



ENSAYOS

sobre política económica

Crecimiento económico y gasto público: un modelo para el caso colombiano

Carlos Estaban Posada
Wilman Gómez

Revista ESPE, No. 41-42, Art. 01, Junio-
Diciembre de 2002
Páginas 5-86



Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista *Ensayos Sobre Política Económica* (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando nadie obtenga lucro por este concepto y además cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además colocar en su propio website una versión electrónica del documento, siempre y cuando ésta incluya la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción del documento para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro website, requerirá autorización previa del Editor de ESPE.

*Crecimiento económico y gasto público: un modelo para el caso colombiano**

*Carlos Esteban Posada**
Wilman Gómez****



La tasa de crecimiento económico puede estar positivamente relacionada con el gasto público en capital humano e infraestructura física. Pero el gasto público tiene un costo de oportunidad, así que debe existir un nivel óptimo de tal gasto. En este documento se presenta un modelo de crecimiento económico con gasto público en esos rubros, y los resultados de las simulaciones con aquel para estimar o evaluar, en el caso colombiano: 1) los niveles óptimos del gasto público en capital humano e infraestructura, 2) la pérdida de bienestar social derivada de financiar el gasto público con impuestos que distorsionan la asignación de los recursos, 3) los tiempos requeridos y las velocidades de convergencia al estado estable a partir de situaciones alejadas de éste y 4) la importancia relativa de dos motores principales del crecimiento económico: la acumulación de acervos productivos (en capital físico

* Este documento es de la exclusiva responsabilidad de sus autores y no compromete, por tanto, al Banco de la República ni a sus directivas. Los autores agradecen la colaboración y los comentarios de Luis Eduardo Arango, Carlos Cabollero, Luis Ignacio Lozano, Daniel Mejía, Gabriel Piraquive, Jorge Ramos, María Teresa Ramírez, Álvaro Riascos, José Darío Uribe, Hernando Vargas, Leonardo Villar, Eduardo Wiesner, Álvaro Zarta, los participantes en el seminario del Banco de la República en el cual se presentó una versión anterior de este documento y un evaluador anónimo.

** Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República.
Correo electrónico: cposadpo@banrep.gov.co

*** Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República, y Universidad de Antioquia.
Correo electrónico: wvongomez@hotmail.com

individual, capital humano e infraestructura) y el cambio técnico no incorporado y exógeno.

Palabras clave: *crecimiento económico, cambio técnico, capital humano, infraestructura, gasto público, impuestos, bienestar.*

Clasificación JEL: D90, E62, H54, O47

I. INTRODUCCIÓN

Los economistas han estado preocupados por el bajo ritmo del crecimiento económico colombiano. Consideran que las tasas de aumento del producto per cápita y sus declinaciones observadas en los últimos quinquenios son fenómenos que sugieren la presencia de obstáculos al ritmo de crecimiento de largo plazo¹. ¿Por qué las tasas medias de crecimiento del producto por persona de los últimos cinco, diez, quince o veinte años son inferiores a las de 1950-1975?, ¿qué ha pasado?, ¿qué hacer?, ¿basta con ser pacientes y esperar que rindan sus frutos las estrategias de desarrollo ejecutadas durante los últimos 15 años o hay que inducir cambios radicales?

Uno de los elementos de la discusión sobre los determinantes del crecimiento económico en el largo plazo, tanto en la literatura internacional como en el caso colombiano, es el relativo al rol que cumplen los componentes supuestamente productivos del gasto público como los destinados a la formación de capital humano e infraestructura².

Para el caso colombiano, esta discusión es de especial interés en vista de que el gasto público ha tenido un crecimiento más rápido que el del producto en los últi-

¹ Documentos y libros recientes como los de Zuccardi (2002), Greco (2002), Echeverry et al. (2002), Cárdenas (2002), Zarta (2001) y Misas y Posada (2000) hacen evidente la preocupación actual por el tema de la declinación del ritmo de crecimiento económico colombiano y su eventual asociación con factores que no son simplemente de demanda agregada coyuntural. Pero esta preocupación empezó a hacerse evidente desde fines de los años 80 (véase, por ejemplo, Montenegro, 1995).

² En lo que sigue, entenderemos por infraestructura la de naturaleza física. Una definición para el caso colombiano se encuentra en las notas del Cuadro 3.

mos cinco decenios y que desde hace un buen tiempo se expresan críticas sobre su eficiencia³.

El objetivo de este documento es evaluar la importancia específica de los principales motores del crecimiento económico de largo plazo (y, por ende, de su desaceleración), según la literatura neoclásica, a saber: el cambio técnico exógeno (esto es, el “no incorporado” en los bienes de capital ni inducido por la acumulación de factores) y los aumentos del gasto público en educación e infraestructura. El medio para tal evaluación es un modelo numérico calibrado con base en nuestra percepción de los “hechos estilizados” de la economía colombiana de la segunda mitad del siglo XX. Los resultados del modelo son los elementos de evaluación y las guías de reflexión que ofrecemos sobre el crecimiento económico colombiano pasado y sobre el probable desempeño económico del país en el futuro⁴.

El documento tiene seis secciones básicas y tres anexos además de esta introducción. La sección II resume los “hechos estilizados” del crecimiento económico colombiano, presenta el tradicional ejercicio de contabilidad del crecimiento y repasa los puntos de discusión al respecto. La sección III hace una revisión somera de la literatura reciente sobre crecimiento económico y sus factores determinantes, haciendo énfasis en su relación con el capital humano y la infraestructura. Las secciones IV y V describen el modelo, esto es, presentan su estructura, propiedades dinámicas y valores numéricos de los parámetros del escenario básico. La sección VI reporta los resultados de la utilización del modelo para diferentes simulaciones. La sección VII resume, concluye y presenta algunas reflexiones sobre el crecimiento económico pasado y futuro que se apoyan en los resultados consignados en las secciones V y VI. En los anexos *A* y *B* se expone la solución analítica del modelo considerado éste como un sistema dinámico, es decir, se des-

³ Un conjunto de críticas y de propuestas para mejorar la eficiencia del gasto público se encuentra en el informe final de la Comisión de Racionalización del Gasto y de las Finanzas Públicas (1997). Sobre los problemas de cobertura y eficiencia de la educación pública colombiana, véanse (para citar sólo algunos de los más recientes), los trabajos de Núñez *et al.* (2002) y Borjas y Acosta (2000).

⁴ Este método ya es bastante aceptado. Así, por ejemplo, Baier y Glomm (2001) estudian el impacto de políticas fiscales sobre el crecimiento mediante un modelo de crecimiento con inversión en infraestructura. El Gobierno establece impuestos sobre salarios y ganancias y utiliza los recaudos para invertir en infraestructura, ofrecer servicios que reportan utilidad y hacer transferencias a los hogares. Sus conclusiones se basan en los experimentos numéricos con las distintas versiones del modelo.

cribe el proceso mediante el cual la economía tiende a un estado de equilibrio estable (el “estado estable”), y la velocidad de tal tendencia a partir de situaciones diferentes a la de reposo. El Anexo C explica el método empleado para la calibración numérica.

II. LOS HECHOS ELEMENTALES DEL CRECIMIENTO Y LOS PUNTOS EN DISCUSIÓN

El ritmo de crecimiento económico se mide, como es sabido, por la tasa media anual de aumento del producto real por habitante durante un número apreciable de años. A lo largo del siglo XX la tasa media de crecimiento del *PIB* real colombiano per cápita se ubicó, muy probablemente, en el rango 2,0%-2,4% anual (Cuadro 1)⁵.

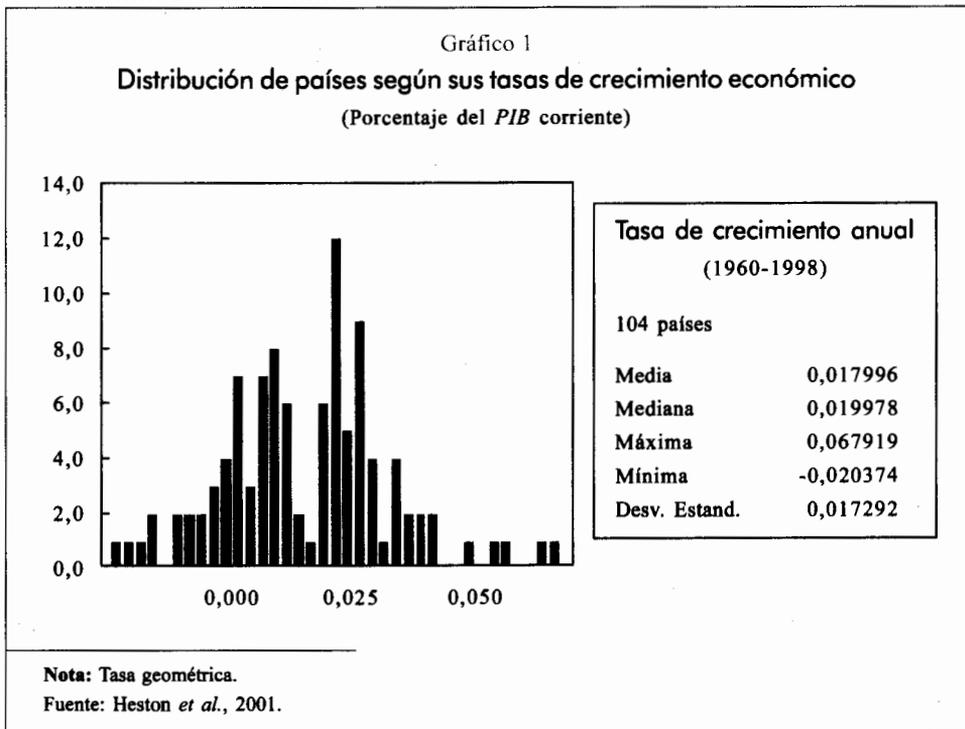
	<i>PIB</i> real (precios de 1975)	<i>PIB</i> real (precios de 1994)	Población	<i>PIB</i> per cápita (precios de 1975)	<i>PIB</i> per cápita (precios de 1994)
1905-2000	4,56	4,72	2,34	2,18	2,33
1905-1924	5,43	5,43	1,96	3,40	3,40
1925-1950	4,42	4,42	2,21	2,16	2,16
1950-1975	4,94	5,02	2,88	1,99	2,08
1976-2000	3,52	4,04	2,18	1,31	1,82

Cálculos: Greco con base en cifras de población de Flórez (2000, y sus revisiones posteriores) y cifras de *PIB* de *Cepal* (1957), Banco de la República y *DANE*, y estimaciones del *PIB* de 1905-24 de Greco. Cifras anuales, metodologías y fuentes en Anexo general de *Greco* (2002).

⁵ Aún no es posible tener certidumbre plena sobre una cifra precisa, pero los estimativos de Cuentas Nacionales (*DANE* y Banco de la República) y los de *Cepal* (1957) y *Greco* (2002) permiten considerar razonable la estimación en tal rango.

¿Qué significa una tasa de crecimiento económico de ese orden de magnitud? Una forma de responder es compararla con cifras internacionales. La última versión de la base de datos *Penn World Table*⁶ tiene series desde 1950 ó 1960 hasta 1998 para los diferentes países del mundo. Para 104 países (desarrollados y en desarrollo) es posible calcular las tasas geométricas anuales de crecimiento del producto real per cápita (medido en dólares reales de poder adquisitivo comparable)⁷ entre 1960 y 1998. El Gráfico 1 muestra la distribución de esos países según sus tasas de crecimiento económico.

La mediana del conjunto de las tasas anuales de crecimiento por habitante entre 1960 y 1998 fue 2%, en tanto que la de Colombia fue ligeramente más alta: 2,2%,



⁶ Versión 6.0 (Heston *et al.* 2001).

⁷ La variable se denomina *rgdpl-constant*. La tasa geométrica de crecimiento es una aproximación a la media de las tasas anuales observadas. Para el caso del producto real per cápita esta aproximación nos parece, en general, aceptable (en aras de la sencillez), excepto en el caso eventual de países que soportaron alguna catástrofe o gozaron de alguna bonanza en 1960 o en 1998 de tales magnitudes que le quitarían representatividad a los niveles del producto de esos años.

igual a la media del rango ya mencionado para la tasa de crecimiento durante el siglo XX. Y entre aquellos 24 países que en 1960 tuvieron un producto per cápita “similar” al colombiano, esto es, en el rango (que fijamos arbitrariamente) 2.000-3.000 dólares (de poder adquisitivo comparable), siendo 2.511 el de Colombia, según tal base de datos, la media de sus tasas de crecimiento fue 1,5% por año.

Bajo tales patrones el desempeño colombiano no ha sido deplorable. Pero, en ese mismo lapso (1960-1998), las principales economías desarrolladas tuvieron un crecimiento similar o superior al de Colombia, así que el país no avanzó con relación a ellas. Por ejemplo, las tasas anuales de crecimiento económico de los Estados Unidos, Canadá, Francia, Italia y Japón fueron, en su orden, 2,3%, 2,3%, 2,7%, 3%, y 4,4%, según la misma base de datos.

Así, el ritmo de crecimiento económico de Colombia ha sido, en el largo plazo, ligeramente superior a lo que podría juzgarse mediocre, pero fue, al menos en la segunda mitad del siglo XX, insuficiente para lograr que el país pudiera reducir su brecha frente a las economías más desarrolladas.

Crecer a una tasa de 2,2% anual equivale a duplicar el ingreso real per cápita al cabo de 33 años, que es la diferencia media de edades entre una generación y la siguiente. Pero hacerlo sólo al 0,87% anual, que fue la tasa media de aumento del *PIB* real colombiano per cápita entre 1994 y 1998 (según las cifras de Cuentas Nacionales, sin incluir el dato de 1999, año de depresión), implica que después de 33 años el producto per cápita será apenas 33% superior al inicial.

Por todo lo anterior y porque la desaceleración del ritmo de crecimiento económico en Colombia parece ser un fenómeno prolongado, observable ya en el último cuarto del siglo XX (Cuadro 1), pero agudizado en los últimos siete años, es necesario avanzar en la discusión de los asuntos referidos a los motores y frenos del crecimiento, y a sus perspectivas futuras.

Una primera aproximación al tema de los determinantes del crecimiento económico y al de su desaceleración puede hacerse mediante la llamada “contabilidad del crecimiento”. Ésta se basa en las cifras de Cuentas Nacionales. Supone, además, siguiendo la tradición iniciada por Solow (1956), que la producción agregada es una función Cobb-Douglas (con las propiedades convencionales) del capital (toda clase de capital físico privado y público, incluyendo infraestructura) y del trabajo (calificado y no calificado), así que los motores del crecimiento del

producto total son la acumulación de capital, el incremento de la población trabajadora y el “aumento de la productividad multifactorial”, entendido como el “residuo de Solow”.

De acuerdo con ello la desaceleración del crecimiento económico colombiano en los últimos decenios (y sin tener en cuenta la recesión de fin de siglo) se deriva de la reducción del residuo de Solow, puesto que no han perdido velocidad, más bien lo contrario, las expansiones del capital y del trabajo (Cuadro 2).

¿Puede interpretarse la desaceleración del crecimiento económico y del “residuo de Solow” como síntomas de caídas de la formación de capital humano o de pérdidas de eficiencia (por problemas institucionales, etc.) de este factor o de la infraestructura para promover el crecimiento económico?

A juzgar por las cifras agregadas de gasto público colombiano y por indicadores globales de educación, salud e infraestructura, parece sensato afirmar que los

Cuadro 2
La contabilidad del crecimiento
(variaciones porcentuales medias)
Valores del PIB y del capital a precios de 1975

	ΔPIB (1) = (2)+(3)+(4)	$\alpha\Delta Capital$ (2)	$(1-\alpha)\Delta PEA$ (3)	$(1-\alpha)\Delta A$ (4)
1905-1996	4,74	1,40	1,43	1,90
1905-1924	5,43	0,52	1,14	3,77
1925-1950	4,42	1,06	1,11	2,25
1950-1975	4,94	1,89	1,55	1,50
1925-1975	4,75	1,47	1,34	1,94
1976-1996	4,07	2,04	1,94	0,09

Nota: se supone que el PIB es una función Cobb-Douglas del capital y el trabajo (con las propiedades neoclásicas convencionales), y que la elasticidad del producto al capital (α) es 0,42.

Fuente: Greco (2002, Introducción). La insuficiencia de datos sobre capital humano ayuda a explicar este tipo de “contabilidad”; en una sección posterior mencionamos posibles limitaciones de los resultados de este ejercicio derivadas de tal insuficiencia.

frenos al crecimiento económico asociados a insuficiencias del gasto público destinado a la formación de estos acervos pudieron existir en los años treinta, cuarenta, cincuenta o sesenta, quizás con efectos rezagados sobre el crecimiento económico de períodos posteriores. En realidad el nivel del gasto público parece haber sido modesto en Colombia hasta finales de los años 70. Pero éste aumentó continuamente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, pasando de poco menos de 9% a poco más de 33% del *PIB* entre 1950 y 2001, sin incluir el servicio de la deuda pública (Gráfico 2 y Cuadro 3)⁸, y, probablemente, fue acentuándose durante los últimos 20 años la importancia de los problemas de eficiencia para convertir el creciente gasto público en mayores niveles de capital humano e infraestructura. En otras palabras, el incremento del gasto público destinado a estos conceptos en los últimos 50 años ha sido significativo⁹ en tanto que hay alguna evidencia, parcial e indirecta (principalmente para el caso de la educación), de una reducción de la eficacia con la cual se transforma el gasto público en formación de acervos realmente productivos¹⁰.

Durante los años noventa se reforzó la tendencia creciente de la participación del gasto público en el *PIB*, especialmente en los rubros de capital humano, defensa, seguridad y justicia y otros gastos sociales (Cuadro 3). Según las estimaciones contenidas en el Cuadro 3, el gasto público destinado a capital humano (educación y salud general y de niños) e infraestructura equivale, en la actualidad, a 15,7% del *PIB*.

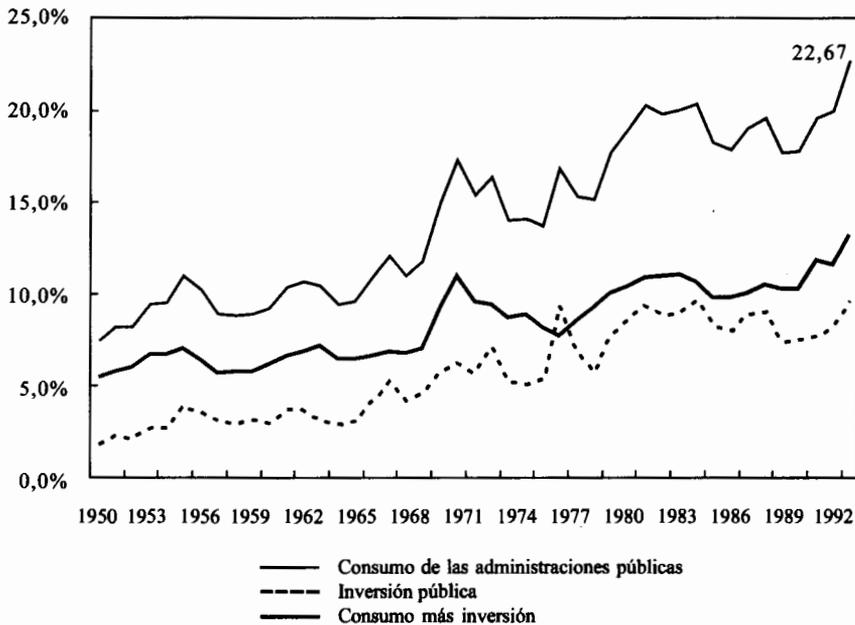
La cifra consignada en el Cuadro 3 para el gasto público destinado a capital humano (educación y salud general y de niños) durante los seis años comprendidos entre 1996 y 2001 implica, casi sin duda, una subestimación creciente, según lo explicado en el mismo cuadro, mientras que es probable que el cuadro incluya una sobrestimación creciente del gasto en infraestructura (pues este gasto ha soporta-

⁸ Las cifras del Gráfico 2 y del Cuadro 3 sólo son comparables de manera aproximada, como se deduce de la lectura de sus aclaraciones correspondientes. Por lo demás, el gasto público total (incluyendo el servicio de la deuda pública) en el año 2001 fue estimado en 38,4% del *PIB*. Para efectos de comparación, el gasto público en Estados Unidos, Nueva Zelanda y Australia, en 1996, ascendió a 32,4%, 34,7% y 35,9%, respectivamente (Tanzi y Schuknecht, 2000, Cuadro I.1).

⁹ De acuerdo con las estimaciones de Londoño (1995) el número de personas matriculadas en secundaria y universidad creció a una tasa media anual de 7,5% entre 1940 y 1988; este aumento fue importante y en buena medida se explica, sin duda, por el mayor gasto público. En cuanto a la infraestructura, Cárdenas (1995) reporta evidencia de un rápido crecimiento en los indicadores del acervo de telecomunicaciones y energía entre 1950 y 1994, y de carreteras hasta 1980, y un estancamiento del correspondiente a ferrocarriles.

¹⁰ Sobre la preocupación por el creciente gasto público y su poca eficiencia, véanse Urrutia (1998) y Banco de la República (2002).

Gráfico 2
Inversión y consumo públicos 1950-1994
(Porcentaje del PIB corriente)



Fuente: Cuentas Nacionales DANE y Banco de la República.

do recortes presupuestales de los últimos años con mayor intensidad). Parece, pues, más prudente considerar que en el año 2001 el gasto público en capital humano equivalió a una cifra ubicada en el rango 8,5% y 11% del PIB (siendo 8,44% la cifra del cuadro)¹¹ y el correspondiente a infraestructura a algo entre 5% y 7,3% del PIB (7,25% es la cifra del Cuadro)¹². Pero, a nuestro juicio, la suma total de los rubros de capital humano e infraestructura sí parece ser la mencionada antes: 15,7% del PIB.

¹¹ En 1993-1994 el gasto público en educación en los Estados Unidos, Australia y Nueva Zelanda ascendió a 5,5%, 6% y 7,3% respectivamente (Tanzi y Schuknecht, 2000, Cuadro II.5).

¹² A mediados de los años noventa se estimaba en 6% del PIB la inversión anual, básicamente pública, en infraestructura (Urrutia, 1995).

Cuadro 3

Una estimación aproximada del gasto público en funcionamiento e inversión (sin servicio de deuda). 1990-2001

(Sector público no financiero; % del PIB)

	1990	1991	1992	1993
I. Capital humano (1)	3,57	3,53	3,98	4,56
Educación	1,84	1,81	2,06	2,41
Salud	1,73	1,73	1,92	2,16
II. Infraestructura (2)	3,74	4,17	5,13	4,93
III. Justicia, defensa y seguridad (3)	1,24	1,20	1,54	1,96
IV. Otro gasto social (4)	1,22	1,40	1,62	1,97
V. Otros gastos de administración del Estado y gastos de empresas públicas (diferentes a los anteriores) (5)	7,17	7,77	6,95	6,90
Gasto total	16,93	18,08	19,22	20,33

Fuentes y metodología:

Para 1990-1995 se usó la información de «Indicadores del sector público no financiero 1987-1995» (Banco de la República, 1996); de allí se tomaron las cifras de gasto del sector público no financiero (SPNF) según finalidad a pesos constantes de 1990; éstas se agruparon según la clasificación propuesta y para cada ítem se calculó su participación dentro del gasto total sin incluir el servicio de la deuda pública; estas participaciones se multiplicaron por el gasto total del sector público no financiero (fuente Departamento Nacional de Planeación (DNP)), expresado como proporción del PIB nominal (PIB nominal re-estimado por Greco, 2002) sin incluir gastos de intereses ni el rubro "otros" del renglón de gastos de capital. Suponemos aquí que expresar una cifra en términos del PIB real de un año base (haciendo abstracción de distorsión a causa de precios relativos) es equivalente a expresarla en términos del PIB nominal; este supuesto es necesario porque de lo contrario no podríamos empalmar estas fuentes de datos, pues las distintas formas de medición en que son presentadas las harían incomparables. De 1996 a 2001 el procedimiento es el mismo, pero supusimos que las participaciones de cada rubro en el gasto total de 1995 se mantienen para este período. En vista de que las normas constitucionales imponían una tendencia alcista de las transferencias de la Nación a las regiones con destino a educación y salud, es muy probable que nuestras estimaciones del período 1996-2001 subestimen los verdaderos gastos en educación y salud, en tanto que estén sobrestimando el gasto en infraestructura. Adicionalmente, en Posada y González (2000) se hizo una estimación del gasto público en justicia, seguridad y defensa (con otro método y valores del PIB del sistema anterior de cuentas nacionales) que arroja valores superiores entre un punto y un punto y medio del PIB a los de este cuadro; por tanto, es probable una subestimación actual en este rubro que contribuya, además, a la sobrestimación del gasto en infraestructura.

El ascenso de esos gastos ha respondido, probablemente, entre otras razones, a un consenso formado en los años ochenta y principios de los noventa con respecto a la importancia de elevar los niveles de estos acervos para lograr metas más ambiciosas en materia de crecimiento económico, redistribución del ingreso, bienestar social y seguridad ciudadana.

1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001 PR
5,70	6,21	7,07	7,55	7,43	8,60	8,40	8,44
2,60	2,96	3,37	3,61	3,55	4,11	4,01	4,03
3,10	3,24	3,69	3,95	3,88	4,49	4,39	4,41
5,02	5,34	6,07	6,49	6,39	7,39	7,22	7,25
2,26	2,71	3,08	3,29	3,24	3,75	3,66	3,68
2,62	3,27	3,72	3,97	3,91	4,53	4,42	4,44
6,66	7,04	8,02	8,57	8,44	9,76	9,54	9,58
22,27	24,56	27,96	29,88	29,41	34,03	33,24	33,38

(1) Educación está compuesto por: administración de la educación, educación primaria, educación secundaria, educación superior, otras enseñanzas, otros servicios educativos y culturales, servicios auxiliares de la educación, programas laborales, salarios y empleo, asuntos y servicios deportivos, recreativos y culturales. Salud está compuesto por: administración de la salud, hospitales, clínicas y análogos, servicios de salud y saneamiento específicos, administración de la seguridad social, administración del bienestar social, cuidado de los niños, asuntos y servicios sanitarios, y suministro de agua.

(2) Medio ambiente, ordenación urbana y rural, extensión y regadío, electricidad, gas y vapor, carreteras interurbanas (rurales), carreteras intraurbanas (urbanas), vías navegables interiores y costeras, transporte por carretera y aguas interiores, transporte marítimo, transporte aéreo, ferrocarriles, otros transportes, comunicaciones, proyectos de desarrollo con fines múltiples.

(3) Servicio de defensa, orden público y seguridad, e investigación general.

(4) Cuidado de ancianos, incapacitados y enfermos mentales; prestaciones por invalidez, vejez y otros; otros gastos de asistencia y bienestar social, vivienda; gastos relacionados con desastres y otras calamidades; y otros servicios culturales, religiosos y otros no especificados previamente.

(5) Administración general, asuntos exteriores, administración de servicios económicos, administración de servicios agropecuarios, estabilización de precios e ingresos agrícolas, otros servicios agropecuarios, silvicultura, caza y pesca, minería, manufactura y construcción, turismo, comercio, otros servicios económicos y financieros, transferencias de carácter general a otras entidades públicas.

Una vez alcanzados niveles de gasto público como los actuales, conviene revisar el tema de la relación entre la magnitud del gasto público “productivo” y el crecimiento económico y la eficiencia de aquel para promoverlo. En las secciones siguientes se abordará este asunto de una manera abstracta. En la sección VII regresaremos a las cifras colombianas para juzgarlas con las luces arrojadas por el modelo.

III. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Hace ya 10 años Mankiw, Romer y Weil (1992) ampliaron el modelo de Solow para incorporar el efecto del capital humano (además de la variable de eficiencia laboral) en la producción. De esto, y de suponer que las economías pueden no estar en su situación de estado estable o “estacionario”, dedujeron la tasa de crecimiento del producto per cápita. Esta tasa (cuando la economía no está en su estado estable) depende, entre otras cosas, positivamente de las tasas de ahorro en capital físico y humano y negativamente del producto per cápita inicial. Probaron la hipótesis mediante un análisis de corte transversal con datos de Summers y Heston (la primera de las versiones de esta base de datos) del período 1960-1985 para un conjunto de 98 países (no petroleros), para 77 de éstos con poblaciones mayores que el millón de habitantes y para 22 países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Sus resultados fueron favorables a sus hipótesis, así: a) los signos (y significación estadística) de los coeficientes son los esperados (y, en particular, encontraron que el signo del coeficiente del ingreso inicial es negativo, lo cual indica la existencia de convergencia condicional); la elasticidad del producto al capital físico está en el rango 0,38 – 0,48; la elasticidad al capital humano es 0,23 (para los tres grupos de países) y la velocidad de convergencia al estado estable se ubica en el rango 0,014 – 0,021. Si se supone una velocidad de convergencia de 0,02, una economía reduciría a la mitad su brecha en 35 años, el doble del tiempo que gastaría si se supone vigente el modelo tradicional de Solow¹³.

Los resultados principales de Mankiw, Romer y Weil siguen vigentes. Sala-i-Martin (2001, p. 216) consideró que entre las conclusiones de los estudios empíricos se encuentra que el crecimiento económico está positivamente correlacionado con la inversión en capital humano (educación y salud).

Un análisis tipo *panel data* (93 países; 258 observaciones de tres decenios: 1960-1970; 1970-1980; 1980-1990) fue realizado por Kalaitzidakis *et al.* (2001) para

¹³ Un análisis crítico del trabajo de Mankiw, Romer y Weil (1992) se encuentra en Bernanke y Gürkaynak (2001). De acuerdo con Pritchett (2001), de los análisis macroeconómicos internacionales de corte transversal, incluyendo los suyos, se puede concluir que el capital humano, aun si se mide con proxies adecuadas (considera que el hallazgo de Mankiw *et al.* descansa en una proxy inadecuada de incremento de capital humano: número de matriculados en educación secundaria), puede tener o no impactos positivos significativos sobre el crecimiento. La evidencia micro siempre es favorable a la hipótesis de asociación directa entre niveles de capital humano y salarios, pero la evidencia macro no siempre implica que mayor capital humano conduce a mayor producto agregado; por tanto es posible que: a) existan externalidades

someter a prueba las hipótesis de influencia positiva, pero no lineal, del capital humano sobre la tasa de crecimiento del ingreso per cápita, y negativa, pero no lineal, del ingreso per cápita inicial sobre la tasa de crecimiento (tesis de la convergencia). La evidencia reportada apoya las hipótesis de no linealidades: en particular, en países de nivel inicial de ingreso per cápita intermedio la acumulación de capital humano (incremento del número de años promedio de escolaridad) tiene efecto positivo, y en países con alto nivel de capital humano la educación post-primaria masculina tiene efectos positivos sobre la tasa de crecimiento.

El capital humano tiene otras dimensiones además de la referida a educación formal. McDonald y Roberts (2002) pusieron a prueba la hipótesis de la importancia del mejoramiento de las condiciones de salud en el crecimiento *versus* el avance educativo. Para ello realizaron un ejercicio econométrico (de *panel* con datos promedios quinquenales de 1960 a 1989 para 77 países) a partir de un modelo de Solow “ampliado”. La función de producción utilizada es Cobb-Douglas con los siguientes argumentos: trabajo medido en unidades de eficiencia, capital físico, capital-educación y capital-salud, con rendimientos constantes a escala y marginales decrecientes. Del modelo Solow ampliado derivan, siguiendo a Mankiw, Romer y Weil (1992), una ecuación de ingreso per cápita que depende del ingreso per cápita inicial, las tasas de inversión en capital físico, capital-educación y capital-salud, y las tasas de crecimiento poblacional, de cambio técnico y depreciación. Como *proxy* de capital-educación se utilizó la cifra de años promedio de educación, y para capital-salud dos *proxies* alternativas: tasa de mortalidad infantil y esperanza de vida. Tanto para la estimación con la muestra total (77 países) como para las estimaciones con submuestras a) países en desarrollo, b) países en desarrollo excepto latinoamericanos, y c) países de la OCDE la variable dependiente fue el ingreso per cápita. Entre los resultados que se destacan para el conjunto de países en desarrollo (incluyendo los latinoamericanos) tenemos que el capital-salud tuvo influencia significativa, pero no se mostró significativo el capital-educación. Para países desarrollados el capital-salud no se mostró significativo, mientras que el capital-educación sí.

negativas (en ciertas circunstancias, a mayor capital humano mayor fuerza adquieren las actividades improductivas, “buscadoras de rentas”), b) la demanda de capital humano se estanque mientras sube la oferta de éste o c) el incremento en los años de escolaridad no conduzca a mejorar las capacidades productivas del individuo (un caso usual cuando la principal función del aparato escolar es “filtrar” o emitir señales sobre diferentes cualidades individuales no adquiridas allí). Según este autor hay gran heterogeneidad entre países con respecto a la frecuencia de las tres diferentes causas posibles de ausencia de correlación entre crecimiento económico y capital humano.

De acuerdo con Bleaney y Nishiyama (2002) la evidencia empírica acumulada hasta el presente permite ya considerar la existencia de un modelo econométrico de crecimiento económico con las características de “patrón” (*benchmark*, que cubre o engloba otros modelos recientes). Los resultados de su estimación de este modelo patrón (mediante un ejercicio panel de 70 países, 1965-1990) indican, a juicio de estos autores, que entre las variables significativas para explicar la tasa de crecimiento anual del *PIB* per cápita (ajustado por paridad de poder adquisitivo) se encuentran la expectativa de vida al nacer observada en 1965 (efecto positivo) y la escolaridad masculina postprimaria en 1965.

Aunque el modelo “patrón” de Bleaney y Nishiyama no incluye la variable infraestructura, existe ya una respetable corriente, al menos desde el trabajo pionero de Aschauer (1989) que ha hecho énfasis en la influencia positiva de la inversión pública en infraestructura sobre el crecimiento económico¹⁴. Los trabajos de Barro (1990), Barro y Sala-i-Martin (1992), Jones y Manuelli (1990), King y Rebelo (1990), Rebelo (1991) y Glomm y Ravikumar (1994) se basan en modelos teóricos de economía cerrada que describen los mecanismos eventuales mediante los cuales la tasa de crecimiento de la economía depende, al menos en un cierto rango, de manera positiva del gasto público (tanto en bienes privados como en bienes públicos, incluyendo infraestructura). Puesto que en los trabajos de Barro y Barro y Sala-i-Martin la relación entre estas dos variables es no lineal, logran establecer aquella proporción del gasto público, con respecto al producto global, que hace máxima la tasa de crecimiento de éste (Sala-i-Martin, 2001). Este resultado se reproduce, también, en un modelo de economía abierta (y dos bienes) presentado por Ghosh y Mourmouras (2002). La evidencia empírica internacional (75 países con observaciones medias para tres decenios: 1965-1975, 1975-1985, y 1985-1995) ofrecida por Esfahani y Ramírez (próxima publicación) es favorable a la hipótesis de determinación simultánea del crecimiento económico y de la formación del acervo de infraestructura (en generación de energía eléctrica y líneas telefónicas) en un proceso que se auto-refuerza pero que está condicionado a la calidad del conjunto de instituciones de un país. El modelo presentado en la siguiente sección describe la determinación simultánea de la tasa de crecimiento del producto y de los acervos productivos, entre ellos la infraestructura.

¹⁴ Uribe (1993, a y b) presenta evidencia de la importancia de la infraestructura en el crecimiento económico pero sólo en países de ingresos medios y altos.

IV. EL MODELO

Con el fin de construir un modelo explicativo de los niveles y variaciones del producto per cápita que podamos utilizar de manera ágil y con pleno entendimiento de sus propiedades, hemos seleccionado sólo dos de los factores que, de acuerdo con la literatura empírica internacional, pueden contribuir a explicar la tasa de crecimiento de una economía con características similares a la colombiana: el capital humano y el acervo de infraestructura. El modelo que se presenta a continuación es una versión ampliada del neoclásico de optimización (el de Ramsey-Cass-Koopmans)¹⁵. La ampliación consistió en incluir tales factores y sus efectos sobre el nivel técnico de la economía. Estos acervos, según nuestro modelo, se acumulan gracias al gasto público, y el nivel de éste se establece de manera óptima: resulta de la maximización (intertemporal) de una función de utilidad social. Uno de los trabajos antecesores más cercano al nuestro por sus características y objetivos es el de Glomm y Ravikumar (1994), aunque éste no incluye el capital humano.

A. PRODUCCIÓN Y ACUMULACIÓN

En lo que sigue, suponemos que la economía es cerrada y produce un solo bien, y que la función de producción individual representativa tiene rendimientos constantes de escala para sus factores productivos y cumple las condiciones de Inada; por tanto, éstos tienen rendimientos marginales positivos pero decrecientes. Las producciones finales, tanto la individual como la agregada de la economía, se representan así:

$$Y_u = A_t K_u^\alpha X_u^\beta L_u^{1-\alpha-\beta};$$

$$(1) \quad Y_t = \sum_{i=1}^N Y_{it}; K_t = \sum_{i=1}^N K_{it}; X_t = \sum_{i=1}^N X_{it}; L_t = \sum_{i=1}^N L_{it};$$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha X_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}; 0 < \alpha, \beta < 1$$

Siendo Y_t producto agregado de la economía en t ; A_t : índice del nivel de tecnología o parámetro de escala, K_t : acervo de capital privado físico (agregado de capitales privados individuales); X_t : acervo agregado de capital humano que se genera a

¹⁵ Un sumario de la teoría del crecimiento se encuentra en Sala-i-Martin (2001).

partir de recursos que el Estado canaliza hacia la educación; estos recursos incrementan el número de personas calificadas o su calificación, y éstas son contratadas por cada empresa y remuneradas a un precio de mercado competitivo; L_t : unidades de trabajo; N : número de empresas-productores.

Además, suponemos que la determinación del nivel de tecnología implica externalidades positivas, gracias a la formación de capital privado físico y humano y de infraestructura, de manera que se puede describir de la siguiente forma:

$$(2) \quad A_t = \bar{A}_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X_t}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega_t}{L_t} \right)^v, \quad 0 < \gamma, \varphi, v < 1,$$

con:

$$(3) \quad \bar{A}_t = \Pi_t^{1-\alpha-\beta-\gamma-v-\varphi}$$

$$(4) \quad \Pi_t = \Pi_0 e^{gnt}$$

Siendo:

\bar{A}_t : componente exógeno del nivel de la tecnología. Ω_t : acervo de infraestructura pública (carreteras, puertos, etc.)¹⁶.

La principal intuición para modelar externalidades positivas como las generadas a partir del capital físico agregado es la de que existen factores de crecimiento externos a la empresa individual, pero internos a la economía que pueden y tienden a actuar con mayores niveles de capital material y humano (Stiglitz, 1989)¹⁷.

Puesto que el capital humano es divisible (por ser un bien privado provisto públicamente) se justifica incluirlo en la función de producción individual. En cambio, el

¹⁶ Aunque no analizamos el tema de la congestión de manera explícita, debe observarse que en nuestro modelo ésta se puede representar mediante un crecimiento de la fuerza laboral más rápido que el de la infraestructura bajo situaciones diferentes a la de estado estable.

¹⁷ Una intuición similar se presenta en Barro y Sala-i-Martin (1995) para los modelos *learning-by-doing* y *knowledge spillovers*.

acervo de infraestructura usualmente es indivisible y tiene la característica de bien público (no rival y no excluible o sólo parcialmente excluible); por esto hemos decidido tratarlo como un factor que contribuye a la producción sólo a través de su efecto sobre el nivel de escala o tecnología A_t .

Insertando (2), (3) y (4) en (1) resulta:

$$Y_t = \Pi_t^{1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi} \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\gamma \left(\frac{\Omega_t}{L_t}\right)^\nu \left(\frac{X_t}{L_t}\right)^\varphi K_t^\alpha X_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}$$

$$0 < 1 - \alpha - \beta - \gamma - \nu - \varphi < 1$$

Es decir:

$$Y_t = \Pi_t^{1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi} K_t^{\alpha+\gamma} X_t^{\beta+\varphi} \Omega_t^\nu L_t^{1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi}$$

La función de producción es “neutral en el sentido de Harrod”, esto es, asociada a un progreso técnico que aumenta el trabajo medido en unidades de eficiencia $(\Pi_t L_t)^{18}$, así:

$$(5) \quad Y_t = K_t^{\alpha+\gamma} X_t^{\beta+\varphi} \Omega_t^\nu (\Pi_t L_t)^{1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi}$$

De acuerdo con la ecuación (5), habría dos clases de “capital humano” utilizados en la producción. El primero, para el cual hemos reservado el término *capital humano* (X), podría no ser reducible a fuerza laboral general, a pesar de que ésta se mide en unidades de eficiencia; el segundo (ΠL) sí.

Si tenemos en cuenta la ley de evolución de Π_t la ecuación (5) se puede reescribir de una forma que permite distinguir claramente los efectos de los componentes endógeno y exógeno del cambio técnico sobre el crecimiento del producto:

¹⁸ Véase Romer, 1996, Cap. 1, con respecto a la conveniencia de esta especificación para generar condiciones de estado estable.

$$(6) \quad Y_t = \Pi_0^{1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi} e^{g_{\Pi} t (1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi)} K_t^{\alpha+\gamma} X_t^{\beta+\varphi} \Omega_t^{\nu} L_t^{1-\alpha-\beta-\gamma-\nu-\varphi}$$

Como hemos denominado $\Pi_t L_t$ a las unidades de trabajo efectivo, y dado que la función de producción es homogénea de grado uno, entonces podemos dividir los argumentos de la función de producción por $\Pi_t L_t$ y obtenemos el producto por unidad efectiva de trabajo:

$$(7) \quad y_t = \frac{Y_t}{\Pi_t L_t} = f(k_t, \chi_t, \omega_t) = k_t^{\alpha+\gamma} \chi_t^{\beta+\varphi} \omega_t^{\nu}$$

siendo:

$$k_t \equiv K_t / \Pi_t L_t, \chi_t \equiv X_t / \Pi_t L_t, \omega_t \equiv \Omega_t / \Pi_t L_t.$$

Para esta función de producción el crecimiento del producto por unidad efectiva de trabajo viene dado por:

$$(8) \quad g_Y - g_{\Pi} - g_L = (\alpha + \gamma)[g_K] + (\beta + \varphi)[g_X] + \nu [g_{\Omega}]$$

La tasa de crecimiento de una variable X cualquiera (\dot{X}/X) se denota por la letra g_x , indicando el subíndice que corresponde a tal variable¹⁹.

Este modelo cuenta con tres ecuaciones de movimiento para los tres tipos de acervos: capital físico privado, infraestructura y capital humano.

Para el primer acervo:

$$(9) \quad \dot{K} = S_t - \delta_k K_t$$

Siendo δ_k la tasa de depreciación del capital físico ($0 < \delta_k < 1$), y S_t el ahorro.

¹⁹ Vale la pena hacer una breve digresión sobre una implicación de la ecuación (8). Las estimaciones econométricas o contables de la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral o del "residuo de Solow" (g_{Π}) y de la elasticidad del producto al capital (α), bajo el supuesto de que

Puesto que se ha definido $k_t = K_t / \Pi_t L_t$, la tasa de cambio en el tiempo de k_t viene dada por:

$$(10) \quad \dot{k} = y_t - c_t - \Psi_t - (\delta_k + g_L + g_\Pi) k_t$$

Como se verá más adelante, la ecuación de movimiento para el capital físico tiene una formulación del gasto público específica para el caso del planeador central y otra para la economía descentralizada.

En tal expresión (y en lo que sigue) c_t ($c_t \equiv C_t / \Pi_t L_t$) es el consumo por unidad efectiva de trabajo, Ψ_t ($\Psi_t \equiv \Psi_t / \Pi_t L_t$) es el gasto público por unidad efectiva

de trabajo y Ψ_t es el gasto público agregado, cuya tasa de crecimiento se denominará g_Ψ ; por tanto, $\Psi_t = \Psi_0 e^{g_\Psi t}$ (siendo Ψ_0 su valor inicial). Se supone que el gasto público es destinado exclusivamente a la formación de infraestructura y capital humano y se financia exclusivamente con los impuestos recaudados, lo que permite plantear que $\tau_t y_t = (b + \mu) \Psi_t^{20}$.

La evolución en el tiempo de las unidades de trabajo se describe así: $L_t = L_0 e^{g_L t}$.

La ecuación de transición para el acervo de infraestructura viene dada por:

$$(11) \quad \dot{\Omega} = b\Psi_t - \delta_\Omega \Omega_t$$

b es la fracción del gasto público destinada a infraestructura ($0 < b < 1$), y δ_Ω ($0 < \delta_\Omega < 1$) es la tasa de depreciación de la infraestructura²¹.

la producción es una función Cobb-Douglas del capital y del trabajo, sin tener en cuenta el capital humano, corren el riesgo de sobrestimar tales elementos y subestimar el efecto negativo que podrían tener las caídas de la acumulación de capital humano o la de la elasticidad del producto a éste en la tasa de crecimiento del producto per cápita. Posibles sesgos de esta clase están implícitos en las estimaciones del Cuadro 2.

²⁰ Esta modelación del gasto público ($\Psi_t = \Psi_0 e^{g_\Psi t}$) facilita el tratamiento analítico de las ecuaciones de transición de la infraestructura y del capital humano; de otro modo, al reemplazar Ψ_t por $\tau_t y_t$ se dificultaría el tratamiento analítico. Esta modelación implica que el gasto público podría ser considerado exógeno por fuera de situaciones de estado estable, aunque bajo esta situación su nivel óptimo para la sociedad es endógeno.

²¹ Sobre el modelo inicial de crecimiento y gasto público (original de Barro de 1990) véase Sala-i-Martin (2001), Cap. 6. En esa presentación se incorpora directamente el gasto público en la

Habiendo ya definido $\omega_t = \Omega_t / \Pi_t L_t$, la tasa de aumento de ω_t en el tiempo viene dada por:

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{\Omega}}{\Pi_t L_t} - \frac{\Omega_t}{[\Pi_t L_t]^2} [\Pi_t \dot{L} + L_t \dot{\Pi}]$$

La cual, en su forma final, queda como:

$$(12) \quad \dot{\omega} = \frac{b\Psi_t}{\Pi_t L_t} - (g_\pi + \delta_\Omega + g_L) \omega_t$$

Definimos el estado estacionario para ω_t cuando $\dot{\omega} = 0$. Esto se cumple si:

$$(13) \quad \frac{b\Psi_t}{\Pi_t L_t} = (g_L + \delta_\Omega + g_\pi) \omega_t$$

La trayectoria temporal para ω_t viene dada por:

$$(14) \quad \omega_t = e^{-(g_L + \delta_\Omega + g_\pi)t} \left[\omega_0 - \frac{\Psi_{0\omega}}{g_\Psi + \delta_\Omega} \right] + \frac{\Psi_{0\omega}}{g_\Psi + \delta_\Omega} e^{[g_\Psi - (g_L + g_\pi)]t}$$

Siendo $\Psi_{0\omega} = \frac{b\Psi_0}{\Pi_0 L_0}$,

De la solución para ω_t (ecuación 14) se deducen las condiciones para la convergencia de la relación infraestructura/trabajo efectivo. Evaluando el límite de su

función de producción (tal como en el modelo de Barro de 1990), y se justifica la inclusión del gasto público por unidad de capital privado en términos de la congestión que ocasionaría la acumulación de capital privado en ausencia de un aumento del gasto público.

trayectoria temporal (cuando $t \rightarrow \infty$) se tienen las siguientes posibilidades:

- i) Si $g_\psi > (g_L + g_\pi)$, ω_t crecerá indefinidamente y, por lo tanto, no habrá un nivel de estado estacionario para la misma.
- ii) Si $g_\psi = (g_L + g_\pi)$, ω_t ha de converger a $\frac{\Psi_{0\omega}}{g_\psi + \delta_\Omega}$, pues el primer término del lado derecho de (14) tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.
- iii) Si $g_\psi < (g_L + g_\pi)$, ω_t tiende a cero en el largo plazo (cuando $t \rightarrow \infty$).

La ecuación de transición para el capital humano viene dada por²²:

$$(15) \quad \dot{X} = \mu \Psi_t - \delta_x X_t$$

Siendo μ la participación del gasto público destinada a formación de capital humano ($0 < \mu < 1$) y δ_x ($0 < \delta_x < 1$) la tasa de depreciación del capital humano.

Recordemos que habíamos definido $\chi = X/\Pi_t L_t$; por tanto, la tasa de cambio en el tiempo del capital humano por unidad efectiva de trabajo viene dada por:

$$\dot{\chi} = \frac{\dot{X}}{\Pi_t L_t} - \frac{X}{[\Pi_t L_t]^2} [\Pi_t \dot{L}_t + L_t \dot{\Pi}]$$

Así que:

$$(16) \quad \dot{\chi} = \frac{\mu \Psi_t}{\Pi_t L_t} - (g_L + g_\pi + \delta_x) \chi_t$$

Puede definirse un estado estacionario para el capital humano por unidad efectiva de trabajo como una situación en la cual $\dot{\chi} = 0$. En tal caso:

$$(17) \quad \chi_t = \frac{\mu \Psi_t}{\Pi_t L_t (g_L + g_\pi)}$$

²² Suponemos, para efectos de calibración y simulación, que la tasa de depreciación del capital humano es igual a la tasa de depreciación del capital físico privado.

La senda temporal para χ_t es:

$$(18) \quad \chi_t = e^{-(g_L + g_\Pi + \delta_X)t} \left[\chi_0 - \frac{\Psi_{0X}}{g_\Psi + \delta_X} \right] + \frac{\Psi_{0X}}{g_\Psi + \delta_X} e^{[g_\Psi - (g_L + g_\Pi)]t}$$

Siendo $\Psi_{0X} = \frac{\mu\Psi_0}{\Pi_0 L_0}$,

Las condiciones de estabilidad y convergencia vienen dadas por lo siguiente:

- iv) Si $g_\Psi > (g_L + g_\Pi)$, χ_t diverge.
- v) Si $g_\Psi = (g_L + g_\Pi)$, χ_t converge hacia $\frac{\Psi_{0X}}{g_\Psi}$, pues el primer término del lado derecho de (18) tiende a cero.
- vi) Si $g_\Psi < (g_L + g_\Pi)$, χ_t tiende a cero en el largo plazo.

B. EL ESTADO ESTACIONARIO (SUS CONDICIONES DE EXISTENCIA Y ESTABILIDAD) Y LA DINÁMICA DEL MODELO

Además de definir las condiciones de producción y acumulación se requiere la determinación del consumo privado y del gasto público. Al hacerlo, se puede derivar la trayectoria consistente de inversión privada y, por ende, el crecimiento de la economía hasta alcanzar su estado estable.

Tanto el consumo de los hogares como el gasto público y su distribución entre formación de capital humano y ampliación de infraestructura resultan de un proceso de maximización de una función de bienestar social bajo ciertas restricciones. Esta función equivale al valor presente de la serie de las utilidades instantáneas que deriva el hogar representativo de su consumo per cápita a través del tiempo²³.

²³ Un modelo más completo podría incluir el ocio como otro argumento de la función de utilidad; en tal caso la participación laboral podría ser endógena y la población laboral podría crecer, al menos durante un cierto tiempo, a una tasa diferente, por ejemplo, mayor que la de la población total, como fue el caso colombiano de la segunda mitad del siglo XX.

La función de bienestar que se maximiza (tanto en el caso descentralizado como en el del planeador central) es:

$$(19) \quad U = \bar{B} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\eta t} \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} dt, \quad \eta \equiv \rho - g_L - (1-\theta)g_{\pi} > 0, \quad \bar{B} \equiv \frac{A_0^{1-\theta} L_0}{H}$$

Siendo θ el inverso de la elasticidad de sustitución (intertemporal) del consumo, ρ la tasa de descuento de la utilidad y H el número de familias de la economía.

Para el caso del planeador central, la restricción de recursos es de la forma:

$$(20) \quad \dot{k} = y_t - c_t - \Psi_t - (\delta_k + g_L + g_{\pi}) k_t,$$

En cambio, para el caso descentralizado la restricción presupuestal de las familias (que son las dueñas de las empresas) es de la forma:

$$\dot{k} = (1 - \tau_t) y_t - c_t - (\delta_k + g_L + g_{\pi}) k_t,$$

Siendo τ_t la tasa impositiva sobre el ingreso de las familias. En ambos casos, lo recaudado por impuestos es igual a lo que gasta el Estado en capital humano e infraestructura.

La maximización de la función de bienestar con sujeción al conjunto pertinente de restricciones (presupuestales, forma de la función de producción, etc.) es la pieza central del análisis que permite determinar la trayectoria de crecimiento y la situación de estado estable.

El estado o equilibrio estable de este modelo puede entenderse como la situación en la cual: a) las variables dependientes adoptan en un momento t determinado los valores adecuados para: i) vaciar el mercado del producto, ii) equilibrar el gasto público con lo recaudado por impuestos y iii) preservar las condiciones de optimización intratemporal de la empresa representativa; b) el conjunto de las variables dependientes adopta la secuencia de valores desde ese momento t hasta el infinito requerida para maximizar la función de utilidad intertemporal. Este estado es localmente estable.

Hay dos soluciones alternativas: la descentralizada y la de un hipotético planeador central. Dos factores explican la diferencia entre ambas soluciones: a) la existencia de externalidades para una empresa representativa derivadas del uso de los factores acumulables cuyo costo la empresa puede no internalizar ni siquiera de manera parcial, como sucede con la infraestructura, y b) los impuestos que distorsionan la asignación de los recursos pero de los cuales un planeador central hace abstracción para establecer un óptimo social²⁴.

En los anexos *A* y *B* se describe en detalle el estado estacionario del modelo, es decir, sus condiciones de existencia y estabilidad, sus soluciones bajo los casos descentralizado y del planeador central y se examina la dinámica del modelo. En dichos anexos se encuentran, entre otros, la solución al tamaño y distribución óptimos del gasto público y las condiciones de estabilidad del sistema que permiten realizar un examen de sus propiedades dinámicas. Estos anexos, la sección anterior y el Anexo *C* conforman la base analítica de los ejercicios numéricos presentados en la siguiente sección.

V. EL ESTADO ESTABLE: CALIBRACIÓN Y RESULTADOS DEL ESCENARIO BÁSICO

En ésta y en la siguiente sección se presentan los ejercicios numéricos para reproducir situaciones de estado estable (estacionario), una básica y otras alternativas, y trayectorias de convergencia al estado estable. Con tales ejercicios se puede estimar, también, la velocidad con la cual la economía se aproxima a una situación de estado estable y, por ende, el número de años requerido para que la economía alcance tal estado a partir de situaciones en las cuales, por algún impacto de duración transitoria (un “choque”) u otra razón, aquella se encuentre en una situación diferente a la de estado estable.

En el Cuadro 4A presentamos los valores de los parámetros del modelo para el escenario básico del caso descentralizado (con un impuesto establecido sobre el ingreso y, por ende, que distorsiona).

²⁴ Una solución descentralizada sería aquella que se realizaría con base en decisiones individuales sin tener en cuenta efectos externos a cada productor.

Cuadro 4A
Parámetros del escenario básico
(El caso descentralizado)

Elasticidades del producto		Parámetros de la función de utilidad (1)		Tasas de crecimiento		Tasas de depreciación (2)		Parámetros del gasto público (3)	
α	0,2	ρ	0,02	g_{Π}	0,015	δ_K	0,03008	b	0,326
β	0,05	θ	2,146	g_L	0,022	δ_{Ω}	0,02	μ	0,674
γ	0,1					$\delta_K = \delta_X$			
ν	0,1								
φ	0,05								

(1) Véase el Anexo A. "En la literatura sobre modelos calibrados para países desarrollados, θ se ha ubicado, usualmente, en el rango 1-4, y ρ entre 1% y 5,5% (Santos, 1999, pp. 356 y ss.; McGrattan y Schmitz 1999, Cuadro 3A, y Allen y Carroll, 2001, p. 259)". Tomado de Greco (2002, Cap. IV). El parámetro de aversión al riesgo de la función de utilidad fue calculado por residuo a partir de la ecuación de Euler:

$$\theta = \frac{(1-\tau)\alpha \frac{1}{(k/y)} - \delta_k - \rho}{g_{\Pi}}$$

(2) La tasa de depreciación del capital privado fue calculada así: $z\delta_k + (1-z)\delta_w = \delta_{total} = 0,0271$, siendo z la participación del capital privado en el capital total; se estimó como el promedio (1950-1999) de la participación de la inversión privada real en la inversión total real ($z = 0,706$); esta metodología proviene de Harberger (1969). A falta de información suponemos que las tasas de depreciación de los capitales físico y humano son iguales.

(3) Véase Anexo A.

El Cuadro 4B presenta los parámetros del escenario básico bajo la solución del planeador central.

Los criterios para establecer estos parámetros son convencionales. En primer lugar, se utilizan los hallazgos econométricos u otra evidencia (aceptablemente sólida) del caso colombiano o, a falta de ésta, información reportada en la literatura internacional.

Así, las elasticidades del producto a los distintos factores productivos fueron seleccionadas teniendo en cuenta que la mayoría de los estudios econométricos del caso colombiano ha encontrado (para la segunda mitad del siglo XX, y bajo el supuesto de funciones de producción Cobb-Douglas) que la elasticidad del PIB real al capital

Parámetros del escenario básico
(El caso del planeador central)

Elasticidades del producto		Parámetros de la función de utilidad (1)		Tasas de crecimiento		Tasas de depreciación		Parámetros del gasto público	
α	0,2	ρ	0,02	g_{Π}	0,015	δ_k	0,03008	b	0,244
β	0,05	θ	6,34	g_L	0,022	δ_{Ω}	0,02	μ	0,756
γ	0,1					$\delta_k = \delta_x$			
ν	0,1								
φ	0,05								

(1) El parámetro de aversión al riesgo de la función de utilidad fue calculado por residuo a partir de la ecuación de Euler:

$$\theta = \frac{(\alpha - \gamma) \frac{1}{(k/y)} - \delta_k - \rho}{g_{\Pi}}$$

físico real agregado (privado más infraestructura pública) (lo que en nuestro caso corresponde a la suma $\alpha + \gamma + \nu$) es, aproximadamente 0,4²⁵. Además, suponemos que la elasticidad del producto a la infraestructura (ν) es 0,1 con base, entre otras consideraciones, en lo que se menciona en el siguiente párrafo.

A partir de un modelo de crecimiento (con una externalidad asociada al capital público del tipo contemplado por nosotros) Shioji (2001) deriva una ecuación de convergencia del ingreso aumentada con capital público. La elasticidad (implícita) calculada con métodos econométricos del producto al capital público en infraestructura, en el largo plazo se encuentra entre 0,1 y 0,15 (datos regionales de los Estados Unidos - 1960-1988, y de Japón - 1955-1999)²⁶. Esfahani y Ramírez (próxima publicación)

²⁵ Véase un conjunto de referencias en Greco (2002, Cap. 3).

²⁶ Para sus cálculos (econométricos) Limao y Venables (2001; apéndice) supusieron que el producto de la rama *servicios de transporte* es una función Cobb-Douglas de capital, trabajo e infraestructura, y una elasticidad de tal producto a la infraestructura igual a 0,3.

estimaron, con una muestra de 75 países desarrollados y en desarrollo y con cifras medias de tres períodos (1965-1975, 1975-1985 y 1985-1995), que las elasticidades del producto a los acervos en teléfonos y en capacidad de generación de energía se ubicaban en los rangos 0,08 – 0,095 y 0,128 – 0,156, respectivamente.

De otra parte, del análisis de Sánchez (1994, p. 87) se puede deducir que la elasticidad del producto colombiano al capital público (infraestructura más otro capital de empresas y administraciones públicas) es la quinta parte de la correspondiente al capital privado según las cifras del período 1965-1990. La estimación de la elasticidad del producto al capital público (infraestructura y capital de empresas públicas) realizada por Cárdenas *et al.* (1995), con base en cifras del período 1950-1994, resultó mayor que la implícita en los cálculos de Sánchez: 0,125, mientras que la estimación de Daza (1997) (referida a la elasticidad del producto privado al capital público) para el período 1950-1995 fue 0,06. De acuerdo con esto, parece sensato escoger la cifra mencionada previamente, 0,1, para la elasticidad del producto a la infraestructura²⁷.

La asignación de un valor numérico para la elasticidad del producto al capital humano ($\beta + \varphi$) resulta más arriesgada. En efecto, un análisis realizado por Kalaitzidakis *et al.* (2001)²⁸ para someter a prueba, entre otras, las hipótesis de influencia positiva pero no lineal del capital humano sobre la tasa de crecimiento económico permitió deducir que en países de nivel de ingreso per cápita intermedio y alto la acumulación de capital humano tiene efectos positivos pero variables, unos crecientes y otros decrecientes, según tipos específicos de capital humano (años de escolaridad y tasas de cobertura primaria, secundaria y total, y tasas de cobertura por niveles y género) y, para algunos, hasta negativos²⁹. Cár-

²⁷ Ramírez (1999) estimó, con base en un análisis *panel* de los departamentos colombianos (1960-1970, 1970-1980, 1980-1990) las siguientes elasticidades del producto: 0,099 – 0,115 para teléfonos; 0,34 – 0,35 para energía, y 0,13 para carreteras. Sobre esto, véase también Urrutia (1999).

²⁸ De tipo *panel data*: 93 países; 258 observaciones de tres decenios: 1960-1970; 1970-1980; 1980-1990 (*ibidem*).

²⁹ Uribe (1993, a y b) encontró evidencia (de corte transversal) en favor de dos hipótesis: a) los efectos de diversas medidas de formación o de acervo de capital humano son bastante diferentes, y más o menos significativos, para un mismo grupo dado de países, y b) tales efectos varían entre diferentes grupos de países. Así, por ejemplo, halló que si a una muestra total de 98 países (de la base de datos de Heston y Summers (versión de 1988) se la divide en cuatro submuestras de grupos de países relativamente homogéneos, la *proxy* de acervo de capital humano (años promedio de educación de la fuerza laboral) tiene impacto positivo (y significativo) sólo en los países del grupo 2 (ingreso medio bajo) pero su interrelación con la participación de las exportaciones en el PIB tiene efecto positivo (y significativo) en los países del grupo 3 (ingreso medio alto).

denas *et al.* (1995) estimaron, con cifras colombianas del período 1950-1994, la elasticidad del producto al capital humano en el rango 0,071 – 0,086. Posada (1993) estimó en 0,2 la elasticidad del producto al número de personas matriculadas en educación secundaria y universitaria para un período de la economía colombiana sobresaliente en términos de crecimiento y de avance en cobertura en tales niveles educativos.

A la luz de lo anterior, suponemos que la elasticidad correspondiente es 0,1.

La tasa media anual de crecimiento del cambio técnico colombiano del período 1950-1996 implícita en las cifras y supuestos consignados en el Cuadro 2 es 1,4% (pero con tendencia decreciente). Establecemos en 1,5% la tasa anual de aumento del cambio técnico exógeno (g_n) en el escenario básico.

Aunque la tasa anual de aumento de la población económicamente activa en Colombia fue 3,3% entre 1976 y 1996 (según los datos del Cuadro 2), la correspondiente a la población fue 2,2% en un período similar (Cuadro 1). Puesto que en una situación de estado estacionario ambas tasas deben ser iguales a fin de mantener estable la relación entre ambas poblaciones, se supuso que la fuerza laboral crece 2,2% anual.

El Cuadro 5 recoge los resultados básicos correspondientes a los parámetros presentados en los cuadros 4A y 4B y al procedimiento de calibración expuesto en el Anexo B.

Entre los resultados incluidos en el Cuadro 5 se puede mencionar que el gasto público óptimo para la sociedad (la solución del planeador central) equivale a 20% del producto, distribuido así: 4,88% en infraestructura (ya que $b = 0,244$) y 15,12% en capital humano (pues $\mu = 0,756$).

Un resultado que llama la atención en el Cuadro 5 es que el ahorro macroeconómico (para la solución descentralizada) es 28,9%, significativamente mayor que el que tiene la economía colombiana; esto es consecuencia de suponer que el Gobierno sólo dedica recursos a la inversión en capital humano e infraestructura (excluyendo la posibilidad de cualquier otro gasto); de este modo, todo el ingreso que el Estado drena de la economía se invierte y, por tanto, hace parte del ahorro nacional.

Cuadro 5
Principales variables dependientes (estado estable)

	Solución descentralizada	Planeador central
k / y (1)	2,066	2,066
ω / y	0,857	0,857
$(k + \omega) / y$	2,923	2,923
$k / (k + \omega)$	0,71	0,71
χ / y	1,5	2,254
$\frac{spriv}{y} = \frac{ipriv}{y}$	0,138	0,138
$(spriv + spub) / y$	0,289	0,339
g / y	0,15	0,20
c / y	0,711	0,661
$f_k(\cdot) - \delta_k$	0,0667	0,115
$(1 - \tau) f_k(\cdot)$	0,0823	—
$(1 - \tau) f_k(\cdot) - \delta_k = r$	0,052	—
$f_x(\cdot)$	0,0331	0,044
$f_w(\cdot)$	0,1167	0,1167

(1) Esta relación fue calculada en consistencia con el método para calcular la depreciación del capital privado, es decir, a la relación capital total/producto se le aplicó la tasa de participación "z" de la inversión privada en la inversión total (igual que en el Cuadro 4A).

VI. SIMULACIONES

En esta sección presentamos los resultados de dos clases de simulaciones. La primera permite apreciar las propiedades dinámicas del modelo; con ello se espera contribuir a mejorar nuestro entendimiento del proceso de crecimiento económico. En particular, esta primera clase de simulaciones puede contribuir a responder preguntas como las siguientes: ¿cómo se puede realizar una "contabilización" de los determinantes de una caída de la tasa de crecimiento de la economía?, ¿cuán

importantes son las acumulaciones de infraestructura o de capital humano para el crecimiento económico?; ¿cuál es la importancia que tiene el cambio técnico exógeno *versus* la de otros motores de crecimiento? La segunda clase de simulaciones es de “estática comparativa”; ofrece una respuesta cuantitativa a la pregunta: ¿cuánto bienestar pierde una sociedad por tener impuestos (incluso en la suma requerida para financiar el gasto público socialmente óptimo en educación e infraestructura) que distorsionan en vez de impuestos de suma fija, esto es, neutrales con respecto a las decisiones de consumo e inversión?

A. LA DINÁMICA DE LA TRANSICIÓN

El ejercicio descrito en esta sección se realiza bajo soluciones descentralizadas, y consiste en generar y analizar las reacciones desatadas a partir del momento en el cual se presenta, por una razón cualquiera, una brecha entre los niveles de estado estable de uno o varios de los acervos productivos (capital físico individual, humano o infraestructura) y los observados. Estas brechas impondrán otra entre el producto de estado estable y el observado. En los momentos siguientes se induce un proceso de crecimiento bajo una senda diferente a la de estado estable pero de convergencia hacia éste. Tal crecimiento, descontando el correspondiente al de estado estable, es de tipo endógeno pero transitorio: una vez alcanzado de nuevo el estado estable, el proceso culmina.

Bajo todas las situaciones alternativas de “choques” de impacto inicial negativo soportados por los acervos (“choques al acervo *x*” o, para simplificar la expresión, “choques de *x*”), la primera reacción del producto per cápita es caer 6,4% con respecto a su valor de estado estable correspondiente al momento inmediatamente anterior a la ocurrencia del choque³⁰. Esta respuesta inicial fue impuesta por nosotros y, con base en ella, se calcularon las magnitudes de las brechas iniciales de los acervos compatibles con ella. Las respuestas posteriores del producto son endógenas. Puesto que el producto per cápita correspondiente al estado estable continúa creciendo, gracias al aumento de la eficiencia técnica, las caídas del producto per cápita “observado” llegan a ser en el año inmediatamente siguiente un poco mayores.

³⁰ El PIB real per cápita colombiano cayó 6,2% en 1999 frente a su nivel de 1998. Se escogió un impacto inicial de esta magnitud a fin de que se pudiesen apreciar plenamente los efectos en los años posteriores bajo todos los escenarios.

El Cuadro 6 resume los resultados de ejercicios de choques y reacciones (o de impulso-respuesta) realizados con el modelo bajo el escenario llamado básico (modelo con capital físico individual, capital humano e infraestructura, y con impuestos en función del ingreso), y cuyos parámetros tienen los valores numéricos presentados en la sección anterior. Adicionalmente, en este cuadro se consignan los resultados principales de ejercicios similares para dos escenarios alternativos, a saber: el de una economía cuya producción no requiere infraestructura, pero sí capital humano, y otra que no requiere estos factores y, por ende, carece de estado (ni gasto público ni impuestos).

Se realizaron seis ejercicios de impulso-respuesta. El primero comienza con una reducción inicial de los tres acervos de capital en 15,8% respectivamente. El segundo parte de suponer que sólo se reduce el capital físico individual, y la magnitud de su reducción inicial es 26,33%. El tercer ejercicio supone que la economía no requiere un acervo de infraestructura y, dado esto, simula una contracción inicial de los dos acervos (capital físico individual y capital humano) en 15.8% respectivamente. El cuarto ejercicio tiene como escenario la economía sin infraestructura y, a diferencia del tercer ejercicio, supone que sólo se presenta la contracción inicial del capital físico individual. El quinto ejercicio se hace para una economía que no requiere capital humano ni infraestructura. En este escenario se simula la reducción del capital físico individual. En los escenarios 4 y 5 la reducción inicial del acervo compatible con la disminución inicial del producto per cápita en 6,4% es 19,75%. El sexto escenario corresponde a una economía que necesita las tres clases de acervos productivos pero carece de cambio técnico. En este último escenario se requiere una caída inicial de 21,3% del capital físico individual para que el producto soporte la misma caída inicial que en los otros escenarios.

Los gráficos 3 a 9 presentan las respuestas del producto ante las supuestas reducciones iniciales de los acervos bajo los seis escenarios mencionados, así como la evolución de las brechas entre los valores observados y los de estado estable del producto per cápita.

Como se aprecia en el Cuadro 6 y en los gráficos 3 a 8, el tiempo requerido para eliminar la mitad de la brecha inicial, bajo cualquiera de los escenarios alternativos, es un tiempo considerable, como mínimo ocho años, pudiendo llegar a casi 32 años, según uno u otro escenario. En todos los escenarios la reducción de la brecha, al principio, es más rápida que después. De todas maneras, al cabo de esos años el valor de la brecha no es despreciable: se ubica entre 2,61% y 3,89% del producto de estado estable (última fila del Cuadro 6).

Además de la observación anterior conviene mencionar otras que se desprenden de los resultados de los ejercicios reportados en el Cuadro 6.

Cuadro 6
Destrucciones de acervos de capital compatibles
con una brecha inicial de 6,4% del producto per cápita

Tipos de capital		Escenario					
		Básico 1	Básico 2	3 Economía sin infra- estructura 1 (2)	4 Economía sin infra- estructura 2	5 Economía sin estado (3)	6 Economía sin cambio técnico (4)
Físico	Absoluta	-0,598	-0,997	-1,156	-1,446	-1,180	-0,918
	Relativa (%) (5)	-15,8	-26,33	-15,8	-19,75	-19,75	-21,33
Humano	Absoluta	-0,791	-	-0,5349	-	-	-
	Relativa (%)	-15,8	-	-15,8	-	-	-
Infraestructura	Absoluta	-0,248	-	-	-	-	-
	Relativa (%)	-15,8	-	-	-	-	-
Tiempo de eliminación de la mitad de la brecha inicial del producto per cápita (medido en años)		14,27	7,89	19,21	13,66	31,91	7,16
Tasa de crecimiento media per cápita (%) (6)		1,86	2,15	1,78	1,88	1,693	0,511
Brecha "final" (%): $\frac{y^* - y_{observado}}{y^*}$ (7)		3,32	3,891	3,08	3,431	2,609	3,47

(1) Estos resultados se obtienen a partir del escenario básico, pero suponiendo que no hay choques provenientes del capital humano ni de la infraestructura.

(2) Los parámetros de la economía sin infraestructura, y distintos a los del escenario básico, son: $\alpha = 0,3$, $\theta = 3,359$, $\mu = 1$. Para todos los escenarios, excepto el que no tiene cambio técnico, además de los cambios propios para la construcción de cada escenario, el parámetro θ es el parámetro de ajuste, y lo demás permanece constante.

(3) Los parámetros de la economía sin Estado, y distintos a los del escenario básico son: $\alpha = 0,4$, $\theta = 5,982$.

(4) Los parámetros de la economía sin cambio técnico, y distintos a los del escenario básico son: $\rho = 0,052$, $\mu = 0,76$.

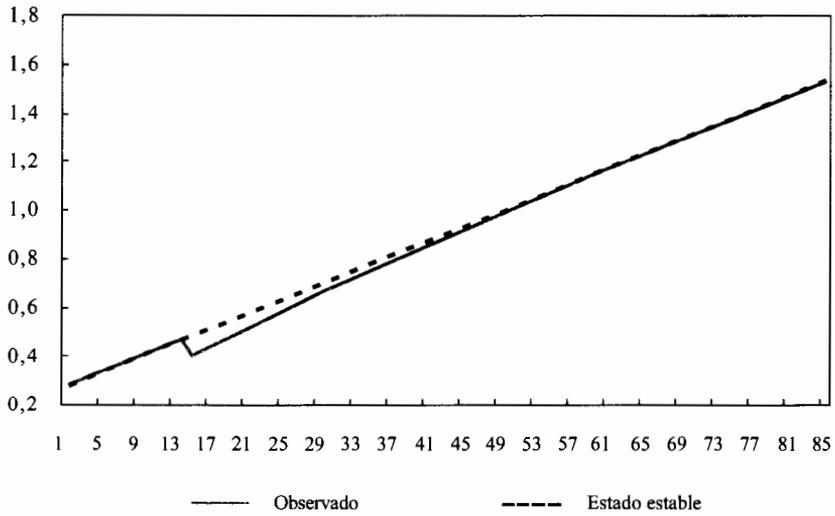
(5) Caída inicial/capital de estado estable previo.

(6) Tasa de crecimiento media observada durante el período de ajuste (período de reducción de la mitad de la brecha inicial).

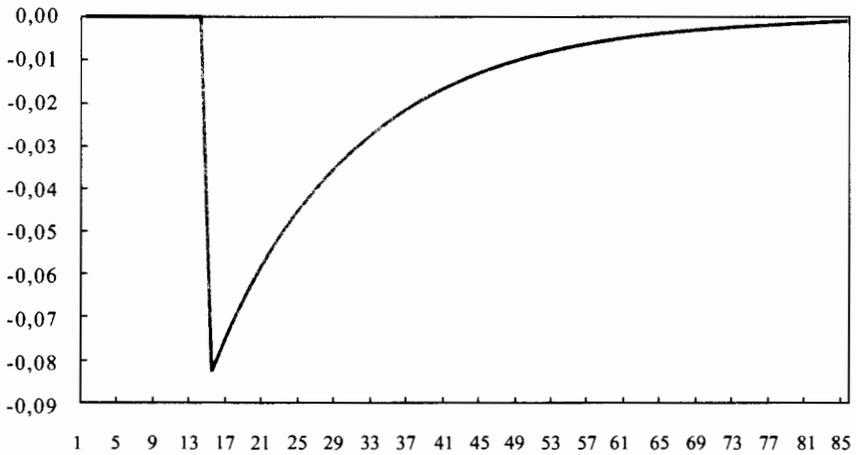
(7) Estas magnitudes se refieren al PIB per cápita. La brecha "final" corresponde a la que se observaría al cabo del tiempo requerido para eliminar la mitad de la brecha inicial.

Gráfico 3
Escenario básico 1

Producto per cápita
(Logaritmos)



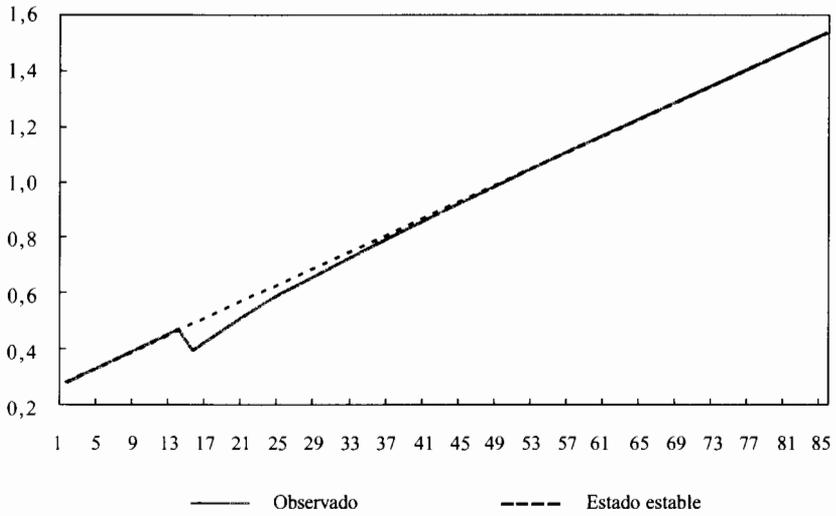
Brecha del producto per cápita
(Observado-estado estable) / Estado estable



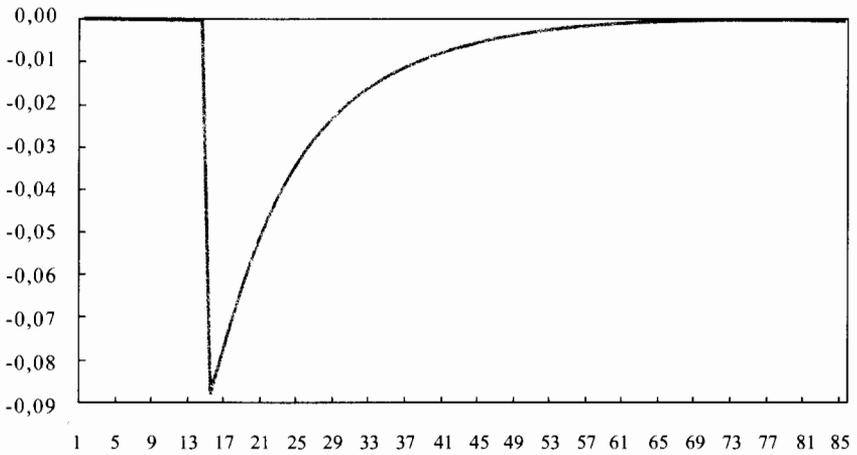
Fuente: Cálculos de los autores.

Grafico 4
Escenario básico 2

Producto per cápita
(Logaritmos)

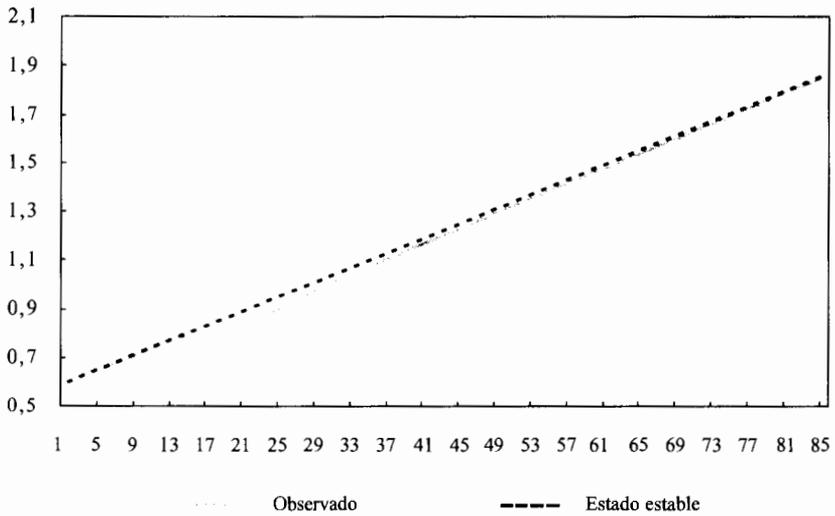
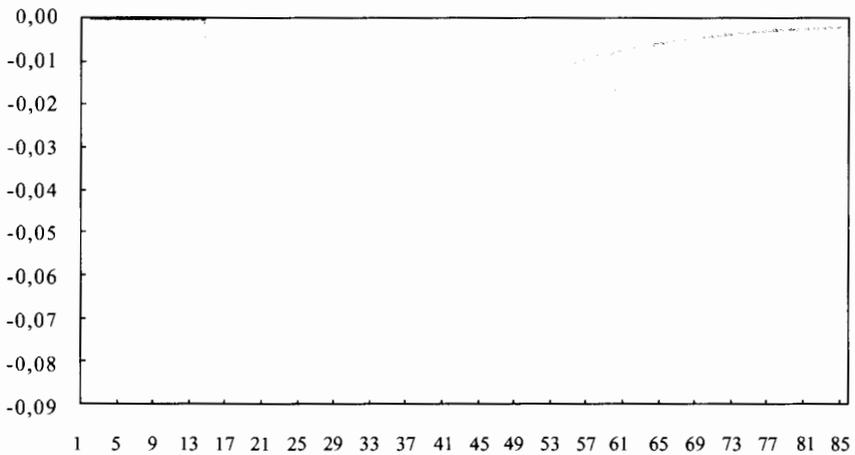


Brecha del producto per cápita
(Observado-estado estable) / Estado estable



Fuente: Cálculos de los autores.

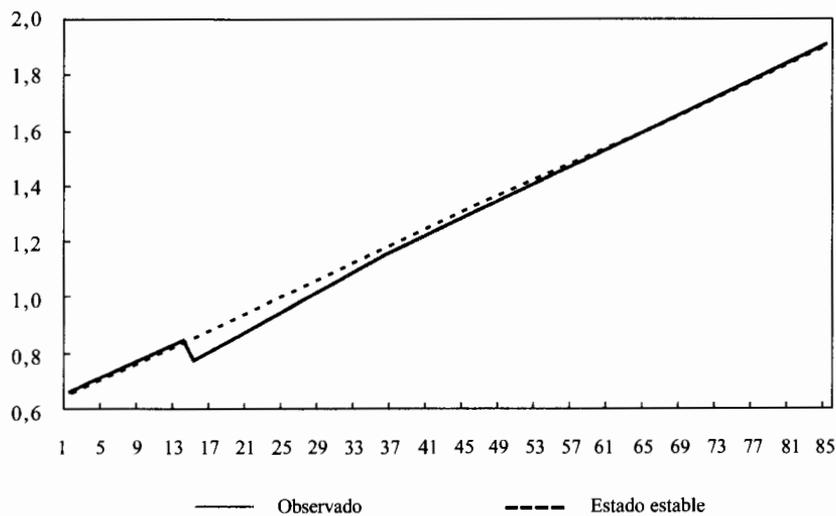
Escenario 3. Economía sin infraestructura 1

Producto per cápita
(Logaritmos)Brecha del producto per cápita
(Observado-estado estable) / Estado estable

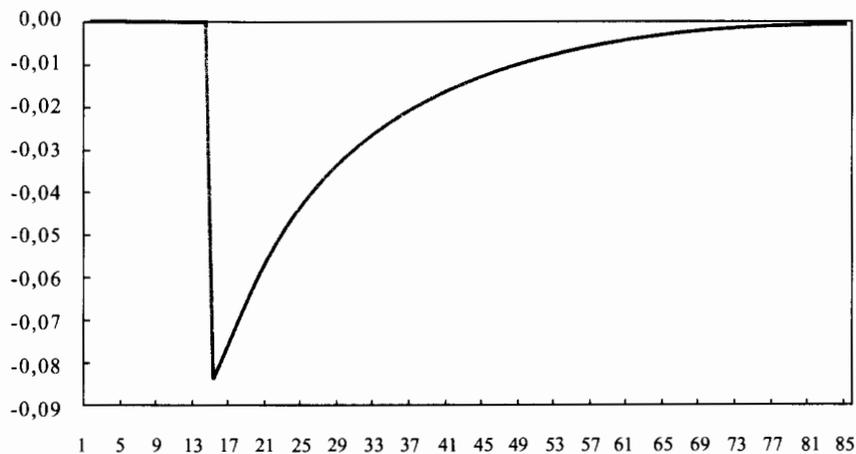
Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 6
Escenario 4. Economía sin infraestructura 2

Producto per cápita
(Logaritmos)



Brecha del producto per cápita
(Observado-estado estable) / Estado estable



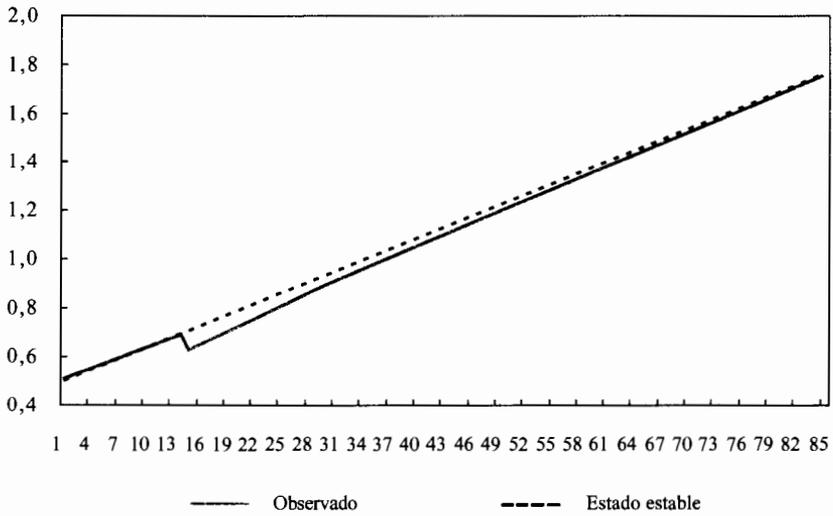
Fuente: Cálculos de los autores.

Grafico 7

Escenario 5. Economía sin estado

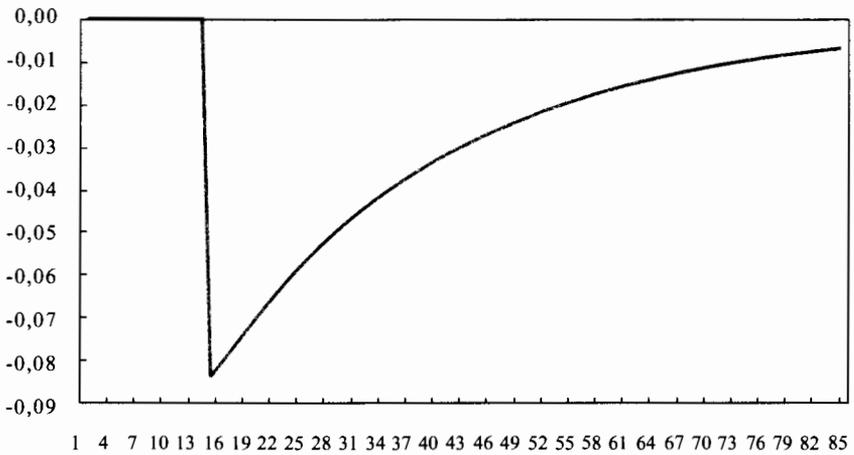
Producto per cápita

(Logaritmos)



Brecha del producto per cápita

(Observado-estado estable) / Estado estable

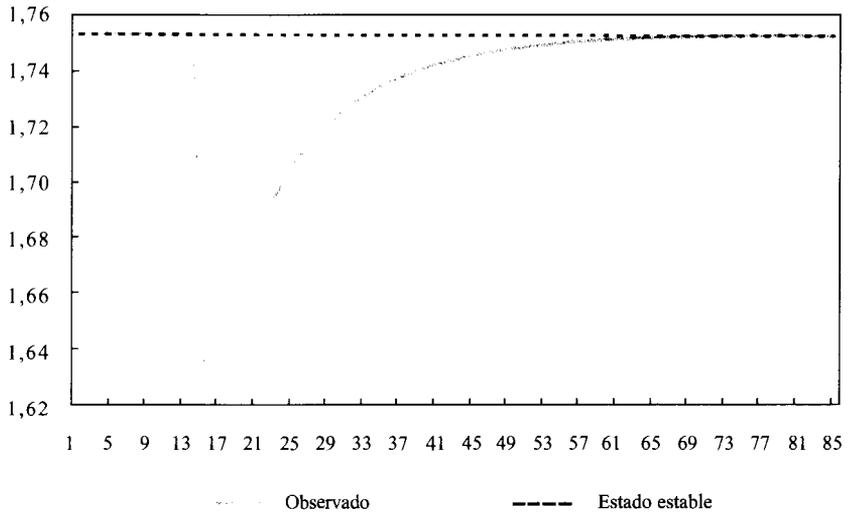


Fuente: Cálculos de los autores.

Figura 8

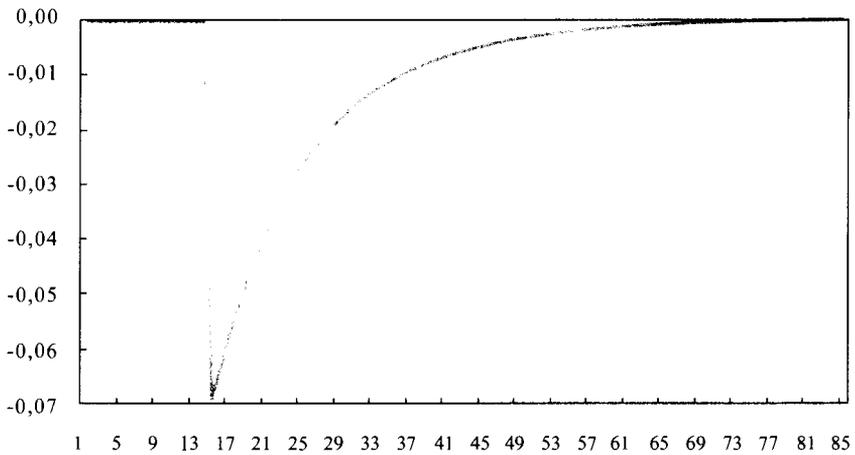
Escenario 6. Economía sin cambio técnico

Producto per cápita



Brecha del producto per cápita

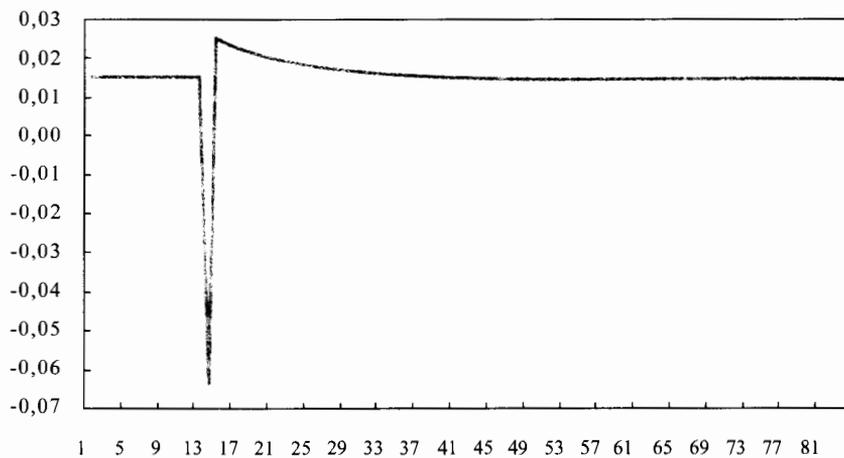
(Observado-estado estable) / Estado estable



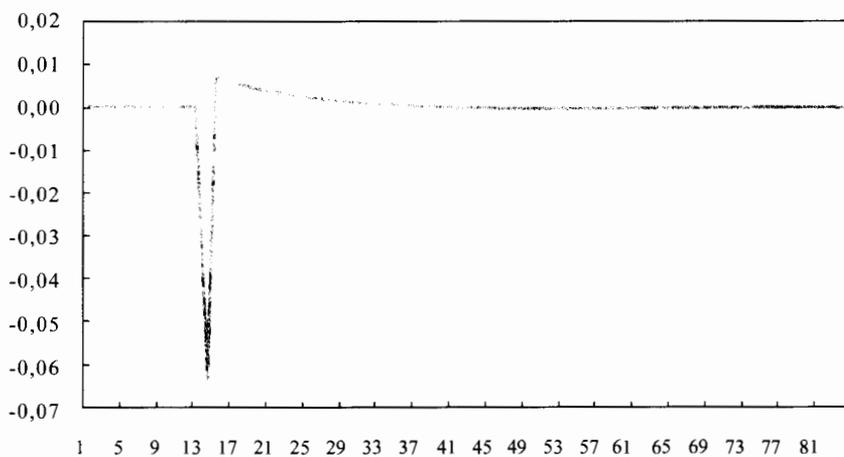
Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 9
Tasa de crecimiento de transición

Escenario básico 2



Economía sin cambio técnico



Fuente: Cálculos de los autores.

Al comparar los resultados bajo los escenarios básicos 1 y 2 se concluye que si una economía sólo sufre un choque de capital físico individual, requiriendo capital humano e infraestructura, se ha de recuperar más rápido (su tasa de crecimiento durante la transición será mayor) que si el choque inicial es tanto de capital físico individual como de capital humano o de capital humano e infraestructura. Y esto sucede así aunque el impacto inicial sobre el producto per cápita sea igual tanto con choques a uno como a varios de los acervos. De esta comparación surge, por tanto, una medida de la importancia de las acumulaciones de capital humano e infraestructura: la diferencia entre el número de años requerido para la recuperación cuando la economía sólo soporta reducción de capital físico individual y cuando soporta la caída en los tres acervos productivos. La contraparte de esta medida es la diferencia entre las tasas de crecimiento del producto per cápita durante la transición bajo un escenario o bajo el otro.

Como recordará el lector, la tasa de crecimiento del producto per cápita en situación de estado estable es la correspondiente al componente exógeno del cambio técnico, g_{π} , igual, por hipótesis, a 1,5% anual. Según el Cuadro 6, la diferencia entre la tasa de crecimiento del producto per cápita durante la transición bajo cualquier escenario con cambio técnico (la mayor tasa es 2,15% anual durante el período de cierre de la mitad de la brecha del producto per cápita)³¹ y la tasa correspondiente al escenario sin cambio técnico, 0,51%, muestra la importancia del componente exógeno del cambio técnico como motor de crecimiento. En efecto, el otro motor de crecimiento, el asociado a la acumulación factorial conducente a la recuperación del estado estable sólo aportaría, a lo sumo, 0,51% anual al crecimiento del producto per cápita³².

Una economía que requiere capital humano e infraestructura pero que soporta sólo un choque de capital físico (escenario básico 2) se recupera más rápido que

³¹ La velocidad de convergencia del producto per cápita encontrada por varios estudios empíricos es, aproximadamente, 2% por año (Sala-i-Martin 2001). Las velocidades de convergencia del producto per cápita correspondientes a los distintos escenarios con cambio técnico de nuestro modelo están entre 1,69% y 2,15% anual (Cuadro 6). Nuestros resultados, en cuanto a velocidades de convergencia o tiempos de reducción de las brechas, también son, grosso modo, compatibles con los hallados por Esfahani y Ramírez (próxima publicación) con un modelo econométrico de determinación simultánea de crecimiento económico e infraestructura.

³² Estos resultados son compatibles con los más realistas entre los varios reportados por Zarta (1999), siguiendo los experimentos de King y Rebelo (1993), aunque su modelo es diferente al nuestro.

otra que soporta el mismo choque pero que no requiere capital humano ni infraestructura (escenario de economía sin Estado). De la comparación de los tiempos de recuperación y de las tasas de crecimiento de estos dos escenarios también se puede deducir la importancia que tienen las acumulaciones de estos dos acervos.

Finalmente, si una economía que requiere capital físico individual y capital humano sufre un choque sólo de capital físico (escenario 4) se ha de recuperar más rápido (y su tasa de crecimiento será mayor) que si el choque inicial es tanto de capital físico individual como de capital humano (escenario 3). Por tanto, al comparar las tasas de crecimiento o los tiempos de eliminación de la mitad de las brechas en estos dos escenarios se puede deducir la importancia del capital humano.

B. IMPUESTOS Y BIENESTAR

El escenario básico describe la solución descentralizada con un impuesto en función del ingreso; éste, por tanto, distorsiona las decisiones de consumo e inversión. Un escenario alternativo es el de impuestos de suma fija.

El Cuadro 7 presenta los efectos de la existencia de impuestos que distorsionan. La manera de estimar tales efectos es convencional: se comparan los resultados del escenario con impuestos dependientes del ingreso y los de un escenario similar, excepto por tener sólo un impuesto de suma fija. Este último escenario tiene los mismos parámetros a fin de evitar el error de asignar a la existencia de impuestos

Cuadro 7
Consumo y producto en la solución descentralizada
(escenarios evaluados en el estado estable)

	Impuestos que distorsionan		Impuestos de suma fija		Diferencia	
	Valor absoluto	Proporción del producto (%)	Valor absoluto	Proporción del producto (%)	Valor absoluto	Proporción del producto generado con distorsión (%)
Consumo	1,157	71,14	1,198	68,69	0,0408	2,51
Producto	1,627	100	1,744	100	0,1173	7,21

que distorsionan los efectos que corresponderían a la modificación de otros parámetros. El gasto público óptimo (de la solución descentralizada), como proporción del producto, es igual bajo los dos escenarios (15%), tal como se había deducido en la sección IV.

De los resultados consignados en el Cuadro 7 se deduce que la pérdida de bienestar de la sociedad es significativa cuando se financia el gasto público con impuestos que distorsionan en vez de hacerlo con impuestos de suma fija. Así, en una economía con impuestos que distorsionan sería necesario compensar a los consumidores mediante una transferencia anual equivalente a 2,51% del producto a fin de que tuviesen un nivel de consumo y, por ende, de bienestar equivalentes a los que tendrían bajo el escenario alternativo³³.

VII. RESUMEN, CONCLUSIONES, CONJETURAS Y REFLEXIONES FINALES

El hilo conductor de este documento es la relación entre el gasto público productivo, entendido aquí como el realizado en formación de capital humano e infraestructura, y la actividad económica general. A lo largo de una trayectoria conducente al estado estable, tal relación se expresa así: este gasto público puede ser uno de los dos motores del crecimiento económico. Alcanzado ya el estado o situación de equilibrio estable, el nivel del producto por unidad de trabajo eficiente depende positivamente de los niveles (óptimos) de capital humano e infraestructura por unidad de trabajo eficiente, así que la conservación del estado estable exige mantener la tasa de crecimiento del gasto público en capital humano e infraestructura a un nivel igual al de la tasa conjunta de crecimiento de la fuerza laboral y del cambio técnico elevador de su eficiencia.

En las secciones anteriores presentamos y utilizamos un modelo de crecimiento económico para tener un mejor entendimiento cuantitativo de lo anterior. El mode-

³³ También con un modelo de equilibrio general intertemporal, pero con características diferentes, entre éstas la incorporación de externalidades asociadas al aprendizaje (en el trabajo o en otras actividades), Suescún (2001) calculó pérdidas de bienestar ocasionadas por el recaudo de 2% del PIB mediante distintos impuestos que distorsionan; sus resultados, en los casos de impuestos al ingreso (ingreso laboral y de capital), implicarían pérdidas de bienestar (en lo referente al "efecto consumo" en el estado estacionario) mucho mayores que las estimadas por nosotras si el recaudo equivaliese a 15% del PIB.

lo fue calibrado con datos que permiten considerarlo como una réplica simplificada de la economía colombiana; es del tipo neoclásico de optimización intertemporal pero ampliado con la incorporación de dos factores productivos adicionales al capital físico individual y al trabajo simple (o trabajo reductible al esfuerzo carente de calificación formal): capital humano e infraestructura. El modelo supone que la infraestructura es un bien público que da origen a una externalidad positiva en la producción, pero que puede estar sujeto a congestión.

Entre las implicaciones más interesantes del modelo se pueden señalar las siguientes:

Si por alguna razón el capital físico individual, en un momento cualquiera, es inferior al de estado estable, de manera que el producto que se observe en ese momento también lo sea, el nivel de éste iniciará un proceso de aproximación a su nivel de estado estable a una velocidad mayor (en un tiempo menor) que la que se registraría en una economía que no utilice capital humano ni infraestructura.

Pero si el nivel de producto observado es inferior al de estado estable no sólo por la existencia de una brecha entre el capital físico individual observado y el de estado estable, sino también porque existen brechas de capital humano e infraestructura, la convergencia al estado estable ha de ser mucho más lenta que en la economía que no utilice estos últimos factores. Y pueden pasar muchos años, 15, 25 ó más, antes de que se pueda considerar que la brecha entre el producto observado y el que correspondería a su estado estable ha desaparecido o se ha tornado poco significativa.

Otra implicación que se resalta se refiere a la importancia del cambio técnico exógeno. En efecto, aun si suponemos que durante un período de tiempo apreciable, digamos 20 años, la economía se encuentra en una fase de transición hacia su estado estable y que, por tanto, es impulsada a éste por los motores correspondientes a las disminuciones paulatinas de las brechas entre los acervos observados de sus factores productivos y sus niveles de estado estable, un cambio técnico exógeno que se presente a una tasa mayor que 0,51% anual será el principal motor de *crecimiento durante la misma transición*, además de que ha de ser el único motor a partir del momento en el cual la economía alcance su estado estable.

Más aún, en aquellas economías en las cuales la tasa de cambio técnico exógeno es relativamente sustancial, por ejemplo, 1% anual o más, se puede considerar que la

mitad o una proporción mayor de la tasa de crecimiento del producto per cápita se puede explicar por este factor *durante una fase de transición hacia su estado estable*, mientras que sólo una fracción minoritaria, por las tasas de acumulación de acervos productivos. Y en situación de estado estable, como ya se mencionó, el cambio técnico exógeno explica todo el crecimiento del producto per cápita.

Una interpretación del crecimiento económico colombiano durante la mayor parte del siglo XX, a la luz de lo anterior, se presenta en los dos párrafos siguientes.

En el período 1975-1996 la acumulación de capital físico privado y público (éste último compuesto por infraestructura y otro capital público) fue relativamente rápida: 4,86% anual³⁴ y probablemente lo fue también la de capital humano³⁵. Este ritmo de crecimiento no sólo fue alto (juzgado en términos internacionales, aunque bastante inferior al de los países del sudeste asiático)³⁶ sino más rápido que el registrado para el período 1925-1975, que fue 3,5% (Cuadro 2). Es muy probable que el rápido y acelerado crecimiento del capital físico hubiese obedecido, en parte, a intentos de reducir la brecha existente, alrededor de los años 50, entre el nivel observado de la infraestructura y el que correspondería a una situación de estado estable.

No obstante, el rápido aumento del capital físico contribuyó muy poco al crecimiento económico. En efecto, la tasa de aumento del producto por trabajador (en rigor: por miembro de la *PEA*) durante los años corridos entre 1976 y 1996 fue, apenas, 0,73% anual, mientras que fue 2,44% entre 1925 y 1975 (según se deduce de las cifras del Cuadro 2). Aunque no tenemos series completas y confiables de variables que sirvan como indicadores aproximados del capital humano para el período 1925-1996 suponemos que la evolución de éste no fue la correspondiente a una desaceleración, al menos no en los ritmos requeridos para explicar tan mediocre desempeño del producto por trabajador. Se puede deducir, entonces, que: a) el cambio técnico exógeno fue el motor de crecimiento que se desaceleró durante los años 1976-1996; b) al perder velocidad, hizo que se redujera también la del

³⁴ Con base en cifras a precios de 1975 y con una elasticidad del producto al capital físico total de 0,42 (Cuadro 2).

³⁵ Londoño, *op. cit.*

³⁶ En las cuatro economías más dinámicas del sudeste asiático (Hong Kong, Singapur, Corea del Sur y Taiwán) el capital creció a la tasa media de 11,4% anual entre 1966 y 1990 (Young, 1998).

producto por trabajador, y c) el crecimiento económico del período 1976-1996 tuvo las características de una transición a un estado estable pero con tendencia al estancamiento técnico y, por ende, del producto por trabajador.

El modelo presentado en este documento permite apreciar la importancia del gasto público destinado a la formación de capital humano e infraestructura, pero también la pérdida de bienestar que se deriva de la financiación de cualquier gasto público con el impuesto a la renta en vez de hacerlo con impuestos que no crean distorsiones, esto es, neutrales en lo que se refiere a las decisiones de consumo e inversión. Así, cuando se recauda 15% del producto nacional mediante el impuesto a la renta sería necesario devolver a los consumidores 2,51% de aquél (haciendo abstracción de costos administrativos) para compensarlos por la pérdida de bienestar asociada al hecho de no haberlos gravado con impuestos neutrales. De aquí no se deduce, sin embargo, que sea razonable una propuesta de eliminación inmediata de todos los impuestos que distorsionan la asignación de los recursos. Para defender o rechazar tal propuesta habría que considerar los costos administrativos de la sustitución de impuestos que distorsionan por los neutrales. Con todo, sí parece sensato concluir que el país debería pensar en una transformación de su sistema tributario en uno que imponga menores distorsiones.

Según el modelo, el gasto público óptimo para la sociedad (la solución del planeador central) es 20% del *PIB*: 15,1% en capital humano, que podemos asimilarlo a gasto en educación y salud, y 4,9% en infraestructura (Cuadro 5)³⁷. Esta estimación permite lanzar un juicio sobre la magnitud observada del gasto público colombiano en capital humano e infraestructura, que equivalió a 15,7% del *PIB* en 2001 (Cuadro 3).

La cifra total estimada para el gasto público en capital humano en la actualidad, cercana a 10% del *PIB*, parece coincidir con la óptima social pues es un hecho que hay unas ofertas y demandas privadas de educación y salud (así como de infraestructura), y financiadas de manera privada, que, al menos en parte, reflejan preferencias y tecnologías diversas y una sustitución imperfecta entre ofertas públicas y privadas en tales rubros. En el caso de la educación, 37,5% de quienes estaban estudiando en primaria, secundaria o superior en el año 2000 asistían a planteles privados³⁸, siendo, hasta hoy, relativamente modesta la proporción de la

³⁷ De acuerdo con Daza (1997), el gasto público óptimo en infraestructura es 4,8% del *PIB*.

³⁸ DANE: Encuesta Nacional de Hogares, septiembre (etapa nacional), 2000.

financiación pública de la educación impartida por el sector privado (a través de becas, concesiones, etc.). Por tanto, parece razonable concluir que una medida del exceso de gasto público con respecto a su nivel óptimo sería la cifra que resultaría de comparar el nivel óptimo neto (gasto óptimo social menos gasto privado) con el gasto público observado. Nos parece que hay, en términos gruesos, un equilibrio entre el gasto público efectivamente realizado en capital humano y el gasto público óptimo neto (gasto óptimo menos gasto privado). Esto significa que los esfuerzos sociales adicionales en materias de cobertura y calidad no deberían exigir, a partir de ahora, un gasto público que crezca a velocidades mayores que las del *PIB* sino mejoras sustanciales de la eficiencia con la cual se gastan los recursos públicos.

En el caso de la infraestructura, en cambio, sí parece existir un exceso de gasto público efectivo frente al nivel óptimo. De un lado, el primero puede estimarse entre 5% y 7,3% del *PIB* (como lo anotamos al comentar las cifras del Cuadro 3); de otro lado, el gasto óptimo, como ya se ha dicho, es 4,9% del *PIB* pero, en la realidad, una parte del gasto efectivo es privado³⁹. Probablemente el gasto público óptimo neto (gasto óptimo menos gasto privado) asciende a un monto que está entre 3,5% y 4,5% del *PIB*.

Ante el hecho evidente de que algunos componentes de la infraestructura del país son insuficientes o inadecuados, lo anterior parece paradójico. Pero la paradoja desaparecería si, como lo indica la literatura del caso colombiano, los problemas básicos en este campo no son de magnitud global del gasto público en infraestructura sino de composición inadecuada entre los diversos rubros de este gasto y de bajo grado de eficiencia⁴⁰.

Los últimos párrafos refuerzan una conclusión anterior: la desaceleración del crecimiento económico colombiano durante la segunda mitad del siglo XX no podría atribuirse, entonces, a un crecimiento del gasto público en capital humano e infraestructura demasiado rápido o demasiado lento; o crecieron demasiado rápido otros

³⁹ De acuerdo con el *Progreso económico y social en América Latina. Informe 2001*, del Banco Interamericano de Desarrollo (*BID*), en Colombia las participaciones del sector privado en generación, transmisión y distribución de energía eléctrica son 70%, 10% y 50%, respectivamente (p. 189).

⁴⁰ Urrutia (1995) y Daza (1997). En Urrutia (*op. cit.*) se encuentran estimaciones de ineficiencias y sobrecostos asociados al gasto público colombiano en infraestructura, y referencias a documentos oficiales relativos a estos problemas.

componentes (improductivos o poco productivos) del gasto público o las causas de la desaceleración fueron otras, como el ya mencionado debilitamiento del cambio técnico exógeno.

Si tratamos de prever el futuro con la ayuda del modelo podemos mencionar dos cosas: a) no es alta la probabilidad de un rápido retorno del crecimiento del producto per cápita a un ritmo como el del período 1925-1975 (a menos que se reanudara una larga fase de rápido cambio técnico exógeno); b) además, la ola actual de atentados terroristas y secuestros (adicional a las ya altas cifras de homicidios), si no se contrarresta de manera eficaz, podría conducirnos a una situación en la cual se amplíen nuevamente las brechas entre los niveles observados de capital físico individual, infraestructura y capital humano y los de estado estable a causa de lo mencionado y la consecuente emigración de personal calificado⁴¹.

Si sucede lo peor, que se amplíen las brechas entre los niveles observados y de estado estable del capital físico individual, del capital humano y de la infraestructura, el resultado será, según el modelo y cuando las brechas dejen de ampliarse y comience el proceso de su reducción, una convergencia del producto per cápita hacia un estado estable a un ritmo relativamente lento.

⁴¹ La preocupación de los economistas por los eventuales efectos de la violencia sobre el crecimiento colombiano actual es evidente, por ejemplo, en Cárdenas (2002).

REFERENCIAS

- Aschauer, David (1989). "Is public expenditure productive?", *Journal of Monetary Economics*, No. 23.
- Banco de la República (2002). *Informe de la Junta Directiva al Congreso de la República*, julio.
- Baier, Scott; Glomm, Gerhard (2001). "Long-run growth and welfare effects of public policies with distortionary taxation", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 25 (diciembre).
- Barro, Robert J. (1990). "Government spending in a simple model of endogenous growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, parte 2.
- Barro, Robert; Sala-i-Martin, Xavier (1995). *Economic Growth*, McGraw-Hill.
- Bernanke, Ben; Gürkaynak, Refet (2001). "Is Growth exogenous? Taking Mankiw, Romer, and Weil Seriously", *NBER Working Paper*, No. 8.365 (julio).
- Bleaney, Michael; Nishiyama, Akira (2002). "Explaining Growth: A Contest Between Models", *Journal of Economic Growth*, Vol. 7, No. 1.
- Borjas, George; Acosta, Olga Lucía (2000). "Education Reform in Colombia", en *Fedesarrollo*, Working Paper Series, No. 19.
- Cárdenas, Mauricio (1995). "Comentarios" (a la ponencia de Gregory Ingram: "Infraestructura y crecimiento económico", en *Crecimiento económico. Teoría, instituciones y experiencia internacional*, Banco Mundial-Banco de la República-Tercer Mundo Editores.
- _____ (2002). "Economic growth in Colombia: A reversal of "Fortune"?", *Archivos de Macroeconomía (DNP)*, No. 179.
- _____ ; Escobar, Andrés; Gutiérrez, Catalina (1995). "La contribución de la infraestructura a la actividad económica en Colombia", *Ensayos sobre política económica*, No. 28.
- Cepal (1957). *Análisis y proyecciones del desarrollo económico. El desarrollo económico de Colombia, DANE*.

- Chiang, Alpha C. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática*, tercera edición, McGraw-Hill.
- Comisión de Racionalización del Gasto y de las Finanzas Públicas (1997). *Informe final*, Ministerio de Hacienda y Crédito Público, República de Colombia.
- Daza, Ana María (1997). “Infraestructura física y productividad del sector privado: otra evidencia empírica”, *Universitas Económica*, Vol. 9, No. 3.
- Easterly, William (2001). *The Elusive Quest for Growth*, The MIT Press.
- Echeverry, Juan Carlos; Escobar, Andrés; Santa María, Mauricio (2002). “Tendencia, ciclos y distribución del ingreso en Colombia: una crítica al concepto de “modelo de desarrollo”, *Archivos de Macroeconomía* (DNP), No. 186.
- Esfahani, Hadi; Ramírez, María Teresa (próxima publicación). “Institutions, Infrastructure, and Economic Growth”, *Journal of Development Economics*.
- Ghosh, Sugata; Iannis, Mourmouras (2002). “On public investment, long-run growth, and the real exchange rate”, *Oxford Economic Papers*, No. 52.
- Glomm, Gerhard y B. Ravikumar (1994). “Public investment in infrastructure in a simple growth model”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 18, No. 6.
- Greco (2002). *El crecimiento económico colombiano en el siglo XX*, Banco de la República – Fondo de Cultura Económica.
- Harberger, Arnold (1969). “La tasa de rendimiento del capital en Colombia”, *Planeación & Desarrollo*, Vol. 1, No. 3.
- Heston, Alan; Summers, Robert; Aten, Bettina (2001). “PennWorld Table Version 6.0”, en (<http://webhost.bridgew.edu.baten>).
- Jones, Larry; Manuelli, Rodolfo (1990). “A convex model of equilibrium growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 98.
- Kalaitzidakis, Pantelis; Mamuneas, Theofanis; Savvides, Andreas; Stengos, Thanasis (2001). “Measures of Human Capital and Nonlinearities in Economic Growth”, *Journal of Economic Growth*, Vol. 6, No. 3.

- King, Robert; Rebelo, Sergio (1990). "Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5.
- _____; _____ (1993). "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review*, Vol. 83, No. 3.
- Limao, Nuno; Venables, Anthony (2001). "Infrastructure, Geographical Disadvantage, Transport Costs, and Trade", *The World Bank Economic Review*, Vol. 15, No. 3.
- Londoño, Juan Luis (1995). *Distribución del ingreso y desarrollo económico. Colombia en el siglo XX*, Tercer Mundo Editores.
- Mankiw, Gregory; Romer, David; Weil, David (1992). "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 107, No. 2.
- McDonald, Scott; Roberts, Jennifer (2002). "Growth and multiple forms of human capital in an augmented Solow model: a panel data investigation", *Economic Letters*, Vol. 74, No. 2.
- Misas, Martha; Posada, Carlos Esteban (2000). "Crecimiento y ciclos económicos en Colombia en el siglo XX", *Revista del Banco de la República*, No. 878, diciembre.
- Montenegro, Armando (1995). "El crecimiento económico colombiano", en *Crecimiento económico. Teoría, instituciones y experiencia internacional*, Banco Mundial-Banco de la República-Tercer Mundo Editores.
- Núñez, Jairo; Steiner, Roberto; Cadena, Ximena; Pardo, Renata (2002). "¿Cuáles colegios ofrecen mejor educación en Colombia?", documento CEDE, 2002-03, Universidad de los Andes.
- Posada, Carlos Esteban (1993). "Crecimiento económico, capital humano y educación: la teoría y el caso colombiano posterior a 1945", *Planeación & Desarrollo*, Vol. XXIV, edición especial.
- Posada, Carlos Esteban; González, Francisco (2000). "El gasto en defensa, justicia y seguridad", *Revista de Economía Institucional*, No. 2, primer semestre.
- Pritchett, Lant (2001). "Where Has All the Education Gone?", *The World Bank Economic Review*, Vol. 15, No. 3.

- Ramírez, María Teresa (1999). "On Infrastructure and Economic Growth", Ph. D. Dissertation, University of Illinois (Urbana-Champaign).
- Rebelo, Sergio (1991). "Long-run policy analysis and long-run growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 99.
- Romer, David (1996); *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill.
- _____ (2001). *Advanced Macroeconomics* (2a. edición), McGraw-Hill.
- Sala-i-Martin, Xavier (2000). *Apuntes sobre crecimiento económico* (segunda edición), Antoni Bosch.
- _____ (2001). "15 years of New Growth Economics: What Have We Learnt?", documento presentado en *Fifth Annual Conference of the Central Bank of Chile, The Challenges of Economic Growth*, Santiago de Chile, noviembre.
- Sánchez, Fabio (1994). "El papel del capital público en la producción, la inversión y el crecimiento económico en Colombia", en *Estabilización y crecimiento. Nuevas lecturas de macroeconomía colombiana*, Tercer Mundo-Fedesarrollo.
- Shioji, Etsuro (2001). "Public Capital and Economic growth: A Convergence Approach", *Journal of Economic Growth*, Vol. 6, No. 3.
- Solow, Robert (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. LXX, No. 1.
- Stiglitz, Joseph (1989). "Markets, Market Failures, and Development", *American Economic Review*, Vol. 79, No. 2.
- Suescún, Rodrigo (2001). "Impuesto a las transacciones: implicaciones sobre el bienestar y el crecimiento", *Planeación & Desarrollo*, Vol. XXXII, No. 4.
- Tanzi, Vito; Schuknecht, Ludger (2000). *Public Spending in the 20th Century*, Cambridge University Press.
- Temple, Jonathan (2000). "Education and economic growth", documento presentado en el *HM Treasury seminar on economic growth and government policy*, octubre (vía internet).

Uribe, José Darío (1993a). “Educación, complementariedades productivas y crecimiento económico”, *Planeación & Desarrollo*, Vol. XXIV (edición especial).

_____ (1993b). “Infraestructura física, ‘clubs de convergencia’ y crecimiento económico: alguna evidencia empírica”, *Archivos de Macroeconomía* (DNP), No. 7.

Urrutia, Miguel (1995). “La eficiencia de la inversión pública en Colombia”, Nota Editorial, *Revista del Banco de la República*, Vol. LXVIII, No. 817.

_____ (1998). “Asignación de recursos por estudiante atendido: un paso necesario para hacer más eficiente nuestra educación”, Nota Editorial, *Revista del Banco de la República*, Vol. LXXI, No. 854.

_____ (1999). “Infraestructura física y crecimiento económico”, Nota Editorial, *Revista del Banco de la República*, Vol. LXXII, No. 863.

Young, Alwyn (1998). “Paasche vs Laspeyres: the elasticity of substitution and bias in measures of TFP growth”; *NBER Working Paper*, No. 6.663, julio.

Zarta, Álvaro (1999). “Relevancia de la dinámica transicional para el crecimiento de largo plazo”, *Archivos de Macroeconomía* (DNP), No. 112.

_____ (2001). “La contabilidad del crecimiento, las dinámicas transicionales y el largo plazo: una comparación internacional de 46 países y una presentación de casos de economías tipo: EEUU, Corea del Sur y Colombia”, *Archivos de Macroeconomía*, (DNP), No. 142.

Zuccardi, Igor Esteban (2002). “Crecimiento y ciclos económicos. Efectos de los choques de oferta y demanda en el crecimiento colombiano”, *Archivos de Macroeconomía* (DNP), No. 187.

ANEXO A

EL ESTADO ESTACIONARIO (SUS CONDICIONES DE EXISTENCIA Y ESTABILIDAD) Y LA DINÁMICA DEL MODELO

LOS CASOS DE LAS SOLUCIONES DEL MERCADO Y DEL PLANEADOR CENTRAL

Para ambos casos, el objetivo es maximizar la función de bienestar o de utilidad intertemporal por unidad efectiva de trabajo. La utilidad depende sólo del consumo, así que la oferta laboral es inelástica. Siguiendo a Romer (1996, Cap. 2), esta función toma la forma:

$$(A.1) \quad U = \bar{B} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\eta t} \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} dt, \quad \eta \equiv \rho - g_L - (1-\theta)g_{\pi} > 0, \quad \bar{B} = \frac{A_0^{1-\theta} L_0}{H}$$

Para el caso del planeador central, la restricción de recursos es de la forma:

$$(A.2) \quad \dot{k} = y_t - c_t - \Psi_t - (\delta_k + g_L + g_{\pi}) k_t,$$

En cambio, para el caso de la solución del mercado, la restricción presupuestal de las familias (que son las dueñas de las empresas) es de la forma:

$$(A.3) \quad \dot{k} = (1 - \tau_t) y_t - c_t - (\delta_k + g_L + g_{\pi}) k_t,$$

Siendo τ_t la tasa impositiva sobre el ingreso de las familias.

EL CASO DE LA SOLUCIÓN DEL MERCADO

Recordemos que la firma individual incorpora en su función de producción la tecnología A_t , que es un bien no rival, y no excluible (ecuación A.4).

$$(A.4) \quad Y_{it} = F^i(\cdot) = A_t K_{it}^{\alpha} X_{it}^{\beta} L_{it}^{1-\alpha-\beta}$$

Retomando la forma funcional de la tecnología y reemplazando en (A.4):

$$(A.4') \quad Y_{it} = \bar{A}_t \left(\frac{K}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega}{L_t} \right)^v K_{it}^\alpha X_{it}^\beta L_{it}^{1-\alpha-\beta}$$

(A.4') permite apreciar de manera explícita la existencia de externalidades para la firma derivados del uso de los factores productivos acumulables: capital físico individual, capital humano e infraestructura. Las externalidades asociadas a los dos primeros son parciales mientras que la asociada al último (la infraestructura) es total. La economía en su conjunto, por el contrario, internaliza todos los efectos¹.

La empresa representativa utiliza una fracción de cada uno de los factores que entran en su función de producción; además, dicha fracción es constante. Como se está suponiendo una economía de competencia perfecta, las proporciones demandadas de factores deben ser iguales para todas las empresas. Tal fracción es $\zeta = \frac{1}{N}$, por lo que la función de producción de la empresa se puede escribir como:

$$Y_{it} = \bar{A}_t \left(\frac{K}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega}{L_t} \right)^v (\zeta K_t)^\alpha (\zeta X_t)^\beta (\zeta L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$Y_{it} = \bar{A}_t \zeta^\alpha \zeta^\beta \zeta^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{K}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega}{L_t} \right)^v (K_t)^\alpha (X_t)^\beta (L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$Y_{it} = \zeta \bar{A}_t \left(\frac{K}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega}{L_t} \right)^v (K_t)^\alpha (X_t)^\beta (L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$(A.5) \quad Y_{it} = \zeta \Pi_t^{1-\alpha-\gamma-\beta-\varphi-\nu} \left(\frac{K}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega}{L_t} \right)^v (K_t)^\alpha (X_t)^\beta (L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$(A.6) \quad Y_{it} = \zeta \Pi_t^{1-\alpha-\gamma-\beta-\varphi-\nu} K_t^{\alpha+\gamma} X_t^{\beta+\varphi} \Omega_t^\nu L_t^{1-\alpha-\gamma-\beta-\varphi-\nu}$$

¹ En este sentido, este modelo puede verse como una variante del modelo de crecimiento y gasto público presentado en Barro y Sala-i-Martin (1995), p. 152.

En (A.5) y (A.6) se ve claramente que el producto de la empresa i es una fracción ζ de la producción total de la economía.

El producto medio (en unidades efectivas de trabajo) de la empresa representativa es:

$$Y_{it} = \zeta \left(\frac{K_t}{\Pi_t L_{it}} \right)^{\alpha + \gamma} \left(\frac{X_t}{\Pi_t L_{it}} \right)^{\beta + \varphi} \left(\frac{\Omega_t}{\Pi_t L_{it}} \right)^{\nu} \left(\frac{\Pi_t L_t}{\Pi_t L_{it}} \right)^{1 - (\alpha + \gamma + \beta + \varphi + \nu)}$$

$$Y_{it} = \frac{\zeta}{\zeta} \left(\frac{K_t}{\Pi_t L_t} \right)^{\alpha + \gamma} \left(\frac{X_t}{\Pi_t L_t} \right)^{\beta + \varphi} \left(\frac{\Omega_t}{\Pi_t L_t} \right)^{\nu} \left(\frac{\Pi_t L_t}{\Pi_t L_t} \right)^{1 - (\alpha + \gamma + \beta + \varphi + \nu)}$$

$$(A.7) \quad Y_{it} = \left(\frac{K_t}{\Pi_t L_t} \right)^{\alpha + \gamma} \left(\frac{X_t}{\Pi_t L_t} \right)^{\beta + \varphi} \left(\frac{\Omega_t}{\Pi_t L_t} \right)^{\nu} \left(\frac{\Pi_t L_t}{\Pi_t L_t} \right)^{1 - (\alpha + \gamma + \beta + \varphi + \nu)} = y_t = \frac{Y_t}{\Pi_t L_t}$$

El producto medio de la empresa representativa es igual al producto medio de la economía (lo cual es de esperarse, puesto que se está suponiendo competencia perfecta en todos los mercados).

El beneficio de la empresa i se escribe como:

$$(A.8) \quad \text{beneficio}_i = Y_i (1 - \tau) - w_L \Pi_t L_{it} - w_X X_{it} - (r_t + \delta_K) K_{it}$$

Siendo w_L , w_X las remuneraciones al trabajo y al capital humano, y r_t la remuneración al capital (tasa de interés).

Maximizando (A.8) con respecto al capital, el trabajo y el capital humano, tenemos que:

$$(1 - \tau) F_{Kt}^i - \delta_K = r_t$$

$$(A.9) \quad (1 - \tau) F_{\Pi L t}^i = w_L$$

$$(1 - \tau) F_{X t}^i = w_X$$

Usando la forma funcional de (A.4') podemos reexpresar (A.9) como:

$$\begin{aligned}
 r &= (1 - \tau_t) \alpha \bar{A}_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X_t}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega_t}{L_t} \right)^v K_{it}^{\alpha-1} X_{it}^\beta L_{it}^{1-\alpha-\beta} - \delta_k \\
 &= \frac{\alpha(1 - \tau_t) y_t}{k_t} - \delta_k \\
 \text{(A.10) } w_x &= (1 - \tau_t) \beta \bar{A}_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X_t}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega_t}{L_t} \right)^v K_{it}^\alpha X_{it}^{\beta-1} L_{it}^{1-\alpha-\beta} = \frac{\beta(1 - \tau_t) y_t}{\chi_t} \\
 w_L &= (1 - \tau_t)(1 - \alpha - \beta) \bar{A}_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{X_t}{L_t} \right)^\varphi \left(\frac{\Omega_t}{L_t} \right)^v K_{it}^\alpha X_{it}^\beta L_{it}^{-\alpha-\beta} \\
 &= (1 - \alpha - \beta)(1 - \tau_t) y_t
 \end{aligned}$$

En las ecuaciones de (A.10) es claro que el producto marginal de cada unidad empleada es menor que el de las unidades agregadas de la economía (véase en nota de pie de página el resultado para el caso del planeador central). El rendimiento marginal del capital usado por la empresa representativa (después de descontar impuestos y tasa de depreciación) debe igualar la tasa de remuneración del capital². Esta internalización parcial de las externalidades implica que la solución de mercado es subóptima en el sentido de Pareto.

En una economía con un impuesto que genera una distorsión en las decisiones de inversión y consumo, como el impuesto al ingreso, cuya tasa es τ , la solución del mercado implica que el agente representativo maximiza la función (A.1) bajo una restricción. ¿Cuál? Suponiendo que cada agente ofrece capital, trabajo, y capital humano en el mercado de factores, para ser contratados por la empresa representativa, y que su uso es pagado de acuerdo con su producto marginal, entonces, según el teorema de Euler, la suma de remuneraciones factoriales debe agotar el producto. Por tanto, el agente representativo enfrenta la siguiente restricción:

$$\text{(A.11) } \dot{k} = (r_t - g_L - g_\Pi) k_t - w_{\Pi L} - w_x - c_t = (1 - \tau_t) y_t - c_t - (g_\Pi + g_L + \delta_k) k_t$$

² Recuérdese que la empresa representativa maximiza sus beneficios de acuerdo con K_{it}, X_{it}, L_{it} , y por esto sus productos marginales no son afectados por los parámetros γ y φ .

Además, se supone que el gasto público (destinado exclusivamente a formación de infraestructura y capital humano) sólo se financia con los impuestos recaudados:

$$(A.12) \quad \tau_t y_t = (b + \mu) \Psi_t$$

El hamiltoniano es:

$$(A.13) \quad H_d = \frac{e^{-\eta} c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda_t [(1-\tau_t) y_t - c_t - (\delta_k + g_L + g_\pi) k]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$(a) \quad \max_{c_t} H_d \Rightarrow \bar{B} c_t^{-\theta} e^{-\eta} - \lambda_t = 0$$

$$(b) \quad \dot{k} = \frac{\partial H_d}{\partial \lambda_t} = (1-\tau_t) y_t - c_t - (g_L + \delta_k + g_\pi) k,$$

$$(c) \quad -\dot{\lambda} = \frac{\partial H_d}{\partial k_t} = \lambda_t [r_t - g_L - g_\pi]$$

Y se cumple la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t k_t = 0$$

Tomando logaritmos de la condición (a) y derivando con respecto al tiempo, resulta que:

$$-\theta = \frac{\dot{c}}{c} - \eta = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda_t}$$

Reemplazando en esta expresión a λ y organizando términos, se tiene que:

$$(A.14) \quad \frac{\dot{c}}{c_t} = \frac{1}{\theta} [(1-\tau_t) F'_{K_t}(\cdot) - (\rho + \delta_k + \theta g_\pi)]$$

EL CASO DEL PLANEADOR CENTRAL

El problema de un planeador de esta economía es maximizar (19) con sujeción a (20), suponiendo, de nuevo, que el gasto público se financia exclusivamente con el recaudo de los impuestos (T):

$$(A.15) \quad (b + \mu) \Psi = T ; b + \mu = 1$$

El hamiltoniano es:

$$(A.16) \quad H_p = e^{-\eta t} \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda_t [y_t - c_t - \Psi_t - (\delta_k + g_L + g_\Pi) k_t]$$

Debe observarse que el programa tiene dos variables de control, el consumo y el gasto público por unidad efectiva de trabajo, y una variable de estado: el capital físico por unidad efectiva de trabajo³.

Por tanto, las condiciones de primer orden son:

$$(a) \quad \max_{c_t} H_p \Rightarrow c_t^{-\theta} e^{-\eta t} - \lambda_t = 0$$

$$(b) \quad \max_{\Psi_t} H_p \Rightarrow \frac{\partial y_t}{\partial \chi_t} \frac{d\chi_t}{d\Psi_t} + \frac{\partial y_t}{\partial \omega_t} \frac{d\omega_t}{d\Psi_t} - \frac{1}{\Pi_t L_t} = 0$$

$$(c) \quad \dot{k} = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_t} = y_t - c_t - \Psi_t - (g_L + \delta_k + g_\Pi) k_t$$

$$(d) \quad -\dot{\lambda} = \frac{\partial H_p}{\partial k_t} = \lambda_t [f_k(\cdot) - (g_L + \delta_k + g_\Pi)]$$

Y se impone, además, la siguiente condición (de transversalidad):

³ Hay otras dos variables de estado (infraestructura y capital humano) que no se tienen en cuenta (de manera explícita) para establecer las condiciones de óptimo en vista de que sus incrementos en el tiempo dependen del nivel óptimo del gasto público.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t k_t = 0$$

Por tanto, es fácil demostrar que:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f_k(\cdot) - (\rho + \delta_k + \theta g_\pi)]:$$

La condición (a) es la condición de eficiencia para el consumo; la condición (b) es la condición de eficiencia del gasto público.

En efecto, recordando que las trayectorias temporales para el capital humano y la infraestructura por unidad efectiva de trabajo vienen dadas por las ecuaciones (14) y (18) del texto principal, entonces la condición de primer orden (b) queda así:

$$\max_{\Psi_t} H_p \Rightarrow \frac{(\beta + \varphi) y_t \chi_t^{-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi) \Pi_t L_t} + \frac{vb y_t \omega_t^{-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega) \Pi_t L_t} - \frac{1}{\Pi_t L_t} = 0$$

Reorganizando:

$$\left[\frac{(\beta + \varphi) \chi_t^{-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi)} + \frac{vb \omega_t^{-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega)} \right] y_t = 1$$

$$\left[\frac{(\beta + \varphi) \chi_t^{-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi)} + \frac{vb \omega_t^{-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega)} \right] y_t = 1$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por Ψ_t , tendremos la expresión para la tasa de impuestos (= gasto) óptima:

$$(A.17) \quad \left[\frac{(\beta + \varphi) \chi_t^{-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi) \Pi_t L_t} + \frac{vb \omega_t^{-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega) \Pi_t L_t} \right] \Psi_t = \frac{\Psi_t}{Y_t}$$

O, lo mismo, que:

$$\left[\frac{(\beta + \varphi) \chi_t^{-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi) \Pi_0 L_0} + \frac{vb \omega_t^{-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega) \Pi_0 L_0} \right] \Psi_t = \frac{\Psi_t}{Y_t} e^{(g_L + g_N)t}$$

Si se evalúa la expresión anterior en el estado estacionario, cuando se estabilizan los acervos de infraestructura y capital humano por unidad de trabajo efectivo y la relación ingreso público/producto (cuyas magnitudes las denominamos χ^* , ω^* , τ^*), tendremos:

$$\left[\frac{(\beta + \varphi) \chi^{*-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi) \Pi_0 L_0} + \frac{vb \omega^{*-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega) \Pi_0 L_0} \right] \Psi_t = \frac{\Psi_t}{Y_t} e^{(g_L + g_N)t}$$

$$\left[\frac{(\beta + \varphi) \left[\frac{\Psi_{0\chi}}{(g_\psi + \delta_x)} \right]^{-1} \mu}{(\delta_x + g_\psi) \Pi_0 L_0} + \frac{vb \left[\frac{\Psi_{0\omega}}{(g_\psi + \delta_\Omega)} \right]^{-1}}{(g_\psi + \delta_\Omega) \Pi_0 L_0} \right] \Psi_t = \frac{\Psi_t}{Y_t} e^{(g_L + g_N)t}$$

$$\left[\frac{(\beta + \varphi) (\delta_x + g_\psi) \mu}{\frac{\mu \Psi_0}{\Pi_0 L_0} (g_\psi + \delta_x) \Pi_0 L_0} + \frac{vb (g_\psi + \delta_\Omega)}{\frac{b \Psi_0}{\Pi_0 L_0} (g_\psi + \delta_\Omega) \Pi_0 L_0} \right] \frac{\Psi_t}{e^{(g_L + g_N)t}} = \tau^*$$

$$\left[\frac{(\beta + \varphi)}{\Psi_0} + \frac{v}{\Psi_0} \right] \frac{\Psi_t}{e^{(g_L + g_N)t}} = \tau^*$$

$$\left[\frac{(\beta + \varphi + v)}{\Psi_0} \right] \frac{\Psi_0 e^{g_\psi t}}{e^{(g_L + g_N)t}} = (\beta + \varphi + v) e^{[(g_\psi - (g_L + g_N))t]} = \tau^*$$

Puesto que en el estado estacionario la relación gasto óptimo/producto se mantiene constante, entonces:

$$g_{\psi} - (g_L + g_{\Pi}) = 0$$

Por tanto, la tasa óptima de gasto en el estado estacionario estará dada por⁴:

$$(A.18) \quad \beta + \varphi + v = \tau^*$$

Para el caso de la solución de mercado con un impuesto que distorsiona y con productores inconscientes de las externalidades, una solución análoga a (A.18) es $\beta + v = \tau^*$ que, además, es igual a la solución del mercado con impuesto que no distorsiona⁵.

ESTADO ESTACIONARIO, VELOCIDAD DE CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD DEL SISTEMA

La ecuación (8) del texto principal muestra que el crecimiento del producto por unidad efectiva de trabajo está determinado por el crecimiento de los capitales humano y físico y de la infraestructura por unidad efectiva de trabajo. Si definimos el estado estacionario como aquel en el cual estas variables crecen a la tasa cero, la economía en tal estado se ubica en un sendero de crecimiento balanceado en el cual las variables agregadas crecen a la tasa $g_L + g_{\Pi}$, mientras que las variables per cápita crecen a la tasa g_{Π} . A continuación, se demuestra que no sólo existe un estado estacionario para cada acervo productivo (capitales físico y humano e infraestructura) sino también para toda la economía.

Como las ecuaciones de movimiento del sistema implican transición dinámica (esto es, las variables recorren durante un tiempo determinado un sendero conducente al estado estable), se puede afirmar que el acervo productivo que corresponde a cada una de ellas alcanza un estado estacionario. Además, si $g_{\psi} = g_{\Pi} + g_L$, y puesto que la función de producción por unidad efectiva de trabajo es cóncava, se

⁴ El resultado siguiente es casi igual al de Glomm y Ravikumar (1994); la diferencia está en el hecho de que la tasa óptima del impuesto, según su modelo, es igual a la elasticidad del producto a la infraestructura por el factor de descuento en vista de que suponen que hay un efecto rezagado del gasto público sobre la infraestructura.

⁵ Los impuestos de suma fija no crean distorsiones porque no inciden en las decisiones basadas en ingresos o costos marginales.

garantiza que hay un estado estacionario para el capital por unidad efectiva de trabajo. Sin embargo, es necesario indagar sobre la estabilidad del sistema. Este análisis se hace a continuación.

Nótese que los casos del planeador central y de la economía descentralizada difieren en las ecuaciones de transición del capital físico y en la ecuación de la tasa de crecimiento para el consumo, es decir:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \left[f_k(\cdot) - (\rho + \delta_k + \theta g_\pi) \right] : \text{Planeador central.}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \left[(1 - \tau_i) F_{K_i}^i(\cdot) - (\rho + \delta_k + \theta g_\pi) \right] : \text{Solución de mercado (con impuesto que distorsiona).}$$

Por su parte, las ecuaciones de transición del capital físico tienen la siguiente forma:

$$\dot{k} = y_t - c_t - \Psi_t - (g_L + \delta_k + g_\pi) k_t : \text{Planeador central.}$$

$$\dot{k} = (1 - \tau_i) y_t - c_t - (g_L + \delta_k + g_\pi) k_t : \text{Solución de mercado con impuesto que distorsiona.}$$

Las ecuaciones para el capital humano y la infraestructura por unidad efectiva de trabajo tienen la misma forma y comportamiento para los dos casos.

Si se hace una aproximación lineal de las ecuaciones de transición (las que describen el crecimiento del consumo y de los acervos productivos) con un polinomio de Taylor de primer orden, el sistema de ecuaciones del modelo puede escribirse como:

$$\dot{c} \approx \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \Big|_{s,s} \tilde{c} + \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \Big|_{s,s} \tilde{k} + \frac{\partial \dot{c}}{\partial \chi} \Big|_{s,s} \tilde{\chi} + \frac{\partial \dot{c}}{\partial \omega} \Big|_{s,s} \tilde{\omega} \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{k} \approx \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \Big|_{s,s} \tilde{c} + \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \Big|_{s,s} \tilde{k} + \frac{\partial \dot{k}}{\partial \chi} \Big|_{s,s} \tilde{\chi} + \frac{\partial \dot{k}}{\partial \omega} \Big|_{s,s} \tilde{\omega}$$

$$\dot{\chi} \approx \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial c} \Big|_{ss} \tilde{c} + \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial k} \Big|_{ss} \tilde{k} + \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \chi} \Big|_{ss} \tilde{\chi} + \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \omega} \Big|_{ss} \tilde{\omega}$$

(A.19)

$$\dot{\omega} \approx \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial c} \Big|_{ss} \tilde{c} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial k} \Big|_{ss} \tilde{k} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \chi} \Big|_{ss} \tilde{\chi} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \Big|_{ss} \tilde{\omega}$$

En (A.19) "ss" significa que la derivada se está evaluando en el estado estacionario, y $\tilde{x}_t = x_t - x^*$ se define como la desviación de una variable de su valor de estado estacionario.

El sistema (A.19), para el caso del planeador central, puede escribirse como:

$$c = \frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{\theta} \tilde{k}_t + \frac{f_{k\chi}(\cdot)c^*}{\theta} \tilde{\chi}_t + \frac{f_{k\omega}(\cdot)c^*}{\theta} \tilde{\omega}_t$$

$$(A.20) \quad \dot{k} = -\tilde{c}_t + \left[f_k(\cdot) - (g_L + g_\Pi + \delta_K) \right] \tilde{k}_t + f_\chi(\cdot) \tilde{\chi}_t + f_\omega(\cdot) \tilde{\omega}_t$$

$$\dot{\chi} = -(g_L + g_\Pi + \delta_X) \tilde{\chi}_t$$

$$\dot{\omega} = -(g_L + g_\Pi + \delta_\Omega) \tilde{\omega}_t$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{c}} \\ \dot{\tilde{k}} \\ \dot{\tilde{\chi}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{\theta} & \frac{f_{k\chi}(\cdot)c^*}{\theta} & \frac{f_{k\omega}(\cdot)c^*}{\theta} \\ -1 \left[f_k(\cdot) - (g_L + g_\Pi + \delta_\Omega) \right] & f_\chi(\cdot) & f_\omega(\cdot) & \\ 0 & 0 & -(g_L + g_\Pi + \delta_X) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(g_L + g_\Pi + \delta_\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{\chi}_t \\ \tilde{\omega}_t \end{bmatrix}$$

Como en el estado estacionario $\dot{c} = 0 \Leftrightarrow f_k(\cdot) = \rho + \delta_K + \theta g_\Pi$, entonces $f_k(\cdot) - (g_L + g_\Pi + \delta_K) = \rho - g_L - (1 - \theta) g_\Pi = \eta$.

Por tanto:

$$(A.21) \quad \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{k} \\ \tilde{\chi} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{\theta} & \frac{f_{k\chi}(\cdot)c^*}{\theta} & \frac{f_{k\omega}(\cdot)c^*}{\theta} \\ -1 & \eta & f_{\chi}(\cdot) & f_{\omega}(\cdot) \\ 0 & 0 & -(g_L + g_{\pi} + \delta_{\chi}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(g_L + g_{\pi} + \delta_{\Omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{\chi}_t \\ \tilde{\omega}_t \end{bmatrix}$$

El sistema (A.21), según lo descrito en el Anexo B (donde también se presenta el caso análogo de la solución de mercado con impuestos que distorsionan), puede caracterizarse como uno con la propiedad de equilibrio localmente estable (“estado estacionario”) del tipo denominado “de silla” para sus variables dependientes (tanto para las que pueden “saltar” en cualquier instante como para las variables de estado). Además, a partir del sistema (A.21) se establecen las velocidades de ajuste o de retorno de las variables dependientes a sus niveles de estado estable desde valores “arbitrarios” pero ubicados en una senda conducente a tal estado, como se describe también en el Anexo B.

ANEXO B

LA SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO: TENDENCIA AL ESTADO ESTABLE Y VELOCIDAD DE AJUSTE

El sistema (A.21) se puede escribir en forma compacta de la siguiente manera: $\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X}$, siendo \tilde{X} un vector de primeras derivadas de las variables con respecto al tiempo, A la matriz de coeficientes de primeras derivadas de las variables con respecto al tiempo¹, y \tilde{X} el vector de las variables para las cuales se requiere resolver este sistema.

Si suponemos que:

$$(B.1) \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{bmatrix} e^{vt} = Me^{vt}, \text{ entonces su derivada con respecto al tiempo es:}$$

$$(B.2) \quad \dot{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{bmatrix} v e^{vt} = Mv e^{vt}. \text{ En tal caso, podemos escribir}$$

$$(B.3) \quad Mve^{vt} - AMe^{vt} = 0 \Rightarrow (vI - A)M = 0, \text{ lo cual se cumple sólo para } |vI - A| = 0, \text{ puesto que } M \neq 0^2. \text{ La matriz } (vI - A) \text{ es:}$$

¹ Puesto que se está evaluando en el entorno del estado estacionario, la matriz A es cuadrada con números reales en cada una de sus entradas; es decir, el sistema (A.21) es lineal.

² Para detalles sobre el método de solución de sistemas dinámicos como éste, véase Chiang (1987).

$$\begin{bmatrix} \nu & -\frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{\theta} & -\frac{f_{k\chi}(\cdot)c^*}{\theta} & -\frac{f_{k\omega}(\cdot)c^*}{\theta} \\ 1 & \nu - \eta & -f_{\chi}(\cdot) & -f_{\omega}(\cdot) \\ 0 & 0 & \nu + (g_L + g_{\Pi} + \delta_{\chi}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu + (g_L + g_{\Pi} + \delta_{\Omega}) \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante de $(\nu I - A)$ por el método de cofactores e igualando a cero, se genera la ecuación característica en ν cuyas raíces son:

$$(B.4) \quad \nu_1, \nu_2 = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4 \frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{\theta}}}{2}, \quad \nu_3 = -(g_L + g_{\Pi} + \delta_{\chi}), \quad \nu_4 = -(g_L + g_{\Pi} + \delta_{\Omega}).$$

El sistema tiene tres raíces negativas y una positiva ($\nu_1 > 0$), lo cual lo hace localmente estable; esto es, tiene una “trayectoria de silla”³.

Puesto que el sistema tiene cuatro raíces (B.1) se convierte en:

$$(B.5) \quad \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{\chi}_t \\ \tilde{\omega}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\nu_1 t} \\ e^{\nu_2 t} \\ e^{\nu_3 t} \\ e^{\nu_4 t} \end{bmatrix}$$

Para conocer los valores de m_i, n_i, p_i, q_i es necesario hallar, en primer lugar, los vectores propios asociados a las raíces del sistema. Tras un proceso algebraico dispendioso pero convencional se encuentra que estos vectores propios son:

³ Este resultado está en la dirección del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, lo cual es de esperar pues se está tratando un problema de optimización intertemporal de la utilidad en un horizonte infinito.

$$b_1 = n_1 \begin{bmatrix} \frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{v_1\theta} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = n_2 \begin{bmatrix} \frac{f_{kk}(\cdot)c^*}{v_2\theta} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_2 \begin{bmatrix} b_{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = p_3 \begin{bmatrix} \frac{c^*}{v_3\theta} \left[f_{kk}(\cdot) \frac{v_3\theta f_{\lambda}(\cdot) - f_{k\lambda}(\cdot)c^*}{v_3\theta(v_3 - \eta) + f_{kk}(\cdot)c^*} + f_{k\lambda}(\cdot) \right] \\ \frac{v_3\theta f_{\lambda}(\cdot) - f_{k\lambda}(\cdot)c^*}{v_3\theta(v_3 - \eta) + f_{kk}(\cdot)c^*} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_3 \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{14} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_4 = q_4 \begin{bmatrix} \frac{c^*}{v_4\theta} \left[f_{kk}(\cdot) \frac{v_4\theta f_{\omega}(\cdot) - f_{k\omega}(\cdot)c^*}{v_4\theta(v_4 - \eta) + f_{kk}(\cdot)c^*} + f_{k\omega}(\cdot) \right] \\ \frac{v_4\theta f_{\omega}(\cdot) - f_{k\omega}(\cdot)c^*}{v_4\theta(v_4 - \eta) + f_{kk}(\cdot)c^*} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = q_4 \begin{bmatrix} b_{15} \\ b_{16} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, la solución del sistema queda así:

$$(B.6) \quad \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{\omega}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 b_{11} & n_2 b_{12} & p_3 b_{13} & q_4 b_{15} \\ n_1 & n_2 & p_3 b_{14} & q_4 b_{16} \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{v_1 t} \\ e^{v_2 t} \\ e^{v_3 t} \\ e^{v_4 t} \end{bmatrix}$$

Siendo cada columna j ($j = 1, \dots, 4$) de la matriz de (B.6) el vector propio asociado a la j -ésima raíz del sistema.

Como una de las raíces es positiva, es posible que el modelo “explote” (sus variables se encaminen por una senda temporal no convergente) si los valores iniciales para n_1 no se escogen apropiadamente de manera que la economía se dirija al “punto de silla” o de equilibrio local. Para evitar esto, siguiendo a Romer (1996) y a Sala-i-Martin (2000), se supone que $n_1 = 0$ ⁴, con lo cual el sistema queda así:

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{\chi}_t \\ \tilde{\omega}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_2 b_{12} & p_3 b_{13} & q_4 b_{15} \\ 0 & n_2 & p_3 b_{14} & q_4 b_{16} \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{v_1 t} \\ e^{v_2 t} \\ e^{v_3 t} \\ e^{v_4 t} \end{bmatrix}$$

Para poder conocer los valores de n_2, p_3, q_4 , el segundo paso es evaluar el sistema en $t = 0$, lo cual implica que

$$q_4 = \omega_0 - \omega^* = \tilde{\omega}_0; p_3 = \chi_0 - \chi^* = \tilde{\chi}_0$$

Y en tal caso:

$$(B.7) \quad \tilde{k}_0 = n_2 + \tilde{\chi}_0 b_{14} + \tilde{\omega}_0 b_{16}$$

De donde resulta:

$$(B.8) \quad n_2 = \tilde{k}_0 - \tilde{\chi}_0 b_{14} - \tilde{\omega}_0 b_{16}$$

$$(B.9) \quad \tilde{c}_0 = b_{12} n_2 + b_{13} \tilde{\chi}_0 + b_{15} \tilde{\omega}_0$$

Y reemplazando (B.8) en (B.9)

⁴ Obsérvese que esto no implica la violación de la restricción para establecer que el vector propio asociado a la raíz v_1 sea diferente de cero, puesto que, como se ve en el desarrollo algebraico, la constante n_1 puede tomar cualquier valor, incluso cero.

$$(B.10) \quad \tilde{c}_0 = b_{12}k_0 - (b_{12}b_{14} - b_{13})\tilde{\chi}_0 - (b_{12}b_{16} - b_{15})\tilde{\omega}_0$$

Evaluando en el estado estacionario, a partir de la forma específica para la función de producción, se puede conocer el valor de los coeficientes b_{1i} , ($i = 1, \dots, 6$).

Nótese, además, que si $\tilde{\omega}_0 = 0$ y $\tilde{\chi}_0 = 0$, el modelo se convierte en el tradicional de crecimiento óptimo de Ramsey-Cass-Koopmans, con las mismas raíces y brechas iniciales en $t = 0^5$.

EL CASO DEL MERCADO (O EQUILIBRIO COMPETITIVO) CON IMPUESTOS QUE DISTORSIONAN

En este caso las condiciones de convergencia y estabilidad se mantienen. En efecto, si se hace una aproximación lineal de las ecuaciones de transición con un polinomio de Taylor de primer orden, el sistema de ecuaciones del modelo puede escribirse como:

$$\dot{c} \approx \left. \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \right|_{s.s.} \tilde{c} + \left. \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \right|_{s.s.} \tilde{k} + \left. \frac{\partial \dot{c}}{\partial \chi} \right|_{s.s.} \tilde{\chi} + \left. \frac{\partial \dot{c}}{\partial \omega} \right|_{s.s.} \tilde{\omega}$$

$$\dot{k} \approx \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \right|_{s.s.} \tilde{c} + \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \right|_{s.s.} \tilde{k} + \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial \chi} \right|_{s.s.} \tilde{\chi} + \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial \omega} \right|_{s.s.} \tilde{\omega}$$

(B.11)

$$\dot{\chi} \approx \left. \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial c} \right|_{s.s.} \tilde{c} + \left. \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial k} \right|_{s.s.} \tilde{k} + \left. \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \chi} \right|_{s.s.} \tilde{\chi} + \left. \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \omega} \right|_{s.s.} \tilde{\omega}$$

$$\dot{\omega} \approx \left. \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial c} \right|_{s.s.} \tilde{c} + \left. \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial k} \right|_{s.s.} \tilde{k} + \left. \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \chi} \right|_{s.s.} \tilde{\chi} + \left. \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \right|_{s.s.} \tilde{\omega}$$

Las raíces de este sistema de ecuaciones diferenciales (encontradas de la misma forma que en el caso del planeador central) son⁶:

⁵ Véase Romer (2001).

⁶ Estas raíces se obtienen como los valores propios de la matriz que contiene las primeras derivadas de la linealización con el polinomio de Taylor de primer orden.

$$(B.12) \quad v_1, v_2 = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4 \frac{(1-\tau) f'_{kiki}(\cdot) c^*}{\theta}}}{2}, v_3 = -(g_L + g_{\Pi} + \delta_x), v_4 = -(g_L + g_{\Pi} + \delta_{\Omega})$$

Como en el caso previo, el sistema tiene tres raíces negativas y una positiva, lo cual lo hace localmente estable (tiene una trayectoria de silla).

A continuación se debe realizar un análisis similar al del caso anterior para hallar la solución final del sistema, teniendo en cuenta la existencia del impuesto que distorsiona.

Al repetir el procedimiento ya expuesto, resulta que:

$$(B.13) \quad \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{\chi}_t \\ \tilde{\omega}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_2 c_{12} & p_3 c_{13} & q_4 c_{15} \\ 0 & n_2 & p_3 c_{14} & q_4 c_{16} \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{v_1 t} \\ e^{v_2 t} \\ e^{v_3 t} \\ e^{v_4 t} \end{bmatrix}$$

Y que:

$$q_4 = \omega_0 - \omega^* = \tilde{\omega}_0, p_3 = \chi_0 - \chi^* = \tilde{\chi}_0$$

$$(B.14) \quad \tilde{k}_0 = n_2 + \tilde{\chi}_0 c_{14} + \tilde{\omega}_0 c_{16}$$

De donde resulta:

$$(B.15) \quad n_2 = \tilde{k}_0 - \tilde{\chi}_0 c_{14} - \tilde{\omega}_0 c_{16}$$

$$(B.16) \quad \tilde{c}_0 = c_{12} n_2 + c_{13} \tilde{\chi}_0 + c_{15} \tilde{\omega}_0$$

Y reemplazando:

$$(B.17) \quad \tilde{c}_0 = c_{12} \tilde{k}_0 - (c_{12} c_{14} - c_{13}) \tilde{\chi}_0 - (c_{12} c_{16} - c_{15}) \tilde{\omega}_0$$

VELOCIDAD DE AJUSTE

De la solución al sistema a partir de la linealización de las ecuaciones de transición, se observa que las soluciones para las trayectorias de ajuste del capital humano y de la infraestructura por unidad efectiva de trabajo son independientes de las velocidades de ajuste de las demás variables, así como también de las desviaciones iniciales de las mismas con respecto a la posición de estado estacionario.

De (B.13) se deducen fácilmente las velocidades de ajuste hacia el estado estacionario de los acervos de infraestructura y capital humano (por unidad de trabajo efectivo).

Puesto que el capital humano y la infraestructura son factores de producción, cualquier desviación que se presente, bien sea en uno de ellos o en los dos simultáneamente, causará que el producto por unidad efectiva de trabajo se aleje de su nivel de estado estacionario, lo cual, a su vez, desviará el capital físico individual por unidad efectiva de trabajo de su posición de largo plazo. Sin embargo, pueden existir desviaciones del capital físico individual por unidad efectiva de trabajo con respecto al nivel de largo plazo, sin que se produzcan desviaciones transitorias de los otros factores.

Ahora bien, suponiendo que no se presentan desviaciones iniciales del nivel de largo plazo en el capital humano y la infraestructura sino que cualquier desviación de la economía con respecto a su estado estacionario es causada bien sea porque se presente una brecha entre el capital físico individual observado y su nivel de estado estable, se afecte la relación capital/trabajo efectivo, cambie algún parámetro o se presente un choque tecnológico de efecto transitorio, el análisis de la convergencia y su velocidad requiere tan sólo ocuparse de las velocidades de ajuste implícitas en las raíces del sistema v_1 y v_2 ; y como suponemos $n_1 = 0$, la velocidad de ajuste del capital y del consumo será determinada por v_2 . Bajo estas circunstancias, las predicciones son las mismas que las del modelo tradicional, y el tiempo requerido para el ajuste de una desviación con respecto al estado estacionario estará dado (en el caso del planeador central) por:

$$t = \frac{\ln \left(\frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_0} \right)}{v_2} = \frac{\ln \left(\frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_0} \right)}{\left[\frac{\eta - \sqrt{\eta^2 - 4 \frac{f_{kk}(\cdot) c^*}{\theta}}}{2} \right]}$$

Con $n_2 = \tilde{k}_0$ si $\tilde{\chi}_0 = 0$ y $\tilde{\omega}_0 = 0$.

Cuando ocurra que alguna de las brechas del capital humano o la infraestructura por unidad efectiva de trabajo o las dos sean diferentes de cero, la ley de evolución para el ajuste del capital físico individual por unidad efectiva de trabajo se expresa así:

$$(B.18) \quad \tilde{k}_t = \tilde{k}_0 e^{v_2 t} - \tilde{\chi}_0 b_{14} (e^{v_2 t} - e^{v_3 t}) - \tilde{\omega}_0 b_{16} (e^{v_2 t} - e^{v_4 t})$$

En esta expresión puede notarse que el tiempo requerido para eliminar el desajuste del capital físico individual con respecto a su nivel de largo plazo estará determinado por la mayor de las raíces del sistema (la menor en valor absoluto); por tanto, la mayor de las raíces tendrá implícita la menor velocidad de ajuste y, por tanto, determinará el tiempo total requerido para que se cierre la brecha entre el nivel de estado estacionario del capital (y por consiguiente de la economía en su conjunto) y su nivel observado en el momento en que éste sufre la desviación⁷.

VELOCIDAD DE CONVERGENCIA Y EL MÉTODO DE NEWTON

De la ecuación (B.18) se deduce que cuando una desviación de la economía de su estado estacionario es causada por un movimiento en el capital humano o en la infraestructura, el problema de determinación del tiempo de convergencia del capital físico individual y de toda la economía no se resuelve de forma directa.

Existe una primera etapa en la cual la brecha del capital físico individual es creciente; esta brecha alcanza su máximo en un momento t^* ; diferenciando con respecto al tiempo, igualando a cero y resolviendo para t se encuentra tal momento:

$$\frac{\ln \left(\frac{v_2}{v_3} \right)}{(v_3 - v_2)} = t^* ; \text{ evaluando en } t^* \text{ se puede obtener el tamaño máximo de la brecha del capital físico } \tilde{k}_{t^*} .$$

⁷ Para el caso de la economía descentralizada, con impuesto que distorsiona, se tienen expresiones análogas, con la salvedad de que la tasa impositiva es argumento de las raíces del sistema y de los vectores propios y por lo tanto, se ven afectados, en este caso, las velocidades de ajuste del sistema y los valores iniciales de las brechas del capital físico, consumo, capital humano e infraestructura por unidad efectiva de trabajo.

Para saber en cuánto tiempo se cierra esa “brecha máxima”, debe notarse primero, que cerrar una porción a de tal brecha equivale a dejar abierta una porción $(1 - a)$; segundo, es necesario hallar el tiempo en el cual esto ocurre. Entonces

definimos una función del tiempo $R_t = e^{v_2 t} - e^{v_3 t} + \frac{(1 - a)\tilde{k}_t}{\chi_0 b_{14}}$, que igualamos a

cero y seguidamente hallamos sus raíces con el *método de Newton*, iterando sobre

$$t_{n+1} = t_n - \frac{e^{v_2 t_n} - e^{v_3 t_n} + \frac{(1 - a)\tilde{k}_{t_n}}{\chi_0 b_{14}}}{v_2 e^{v_2 t_n} - v_3 e^{v_3 t_n}} \quad \text{hasta que la diferencia entre } t_{n+s} \text{ y } t_{n+s-1}$$

sea arbitrariamente pequeña; en esta expresión utilizamos s para denotar una cantidad dada de pasos hacia adelante después de n , y t_n para un valor inicial que se elige para “ t ”. Este procedimiento numérico se aplica análogamente al caso en el cual hay una brecha en el acervo de infraestructura o en los tres tipos de acervos y también para los cálculos correspondientes a la velocidad de la brecha del producto per cápita.

Finalmente, el producto per cápita durante una fase de transición, desde el momento en el cual se ha presentado una desviación de su estado estable hasta el momento de recuperación de tal estado, es:

$$y_{pc} = [k^* + \tilde{k}_t]^{\alpha+\gamma} [\chi^* + \tilde{\chi}_t]^{\beta+\varphi} [\omega^* + \tilde{\omega}_t]^v e^{g_{\Pi} t}$$

Suponiendo que $\Pi_0 = 1$

Tomando logaritmos:

$$\ln y_{pc} = (\alpha + \gamma) \ln [k^* + \tilde{k}_t] + (\beta + \varphi) \ln [\chi^* + \tilde{\chi}_t] + v \ln [\omega^* + \tilde{\omega}_t] + g_{\Pi} t$$

Derivando en t :

$$\frac{\dot{y}_{pc}}{y_{pc}} = (\alpha + \gamma) \frac{\dot{\tilde{k}}_t}{k_t} + (\beta + \varphi) \frac{\dot{\tilde{\chi}}_t}{\chi_t} + v \frac{\dot{\tilde{\omega}}_t}{\omega_t} + g_{\Pi}$$

Además, tenemos que:

$$\tilde{k} = v_2 \tilde{k}_0 e^{v_2 t} - \tilde{\chi}_0 b_{14} (v_2 e^{v_2 t} - v_3 e^{v_3 t}) - \tilde{\omega}_0 b_{16} (v_2 e^{v_2 t} - v_4 e^{v_4 t})$$

$$\tilde{\chi} = v_3 b_{14} \tilde{\chi}_0 e^{v_3 t}$$

$$\tilde{\omega} = v_4 b_{16} \tilde{\omega}_0 e^{v_4 t}$$

Por tanto, luego de reagrupar términos, resulta que la tasa de crecimiento del producto per cápita durante la transición es:

$$\frac{y_{pc}}{y_{pc}} = (\alpha + \gamma) \frac{v_2 \tilde{k}_0 e^{v_2 t}}{k_t} - \frac{\tilde{\chi}_0 b_{14} \left[(\alpha + \gamma) \chi_t v_2 e^{v_2 t} - v_3 e^{v_3 t} [(\alpha + \gamma) \chi_t + (\beta + \varphi) k_t] \right]}{k_t \chi_t}$$

$$- \frac{\tilde{\omega}_0 b_{16} \left[(\alpha + \gamma) \omega_t v_2 e^{v_2 t} - v_4 e^{v_4 t} [(\alpha + \gamma) \omega_t + \nu k_t] \right]}{k_t \omega_t} + g_{\Pi}$$

ANEXO C

**EL PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN PARA LOS PARÁMETROS
(EL CASO DE LA SOLUCIÓN DE MERCADO)**

Puesto que se supuso una tasa de depreciación para la infraestructura de 2% anual, y la tasa de depreciación del capital total (promedio 1950-1999) según cifras *Greco* es de 2,71%, entonces la tasa de depreciación del capital privado se calculó a partir de

$$(C.1) \quad z\delta_K + (1-z)\delta_\Omega = \delta_{total} = 0,0271$$

Siendo z la participación del capital físico en el capital total de la economía. Siguiendo a Harberger (1969), z se aproxima por medio de la participación de la inversión privada real en la inversión real total ($z = 0,706$). Tal como se presentó en el Cuadro 4A, de esta forma se obtuvo $\delta_K = 0,03008$.

En consistencia con el método de cálculo para δ_K , la razón capital privado/producto se puede calcular como $\frac{k}{y} = z \frac{capital\ total}{y} = 2.066$

Además, de la ecuación de Euler en estado estacionario, tenemos que:

$$(1 - \tau) F'_{ki}(\cdot) = \rho + \delta_K + \theta g_\Pi$$

Lo cual, dada la forma funcional de la producción, equivale a:

$$(C.2) \quad (1 - \tau)\alpha \frac{1}{(k/y)} = \rho + \delta_K + \theta g_\Pi$$

De la ecuación (C.2) podemos estimar θ de la misma forma como en el Cuadro 4A.

Una tasa de inversión consistente con estos datos se puede calcular a partir de la ecuación de acumulación del capital físico privado $\dot{k} = (1 - \tau_i) y_i - c_i - (\delta_K + g_L + g_\Pi)k_i$; como en el estado estacionario $\dot{k} = 0$, podemos escribir:

$$(C.3) \quad (1 - \tau_t) - \frac{c_t}{y_t} = (\delta_k + g_L + g_\Pi) \frac{k_t}{y_t} = 0.139$$

Este valor es equivalente a la tasa de inversión privada bruta (por tratarse del estado estacionario podemos prescindir de los subíndices t).

Hasta aquí está resuelto el problema de calibración de las variables y parámetros del sector privado de la economía.

Además, para el estado estacionario, se tiene que los acervos de capital humano, infraestructura y capital físico son los siguientes:

$$(C.4) \quad \chi^* = \frac{\mu \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (\delta_X + g_\Psi)}$$

$$(C.5) \quad \omega^* = \frac{b \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (g_\Psi + \delta_\Omega)}$$

De la ecuación de Euler en el estado estacionario, se deriva que:

$$(C.6) \quad k^* = \left[\frac{\alpha(1 - \tau)\chi^{\beta + \varphi}\omega^v}{\rho + \delta_k + \theta g_\Pi} \right]^{\frac{1}{1 - (\alpha + \gamma)}}$$

Entonces, la producción, al igual que los acervos de factores, depende de los parámetros de producción, de preferencias y del valor inicial del gasto fiscal.

$$(C.7) \quad y^* = \left[\frac{\alpha(1 - \tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_\Psi} \right]^{\frac{\alpha + \gamma}{1 - (\alpha + \gamma)}} \left[\frac{\mu \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (\delta_X + g_\Psi)} \right]^{\frac{\beta + \varphi}{1 - (\alpha + \gamma)}} \left[\frac{b \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (g_\Psi + \delta_\Omega)} \right]^{\frac{v}{1 - (\alpha + \gamma)}}$$

Para el capital humano y la infraestructura debe cumplirse que:

$$\chi^* = \frac{\mu \Psi_0 e^{g_\Psi t}}{\Pi_0 L_0 (\delta_X + g_\Psi) e^{(g_\Pi + g_L)t}} = \frac{\mu (\tau Y^*)}{\Pi_0 L_0 (\delta_X + g_\Psi) e^{(g_\Pi + g_L)t}} = \frac{\mu (\tau y^*) e^{g_\Psi t}}{\Pi_0 L_0 (\delta_X + g_\Psi) e^{(g_\Pi + g_L)t}}$$

$$\omega^* = \frac{b \Psi_0 e^{g_\Psi t}}{\Pi_0 L_0 (g_\Psi + \delta_\Omega) e^{(g_\Pi + g_L)t}} = \frac{b (\tau Y^*)}{\Pi_0 L_0 (g_\Psi + \delta_\Omega) e^{(g_\Pi + g_L)t}} = \frac{\mu (\tau y^*) e^{g_\Psi t}}{\Pi_0 L_0 (g_\Psi + \delta_\Omega) e^{(g_\Pi + g_L)t}}$$

Siendo τY^* el gasto público óptimo, y dado que $g_\Psi = g_L + g_\Pi$, las relaciones anteriores nos llevan a:

$$(C.8) \quad y^* = \frac{\Psi_0}{\tau}$$

Reemplazando (C.8) en (C.7) resulta:

$$(C.9) \quad \Psi_0 = \left\{ \tau \left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_K + \theta g_\Psi} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \left[\frac{\mu}{\Pi_0 L_0 (\delta_X + g_\Psi)} \right]^{\frac{\beta+\phi}{1-(\alpha+\gamma)}} \left[\frac{b}{\Pi_0 L_0 (g_\Psi + \delta_\Omega)} \right]^{\frac{\nu}{1-(\alpha+\gamma)}} \right\}^{\frac{1-(\alpha+\gamma)}{1-(\alpha+\gamma+\beta+\phi+\nu)}}$$

Debido a que este modelo se calibra procurando consistencia con las cifras de Cuentas Nacionales para las relaciones capital privado/*PIB* y capital total/*PIB*, es necesario calcular los parámetros restantes (b y μ) teniendo en cuenta este par de restricciones y que además $b + \mu = 1$.

Dado que la relación capital total/*PIB* calculada según Cuentas Nacionales (Greco, 2002) es 2.923, y que se la puede escribir como:

$\frac{k}{y} + \frac{\omega}{y} = 2.923$, podemos calcular el parámetro b mediante los pasos descritos a continuación.

$$2.066 + \frac{\omega}{y} = 2.923 \text{ así que } \frac{\omega}{y} = 0.857.$$

Si reemplazamos y por su forma funcional específica, tendremos que:

$$\frac{\omega}{k^{\alpha+\gamma} \chi^{\beta+\varphi} \omega^{\nu}} = 0.857$$

Y, además, como en el estado estacionario

$$k = \left[\frac{\alpha(1-\tau)\chi^{\beta+\varphi}\omega^{\nu}}{\rho + \delta_k + \theta g_{\Pi}} \right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\gamma)}}$$

Entonces podemos escribir:

$$\frac{\omega}{\left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_{\Pi}} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \chi^{\frac{\beta+\varphi}{1-(\alpha+\gamma)}} \omega^{\frac{\nu}{1-(\alpha+\gamma)}}} = 0.857$$

$$\frac{\omega^{1 - \frac{\nu}{1-(\alpha+\gamma)}}}{\left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_{\Pi}} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \chi^{\frac{\beta+\varphi}{1-(\alpha+\gamma)}}} = 0.857$$

$$\omega = \left[0.857 \left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_{\Pi}} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \chi^{\frac{\beta+\varphi}{1-(\alpha+\gamma)}} \right]^{\frac{1-(\alpha+\gamma)}{1-(\alpha+\gamma+\nu)}}$$

En el estado estacionario, $\omega = \frac{b \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (g_{\Psi} + \delta_{\Omega})}$, y $\chi = \frac{(1-b) \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (\delta_x + g_{\Psi})}$

Por tanto:

$$\frac{b \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (g_\psi + \delta_\Omega)} = \left(0.857 \left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_\Pi} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \left[\frac{(1-b) \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (\delta_x + g_\psi)} \right]^{\frac{\beta+\varphi}{1-(\alpha+\gamma)}} \right)^{\frac{1-(\alpha+\gamma)}{1-(\alpha+\gamma+v)}}$$

(C.10)

$$b = \frac{\Pi_0 L_0 (g_\psi + \delta_\Omega) \left(0.857 \left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_\Pi} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \left[\frac{(1-b) \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (\delta_x + g_\psi)} \right]^{\frac{\beta+\varphi}{1-(\alpha+\gamma)}} \right)^{\frac{1-(\alpha+\gamma)}{1-(\alpha+\gamma+v)}}}{\Psi_0}$$

A continuación, reemplazamos (C.9) en (C.10), generamos una ecuación con una incógnita (b) y definimos un residuo ($= R$) en función de b tal que:

(C.11)

$$R = b - \frac{\Pi_0 L_0 (g_\psi + \delta_\Omega) \left(0.857 \left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta_k + \theta g_\Pi} \right]^{\frac{\alpha+\gamma}{1-(\alpha+\gamma)}} \left[\frac{(1-b) \Psi_0}{\Pi_0 L_0 (\delta_x + g_\psi)} \right]^{\frac{\beta+\varphi}{1-(\alpha+\gamma)}} \right)^{\frac{1-(\alpha+\gamma)}{1-(\alpha+\gamma+v)}}}{\Psi_0}$$

Iteramos entonces sobre b hasta que el valor de esta “función residuo” sea arbitrariamente pequeño, y así calculamos el valor del parámetro b ($= 0.326$) y también de μ ($= 0.674$). Finalmente, calculamos el valor de gasto público inicial Ψ_0 ($= 0.244$) con base en (C.9).

Puede notarse que la calibración del modelo por este camino permite garantizar que se cumplen las relaciones macroeconómicas citadas para la tasa de inversión privada real, y para la relación capital privado/*PIB* y capital total/*PIB*.

Cuadro C. 1
Velocidades de ajuste de los acervos

Velocidades	Escenario básico	Economía sin infraestructura	Economía sin estado	Escenario con impuestos que no distorsionan
v_2	-0,095	-0,0629	-0,0353	-0,0857
v_3	-0,067	-0,063	-	-0,067
v_4	-0,057	-	-	-0,057

Nota: la diferencia entre las cifras de la velocidad de ajuste v_2 se explica porque cada escenario tiene una calibración diferente. El escenario con impuestos que no distorsionan tiene una calibración que sólo difiere de la del escenario básico en la magnitud inicial del gasto público.

La calibración permite encontrar las velocidades de ajuste de los acervos productivos (Cuadro C.1). Con estas velocidades se puede realizar el ejercicio de estimación del proceso de transición del producto y de los acervos de factores productivos hacia un estado estable a partir de una situación en la cual los acervos y, por ende, el producto, estén alejados de la situación de estado estable (como en la sección VI del cuerpo principal de este documento).