partir de la expresión “hasta el punto [posición] cuatro se hace el mismo proceso y se le añade un triángulo abajo” para sugerir que la secuencia podría continuarse si se añaden figuras de la manera que él lo describe, puesto que él señala con el dedo que debe añadirse al lado derecho, haciendo coincidir uno de los lados. Vale mencionar que David propone dibujar la misma configuración correspondiente a la última posición dada y, a partir de esta, continuar dibujando según el patrón encontrado. El patrón, entendido como el reconocimiento de una regularidad que se puede volver a presentar (Castro, Cañadas y Molina, 2010), es figural porque David señala la forma como deben seguirse añadiendo triángulos para construir otras configuraciones correspondientes a la secuencia, y también es numérico porque David menciona la cantidad de triángulos que deben añadirse entre posiciones consecutivas de la secuencia.

En el Numeral 2 de la Tarea A, David menciona que reproduce la configuración de la cuarta posición, que es la última configuración dada en la secuencia, y luego añade dos figuras para obtener la de la posición cinco, y después añade otras dos para generar la configuración de la posición seis. Esta decisión, de añadir dos figuras por cada posición nueva que quiera dibujar, obedece al patrón numérico que encontró, el cual consiste en añadir dos triángulos a la configuración de una posición, cada vez que quiera representar la siguiente posición. Con relación al aspecto figural, también encontró otro patrón, el cual expresa de la siguiente manera: “Que había un triangulito para arriba y otro para abajo, después al revés, y después otra vez como estaba la primera, y así hasta los otros”. En esta afirmación que David hizo en entrevista se aprecia un patrón de repetición (Queensland Studies Authority, 2005), es decir, David reconoce que hay una unidad conformada por dos triángulos, los cuales se repiten sucesivamente.

En el Numeral 3 de la Tarea A, David encuentra la cantidad de triángulos que conforman las configuraciones de las posiciones 5, 6 y 7, pero cuando se le pregunta por la posición 10 parece que no tiene en cuenta que hay siete triángulos en la posición 7 porque considera esta cantidad de triángulos para referirse a la posición 5, y así responde que la posición 6 tiene diez triángulos debido a la diferencia de tres entre las posiciones cinco y seis, y así va contando de tres en tres hasta la posición 10. Es decir, tuvo en cuenta la diferencia que aparentemente existe entre dos posiciones para inferir una regla de formación, pero desvinculó de la respuesta la diferencia entre las otras posiciones.

En la parte inferior de la Figura 20, se ven dos filas de números; los números de la fila superior hacen referencia a la posición, mientras que los números de la fila inferior hacen referencia a la cantidad de triángulos que, según el estudiante, deberían ir en esa posición. Al final de esta ilustración puede verse la diferencia de tres unidades entre dos posiciones consecutivas.

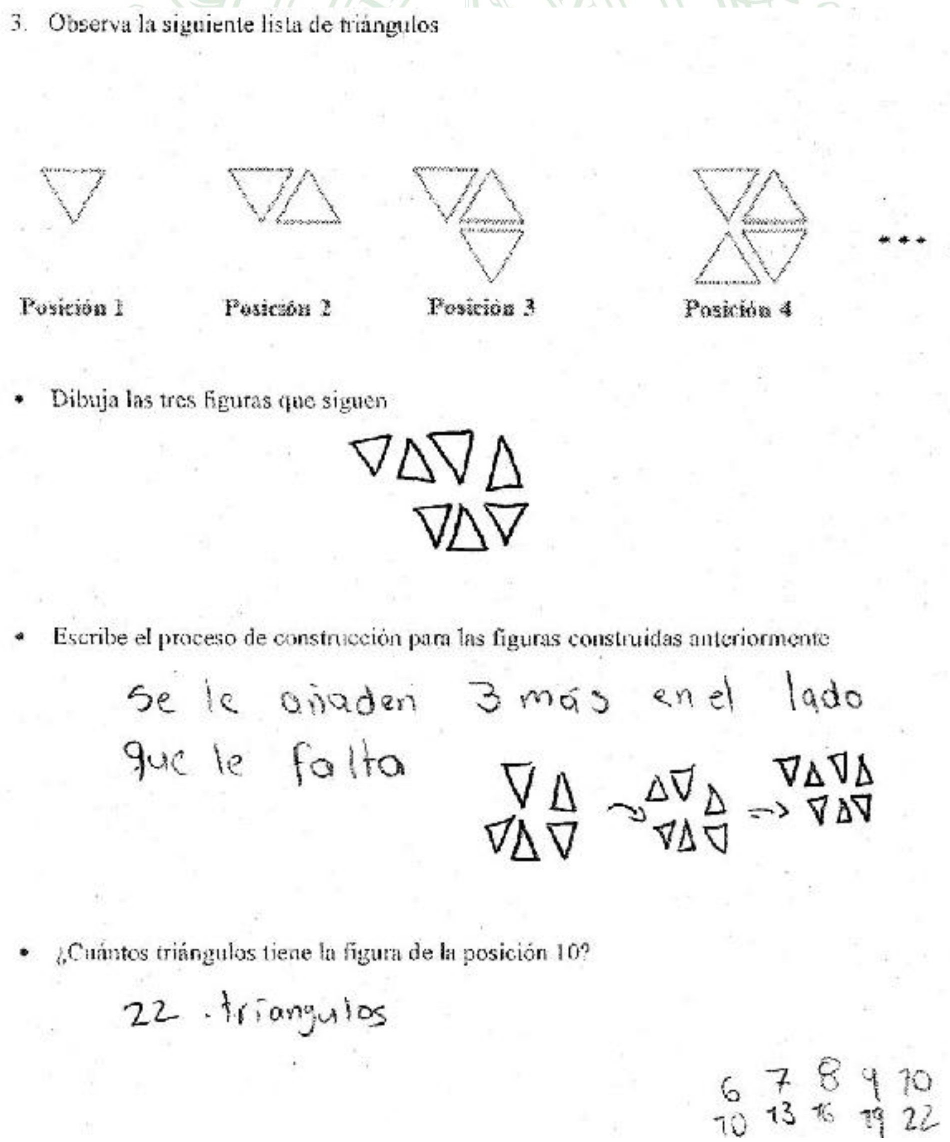
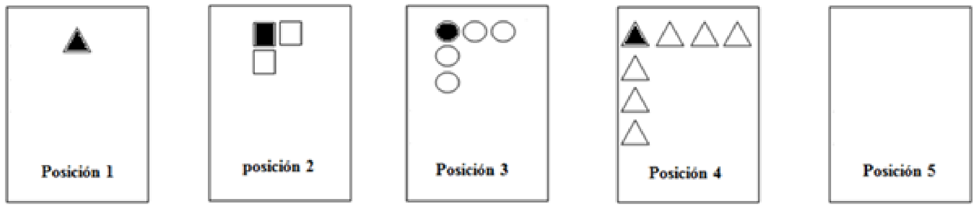


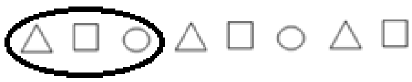
Figura 20. Respuesta de David al Numeral 3 de la Tarea A

En el numeral 4 de la Tarea A, David encuentra una “base”, que en este caso es la figura del extremo superior izquierdo, la cual describe como “figura guía”, y a partir de esta continúa construyendo las demás figuras de la configuración correspondiente a la posición por la que se preguntaba, posición 5, teniendo en cuenta que cada vez había que añadir una abajo y una a la derecha de esa figura guía. También encuentra que hay un ciclo, es decir, cada tres posiciones hay que volver a emplear las mismas figuras para continuar la secuencia. Además, reconoce la cantidad, puesto que menciona que se deben añadir dos figuras cada vez. El estudiante dice que ha construido la figura de la quinta posición con base en las configuraciones expuestas en las anteriores posiciones, y enuncia la regla de formación en esta secuencia. Usa de manera espontánea la regla de recurrencia. Pero dado que pudo responder a partir de las configuraciones que estaban propuestas en la secuencia y no tuvo que pensar en figuras de posiciones más distantes para responder, su inferencia hace referencia a una generalización cercana, que consiste en la identificación de un patrón a partir de una estrategia de conteo, un dibujo o una tabla (Stacey, 1989).A continuación, presento un listado de características identificadas en esta respuesta ofrecida por David.

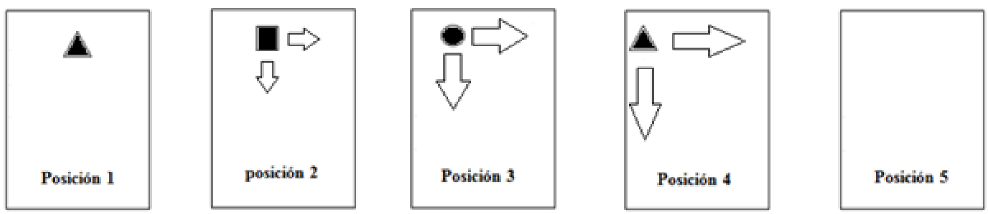
David observó que siempre hay una figura en el extremo superior izquierdo, y las demás figuras deben construirse a partir de esta. La permanencia en ese lugar, puede definirse como un patrón, porque es lo que ha ocurrido con regularidad y se espera que vuelva a suceder (Castro, Cañadas y Molina, 2010).



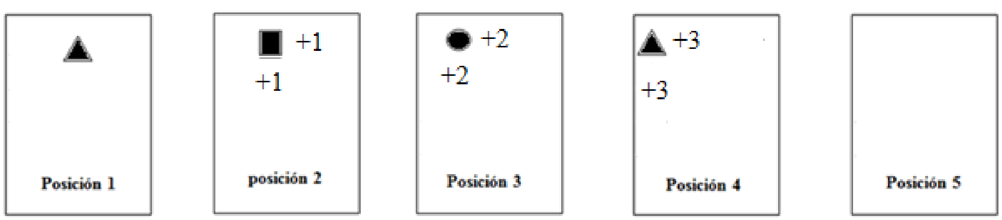
David también observó que en el costado superior izquierdo había un ciclo formado por las unidades figurales *triángulo*, *cuadrado*, *círculo*, las cuales deben seguirse ubicando en ese orden en las siguientes posiciones de la secuencia.



Además, David observó que hay que adicionar hacia debajo y hacia la derecha, con respecto a la figura que invariantemente estará en el extremo superior izquierdo.



David observó que, a la configuración anterior, hay que adicionar dos figuras, una hacia abajo y una hacia la derecha. El patrón aquí podría considerarse en "dos dimensiones" pues se deben agregar figuras en posiciones diferentes.



Estas características permiten inferir que David ha identificado patrones, porque reconoce el cambio y la permanencia de características entre las configuraciones mostradas en la secuencia. Además, él hace una generalización *cercana* (Stacey, 1989) porque se basa en las figuras mostradas para construir las configuraciones siguientes a partir de una estrategia aditiva, y del reconocimiento de la manera en que deben disponerse las figuras.

El problema fenomenológico (Radford, 2013) es un problema que está relacionado con la atención que prestan los estudiantes sobre los objetos. En el caso de David, la atención estuvo tanto en el aspecto figural como en el numérico, en el sentido que él continuó la secuencia según la disposición de las figuras y la cantidad que debía añadir para hacer una configuración.

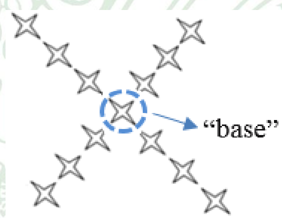
Además, estos aspectos –figural y numérico- se hicieron presentes en la identificación de invariantes y características cambiantes, no solo en cada configuración por separado, sino también entre estas.

En el Numeral 1 de la Tarea B, David encontró una base, es decir, una figura presente en todas las configuraciones, y a partir de esta encuentra que debe adicionar cierta cantidad (Tabla 22). Como piden dibujar la configuración de la tercera posición, adiciona cierta cantidad (dos estrellas en cada una de las cuatro esquinas que supone) a la base que ha identificado.

Tabla 22. Respuesta de David al Numeral 1 de la Tarea B

Número de la posición	Descripción
Posición 1	David afirma que la configuración de la primera posición se presenta en las demás configuraciones de la secuencia, y a partir de esta deben construirse las otras configuraciones de la secuencia. 
Posición 2	A partir de la configuración de la primera posición, hay que adicionar una estrella en cada una de las cuatro esquinas. 
Posición 3	Respuesta de David

Posición 4 — A partir de la configuración de la primera posición, hay que adicionar tres estrellas en cada una de las cuatro esquinas.



David explica su respuesta a partir del reconocimiento de una figura que siempre encuentra en las configuraciones y que en otras sesiones de entrevista llama "base", y teniendo en cuenta esta figura, ubica las demás.

En el Numeral 2 de la Tarea B, David encuentra que se indaga por la primera posición, la cual era fundamental en la estrategia que había empleado hasta el momento; estrategia que consiste en usar la configuración de la primera posición como base, para determinar la cantidad que debe adicionarse a partir de esta. David reconoce que se equivocó en el primer intento porque él dibujó una configuración que tuviera menos figuras que la segunda posición, por ejemplo tres figuras, y a partir de esta, verificó que entre posiciones consecutivas se aumentara la misma cantidad. Al apreciar que esta cantidad no servía para tal fin, dibuja otra cantidad, por ejemplo una figura, y vuelve a verificar.

Esta estrategia que consiste en buscar una configuración que se ajuste a la secuencia, según el aumento constante entre posiciones consecutivas, luego de verificar con las posiciones consecutivas que presenta la secuencia, le sirve para conocer la configuración correspondiente a la primera posición, aunque tuvo que intentar varias veces. En esta respuesta se aprecia una generalización disyuntiva (Zazkis y Liljedahl, 2002) porque David empleó una estrategia diferente a la propuesta inicialmente para responder la tarea, ya que se pudo dar cuenta que no era suficiente hacer una configuración que tuviera menos figuras, puesto que la cantidad de figuras también importa para asignar una configuración a la posición pedida.

En los Numerales 1, 2 y 3 de la Tarea C, David explícita que la base siempre se identifica en la configuración correspondiente a la primera posición de la secuencia: "[…] porque la posición uno es la base. La posición uno siempre va a ser la base […]. Pues, es como el principio de todo. Entonces, ya la posición dos es cuando se le va aumentando un poquito más" (Entrevista, 26 de septiembre, 2014). En esta declaración, se aprecia la manera en que David usa la base para ordenar configuraciones en secuencias presentadas.

Para David, la base funciona como un patrón porque todas las configuraciones la contienen y es a partir de esta que se generan las demás. La base se asume como patrón en cuanto a la cantidad de figuras que la conforman, y en cuanto a la disposición de esta, porque se fija en un lugar, y las demás se adicionan con respecto a esta. Para ordenar, entonces, se tiene en cuenta la base y, además de esta, el aumento constante en la secuencia que tiene un comportamiento creciente.

En los Numerales del 4 al 9 de la Tarea C, David afirma que pudo diferenciar entre las configuraciones correctas y las incorrectas en cada una de las secuencias presentadas porque comparó la que él creía que estaba incorrecta con cada una de las otras, y encontró una característica que no concuerda con las características que presentan las demás. Por ejemplo, en el Numeral 4 encontró que había una figura que solo aparecía en una configuración, y por tal motivo, esta era la incorrecta; en el Numeral 5 encontró que están las mismas figuras, pero en una configuración hay una figura en una disposición diferente, y por esto, se eligió como la incorrecta; en el Numeral 6, encontró que el aumento de figuras se hace en una dirección (hacia el lado derecho), pero en una configuración aparece en otro (hacia arriba), y así determina la incorrecta; en los Numerales 7 y 9, la cantidad de figuras que se va aumentando, le permite decidir acerca de la configuración que no corresponde en cada una de estas secuencias; y en el Numeral 8, supone que la primera configuración mostrada (de izquierda a derecha) es la base, por tener la menor cantidad de figuras, pero al compararla con las demás, esta base no está en una de las configuraciones, y entonces asume que la que había supuesto inicialmente como la base es la incorrecta, así pues, la presencia de la base en todas las configuraciones es una característica de las secuencias. Se le recuerda al lector que para David todas las secuencias tienen una base, con respecto a la cual se forman las configuraciones siguientes, y por esto siempre hay una primera posición (o base), en una secuencia.

En el Numeral 1 de la Tarea D, David propone que la configuración, de la posición por la cual se indaga, contiene en cada extremo (verticalmente) y en la parte interior (horizontalmente) la cantidad de "palos" que indica la posición, y adicionalmente 3 "palos" que conforman el triángulo que va en la parte superior. Esta respuesta se verifica cuando se le pregunta por otra posición, y responde con esta estrategia mencionada. La Figura 21 muestra la operación efectuada por David para responder la cuestión planteada en este numeral.

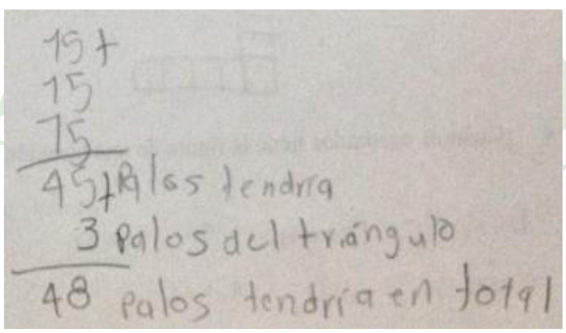


Figura 21. Respuesta de David al Numeral 1 de la Tarea D

La representación simbólica se refiere a la notación numérica, en la cual se escriben números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático (Merino, 2012). Un ejemplo de este tipo de representación puede verse en el algoritmo escrito por David.

En el Numeral 2 de la Tarea D, David emplea una estrategia similar a la expuesta en la respuesta del Numeral 1, puesto que adiciona según la posición pedida. Al identificar la base, identifica la cantidad que debe adicionar, y la manera en que debe adicionar; estableciendo una correspondencia entre posición dada y cantidad de estrellas que debe adicionar en cada uno de los cuatro costados. David afirma que la base se encuentra en el centro, y la adición se hace tomando como referencia esta figura. Sin embargo, no adiciona la figura que conforma la base, y por este motivo obtiene la respuesta que se muestra en la Figura 22.

Figura 22. Respuesta de David al Numeral 2 de la Tarea D

En el Numeral 3, David emplea la misma estrategia que utilizó para responder en los numerales anteriores de esta tarea. Aunque no lo menciona, se aprecia que adiciona figuras con respecto a la base. Además, suma dos cuadrados, aunque menciona que suma uno, porque este "sumar uno" significa "sumar uno a cada lado: hacia arriba y hacia la derecha" (Figura 23).

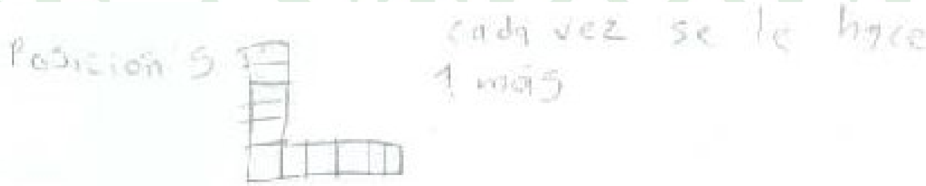


Figura 23. Respuesta de David al Numeral 3 de la Tarea D

En el Numeral 4 de la Tarea D, como David asume que siempre debe sumar cinco, multiplica la posición pedida por cinco. David afirma que la multiplicación le permite responder "más rápido" por la cantidad de hexágonos en una posición pedida. En este caso, David reconoce que al sumar varias veces la misma cantidad, puede multiplicar. En esta estrategia, David relaciona la suma constante con la multiplicación porque dice "cada vez, se va sumando cinco", y efectúa tal operación.

En la entrevista David responde que la figura principal, es decir, la primera posición, tiene siete hexágonos por ser la base. A partir de esta configuración, adiciona cinco por cada posición, hasta construir la configuración de la séptima posición. Como no hay una conservación de la disposición en este dibujo, David dibuja 35 circunferencias, siendo coherente con la operación que propone posteriormente para determinar la cantidad de figuras que corresponden a la configuración de una posición cualquiera, pero no es coherente con la cantidad que sugiere adicionar cada vez.

Respuestas Dadas por Lucía

En el Numeral 1 de la Tarea A, Lucía reproduce la configuración expuesta en la posición 4 y agrega un triángulo en el costado izquierdo porque "yo miré, y acá en la secuencia se agregaba un triángulo, pero variando de lados […]". Lucía sugiere que se puede continuar construyendo la secuencia si se agrega una vez al lado izquierdo, la siguiente al lado derecho, después al lado izquierdo, nuevamente al lado derecho, y así sucesivamente. Para el Numeral 2 de esta tarea, también propone esta estrategia, pero adicionando dos triángulos cada vez. Al emplear esta estrategia, da la misma respuesta que los otros tres niños en cuanto a lo numérico, sin embargo difiere en el dibujo que hace.

En el Numeral 3, Lucía adiciona un triángulo por cada nueva posición que quiera construir. Al llegar a la posición 6, aprecia una configuración cerrada (Lucía menciona que tiene forma de “florecita”) pero no concluye en esta posición, sino que continúa al costado derecho, y sugiere que debe seguirse adicionando en este costado. La explicación de Lucía se fundamenta en el patrón que encuentra en la configuración que va obteniendo, al mencionar el patrón: triángulo, cuadrado, círculo. El siguiente episodio (Entrevista, 19 de septiembre, 2014) da cuenta de este aspecto.

> En la cuarta, uno sigue la secuencia. Vea, primero muestran un triángulo [posición 1], luego cuadrados, sumando dos cuadrados [posición 4], luego círculos [posición 6], y luego triángulos [posición 7]. Entonces, lo que seguiría serían cuadrados, agregándole dos triángulos.

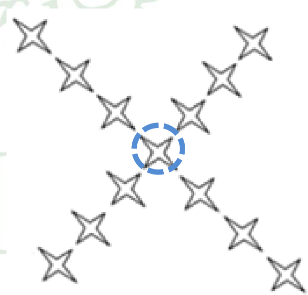
El anterior episodio se vincula con un patrón de repetición, entendido como la presencia de una lista de elementos que se repiten periódicamente en la secuencia (Queensland Studies Authority, 2005). El patrón, en este caso, son las figuras: triángulo cuadrado, círculo, y corresponden a la forma visual que van adaptando las configuraciones presentadas en la secuencia.

En el Numeral 4 de la Tarea A, Lucía encuentra otro patrón de repetición entre las figuras: triángulo, cuadrado, círculo; y un patrón de crecimiento: agregar dos figuras por cada posición. Lucía hace esta adición en lugares específicos de la configuración (abajo y en la derecha de una figura, la cual está en la parte superior izquierda). A diferencia del patrón empleado para responder el numeral anterior, en este numeral el patrón corresponde a la figura que debe agregarse por cada nueva posición que se desee construir.

En el Numeral 1 de la Tarea B, Lucía afirma que suma cuatro figuras a la configuración de la segunda posición, para obtener la tercera posición. Lucía descubre que debe sumar cuatro porque esta es la cantidad de figuras de más que hay en la posición 2 con respecto a la posición

1. Al agregar 4 figuras, afirma que tiene 9 en la tercera posición, y la posición 4 le sirve para verificar que en esta posición hay 4 figuras más que en la posición 3. Además, afirma que "[…] si en la posición dos hay cuatro, y en la posición cuatro hay trece; entonces, eso me dice que sumó ocho más. Entonces, ya en la anterior, debe haber cuatro más, en vez de ocho". Esta respuesta está relacionada con la flexibilidad (Molina, 2011; Callejo y Zapatera, 2014) porque Lucía compara las posiciones para las cuales conoce la cantidad de figuras (posiciones 2 y 4), y para determinar la cantidad de figuras de una posición intermedia (posición 3) se basa en la cantidad que debe adicionar desde la segunda posición, para obtener la tercera posición. Pero también menciona la diferencia, es decir, la cantidad de figuras de más que hay en la posición 4 con respecto a la posición 3. La flexibilidad se identifica cuando Lucía no necesariamente emplea la estrategia de sumar, al comparar de izquierda a derecha; puesto que también puede emplear la estrategia de restar, al comparar de derecha a izquierda (Tabla 23).

Tabla 23. Respuesta dada por Lucía al Numeral 1 de la Tarea B

Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4
	 "En la posición dos habían cuatro más".	 Lucía: Yo me di cuenta que en la posición tres tenían que haber nueve. Investigador: ¿Si, y cómo? Lucía: Porque sí. Porque sumando, cinco más cuatro, es nueve.	 En la posición uno había uno, en la posición dos habían cuatro más. O sea que habían ya cinco. Y en la posición cuatro habían trece (…)

En este numeral, Lucía relaciona cantidades porque reconoce que entre la posición dos y la posición cuatro hay ocho círculos, y entonces en la posición tres, que está en medio, debería haber cuatro. Esta es otra conjetura que le permite afirmar que se han sumado de a cuatro.

En el Numeral 2 de la Tarea B hay indicios de un proceso reversible, porque se preguntaba por la configuración de la posición 1, y Lucía respondió "En el segundo punto yo nada más hice una cruz porque aquí se muestra que nada más se suman tres, cada posición. Entonces, cuatro menos tres, es uno" (Entrevista, 23 de septiembre, 2014). Lucía aprecia que entre las posiciones consecutivas dadas, se suman tres figuras, entonces decide restar esta cantidad a la configuración de la segunda posición, para obtener la cantidad correspondiente a la primera posición.

Los Numerales 1, 2 y 3 de la Tarea C pedían organizar secuencias a partir de la asignación de una posición para cada configuración. Cuando se le pregunta por la manera de responder, Lucía afirma que tuvo en cuenta "El conteo de los círculos. El que hubiera menos círculos, sería la primera. El de más, la segunda. El de más, la tercera. El de más, la cuarta. Y así" (Entrevista, 26 de septiembre, 2014). Lucía cuenta las figuras de cada configuración, y les asigna una posición a partir de un ordenamiento de menor a mayor.

En los Numerales del 4 al 9, Lucía menciona diversas características que tuvo en cuenta para determinar la configuración que no correspondía a cada secuencia. En el Numeral 4 menciona que había una figura diferente "la estrella", es decir, que no se presentaba en alguna de las otras configuraciones. En el Numeral 5 afirma que había una figura que tenía una disposición diferente "[…] porque todos estaban mirando pa´ arriba, y ese estaba mirando pa´ un lado". En el Numeral 6 dice que había una configuración cuyas figuras tenían una orientación diferente, es decir, los cuadrados en esta secuencia aumentaban hacia un lado, pero en la configuración errónea aumentaban hacia arriba. En el Numeral 7 manifiesta que tiene dudas porque eligió la primera configuración de la secuencia dada, por no tener la forma que tienen las demás, sin embargo advierte que esta podría ser correcta en el caso de ser la primera de la secuencia. En el Numeral 8 afirma que la primera configuración parece que fuera hacia un lado mientras que las otras van hacia arriba. En el Numeral 9 aprecia que solo en una configuración hay dos círculos centrales consecutivos, y por este motivo elige tal configuración como la incorrecta.

En el Numeral 1 de la Tarea D, Lucía afirma que pudo responder por la posición pedida, posición 14, a partir del dibujo correspondiente a tal posición, y sugiere que es posible responder sin dibujar, pero que sería más difícil porque habría que sumar tres unidades, de forma sucesiva, la cantidad de veces que sea necesario, hasta la posición pedida.

En el Numeral 2 de la Tarea D, Lucía menciona que siempre adiciona de a cuatro, y hace un ajuste que consiste en adicionar uno a cada múltiplo de cuatro, para determinar la cantidad, en una posición pedida. Lo cual sugiere el algoritmo 4n+1 porque reconoce:

> El segundo, yo sí la hice en la mente, aunque fue muy larga. Pero yo la hice en la mente. Y tendría cincuenta y siete estrellas porque, a cada posición, se le suman cuatro […]. Que, si en la posición uno hay cuatro; en la dos, hay ocho; en la tres, hay doce; en la cuatro, así. Con la tabla del cuatro, hasta llegar.

Esta respuesta sugiere que Lucía usa la tabla multiplicativa del cuatro, hasta multiplicar el 4 por la posición pedida, y al final adiciona uno más, realizando un proceso como el siguiente: 4 x 1 = 4; 4 x 2 = 8; 4 x 3 = 12;…; 4 x 14 = 56; 56 + 1 = 57. En esta respuesta, se encontró que Lucía hizo una generalización lejana (Stacey, 1989)porque empleó una estrategia multiplicativa para determinar la cantidad de figuras que habrían en una posición pedida, sin necesidad de acudir a dibujos o a un conteo sucesivo para representar la respuesta posición por posición, sino que propuso una operación a partir de la cual se puede encontrar la cantidad de figuras de cualquier posición.

En el Numeral 3 de la Tarea D, Lucía Muestra que hay un cambio vertical y un cambio horizontal, para explicar la formación de la figura en cada posición de la secuencia. Es decir, reconoce un cambio en dos direcciones (hacia arriba y hacia el lado derecho).

En el Numeral 4 de la Tarea D, Lucía dibuja la cantidad de hexágonos correspondiente a la séptima posición, conservando la forma y la cantidad de figuras que se pedía en la tarea. Sin embargo, la cantidad de figuras dibujadas no coincidiría con la cantidad determinada numéricamente para configuraciones correspondientes a posiciones lejanas, es decir, que no podrían construirse de manera inmediata, a partir de recurrencia (Stacey, 1989). Cuando se le preguntó por la posición 40, se aprecia que Lucía se fijó en la cantidad de hexágonos que hay en la cuarta posición de la secuencia dada, y luego multiplica esta cantidad de hexágonos por diez, afirmando que, para la posición cuarenta, debe tener en cuenta que cuarenta es igual al producto entre cuatro (posición) y diez (cantidad de veces que debe contar cuatro para obtener cuarenta). Esta correspondencia entre una posición considerada por Lucía y la cantidad de veces que debe multiplicarse dicha posición para obtener la posición pedida, permite suponer que esta niña generaliza que debe efectuar una multiplicación (multiplica la cantidad de figuras presentes en una configuración correspondiente a una posición dada en la tarea o que puede dibujar fácilmente, y otro factor) para determinar la cantidad de hexágonos que habría en alguna posición pedida en la secuencia.

La respuesta de Lucía en el Numeral 4 de la Tarea D muestra que el aspecto figural no necesariamente está vinculado con el aspecto numérico en la construcción de secuencias, cuando se trata de configuraciones correspondientes a posiciones lejanas en la secuencia. Esto tal vez se debe a que no se verifica la regla de formación enunciada verbalmente con el dibujo, que no se hace por lo dispendioso que le resulta al estudiante.

Respuestas dadas por Jhony

En el Numeral 1 de la Tarea A, Jhony afirma que a medida que aumentan las posiciones, también aumenta la cantidad de triángulos en cada configuración. Sugiere que debe aumentarse un triángulo por cada posición, al enunciar una a una las posiciones con su respectiva cantidad de triángulos. Además, menciona que deben añadirse uno al derecho y otro al revés, y nuevamente uno al derecho, y luego otro al revés, con lo cual se puede apreciar el ciclo que identifica. De esta manera, Jhony sugiere que puede continuarse construyendo la secuencia, con estos dos aspectos: cantidad de triángulos por añadir y forma en que se debe añadir.

En el Numeral 2 de la Tarea A, Jhony afirma que le pareció más complicado que el numeral anterior, porque no indagaban por la posición siguiente, sino por una posición más lejana. Entonces, afirmó que se tuvo que "imaginar" la que iba en la quinta posición, y a partir de esta dibujó la sexta. Jhony afirma que por cada posición se van aumentando de a dos triángulos, y encontró un patrón de repetición en cuanto a la forma como deberían añadirse, porque dice: "[…] quedaban punta con punta, y al revés; punta con punta, al revés" (Entrevista, 19 de septiembre, 2014). Después menciona que aumentó triángulos "al derecho" en la poción 5, y para la posición 6 ya había dicho que quedaban "punta con punta".

En el numeral 3 de la Tarea A, Jhony afirma que hasta la posición seis hay un incremento constante de un triángulo por cada posición, pero hay una posición en la cual se construye la última configuración conocida para él, y dice que no sabía dónde ubicar la siguiente, es decir, reconoce que hay que seguir añadiendo pero también reconoce que "[…] en la posición siete no supe en qué lugar iba" (Entrevista Jhony, 19 de septiembre de 2014), aquí se está refiriendo al séptimo triángulo que sabe que debe ubicar, pero no sabe dónde, y por este motivo no construyó la configuración correspondiente a la séptima posición. Aquí cobra importancia la disposición de cada figura como una condición necesaria para continuar la secuencia.

En el numeral 4, Jhony se refiere al orden en el cual se presenta el cambio entre las figuras: triángulo, cuadrado y círculo, para las posiciones 1, 2 y 3 respectivamente, lo cual justifica que en la posición cinco haya que dibujar cuadrados. Además, en la continuación de esta secuencia hay una noción de orden en cuanto al aspecto numérico cuando se deben aumentar dos figuras por cada posición, como lo manifiesta el estudiante tanto en la respuesta escrita como en la entrevista. A continuación, se expone un fragmento de la entrevista en la cual se menciona el orden en el aspecto figural (Entrevista Jhony, 19 de septiembre de 2014). Pero el asunto del orden se estudió con mayor detalle en otra tarea que fue propuesta posteriormente para tal fin.

> Investigador: ¿Por qué creyó que seguía esa figura?, cuadrados.
> Jhony: Porque, eh, el orden que había era triángulo, cuadro y círculo. En la posición cuatro había triángulo, en la posición cinco seguía cuadrado.

En el Numeral 1 de la Tarea B, Jhony identifica que hay que adicionar una estrella por cada una de las cuatro esquinas que menciona, identifica el lugar dónde debe adicionar a partir de la forma a la cual asocia la configuración "[…] Las estrellas iban formando como una forma de equis, y yo pude notar que, se, en cada esquina como que se iba formando una estrella más"(Entrevista, 23 de septiembre, 2014), identifica que esa adición debe hacerse con respecto a la primera posición (base). Adicionalmente, Jhony verifica la configuración que elabora para la tercera posición, apoyándose en la cuarta configuración. Asegurándose de que ha conjeturado de manera coherente con lo que ha supuesto, que es "en cada esquina como que se iba formando una estrella más", es decir, aumentar una estrella en cada una de las cuatro esquinas que ha mencionado. En el siguiente episodio se muestra la afirmación de Jhony, cuando se le pregunta por las posiciones que tuvo en cuenta para responder: "No, también tuve que ver la posición cuatro pa' ver que no se fueran aumentando dos o tres sino que se fuera aumentando una" (Entrevista, 23 de septiembre, 2014).

En el Numeral 2 de la Tarea B, Jhony compara las configuraciones de posiciones consecutivas, y aprecia que en una posición hay tres figuras más que en la anterior, y entonces dibuja una figura en la primera posición, puesto que en la segunda posición hay 4, lo cual permite conservar la relación enunciada como "hay tres más".

En los Numerales 1, 2 y 3 de la Tarea C, Jhony afirma que ordena las configuraciones de cada secuencia, teniendo en cuenta que en otras secuencias ha notado que están ordenadas de menor a mayor, asignando entonces la primera posición a la configuración que menos figuras tiene. Jhony describe la posición de las demás configuraciones a partir de la cantidad que debe añadirse a la configuración correspondiente a la primera posición, para formar la configuración en cuestión.

En los Numerales del 4 al 9 de la Tarea C, Jhony identifica diversas características para seleccionar en cada secuencia las configuraciones que no deberían estar. Por ejemplo, en el Numeral 4 afirma que la figura diferente determinaría la configuración que no debería estar, pero la cantidad de figuras también podría determinar que otra configuración fuera la incorrecta. En el Numeral 5 la disposición diferente de una figura determina la errónea. En el Numeral 6 la orientación vertical de las figuras en una configuración define la incorrecta, porque las otras configuraciones tienen una orientación horizontal. En el Numeral 7 selecciona la configuración en la cual no se adiciona "a los dos lados", mientras que en las otras configuraciones sí. En el Numeral 8 aprecia que hay una figura faltante en una configuración, figura que se presenta en las demás configuraciones. En el Numeral 9 elige la configuración por la forma en la que se adiciona, puesto que en la incorrecta no se adiciona como Jhony describe que debería hacerse, y que se enuncia a continuación: "[…] se iban aumentando tres círculos a la derecha".

En el Numeral 1 de la Tarea D, Jhony respondió dibujando, pero cuando se le preguntó por la forma de responder sin necesidad de hacer el dibujo, propone un enunciado que puede asociarse al algoritmo 3n+2: 3(15)+2, siendo menester mencionar que tal vez no contó el segmento que formaba el triángulo o el horizontal de la parte inferior (Entrevista, 17 de octubre, 2014).

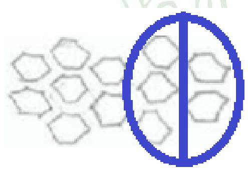
> La posición que fuera, tenía a un lado…, tenía ese…, la posición que fuera, tenía esa cantidad de palos. Entonces, multiplicaría la posición por dos. O por tres por, también, las que están en el medio. Y ya, y le sumaría los dos que forman como el triángulo de arriba.

En el Numeral 2 de la Tarea D, Jhony verificó el cumplimiento de la regla de formación que enuncia y que puede asociarse a la representación simbólica 4 x n + 1 en las configuraciones de las posiciones dadas inicialmente, al responder "Porque ya lo había hecho en las otras, en las más fáciles, y sí me daba" (Entrevista, 17 de octubre, 2014). En este caso, la base (una estrella en el centro) le sirvió para adicionar esa cantidad al resultado de multiplicar tantas veces (en este caso, 14) por la cantidad que se incrementa cada vez (es decir, 4). En la respuesta escrita se aprecian estas operaciones que realiza.

En el Numeral 3 de la Tarea D, Jhony asocia cada configuración con una forma, y a partir de esta forma encuentra que hay un cambio "En la tercera, era como una [letra] ele, que mientras va aumentando la posición, se le va formando un cuadrito a cada lado", y la forma como se presenta este cambio "Era como una [letra] ele. A la parte de arriba. Horizontalmente y verticalmente". En estos episodios se aprecia que Jhony aumenta en dos direcciones, además hay una correspondencia entre la cantidad de cuadrados que debe adicionar (vertical u horizontalmente) y la posición de la figura, y sugiere que hay que adicionar conservando la figura (letra ele) y teniendo en cuenta el cuadrado que queda fijo en el extremo inferior izquierdo.

La Tabla 24 muestra la respuesta de Jhony en el Numeral 4 de la Tarea D. Jhony afirma que ve dos columnas de hexágonos en cada posición nueva que se va construyendo. En la Figura 8 se resaltan las dos columnas que Jhony menciona. Jhony afirma que por cada posición hay que aumentar cinco hexágonos.

Tabla 24. Representación pictórica de Jhony en el Numeral 4 de la Tarea D

Dibujo de Jhony correspondiente a la configuración de la séptima posición			
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4
			
Posición 7			
			

> Investigador: Ah, listo. Sigamos entonces con la última ¿Cómo se sintió haciendo esta?
> Jhony: Esta también fue fácil, pero lo difícil era dibujar tantos hexágonos. Vi que se iban formando, mientras aumentaba la posición, se aumentaban cinco hexágonos: dos y tres, dos y tres, de a filas de dos y tres.

De no ser por la entrevista, la respuesta escrita en la pregunta por la cantidad de hexágonos en la posición 30, el autor no podría hacer aseveraciones al respecto, como puede apreciarse en la Figura 24. Aunque, en el siguiente ítem responde que “el número de la posición se multiplica por 5 y se le suma 2”, lo cual amplía en la sesión de entrevista. En este caso, Jhony expresa con palabras las operaciones que debería efectuar. De acuerdo con Merino (2012) la representación verbal es una forma de exponer la información mediante el uso de un lenguaje natural.

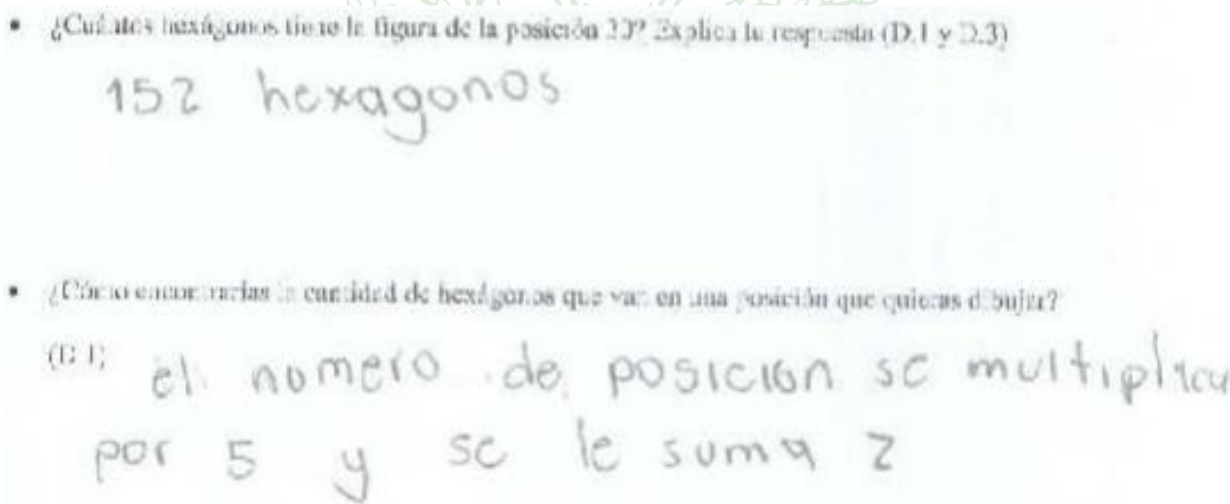


Figura 24. Respuesta verbal de Jhony en el Numeral 4 de la Tarea D

> Investigador: Ah, listo. Entonces, ¿cómo dio la respuesta de la posición treinta?
> Jhony: Ah. La posición treinta, lo multipliqué. Multipliqué, cinco, cinco por treinta y le sumé los dos que tenía al comenzar.
> Investigador: Ah. Entonces, si yo le preguntó por la posición noventa ¿usted qué hace?
> Jhony: Pongo noventa por cinco, que nos daría cuatrocientos cincuenta, y le sumo dos, cuatrocientos cincuenta y dos.
> Investigador: Ah, ya. Me recuerda porqué es que multiplica por cinco.
> Jhony: Porque, mientras aumentaba la posición, aumentaban cinco hexágonos.

Cañadas (2007) afirma que en las escuelas y en los libros de texto hay una tendencia de trabajar las progresiones en el sistema de representación numérico, y tal vez por este motivo los estudiantes presentan respuestas numéricas de manera simbólica con mayor frecuencia que de manera verbal o gráfica. Sin embargo, Jhony provee una respuesta verbal tanto en la tarea escrita como en la entrevista. Vale mencionar que una respuesta verbal puede ser oral o escrita, en este último caso se considera también como una representación verbal.

Categorías emergentes

A manera de recapitulación se recuerda al lector que, en el primer apartado se presentaron categorías que surgieron del análisis macro de todas las tareas en conjunto, mediante agrupaciones diversas. La más robusta de tales agrupaciones se escogió y se presentó en el primer apartado. En el segundo apartado se comentaron todas las respuestas agrupadas por niño.

Ahora, en este apartado se presentan seis categorías que surgieron del análisis realizado en los dos Apartados Anteriores. Estas categorías se han denominado: Reconocimiento de una base, Desconfiguración y Reconfiguración, Relación numérico-figural, Verificación del cumplimiento de la regla de formación enunciada, Cierre de configuraciones, y Reversibilidad en la generalización. Estas categorías se obtuvieron mediante una triangulación independiente entre dos investigadores.

Reconocimiento de una base

La base es la configuración a partir de la cual se supone que se han construido las demás configuraciones de la secuencia. Por esta razón, la base debe estar presente en cada una de las configuraciones de una secuencia. La identificación de la base permite ordenar configuraciones en una secuencia, a partir de un ordenamiento creciente (David, Numeral 2, Tarea C). A la base se le adiciona una cantidad, asegún la posición pedida, para determinar la cantidad que corresponde a tal posición.

La base puede ser una cantidad constante, que siempre se adiciona para determinar la cantidad de figuras que hay en una posición de la secuencia. La base también puede ser una figura o un grupo de figuras que se presenta en cada una de las configuraciones que conforman la secuencia.

Desconfiguración y reconfiguración

La desconfiguración es la descomposición de una configuración en partes de ser susceptibles de ser estudiadas como patrones de repetición o patrones de crecimiento.

La reconfiguración es la agrupación de partes en una configuración susceptible de ser estudiada como un todo en la secuencia.

Relación numérico-figural

Esta relación consiste en el reconocimiento de una operación que permite encontrar la cantidad de configuraciones que hay en cualquier posición de la secuencia. Las operaciones que efectuaban los estudiantes son de diversos tipos:

- Multiplicación entre el patrón de crecimiento (cantidad que se adiciona entre posiciones consecutivas) y la posición pedida.
- Multiplicación (operación descrita en el párrafo anterior) y adición de la base (como cantidad constante).
- Multiplicación entre la cantidad de configuraciones que hay en una posición elegida (habitualmente es una de las configuraciones de la secuencia dada) y la cantidad de veces que debe multiplicarse la posición elegida para generar la cantidad correspondiente a la posición pedida (este segundo factor es el cociente entre la posición pedida y la posición elegida, cociente que se caracteriza por ser un número entero).
- Suma de las cantidades de figuras que resultan en cada una de las partes que se han generado tras hacer una desconfiguración.
- Adición sucesiva de una cantidad (que se ha encontrado entre las posiciones consecutivas que se han dado en la secuencia), hasta la posición pedida.

Verificación del cumplimiento de la regla de formación enunciada

- Ejemplos parecidos, con los cuales se cumple la regla de formación enunciada (por ejemplo, 2, 4, 6,… 2Xn).
- Correspondencia entre cantidad de figuras del dibujo y cantidad que resulta de aplicar un algoritmo (Fijarse en alguna configuración dada en una secuencia, y aplicar la regla).
- Empleo de otra estrategia (conteo sucesivo, y tablas de multiplicar. De las dos formas da).
- Cambio constante identificado entre configuraciones correspondientes a posiciones consecutivas de la secuencia (Ver respuesta de David, en el Numeral 2 de la Tarea B).

Cierre de configuraciones

El cierre de configuraciones consiste en adicionar figuras, a una configuración determinada, hasta apreciar una figura cerrada que pueda parecerse a una circunferencia (Numeral 8 de la Tarea C). El obstáculo que encuentran algunos niños para continuar secuencias a partir de esta generalización consiste en la incertidumbre que afirman tener al no decidir por el lugar en el cual seguirían adicionando.

Reversibilidad en la generalización

Este proceso hace parte de la flexibilidad en la generalización. Así como encuentran las configuraciones de posiciones sucesivas, también lo hacen cuando se les pide las configuraciones antecedentes.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

En las respuestas ofrecidas por los niños se aprecia que hay patrones en la identificación de un cambio constante al reconocer que hay aumento constante entre términos consecutivos de la secuencia. Esto se aprecia en la operación realizada, por ejemplo, la adición sucesiva o la multiplicación por cinco que mencionan los niños participantes de la investigación. Además, se aprecia una invariante, es decir, la cantidad que dos de los niños sumaban después de realizar la multiplicación, independiente de la posición por la que se preguntaba. Aunque los niños no emplean estas denominaciones -cambio constante, adición sucesiva, invariante-, se reconoce en su verbalización.

Los niños hicieron una generalización lejana al responder por la manera en que determinarían la cantidad correspondiente a una posición cualquiera. La generalización de este tipo se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere (Stacey, 1989).

Además, en este trabajo puede apreciarse que los cuatro niños dieron cuenta de una generalización teórica (Dörfler, 2008) que consiste en ampliar la cantidad de casos a los que se refiere -posiciones en la secuencia- para responder, sin necesidad de apoyarse en conteo sucesivo o construcción de dibujos.

Los participantes de esta investigación presentaron una generalización lejana (Stacey, 1989) en la cual se emplea una regla de formación que permite calcular, de forma inmediata, el término de cualquier posición de la secuencia. Por ejemplo, Camilo afirma que debe multiplicarse la posición pedida por la cantidad correspondiente al incremento constante; mientras que Jhony afirma que además de tener en cuenta el incremento constante que expresaron como una multiplicación, también había que considerar la cantidad que siempre había que adicionar a tal multiplicación; y Lucía empleó una estrategia que consiste en expresar la cantidad de figuras que debería tener la posición pedida como el producto entre la cantidad correspondiente a una posición conocida para ella y el factor por el cual se obtiene la posición pedida en la tarea.

El interés del investigador en las respuestas ofrecidas por los estudiantes David, Camilo, Jhony y Lucía, ante las tareas propuestas, ponen de manifiesto que esta investigación tiene una perspectiva de *generalización en educación matemática* (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008), donde se valora la exploración de patrones y la consideración de nuevos casos en esta exploración, a partir de una regla, que no necesariamente coincide con el simbolismo convencional y que no necesariamente incluye todos los casos posibles en la construcción de la secuencia, puesto que algunas respuestas contenían expresiones pictóricas y otras tenían expresiones verbales, y de este modo la generalización no se reduce a la expresión formal, sino que atiende también a otro tipo de expresiones que denotan propiedades relativas a las configuraciones expuestas en la tarea.

Con relación a las formas de expresión, empleadas por los estudiantes para responder esta tarea, Cañadas, Castro y Castro (2008) reportan que la generalización verbal cobra importancia sobre otras formas de expresión de la generalización en los primeros grados. De acuerdo con Radford (2013), el problema semiótico de la generalización de patrones está vinculado con la denotación del objeto, denotación que puede tomar varias formas de representación, como efectivamente lo exponen los estudiantes analizados. Adicionalmente, Radford (2013) plantea que la generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación.

Estas tareas, permitieron identificar que los estudiantes generalizan patrones lineales a partir de diversas estrategias. Algunos, por ejemplo, identificaron un incremento constante, otros emplearon las tablas de multiplicar y otros establecieron una razón de cambio. De estas estrategias empleadas, aunque no necesariamente conducían a una respuesta correcta, se puede inferir que los estudiantes analizados generalizan patrones lineales, pero es necesario recordar que no había un interés en que los estudiantes nombraran los patrones como *lineales*, sino que hicieran mención de algunas características de estos, y así lo hicieron.

En cuanto a la naturaleza de la generalización producida (Zazkis y Liljedahl, 2002; Dörfler, 2008), los estudiantes analizados hacen una *generalización empírica* porque recurrieron a una estrategia considerada por ellos mismos -conteo, adición sucesiva, multiplicación sucesiva- para dar respuesta a la tarea, en vez de emplear una regla de formación asignada para todos los casos y establecida previamente por un referente de autoridad -profesor, libro de texto-. Es decir, estos estudiantes mencionan características que servirían para producir una regla de formación, según la tarea propuesta pero estas características, aunque sean atribuidas a todas las posiciones de la secuencia, no les permitiría responder de inmediato por una posición más distante, debido a la estrategia que emplearon. Además, estos estudiantes se apoyaron en dibujos o listas de números para determinar la cantidad de figuras que habría en una configuración correspondiente a la posición solicitada en la tarea.

Las respuestas dadas por los estudiantes analizados permiten responder la pregunta de investigación, porque se pudo dar cuenta de la generalización a partir de las tareas propuestas, en las cuales se indagó por diversos aspectos.

En cuanto a la forma problemática como la literatura informa que han sido introducidos los estudiantes desde sus primeros grados de escolaridad al estudio del álgebra (Molina, 2006; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012), en cada tarea los niños han razonado algebraicamente a partir de generalización de patrones, donde las secuencias pictóricas son pertinentes para superar esa visión formalista para empezar a estudiar el álgebra.

Cuando a los niños se les preguntaba por las dificultades que habían tenido en la resolución de cada tarea, algunos respondieron que las más fáciles eran aquellas en las que le pedían dibujar. Parece que el apoyo visual le facilitaba a estos niños la resolución de la tarea. En la Justificación Teórica de este trabajo se menciona la importancia de lo figural, en la generalización de patrones. Sin embargo, las tareas de generalización lejana pueden ser tediosas cuando se pida dibujar, como lo menciona Lucía cuando se le preguntó por la Tarea D, en la cual debía dibujar configuraciones correspondientes a posiciones lejanas: “Esta estaba muy larga. Los dibujos muy difíciles” (Entrevista, 17 de octubre, 2014).

En su proceso de generalización, los estudiantes pueden validar sus respuestas cuando vinculan las configuraciones expuestas en la tarea con una regla de formación de patrones que hace referencia tanto a las configuraciones presentes como a las ausentes en la tarea.

La generalización de patrones en los primeros grados de escolaridad puede enfatizar en otros aspectos además de los numéricos: esta es intención del investigador, recurrir a secuencias pictóricas para explorar formas de generalización o maneras de identificar patrones. Interesa conocer que es lo que "brilla" a los ojos de los niños, que aspectos llaman su atención.

En el aspecto numérico, las generalizaciones cercanas invocan estructuras aditivas, las generalizaciones lejanas invocan las estructuras multiplicativas.

Las categorías emergentes *Reconocimiento de una base, Desconfiguración y Reconfiguración, Relación numérico-figural, Verificación del cumplimiento de la regla de formación enunciada, Cierre de configuraciones, y Reversibilidad en la generalización* dan cuenta de las maneras de generalizar patrones por los participantes de esta investigación y constituyen una respuesta para la pregunta de investigación.

Líneas abiertas de investigación

En futuras investigaciones relacionadas con la generalización de patrones lineales, podría indagarse por aquellas secuencias en las cuales se presentan configuraciones constituidas por figuras de diferentes tamaños (las figuras de las tareas propuestas tenían el mismo tamaño), diferentes colores (este aspecto no se consideró), diferente ordenamiento (en esta investigación las configuraciones se daban de izquierda a derecha), u otra característica fenomenológica que no se haya tratado en este trabajo.

Este trabajo de investigación podría ampliarse si se quisiera estudiar la generalización de patrones no lineales. Este estudio podría indagar por las características que consideran los estudiantes para inferir sobre los elementos que seguirían en la secuencia presentada.

Como esta investigación partió de secuencias pictóricas, otros estudios podrían explorar las características que identifican los estudiantes a partir de secuencias numéricas.

Al reconocer que la generalización es una vía hacia el álgebra en los primeros grados de escolaridad, este estudio podría ampliarse al enfatizar en aspectos relacionados con enfoques tales como: las funciones, la modelación, o la resolución de problemas.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anghileri, J. (1995) Children's mathematical thinking in the primary years: perspectives on children's learning. London: Cassell.

Beckmann, S. (2005). *Mathematics for elementary school teachers*.Boston: Pearson.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005).Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36 (5), 412-446. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/30034944

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In Cai, E. Knuth (eds.), *Early Algebraization*, Advances in Mathematics Education. Recuperado de: http://www.springer.com/987-3-642-17734-7

Callejo, M.L., Zapatera, A. (2014). *Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria*, Boletim de EducaçãoMatemática, (28) 48, pp. 64-88. Universidade Estadual Paulista Júlio de MesquitaFilho. Rio Claro, Brasil.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas, *PNA*, *2*(3), 137-151.

Carpenter, T. P., Frankle, M., L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school: Heinemann, Portsmouth, NH. Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary students understanding of the equality sign. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2), pp. 415-422. Bergen, Norway: PME.

Carraher D., Schliemann, A., Brizuela, B. &Earnes, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, 37 (2), 87-115. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/30034843

Castro, W. (2011). Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores (Tesis doctoral: Universidad de Granada). Granada. Extraído de: http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/19656257.pdf

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67. Recuperado de: http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/26079/6/Uno-54-_2010.pdf

del Moral, P. (2012). Unidad didáctica: Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas (Tesis de maestría). Universidad de Granada. Granada.

Derry, S. J., Wilsman, M. J., & Hackbarth, A. J. (2007).Using constrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. Mathematical Thinking and Learning, 9(3): 305-329.

Deslauriers, J. (2004). Investigación cualitativa: Guía práctica. Editorial Papiro: Pereira – Colombia.

Carraher, D., Martinez, M. & Schliemann, A. (2008).Early algebra and mathematical generalization, *ZDM*, 40, 3–22.DOI 10.1007/s11858-007-0067-7.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM*, 40, 143–160. DOI 10.1007/s11858-007-0071-y

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, Rio Claro (SP), 26 (42B), p. 483-511. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/naturaleza_RAE.pdf

Greeno, J. (1991). Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (3), pp. 170-218. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/749074

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving. *Cognition and Instruction*, 6 (3), pp. 223-283.

Hernández R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación (Quinta edición). Mc Graw Hill: México.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The MathematicsEducator 2004, 8 (1), 139 – 151. Recuperado de: http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Carolyn%20Kieran.pdf

Knuth, E. J., Alibali, M., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2006). Does understanding the equal sign matter?Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (4), 297-312.

Lakatos, I. (1981). Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza: España.

Lakatos, I. (1989). *La metodología de los programas de investigación científica*. Alianza: Madrid. Recuperado de: https://postgradoeducacionudobolivar.files.wordpress.com/2008/03/lakatos-imre-la-metodologia-de-los-programas-de-investigacion-cientifica.pdf

Lee, L. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In Berdnarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Kluwer academy publishers: Dordrecht.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relation between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173-196.

Mac Gregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (4), pp. 449-467.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). Rutas hacia/Raíces del Álgebra. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia: Tunja.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea generalización. (Tesis de maestría, Universidad de Granada). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1926/1/Merino2012PatronesRepresentaciones.pdf

Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. (Tesis doctoral, Universidad de Granada). Recuperado de: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/5490/

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. PNA, 3(3), 135-156. Recuperado de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Molina2009PNA3(3)Unapropuesta.pdf

Molina, M. (2010). Una vision structural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *SUMA*, 65, pp. 7-15. Recuperado de: http://revistasuma.es/IMG/pdf/65/suma_65.pdf

Molina, M. (2011). *Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años.* En Martinho, M. H.; Ferreira, R. A. T.; da Ponte, João Pedro (Eds.), Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de InvestigacaoemEducacao Matemática (pp. 27-51). Póvoa do Varzim: EIEM. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123005

Ortega, M. (2012). Unidad didáctica: Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas (Tesis de maestría). Universidad de Granada. Granada.

Portan, A. M. y Costa, B. E. (1996). Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos. Consejo Provincial de Esducación.

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (Anexo, pp. 1-20). Jaén: SEIEM.

Queensland Studies Authority (2005). About patterns and algebra.Queensland, Australia. 151-159. Recuperado de: http://www.qsa.qld.edu.au/downloads/p_10/kla_maths_info_pattern.pdf

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En: L. R.ico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.). Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro. Granada, España: Editorial Comares.

Rivera y Becker (2011) Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. In J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early Algebraization*, Advances in Mathematics Education. Berlin-Heidelberg. DOI 10.1007/978-3-642-17735-4_18

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In: A. J. Bishop et al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The agains and pitfalls of reification. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Stacey, K. (1989).Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems.*Educational Studies in Mathematics*, 20 (2), 147-164. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/3482495

Zazkis, R. &Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379–402. Recuperado de: http://www.sfu.ca/~zazkis/publications/PatternsESM.pdf

Van Amerom, B. (2002). Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra (Tesis doctoral). Utrecht University: Utrecht. Recuperado de: http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/full.pdf

Warren, E. & Cooper ,T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. Educ Stud Math 67,171–185. DOI: 10.1007/s10649-007-9092-2

Yerushalmy, M. (1997). Mathematizing Qualitative Verbal Descriptions of Situations: A Language to Support Modeling. *Cognition and Instruction*, 15 (12), 207-264. Recuperado de:

http://links.jstor.org/sici?sici=0737-0008%281997%2915%3A2%3C207%3AMVDOSA%3E2.0.CO%3B2-B