ELEMENTOS DE COMBINATORIA Y PROBABILIDAD A TRAVÉS DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA

MARIA OLIVA ALZATE CASTAÑO
LUZ ADRIANA CADAVID MUÑOZ
MARÍA EUGENIA RODRÍGUEZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
2004

ELEMENTOS DE COMBINATORIA Y PROBABILIDAD A TRAVÉS DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA

MARIA OLIVA ALZATE CASTAÑO
LUZ ADRIANA CADAVID MUÑOZ
MARÍA EUGENIA RODRÍGUEZ GÓMEZ

Monografía para optar al título
Especialista en Enseñanza de las Matemáticas

Asesora:
CLARA ELENA MEJÍA LAVERDE
Magíster en Psicopedagogía – Desarrollo del Pensamiento Lógico –

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
2004

Es una verdad indiscutible
que cuando no está en nuestras manos
determinar lo que es verdad,
debemos seguir lo que es más probable

"René Descartes"

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Esta es una propuesta de intervención pedagógica con base en situaciones problema que busca orientar el trabajo del docente para el desarrollo del pensamiento aleatorio y probabilístico en la educación básica, especialmente en el grado noveno.

Contiene orientaciones metodológicas conceptuales y didácticas dirigidas a los docentes, para que a través de la presentación de una situación lleven al alumno a elaborar y analizar contenidos matemáticos de manera significativa.

En general, los problemas no se resuelven, se dan orientaciones para su solución, ya que el propósito no es presentar un modulo estilo taller para que los alumnos trabajen, sino una guía que sea objeto de análisis y aplicación en la practica pedagógica referente al tema tratado.

Busca el desarrollo de intuiciones acertadas en los alumnos más que el desarrollo axiomático de la teoría.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Según lo plantean los lineamientos curriculares de matemáticas, en cuanto al desarrollo del pensamiento aleatorio, es necesario de alguna manera que el estudiante logre dominar y manejar acertadamente la incertidumbre, ya que tradicionalmente la matemática escolar ha enfatizado la búsqueda de la respuesta correcta única y los métodos deductivos, por lo que el currículo dentro del aula de clase se desarrolla de forma determinística.

Algunos docentes cuando abordan contenidos de combinatoria y probabilidad lo hacen procurando dar cuenta de una justificación teórica a través de ejemplos clásicos desarticulados, sin una preparación intuitiva previa en los alumnos, lo cual influye notoriamente en el bajo desarrollo de procesos de pensamiento y por ende en el rendimiento académico.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible y conveniente el desarrollo de intuiciones probabilísticas acertadas en la educación básica?

¿Cómo desarrollar la comprensión de los conceptos básicos de probabilidad a través de una situación cotidiana para los alumnos como es el torneo de microfútbol en el colegio?

3. JUSTIFICACIÓN

Abordar el aprendizaje de la probabilidad de forma no determinística requiere que su enseñanza se produzca en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos y situaciones cotidianas con buen grado de indeterminación permitan desarrollar las intuiciones acertadas, que conlleven a saber que hay riesgos, tomar decisiones, analizar posibilidades, predecir resultados y realizar diferentes interpretaciones.

No se pretende un desarrollo teórico de los temas, sino que estos serán tratados dentro de una situación problema particular y cotidiana que los enlaza de forma natural.

Incluir elementos históricos del origen de la probabilidad es pertinente en la medida en que estos conllevan a concebir la matemática como una ciencia humana, no acabada, de construcción colectiva que enmarca temporal y espacialmente las grandes ideas.

4. OBJETIVOS

4.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar una estrategia de intervención pedagógica que mejore la comprensión y el desarrollo del pensamiento aleatorio en los jóvenes del grado noveno de la educación básica a través de una situación-problema de la vida cotidiana.

4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Proponer una estrategia didáctica para abordar el tema de la aleatoriedad a través de una situación cotidiana.

- Reconstruir conceptos básicos de la teoría de la probabilidad alrededor de un problema.

- Describir el desarrollo histórico que dio origen a la combinatoria y probabilidad.

5. DISEÑO METODOLÓGICO

5.1 ENFOQUE DE LA PROPUESTA

Se plantea una propuesta pedagógica que considera las situaciones problemas como factores que potencian y estimulan el aprendizaje de la probabilidad en grado noveno. **La metodología irá orientada hacia la construcción de intuiciones acertadas que permitan a los alumnos apreciar las posibilidades de aplicación a la vida real.**

Según Hans Freudenthal (1983), la finalidad de la enseñanza de una noción matemática en la educación básica no es la adquisición de conceptos por parte del alumno (aprendizaje de una teoría matemática), sino la construcción de objetos mentales (intuiciones) basados en una fenomenología variada, etapa que debe ser previa a la formación de conceptos.

La enseñanza de las nociones probabilísticas puede ser llevada a cabo mediante una metodología heurística y activa a través del planteamiento de problemas concretos.

Conceder importancia a las intuiciones dentro del proceso enseñanza-aprendizaje significa que didácticamente buscamos enseñar abstracciones haciéndolas concretas, lo cual requiere empezar por los fenómenos que solicitan ser organizados, fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Este enfoque nos obliga a dejar de concebir las matemáticas como estructuras conceptuales interpretadas como objetos culturales, fijados mediante definiciones y propiedades, descontextualizadas y despersonalizadas , y poner por delante la fenomenología, que inducen a la acción matemática, al desarrollo de maneras de actuar, que en una fase posterior se regularán mediante el discurso teórico correspondiente. Esta propuesta de acción didáctica se centra en poner al estudiante ante situaciones problema, con lo cual se comenzará a constituir una estructura cognitiva personal que luego podrá ser enriquecida con la visión discursiva cultural.

Según lo expresan los lineamientos curriculares de matemáticas, las situaciones-problema son un contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela.

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones-problema procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.

Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia "estos problemas de aplicación" se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo.

Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas.

Miguel de Guzmán plantea que "la enseñanza a partir de situaciones-problema pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante:

– Que el alumno manipule los objetos matemáticos;

– Que active su propia capacidad mental;

– Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente;

– Que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;

– Que adquiera confianza en sí mismo;

– Que se divierta con su propia actividad mental;

– Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;

– Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia”[1].

Existen varias razones para considerar la importancia de las situaciones-problema como contexto. Este autor menciona las siguientes:

– Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;

– Porque el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;

– Porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo;

– Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;

– Porque es aplicable a todas las edades.

Investigadores holandeses del Instituto Freudenthal[2], consideran entre otras las siguientes razones:

[1] Miguel de Guzmán, Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas, Editorial Popular, Madrid, 1993, pág. 111.

[2] Martín van Reeuwijk, “Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas”, en: UNO. Revista de didáctica de las matemáticas No. 12, Editorial Grao, Barcelona, 1997, págs.13-14.

- Se puede ver la importancia de distintos tópicos de las matemáticas, como por ejemplo la proporción y la pendiente de una línea y la manera como contribuyen a que los alumnos entiendan cómo se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.

- Los alumnos aprenden a usar las matemáticas en la sociedad y a descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores. Puesto que es importante que todos los alumnos aprendan matemáticas como parte de su educación básica, también es importante que sepan por qué las aprenden. A través del contexto desarrollarán una actitud crítica y flexible ante el uso de las matemáticas en problemas que deberán afrontar en la vida real.

- Se acerca a los estudiantes a la historia tanto de las matemáticas como de las demás disciplinas e incrementa su interés por ésta.

- Despiertan la creatividad de los alumnos y los impulsa a emplear estrategias informales y de sentido común. Al afrontar un problema en un contexto eficaz, los alumnos desarrollan la capacidad de analizar dicho problema y de organizar la información. Las estrategias intuitivas que desarrollan pueden constituir un buen punto de partida natural en la evolución de las matemáticas más formales, es decir de la búsqueda de sentido.

- Un buen contexto puede actuar como mediador entre el problema concreto y las matemáticas abstractas. En el proceso de resolución, el problema se transformará en un modelo que puede evolucionar desde un modelo de la situación a un modelo para todos los problemas que se le asemejan desde el punto de vista matemático.

La Propuesta Metodológica planteada por el profesor Orlando Mesa Betancur[3], en su libro: "Contexto para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas", plantea una definición de situaciones problema y la estrategia para diseñarlas.

[3] Miembro fundador del Centro de Pedagogía Participativa con sede en Medellín. Investigador en el campo de la Educación Matemática.

Según el profesor Mesa: “Una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático”.

El profesor Orlando Mesa plantea los siguientes elementos para el diseño de situaciones-problema:

- Seleccionar el gran tema para la situación problema de modo que muchos contenidos específicos del programa puedan ser tratados a partir de él.

- Reorganizar los contenidos específicos por grado de complejidad y extensión, y plantear preguntas y problemas que respondan, lo más aproximadamente posible a esa gradación.

- Derivar de cada logro en el aprendizaje, nuevas preguntas y problemas que respondan a las necesidades culturales exigidas.

Según el mismo autor un proceso para el diseño de situaciones problema es el siguiente:

- Definir una red conceptual básica con referentes en el saber formal, pero de acuerdo con las condiciones individuales de los alumnos y su contexto sociocultural.

Una red conceptual es una estructura de conceptos que puedan ser considerados desde diferentes estados de complejidad y variabilidad.

- Seleccionar un motivo que facilite las actividades y el planteamiento de interrogantes.

Establecer varios estados de complejidad conceptual, en las actividades y en las preguntas.

- Precisar la estrategia para la intervención didáctica, en la que deben diferenciarse los momentos de la enseñanza y los de los aprendizajes creativos.

- Escoger los ejercicios y problemas prototipo que deben comprender los estudiantes.

- Señalar posibilidades para la ampliación, cualificación y desarrollo de los conceptos tratados.

5.2. ENFOQUE COGNITIVO

El papel de las matemáticas en el sistema escolar es cuestión de debate permanente. Varios puntos de vista justifican la gran importancia que tienen en el currículo. Algunas de estas razones son el carácter formativo ya que esta área desarrolla la capacidad del alumno para pensar. El razonamiento lógico, el rigor, la precisión, la abstracción y la validez generada de sus conclusiones han sido características usualmente atribuidas al pensamiento matemático y a cuya adquisición debe contribuir la educación matemática. Esto se logra potenciando y dirigiendo los procesos mediante los cuales los sujetos elaboran y desarrollan pensamiento de tipo cuantitativo, representativo o relacional fundamentalmente. Es por ello que se requieren cambios profundos en el proceso de enseñanza-aprendizaje del área, los cuales nos enfrentan a asumir dos grandes retos:

- ✰ Producir entornos de aprendizaje que posibiliten a cualquier alumno el decidir que información es relevante para el estudio y la comprensión de un determinado problema y cual es la mejor forma de presentar esa información.

- ✰ Lograr que los estudiantes aprendan a resolver problemas, a afrontar situaciones nuevas, a acceder a la información y a tratarla de forma adecuada.

Nuestra propuesta busca la identificación de situaciones-problema que ofrezcan espacios más adecuados para un aprendizaje constructivo y significativo del conocimiento combinatorio y probabilístico. Está sustentada en tres principios según la teoría de aprendizaje significativo de David Ausubel, así:

- ✰ El aprendizaje es un proceso activo en el que el sujeto tiene que realizar una serie de actividades para asimilar los contenidos informativos que recibe. En este sentido, lo que se aprende depende de lo que se hace, es decir, de las actividades realizadas al aprender; según que el estudiante repita, reproduzca o relacione los conocimientos, tendrá un aprendizaje repetitivo, reproductivo o significativo.

- ✰ El aprendizaje es un proceso constructivo. Las actividades que el estudiante realiza tienen como finalidad construir el conocimiento, se trata de una construcción personal de la realidad por lo que el sujeto estructura los contenidos informativos que recibe en el contexto de la instrucción.

  Esta construcción personal es idiosincrásica y pone de manifiesto las diferencias individuales en el aprendizaje.

- ✰ Para que tenga lugar el aprendizaje significativo es necesario tener en cuenta el conocimiento previo del sujeto.

  Si el sujeto no tiene conocimientos con los que relaciona los que recibe, es imposible realizar un aprendizaje significativo, por lo que habrá que recurrir a algún tipo de organizador previo.

  El aprendizaje además de estar determinado por el conocimiento previo, depende también de la capacidad adquirida por el sujeto a lo largo del desarrollo, es decir del nivel alcanzado por sus estructuras mentales que le permiten poner en marcha una determinada capacidad de pensar y aprender involucrando estrategias cognitivas y metacognitivas.

Paralelo a estas concepciones, no podemos desconocer que para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de un saber y en específico de la matemática es necesario dinamizar el currículo desde una orientación metodológica participativa, y una alternativa para lograr niveles amplios de participación es el diseño e implementación de situaciones-problema.

5.3. FUENTES METODOLÓGICAS

En los últimos años se han ofrecido a los docentes diversas estrategias didácticas tendencias para dinamizar la educación matemática, lo que ha traído como resultado nuevos principios metodológicos que pueden guiar apropiadamente nuestra labor de enseñanza. Entre estas posibilidades, hemos elegido el planteamiento de situación-problema, como se expone en el libro “Contexto para el desarrollo de situaciones-problema en la enseñanza de las matemáticas” del profesor Orlando Mesa Betancur, (1998). Para su diseño, se establece como primer paso la construcción de redes conceptuales entendidas como “Una estructuración de conceptos que pueden ser considerados según diferentes estados de complejidad y variabilidad”.

Para seleccionar los contenidos temáticos que estructuran la red conceptual se ha realizado un rastreo en los estándares curriculares en relación con los tópicos de la matemática escolar que involucran la enseñanza de la probabilidad.

Por lo anterior la estructura de la red es la siguiente:

BLOQUE 1

- Conceptos básicos de la teoría de conjuntos.
  - Conjuntos, subconjuntos y operaciones entre conjuntos.
  - Producto cartesiano de conjuntos.
  - Conjunto de partes.
  - Grafos (Diagramas de árbol)

- Fracciones vistas como razones, proporciones y porcentajes.
  - Fracciones equivalentes.
  - Áreas y fracciones.

- Reglas básicas del análisis combinatorio.

- Modelación de los métodos de recuento combinatorio.
  - Variaciones simples o sin repetición.
  - Variaciones con repetición.

- Permutaciones simples.
- Permutaciones con repetición
- Permutaciones circulares.
- Combinaciones simples o sin repetición.
- Combinaciones con repetición.

BLOQUE 2

- Concepto de espacio muestral.
- Sucesos de un espacio muestral.
- Sucesos dependientes e independientes.
- Expresiones del lenguaje usual que indican probabilidades

BLOQUE 3

- Lectura sobre el evento histórico que dio origen a la probabilidad “El problema del caballero Méré”.
- Definición clásica de probabilidad. Ley de Laplace.
- Probabilidad condicional.
- Probabilidad total.
- Teorema de Bayes.
- Esperanza matemática.

BLOQUE 4

- Ejercicios y problemas propuestos.

Para desarrollar el bloque 1 se proponen diferentes situaciones relacionadas con eventos y casos que pueden surgir al programar un torneo de micro fútbol en la institución escolar.

En un segundo momento se involucran actividades para determinar espacios muestrales que pueden surgir al distribuir los equipos de microfútbol y los diferentes sucesos que se generan cuando se realiza el cronograma de juegos.

En el desarrollo del bloque 3 se enumeran ciertas expresiones de la cotidianidad que involucran en su sentido el concepto de probabilidad, por ejemplo: es posible, con certeza, imposible, etc. Se hace mención, por medio de una lectura, de la historia que dio origen a la probabilidad con la correspondencia entre Pascal y Fermat, donde ellos trataban un problema de dados propuesto por un ilustre caballero de la época llamado comúnmente el Caballero De Méré.

Para el problema central se tendrán en cuenta los marcadores de los diferentes partidos con los cuales se elabora una tabla de doble entrada con partidos ganados , empatados y perdidos y a partir de estos resultados se involucran situaciones que dan lugar a los conceptos de probabilidad clásica, probabilidad condicional, probabilidad total, teorema de Bayes y esperanza matemática.

6. FUENTES TEÓRICAS

6.1. APORTES TEÓRICOS

♦ VISIÓN HISTÓRICA

La idea de azar ha estado asociada desde un principio con ciertos designios divinos; por esto, muchos pensadores negaron la existencia del azar con todas aquellas cosas inescrutables al intelecto humano.

Los escolásticos, por otra parte, negaron el azar por ser algo incompatible con la existencia de Dios. Esta actitud negativa hacia el azar y en general hacia el método empírico hizo que se retardara históricamente el desarrollo tanto de la probabilidad como de la estadística.

Sin embargo con la invención de la imprenta (1450) y su rápido desarrollo durante la segunda mitad del siglo XV , las referencias a los juegos de azar se hacen más numerosas, aunque no así las correspondientes al cálculo de probabilidad.

La teoría de la probabilidad tuvo sus comienzos al principio del siglo XVII como resultado de investigaciones sobre diversos juegos de azar. Según datos disponibles, fue Gerolano Cardano quien dio el primer paso. Cardano a pesar de su conducta excéntrica hizo contribuciones como matemático, siendo un gran jugador escribió el "Libro de los juegos de azar" en 1526. En la sección titulada "Sobre previsión de un dado", expone un razonamiento basado en la probabilidad de las distintas caras para calcular probabilidad de sucesos. Se puede afirmar que Cardano fue el primero que escribió un argumento teórico para calcular probabilidades, por lo tanto se considera como el iniciador de esta teoría.

Los primeros intentos de tener una teoría matemática, en particular en el contexto de los juegos de azar, se generaron cuando el caballero De Méré, noble francés llamado Antoine Gombauld (1607 - 1684) dudó de las bases matemáticas para acertar o fallar en el juego de los dados. Él entabló correspondencia con Blaise Pascal (1623 - 1662), sobre la probabilidad de obtener dos seis al menos una vez en 24 tiradas, éste compartió sus ideas con Piérre de Fermat (1601 - 1665) y la correspondencia entre los tres constituye el primer documento académico sobre la teoría de la probabilidad.

El desarrollo de la teoría recibió un gran impulso con la publicación en 1654 de la obra de Cristian Huygens, quien entró en contacto en 1655 con las ideas de Pascal y Fermat por intermedio de su profesor de matemáticas en el College Royal de Francia. En su tratado Huygens plantea de una manera sistemática lo aprendido en París y añade algunos resultados suyos, a él se le debe el concepto de esperanza matemática. Precisamente por la cristalización que logra de las ideas de los matemáticos franceses, Huygens se ha ganado el derecho de ser considerado el padre de la teoría de la probabilidad.

Después de esos comienzos, otros estudiosos de la probabilidad como Jacobo Bernoulli (1654 - 1705) , Abraham de Moivre (1667 - 1754) , el reverendo Thomas Bayes (1702 - 1761), Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) desarrollaron fórmulas y técnicas sofisticadas. En el siglo XIX Pierre Simón, Marqués de Laplace (1749 - 1827) unificó todas esas ideas primarias y compiló la primera teoría general de la probabilidad.

En el primer tercio del siglo XX se configuran varias escuelas que tratan de superar el estancamiento inicial desde el punto de vista de los métodos matemáticos de la estadística y la probabilidad.

El paso definitivo en este proceso de incorporación del cálculo de probabilidades a la matemática moderna es dado en 1933 por el matemático ruso Kolmogorov, profundizando en las ideas de Von Mises (quien se considera el primero en interpretar la probabilidad como “frecuencias relativas a largo plazo”). Este proceso de formalización ha sido guiado por la necesidad de evitar ambigüedades en el desarrollo de la teoría que pudieran hacer inconsistentes las múltiples aplicaciones de las mismas.

A partir de estos trabajos el desarrollo del cálculo de probabilidad ha continuado de una forma casi exponencial, cada descubrimiento da origen a nuevas aplicaciones y de estas a su vez se generan resultados teóricos.

6.2. SÍNTESIS CONCEPTUAL

En la teoría de probabilidades hay cinco formas básicas de presentación, todas ellas representan enfoques conceptuales diferentes y de hecho los expertos difieren acerca de cuál es el enfoque más apropiado que se debe utilizar.

Por otro lado, se observa de inmediato que para calcular el tipo de probabilidad llamada finita es necesario implementar métodos eficientes para contar los eventos de un conjunto, esto condujo al desarrollo de técnicas que se denominan combinatorias.

Estas cinco formas son:

- **Enfoque clásico:** Laplace dio la definición que se conoce como clásica de probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, como la razón del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables.

- **Teorías Lógicas**: La teoría clásica no proporciona una guía adecuada para determinar la probabilidad cuando un conjunto de alternativas no son equiprobables y, por tanto, está abierta a una aplicación inconsistente. Así, no es sorprendente encontrar opiniones diferentes respecto a la forma correcta de formar los casos posibles y favorables.

  La probabilidad lógica intenta explicar la inducción, definiendo una relación lógica entre un enunciado evidente y otro enunciado hipótesis, que es una generalización de las relaciones de implicación y contradicción disponibles en la lógica deductiva. Según esta concepción, la probabilidad traduce un grado de creencia racional que conviene conceder a una proposición p a la luz de la información aportada por otra proposición q, la probabilidad es tratada como un tipo especial de relación entre dos enunciados.

- **Probabilidad frecuencial o empírica**: Este enfoque descansa en dos características observables del comportamiento de los resultados de las realizaciones repetidas. En primer lugar es un hecho que los resultados varían de una repetición a otra de una manera imprevisible y en segundo lugar se observa como un hecho empírico, a corto plazo, puede ser desordenado, pero a la larga surge una cierta regularidad. La idea de probabilidad surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de una secuencia de resultados.

- **Probabilidad subjetiva:** Es la asignada a un evento por un individuo basado en cualquier tipo de evidencia que tenga disponible, por lo tanto la probabilidad es una expresión de la creencia o percepción personal.

Este enfoque tiene afinidad con la aproximación lógica, ya que ambas intentan representar el grado de creencia sobre un suceso, pero difieren de la probabilidad lógica en que ésta se trata de un grado de creencia personal que un individuo sostiene sobre la base de su propia experiencia. Diferentes personas pueden asignar probabilidades distintas para un mismo evento.

- **Probabilidad formal:** esta se refiere al cálculo con precisión usando las leyes de la matemática de la teoría axiomática correspondiente. Inicialmente fue axiomatizada por el matemático ruso KOLMOGOROV, según él los sucesos se representan por conjuntos y la probabilidad es una medida normada definida sobre esos conjuntos. Esta surgió como consecuencia de la restricción que el concepto clásico imponía sobre la equiprobabilidad de sucesos y finitud del espacio muestral correspondiente.

Algunas de las propiedades de la probabilidad matemática son:

Toda probabilidad pertenece al intervalo comprendido entre 0 y 1, incluido los valores extremos. Sea f la frecuencia absoluta del hecho A, en una serie de n repeticiones del experimento E, entonces si en particular, A representa un suceso cierto, tendremos que f = n y f/n = 1, entonces la probabilidad será de uno. De otro lado, si A representa un suceso imposible la frecuencia f y la razón frecuencial es cero, por lo tanto un suceso imposible tiene probabilidad cero.

Sean A y B dos sucesos, cada uno de los cuales puede presentarse o no en una cualquiera de las veces que se realiza el experimento E, entonces cabe considerar: el suceso compuesto que consiste en la presencia de uno al menos (o posiblemente los dos) de los sucesos como la suma de los sucesos A + B. Análogamente, el suceso que consiste en la presencia de A y B conjuntamente se considera como el producto A y B, entonces.

$$P\,(A + B) = P\,(A) + P(B) - P\,(A.B)$$

Hay un caso particular en que la regla de la adición puede simplificarse considerablemente. Dos eventos A y B, se llaman mutuamente excluyentes si no pueden presentarse al mismo tiempo, en este caso el producto A.B es un suceso imposible.

$$P\ (A + B) = P(A) + P(B)$$

Si A* representa el hecho contrario de A, es decir, el suceso que se presenta siempre que A no lo hace, la suma o unión de A y A* es un suceso cierto, entonces:

$$P\ (A) + P\ (A^*) =1$$

Cuando ocurren dos eventos tales que: el resultado del primer evento no tiene efecto en el resultado del segundo evento, los eventos son estadísticamente independientes. En este caso, hay tres tipos de probabilidad: marginal, conjunta y condicional.

La probabilidad marginal es la probabilidad simple de la ocurrencia de un evento.

La probabilidad conjunta bajo independencia estadística se refiere a la probabilidad de que dos o más eventos independientes ocurran juntos. Se calcula como:

$$P\ (A.B) = P\ (A)\ .\ P\ (B)$$

La probabilidad condicional bajo independencia estadística, se refiere a la probabilidad de que ocurra el evento B dado la ocurrencia del evento A, o simplemente “la probabilidad de B, dado A”.

$$P\ (B/A) = P\ (B)$$

Cuando se alteran las probabilidades después de que se obtuvo información adicional, las nuevas probabilidades se conocen como probabilidades revisadas o posteriores. El origen del concepto de probabilidades posteriores con información limitada se atribuye al reverendo Thomas Bayes y la fórmula básica para ésta es:

$$P (B/A) = P (BA) / P (A)$$

Donde A y B representan dos eventos. Esta relación es conocida como el teorema de Bayes, el cual ofrece un método estadístico para evaluar nueva información y revisar los estimados previos.

La probabilidad conjunta bajo dependencia estadística se halla una vez conocida la probabilidad condicional inmediatamente anterior ya que podemos despejar P(AB) y obtener una fórmula para la probabilidad conjunta

$$P (BA) = P (B/A) P (A)$$

Esta sería la probabilidad conjunta de que los eventos B y A ocurran juntos. Este suceso es igual a la probabilidad del evento B dado que el evento A haya sucedido, multiplicando por la probabilidad de que ocurra A.

Experimento aleatorio

No se puede conocer el resultado del experimento hasta que no ha sido efectuado, generalmente se conocen los resultados que se pueden obtener (resultados posibles), pero no se puede predeterminar, al realizar el experimento si un resultado concreto se va a producir o no.

Variable aleatoria y esperanza matemática

El concepto de esperanza matemática se complementa con las nociones de variable aleatoria y de función de distribución de probabilidad. Una función definida en un espacio de resultados se denomina variable aleatoria. El espacio de resultados es un conjunto de eventos. Por ejemplo, si realizamos un experimento consistente en el lanzamiento de un dado sobre un tapete, podemos identificar seis eventos diferentes si tenemos en cuenta el número que figura en la cara superior del dado una vez lanzado, es decir, la que enfrenta al observador:

{cara 1; cara 2; cara 3;
cara 4; cara 5; cara 6}

Ahora establecemos una relación entre cada uno de estos eventos y una serie de números, por ejemplo:

Al evento {cara 1} hacemos corresponder el número 7, al evento {cara 2} hacemos corresponder el número 8, y así respectivamente hasta el evento {cara 6} al que le hacemos corresponder el número 12.

La variable aleatoria x asociada al experimento que hemos realizado tiene como dominio el conjunto {7; 8; 9; 10; 11; 12}. Algunos ejemplos de variables aleatorias son: el número de personas que esperan ser atendidas en la caja de un supermercado en un instante dado; la estatura de los seres humanos; el tiempo de vida de los componentes de cualquier sistema tecnológico; el número de víctimas fatales en accidentes de tránsito; etcétera.

La función de distribución de probabilidad asigna valores de probabilidad de ocurrencia a cada uno de los eventos que componen el espacio de resultados. En el caso de nuestro experimento, y si el dado es perfecto, el valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento es de 1/6, igual para todos los eventos que componen dicho espacio de resultados.

En la tabla siguiente se indican los eventos del espacio de resultados del experimento que nos ocupa, los valores correspondientes de la variable aleatoria y el valor respectivo de la función de distribución de probabilidad.

Eventos	**Valores de la variable aleatoria x**	**Valores de la función de distribución de probabilidad p (x)**
{cara 1}	x = 7	p (x = 7) = 1/6
{cara 2}	x = 8	p (x = 8) = 1/6
{cara 3}	x = 9	p (x = 9) = 1/6
{cara 4}	x = 10	p (x = 10) = 1/6
{cara 5}	x = 11	p (x= 11) = 1/6
{cara 6}	x = 12	p (x = 12) = 1/6

La esperanza matemática de una variable aleatoria se define como la suma de los productos de los valores de la variable y el correspondiente valor de la función de distribución de probabilidad, es decir:

$E (x) = \Sigma\ x \,.\, p (x)$

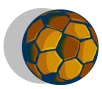
En el ejemplo, la esperanza matemática se calcula en la forma siguiente:

$E(x)=(7.1/6)+(8.1/6)+(9.1/6) +(10.1/6)+(11.1/6)+(12.1/6) = 9{,}5$

7. SITUACIÓN PROBLEMA

UN TORNEO DE MICROFUTBOL

En el Colegio El Hatillo se acordó realizar un torneo interclases de microfútbol, para que la final sea disputada en la semana cultural que se programa para el mes de octubre, por lo tanto, los profesores de educación física deberán elegir en cada grupo un equipo de 8 estudiantes.



Para incentivar el rendimiento académico deben elegir los equipos una vez terminado el primer periodo del año escolar, teniendo como criterio de selección las siguientes condiciones:

- Que no hallan perdido más de 2 materias.
- Que participen en alguna actividad extracurricular.
- Que les guste este deporte.

Si en el grado 10° A, hay 20 hombres de los cuales:

- A 15 les gusta jugar microfútbol.
- 15 pierden a lo sumo 2 materias.
- 13 participan en actividades extracurriculares.
- A 10 les gusta el microfútbol y están en actividades extracurriculares.
- 11 pierden a lo sumo 2 materias y participan de actividades extracurriculares.
- A 12 les gusta el microfútbol y pierden a lo sumo 2 materias.
- Hay 2 alumnos que no les gusta el microfútbol, participan de actividades extracurriculares y pierden a lo sumo 2 materias.

Realizar una representación en un diagrama de Venn que facilite responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos alumnos cumplen a lo sumo 2 de las 3 condiciones?
- ¿Cuántos alumnos cumplen solamente 1 de las 3 condiciones?
- ¿Cuántos alumnos cumplen como mínimo 2 condiciones?
- ¿Cuántos alumnos cumplen a lo menos con una condición?
- ¿Cuántos alumnos cumplen solamente 2 condiciones?
- ¿Cuántos alumnos participan de actividades extracurriculares o les gusta el microfútbol?
- ¿Cuántos alumnos les gusta el microfútbol o no perdieron más de 2 materias pero no tienen actividades extracurriculares?
- ¿Cuántos alumnos no cumplen con ninguna de las 3 condiciones?
- ¿Cuántos alumnos cumplen con las 3 condiciones?

De los 14 grupos que hay en el Hatillo, 6B y 8C no lograron participar del torneo, puesto que menos de 8 alumnos cumplen con las condiciones previstas.

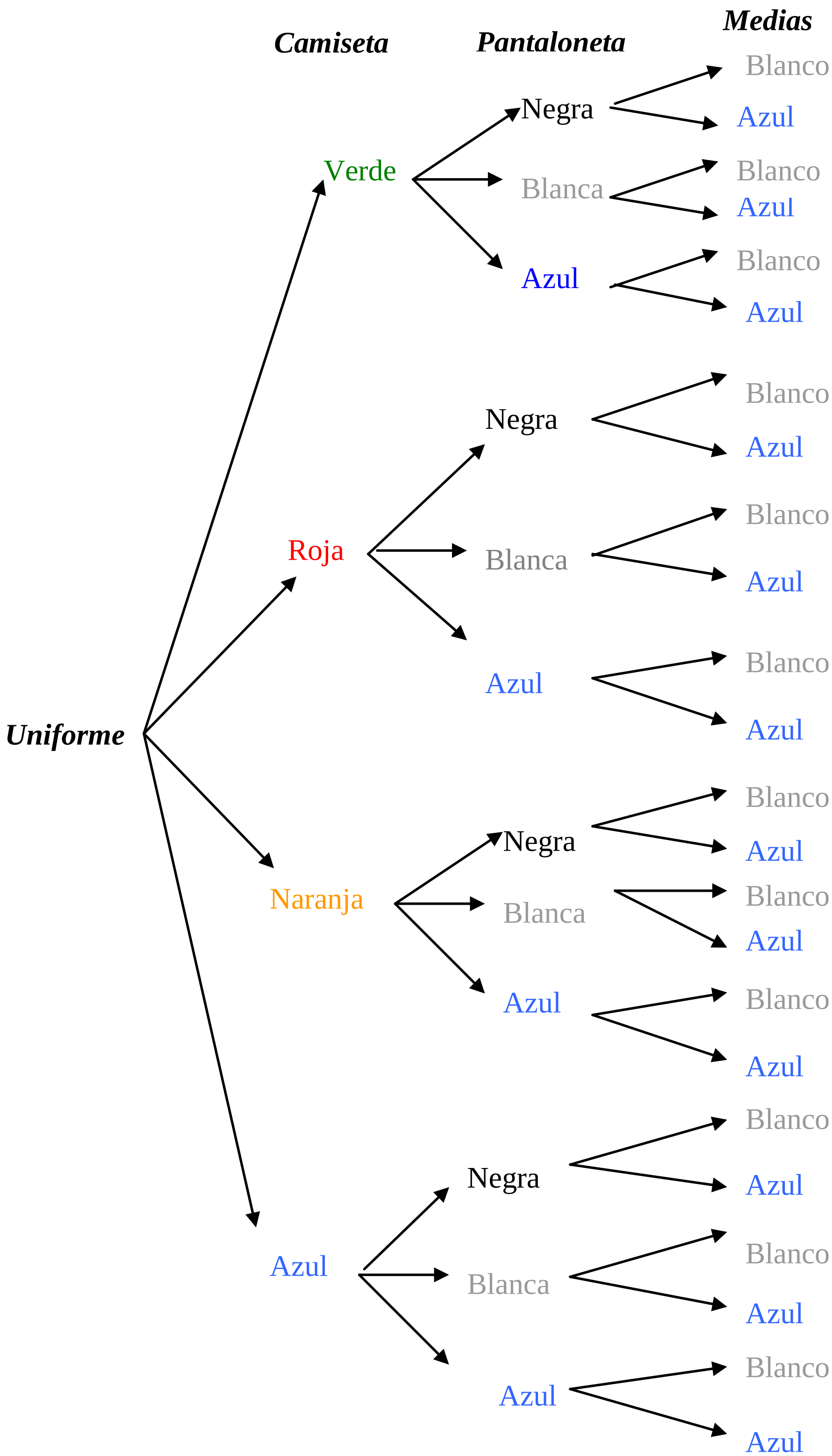
> En la solución del anterior problema son muy útiles los diagramas de Venn. Para utilizar estos diagramas debe inicialmente colocar el cardinal asociado a la triple intersección (si la tiene) y en su orden continuar con los cardinales asociados a las intersecciones dobles, por ultimo se ubican los cardinales asociados a los conjuntos teniendo en cuenta los datos hallados anteriormente.

Los organizadores del torneo encontraron dificultades para la conformación de los equipos ya que en algunos grupos resultaron más de 8 alumnos que reúnen las condiciones. Mientras se piensa en un mecanismo para solucionar esta dificultad solicitan a los grupos que en una semana tengan definido el diseño de los uniformes para enviarlos a confecciones ***"El Buho"*** quien los patrocinará.

Teniendo en cuenta que todos los uniformes de los equipos del colegio van a ser de fondo entero, es decir, un solo color en cada una de las prendas (pantaloneta, camiseta, medias), determinar para cada una de las situaciones presentadas a continuación, cuántos modelos diferentes de uniformes pueden resultar:

- El grupo 7°A, para diseñar su uniforme va a escoger la camiseta entre cuatro colores***: verde, roja, naranja y azul***. Para la pantaloneta tiene 3 colores: ***negra, blanca y azul***; mientras que las medias pueden ser ***blancas o azules***.

Árbol de posibilidades



Este problema, en la teoría combinatoria, se refiere al Principio Fundamental del Conteo; en estos casos los diagramas de árbol son muy útiles ya que es poco probable introducir errores porque los casos se encuentran sistemáticamente.

En el diagrama de árbol anterior:

- El primer nivel tiene cuatro ramas (son las opciones para elegir el color de la camiseta).
- Cada rama del segundo nivel tiene a su vez tres ramas (.colores disponibles para la pantaloneta)
- Cada rama del tercer nivel tiene a su vez dos ramas (opciones para el color de las medias).

El número total de ramas del árbol es:

4x3x2 = 24

En teoría combinatoria esto se denomina la regla del producto, que se puede expresar como:

Si disponemos de dos conjuntos de ***m*** y ***n*** elementos, $a_1, a_2, ..., a_m; b_1, b_2, ...b_n$; es posible formar ***mxn*** parejas diferentes de la forma (a_i, b_j) en la que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto.

En general, se pueden **formar a *x* b *x* c *x* d *x*......*x* r**; grupos diferentes tomando un elemento de cada uno de los conjuntos A, B, C,.....,R, si estos constan de a,b,c,......,r elementos respectivamente.

Algunos autores como Fischbein Efraím[4] analizan, el papel de las representaciones en la aceleración del desarrollo hacia modelos cognitivos superiores, el diagrama de árbol es presentado como un modelo generativo que permite sugerir e inculcar la generación interactiva y la generación constructiva,

[4] Sicólogo rumano, profesor de psicología cognitiva, educación matemática y científica.

dándose así la adaptación a nuevos problemas derivados de uno inicial, propiedad que es característica del razonamiento recursivo.

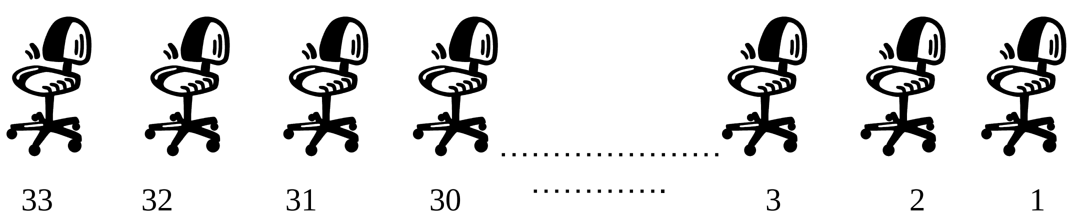
Si en el problema anterior no se puede repetir color en las prendas, es decir, la camiseta, la pantaloneta y las medias deben ser todas de diferente color, ¿Cambia en algo el problema? ¿Aumenta o disminuye el número de modelos posibles para el uniforme?

Es interesante observar que en las dos situaciones planteadas hay diferencia, en la primera los colores en las prendas se pueden repetir mientras que para la segunda una vez fijado el color de una de las prendas ya no se puede utilizar para las otras dos.

En 10ºB la elección del modelo del uniforme se realizó de una forma muy rápida, la profesora directora de grupo reunió los 33 alumnos en el aula múltiple pero con anticipación separó para ellos 33 sillas, al llegar los jóvenes y jovencitas se entran uno por uno a escoger la silla y se acomodan, la profesora los invita a ser muy puntuales en las sugerencias que darán y, sobre todo, a ser muy respetuosos con las opiniones de los otros, ya que de lo contrario sería muy difícil llegar a un acuerdo, para ilustrar un ejemplo de lo complicada que puede llegar a ser una situación sencilla si la gente no colabora, les hace la siguiente pregunta:

_¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar ustedes en este auditorio utilizando sólo las sillas que les tengo separadas?

Los muchachos y muchachas piensan un rato, pues saben que la situación no es tan sencilla, pero Milena que es bastante activa toma el marcador y le dibuja un esquema como este:



Las posibilidades son muchísimas dice Milena, porque el primero en sentarse tuvo 33 opciones, el segundo 32, el tercero 31, el cuarto 30, el quinto 29 y sucesivamente hasta llegar a que, el antepenúltimo en sentarse sólo le quedaron 3 opciones, al penúltimo 2 y al último 1.

Por tanto el número total de arreglos posibles son:

33 x 32 x 31 x 30 x 29 x 28 x 27 x 26 x 25 x 24 x ……x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 $= 8.683317619 \times 10^{36}$ aproximadamente.

Un número bastante grande, pero se presenta en una situación tan sencilla.

A esto quería que llegáramos expresa la profesora, pues muchas de estas situaciones tienen en su solución una expresión que en matemáticas llamamos **El factorial y cuyo símbolo es !**, el cual sirve para representar productos como el mostrado por Milena en este sencillo ejemplo, es así como utilizando esta nueva simbología tenemos que las diferentes opciones para sentarnos en esta aula están dadas por:

33! = 33 x 32 x 31 x 30 x ……x 4 x 3 x 2 x 1 = $8.683317619 \times 10^{36}$ aproximadamente.

Con respecto al uniforme la profesora les pide que sugieran colores para las prendas y sólo les pone como condición que cada una debe ser de fondo entero y seleccionado el color de una de ellas las otras no lo pueden tener. Además les anuncia que su equipo tendrá como regalo de ella una prenda adicional, una hermosa gorra.

Llegando muy fácilmente a un consenso los colores seleccionados fueron:

Azul claro, azul rey, blanco y negro.

_ ¿Cuántos modelos diferentes de uniformes podemos formar?_

4!, responden en coro.

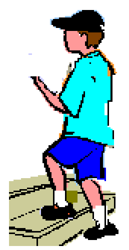
Esta es una situación similar a la de las sillas, sólo que con menos opciones aclara Gabriel, y las soluciones posibles las podemos dar en el siguiente esquema:

Gorra	Camiseta	Pantaloneta	Medias
4	3	2	1

Si se comienza seleccionando el color de una prenda, por ejemplo la gorra, se tienen 4 colores disponibles, si se continua con la camiseta se tendrán 3, ya que no se puede repetir color, para seleccionar el color de la pantaloneta quedan dos posibilidades y para las medias sólo una. Teniendo como solución:

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

A pesar que tuvieron mucho de dónde escoger, rápidamente concertaron que su uniforme quedara como lo indica el modelo:



- En el grupo de 6°A, cuya directora es la profesora de sociales se optó por llevar los colores de la bandera de Colombia en su uniforme, pero cada prenda debe tener un color diferente.

- En el grupo de 8°A, han hecho una selección de seis colores para el diseño de los uniformes, ellos no quieren repetir color en las prendas. (camiseta, pantaloneta, medias).

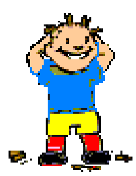
- A diferencia de 8°A, los alumnos del grado 8ºB no tienen problemas en que el color se repita y también van a elegir entre 6 colores el modelo del uniforme.

Para el modelo del uniforme de 6°A, se tiene tres colores amarillo, azul y rojo. Una forma de representar las posibilidades sin repetir color seria:

	Camiseta	**Pantaloneta**	**Medias**
1	Amarillo	Azul	Rojo
2	Amarillo	Rojo	Azul
3	Azul	Amarillo	Rojo
4	Azul	Rojo	Amarillo
5	Rojo	Amarillo	Azul
6	Rojo	Azul	Amarillo

Resultando seis modelos diferentes, pues en este caso cada prenda le da un orden al modelo, es decir, en esta situación no es lo mismo amarillo azul y rojo; que azul , amarillo, y rojo, el primer modelo sería:

Mientras el otro modelo tomado como ejemplo se vería así:



En este caso, también es de gran utilidad el diagrama de árbol, donde puede visualizarse el proceso de formación de las variaciones de **n** elementos con y sin repetición.

En las variaciones, es importante que los alumnos construyan tablas o diagramas con sus propios métodos, logrando que la solución surja de manera natural.

Para el modelo del uniforme de 8°A, los alumnos haciendo el diagrama se pueden dar cuenta de que para elegir color en la camiseta disponen de 6 colores, y que una vez elegida la camiseta, se tienen 5 colores disponibles para la pantaloneta y 4 para las medias llegando fácilmente a establecer que se puede utilizar la regla del producto.

Por lo tanto resultan: $6 \times 5 \times 4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$ modelos de uniforme.

Que en términos de variaciones se expresa como "variaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3"

$$\mathbf{V_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!}}$$

Para el caso de las variaciones simples sin reemplazamiento, se tiene que el número de variaciones de n elementos tomados r a la vez es:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Caso particular, cuando r = n, se tiene:

$$V_{n,n} = n!$$

Para el caso de los alumnos de 8°B, puede ocurrir que el uniforme sea de uno o más colores repetidos. Por intuición los alumnos deberían hacer el siguiente razonamiento: para elegir el color de la camiseta tiene 6 posibilidades, por cada una de esas seis posibilidades se tienen otras 6 para elegir pantaloneta y por cada una de esas otras seis se tendrían otras 6 para elegir color de las medias. Por tanto, en total habrá:

6 x 6 x 6 = 216 modelos diferentes.

Cuando contamos la cantidad de formas como se puede ordenar un conjunto de objetos, donde cada objeto puede aparecer más de una vez, se habla de variaciones con sustitución, del conjunto de n elementos.

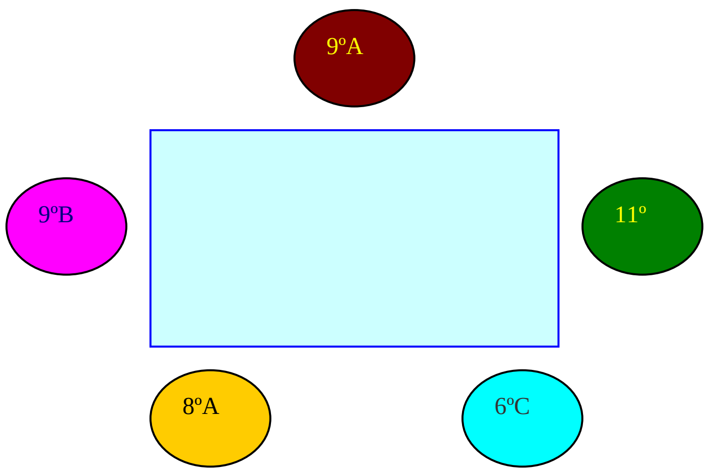
$$V_{m,n} = \underbrace{m \times m \times m \ldots\ldots m}_{\text{n veces}} = m^n$$

Una vez que los grupos han terminado su diseño lo entregaron a los profesores de Educación Física, quienes se dan cuenta que 9°A, 9°B, 8°A y 6°C y 11 han elegido el color verde para su camiseta y técnicamente esto no es funcional. Por esta razón se ven obligados a reunir un representante de cada uno de estos grupos para acordar los cambios.

Si en el momento de la reunión los cinco alumnos se sientan alrededor de una mesa, ¿de cuántas formas diferentes se pueden ubicar si consideramos la misma disposición siempre que cada joven tenga el mismo compañero a su izquierda y a su derecha?

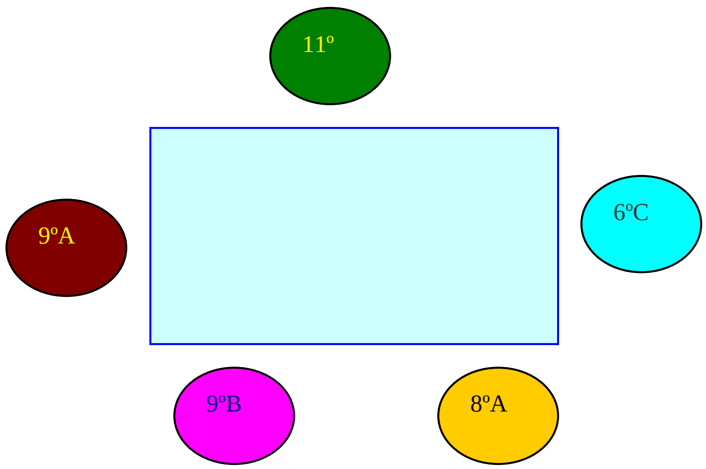
AYUDA**.**

El esquema 1 representa un posible arreglo.



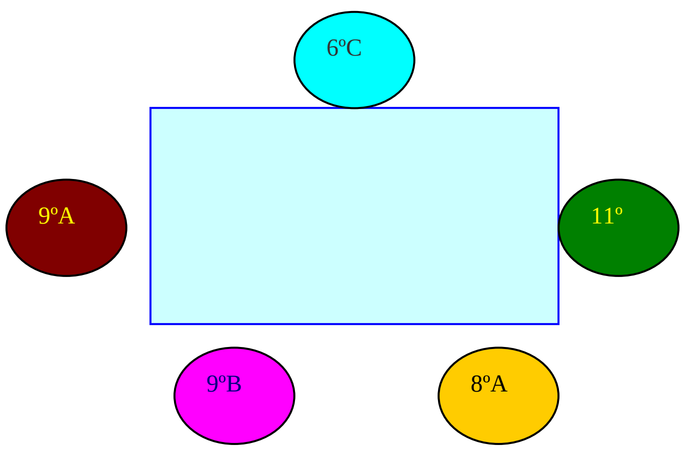
Esquema 1

Según las condiciones del problema el **esquema 2** que se muestra a continuación, es el mismo que el esquema 1, pues cada representante tiene a su derecha y a su izquierda los mismos compañeros en ambos casos.



Esquema 2

Ahora



Esquema 3

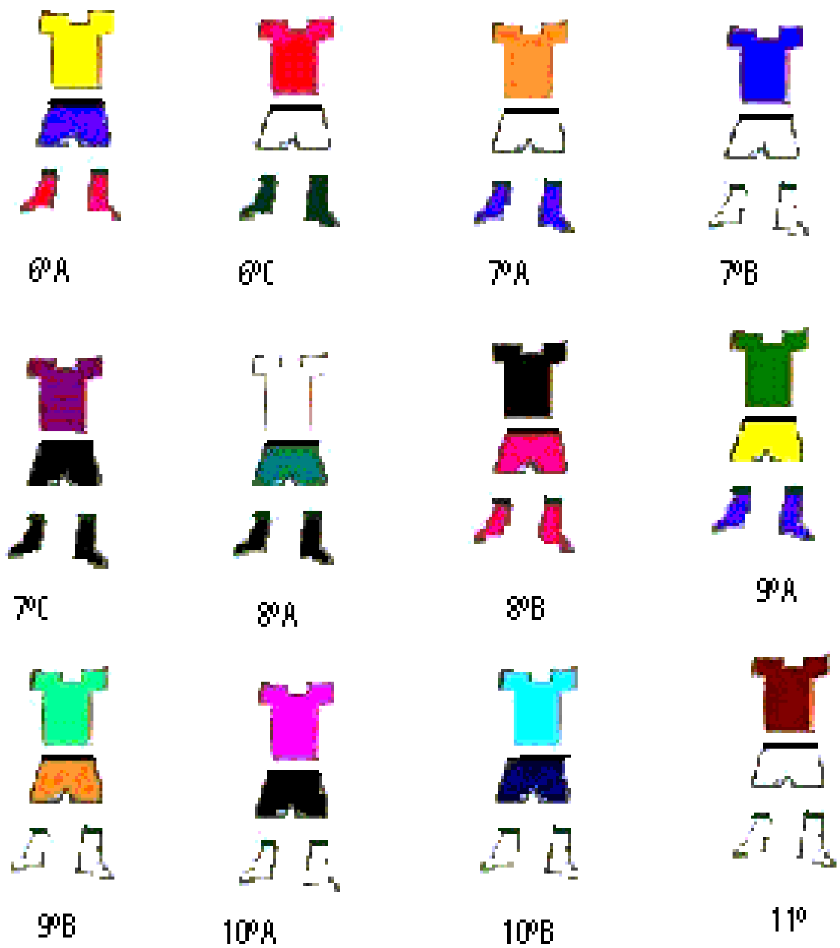
El esquema 3 es distinto a los dos anteriores, ya que para algunos representantes cambió la persona que tenían ya sea a su izquierda o a su derecha.

¿Si el número de personas sentadas alrededor de la mesa fuera tres, cuántos arreglos distintos resultarían?, ¿o si fueran cuatro?

Intente hallar una expresión que determine el número de arreglos de este tipo (Los cuales se llaman ***permutaciones circulares***), según el número de elementos.

Al leer y resolver detenidamente los problemas anteriores, se puede observar que se introduce el desarrollo de contenidos de las variaciones simples, variaciones con repetición, permutaciones simples, permutaciones con repetición y circulares.

Una vez resueltas las dificultades que se presentaron con la elección de los uniformes de los 12 equipos, estos quedaron así:



Luego de haber definido estos detalles los profesores de educación física presentan al rector los siguientes esquemas para organizar el torneo y éste decide elegir aquel que requiera menos partidos de juego.

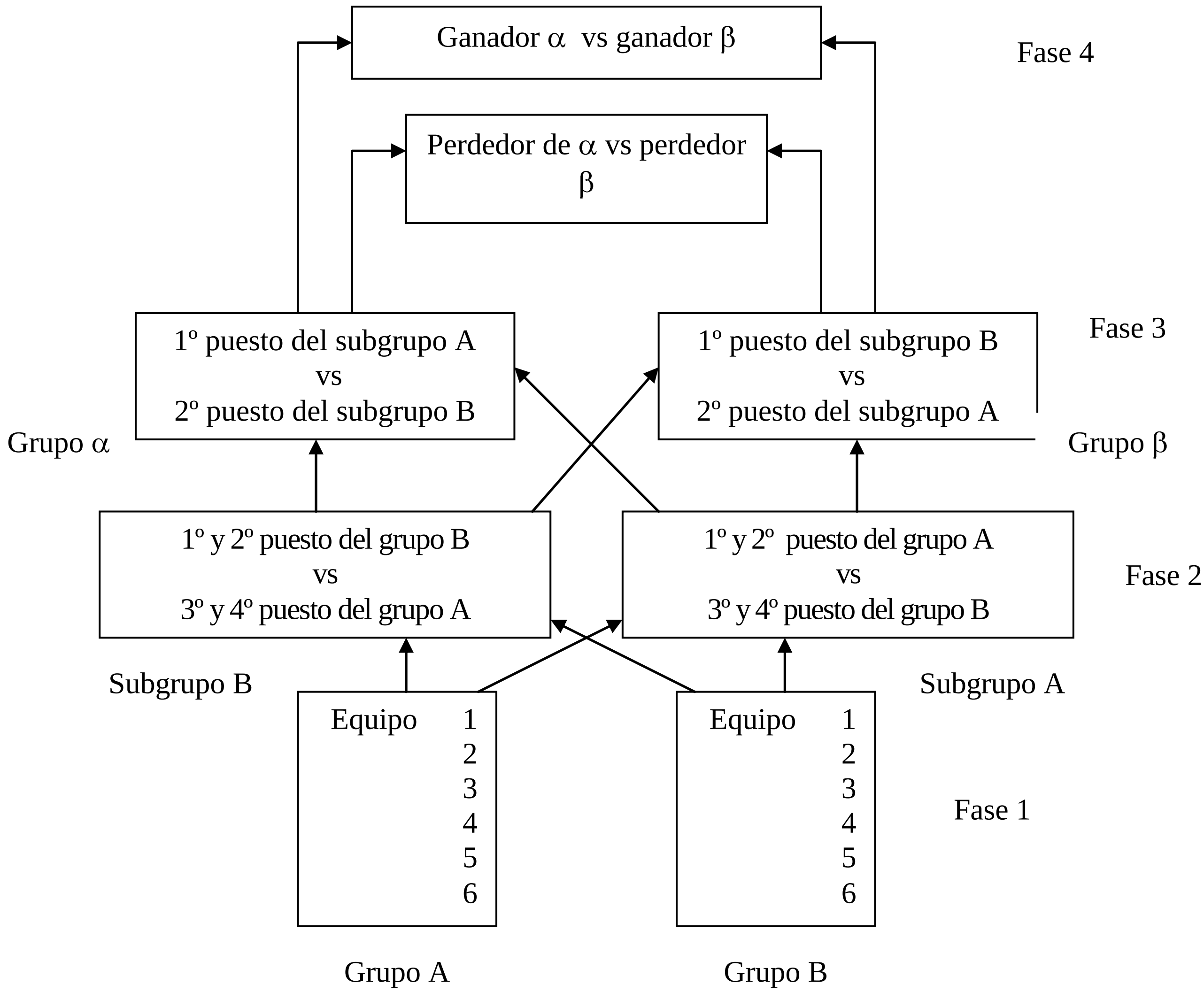
ESQUEMA 1

Primera fase. Los doce equipos juegan todos contra todos, a dos vueltas esto es, cada equipo juega dos veces con el mismo equipo.

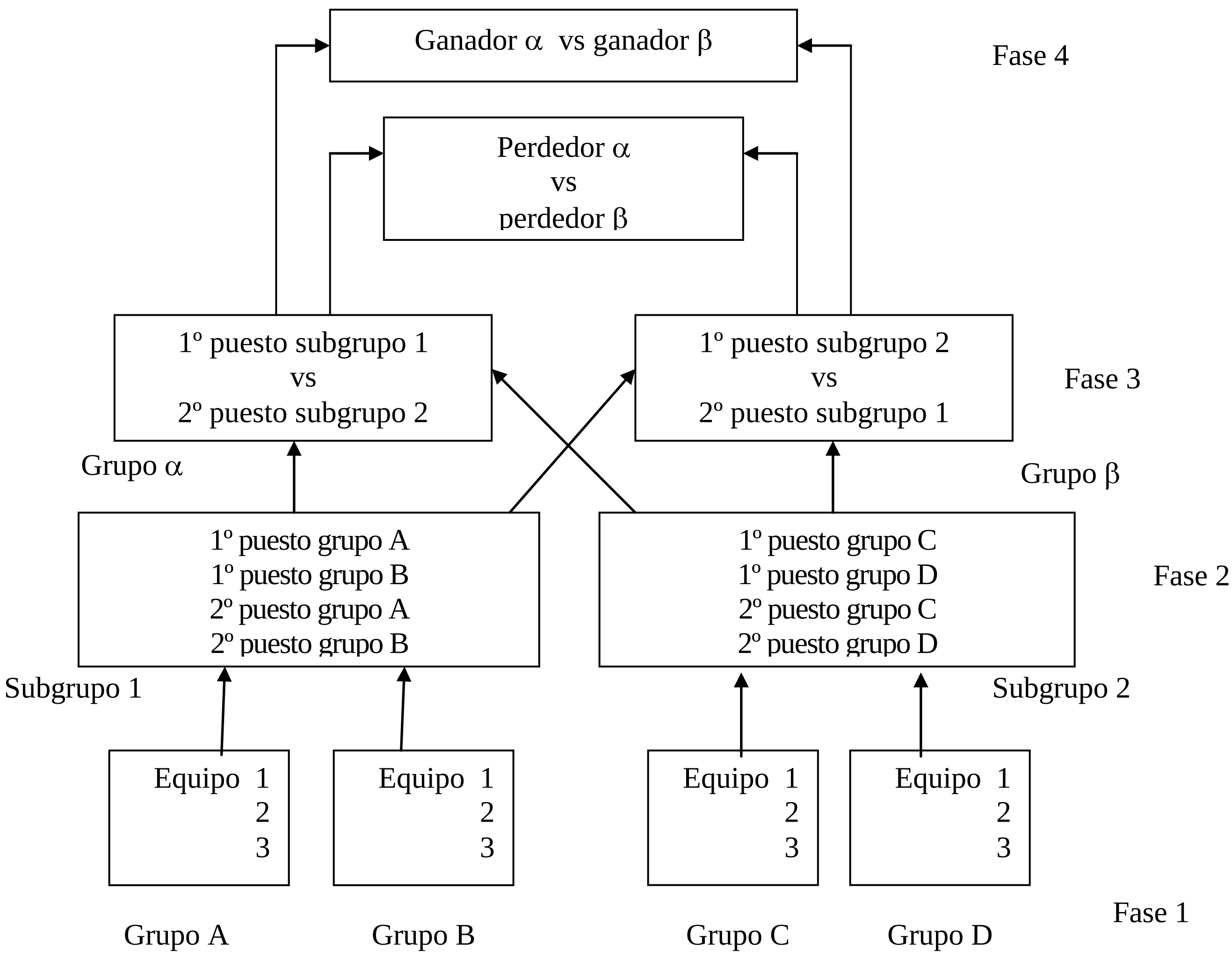
Segunda fase. Pasan los cuatro equipos con los más altos puntajes de la primera fase y estos juegan todos contra todos.

Tercera fase. Juegan la final los dos mejores equipos de la fase anterior, los otros dos definen tercer y cuarto puesto.

ESQUEMA 2


Ganador α vs ganador β
Fase 4
Perdedor de α vs perdedor β
1º puesto del subgrupo A
vs
2º puesto del subgrupo B
1º puesto del subgrupo B
vs
2º puesto del subgrupo A
Fase 3
Grupo α
Grupo β
1º y 2º puesto del grupo B
vs
3º y 4º puesto del grupo A
1º y 2º puesto del grupo A
vs
3º y 4º puesto del grupo B
Fase 2
Subgrupo B
Subgrupo A
Equipo 1 2 3 4 5 6
Equipo 1 2 3 4 5 6
Fase 1
Grupo A
Grupo B

ESQUEMA 3


Ganador α vs ganador β
Fase 4
Perdedor α
vs
perdedor β
1º puesto subgrupo 1
vs
2º puesto subgrupo 2
1º puesto subgrupo 2
vs
2º puesto subgrupo 1
Fase 3
Grupo α
Grupo β
1º puesto grupo A
1º puesto grupo B
2º puesto grupo A
2º puesto grupo B
1º puesto grupo C
1º puesto grupo D
2º puesto grupo C
2º puesto grupo D
Fase 2
Subgrupo 1
Subgrupo 2
Equipo 1
2
3
Equipo 1
2
3
Equipo 1
2
3
Equipo 1
2
3
Fase 1
Grupo A
Grupo B
Grupo C
Grupo D

Para los tres esquemas

- Fase 1: cada equipo juega dos partidos con cada equipo de su grupo.

- Fase 2: cada equipo juega un solo partido con cada equipo del subgrupo.

- Fase 3: único partido entre los dos equipos.

- Fase 4: Cada par de equipos juega un solo partido, una pareja para campeón y subcampeón y la otra para tercer y cuarto lugar (sólo para el esquema 2 y 3)

- Los puntos que se darán por partido jugado son: 3 al ganador, 1 al empate y 0 al perdedor.

- ¿Cuántos partidos se juegan en cada esquema?
- ¿Cuántos partidos se juegan en cada fase para cada uno de los esquemas?
- ¿Cuál fue el esquema elegido por el rector para la organización del torneo?

Según los deseos del rector se ha podido comprobar que el esquema apropiado es el 3.

Para que haya igualdad de condiciones y todo quede en manos del azar, los profesores de Educación Física proponen a los representantes de cada equipo, introducir en una bolsa 12 pelotas de pimpón de cuatro colores diferentes: azul, rojo, verde y amarillo, de tal forma que cada representante del equipo saque una de ellas y así los tres que tengan igual color forman el grupo.

¿De cuántas formas se pueden organizar los grupos, si tenemos doce equipos para formar grupos de tres?

Dos grupos son diferentes si difieren mínimo en un equipo.

Dado que los equipos son: 6ºA, 6ºC, 7ºA, 7ºB, 7ºC, 8ºA, 8ºB, 9ºA, 9ºB, 10ºA, 10ºB, 11º, podemos establecer el conteo de la siguiente forma:

- Si fijamos a 6ºA con 6ºC se puede completar la terna de 10 maneras diferentes, así:

6ºA__6ºC → 7ºA

6ºA__6ºC → 7ºB

6ºA__6ºC → 7ºC

6ºA__6ºC → 8ºA

6ºA__6ºC → 8ºB

6ºA__6ºC → 9ºA

6ºA__6ºC → 9ºB

6ºA__6ºC → 10A

6ºA__6ºC → 10B

6ºA__6ºC → 11º

- Dejando fijos a 6ºA con 7ºA , sin tomar a 6ºC (porque ya estaba en el conteo anterior) tenemos 9 opciones para completar el grupo.

- Se realiza el mismo procedimiento hasta llegar a fijar 6ºA con 10ºB, que solamente tiene una opción que es 11º para completar la terna. Hasta el momento se llevan todos los grupos donde está 6ºA.

- Ahora, se puede fijar a 6ºC con 7ºA y se tienen 9 posibilidades de completar el grupo (recordando que 6ºA ya no se cuenta). Luego se fija 6ºC con 7ºB, teniendo 8 posibilidades, este procedimiento continúa fijando parejas y completando ternas. El número de grupos distintos que pueden formarse se resume en el siguiente esquema:

6ºA

6ºC , 10 combinaciones

7ºA, 9 combinaciones

7ºB, 8 combinaciones

7ºC, 7 combinaciones

8ºA, 6 combinaciones

8ºB, 5 combinaciones

9ºA, 4 combinaciones

9ºB, 3 combinaciones

10ºA, 2 combinaciones

10ºB – 11º, 1 combinación

Subtotal
55

6ºC

7ºA, 9 combinaciones

7ºB, 8 combinaciones

7ºC , 7 combinaciones

8ºA, 6 combinaciones

8ºB, 5 combinaciones

9ºA, 4 combinaciones

9ºB, 3 combinaciones

10ºA, 2 combinaciones

10ºB – 11º, 1 combinación

Subtotal
45

7ºA

- **7ºB,** 8 combinaciones
- **7ºC ,** 7 combinaciones
- **8ºA,** 6 combinaciones
- **8ºB,** 5 combinaciones
- **9ºA,** 4 combinaciones
- **9ºB,** 3 combinaciones
- **10ºA,** 2 combinaciones
- **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 36

7ºB

- **7ºC ,** 7 combinaciones
- **8ºA,** 6 combinaciones
- **8ºB,** 5 combinaciones
- **9ºA,** 4 combinaciones
- **9ºB,** 3 combinaciones
- **10ºA,** 2 combinaciones
- **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 28

7ºC

- **8ºA,** 6 combinaciones
- **8ºB,** 5 combinaciones
- **9ºA,** 4 combinaciones
- **9ºB,** 3 combinaciones
- **10ºA,** 2 combinaciones
- **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 21

8ºA

- **8ºB,** 5 combinaciones
- **9ºA,** 4 combinaciones
- **9ºB,** 3 combinaciones
- **10ºA,** 2 combinaciones
- **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 15

8ºB

- **9A,** 4 combinaciones
- **9ºB,** 3 combinaciones
- **10ºA,** 2 combinaciones
- **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 10

9ºA → **9ºB,** 3 combinaciones

9ºA → **10ºA,** 2 combinaciones

9ºA → **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 6

9ºB → **10ºA,** 2 combinaciones

9ºB → **10ºB – 11º,** 1 combinación

Subtotal 3

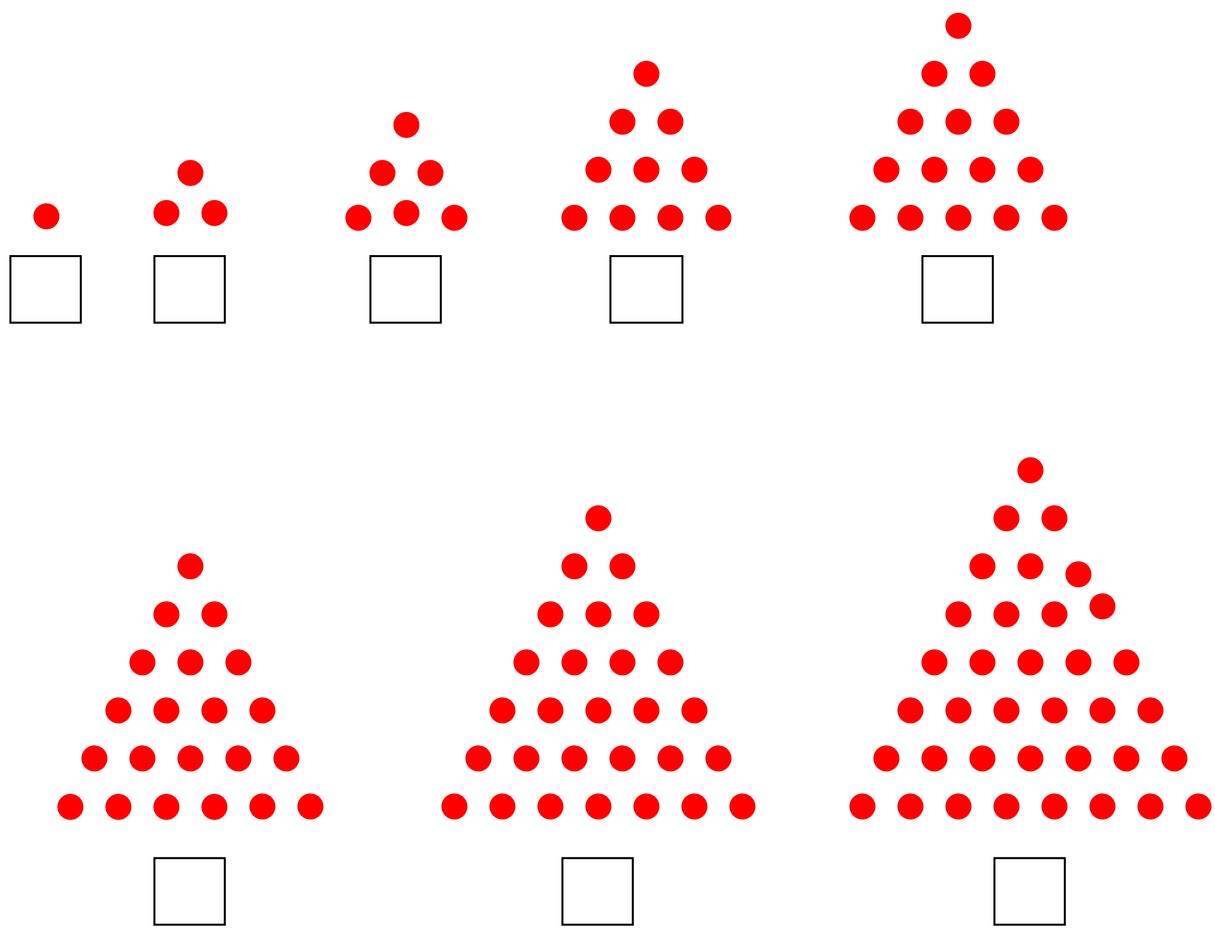
10ºA → **10ºB – 11º,** 1 combinación

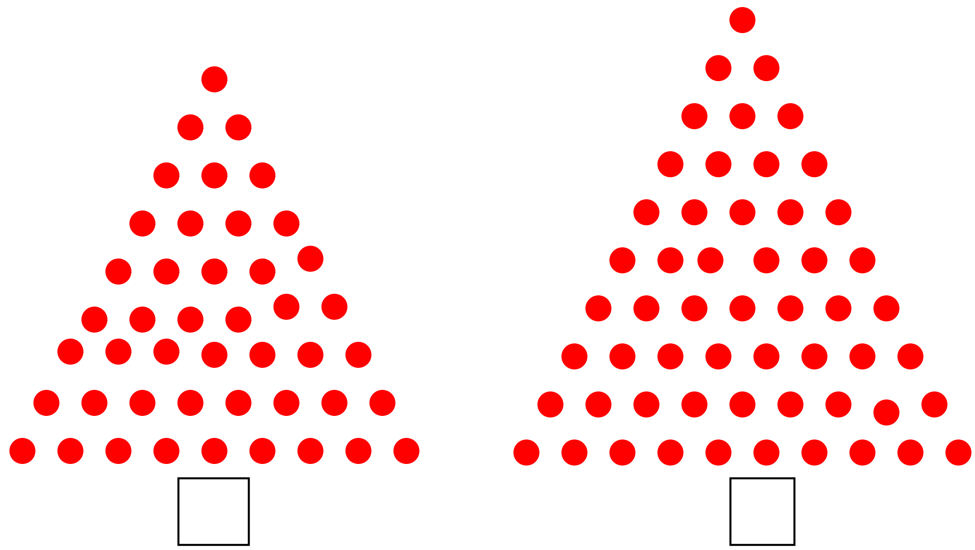
Subtotal 1

Para hallar todas las combinaciones posibles es necesario sumar todos los subtotales, es decir:

1+3+6+10+15+21+28+36+45+55=220.

Los términos de esta suma resultaron familiares para uno de los alumnos, el cual propuso a sus compañeros un reto muy particular, buscar 220 piedras pequeñas y colocar el número de elementos a cada uno de los arreglos que él iba indicando, así:





Se observa que el número de elementos de cada triángulo corresponde a los términos de la suma que determina las combinaciones que pueden formarse entre los12 equipos para obtener grupos de a 3.

Pero además estos números tienen una particularidad muy especial, pues cuando representan una cantidad de objetos, dichos objetos se pueden organizar para construir triángulos equiláteros, por eso desde la época de los pitagóricos son conocidos como ***números triangulares.***

Cuando seleccionamos de un grupo de n objetos solamente r de ellos sin tener en cuenta el orden, estamos hablando de **combinaciones de *n* objetos tomados *r* en *r*.**

Uno de los métodos que se puede utilizar para saber el número de estas combinaciones consiste en contarlas como si fueran variaciones de r elementos tomados de un conjunto n, es decir $\frac{n!}{(n-r)!}$, como en las combinaciones no se tiene en cuenta el orden (es lo mismo AB que BA), entonces se divide por el número de veces que se repite cada permutación.

Es decir:

$$Cn,r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

En el caso de la situación anterior se tomaron combinaciones de **12** elementos (equipos) tomados en grupos de **3** en **3.**

$$C_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12x11x10}{3x2x1} = \frac{1320}{6} = 220$$

Es importante trabajar muchos ejercicios con los alumnos donde ellos comprendan de forma intuitiva la diferencia entre las variaciones (variaciones simples, variaciones con repetición, permutaciones, permutaciones circulares) y las combinaciones, para evitar memorizar al máximo fórmulas que el estudiante confunde y en muchas ocasiones no encuentra relación entre el problema planteado y la fórmula utilizada

Aprovechando la situación generada por el torneo y los resultados obtenidos para la conformación de los grupos, el profesor de matemática vió la oportunidad de repasar las combinaciones a través del **Triángulo de Pascal.**

Ya sabemos que de un conjunto de 12 elementos podemos obtener 220 subconjuntos diferentes tomándolos de a 3 en 3 recuerda el profesor, pero para tratar de llegar a su objetivo les plantea las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos subconjuntos diferentes de un elemento pueden obtenerse de un conjunto de 12 elementos? _ pues 12_ responden en coro los alumnos.

- ¿Cuántos subconjuntos diferentes de 12 elementos se pueden formar de un conjunto de 12 elementos? -¡Sólo uno!- responden todos.

- ¿Cuántos subconjuntos de cero elementos se pueden sacar de un conjunto de 12 elementos?

Esta respuesta no fue tan popular, pero un alumno bastante atento respondió que sólo **uno, el conjunto vacío** el cual es subconjunto de todos los conjuntos.

- ¿Del conjunto formado por los 12 equipos cuántos grupos diferentes de cuatro equipos podemos formar?

Para esta pregunta la respuesta no fue inmediata, sólo alguno acató a decir que se debe realizar un proceso de conteo similar al propuesto para determinar la cantidad de grupos diferentes tomados de 3 en 3, expresando además que intuía que el número en este caso era mayor.

_Para que la situación se haga más fácil no tomaremos inicialmente conjuntos con tantos elementos _ les dice el profesor, será más sencillo resolviendo las situaciones que se plantan a continuación y generalizando los resultados:

- Determinar todos los subconjuntos que se obtienen de un conjunto sin elementos.
  El único subconjunto que resulta es el vacío
  ϕ

- Mostrar todos los subconjuntos que se obtienen de un conjunto de un elemento, por ejemplo del conjunto **A**= $\{a\}$.

  Resultan dos subconjuntos:

  $$\{\phi, \{a\}\}$$

Al conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A, lo llamamos el **conjunto de Partes,** o conjunto potencia de A, el cual representamos por **P(A).**

- Si $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, hallar **P(B).**

P (B) = $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

* Dado el conjunto $\boldsymbol{C = \{a, b, c\}}$ determinar el conjunto **P (C).**
  Sacando todos los subconjuntos tenemos:

P (C) = $\left\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\right\}$

* Determinar el conjunto de partes del conjunto $\boldsymbol{D = \{a, b, c, d\}}$.

  Este conjunto está determinado por:

P (D) =

$\left\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\right\}$

A partir de este ejercicio llenar el cuadro que se presenta a continuación:

Tabla 1. Triángulo de Pascal

# de subconjuntos de... / #de elementos del conjunto	0 elementos	1 elemento	2 elementos	3 elementos	4 elementos	5 elementos	….	n elementos	Número de elementos del conjunto de partes
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**			1
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**			2
2	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**			4
3	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**			8
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	**0**			16
5									32
. . .									. . .
n									2^n

De la parte derecha del cuadro se puede concluir que el número de elementos del conjunto de partes es una potencia de **2** cuyo exponente corresponde al número de elementos del conjunto inicial.

De la parte central se observa que los números marcados con rojo van formando un triángulo, que es precisamente ***el triángulo de Pascal*** , además si se analiza con detenimiento se deduce la forma cómo se generan las demás filas.

Si se tiene un conjunto de 4 jugadores de microfútbol:

- ¿Cuántos subconjuntos de 0 integrantes se pueden formar?
- ¿Cuántos subconjuntos diferentes de un integrante se pueden formar?
- ¿Cuántos subconjuntos diferentes de dos integrantes se pueden formar?
- ¿Cuántos subconjuntos diferentes de tres integrantes se pueden formar?
- ¿Cuántos subconjuntos diferentes de cuatro integrantes se pueden formar?

Las respuestas a estos interrogantes se encuentran en la quinta fila de triángulo de Pascal donde de izquierda a derecha aparecen sucesivamente las combinaciones:

$$C_{4,0}, \quad C_{4,1}, \quad C_{4,2}, \quad C_{4,3}, \quad C_{4,4}$$

Construir las primeras 13 filas del **Triángulo de Pascal** para responder las siguientes preguntas:

- Si se tiene un grupo de 10 atletas para realizar una prueba en grupos de a 6, ¿De cuántas maneras diferentas se pueden organizar?
- El entrenador de un equipo de fútbol realiza un ejercicio por turnos con la nómina titular (11 jugadores), utilizando grupos de 8, ¿De cuántas maneras diferentes puede el técnico organizar los grupos?
- Los 7 colores del arco iris se quieren utilizar para pintar los travesaños de una portería de microfútbol, quedando cada uno de diferente color y sin importar el orden, ¿De cuántas formas diferentes puede quedar la portería?
- Si el esquema de juego planteado para el torneo hubiese requerido grupos de 4 equipos cada uno, ¿De cuántas maneras diferentes pudieron haber quedado dichos grupos?
- Después de un entrenamiento los integrantes del equipo de 7ºC deciden ir a comer helado, si todos quieren comer cono de dos sabores y la heladería en el momento tiene cremas de: mandarina, fresa, mora, vainilla, chocolate y limón, ¿De cuántas opciones dispone cada uno para pedir su helado?

Las combinaciones con repetición también deberán trabajarse intuitivamente, hasta lograr deducciones generales a partir de casos particulares. “No se trata de que el alumno aprenda una teoría matemática sino de la constitución de objetos mentales basados en una fenomenología variada, etapa que debe ser previa a la adquisición de conceptos”.(Hans Freudenthal, 1983)

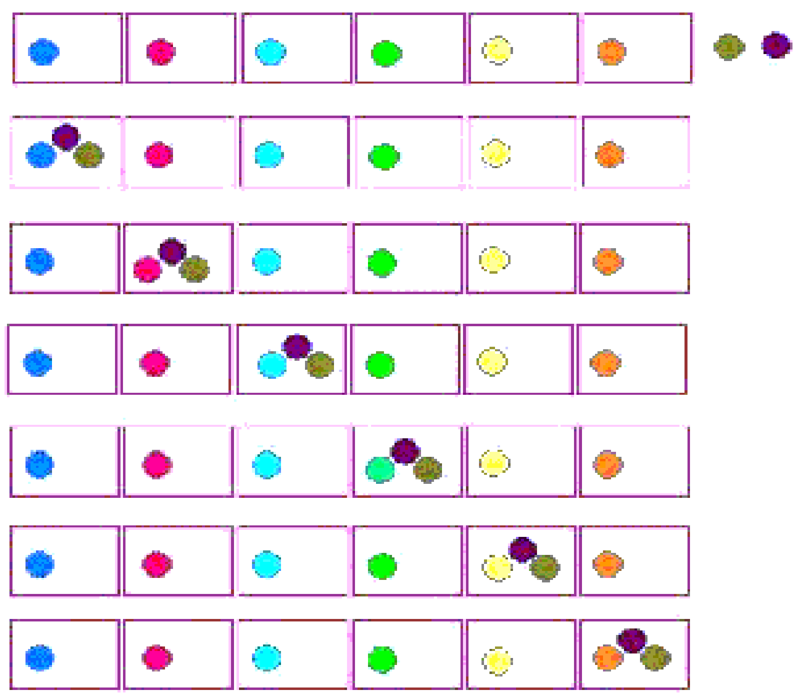
Veamos el desarrollo de la siguiente situación que ilustra un ejemplo de combinaciones con repetición las cuales se mencionan en muy pocos textos escolares:

El rector muy animado por el trabajo que están haciendo los profesores de educación física decide comprar casilleros para que los jugadores del equipo guarden sus pertenencias, pero sólo alcanza para seis por equipo.

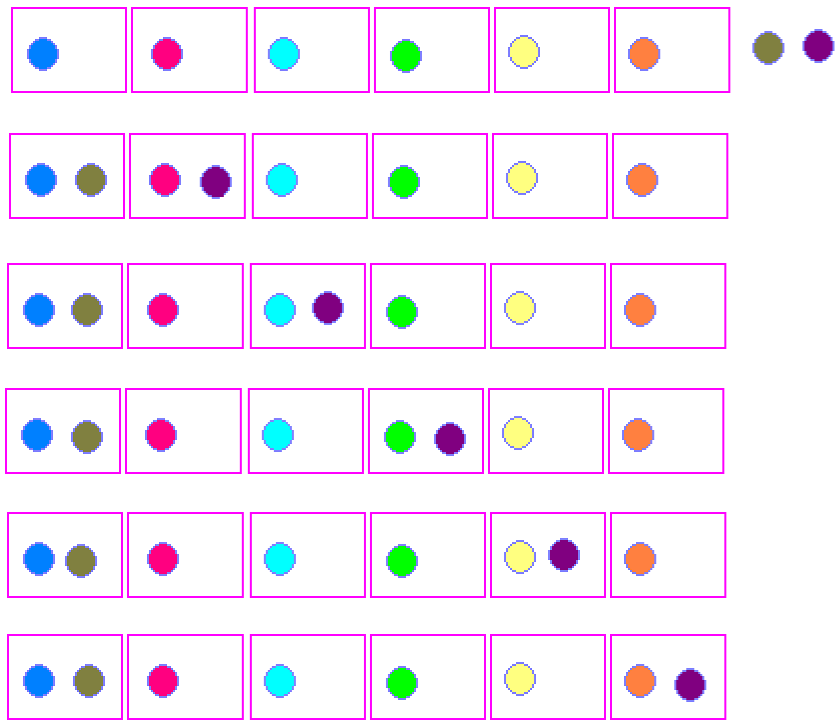
En cada equipo como ya sabemos son ocho jugadores, ¿como se puede guardar la ropa en cada uno de estos casilleros, sin dejar casillero vacío?

En este caso como el orden no interesa, podríamos empezar los arreglos de la siguiente forma:

- En cada casillero se coloca un paquete de ropa, quedando así dos paquetes de ropa por colocar, estos dos podrían ir en el primer casillero, o los dos en el segundo ... resultando 6 arreglos, como lo muestra la figura:



Si en el primer casillero se guardan dos paquetes de ropa, el otro paquete se puede guardar en los cinco casilleros restantes, teniendo así cinco formas diferentes, veamos:



Así, se puede continuar hasta lograr 21 arreglos diferentes.

Una situación que los profesores de educación física no habían resuelto, era la de definir los equipos en aquellos grupos de clase donde resultaron más de 8 alumnos preseleccionados, para ello optaron por dejar dicho evento en manos del azar, como se aprecia a continuación en el caso particular de 9ºA, donde por ser un grupo tan numeroso se tuvieron 12 alumnos preseleccionados y para definir el equipo que finalmente representará al salón, los profesores plantearon las siguientes estrategias:

1. Introducir en una urna 8 balotas negras y cuatro balotas rojas, quienes saquen las balotas rojas quedan por fuera del equipo.

Si cada muchacho saca su balota, la mira, pero no la muestra a los demás hasta que el último saque la suya, responder:

- ¿puede estar algún alumno seguro de ser escogido o no sin haber visto los resultados de sus compañeros?, ¿por qué?
- ¿Es más conveniente sacar la balota de primero o de último? Explique.
- ¿Si esta misma acción se repitiera varias veces los resultados siempre serían los mismos? ¿Por qué?
- ¿Cuando un alumno saca al azar una balota cuáles pueden ser los resultados posibles?
- ¿Al realizar cada alumno una sola extracción queda claramente definido el equipo? Explique.

Ahora, si las condiciones cambiaran y cada persona al extraer la balota la mostrara a los demás:

- ¿Sería más conveniente sacar la balota de primero o de último?
- ¿Si los cuatro primeros sacan balotas negras, el quinto alumno que realiza la extracción, tiene más posibilidades de sacar balota negra o balota roja? Explique.

- ¿Es seguro que el alumno que saca la última balota queda por fuera del equipo? Explique.

- Si en las diez primeras extracciones salieron seis balotas negras y cuatro balotas rojas, ¿los últimos dos alumnos que extraen balota quedan por fuera del equipo? ¿Por qué?

- ¿Es más conveniente utilizar esta técnica de selección mostrando las balotas cada que se extraen o dejando para que todos la muestren al final?

Se puede observar que ambas situaciones son exactamente las mismas, pues el hecho de mirar o no mirar, no incide para nada en la asignación de las probabilidades.

2. La segunda estrategia que el profesor propone para seleccionar los ocho integrantes del equipo consiste en lanzar un dado y las cuatro primeras personas que saquen seis no integran el equipo.

- ¿Cuáles son los posibles resultados que pueden darse cuando un alumno tira el dado?

- ¿Cuándo todos los alumnos han hecho su lanzamiento el profesor tiene ya organizado el equipo? Explique.

- ¿En esta estrategia de selección es mejor lanzar de primero o de último? Explique.

- ¿Es posible que cuando todos hayan realizado un lanzamiento ninguno quede por fuera del equipo?, ¿o por el contrario, es posible que todos queden por fuera?

- Si se escribiera un número de doce cifras con los dígitos del 1 al 6 de acuerdo al resultado del lanzamiento de cada uno de los alumnos, ¿Cuántos números diferentes pueden formarse?

- Si el primer alumno en lanzar el dado saca 1, ¿disminuye la posibilidad de que en los otros lanzamientos salga este valor?

3. La tercera y última estrategia que propuso el profesor consistió en lanzar dos dados, sumar los dos valores obtenidos y los cuatro primeros alumnos que obtengan suma 7, no integran el equipo.

- ¿Cuáles son los posibles resultados que pueden darse en este experimento aleatorio?

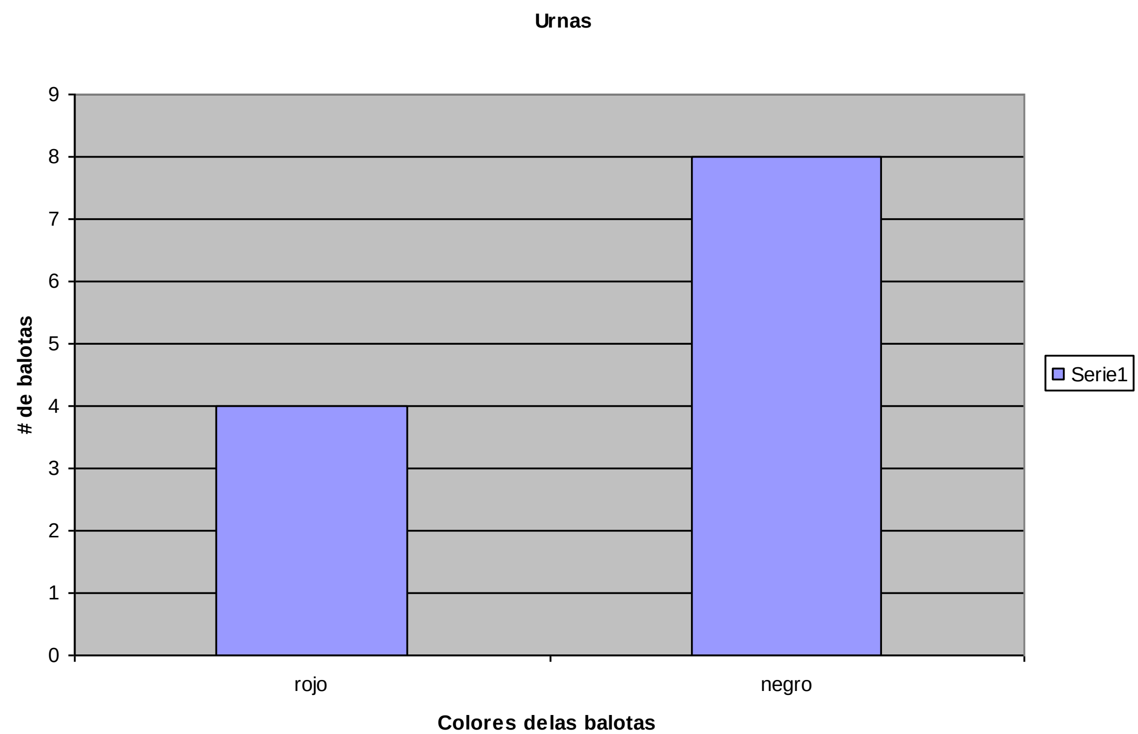
- ¿De cuantas formas puede obtenerse suma 7 al lanzar los dos dados?. ¿De cuántas maneras puede obtenerse suma nueve, o suma cuatro?

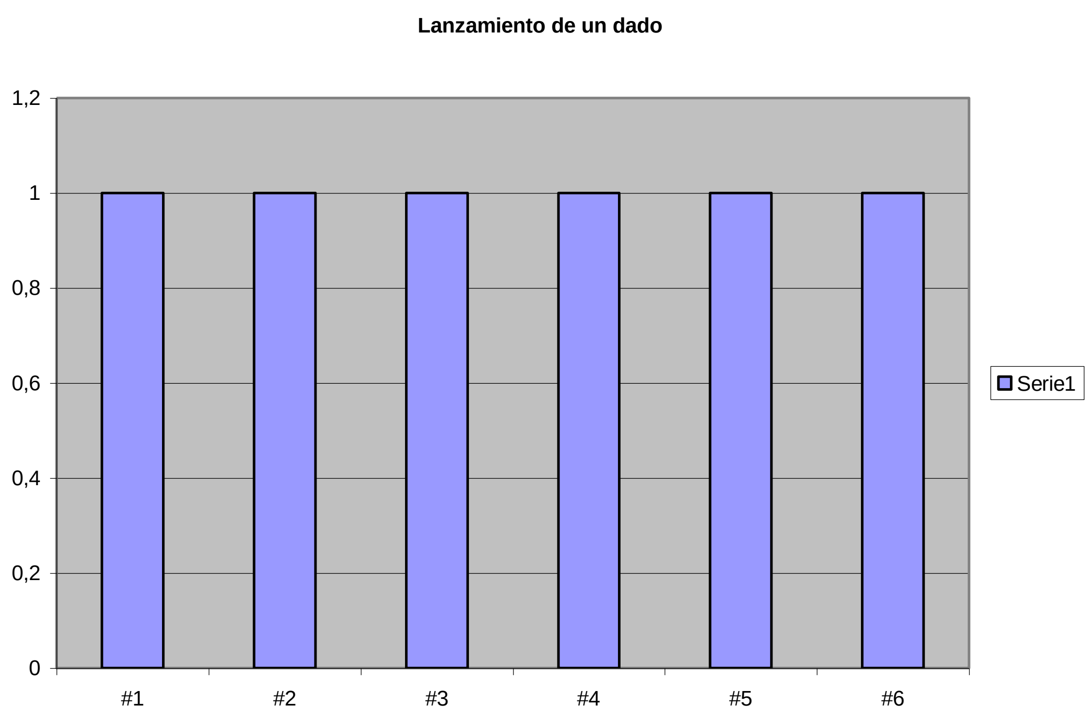
- ¿Es posible que al realizar el lanzamiento de los dos dados la suma de las caras superiores sea 14?

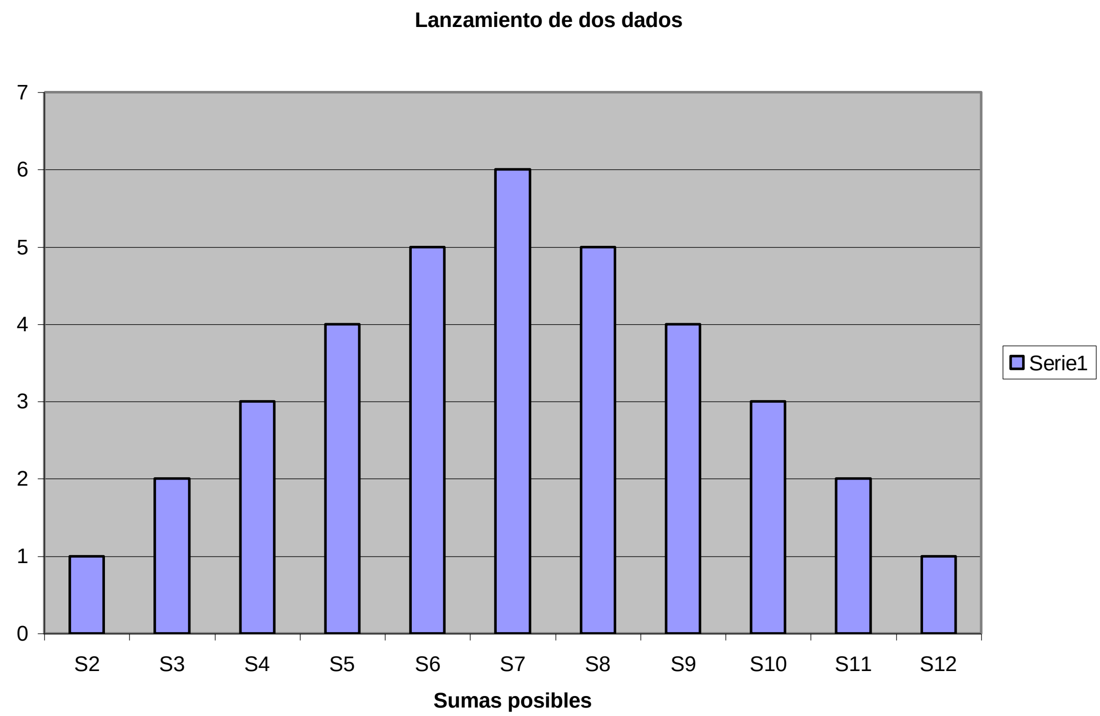
- ¿Cuando cada uno de los doce alumnos ha realizado el lanzamiento, el profesor tiene ya el equipo organizado?

- Considerando que una estrategia es más eficiente que la otra en la medida en que el equipo puede definirse en el menor tiempo posible, clasificar en orden de eficiencia de mayor a menor la tres estrategias presentadas

El trabajo de presentar estas estrategias de selección generó inquietudes en los estudiantes, pues se dieron cuenta que hay muchos factores que intervienen a la hora de analizar propuestas como estas que están regidas por el azar. Por consiguiente, para darles mayor ilustración se les mostró gráficamente la frecuencia de los sucesos de cada espacio muestral asociado a la estrategia propuesta, es decir, al experimento aleatorio.

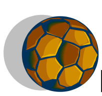

Urnas
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
de balotas
rojo
negro
Colores delas balotas
Serie1


Lanzamiento de un dado
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
#1
#2
#3
#4
#5
#6
Serie1



Prácticamente está todo listo para comenzar el torneo, que este año más que en ningún otro se ha convertido en un gran evento institucional, los organizadores programaron un acto inaugural para presentar oficialmente los participantes a la comunidad educativa, los uniformes que portarán y sobre todo dar a conocer la distribución de los grupos que había sido reservada para tal evento.

El primer punto del acto consistió en realizar una entrada donde cada uno de los jugadores saludaba de mano a los otros participantes como símbolo de juego limpio, sabiendo que son doce equipos, con ocho integrantes cada uno, ¿Cuántos saludos hubo entre jugadores, si no hubo repetición?.

En un segundo momento los equipos se formaron para cantar los himnos haciendo un escuadrón de 12 filas por 8 columnas, quedando cada equipo en una fila, ¿de cuántas maneras diferentes puede darse la distribución de los equipos en el escuadrón?, ¿cuántas de estas posibles distribuciones tiene a 6ºA en la primera fila?

El concepto de probabilidad clásico, debido a Pierre Simón de Laplace, expresa que en un experimento aleatorio la probabilidad de un suceso **A** subconjunto de un espacio muestral **E**,es igual a:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Dado que los casos favorables para un suceso determinado son un subconjunto del conjunto de los casos posibles, se tienen las siguientes propiedades:

- $\forall A \subset E, \quad 0 \leq \mathbf{p(A)} \leq 1$
- P(Suceso seguro) = 1
- Si A y B son dos sucesos incompatibles del experimento aleatorio, es decir, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Teniendo en cuenta la definición anterior establecer la probabilidad de que el orden de los equipos en el escuadrón comenzando por la primera fila sea: 6ºA_6ºC_7ºA_7ºB_7ºC_8ºA_8ºB_9ºA_9ºB_10ºA_10ºB_11º.

- Si la probabilidad de un evento seguro es 1, ¿cuál es la probabilidad de un evento imposible?

- Colocar cada uno de los eventos debajo de la probabilidad que le corresponda.

0	½	1

A : Tirar un dado y que salga un número par.
B : Tirar un dado y que salga 8.
C : Tirar un dado y que salga algún número del 1 al 6

El acto de inauguración concluyó cuando el profesor jefe del área de Educación física dio a conocer la distribución de los equipos en los cuatro grupos y se jugó el primer partido entre 11º y 8ºB.

Recordemos que el esquema seleccionado para el torneo es el de cuatro grupos con tres equipos cada uno en la primera fase y que al realizar el sorteo los grupos quedaron así:

Tabla 2. Conformación de grupos

GRUPO A	**GRUPO B**	**GRUPO C**	**GRUPO D**
11º	10ºB	7ºA	7ºC
8ºB	7ºB	6ºA	8ºA
6ºC	9ºB	9ºA	10ºA

Con esta noticia empezaron los pronósticos sobre todo por parte de los alumnos con expresiones como:

- En el grupo A ***es seguro*** que 11º pasa a la segunda fase.

- Es ***muy posible*** que el equipo eliminado en la primera fase del grupo B sea 7ºB

- 6º A ***talvez tenga posibilidades*** de pasar a la segunda fase, pero si le gana los partidos a 7ºA, cosa que es ***muy probable*** porque éste es un equipo débil.

- El grupo D, ***es quizá el más difícil***, porque si 10ºA se descuida los otros dos equipos tienen con que aprovechar y dejarlo por fuera en la primera fase.

Estas expresiones y otras que se utilizan en la cotidianidad indican que existe un conocimiento intuitivo de las nociones de probabilidad, sobre todo a nivel subjetivo, ya que dependiendo de los conocimientos previos que tenga el observador sobre determinado evento, se asigna una probabilidad que determinamos como ***a priori***.

Elaborar proposiciones que contengan las siguientes palabras:

- Casual.
- Accidental.
- Eventual.
- Fortuito.
- Impensado.
- Imprevisible.
- Inesperado.
- Ocasional.
- Por suerte.
- De chiripa.
- De papayita.
- Eso es pan comido.
- Ni un brujo.
- De sopetón.
- Casi seguro.
- Muy probable.
- Imposible.

Colocar a cada una de estas expresiones un número entre 0 y 1 que indique la probabilidad que ésta le asigna a cierto evento cuando lo caracteriza.

Motivados por tanto entusiasmo respecto al torneo los profesores de educación física deciden hacer una encuesta relámpago a 120 personas de la comunidad educativa para indagar por sus preferencias respecto al posible ganador del torneo, los resultados fueron publicados en forma de porcentaje así:

Por 11º votó el 45%.
Por 10ºB votó el 30%.
Por 9ºB votó el 15%.
Por 7ºC votó el 10%.

- Realizar un diagrama de barras donde se relacionen los grupos elegidos y el porcentaje de personas que votaron por ellos.

- A partir de los datos publicados determinar en el siguiente cuadro el número de personas encuestadas que tienen como favoritos los equipos indicados.

- Cuando se divide el número de votantes por determinado equipo entre el número de encuestados, se obtiene la frecuencia relativa

Tabla 3. Frecuencia Relativa de equipos favoritos

EQUIPO	**PORCENTAJE**	**# DE VOTANTES**	**FRECUENCIA RELATIVA**
11º	45%		
10ºB	30%		
9ºB	15%		
7ºC	10%		

- Realizar un diagrama de barras entre los equipos seleccionados y el número de personas que votaron por ellos, comparar este gráfico con el anterior y sacar algunas conclusiones.

- ¿Si de los 120 encuestados se toma uno al azar cuál es la probabilidad de que éste haya votado por 11º?

- Conservando la misma proporción de la encuesta, de 100 personas elegidas al azar, ¿cuántas votarían por 10ºB?

- Si se mantuviera la misma proporción de favoritismo, pero los encuestados fueran 240, ¿cuántos votarían por 7ºC?

- ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los 120 encuestados haya votado por 11º o por 9ºB?

Con el partido inaugural comienza la primera fase donde se validaron o falsearon muchas de las hipótesis tejidas al conocer los grupos. Los partidos y resultados de esta ronda fueron:

Tabla 4. Resultados Fase 1

Primera vuelta

GRUPO A

11º	5	8ºB	3
11º	3	6ºC	4
8ºB	6	6ºC	4

Tabla 4a

GRUPO B

10ºB	5	7ºB	2
10ºB	1	9ºB	3
7ºB	4	9ºB	4

Tabla 4b

GRUPO C

7ºA	2	6ºA	3
7ºA	2	9ºA	7
6ºA	3	9ºA	4

Tabla 4c

GRUPO D

7ºC	3	8ºA	3
7ºC	4	10ºA	5
8ºA	5	10ºA	5

Tabla 4d

Segunda vuelta

GRUPO A

11º	6	8ºB	5
11º	2	6ºC	2
8ºB	5	6ºC	2

Tabla 4e

GRUPO B

10ºB	4	7ºB	3
10ºB	6	9ºB	7
7ºB	2	9ºB	1

Tabla 4f

GRUPO C

7ºA	0	6ºA	0
7ºA	2	9ºA	6
6ºA	1	9ºA	1

Tabla 4g

GRUPO D

7ºC	5	8ºA	5
7ºC	1	10ºA	6
8ºA	4	10ºA	7

tabla 4h

Según los resultados obtenidos determinar la distribución de los puntos en la primera fase y los equipos que pasan a la segunda fase.

Tabla 5. Puntuación de la Primera fase

GRUPO A	Puntos	GRUPO B	Puntos	GRUPO C	Puntos	GRUPO D	Puntos
11º		10ºB		7ºA		7ºC	
8ºB		7ºB		6ºA		8ºA	
6ºC		9ºB		9ºA		10ºA	

En la segunda fase los resultados fueron los siguientes:

Tabla 6. Resultados de la segunda fase

SUBGRUPO 1

11º	2	8ºB	3
11º	3	10ºB	6
11	3	9ºB	5
8ºB	3	10ºB	1
8ºB	3	9ºB	3
10ºB	7	9ºB	6

Tabla 6a

SUBGRUPO 2

6ºA	1	9ºA	5
6ºA	4	10ºA	3
6ºA	0	8ºA	0
9ºA	5	10ºA	5
9ºA	2	8ºA	4
10ºA	8	8ºA	2

Tabla 6b

La puntuación obtenida en la segunda fase se distribuye de la siguiente manera:

Tabla 7. Puntuación de la Segunda fase

SUBGRUPO 1	Puntos	SUBGRUPO 2	Puntos
11º	0	6ºA	4
8ºB	7	9ºA	4
10ºB	6	10ºA	4
9ºB	4	8ºA	4

Es claro que del **subgrupo 1** pasan a la tercera fase **8ºB** en primer lugar y **10ºB** en segundo lugar, en tanto que del **subgrupo 2** la decisión tiene que darse por un factor adicional a los puntos, pues en este aspecto todos quedaron empatados, para determinar los equipos de este subgrupo que pasan a la fase siguiente se tomará el criterio de **diferencia de goles**, el cual se obtiene restando de los goles a favor los goles en contra, marcados por los equipos en la segunda fase.

Este es un ejercicio sencillo que puede desarrollarse en la siguiente tabla:

Tabla 8. Estadística de goles del subgrupo 2

Subgrupo 2	**Goles a favor**	**Goles en contra**	**Diferencia de goles**
6ºA			
9ºA			
10ºA			
8ºA			

Después de esto se deduce que del subgrupo 2 clasifica en primer lugar 10ºA y en segundo lugar 9ºA.

Superada esta situación el torneo avanza a la fase tres de la siguiente forma:

Grupo α

Primero del subgrupo 1 VS **Segundo del subgrupo 2.**

8ºB VS 9ºA

Grupo β

Primero del subgrupo 2 VS **Segundo del subgrupo 1.**

10ºA VS 10ºB

El torneo está muy avanzado, pues sólo faltan cuatro partidos para culminar el evento, muchos de los pronósticos iniciales se han derrumbado y los seguidores de los que aún continúan tienen *mayores posibilidades* de ver a su equipo campeón. Es el caso de Felipe Jaramillo fanático de 10ºA, quien desea saber de una forma más precisa cuál es la probabilidad de que su equipo sea el ganador de este torneo, como sabe que el profesor de matemáticas les ha hablado del tema decide ir a consultarle.

Para tratar de ser lo más claro posible el profesor le explica a Felipe de la siguiente manera:

- 10ºA debe jugar con 10ºB, por tanto tiene dos posibilidades, ganar o perder (Pues a partir de esta fase no se admiten los empates, ya que de darse este hecho, se van a los **tiros desde el punto penal**), de las dos opciones sólo una de ellas le es favorable, por tanto la probabilidad de que 10ºA juegue la final es **½.**

- Ahora, suponiendo que 10ºA le gane a 10ºB, pasa a la final y allí nuevamente la probabilidad de ganar es **½** . Por tanto la probabilidad de ser campeón es:

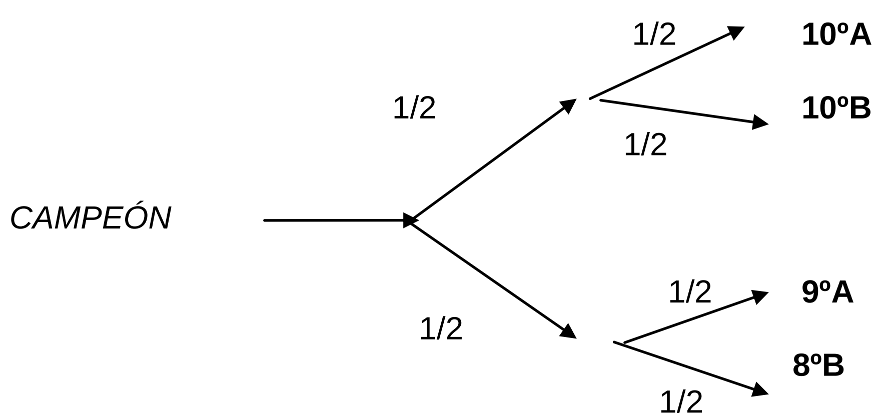
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Esta explicación no fue satisfactoria para el niño, pues en primer lugar él intuye que su equipo tiene más probabilidades que los otros de ser ganador y en segundo lugar si en la tercera fase tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ según lo dicho por el profesor de matemáticas y en la final también tiene $\frac{1}{2}$, entonces la probabilidad de ser el campeón de acuerdo al análisis del niño es:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

_Ese razonamiento parece válido expresa el profesor de matemáticas, pero dado que los equipos que han llegado a esta fase han tenido un buen desempeño, todos tienen la misma probabilidad de ser campeones, por tanto es absurdo que sin jugarse algunos partidos, 10ºA tenga probabilidad **1** de ser ganador, para ser más claro, lo estás considerando triunfador indiscutible, absoluto y seguro sin haber jugado los partidos que faltan.

_Una forma más clara de ver esta situación es a través de un diagrama de árbol, añade el profesor.



En el esquema anterior se ve que la probabilidad que tiene 10ºA de ser campeón es de **1/4**, ya que de 4 equipos posibles, sólo uno puede ganar.

Dado que el niño aún no parece convencido, entonces el profesor le hace la siguiente pregunta:_ ¿Antes de comenzar el torneo qué probabilidad tenía **7ºA** de ser campeón?

_Ninguna _ dijo el niño, puesto que fue de los primeros equipos en ser eliminados.

_Eso lo debemos analizar muy bien _ responde el profesor, pues mirando el esquema del torneo tenemos:

- En la primera fase el grupo donde estaba 7ºA tenía tres equipos y pasaban dos a la segunda fase, de ahí que la probabilidad de pasar era de **2/3.**

- En la segunda fase en cada subgrupo se enfrentan cuatro equipos, de los cuales pasan dos a la siguiente fase, en este caso la probabilidad que habría tenido 7ºA es **2/4 = 1/2** .

- Ya en la tercera fase son solamente 2 equipos, por tanto la probabilidad de pasar a la final es **1/2.**

- Y si 7ºA hubiese llegado a la final la probabilidad de ser campeón también es de **1/2**, ya que puede ganar o perder.

Haciendo un recuento, la probabilidad que tuvo 7ºA de ser campeón es:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

Lo cual es un resultado muy lógico, pues de 12 equipos sólo uno tiene la posibilidad de ser ganador y antes de comenzar el torneo, ***todos tienen las mismas opciones.***

_Entiendo muy bien que estés confundido _ manifiesta el profesor al niño, pero un problema similar, más no equivalente, fue el que dió origen al cálculo de probabilidades, según lo cuenta la historia de las matemáticas, es el caso de un ilustre señor , Antoine de Gombaud, caballero de Méré, quien presentó a Pascal y a Fermat la siguiente situación:

UN PROBLEMA HISTÓRICO.

Una discusión entre jugadores llevó en 1654 a **Pierre de Fermat** y a **Blaise Pascal** a dar los primeros pasos sobre el cálculo de probabilidades.

Antoine de Gombaud, caballero De Méré, un noble francés interesado en juegos de apuestas planteó a Pascal el siguiente problema:

De Méré, en su experiencia práctica había encontrado ventajoso hacer una apuesta uno a uno a favor de que al tirar cuatro veces un dado ordinario saldría un seis por lo menos, y en cambio era desfavorable apostar en las mismas condiciones a favor de sacar por lo menos un doble seis tirando dos dados 24 veces. En una larga serie de apuestas del primer tipo, la razón frecuencial de las veces que había ganado resultó ser mayor que ½, es decir, el número de veces que ganó resultó ser mayor que el de las veces que perdió. En cambio, en apuestas del último tipo tuvo un resultado opuesto.

De Méré consideraba que estos resultados eran contradictorios según el cálculo matemático. Su argumento era que 4 es a 6 como 24 es a 36 y por lo tanto la probabilidad de ganar debería ser igual en ambos casos.

<u>Solución</u>

Para calcular la probabilidad de que en 24 tiradas no se saque ningún seis doble, calculamos la intersección de 24 sucesos de este tipo.
La probabilidad de esta intersección de sucesos es multiplicar 24 veces el número 35/36.
Es decir sea A = {No sacar un seis doble en una tirada de dos dados}.
P(A) = 35/36.
P(A y A y A ....24 veces....y A) = $(35/36)^{24}$.

Este número vale 0'508596121 aproximadamente.

La probabilidad del suceso contrario, es decir, la probabilidad de que al menos una vez salga un seis doble es:

1 - P(A y A y A .... 24 veces....y A) = $1 - (35/36)^{24}$ = 0,491 aproximadamente.

Luego es más probable no obtener una vez un seis doble en 24 tiradas que obtenerlo al menos una vez.

En cambio, para 25 tiradas cambian las cosas pues $1 - (35/36)^{25}$ = 0,505...

Claro que el lanzamiento de dados es algo distinto a un partido de microfútbol manifiesta el profesor, pues el primero se considera determinístico, mientras que el segundo no lo es, ya que intervienen factores como la habilidad para este deporte, el estado de ánimo de los jugadores y hasta la forma como el árbitro maneje el evento, entre otras cosas. Pero de todas maneras, podemos decir que cualquiera de los cuatro equipos que están en la tercera fase puede alcanzar el triunfo en este campeonato.

A Felipe Jaramillo eso de que hay sucesos ***determinísticos*** *y* ***no determinísticos,*** le llevó a pensar que su equipo favorito, es decir 10ºA, tiene factores diferentes al azar que brindan más posibilidades de ser el triunfador, por tanto para estar más seguro va donde el profesor de educación física y le pide el registro del rendimiento de estos cuatro equipos hasta el momento, el profesor está precisamente haciendo una tabla que recoge para los 12 equipos aspectos como:

Partidos ganados (PG), partidos perdidos (PP), partidos empatados (PE), goles a favor (GF), goles en contra (GC), diferencia de goles (DG) y puntos obtenidos.

Completar a partir de los resultados de la primera y segunda fase la siguiente tabla:

Tabla 9. Resumen del rendimiento hasta la segunda fase

Equipos	PG	PP	PE	GA	GC	DG	Puntos
11º							
8ºB							
6ºC							
10ºB							
7ºB							
9ºB							
7ºA							
6ºA							
9ºA							
7ºC							
8ºA							
10ºA							

Estos resultados también demuestran que cuando en la segunda fase los equipos del subgrupo 2 terminaron empatados en puntos, fue justo que 10ºA y 9ºA pasaran a la fase siguiente.

¿Cuántos partidos han jugado los equipos que llegaron a la tercera fase? pregunta el profesor a Felipe, quien correctamente hace la cuenta y le responde que siete.

❋ Utilizando los datos de la tabla anterior determinar el porcentaje de partidos ganados, partidos perdidos y partidos empatados que han registrado los equipos clasificados a la tercera fase. Aproximar con tres cifras decimales.

Tabla 10. Rendimiento de los equipos clasificados a la fase 3

Equipos	PG	% PG	PP	%PP	PE	%PE	Suma %
8ºB							
10ºB							
9ºA							
10ºA							

- ✵ Determinar el número de goles marcados en la primera y segunda fase y realizar un diagrama circular donde se muestre el porcentaje de goles marcados por cada uno de los equipos clasificados a la tercera fase.

A partir de las explicaciones del profesor de matemáticas y de los resultados obtenidos en el trabajo que Felipe le ayudó a hacer a su profesor de educación física, el alumno se da cuenta que en este torneo tiene gran importancia la calidad futbolística de los equipos, pero que si todos están “parejos” en este aspecto, el azar también tiene mucho que aportar.

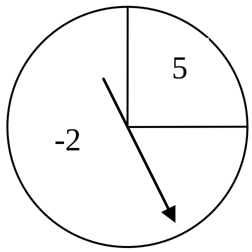
Felipe siempre ha tenido en cuenta las orientaciones del Manual de Convivencia institucional, pero éste en una de sus prohibiciones expresa: “Están prohibidos en la institución todo tipo de juegos de azar”, él sabe que en el fondo lo que esta norma pide es que no se realicen apuestas, por tanto le sugiere al profesor de matemáticas que en una reunión de consejo directivo se modifique la redacción de tal prohibición, pues el azar tal como lo utilizaron los profesores para seleccionar los ocho integrantes de los equipos, no causa daños, por el contrario, desarrolla el razonamiento lógico según él, además le pide al profesor que para una clase de la semana siguiente le deje presentar a sus compañeros unos juegos de estrategia donde interviene el azar, se aprende mucho y no se apuesta dinero, el profesor gustoso acepta la propuesta.

Los juegos propuestos por Felipe fueron:

PRIMER JUEGO

Este relaciona áreas y agujas orientadas. En cada turno un jugador rota un dispositivo que hace girar la aguja, al parar se le asigna los puntos correspondientes.

1. En este juego la probabilidad de que la punta de la aguja caiga en el área marcada con
   -2 es de ¾.



Escribimos P(-2) = ¾.

- Encontrar P(5) = _______.

- En 100 giros el número de veces que se podría esperar que la punta de la aguja caiga en 5 es **25** para un total de **125** puntos.

  Porque: $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

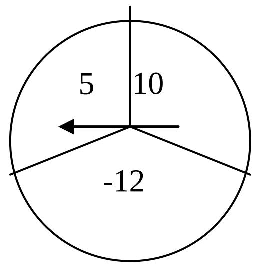
  Además $25 \times 5 = 125$

- En 100 giros el número de veces que se podría esperar que la punta de la aguja caiga en -2 es **75** , Para un total de **-150** puntos.

- El total esperado de puntos para 100 movimientos es : **125-150 = -25**

- Si se define **el valor esperado** como el cociente entre el total de puntos y el total de giros de la aguja, para este caso se tiene que dicho valor es: $\frac{-25}{100} = -0.25$ puntos por giros de la aguja.

2. Determinar las probabilidades indicadas a partir del esquema :

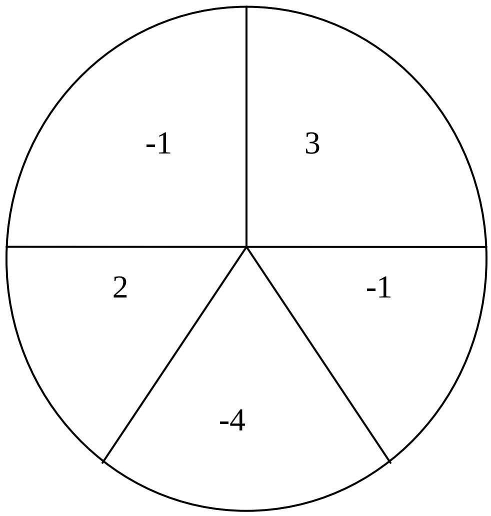


P(5) = __________ P(10) = __________ P(-12) = __________

En **60 giros** el número de veces que se espera:

- Que salga 5 es __________ para un total de __________ puntos.
- Que salga 10 es __________ para un total de __________ puntos.
- Que salga -12 es __________ para un total de __________ puntos.
- El total esperado de puntos para 60 lanzamientos es __________
- El valor esperado = $\dfrac{\text{Total de puntos}}{\text{Total giros}}$ = __________ puntos por giro.

3. Determinar las probabilidades en el siguiente juego:



- P(-1) = ________ P(2) = ________ P(3) = _______ P(-4) = _______
- Para 72 turnos, el total de puntos esperados es: ________
- El valor esperado es:_________.

4. Calcular el valor esperado para 240 giros de cada una de las tres estrategias anteriores. Discute estos resultados.

SEGUNDO JUEGO

El área circular para esta actividad está dividida en dos partes que representan el 60% y e1 40% del área total.

Un jugador tiene el 60% de posibilidad de que la punta de la aguja caiga en el área destinada para **ganar.**

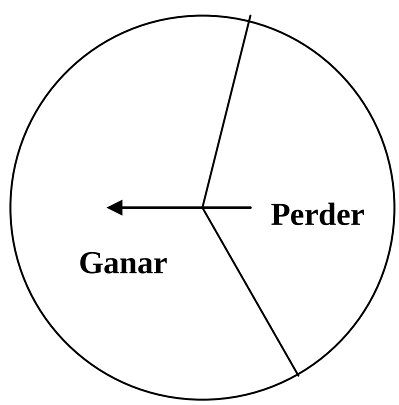
Si un jugador hace un giro y este cae en ganar en la primera rotación, tiene derecho a hacerlo nuevamente.

Se obtienen dos puntos si en las dos rotaciones caen en el área de **ganar**.

Obtiene un punto si en la primera rotación de la aguja para en **ganar** y la segunda cae en el área **perder.**

No tiene puntos si en la primera rotación es **perder**.

Un jugador gira la aguja una o dos veces dependiendo del resultado del primer giro.



1. ¿Cuál es el puntaje que tiene más posibilidad de obtenerse en un turno, 0, 1 ó 2 ?.

   El puntaje con mayor probabilidad es **0.**

   P (0 puntos) = $\frac{40}{100}$

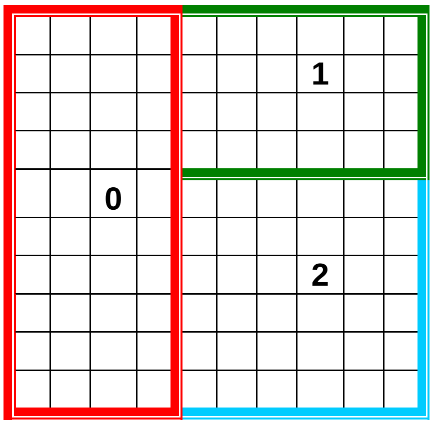
   P (1 punto) = $\frac{60}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{24}{100}$

   Probabilidad de que la aguja caiga en el área ganar la primera vez, por probabilidad de caer en el área perder en el segundo giro.

   P (2 puntos) = $\frac{6}{100} \times \frac{6}{100} = \frac{36}{100}$

2. Realizar la experiencia 50 veces y registrar los resultados .

3. Analice el juego usando estas 100 rejillas para representar la probabilidad total. Determine cada una de las probabilidades indicadas.



P(0) = __________ (Probabilidad de marcar 0 puntos en 100 turnos).

P(1) = __________

P(2) = __________

En 100 turnos el número de veces que se espera:

- Obtener 0 puntos es ___**40**___ para un total de ___**40 x 0 = 0**_____ puntos.
- Obtener 1 punto es ___**24**_____ para un total de ____**24 x 1 = 24**_____ puntos.
- Obtener 2 puntos es ___**36**_____ para un total de ___**36 x 2 = 72**_____ puntos
- El total de puntos en 100 turnos es ___**96**_____
- El valor esperado = $\frac{\text{Total de puntos}}{\text{Total de turnos}} = \frac{\mathbf{96}}{\mathbf{100}}$ puntos por turno.

4. Determine las probabilidades y valor esperado para juegos de este tipo con 20%, 40% y 80% de probabilidad de que al girar la aguja, ésta caiga en el área **ganar.**

TERCER JUEGO

Un juego de azar por parejas que involucra dos monedas de oro, cada una con un valor de $5, y dos monedas de plata, cada una con un valor de $1. Las monedas son idénticas en tamaño y forma.

Mientras uno de los participantes está con los ojos vendados, el otro coloca las monedas en dos vasijas idénticas, la distribución de las monedas es arbitraria (una de las vasijas puede estar vacía). Quien está con los ojos vendados selecciona al azar una vasija y saca una moneda.

1. Determinar todas las distintas maneras en que pueden distribuirse las monedas en las vasijas.

   Solución:
   O: Oro.
   P: Plata.

Vasija 1	OO	OP	O	P	
Vasija 2	*PP*	*OP*	*OPP*	*OOP*	*OOPP*

2. Usar un modelo de área para analizar cada una de las posibilidades. Para cada caso calcular el valor esperado al realizar 100 extracciones.

Ejemplo 1.
Un arreglo posible es:

Vasija 1 : O (oro), p (plata).
Vasija 2 : O,   p.

Vasija 1			vasija 2		
	O			O	
	P			P	

P(O) = 2/4 = 1/2

Esto porque:

P(v1) x P(O en v1) **+** P(v2) x P(O en v2) =

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

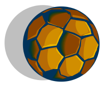
Similarmente:

P(p) = 2/4 = 1/2

El valor esperado se determina como:

$$5\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Valor esperado = $3 por turno.



Ejemplo 2.

Vasija 1 : ___O____

Vasija 2 : ___O, p, p____

Vasija 1 vasija 2

				O	
	O			P	
				P	

P(O) = P(v1) x P(O en v1) + P(v2) x P(O en v2)

$$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

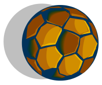
P(p) = P(v1) x P(p en v1) + P(v2) x P(p en v2)

$$= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

El valor esperado está dado por:

$$5 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = 3.67$$

Valor esperado: $3.67 por turno.



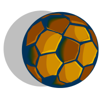
Vasija 1 : ________
Vasija 2 : ________

Vasija 1			vasija 2		

P(O) = ________

P(p) = ________

Valor esperado = _________.



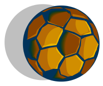
Vasija 1 : ________
Vasija 2 : ________

Vasija 1			vasija 2		

P(O) = ________

P(p) = ________

Valor esperado = _________.



Vasija 1 : ________
Vasija 2 : ________

Vasija 1			vasija 2		

P(O) = ________

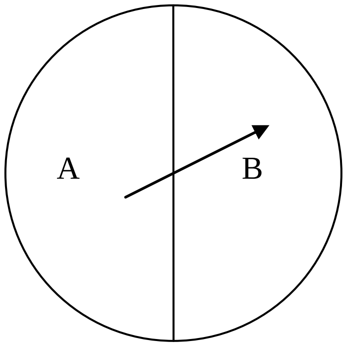
P(p) = ________

Valor esperado = _________.

3. Cuál de los cinco arreglos resultantes da la mayor probabilidad de obtener una moneda de oro?

CUARTO JUEGO

Una ruleta marcada con A y B como se muestra en la figura, cada turno de los participantes constará de uno o dos giros, el jugador con mayor puntaje gana.
En cada turno el jugador ubicado en A gira primero. Si la punta de la aguja cae en el área marcada con A, el jugador A gana un punto (y este turno termina con el jugador A haciendo girar la aguja para comenzar el segundo turno).
Si en el primer lanzamiento la punta de la aguja cae en el área B, entonces el jugador ubicado en B gira la aguja, marcando 2 puntos si la punta de la aguja cae en B, pero si cae en A se da un punto al jugador A.



1. ¿Es este un juego justo? Explique.

2. Juega con un compañero un total de 20 turnos. Registre los resultados y calcule los puntos obtenidos por cada jugador.
   ¿Quién ganó?, ¿ahora considera que el juego es justo?.

3. Determinar la probabilidad de que en un turno el jugador A pueda marcar punto y la probabilidad de que lo pueda hacer B. Usar un diagrama de áreas para representar dichas posibilidades.

- **P(A obtenga punto)** = $\frac{3}{4}$

  A obtiene punto cuando realiza el primer giro y la punta de la aguja cae en el área A.

  La probabilidad de que A gire la aguja la primera vez y caiga en el área A es $\frac{1}{2}$.

  Pero A también obtiene punto si al girar la primera vez, la aguja cae en el área B, y ocurre que al girar el jugador B, la aguja cae en el área A. La probabilidad del suceso descrito es:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto

P(A obtenga punto) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Con un razonamiento similar se llega a que:

❋ **P(B obtenga punto)** = $\frac{1}{4}$

4. Calcular el número esperado de puntos para cada jugador en 20 turnos. Determinarlos también cuando se jueguen 100 turnos.

Solución:

Dado que la probabilidad de que A obtenga puntos es $\frac{3}{4}$, entonces, de 20 turnos le resultan favorables 15 turnos al jugador A, recibiendo entonces 15 puntos según las condiciones iniciales.

Ahora, la probabilidad de que B obtenga puntos es de $\frac{1}{4}$, por tanto, en 20 turnos B hace puntos en 5 ocasiones, pero en cada una de estas oportunidades según las condiciones iniciales recibe 2 puntos, por tanto el total para B es de 5 x 2 = 10 puntos.

Análogamente se determinan los puntajes para ambos jugadores cuando se juega 100 turnos.

5. ¿Cómo se podría modificar la estrategia de puntos para que este sea un juego justo?

Estando a dos semanas de conocer el campeón del torneo se han destacado dos grupos por su constante dinamismo en la animación de las barras, ellos son 9ºA y 10ºB. Por tal motivo el rector los ha citado a una reunión conjunta con el fin de informarles acerca de un premio que se dará a la barra más animada e indiscutiblemente la elección se hará entre estos dos grupos ya que hasta el momento lo habían hecho sin ningún interés.
Los alumnos de 9ºA son 38, de los cuales 20 son mujeres. Los alumnos de 10B son 32, de los cuales 18 son hombres.

Estando en la reunión llega un promotor de libros y el rector no tiene reparo en que haga su propaganda de venta. Al final de la intervención el promotor rifa una edición especial de Cien años de soledad.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno ganador de la rifa sea hombre?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea mujer?

3. Si se sabe que el ganador de la rifa es mujer, ¿Qué probabilidad hay que sea de 10ºB?, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 9ºA?

4. ¿Si el alumno ganador es de 9ºA, qué probabilidad hay de que sea hombre?

5. ¿Será igual la probabilidad de que el ganador de la rifa sea de 10ºB y sea un hombre a la de que sea de 10ºB y sea mujer? Explique.

La siguiente es una tabla muy útil para interpretar esta situación

Tabla 11. Distribución por sexo y grado de 2 grupos

	9ºA	10ºB	Total
Hombres	18	18	36
Mujeres	20	14	34
Total	38	32	**70**

- Para responder la primera pregunta tenemos que de 70 alumnos 36 son hombres, por tanto la probabilidad de que el ganador de la rifa sea hombre es de 36/70.

- La segunda pregunta se responde fácilmente desde la tabla de contingencia pues de 70 alumnos, 34 son mujeres, por tanto la probabilidad es de 34/70.

- Con respecto a la tercera pregunta tenemos: si el ganador de la rifa es mujer, se tienen 34 casos posibles, pero de éstas sólo 14 son de 10ºB, por tanto la probabilidad pedida es 14/34. Esto pude ser representado como:

  $$P\left(10^{o}B/M\right)=\frac{14}{34}\ .$$

  Ahora

  $$P\left(9^{o}A/M\right)=\frac{20}{34}\ .$$

Primero que todo se observa que estos eventos son estadísticamente dependientes ya que el hecho de que el ganador sea mujer , deja abierta la posibilidad de que esté en 9ºA o en 10ºB.

Se debe llegar a generalizar que para calcular una probabilidad condicional como por ejemplo en esta situación $P\left(10^{o}B/M\right)$ simplemente se divide la probabilidad de que sea mujer y que esté en 10ºB entre la probabilidad de que sea mujer, así:

$$P\left(10^{o}B/_{M}\right)=\frac{P(M\wedge 10^{o}B)}{P(M)}=\frac{\frac{14}{70}}{\frac{34}{70}}=\frac{14}{34}=\frac{7}{17}$$

6. ¿Cuál será la probabilidad que siendo el ganador de 10ºB se lo gane un hombre?

7. ¿Cuál es la probabilidad de que dado que se la ganó un hombre éste sea de 10ºB?

8. ¿Cuál es la probabilidad de que se gane el libro un alumno de 10ºB?

9. $\mathbf{P(H \cap 9^{o}\,A) =}$

10. $\mathbf{P\left(H/_{9^{o}\,A}\right) =}$

11. $\mathbf{P\left(9^{o}\,A/_{H}\right) =}$

12. $\mathbf{P(H) =}$

13. $\mathbf{P(9^{o}\,A) =}$

Dados dos sucesos A y B podemos calcular la probabilidad P(A/B) teniendo en cuenta que el número de casos favorables vendría dado por el suceso (A y B) y que el número de casos posibles vendría dado por el suceso B. Es decir, como si B fuera el nuevo espacio muestral

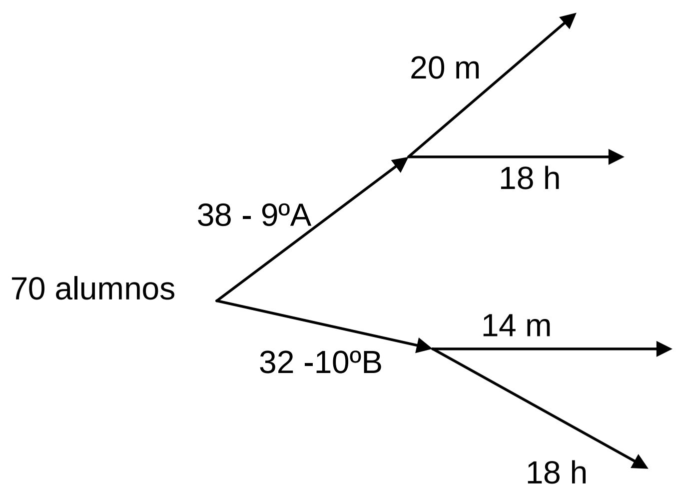
$$P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Es evidente que si A no está condicionado por B, entonces:

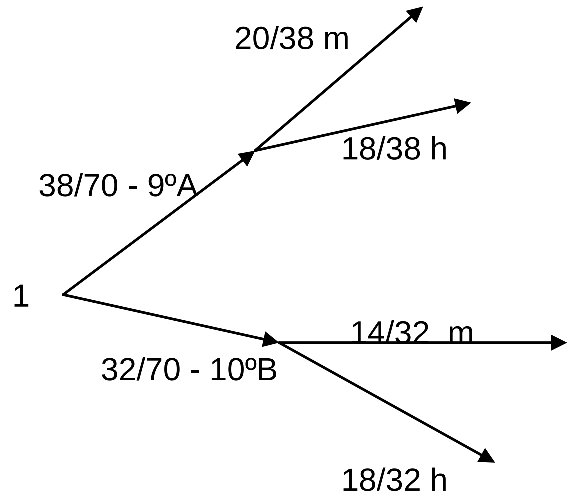
P(A/B) = P(A), por lo que

P(A y B) = P(A) P(B)

Este mismo problema puede mirarse desde la representación en un diagrama de árbol



El diagrama anterior genera el siguiente diagrama de probabilidades:

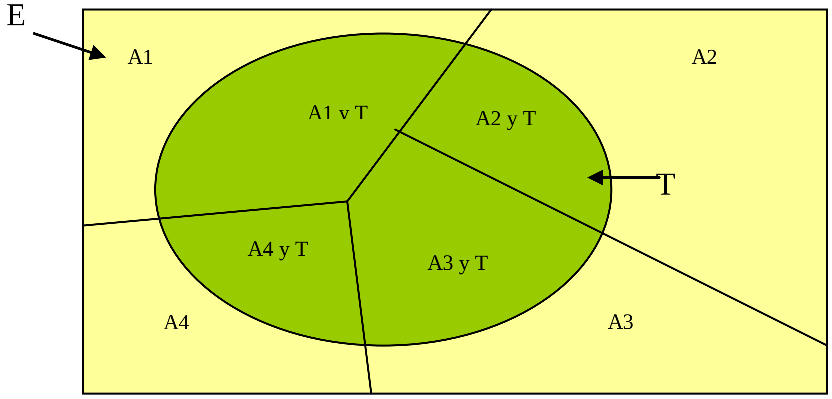


Las preguntas 1, 2 y 8 indagan por una **probabilidad total**, la teoría de probabilidades enuncia un teorema que tiene precisamente este nombre y que se enuncia como:

Si los sucesos $\mathbf{A_1, A_2, A_3 ... A_n}$ son una partición tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A_i} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A_i \cap A_j = \phi, i \neq j}$

T un suceso de S, entonces:

$$\mathbf{P(T) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \times p(T / A_i)}$$



$$\mathbf{p(T) = p(A_1 \wedge T) + p(A_2 \wedge T) + p(A_3 \wedge T) + p(A_4 \wedge T)}$$

$$= p(A_1)p\left(T/A_1\right) + p(A_2)p\left(T/A_2\right) + p(A_3)p\left(T/A_3\right) + p(A_4)p\left(T/A_4\right)$$

Desde la tabla y el diagrama las respuestas a la primera y segunda pregunta se visualizan lógicamente, ahora aplicando el llamado teorema de la probabilidad total se tiene para la segunda pregunta que:

$$\mathbf{P(m) = P(9^o A \wedge m) + P(10^o B \wedge m)}$$

$$= P\left(m/9^o A\right)P(9^o A) + P\left(m/10^o B\right)P(10^o B)$$

$$= \frac{20}{38}\frac{38}{70} + \frac{14}{32}\frac{32}{70} = \frac{20}{70} + \frac{14}{70} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}.$$

La respuesta a la pregunta # 8 es inmediata desde la tabla y el diagrama de árbol, pues de 70 alumnos 32 son de 10ºB por tanto la probabilidad de que el libro se lo gane un alumno de 10ºB es 32/70. Pero dará el mismo resultado aplicando el teorema de la probabilidad total como en los problemas 1 y 2.

Desde la tabla de contingencia la respuesta para la pregunta # 9 es inmediata, pues de los 70 casos posibles hay 18 casos favorables donde se cumple ser hombre y de 9ºA, por tanto la probabilidad pedida es 18/70.

Si se mira la misma pregunta desde el diagrama de árbol resulta $\frac{38}{70} \cdot \frac{18}{38} = \frac{18}{70}$

Para los alumnos del ciclo de educación básico y medio este tipo de procedimientos se vuelven largos y complicados, lo mejor es enunciarlos y aplicarlos de una forma muy general, más bien como un complemento para comprobar los procedimientos gráficos.

Recordando que faltan sólo cuatro partidos para conocer las posiciones de los cuatro equipos finalistas, puede concluirse que según lo apreciado hasta el momento cualquiera de ellos puede ser campeón, aunque algunos resultados han sido mejores para 10ºA el equipo de Felipe Jaramillo.

Jugados los partidos de la tercera fase los resultados fueron:

Grupo □

8ºB	7	**VS**	9ºA	6

Grupo □

10ºA	6	**VS**	10ºB	4

De estos resultados es claro que los dos equipos que disputarán la final son 10ºA y 8ºB, los que definen tercer y cuarto lugar son 9ºA y 10ºB.

De lo 8 jugadores de 9ºA que integran el equipo se van a elegir para el partido que define tercer y cuarto lugar dos que quedarán inicialmente en la banca.

- Si los integrantes del equipo son: Andrés, Pedro, Juan, David, Walter, Yeisson, Hugo y Camilo, ¿Cuál es la probabilidad de que David esté en el banco al iniciar el partido?

- ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro o Camilo sean los elegidos para iniciar en la banca?.

  Como el hecho de que juegue Camilo no depende de si Pedro lo hace o no, estos dos sucesos son independientes, por tanto:

  P(jueguen Pedro o camilo) = P(juegue Pedro) + P(juegue Camilo).

  $$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que Juan y Walter queden en la banca?

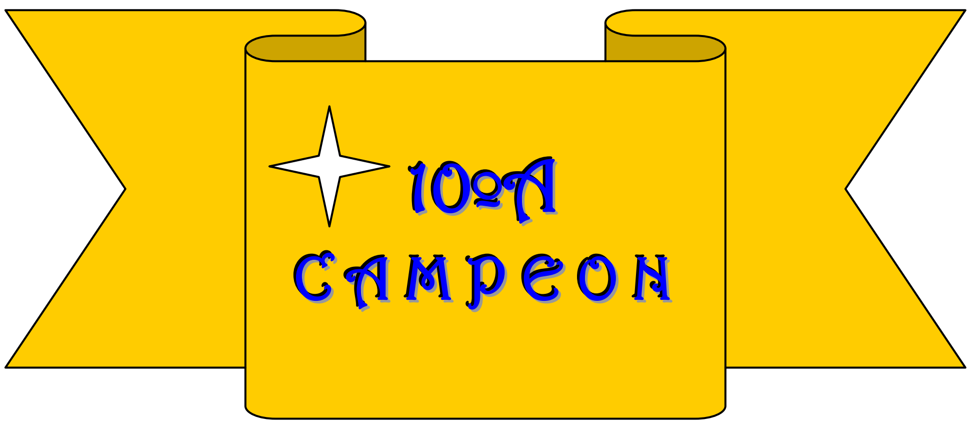
.

Al jugarse el partido para disputar el tercer lugar los resultados fueron:

9ºA	**4**	**VS**	**10ºB**	**5**

La final como era de esperarse se desarrolló en un clima de gran emoción, las fuerzas para apoyar los equipos estaban muy divididas, pues 10ºA había realizado un buen papel y las estadísticas le daban una leve ventaja, pero muchos de los alumnos de grados inferiores estaban apoyando a 8ºB, pues demostró que no solo los equipos de grados superiores pueden llegar a la final. En el partido de clausura los resultados fueron:

10ºA	**8**	**VS**	**8ºB**	**6**



Una vez terminado el campeonato se hace un acto de premiación donde participa toda la comunidad educativa, después de entregados los reconocimientos respectivos se realiza la rifa de un afiche autografiado de la Selección Colombia de mayores el cual fue donado por una profesora muy aficionada al fútbol.

Si en el Colegio el Hatillo hay 1315 estudiantes de los cuales 685 son de bachillerato y de estos 284 son hombres, 630 son de básica primaria y de ellos 302 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno que se gane el afiche sea un hombre o que sea un alumno de primaria?

En estos casos hay que analizar la respuesta detenidamente porque la probabilidad de que sea un hombre y sea de primaria puede ocurrir simultáneamente, es decir que ser hombre y ser de primaria no son incompatibles (no son mutuamente excluyentes). Por lo tanto no se pueden sumar las probabilidades como si fueran independientes, así:

Dado que:

h : hombre

p: alumno de primaria

$$P(h \cup p) \neq P(h) + P(p)$$

Ya que si se admite la igualdad se está haciendo un conteo doble de la intersección, por tanto la expresión correcta sería:

$$P(h \cup p) = P(h) + P(p) - P(h \cap p)$$

Para visualizar mejor este tipo de problemas resulta muy práctica la utilización de los diagramas de árbol y la distribución de los datos en tablas de contingencia, una ilustración de sus aplicaciones se puede apreciar en los desarrollos siguientes

Tabla 12. Distribución por sexo y ciclo de los alumnos de la Institución

	Bachillerato	Primaria	Total
Hombres	284	328	612
Mujeres	401	302	703
Total	685	630	1315

Si en la tabla se dividen todos los datos de la tabla por 1315 obtenemos:

Tabla 13. Proporción entre el número total de alumnos y los datos de la Tabla 12

	Bachillerato	Primaria	Total
Hombres	0.216	0.249	0.465
Mujeres	0.305	0.23	0.535
Total	0.521	0.479	1

Utilizando esta segunda tabla podemos hallar probabilidades que aparentemente son muy complicadas y que requieren la memorización de fórmulas en otros procedimientos

Para responder la pregunta de cuál es la probabilidad de que el alumno que gane el afiche sea un hombre o sea de primaria, simplemente sumamos 0.216 + 0.249 + 0.23 = 0.695.

Resultado que desde las propiedades de la probabilidad sería:

$$\mathbf{P(h \cup p) = P(h) + P(p) - P(h \cup p)}$$

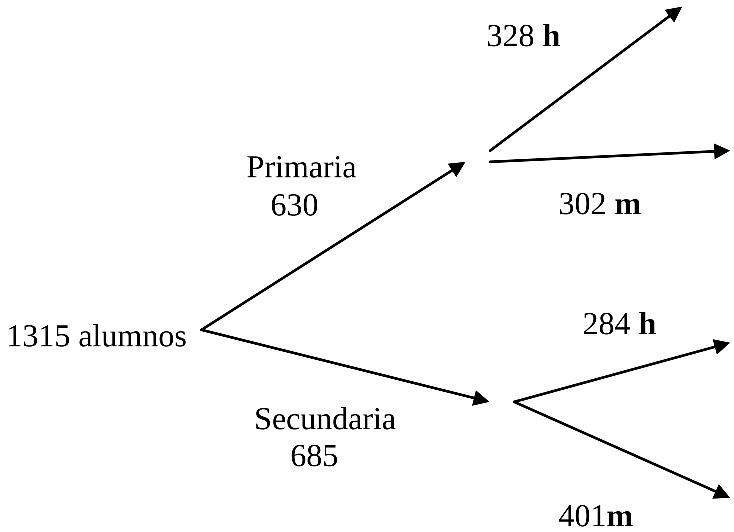
$$\mathbf{= 0.465 + 0.479 - 0.249}$$

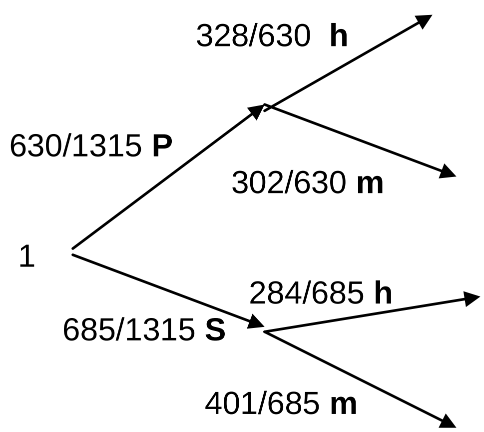
$$\mathbf{= 0.695}$$

También pueden responderse cuestionamientos como:

- Elegida una persona al azar hallar la probabilidad de que sea hombre.
- Elegida una persona al azar hallar la probabilidad de que sea mujer y alumna de primaria.
- Si se desea escoger un alumno hombre al azar determinar la probabilidad de que éste sea de bachillerato.

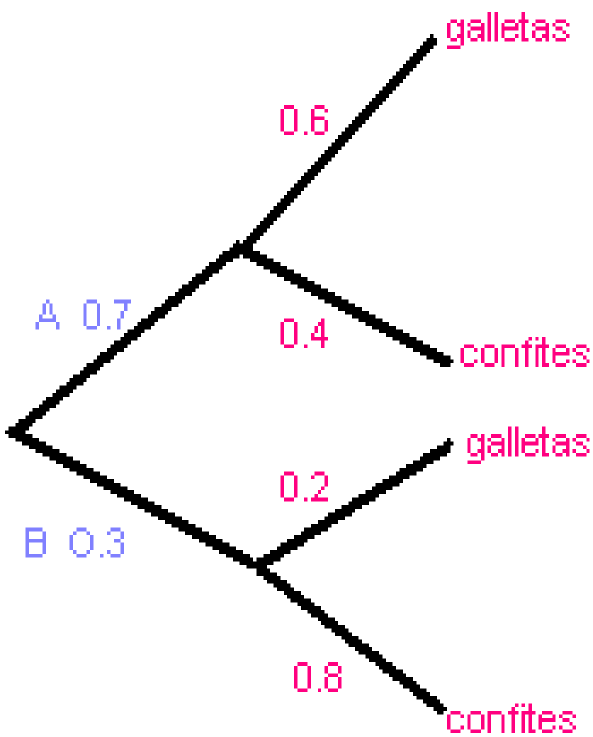
La situación anterior en un diagrama de árbol tiene los esquemas siguientes:





P: Primaria
S: Secundaria

Después de la rifa del afiche el rector le anuncia a todo el personal que se van a repartir entre los grupos dulces, los cuales vienen empacados en cajas, hay unas cajas que tienen el 60% de galletas y el 40% de confites, mientras que otras cajas tienen el 80% de confites y el resto de galletas, de estas solo hay un 30%.



Si al director de once se le da la caja de dulces para su grupo y este saca una galleta ¿podría decir si esta caja es de las que contiene mas confites que galletas?

Para la lectura del diagrama de árbol, A representa las cajas que contiene mas galletas que confites y B el otro tipo de cajas.

P(A) = 0.7 **P(B) = 0.3**

P(G/A) =0.6 P(C/A) = 0.4

P(G/B) = 0.2 P(C/B) = 0.8

Aplicando el teorema de Bayes para la probabilidad a posteriori o probabilidad de las causas, el profesor puede suponer de qué tipo de caja proviene la galleta, sin embargo es susceptible de equivocación, veamos:

$$P(A/G) = \frac{P(G/A).P(A)}{P(G/A).P(A) + P(G/B).P(G)}$$

$$P(A/G) = \frac{(0.6)(0.7)}{(0.6)(0.7) + (0.2)(0.3)}$$

$$P(A/G) = \frac{7}{8}$$

$$P(B/G) = \frac{1}{8}$$

Se puede ver claramente que sacar una galleta es más probable hacerlo de una caja de tipo A, por lo tanto se diría que se obtuvo de A

Es bueno recalcar que todos los valores numéricos que aparecen en las ramas del árbol corresponden a los datos que el problema dió, no hubo necesidad de hacer cálculos tediosos utilizando fórmulas.

Note que si se sigue una trayectoria de ramas adyacentes entonces la probabilidad se va multiplicando, por lo que se trata de intersección de eventos, por ejemplo la probabilidad de que en las cajas de tipo A hallan galletas, es:

P(Ay G) = P(A).P(G/A) = (0.7).(0.6) = 0.42

Si se trata de trayectorias excluyentes, es decir, en paralelo, las probabilidades se suman.

Esto hace que un diagrama de árbol sea de gran utilidad para los cálculos rápidos de probabilidad, lógicamente la suma de las probabilidades de las ramas que salen de un mismo nudo debe dar uno.

Para recoger algunos datos generales del torneo los profesores de educación física diseñaron la siguiente tabla de doble entrada, donde se recogen las frecuencias de los marcadores, obtenidos en el torneo interclases de la Institución Educativa el Hatillo

Tabla 14. Frecuencia de marcadores del torneo

No perder / No ganar	**MARCADORES DE JUEGO**									Total
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	**2**
1		1	1	2	0	1	1	0	0	**6**
2			1	2	1	2	1	1	1	**9**
3				2	4	2	1	0	0	**9**
4					1	2	2	1	0	**6**
5						3	1	0	0	**4**
6							0	3	1	**4**
Total	**2**	**1**	**2**	**6**	**6**	**10**	**6**	**5**	**2**	**40**

Para encontrar el número de juegos que terminaron con un marcador determinado, se localiza el número en la intersección de la fila y la columna apropiada, por ejemplo: **cuatro** de los cuarenta partidos terminaron con un marcador 4-3, es decir, la intersección de tres goles en la fila y cuatro goles en la columna.

Hay que tener cuidado al hacer la lectura de los totales en la tabla anterior, porque el número de juegos que no se pierden con cierto número de goles es la suma de la columna respectiva e igualmente, el número de juegos que no se ganan con un determinado número de goles es la suma de la respectiva fila, si se analiza detenidamente estamos sumando también el número de juegos que un equipo empata con un marcador determinado, por ejemplo, al hacer la lectura de los partidos que no se perdieron haciendo **cinco** goles tendríamos un total de 10 juegos, mientras que el numero de juegos en los cuales no se ganó aunque se hicieron cinco goles es cuatro, como vemos en estos totales están incluidos los tres juegos en los cuales hubo empate, lo que muestra que en este tipo de tablas no ganar o no perder no son eventos mutuamente excluyentes.

Es decir, dados los sucesos:

$$A = \{\text{No perder haciendo 5 goles}\}$$

$$B = \{\text{No ganar haciendo 5 goles}\}$$

Por ejemplo el no haber perdido habiendo marcado 5 goles sucedió en 10 de los juegos, mientras que no haber ganado habiendo marcado 5 goles ocurrió en 4 de los juegos. Sin embargo 3 de estos juegos terminaron 5-5.

- En 10-3 = 7 partidos hubo un equipo que ganó haciendo 5 goles.
- En 4-3 = 1 ocasión, hubo un partido en que el equipo perdió e hizo cinco goles.
- En 3 partidos cada equipo hizo cinco goles, no hubo ganador ni perdedor.
- Se puede concluir que hubo 7+1+3 = 11 partidos en los cuales al menos uno de los dos equipos marcó 5 goles.----

Es decir: $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 10 + 4 - 3 = 11$$

Donde **n** representa el cardinal del conjunto.

Al preguntar por la probabilidad de que en un partido al menos uno de los equipos marque 5 goles, se puede responder también utilizando la ley de la suma de probabilidades así:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{3}{40} = \frac{11}{40}$$

El hecho de que en la tabla anterior no se presente mutua exclusión en filas y columnas para un número particular de goles anotados puede ser tomado para formar una tabla con las frecuencias de los equipos ganadores, perdedores y los que han empatado teniendo en cuenta el número particular de goles marcados.

Tabla 15. Frecuencias de ganar, empatar y perder para un número particular de goles marcados

Goles marcados	Marcador particular Ganar	Marcador particular Perder	Marcador particular Empatar	Total
0	0	0	4	4
1	0	5	2	7
2	1	8	2	11
3	4	7	4	15
4	5	5	2	12
5	7	1	6	14
6	6	4	0	10
7	5	0	0	5
8	2	0	0	2
Total	30	30	20	80

En la tabla 15 se registran las frecuencias para un número particular de goles, con las cuales se ganó, se empató o se perdió un juego. Por ejemplo, hubo siete juegos en los cuales se ganó, marcando uno de los equipos cinco goles, mientras que hubo un juego en el cual un equipo marcó cinco goles y perdió.

Haciendo una lectura directamente de la tabla se pueden recrear muchos conceptos de probabilidad como: la probabilidad clásica, la probabilidad condicional, probabilidad parcial y probabilidad total, sin necesidad de utilizar formulas, veamos:

De la tabla se aprecia que la probabilidad de ganar haciendo 5 goles es: $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

Es decir, el cociente entre el número de veces que algún equipo ganó habiendo marcado 5 goles y el número de veces que algún equipo marcó 5 goles.

Sean:
W: Ganar, G: goles.

$\mathbf{P}\left(\mathbf{W}/_{\mathbf{G}=5}\right)$: Probabilidad de ganar dado que se marcaron 5 goles.

Aplicando la regla de la probabilidad condicional se tiene:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{W}/_{\mathbf{G}=5}\right) = \frac{\mathbf{P(W\ y\ G=5)}}{\mathbf{P(G=5)}} = \frac{\frac{7}{80}}{\frac{14}{80}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Determinar la probabilidad de ganar en cada caso dependiendo del número de goles marcados

Tabla 16. Probabilidad de ganar con un número determinado de goles

Goles marcados	*Probabilidad de ganar*
0	*0*
1	
2	
3	
4	*0.4166*
5	*0.5*
6	
7	
8	*1*

¿Cuál es la probabilidad de que un equipo haya ganado sin tener en cuenta el número de goles marcados?

De la tabla 15 se observa que esta probabilidad es simplemente:

$$\mathbf{P(W)} = \frac{30}{80} = 0.375$$

Este resultado se encuentra de una forma más elaborada aplicando la ley de la probabilidad total, así:

$$P(W) = P(W \cap G = O) + P(W \cap G = 1) + P(W \cap G = 2) + P(W \cap G = 3) + P(W \cap G = 4) + P(W \cap G = 5) + P(W \cap G = 6) + P(W \cap G = 7) + P(W \cap G = 8)$$

$$= P\left(W/_{G=0}\right)P(G=0) + P\left(W/_{G=1}\right)P(G=1) + P\left(W/_{G=2}\right)P(G=2) + P\left(W/_{G=3}\right)P(G=3) + P\left(W/_{G=4}\right)P(G=4) + P\left(W/_{G=5}\right)P(G=5) + P\left(W/_{G=6}\right)P(G=6) + P\left(W/_{G=7}\right)P(G=7) + P\left(W/_{G=8}\right)P(G=8)$$

$$= \frac{0}{4}.\frac{4}{80} + \frac{0}{7}.\frac{7}{80} + \frac{1}{11}.\frac{11}{80} + \frac{4}{15}.\frac{15}{80} + \frac{5}{12}.\frac{12}{80} + \frac{7}{14}.\frac{14}{80} + \frac{6}{10}.\frac{10}{80} + \frac{5}{5}.\frac{5}{80} + \frac{2}{2}.\frac{2}{80} = \frac{30}{80} = 0.375$$

Lo anterior demuestra la utilidad de este tipo de tablas ya que se saca información y se calculan probabilidades aparentemente complejas sin necesidad de utilizar muchas fórmulas.

¿Cuál es la probabilidad de ganar dado que el equipo no marcó más de 5 goles?

De la tabla 15 se observa que:

4+7+11+15+12+14 = 63, es el número de veces que se dió un marcador de 5 goles o menos.

0 + 0 + 1 + 4 +5 + 7 = 17, es el número de veces que algún equipo ganó con un marcador de 5 goles o menos.

Por tanto la probabilidad pedida es:

$$P\left(W/G \le 5\right) = \frac{17}{63} \cong 0.27$$

Aplicando la regla de la probabilidad total se obtiene el mismo resultado.

$$\begin{aligned} P\left(W/G \le 5\right) &= P(W \cap G = O) + P(W \cap G = 1) + P(W \cap G = 2) + P(W \cap G = 3) + P(W \cap G = 4) + \\ &\quad P(W \cap G = 5) \\ &= P\left(W/G = 0\right)P(G = 0) + P\left(W/G = 1\right)P(G = 1) + P\left(W/G = 2\right)P(G = 2) + P\left(W/G = 3\right)P(G = 3) + \\ &\quad P\left(W/G = 4\right)P(G = 4) + P\left(W/G = 5\right)P(G = 5) \\ &= \frac{0}{4}.\frac{4}{63} + \frac{0}{7}.\frac{7}{63} + \frac{1}{11}.\frac{11}{63} + \frac{4}{15}.\frac{15}{63} + \frac{5}{12}.\frac{12}{63} + \frac{7}{14}.\frac{14}{63} = \frac{17}{63} \cong 0.27 \end{aligned}$$

8. EJERCICIO DE APLICACIÓN

MUNDIAL DE FÚTBOL 2002

Al mundial del 2002 fueron 32 equipos, el esquema para jugar fue el siguiente:

Primera fase: con los 32 equipos se hacen 8 grupos de 4 equipos cada uno. En esta fase los equipos juegan todos contra todos un solo partido. Ejemplo: en el grupo C estaba: Brasil Turquía, China y Costa Rica.

Segunda fase: clasifican el primero y el segundo de cada grupo inicial, es decir, que a esta fase pasan 16 equipos. Para realizar la eliminación se organiza de tal forma que el primero de un grupo juegue con el segundo de otro grupo, por ejemplo: Brasil Vs Bélgica, un solo partido y los ganadores pasan a la Tercera fase.

Tercera fase: sólo quedan 8 equipos y nuevamente cada equipo juega un solo partido con el que le toque. El ganador pasa a la siguiente fase. Ejemplo: Brasil Vs Inglaterra.

Cuarta fase: los equipos que aún quedan son solo 4 y cada equipo juega un solo partido con el que le toca. Los ganadores van a la gran final y los perdedores disputan el tercero y cuarto lugar.

Final. Alemania – Brasil

Campeón: Brasil.

De acuerdo a la información anterior:

1. ¿Cuántos partidos se juegan en la primera fase del mundial?

2. ¿Cuántos partidos se jugaron en el mundial Japón – Corea 2002?

3. En la primera fase, ¿Cuántos partidos jugó un equipo?

4. Si el esquema inicial fuera de 4 grupos con 8 equipos cada uno y jugando la primera vuelta todos contra todos, ¿Cuántos partidos se jugarían en la primera fase?

5. Para un equipo pasar a la segunda fase, ¿Tiene más opción si los grupos se hubieran conformado con 8 equipos y clasificaran los dos mejores?

6. ¿Cuántos partidos juega el equipo que llega a la final?

7. ¿Cómo se organiza el diagrama de los partidos por fase para que un equipo tenga mayor probabilidad de pasar de la fase 2 a la fase 3?

8. Un equipo que llega a la semifinal de los partidos que jugó, empató 1 y perdió 1, represente mediante un diagrama de torta los puntos que hizo el equipo por partido jugado.

9. ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los dos equipos que llegó a la final sea el campeón?

En la siguiente tabla de doble entrada se dan la frecuencia de los marcadores, la suma de las filas da los partidos perdidos mientras que la suma de las columnas da los partidos ganados, con cierto número de goles.

Tabla 17. Frecuencia de marcadores Mundial 2002

No perder / No ganar	MARCADORES DE JUEGO									TOTAL
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
0	2	15	10	3	2	0	0	0	1	33
1		9	8	4	0	0	0	0	0	21
2			2	5	0	1	0	0	0	8
3				1	0	1	0	0	0	2
4					0	0	0	0	0	0
TOTAL	2	24	20	13	2	2	0	0	1	64

Recordemos con unas preguntas cómo se hace la lectura de los datos de la tabla:

- ¿En cuántos partidos el marcador fue 2-1?
- ¿Cuántos partidos se ganaron haciendo dos goles?
- ¿Cuántos partidos se perdieron haciendo 2 goles?
- ¿En cuántos partidos uno de los dos equipos o ambos hicieron 2 goles?

Tabla 18. Frecuencia de ganar, perder y empatar para un número particular de goles en el Mundial 2002

GOLES MARCADOS	GANAR	PERDER	EMPATAR	TOTAL
0	0	31	4	35
1	15	12	18	45
2	18	6	4	28
3	12	1	2	15
4	2	0	0	2
5	2	0	0	2
7	0	0	0	0
8	1	0	0	0
TOTAL	**50**	**50**	**28**	**128**

- ¿Cuál fué la probabilidad de que un equipo hubiese ganado dado que sólo anotó 2 goles? , lea directamente de la tabla.

Compruébelo con la fórmula para la probabilidad condicional

$$P(W/G=2)=\frac{P(W\cap G=2)}{P(G=2)}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo gane? Lea directamente de la tabla.

Compruébelo utilizando la ley de la probabilidad total

$$P(W)=P(W/G=0)\quad \mathbf{P(G=0)+\ldots\ P(W/G=8)(P(G=8)}$$

- ¿Cuál fué la probabilidad de ganar, dado que el equipo solamente hizo no más de 2 goles? Lea directamente de la tabla y compruébelo con la ley de la probabilidad parcial.

9. RECOMENDACIONES

9.1. La enseñanza a través de situaciones-problema plantea la búsqueda de alternativas de solución, la participación activa, el desarrollo de habilidades mentales, la creatividad, la discusión y el análisis de las contradicciones.

9.2. El docente es quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades del alumno y llevarlo a construir una visión amplia y más potente del contenido matemático.

9.3. El formalismo del lenguaje matemático debe dejar de ser un fin para convertirse en un medio, así las expresiones simbólicas se perciben como uno de los múltiples sistemas de representación con los cuales puede referirse a la realidad matemática.

9.4. Esta propuesta puede abordarse de forma más profunda en los semilleros y clubes de matemáticas.

9.5. Utilizar tablas y diagramas permite que el alumno comprenda situaciones cotidianas y logre inferencias sin necesidad de realizar un desarrollo axiomático de la teoría.

BIBLIOGRAFIA

BATANERO,M,C.;GODINO,J.D y NAVARRO- PELAYO,V. (1996): Razonamiento Combinatorio. Madrid: Síntesis.

GODINO,J.D.; BATANERO, M.C. y CAÑIZARES, M.J. (1988): Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.

MESA, O. (1998): Contexto para el desarrollo de situaciones-problema en la enseñanza de las matemáticas. Medellín: Centro de pedagogía participativa.

BERKLAUD, David. (1988): "A look at frequency distributions for sport scores". Mathematics teacher, Mar., 212 – 218.

LAPPAN, G.; PHILLIPS, E.; FITZGERALD,W.M y WINTER, M.J. (1987) : "Area models and expected value. Mathematics teacher, Nov., 650 – 654.

LEIVIN, Richard. (1983) Estadística para administradores. Prentice Hall.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). Lineamientos curriculares. Matemáticas. Santafé de Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2003). Estándares curriculares. Matemáticas. Santafé de Bogotá.

CRAMER, HARALD (1970). Elementos de la teoría de probabilidades y algunas de sus aplicaciones. Madrid, España.

BARRON R Angela. Constructivismo y desarrollo de aprendizaje significativo. En: Revista de Educación No 294,1991.

GATTEGNO, Caleb. la pedagogía de las matemáticas en: Piaget, J y otros. La enseñanza de las matemáticas. Aguilar S.A . de Ediciones 1963