Equilibro e desequilibro na teoria dos preços de reprodução

Eduardo Bolaños
Alexander Tobón*

*Este artigo é um derivado da pesquisa Preços monetários, taxas de juros e acumulação de capital: um enfoque poskeynesiano, a qual se encontra inscrita no sistema universitário de pesquisa da Universidade de Antioquia segundo a Ata CODI número 500 do dia 4 de dezembro de 2007.

Os autores são, em sua ordenm:
Professor da Universidade de Antioquia, membro do Grupo de Macroeconomia Aplicada. Endereço postal: Departamento de Economia sala 13-111, Universidade de Antioquia, Apartado 1226, Medellín, Colômbia.

Professor da Universidade de Antioquia, membro do Grupo de Macroeconomia Aplicada. Endereço postal: Departamento de Economia sala 13-409, Universidade de Antioquia, Apartado 1226, Medellín, Colômbia.

Correios eletrônicos:
eabc@economicas.udea.edu.co
atobon@economicas.udea.edu.co

Documento recebido no dia 16 de julho de 2009; versão final aceita no dia 28 de outubro de 2009.

O objetivo deste artigo é apresentar a teoria clássica dos preços de reprodução com o fim de estabelecer o alcanço do seu conteúdo em relação à teoria clássica tradicional. Para tal, adota-se como ponto de partida a obra recente Bidard e Klimovsky (2006), cujo propósito principal é generalizar a teoria clássica dos preços de produção. Mostra-se que, se bem o modelo proposto pede representar rigorosamente tanto o equilibro como o desequilibro sobre hipótese relativamente aceitáveis, este modelo ainda não tem a capacidade suficiente para explicar satisfatoriamente a dinâmica econômica.

Classificação JEL: B24, B51, E11, E12.

Palavras chave: preços relativos, benefício, acumulação de capital, reprodução do capital, desequilibro clássico.

Equilibrium and Disequilibrium in the Theory of Prices of Reproduction

Eduardo Bolaños
Alexander Tobón*

The aim of this paper is to present the classic theory of prices of reproduction with the purpose of establishing the reach of its content with respect to the traditional classic theory. We adopted as our starting point Bidard and Klimovsky (2006), whose main purpose is generalize the classic theory of the prices of production. We show that, even if the model suggested can rigorously represent equilibrium and disequilibrium situations under relatively acceptable assumptions, this model can not explain the economic dynamic in a satisfactory manner.

JEL classification: B24, B51, E11, E12.

Keywords: relative prices, profit, accumulation of capital, reproduction of capital, classical disequilibrium.

* This paper is part of the research project entitled *"Precios monetarios, tasas de interés y acumulación de capital: un enfoque poskeynesiano"*, which is sponsored by Department of Economics and CODI at the University of Antioquia (Act CODI number 500, date 04/12/2007).

The authors are respectively:

Professor at University of Antioquia, Grupo de Macroeconomía Aplicada. Postal address: Departamento de Economía oficina 13-111, Universidad de Antioquia, Apartado 1226, Medellín, Colombia.

Professor at University of Antioquia, Grupo de Macroeconomía Aplicada, Postal address: Departamento de Economía oficina 13-409, Universidad de Antioquia, Apartado 1226, Medellín, Colombia.

E-mail:
eabc@economicas.udea.edu.co
atobon@economicas.udea.edu.co

Document received: 16 July 2009; final version accepted: 28 October 2009.

Equilibrio y desequilibrio en la teoría de los precios de reproducción

Eduardo Bolaños
Alexander Tobón*

*Este artículo es un derivado de la investigación *Precios monetarios, tasas de interés y acumulación de capital: un enfoque poskeynesiano*, la cual se encuentra inscrita en el sistema universitario de investigación de la Universidad de Antioquia, según el acta CODI número 500, del 4 de diciembre de 2007.

Los autores son en su orden:

Profesor de la Universidad de Antioquia, miembro del Grupo de Macroeconomía Aplicada. Dirección postal: Departamento de Economía, oficina 13-111, Universidad de Antioquia, apartado 1226, Medellín, Colombia.

Profesor de la Universidad de Antioquia, miembro del Grupo de Macroeconomía Aplicada. Dirección postal: Departamento de Economía, oficina 13-409, Universidad de Antioquia, apartado 1226, Medellín, Colombia.

Correos electrónicos: eabc@economicas.udea.edu.co atobon@economicas.udea.edu.co

Documento recibido: 16 de julio de 2009; versión final aceptada: 28 de octubre de 2009.

El objetivo de este artículo es presentar la teoría clásica de los precios de reproducción con el fin de establecer el alcance de su contenido respecto a la teoría clásica tradicional. Para ello, se adopta como punto de partida la obra reciente de Bidard y Klimovsky (2006), *Capital, salaire et crises*, cuyo propósito principal es generalizar la teoría clásica de los precios de producción. Se muestra que, si bien el modelo propuesto puede representar rigurosamente tanto el equilibrio como el desequilibrio a partir de hipótesis relativamente aceptables, aún no tiene la capacidad suficiente para explicar de manera satisfactoria la dinámica económica.

Clasificación JEL: B24, B51, E11, E12.

Palabras clave: precios relativos, beneficio, acumulación de capital, reproducción del capital, desequilibrio clásico.

I. INTRODUCCIÓN

La obra reciente de Bidard y Klimovsky (2006) tiene que ver con los problemas de la reproducción del capital, la distribución de los ingresos y el crecimiento económico en una economía real, en el marco de la teoría económica clásica. Su libro constituye un gran esfuerzo en el progreso de esta escuela de pensamiento, pues, según Deleplace (2007, p. 477), el texto representa una de las direcciones que ha tomado recientes de la heterodoxia neorricardiana, la cual "busca reemplazar el método de Sraffa en la perspectiva de un desarrollo moderno de la teoría clásica antigua". Mientras que Bellino (2008, p. 203) sostiene que "the authors present a framework [...] conceived as an alternative to the Ricardian approach and that can be applied to situations of equilibrium and disequilibrium". Bidard y Klimovsky (2006, p. 183) señalan claramente la novedad de su enfoque de la siguiente manera: "Nuestro propósito está centrado en la presentación de una formulación común al desequilibrio y al equilibrio". La intención de estos autores se explica por la idea de que tanto la teoría clásica como la teoría neoclásica mantienen una dicotomía en los análisis del equilibrio y del desequilibrio, los cuales obedecen a dos teorías diferentes.

En la contribución de Bidard y Klimovsky (2006) pueden distinguirse dos partes. En la primera, se propone un modelo de producción y reproducción que extiende la teoría clásica estándar del valor a las situaciones de desequilibrio del sistema económico (capítulo 11 de su libro). En la segunda, se inicia un análisis sobre las propiedades dinámicas del modelo y sobre las posibilidades de crisis, para lo cual proponen trayectorias diferentes a aquellas de la tradición clásica antigua y moderna que conciben la dinámica en función de la gravitación de los precios de mercado en torno a los precios naturales (capítulo 12 de su libro).

La presentación de estas dos partes se hace a través de ejemplos numéricos, a partir de los cuales se deducen densas argumentaciones teóricas, sin que resulte fácil captar su esencialidad. Klimovsky (2006) presenta una generalización adoptando la misma estructura del libro, pero resulta igualmente difícil distinguir con claridad los sistemas de ecuaciones que entran en la determinación tanto del equilibrio como del desequilibrio. Por esta razón, el objetivo de este artículo es proponer una generalización del modelo de Bidard y Klimovsky formalizada matricialmente, con el fin de establecer con precisión las hipótesis y los sistemas de ecuaciones que permiten determinar el equilibrio y el desequilibrio; al mismo tiempo, señalar el alcance y poder explicativo de ambas situaciones, donde las variables económicas fundamentales desencadenantes de la actividad económica son las tasas de acumulación *decididas* por los capitalistas. Aunque se hace énfasis en la formalización del modelo, también recurrimos a algunos ejemplos numéricos que permitan captar mejor la operatividad de las relaciones esenciales.

En una primera aproximación, pueden considerarse los modelos de Sraffa y de Torrens como casos particulares extremos del modelo de Bidard y Klimovsky (Klimovsky, 2006, p. 35). En efecto, en Sraffa (1960) se asume que todo el excedente social o producto neto es consumido, mientras que en Torrens (1821) todo el excedente es acumulado. Bidard y Klimovsky (2006) consideran el caso general en el cual una parte del producto neto es acumulada y la otra es consumida. A pesar de esta especificidad, la teoría de Torrens constituye el marco teórico de referencia de nuestros autores, a partir del cual se retienen las condiciones de reproducción de una economía capitalista, tanto en términos físicos como en valor (Bidard y Klimovsky, 2006, capítulo 10), las cuales se consideran esenciales en la estructura lógica del modelo propuesto y sus variantes.

El artículo está organizado como sigue: en la sección II se presenta la teoría de Robert Torrens como la entienden Bidard y Klimovsky. La sección III está consagrada a la exposición del modelo de estos autores, según diferentes hipótesis sobre la acumulación y el consumo del excedente social. La sección IV se dedica a la explicación de una importante propiedad del modelo, tan preciada para clásicos antiguos y modernos, esto es, la determinación de la tasa de beneficio en términos físicos. En la sección V se hacen algunas apreciaciones sobre el problema de la dinámica económica que se deriva al considerar el modelo en una perspectiva intertemporal. Finalmente, el lector encontrará las conclusiones de nuestro estudio y dos anexos.

II. EL MODELO CLÁSICO DE ROBERT TORRENS

La interpretación de Torrens (1821) presentada por Bidard y Klimovsky (2006) se obtiene a partir de Benetti (1986). Se trata de un modelo clásico que determina las tasas de acumulación, las tasas de beneficio y los precios relativos de los bienes de un sistema económico, tanto en situación de equilibrio como en situación de desequilibrio. Sea un sistema concreto de producción en el cual los métodos de producción son invariables, los salarios hacen parte del capital, la única utilización de los bienes es el consumo productivo (se utilizan como medios de producción estrictos o como bienes de subsistencia de los trabajadores), el capital es circulante y el período de producción de todos los bienes es único. En este sistema, a partir de la matriz $\mathbf{Y}$ de consumos productivos se obtiene el vector $\mathbf{y}$ de productos totales[1]:

$$\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{y}',$$

o también,

$$\hat{\mathbf{y}}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{y}',$$

donde $\hat{\mathbf{y}}$ es la matriz conformada por los productos en su diagonal principal y cuyas otras componentes son nulas. Además, se tiene que $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es la matriz de coeficientes técnicos tipo Leontief. Si en la economía se acumula todo el excedente social, entonces, las *condiciones de factibilidad* del sistema están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{u} + \mathbf{g})\hat{\mathbf{y}}\mathbf{A}, \qquad (1)$$

donde $\boldsymbol{g} = [g_i]$ es el vector de tasas de acumulación de la economía, con $i = 1, 2...n$; y $\mathbf{u} = [1 \quad 1 \quad ... \quad 1]$. El lado derecho de este sistema representa las "demandas efectivas" de los diferentes bienes, es decir, las demandas para la reposición del consumo productivo del período actual y las demandas para la ampliación de la escala de producción del período siguiente[2]. El vector $\boldsymbol{g}$ de tasas de acumulación está determinado endógenamente como solución de este sistema de ecuaciones.

1 Para la definición de los símbolos matriciales y vectoriales, véase el Anexo 1.

2 En otras palabras, el concepto de demanda efectiva, "effectual demand" (Torrens, 1956, p. 342), se refiere a los requerimientos físicos del bien *i* por parte de todos los sectores, necesarios

Una vez conocido el vector g, los precios estarán determinados por las *condiciones de circulación* o *ecuaciones de gasto* que expresan la igualdad entre los ingresos y los gastos de cada industria (costo de reposición de las condiciones de producción del período actual más el costo de la ampliación de esas condiciones en el período siguiente). Estas condiciones están representadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}})\mathbf{AP}. \tag{2}$$

El vector $\mathbf{P}$ de precios relativos se determina como solución del sistema (2). Utilizando este vector para evaluar el consumo productivo a los costos de reposición, puede conocerse la rentabilidad de los productores, la cual debe cumplir las *condiciones de producción* que indican la igualdad entre los ingresos y los costos de producción, más las ganancias del sector. Tales condiciones están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}})\mathbf{AP} \tag{3}$$

donde $\hat{\mathbf{r}} = [r_i]$ es la matriz conformada por las tasas de beneficio en la diagonal principal, siendo ceros los demás elementos, las cuales se determinan resolviendo este sistema. Como los sistemas (2) y (3) son idénticos, se tiene que, para las hipótesis adoptadas por Torrens, $\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{r}}$, es decir, $g_1 = r_1$, $g_2 = r_2$, ... $g_n = r_n$. Dado que los precios son la expresión simultánea de la producción y de la circulación, éstos se conciben como precios de reproducción (Klimovsky, 2006, p. 37).

Los sistemas (1), (2) y (3) sintetizan el modelo de Torrens para una economía en situación de desequilibrio. A partir de ellos también es posible analizar el comportamiento dinámico de los tres conjuntos de variables, para lo cual habrá que empezar estableciendo un modelo dinámico en cantidades, es decir, un conjunto de relaciones que liguen las producciones de períodos consecutivos. De (1) se deduce: $\mathbf{y}_t = (\mathbf{u} + \mathbf{g}_t)\hat{\mathbf{y}}_t \mathbf{A}$; y como $(\mathbf{u} + \mathbf{g}_t)\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_{t+1}$, entonces:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t+1}\mathbf{A}\text{, para } t = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

para la reposición del capital corriente y para la expansión de ese capital en el período siguiente. Este concepto difiere del de demanda efectiva, "effective demand" propuesto por Keynes, el cual hace referencia a la demanda global anticipada medida en dinero.

Este sistema de ecuaciones determina las cantidades de productos que podrían obtenerse en el período $t + 1$, si todos los productos obtenidos por la economía en el período t son utilizados en el consumo productivo (si nada va al consumo final). La resolución repetitiva del sistema de ecuaciones (4) engendra una serie de vectores $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t+1}, \ldots$, que representan los diferentes niveles de productos y las diferentes proporciones entre ellos que se generan en el tiempo.

Torrens se refiere a un sistema de producción en equilibrio o en "posición natural", cuando los niveles de producción tienen unas "buenas proporciones" (Benetti, 1986). Se trata de un sistema de producción homotético cuya construcción y propiedades son similares a las del "sistema patrón" de Sraffa. La estructura de este sistema garantiza unas tasas de beneficio y de acumulación iguales entre sí, es decir que el equilibrio se define por las igualdades $g^* = g_1 = g_2 = \ldots = g_n = r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r^*$. La "posición natural" o situación de equilibrio del modelo de Torrens está descrita por los siguientes conjuntos de ecuaciones que sintetizan las condiciones de reproducción del sistema económico:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y^*} = (\mathbf{u} + \mathbf{g^*})\hat{\mathbf{y}}^*\mathbf{A} \\ &\mathbf{P^*} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}}^*)\mathbf{AP^*}\;. \\ &\mathbf{P^*} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}}^*)\mathbf{AP^*} \end{aligned} \qquad (5)$$

En esta situación especial se cumple, para cada bien en cualquier período, la igualdad entre la "demanda efectiva" y la oferta, siendo válida la ley de Say e impensable una crisis de sobreproducción general. Por el contrario, en la situación de desequilibrio –lejana de las "buenas proporciones"– existe la posibilidad de obtener en algún momento un $g_i = -1$. En este caso se tienen dos consecuencias. En primer lugar, se obtienen que $p_i = 0$, lo que se traduce en una imposibilidad técnica del intercambio (no existe un precio positivo al cual toda la producción del bien i pueda ser vendida); de esta manera existe un *stock* de bien i invendido, es decir existe sobreproducción de bien i. En segundo lugar, se obtiene que $(1 + g_i) = 0$, lo cual significa que la "demanda efectiva" del sector i se anula (este sector no compra ningún bien), de tal forma que en el período siguiente se tiene una sobreproducción de al menos un bien que sirva como insumo de i. Los efectos de estas sobreproducciones llevan, en períodos siguientes, a la sobreproducción general. Entonces, cuando el sistema no está en "buenas proporciones", al no corroborarse siempre la igualdad entre oferta y "demanda efectiva" para al menos un bien, la ley de Say deja de ser válida y lo más probable es la parálisis de todo el sistema productivo.

Así presentado, el modelo de Torrens constituye un escenario propicio para el objetivo de Bidard y Klimovsky puesto que un mismo sistema de ecuaciones permite modelar tanto el equilibrio como el desequilibrio y determinar endógenamente las variables fundamentales del sistema económico.

Ejemplo del modelo de Torrens

Sea un sistema concreto que produce los bienes: trigo (B), identificado como el bien 1, y hierro (H), identificado como el bien 2:

$$120B \oplus 30H \rightarrow 460B$$
$$240B \oplus 12H \rightarrow 60H$$

De acuerdo con este sistema, el excedente social o producto neto es: $PN = [100B \quad 18H]$. Las tasas de excedente de cada tipo de producto son: $s_1 = 0{,}277$ y $s_2 = 0{,}428$. La matriz de coeficientes técnicos es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{6}{23} & \frac{3}{46} \\ 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Con base en estos datos, la situación económica viene dada por los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$460 = (1+g_1)(120) + (1+g_2)(240)$$

$$60 = (1+g_1)(30) + (1+g_2)(12)$$

$$1 = (1+g_1)\left(\frac{6}{23} + \frac{3}{46}p_{21}\right)$$

$$p_{21} = (1+g_2)\left(4 + \frac{1}{5}p_{21}\right)$$

$$1 = (1+r_1)\left(\frac{6}{23} + \frac{3}{46}p_{21}\right)$$

$$p_{21} = (1+r_2)\left(4 + \frac{1}{5}p_{21}\right).$$

La solución de este conjunto de ecuaciones es, hasta el momento, secuencial y no simultánea como en el modelo neoclásico de equilibrio general. Las dos primeras (ecuaciones de factibilidad) determinan los valores de las tasas de acumulación: g_1 = 54,16%, g_2 = 14,58%. Reemplazando estos valores en las dos siguientes (ecuaciones de circulación), se obtiene el precio relativo p_{21} = 5,946. A su vez, introduciendo este valor en las dos últimas (ecuaciones de producción), quedan determinadas las tasas de beneficio r_1 = 54,16%, r_2 = 14,58%. Como puede observarse, esta situación es de desequilibrio, dado que partiendo de un sistema concreto, se verifica que las tasas de acumulación son diferentes, aunque para cada sector coincidan la tasa de acumulación y la tasa de beneficio. En el siguiente período, si el sistema crece a las tasas de acumulación obtenidas, se tendrá un nuevo sistema de producción con unas proporciones diferentes a la proporción del período anterior. Este nuevo sistema determinará nuevos valores para todas las variables. Así sucesivamente, en los períodos siguientes ocurrirá algo similar y el sistema se trasladará a través de una secuencia de situaciones de desequilibrio.

A partir del sistema concreto puede obtenerse el sistema en equilibrio o en "posición natural". Primero se calcula el valor propio dominante de la matriz **A**, el cual es α^* = 0,7421. Luego, se calcula un vector propio a izquierda asociado al valor propio dominante, que para el caso es q = [1 0,1203]. Finalmente, se aplican los elementos de este vector a los datos iniciales del sistema concreto y se obtiene el siguiente sistema homotético:

$$120B \oplus 30H \rightarrow 460B$$

$$221{,}37B \oplus 11{,}069H \rightarrow 55{,}343H\,.$$

El producto neto es: $PN = \left[118{,}63B \quad 14{,}274H\right]$. Las tasas de excedente de cada tipo de producto son: $s_1 = s_2$ = 0,347. Con estos nuevos datos, ahora la situación de equilibrio viene dada por los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$460 = (1+g_1)(120)+(1+g_2)(221{,}37)$$

$$55{,}343 = (1+g_1)(30) + (1+g_2)(11{,}069)$$

$$1 = (1+g_1)\left(\frac{6}{23}+\frac{3}{46}p_{21}\right)$$

$$p_{21} = (1+g_2)\left(4+\frac{1}{5}p_{21}\right)$$

$$1 = (1 + r_1)\left(\frac{6}{23} + \frac{3}{46} p_{21}\right)$$

$$p_{21} = (1 + r_2)\left(4 + \frac{1}{5} p_{21}\right).$$

Al resolver secuencialmente este conjunto de ecuaciones, resulta la siguiente solución: g_1 = 34,7%, g_2 = 34,7%, p_{21} = 7.379, r_1 = 34,7%, r_2 = 34,7%. El sistema se encuentra en una situación de equilibrio ya que se caracteriza por la igualdad: $g_1 = g_2 = r_1 = r_2 = s_1 = s_2$ = 34,7%. Si el sistema homotético inicial crece a estas tasas de acumulación de equilibrio, los sistemas de producción sucesivos seguirán siendo homotéticos, es decir, se conservará la misma proporción entre los productos, y todas las variables endógenas correspondientes a esos sistemas seguirán teniendo los mismos valores. La economía crece en una situación de equilibrio general estable.

III. EL MODELO CLÁSICO DE BIDARD Y KLIMOVSKY

El modelo clásico de Bidard y Klimovsky consiste en introducir en el modelo de Torrens la posibilidad de que una parte del producto neto no sea acumulada. Para ello, es necesario *generalizar* el sistema (1) de la siguiente forma:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{g})\hat{\mathbf{y}}\mathbf{A} \leq \mathbf{y}. \qquad (6)$$

Si se considera la igualdad estricta, se obtiene el caso particular de Torrens donde todo el producto neto se acumula, con lo que se obtiene el sistema (1). Por el contrario, si se considera la desigualdad estricta, una parte del producto neto no se acumula. La hipótesis de Bidard y Klimovsky consiste en asumir que esta parte no acumulada es consumida improductivamente por los capitalistas. Estos autores sugieren, entonces, dos métodos para determinar el consumo en el modelo: *a)* los capitalistas consumen el valor de la parte no acumulada del producto neto; y *b)* los capitalistas consumen una proporción uniforme de sus beneficios. Cada método de tratamiento del consumo constituye una variante de un único modelo.

A. EL CONSUMO COMO VALOR DE LA PARTE NO ACUMULADA DEL PRODUCTO NETO

Sea un sistema concreto de producción que verifica las mismas hipótesis descritas para el modelo de Torrens, excepto la propiedad correspondiente a la utilización de los bienes. En efecto, ahora se supone que los bienes pueden emplearse tanto productiva como improductivamente (consumo capitalista). Si a partir del sistema (6) una parte del excedente social no se acumula, entonces las condiciones de factibilidad y de la circulación a la descrita para Torrens deben ser modificadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{y} - (\mathbf{u} + \mathbf{g})\hat{\mathbf{y}}\mathbf{A} = \mathbf{F} \tag{7}$$

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}})\mathbf{AP} + \hat{\mathbf{f}}\mathbf{P} = \mathbf{P} \tag{8}$$

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}})\mathbf{AP} = \mathbf{P}, \tag{9}$$

donde $\mathbf{F} > 0$ es el vector fila de las cantidades físicas no acumuladas del producto neto y $\hat{\mathbf{f}}$ es la matriz conformada por los coeficientes de producto neto no acumulado en la diagonal principal y cuyos otros componentes son nulos. En esta matriz, cada coeficiente f_i está definido por $f_i = (F_i / y_i)$. El sistema (7) permite determinar $\mathbf{F}$ si y solo si, a diferencia del modelo de Torrens, las tasas de acumulación se consideran *exógenas*. Una vez obtenido este vector, se puede calcular $\hat{\mathbf{f}}$ de tal manera que el sistema (8) determine el vector $\mathbf{P}$, el cual se reemplaza en el sistema (9) para obtener el vector $\hat{\mathbf{r}}$.

La formalización dinámica de este modelo es similar a la descrita para el de Torrens. El conjunto de relaciones que ligan las producciones de períodos consecutivos son del siguiente tipo:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t+1}\,\mathbf{A} + \mathbf{F}_t\,, \text{ para } t = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

Estas relaciones expresan la producción del período $\mathbf{y}_{t+1}$ en función de la producción $\mathbf{y}_t$ y del consumo improductivo del período anterior $\mathbf{F}_t$, que a su vez depende de las tasas de acumulación exógenas, siempre y cuando éstas sean viables.

Los sistemas (7), (8) y (9) permiten describir una economía real tanto en desequilibrio como en equilibrio. Sin embargo, hay una diferencia adicional respecto al modelo de

Torrens: el desequilibrio y el equilibrio son situaciones que se presentan tanto en el sistema de producción concreto como en el sistema de producción homotético. La razón de esta diferencia radica en que las tasas de acumulación son exógenas y la definición del desequilibrio y del equilibrio se establece respecto a ellas. Veámoslo en detalle.

Adoptando en primer lugar el sistema concreto: si los capitalistas deciden tasas de acumulación diferentes, entonces, los sistemas (7), (8) y (9) determinan tasas de beneficio diferentes, situación que se define como un desequilibrio. Por el contrario, si ellos deciden tasas de acumulación iguales, entonces, los sistemas (7), (8) y (9) también determinan tasas de beneficio diferentes. Esta situación es denominada por Bidard y Klimovsky como "equilibrio en la reproducción física" o "crecimiento regular". Los autores muestran igualmente la existencia de otro equilibrio obtenido a partir del sistema concreto. Se trata del "equilibrio en la rentabilidad", el cual resulta cuando las tasas de beneficio son iguales, dadas unas proporciones particulares (que pueden calcularse) entre las tasas de acumulación exógenas.

Adoptando, en segundo lugar, el sistema homotético o en "buenas proporciones": si los capitalistas deciden tasas de acumulación diferentes, lo cual constituye entonces los sistemas (7), (8) y (9) determinan tasas de beneficio diferentes, lo cual constituye un desequilibrio, a pesar de tratarse del sistema homotético. Por el contrario, si ellos deciden tasas de acumulación iguales, entonces los sistemas (7), (8) y (9) determinan tasas de beneficio iguales, es decir, la condición $g^* = g_1 = g_2 = ... = g_n$ garantiza el resultado $r_1 = r_2 = ... = r_n = r^*$, lo cual constituye para Bidard y Klimovsky un "equilibrio completo", situación que, curiosamente, no constituye una situación de equilibrio en el modelo de Torrens.

Entonces, el equilibrio completo está descrito por el siguiente sistema de ecuaciones, a condición de que las tasas de acumulación sean iguales:

$$\mathbf{y}^* - (\mathbf{u} + \mathbf{g})\hat{\mathbf{y}}^*\mathbf{A} = \mathbf{F}^*$$
$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}})\mathbf{AP}^* + \hat{\mathbf{f}}^*\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^*$$
$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}}^*)\mathbf{AP}^* = \mathbf{P}^* \tag{11}$$

La diferencia más notoria respecto al equilibrio de Torrens es que las tasas de acumulación son exógenas o decididas por los capitalistas de acuerdo con su lógica de acumulación; sin embargo, esas tasas tienen que ser realizables o compatibles con la producción disponible.

1. Ejemplo para el primer modelo de Bidard y Klimovsky

Consideremos el mismo sistema concreto del ejemplo de Torrens:

$$120B \oplus 30H \rightarrow 460B$$
$$240B \oplus 12H \rightarrow 60H\,.$$

Con base en estos datos, la situación económica viene dada por los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$460 - [(1+g_1)(120)+(1+g_2)(240)] = F_1$$
$$60 - [(1+g_1)(30)+(1+g_2)(12)]=F_2$$
$$(1+g_1)\left(\frac{6}{23}+\frac{3}{46}p_{21}\right)+f_1=1$$
$$(1+g_2)\left(4+\frac{1}{5}p_{21}\right)+f_2p_{21}=p_{21}$$
$$(1+r_1)\left(\frac{6}{23}+\frac{3}{46}p_{21}\right)=1$$
$$(1+r_2)\left(4+\frac{1}{5}p_{21}\right)=p_{21}\,.$$

La solución de este sistema de ecuaciones se obtiene como se describe a continuación. Si las tasas de acumulación decididas por los capitalistas son diferentes: g_1 = 25%, g_2 = 6%, entonces, al reemplazarlas en las dos primeras (ecuaciones de factibilidad), se determinan las cantidades no acumuladas del excedente, F_1 = 55,6B, F_2 = 9,78H Una vez conocidas estas cantidades, se pueden conocer los coeficientes f_1 = 0,1208, f_2 = 0,163, los cuales se reemplazan en las dos siguientes (ecuaciones de circulación) para determinar el precio relativo, p_{21} = 6,784. Ahora, introduciendo este valor en las dos últimas (ecuaciones de producción) quedan determinadas las tasas de beneficio r_1 = 42,2%, r_2 = 26,6%. Esta situación es de desequilibrio dado que a partir de tasas de acumulación exógenas diferentes se obtienen tasas de beneficio distintas. Sin embargo, el equilibrio de la reproducción física puede obtenerse si se consideran tasas de acumulación iguales. Por ejemplo, si $g_1 = g_2$ = 20%, se obtiene r_1 = 27,7%, r_2 = 42,8%.

A partir del sistema concreto puede obtenerse el sistema homotético. Dado que el sistema de producción es el mismo del ejemplo de Torrens, se tiene:

$$120B \oplus 30H \rightarrow 460B$$
$$221{,}37B \oplus 11{,}069H \rightarrow 55{,}343H\,.$$

Con estos nuevos datos la situación económica es la siguiente:

$$460 - [(1+g_1)(120)+(1+g_2)(221{,}37)] = F_1$$

$$55{,}343 - [(1+g_1)(30)+(1+g_2)(11{,}069)] = F_2$$

$$(1+g_1)\left(\frac{6}{23}+\frac{3}{46}p_{21}\right)+f_1 = 1$$

$$(1+g_2)\left(4+\frac{1}{5}p_{21}\right)+f_2 p_{21} = p_{21}$$

$$(1+r_1)\left(\frac{6}{23}+\frac{3}{46}p_{21}\right)=1$$

$$(1+r_2)\left(4+\frac{1}{5}p_{21}\right)= p_{21}\,.$$

Este sistema homotético determina un equilibrio completo si, por ejemplo, los capitalistas deciden que $g_1 = g_2 = 20\%$. En este caso, $F_1 = 50{,}354B$, $F_2 = 6{,}0607H$, $f_1 = f_2 = 0{,}10949$, $p_{21} = 7{,}3788$, $r_1 = r_2 = 34{,}7\%$. Este mismo sistema homotético determina un desequilibrio si los capitalistas deciden tasas de acumulación diferentes. Por ejemplo, si $g_1 = 25\%$, $g_2 = 6\%$, se obtienen tasas de beneficio diferentes, $r_1 = 49{,}4\%$, $r_2 = 19{,}1\%$.

B. EL CONSUMO COMO UNA PROPORCIÓN UNIFORME DE LOS BENEFICIOS

Sea un sistema concreto de producción que verifica las mismas hipótesis descritas para el modelo anterior. Sin embargo, a diferencia del primer modelo, ahora se asume que el consumo capitalista es residual y constituye una proporción uniforme c de los beneficios. Cuando $\mathbf{g} > 0$, cumple la condición de factibilidad $(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{g}})\mathbf{yA} < \mathbf{y}$, y entonces, $\mathbf{F} > 0$ y $0 \leq c \leq 1$, y se puede escribir el siguiente bloque de ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{g}} = (1-c)\hat{\mathbf{r}} \tag{12}$$

$$(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}}+c\hat{\mathbf{r}})\mathbf{AP} = \mathbf{P} \tag{13}$$

$$(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{r}})\mathbf{AP} = \mathbf{P} \tag{14}$$

El sistema (13) representa las condiciones de circulación y el sistema (14) representa las condiciones de producción. Existen dos maneras alternativas de solucionar estos sistemas de ecuaciones. Una primera posibilidad consiste en adoptar exógenamente las tasas de acumulación y resolver simultáneamente los sistemas (13) y (14) para obtener **P, r^, c**; se verifica sin problema la validez de la ecuación (12). La segunda posibilidad consiste en utilizar el sistema (12), a partir del cual se deduce la relación $(g_i / g_j) = (r_i / r_j)$. Dado que las tasas de acumulación son exógenas, la relación $r_i = (g_i / g_j)r_j$ se reemplaza en el sistema (14) para determinar **P**, $\hat{\mathbf{r}}$. Luego se sustituyen **P**, $\hat{\mathbf{g}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ en el sistema (13) para determinar *c*.

Los sistemas (12), (13) y (14) permiten describir una economía real tanto en desequilibrio como en equilibrio. A diferencia del primer modelo, las situaciones de equilibrio ya no dependen de la naturaleza homotética del sistema de producción[3]. En efecto, dado que al asumir la uniformidad de c, entonces, el sistema concreto es suficiente, es decir que el sistema homotético no es una condición necesaria para el equilibrio. Si los capitalistas deciden tasas de acumulación diferentes se obtiene el desequilibrio puesto que los sistemas (12), (13) y (14) arrojan tasas de beneficio distintas. Por el contrario, si los capitalistas deciden tasas de acumulación iguales, se obtiene el equilibrio completo debido a que los sistemas de ecuaciones determinan una tasa de beneficio uniforme. El equilibrio completo se determina a través de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{g}} = (1-c^*)\hat{\mathbf{r}}^* \\ &(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}}+c^*\hat{\mathbf{r}}^*)\mathbf{AP}^* = \mathbf{P}^* \\ &(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{r}}^*)\mathbf{AP}^* = \mathbf{P}^* \end{aligned} \tag{15}$$

3 Klimovsky (2006, p. 42) subraya las particularidades de este segundo modelo respecto al primero: "Dada la constancia de los rendimientos, un cambio en los niveles de actividad de las ramas no afecta a ninguna de las ecuaciones [(13) y (14)] y, en consecuencia, las tasas de ganancia y los precios no varían [...]. Por otra parte, las tasas de ganancia y los precios relativos dependen aquí de las tasas de acumulación y no de los factores de acumulación [...]. Nótese finalmente que [...] la solución sólo depende del valor del capital y del salario, y no de su composición física".

1. Ejemplo para el segundo modelo de Bidard y Klimovsky

Consideremos el mismo sistema concreto del ejemplo de Torrens:

$$120B \oplus 30H \rightarrow 460B$$
$$240B \oplus 12H \rightarrow 60H\ .$$

Con base en estos datos, la situación económica viene dada por los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$g_1 = (1 - c)r_1$$
$$g_2 = (1 - c)r_2$$
$$(1 + g_1 + cr_1)\left(\frac{6}{23} + \frac{3}{46}p_{21}\right) = 1$$
$$(1 + g_2 + cr_2)\left(4 + \frac{1}{5}p_{21}\right) = p_{21}$$
$$(1 + r_1)\left(\frac{6}{23} + \frac{3}{46}p_{21}\right) = 1$$
$$(1 + r_2)\left(4 + \frac{1}{5}p_{21}\right) = p_{21}$$

Adoptemos el primer método de solución. Si los capitalistas deciden $g_1 = 25\%$, $g_2 = 6\%$, entonces, al reemplazar estos valores en las cuatro últimas ecuaciones, se obtienen las siguientes magnitudes de desequilibrio: $p_{21} = 5{,}8611$, $r_1 = 55{,}49\%$, $r_2 = 13{,}31\%$, $c = 0{,}5495$. Si los capitalistas deciden tasas de acumulación uniformes, se obtiene inmediatamente el equilibrio completo. Por ejemplo, cuando $g_1 = g_2 = 20\%$, se obtiene $r_1 = r_2 = 34{,}7\%$. La utilización del sistema homotético permite determinar estas mismas situaciones de equilibrio y de desequilibrio[4].

4 Los dos modelos expuestos anteriormente pueden complementarse con la introducción de impuestos pagados al Estado por parte de los capitalistas, los cuales pueden ser calculados tanto en términos físicos como en valor, con lo que se obtienen dos nuevos modelos que conservan la mayor parte de las propiedades de los dos primeros.

Una característica interesante de este segundo modelo tiene que ver con el equilibrio estacionario. En efecto, si suponemos tasas de acumulación nulas, el sistema de ecuaciones (12) muestra que $c = 1$, lo cual implica que los sistemas (13) y (14) son idénticos. De esta manera, el sistema en su conjunto no puede resolverse por ninguno de los dos métodos propuestos arriba. Para sobrepasar esta dificultad, Klimovsky (2006, p. 53) propone suponer conocidas $(n - 1)$ tasas de beneficio o suponer conocida su estructura.

Se obtiene un resultado interesante si se adopta un caso especial de la segunda posibilidad de solución: si se supone. De este modo, si se supone que la estructura de las tasas de beneficio es igual a la unidad (tasas de beneficios uniformes), se obtiene la solución del modelo ricardiano. "En definitiva, [la variante ricardiana del] sistema de Sraffa es un caso particular del segundo modelo" (Klimosvky, 2006, p. 54). En efecto, es el modelo ricardiano el que resulta ser un caso particular y no el modelo sraffiano puro (el cual considera la totalidad de los salarios pagados *posfactum* con una parte del excedente social).

IV. LA DETERMINACIÓN DE LA TASA DE BENEFICIO EN TÉRMINOS FÍSICOS

Es bien sabido que Sraffa (1960) propone el modelo de referencia de la teoría ricardiana de los precios de producción o de equilibrio clásico. La razón de ello es que la construcción de la mercancía compuesta patrón, a partir de un sistema concreto, hace posible confirmar el principio de la dificultad de producción física de Ricardo para cualquier vector de precios de *equilibrio*, y a partir de ahí, la determinación de una tasa de beneficio física. Un resultado relevante de Bidard y Klimovsky lo encontramos en su sugerencia de extender el principio de la dificultad de la producción física a los precios de *desequilibrio*. Si en el sistema (14) puede demostrarse que $\hat{\mathbf{r}}$ se obtiene sólo a partir de las magnitudes físicas de la producción de los bienes, entonces, ese sistema calcula los precios relativos de los bienes en función de sus dificultades físicas de producción. De esta manera, una vez conocidas las tasas de beneficio, éstas son suficientes para determinar los precios a través del sistema (14). La solución del modelo deja de ser secuencial.

Los autores comprueban que para un sistema concreto con dos sectores productivos, las dos tasas de beneficio están determinadas en términos físicos. El procedimiento lógico para obtener tasas de beneficio físicas, en el marco del primer modelo de Bidard y Klimovsky[5], se presenta en el Anexo 2. Este procedimiento permite demostrar que si la tasa de excedente físico s_i^+ del bien i, en el período siguiente a aquel para el cual se considera la tasa de beneficio, se calcula a partir del factor de excedente:

$$(1+s_i^+) = \frac{y_i(1+g_i)}{\mathbf{y}(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}})\mathbf{a}^i}, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots n,$$

entonces, se puede verificar que:

$$r_i = s_i^+ .$$

Esto puede comprobarse con el ejemplo que sirvió para ilustrar el primer modelo de Bidard y Klimovsky. De allí sabemos que resolviendo el sistema de ecuaciones (7), (8) y (14) se obtuvieron las tasas de beneficio r_{1t} = 0,422 y r_{2t} = 0,266, las cuales dependen de los precios. Sin embargo, también es posible obtener estas mismas tasas sin necesidad de conocer los precios con anterioridad. Para ello, se calculan las tasas de excedente s_i^+ y se comprueba que son exactamente iguales a las tasas de beneficio calculadas con el sistema de precios:

$$(1+s_1^+) = \frac{460(1+0,25)}{\frac{6}{23}(460)(1+0,25)+4(60)(1+0,06)} = 1,422$$

$$(1+s_2^+) = \frac{60(1+0,06)}{\frac{3}{46}(460)(1+0,25)+\frac{1}{5}(60)(1+0,06)} = 1,266$$

Luego, $s_1^+ = s_{1(t+1)} = 0,422$ y $s_2^+ = s_{2(t+1)} = 0,266$ y, en consecuencia:

$$r_{1t} = s_1^+ = s_{1(t+1)} = 0,422$$

$$r_{2t} = s_2^+ = s_{2(t+1)} = 0,266 .$$

De esta manera puede concluirse que bajo ciertos supuestos, la teoría del valor-dificultad de producción física es una teoría general pertinente para el análisis no sólo

5 Con un método ligeramente diferente es igualmente posible demostrar la determinación de las tasas de beneficio de desequilibrio en términos físicos para el segundo modelo. Véanse Bidard y Klimovsky (2006, pp. 192-194) y Klimovsky (2006, pp. 49-50).

de los *precios naturales* (de equilibrio clásico o de producción), sino también de los *precios de desequilibrio*.

Uno de los supuestos para la validez de esta propiedad de la teoría clásica de los precios de reproducción es asumir que los salarios hacen parte del capital y dependen de la especificación de los bienes que componen la canasta de subsistencia por trabajador, con lo que se les da a los bienes salariales la misma categoría de los medios de producción materiales[6]. Esta hipótesis básica hace posible que, tanto para la teoría ricardiana como para los dos modelos de Bidard y Klimovsky, la distribución (tasas de beneficio) aparezca determinada totalmente por la técnica de producción, excluyendo cualquier determinación exógena al sistema económico. La determinación física de la tasa de beneficio permite, entonces, que el modelo de Bidard y Klimovsky se inscriba sin ambigüedad en la tradición clásica, especialmente en la tradición ricardiana.

Por oposición a este resultado, si se adopta el modelo de Sraffa en el cual el salario no hace parte del capital sino que constituye una parte variable que proviene del valor del excedente social, entonces, la distribución del ingreso (tasas de beneficio y tasas de salario) no se puede determinar al interior del sistema económico[7], por lo que resulta necesario que se dé exógenamente una de las variables de la distribución. En este caso, la teoría sraffiana pura no puede demostrar la determinación de r_i en función de las condiciones técnicas y, por consiguiente, el principio de la dificultad de producción deja de ser válido. Dada esta imposibilidad en el modelo de Sraffa, la distribución de los ingresos ahora no depende exclusivamente de la técnica de producción (esfera económica), sino que también será el resultado de una lucha entre quienes compiten por estos ingresos (esfera política), lo que contradice el espíritu de la economía clásica antigua (Caporaso y Levine, 2004, p. 155). Esta reflexión nos lleva a un interrogante: ¿Cómo cambian las propiedades de los modelos de Bidard y Klimovsky, y qué consecuencias teóricas se derivan si se adopta la hipótesis sraffiana de que los salarios se pagan *posfactum*?

6 Rosell (2009) hace un estudio de los efectos de una variación del salario sobre los precios relativos y sobre las tasas de beneficio en los dos modelos de Bidard y Klimovsky.

7 Excepto en el caso extremo para Sraffa en que el salario es nulo (los trabajadores no participan del excedente social), en cuyo caso la tasa de beneficio máxima, *R*, está determinada en términos físicos. Pero cuando el salario pagado *posfactum* es positivo y $0 \leq r \leq R$, entonces la tasa de beneficio *r* también depende de la determinación exógena del salario (conflicto de intereses entre grupos sociales).

V. LA DINÁMICA DEL MODELO CLÁSICO DE BIDARD Y KLIMOVSKY

Los estudios concernientes a la dinámica económica se encuentran condensados en el capítulo 12 de Bidard y Klimovsky (2006) y en los artículos de Benetti, Bidard y Klimovsky (2007) y Benetti, Bidard, Klimovsky y Rebeyrol (2007). A partir de un estado de desequilibrio, como por ejemplo aquel descrito por los sistemas (7), (8) y (9) del primer modelo, puede iniciarse un análisis de la dinámica del sistema económico. Este análisis permite determinar una evolución en el tiempo de las producciones ($\mathbf{y}_t$, $\mathbf{y}_{t+1}$, ...) y de las variables económicas fundamentales, lo que permite vislumbrar su posible trayectoria y establecer sus propiedades.

Centremos la atención en la evolución dinámica de la reproducción física del primer modelo. En un período de tiempo dado, el estado del sistema económico real está descrito por la producción, la cual depende de las producciones y utilizaciones en los períodos anteriores, las que dependen a su vez de la acumulación (determinada exógenamente en cada sector). Las producciones que surgirán en el futuro y sus correspondientes utilizaciones estarán subordinadas a la situación de la economía en ese período dado y al comportamiento que adopten los capitalistas cuando deciden las tasas de acumulación que regirán en el período siguiente.

La lógica del primer modelo de Bidard y Klimovsky permite generar una trayectoria convergente del proceso de reproducción física de una economía durante un cierto número de períodos[8]. El proceso converge hacia una situación de equilibrio completo en un número de períodos que el analista *escoge a voluntad.* Así, una dinámica del sistema económico correspondiente al ejemplo propuesto para el primer modelo de Bidard y Klimovsky puede ser la sintetizada en el Cuadro 1.

En el Cuadro 1, la g_{it} máxima se calcula haciendo $\mathbf{F} = 0$ en el sistema de ecuaciones (7), lo que resulta equivalente a utilizar el sistema (1) de Torrens. Este cuadro se puede entender de la siguiente manera. A partir de los datos en situación de desequilibrio correspondientes al período t, los capitalistas deciden tasas de acumulación,

8 El procedimiento para esbozar una trayectoria de este tipo es bastante complejo. Los autores lo explican parcialmente para una economía bisectorial. Consiste, en esencia, en delimitar tres regiones de factibilidad de tasas de acumulación menores a las tasas de acumulación máximas. Estas tres regiones permiten el desplazamiento sucesivo hacia tasas de acumulación que generan nuevos sistemas de producción donde las tasas de excedente se acercan cada vez más entre sí (requisito para un acercamiento hacia el equilibrio completo). Véanse Bidard y Klimovsky (2006, pp. 205-208).

menores a la tasa máxima, que se hacen efectivas en el período siguiente $t + 1$, y se tiene para este período un nuevo sistema productivo que ocasiona un desequilibrio tanto físico como en rentabilidad. A medida que se van haciendo efectivas nuevas tasas de acumulación, la diferencia entre las tasas de excedente de los bienes (columna s_{it}) es cada vez menor. Las tasas de acumulación decididas en el período $t + 2$, $g_{1(t+2)}$ = 0,198, $g_{2(t+2)}$ = 0,26, al hacerse efectivas en el período $t + 3$ convierten al sistema concreto en un sistema en "buenas proporciones" que garantiza tasas de excedente iguales: $s_{1(t+3)} = s_{2(t+3)}$ = 0,347. Si en esta situación los capitalistas deciden tasas de acumulación iguales, se obtiene un equilibrio completo, pues, $g_{1(t+3)} = g_{2(t+3)} = 0,2$; $r^*_{1(t+3)} = r^*_{2(t+3)} = 0,347 = s^*_{1(t+3)} = s^*_{2(t+3)}$. En este mismo período también se alcanza el equilibrio natural de Torrens, pues, $g^{*\text{máximo}}_{1(t+3)} = g^{*\text{máximo}}_{2(t+3)} = r^*_{1(t+3)} = r^*_{2(t+3)} = 0,347$. Si las tasas de acumulación iguales decididas en $t + 3$ se hacen efectivas en el período $t + 4$, se repetirá la situación de equilibrio completo con nuevos niveles de productos sectoriales. Y, si en los períodos sucesivos los capitalistas continúan decidiendo tasas de acumulación iguales, el equilibrio se mantendrá indefinidamente.

Lo anterior nos muestra que la lógica del primer modelo de Bidard y Klimovsky permite una trayectoria convergente hacia el equilibrio, si se conocen unas tasas de acumulación (parámetros) aptas o convenientes para tal convergencia. Ahora bien, ¿se puede garantizar una secuencia de tasas de acumulación efectivas como la propuesta en este ejemplo? Parece que no, pues las condiciones para ello serían: *a)* que los capitalistas conocieran la lógica que se deriva del modelo de Bidard y Klimovsky (hipótesis de expectativas racionales), para que puedan adoptar unas tasas de acumulación coherentes y realizables; *b)* que los capitalistas se pusieran de acuerdo (¿decisiones centralizadas o estratégicas?) en el número de períodos en los cuales la convergencia se debe llevar a cabo[9]; *c)* que quisieran estar en situación de equilibrio (¿qué los motivaría a ello? En el cuadro vemos que la tasa de beneficio del primer sector no aumenta progresivamente).

Al respecto, los autores enfatizan que las posibles secuencias en el tiempo de las tasas de acumulación efectivas son múltiples y muy diversas, dependiendo de las hipótesis de comportamiento retenidas (véase Bidard y Klimovsky, 2006, pp. 209-215). Así, "la dinámica depende, a la vez, de la especificación retenida para el modelo estático y de las hipótesis que permiten encadenar un período al otro. Esto explica la diver-

9 Pues podrían llegar al equilibrio en el período $t + 1$, si en el período t deciden las tasas de acumulación g_{1t} = 0,3476 y g_{2t} = 0,428.

Cuadro 1
Una dinámica para el primer modelo de BBK

Período	y_{it}	s_{it}	g_{it} máximo
t	$y_{1t} = 460$ $y_{2t} = 60$	$s_{1t} = 0{,}277$ $s_{2t} = 0{,}428$	$g_{1t} = 0{,}542$ $g_{2t} = 0{,}146$
$t + 1$	$y_{1(t+1)} = 575$ $y_{2(t+1)} = 63{,}6$	$s_{1(t+1)} = 0{,}42$ $s_{2(t+1)} = 0{,}26$	$g_{1(t+1)} = 0{,}162$ $g_{2(t+1)} = 0{,}575$
$t + 2$	$y_{1(t+2)} = 667$ $y_{2(t+2)} = 76{,}32$	$s_{1(t+2)} = 0{,}392$ $s_{2(t+2)} = 0{,}299$	$g_{1(t+2)} = 0{,}235$ $g_{2(t+2)} = 0{,}481$
$t + 3$	$y_1{}^*{}_{(t+3)} = 799{,}07$ $y_2{}^*{}_{(t+3)} = 96{,}14$	$s_1{}^*{}_{(t+3)} = 0{,}347$ $s_2{}^*{}_{(t+3)} = 0{,}347$	$g_1{}^*{}_{(t+3)} = 0{,}347$ $g_2{}^*{}_{(t+3)} = 0{,}347$
$t + 4$	$y_1{}^*{}_{(t+4)} = 958{,}88$ $y_2{}^*{}_{(t+4)} = 115{,}37$	$s_1{}^*{}_{(t+4)} = 0{,}347$ $s_2{}^*{}_{(t+4)} = 0{,}347$	$g_1{}^*{}_{(t+4)} = 0{,}347$ $g_2{}^*{}_{(t+4)} = 0{,}347$

sidad de trayectorias encontradas en el marco de una misma formalización general" (Bidard y Klimovsky, 2006, p. 220). Estas hipótesis de comportamiento tienen que ver con dos procesos consecutivos: *a)* el proceso de formación de las tasas deseadas o anticipadas (inversiones proyectadas); y *b)* el proceso de formación de las tasas efectivas (inversiones efectivas) a partir de las tasas anticipadas. Ambos procesos se pueden desarrollar de distintas maneras, razón por la cual respecto a ellos son imaginables diversas hipótesis.

Para efectos exploratorios, Bidard y Klimovsky (2006) postulan, para una economía de dos sectores, una regla simple que ellos denominan "regla del mínimo", la cual asigna a todo conjunto de tasas de acumulación anticipadas (que pueden ser irrealizables, incompatibles con las cantidades disponibles en la economía) un conjunto de tasas de acumulación efectivas positivas (realizables, compatibles con las cantidades disponibles)[10]. Suponiendo que esta regla del mínimo funcione apropiadamente en el desarrollo del segundo proceso (inversiones efectivas), los autores complementan dicha regla con otras hipótesis sencillas sobre el comportamiento de los capitalistas que pueden funcionar en el primer proceso (inversiones proyectadas), las cuales tienen la propiedad de eliminar ciertas causas de desequilibrio identificadas por los economistas clásicos. Estas hipótesis sencillas dan lugar a diferentes dinámicas del sistema económico. A continuación hacemos alusión a Cuatro hipótesis conside-

10 Véase al respecto Bidard y Klimovsky (2006, pp. 209-211).

	g_{it} exógeno	F_{it}	r_{it}	$p_{ij,t}$
	$g_{1t} = 0,25$ $g_{2t} = 0,06$	$F_{1t} = 55,6$ $F_{2t} = 9,78$	$r_{1t} = 0,422$ $r_{2t} = 0,266$	$p_{21t} = 6,784$
	$g_{1(t+1)} = 0,16$ $g_{2(t+1)} = 0,20$	$F_{1(t+1)} = 95,72$ $F_{2(t+1)} = 4,836$	$r_{1(t+1)} = 0,392$ $r_{2(t+1)} = 0,299$	$p_{21(t+1)} = 7,018$
	$g_{1(t+2)} = 0,198$ $g_{2(t+2)} = 0,26$	$F_{1(t+2)} = 73,987$ $F_{2(t+2)} = 4,979$	$r_{1(t+2)} = 0,347$ $r_{2(t+2)} = 0,348$	$p_{21(t+2)} = 7,3794$
	$g_{1(t+3)} = 0,2$ $g_{2(t+3)} = 0,2$	$F_{1(t+3)} = 87,454$ $F_{2(t+3)} = 10,53$	$r_1{}^*{}_{(t+3)} = 0,347$ $r_2{}^*{}_{(t+3)} = 0,347$	$p_{21}{}^*{}_{(t+3)} = 7,3790$
	$g_{1(t+4)} = 0,3$ $g_{2(t+4)} = 0,3$	$F_{1(t+4)} = 33,644$ $F_{2(t+4)} = 4,0992$	$r_1{}^*{}_{(t+4)} = 0,347$ $r_2{}^*{}_{(t+4)} = 0,347$	$p_{21}{}^*{}_{(t+4)} = 7,3790$

radas por Bidard y Klimovsky sobre el proceso de toma de decisiones en el tiempo de sus inversiones proyectadas (primer proceso) y a sus efectos sobre la evolución en el tiempo de la producción física del sistema económico. Se razona siempre en el marco del primer modelo de Bidard y Klimovsky:

- Tasas de acumulación anticipadas exógenas. Si estas tasas están dadas, y son realizables en el período inicial, pueden suceder tres tipos de dinámica: *a)* si las tasas de acumulación de los dos sectores son iguales y constantes, el sistema sigue un sendero de crecimiento regular; *b)* si las tasas son diferentes y constantes, el sistema se reproduce en desequilibrio y puede llegar a situaciones de crisis de la reproducción; *c)* si las tasas de acumulación deseadas son diferentes pero obedecen a anticipaciones estáticas, entonces, el sistema evoluciona, llegando a crisis durante ciertos períodos y se instala luego en una situación de crecimiento regular.

- Tasas de acumulación anticipadas endógenas. Éstas representan una fracción dada y uniforme de los últimos beneficios realizados. Así pueden ocurrir dos casos: si se invierte la totalidad de los beneficios, entonces, la economía estará en crecimiento regular; si se invierte sólo una parte de los beneficios, la economía tiende hacia un estado estacionario.

- Una "regla de gravitación" particular. En el sector donde la tasa de beneficio es más baja, la tasa de acumulación anticipada es nula, mientras que en el otro sector la tasa es positiva. El estudio del sistema físico muestra que la economía tiende inevitablemente hacia el estado estacionario[11].

- Una "regla del mínimo" que no funciona apropiadamente y puede ocasionar tasas de acumulación efectivas negativas. Aunque los modelos de Bidard y Klimovsky incorporan una ley de Say extrema[12], son posibles dos tipos de crisis de reproducción: *a)* una crisis de proporciones a mediano plazo, pues si se adopta la hipótesis de acumulación de una fracción dada de la producción disponible, entonces, surgirá una tasa de crecimiento negativa en un sector y sobreproducción en el otro; *b)* una crisis de largo plazo de contracción progresiva de la actividad económica, la cual sucede cuando las tasas de acumulación anticipadas dependen de las tasas de beneficio realizadas en el período precedente.

Este análisis sobre dinámica lleva a Bidard y Klimovsky a afirmar que, aun cuando las hipótesis de comportamiento retenidas son simples pero difíciles de justificar, "la persistencia de un desequilibrio o la sub-optimalidad del equilibrio es un resultado significativo" (Bidard y Klimovsky, 2006, p. 204). La gran contribución de estos autores a la teoría dinámica de los sistemas económicos está en que refuerzan la idea de que no es posible demostrar una dinámica convergente hacia un equilibrio, como lo han pretendido las teorías canónicas de los precios, tanto clásicas como neoclásicas. Desde una perspectiva clásica, lo que por ahora se puede concluir a partir del modelo de Bidard y Klimovsky es la posibilidad de una diversidad de trayectorias dinámicas compatibles *con una misma formalización general*, cuyas formas dependerán de los distintos comportamientos capitalistas en el proceso de toma de decisiones respecto a las tasas de acumulación.

VI. CONCLUSIONES

De acuerdo con Bellino (2008), todo el análisis presentado [...] es seguramente un intento interesante por guiar el análisis Clásico en una nueva dirección" (p. 204) y

11 Bellino (2008, pp. 204-205) presenta un ligero desacuerdo con la interpretación de la gravitación realizada por Bidard y Klimovsky (2006).

12 Todos los bienes se usan en la producción o en el consumo y se supone que la fracción no acumulada del producto neto es consumida.

de esta manera, "el innovador marco desarrollado por los autores debería ser mirado con el más alto interés" (p. 205). Nosotros compartimos esta opinión. En efecto, la teoría clásica de los precios de reproducción presentada por Bidard y Klimovsky tiene el mérito de generalizar la teoría clásica de los precios de producción, con lo que hace aparecer, bajo ciertas hipótesis, a Ricardo, Sraffa y Torrens como casos particulares.

La generalidad se deriva de la posibilidad de que un mismo sistema de ecuaciones permita efectivamente describir un conjunto preciso de equilibrios y desequilibrios. Al respecto, esta teoría de los precios de reproducción de enfoque clásico es mucho más interesante que las teorías (teoría neoclásica del equilibrio general y teoría clásica de los precios de producción), pues su representación del desequilibrio capta el comportamiento espontáneo de los capitalistas. Tanto el equilibrio como el desequilibrio se encuentran definidos por los "fundamentales" de la economía: los precios relativos y las tasas de beneficio, obtenidos a partir de la hipótesis de que los capitalistas pueden decidir sus tasas de acumulación (realizables) y respetando el principio clásico de la dificultad de producción. Se trata, entonces, de una teoría que estudia simultáneamente la distribución de los ingresos a través de los precios relativos y el fenómeno del crecimiento (exógeno), lo que ha sido igualmente uno de los objetivos perseguidos por algunos poskeynesianos.

Si bien la teoría de los precios de reproducción da un paso adelante en el estudio del desequilibrio, ella suscita casi las mismas críticas dirigidas a las teorías del valor tradicionales. Señalemos tan sólo dos, tal vez las más importantes. En primer lugar, se trata de una economía real, es decir, sin dinero, razón por la cual no puede explicarlos los precios en los intercambios. Al respecto, Bidard y Klimovsky asumen la centralización de los intercambios a través de la caja de compensación de Debreu (Klimovsky, 2006, p. 40). Así, una demostración satisfactoria de la existencia de un sistema de precios de reproducción de equilibrio (y de desequilibrio), no garantiza los intercambios descentralizados, objetivo central de toda teoría de precios.

En segundo lugar, a pesar de que se logra determinar desequilibrios (lo que no es posible en las teorías del valor tradicionales), el análisis de la convergencia hacia un equilibrio no parece ser una preocupación importante. Dos conclusiones se pueden derivar de esta afirmación: por un lado, si la dinámica económica está asociada a una multiplicidad de hipótesis sobre el comportamiento de los capitalistas, entonces, no vale la pena buscar una única trayectoria estable, como lo han pretendido los neoclásicos a través del *tanteo* o los clásicos a través de la *gravitación*. Por otro lado, dentro de esa multiplicidad de hipótesis algunas pueden conducir efectivamente al equilibrio, pero, como lo hemos visto, dichas hipótesis no se pueden justificar en una economía de mercado, tal y como ocurre también en las teorías clásicas y neoclásicas. Por ejemplo, el modelo de Bidard y Klimovsky converge a un equilibrio estable cuando la economía que representa es centralizada y el Estado decide las tasas de acumulación que aseguran el equilibrio.

En síntesis, la teoría clásica de los precios de reproducción a partir de la contribución original de Bidard y Klimovsky (2006) constituye un punto de partida interesante en la renovación del pensamiento clásico. Sin embargo, dicha teoría contiene en gran parte las mismas deficiencias que les han impedido a las teorías del valor tradicionales resolver las cuestiones teóricas fundamentales.

REFERENCIAS

1. Bellino, E. "Review to C. Bidard-E. Klimovsky, *Capital, Salaire et Crises, Une Approche Classique*", Paris, Dunod, 2006, *Cahiers d'Économie Politique*, num. 54, pp. 201-206, 2008.

2. Benetti, C. "La Théorie de la Demande Effective Chez R. Torrens", *Cahiers d'Economie Politique*, num. 12, pp. 3-39, 1986.

3. Benetti, C; Bidard, C.; Klimovsky, E. "Classical Dynamics of Disequilibrium", *Cambridge Journal of Economics*, num. 31, pp. 41-54. 2007.

4. Benetti, C.; Bidard, C.; Klimovsky, E.; Rebeyrol, A. "Déséquilibre de Marché et Reproduction Dans un Modèle Classique Bisectoriel", mimeografía, *EconomiX*, Université de Paris Ouest-Nanterre La Défense, 2007.

5. Bidard, C.; Klimovsky, E. *Capital, Salaire et Crises: Une Approche Classique*, Paris, Dunod, 2006.

6. Caporaso, J. A.; Levine, D. P. "El enfoque clásico", M. Etxezarreta (ed.), *Crítica a la economía ortodoxa*, Bellaterra, Universidad Autónoma de Barcelona, 2004.

7. Deleplace, G. *Histoire de la Pensée Économique*, Paris, Dunod, 2007.

8. Klimovsky, E. A. "Tasas de ganancia, acumulación, producción y circulación: los conceptos básicos de la teoría clásica del valor", *Cuadernos de Economía*, vol. xxv, núm. 44, pp. 33-55, 2006.

9. Rosell, O. "Analyse du Salaire Dans un Modèle de Reproduction Classique", mimeografía, *EconomiX*, Université de Paris Ouest-Nanterre La Défense, 2009.

10. Sraffa, P. *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Oikos Tau, Barcelona, 1966.

11. Torrens, R. *An Essay On the Production of Wealth*, New York, A. M. Kelley, 1956.

pp. 216-247

ANEXO 1

Definición de los símbolos matriciales y vectoriales

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots a_{i2} & a_{in} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_n \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} (1+g_1) & (1+g_2) & \dots & (1+g_n) \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}}) = \begin{bmatrix} (1+g_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1+g_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (1+g_n) \end{bmatrix}, \ (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}}^*) = \begin{bmatrix} (1+g^*) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1+g^*) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (1+g^*) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}}) = \begin{bmatrix} (1+r_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1+r_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (1+r_n) \end{bmatrix}, \ (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}}^*) = \begin{bmatrix} (1+r^*) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1+r^*) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (1+r^*) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}, \ (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{K}}) := \begin{bmatrix} (1+g_{k1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1+g_{k2}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (1+g_{kn}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{s}}^{+} = \begin{bmatrix} s_1^{+} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^{+} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n^{+} \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

ANEXO 2

Demostración de las tasas de beneficio en términos físicos en el primer modelo de Bidard y Klimovsky

Sea k_i la tasa de reinversión del bien i con $0 \leq k_i \leq 1$, la cual indica la proporción de la producción del bien i que entra en los sectores en calidad de reposición de los medios de producción gastados en el período vigente, y para aumentarlos en el período siguiente:

$$k_i = \frac{\mathbf{y}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}})\boldsymbol{a}^i}{y_i}, \text{ para todo } i = 1,2,...n. \tag{A2.1}$$

A partir del sistema concreto inicial se extrae un sistema de producción K, denominado *núcleo de acumulación*, multiplicando los datos de la producción del sector i por k_i. El sistema K se escribe así:

$$\hat{\mathbf{k}}\mathbf{Y} \rightarrow \hat{\mathbf{k}}\mathbf{y}'. \tag{A2.2}$$

El sistema K produce las cantidades invertidas en el sistema concreto. Las tasas de acumulación (g_{ki}) del sistema K son endógenas y se obtienen resolviendo el sistema $(\mathbf{u} + \mathbf{g}_k)\hat{\mathbf{k}}\mathbf{Y} = \mathbf{y}\hat{\mathbf{k}}$, donde $\mathbf{g}_k$ es el vector de las tasas de acumulación del sistema K. El sistema concreto del período siguiente se escribe:

$$(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}})\mathbf{Y} \rightarrow (\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}})\mathbf{y}'. \tag{A2.3}$$

Por lo tanto, el sistema K del período siguiente es:

$$(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}}_k)\hat{\mathbf{k}}\mathbf{Y} \rightarrow (\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}}_k)\hat{\mathbf{k}}\mathbf{y}'. \tag{A2.4}$$

Por equivalencia entre (A2.3) y (A2.4), se tiene:

$$(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}}) = (\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}}_k)\,\hat{\mathbf{k}}, \tag{A2.5}$$

o también:

$$(1 + g_i) = (1 + g_{ki})k_i \text{, para todo } i = 1,2,...n.$$

Sabemos que $(1+s_i)$ es el factor de excedente en bien i:

$$(1+s_i)=\frac{y_i}{\mathbf{y}\boldsymbol{a}^i}.$$

El factor de excedente en bien i en el próximo período será:

$$(1+s_i^+)=\frac{y_i(1+g_i)}{\mathbf{y}(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}})\boldsymbol{a}^i}. \qquad \text{(A2.6)}$$

A partir de las ecuaciones (9) del primer modelo se tiene:

$$(1+r_i)=\frac{p_i}{\boldsymbol{a}_i\mathbf{P}} \Rightarrow (1+r_i)=\frac{p_i(1+g_i)}{\boldsymbol{a}_i\mathbf{P}(1+g_i)}.$$

Utilizando las ecuaciónes (8), se puede escribir $\boldsymbol{a}_i\mathbf{P}(1+g_i)=p_i-f_ip_i$, que luego se reemplaza en la expresión anterior para obtener:

$$(1+r_i)=\frac{p_i(1+g_i)}{p_i-f_ip_i}.$$

Reemplazando p_i por y_i en la expresión anterior:

$$(1+r_i)=\frac{y_i(1+g_i)}{y_i-f_iy_i}. \qquad \text{(A2.7)}$$

Por el sistema (7) se tiene $\mathbf{y}(\mathbf{I}+\hat{\mathbf{g}})\boldsymbol{a}^i=y_i-f_iy_i$, luego la expresión (A2.6) se puede escribir como sigue:

$$(1+s_i^+)=\frac{y_i(1+g_i)}{y_i-f_iy_i}. \qquad \text{(A2.8)}$$

Comparando (A2.7) y (A2.8), finalmente se tiene:

$r_i=s_i^+$, para todo $i=1,2,\ldots n$.