Trabajo de Investigación

Modelación Matemática: en un entorno de la visualización para el aprendizaje significativo

Luz Angela Castañeda Bejarano

Heriberto Higuita David

REQUISITOS DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN,CON ÉNFASIS EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Asesor : MGR. OSCAR LONDOÑO BUSTAMANTE

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MEDELLÍN

2 0 0 5

Índice general

GLOSARIO

MEDIADORES:

Vygotsky propone que el sujeto humano actúa sobre la realidad para adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismo a través de unos instrumentos psicológicos que él denomina "mediadores". Este fenómeno, denominado mediación instrumental, es llevado a cabo a través de "herramientas"(mediadores simples, como los recursos materiales) y de "signos"(mediadores más sofisticados, siendo el lenguaje el signo principal). También establece que la actividad es un conjunto de acciones culturalmente determinadas y contextualizadas que se llevan a cabo en cooperación con otros y la actividad del sujeto en desarrollo, es una actividad mediada socialmente.[1]

MODELACIÓN MATEMÁTICA:

1. La forma de describir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación. Algunos autores distinguen entre modelación matemática y matematización mientras otros autores las consideran equivalentes.[2]

---

[1]http://www.monografias.com/trabajos14/cognitivismo
/cognitivismo.shtml

[2]MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas lineamientos curriculares: Areas obligatorias y fundamentales. Sante Fe de Bogotá, Magisterio,1998, p97-102

2. Modelación Matemática: La modelación o la construcción de modelos es el proceso completo que conduce desde la situación matemática real original hasta un modelo matemático.[3]

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA:

Es el proceso de formular comportamientos del mundo real en términos matemáticos. En el proceso de la modelización matemática lo que se hace normalmente es construir una descripción de un fenómeno de la vida real en términos matemáticos, es decir, estamos creando un segundo mundo en el cual considerar la situación.[4]

MODELO MATEMÁTICO:

Un modelo matemático es una representación simplificada de un aspecto de la realidad que incluye alguna entidad matemática. [5]

REPRESENTACIÓN:

Según las representaciones utilizadas en matemáticas, no se tienen en cuenta las representaciones producidas físicamente: por ejemplo, las imágenes producidas por reflexión o las producidas por un instrumento óptico (fotografía, etc). En todos los casos se tiene "alguna cosa que está en lugar de alguna otra cosa", según una parte de la definición de Pierce, o la que evoca alguna otra cosa, según una definición más vieja. [6]

[3]Ibid.,p.98.

[4]JODAR SANCHEZ, Lucas. Modelización: El puente entre las matemáticas y el mundo real. España, Universidad Politécnica de Valencia,sa. p.94,95.

[5]www.soarem.org.ar/Publicaciones/Modelizando %20en %20
matematica.pdf

[6]DUVAL, Raymond. Semiosis y Pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Instituto de [Educación y Pedagogía,2004. p.34.

VISUALIZACIÓN:

La visualización es una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación, que realizamos eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el grado de correspondencia entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerla.[7]

TI: Texas instrument

HP: Hewlet packard

[7]DE GUZMAN, Miguel. El rincón de la Pizarra: Ensayos de Visualización en análisis matemático. Madrid, ediciones Pirámide,2001. p.18

RESUMEN

En este trabajo de investigación se muestran los resultados obtenidos a partir de la aplicación de una propuesta metodológica de aprendizaje significativo utilizando el tema de funciones, apoyados en las formas de representación (modelación-visualización) y el uso eficaz de mediadores(herramientas como talleres,calculadoras, software, signos, el lenguaje y los símbolos). Dicha metodología fue desarrollada con estudiantes de primer semestre de Química farmacéutica de la Universidad de Antioquia (U de A), con el fin de lograr aprendizaje significativo. Se pensó en una metodología que respondiera a la preguntas, ¿Cómo lograr que los estudiantes hagan significativo el concepto de función a partir de las formas de representación(visualización y construcción de modelos sencillos)?, ¿Cómo se acostumbran los estudiantes a razonar cotidianamente utilizando mediadores que maximicen la calidad del tema trabajado en clase y minimice la cantidad de tiempo invertido en la misma?. Para satisfacer estas expectativas aplicamos una metodología de talleres a dos grupos de cálculo diferencial (denominados experimentales) de primer semestre de educación superior de la Universidad de Antioquia (estudiantes de Química Farmacéutica),empleando el tema de "funciones". Con la metodología propuesta se incluyeron dos elementos fundamentales del proceso de aprendizaje: Las formas de representación (Modelación-visualización) y el manejo eficaz de mediadores (talleres, softwares y signos como el lenguaje y los símbolos) . Los resultados obtenidos en la experimentación, muestran a través de los análisis estadísti-

cos respectivos, tendencias favorables en lo matemático y lo pedagógico. El tema de funciones también se desarrolló con la metodología tradicional (exposición magistral) en un grupo de matemáticas operativas de la facultad de Ingeniería de la UdeA denominado grupo control; los resultados comparativos entre los grupos experimental y control se observan en la tabla #4 del capítulo 6.

El proceso anterior ofreció a los estudiantes un espacio flexible dentro del cual ejercitaron actividades de cooperación y solidaridad, a través del trabajo en equipo. El entorno generado por estudiantes y docente facilitó la búsqueda de nuevos elementos asociados con la metodología y mostró un hecho importante: **Con más tecnología, más recursos y las actividades académicas cuidadosamente controladas, se utiliza menos cantidad de tiempo para alcanzar un aprendizaje**.

La propuesta metodológica de talleres se desarrolló de tal forma que el estudiante fuese en todo momento agente activo en la clase, pues, el profesor sólo fue un orientador del proceso de aprendizaje a través del uso adecuado de mediadores; la metodología funciona de la siguiente manera: Se le da al estudiante la información del tema de clase por escrito con su respectivo taller; este material es leído en un tiempo prudente, luego el profesor utilizando mediadores (calculadora o derive, etc) ilustra los elementos básicos del tema razonando conjuntamente con los estudiantes. Posteriormente en grupos los estudiantes discuten los ejercicios del taller apoyados por el profesor y al final del taller cada estudiante desarrolla y entrega unos ejercicios específicos que hemos denominado "hoja resumen". Esto creó el ambiente y el contexto de lo que se han llamado "trabajar en búsqueda de procesos de solución " razonar y hacer por parte de cada uno de los alumnos el ejercicio del pensamiento. La idea con ellos era **"trabajen en grupo y exploren además individualmente"**, que implicaba para todos, esforzarse más en desarrollar procesos sin importar el cometer errores, pues el trabajo individual se sometía a discusión con el grupo o equipo respectivo. De antemano, **no hay respuestas correctas, hay procedimientos para interpretar y resolver problemas**: "descubra usted el suyo, yo aporto algo como docente y usted construya su propio camino de aprendizaje". Aclaramos aquí que una "clase "no era necesariamente la tradicional; el tema podía abarcar incluso varias secciones de dos horas.

En el proceso metodológico se utilizaron múltiples mediadores como las calculadoras, el lenguaje oral, hojas milimetradas, software derive, etc los cuales permitieron la interpretación de modelos matemáticos subyacentes en el trabajo con funciones (magnitudes proporcionales directas e inversas, modelos de funciones tanto lineales como cuadráticas, entre otras). El uso sistémico de recursos tecnológicos, hay que reiterarlo, es fundamental en esta metodología. Otro aspecto fundamental en el ambiente cooperativo que se genera al liberar al estudiante de la entrega de respuestas correctas es permitirle navegar con su propia imaginación (Confianza en si mismo).

Como ya habíamos dicho la metodología de talleres propuesta en este trabajo de investigación se utilizó en dos grupos denominados experimentales. Estos dos grupos se compararon con otro denominado grupo control conformado por estudiantes de ingeniería de la Universidad de Antioquia, el cual desarrolló los mismos temas, mediante la clase magistral, con el mismo contenido de funciones. Los dos grupos: experimental y control, presentaron dos pruebas escritas sobre el tema de funciones denominados pre-test(antes) y pos-test(después). Los resultados de estas pruebas se utilizaron para el análisis estadístico de la investigación: Se tomaron como variables respuesta los promedios de las notas pre-test y pos-test. La duración de la propuesta fue de ocho semanas durante las cuales se abarcaron los temas asociados a funciones simples y combinadas en una y dos variables.

A continuación ilustramos los resultados obtenidos en los grupos control y experimental:

- En la siguiente tabla se muestran los resultados del análisis de varianza multivariado, donde la variable respuesta fue el promedio antes/después. Los resultados muestran que hubo diferencias estadísticamente significativas en los promedios de las notas antes y después (Pretest/postest) (p-valor$< 0,05$). También hubo diferencias promedios entre diferentes grupos de estudio de manera global ($p < 0,05$). De manera multivariada no se detectaron diferencias entre los promedios por sexo, edad y estrato socioeconómico (E.S.E) ($p > 0,05$), lo que indicó que estas variables no fueron determinantes en los resultados finales de los promedios antes y después del experimento.

Test Multivariado			
Efecto	Pillai's Trace	F	p-valor
Test/Postest	0,069	5,679	0,020
Test/Postest*SEXO	0,028	2,225	0,140
Test/Postest*ESE	0,014	0,556	0,576
Test/Postest*Grupo	0,087	3,676	0,030
Test/Postest*Edad	0,019	1,471	0,229

Figura 1

Resultados del Análisis de Varianza Multivariado de mediciones repetidas, usando el estadístico Traza de Pillai

- La nueva propuesta metodológica, según este trabajo de investigación, muestra resultados satisfactorios con respecto al aprendizaje significativo en comparación con la metodología tradicional.

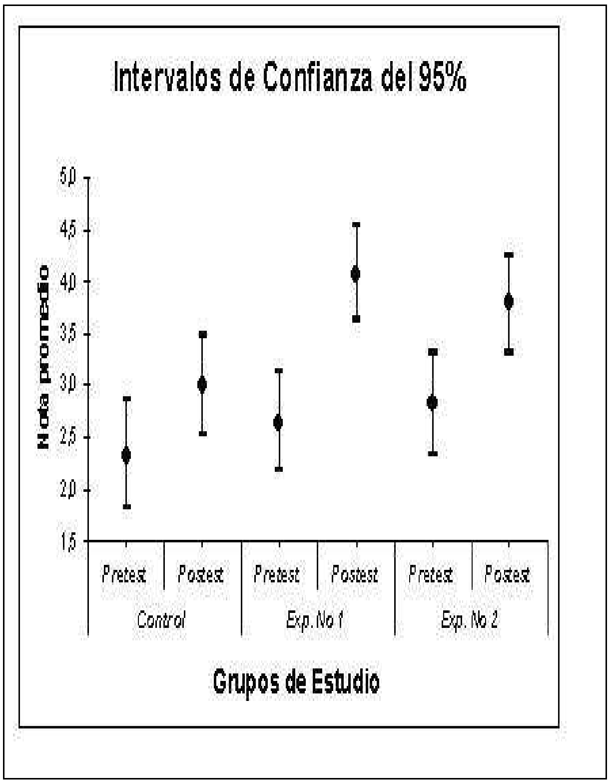


Figura 2

"Intervalos de confianza del 95 %para los promedios de las notas entre los grupos de estudio pretest y pos-test.

Además con los resultados de la metodología de talleres en el pre-test y post-test se llevó a cabo con los estudiantes del grupo experimental un estudio estadístico que mide la actitud de los estudiantes hacia la matemática por medio de una "escala de Likert"(Ver escala de actitudes sección 6.2). Los resultados obtenidos en la prueba mostraron una actitud positiva frente a las matemáticas:

- La escala Likert construida dentro de este proceso investigativo en el cual participaron estudiantes de los grupos experimentales, es consistente y confiable; la confiabilidad arroja un RC (coeficiente de correlación) de un 84 %. La escala nos confirma un equilibrio entre la actitud de los alumnos hacia la matemática y la utilidad de la misma.

- Según los resultados obtenidos a través de la escala Likert, existe la tendencia entre ellos de que la matemática es un componente básico de su carrera profesional y además, su ejercitación sirve como fuente de conocimiento profesional.

INTRODUCCION

Las estrategias de enseñanza en el aula de clase requieren de metodologías adecuadas de acuerdo con los avances culturales y tecnológicos, toda vez que al mismo tiempo, se busca que en el proceso de aprendizaje, el estudiante sea un agente activo. En el ámbito educativo se han implementado metodologías más modernas que están mucho más cerca de los fenómenos físicos. Así por ejemplo, en algunos textos de cálculo utilizados hoy en día se utilizan con frecuencia, casos particulares de problemas reales que relacionan funciones de diversa índole. Las corrientes contextualistas han contribuido a integrar otras áreas (estadística, geometría, modelación y visualización matemática, etc.) en los cursos de Precálculo y Cálculo. Hemos observado que durante las últimas décadas han sido incorporadas nuevas estrategias y mediadores en la enseñanza de las matemáticas, dominadas por corrientes investigativas, inmersas en los procesos tecnológicos.

El concepto de función ocupa gran parte del contenido del curso de precálculo; ésto facilita la visualización y modelación de funciones de problemas reales, lo que permite la exposición de conocimientos matemáticos en forma ágil y atractiva para los estudiantes. Hitt [8] señaló que "a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo".

[8] http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/1anteaula56.htm

Por ejemplo, las formas de representación modelación-visualización integran: símbolos, signos, gráficas y construcciones geométricas. Éstos expresan el concepto e implican el modelo con el cual es posible interpretar y predecir comportamientos de fenómenos físicos. La visualización y la modelación son representaciones de un objeto matemático que está vinculado a una situación física o real. **"Visualizar es interpretar las relaciones existentes de un concepto dado."** [9]; "**modelar significa construir una representación de algo."** [10]. Cuando se logra la visualización matemática en el salón de clase, se rescatan ideas intuitivas que la matemática formal excluye al transitar de lo concreto a lo abstracto, en la enseñanza del conocimiento matemático.

Cuando se modelan situaciones reales u otras que se enmarcan en el proceso cognitivo de la adquisición del concepto de función, se logra que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa el significado de los siguientes elementos matemáticos: simbólicos, expresiones verbales, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas. En el proceso de visualización-modelación con el uso eficiente de mediadores se produce la distinción de variables y la relación entre ellas. Monk (1992) consideró que los modelos físicos proveen a los estudiantes una visión del procesamiento de la situación funcional, la cual amplía en éstos las perspectivas que tienen acerca de las funciones. En este sentido, se considera que la enseñanza se dirige a planteamientos más dinámicos en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, la visualización y la modelación a través del uso eficiente de mediadores son alternativas de transferencia dinámica del conocimiento desde situaciones físicas y geométricas hasta la estructuración mental en el proceso de aprendizaje significativo. La visualización, la modelación matemática, la matemática en contexto y la incorporación de mediadores fortalecen, según los resultados el proceso de aprendizaje significativo . Los procesos matemáticos son complicados en cuanto se

[9]DE GUZMAN, Op. cit., p.18

[10]MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL.Op. cit., p.97-102

aísla el problema que se esté tratando dentro de un contexto, sin embargo, se ha venido investigando el tratamiento de las matemáticas desde contextos reales en la adquisición de conceptos.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. ANTECEDENTES

Una de las cosas buenas que se debería cultivar es el creer en la enseñanza como una oportunidad de compartir. Esta actitud es un trabajo inicial para la interacción Alumno-Docente en el "salón", como cotidianamente llamamos a nuestro sitio de trabajo. Hoy las dificultades que se presentan en el proceso docente no son sólo didácticas, vasta mirar por ejemplo, las cancelaciones de los estudiantes: "¿profe, por favor me firma?, conseguí trabajo". Una cosa es la preparación de los programas (mundo ideal) y otra, la transformación que sufren estos en el agitado periodo semestral. A pesar de la vivencia que nos aporta el trabajo cotidiano en la Universidad, ¡poco hemos aprendido!; elaboramos un micro currículo formal y terminamos desarrollando uno de choque. Los parciales son interferidos por asambleas, semanas de "colchón"o simplemente porque hay una "jornada Nacional". Sería provechoso que estudiáramos más detenidamente (el seguimiento) la suerte del "programa"que habíamos planeado antes. ¿Qué ocurre con el discurso cuando no encuentra sujetos? ¿Qué ocurre con el discurso cuando es interrumpido una y otra vez? Sin estudiar estas eventualidades, tanto internas como su impacto externo, o sea, la pertinencia y la necesidad de cambio, se podría estar andando a oscuras.

Lo otro que debemos reconocer es el apego del profesor a un "libro"de tal o cual autor. El currículo y el programa, son el libro. A pesar de la tecnología y las corrientes pedagógicas contemporáneas, seguimos "enseñando"igual, se consiera que un tema de cálculo para estudiantes de Farmacia, tiene igual base científica que para las demás Ingenierías, pero sería provechoso practicar en cada programa aplicaciones específicas para hacer más funcional la formación de los alumnos. Es hora de hacer algo para dinamizar muchas cosas que no funcionan sino en la mente nuestra. ¿Sería posible que la clase se convirtiera en una sesión abierta en la cual, no necesariamente, se dicte clase?; para construir algo en relación con el futuro didáctico, tal como lo percibimos en las prácticas concretas, podríamos pensar en algunas cosas:

Lo primero, la Universidad debe desescolarizar a los repitentes y darles la oportunidad de asistir a las asesorías programadas, si así lo desean y a sus respectivas evaluaciones. Lo segundo, lograr un compromiso de los docentes (a modo de experimentación) para tomar también un grupo de estudiantes del primer semestre y llevarlo como mínimo en un 50 % más allá del sexto semestre. De otro lado, hemos conservado la creencia en la automotivación de los estudiantes, siempre llegamos al "salón"pensando en avanzar -no solo en forma personal sino colectiva. Como los estudiantes a los cuales les "dictamos clase" o mejor, les orientamos un curso si están matriculados en Educación, Salud, Ingeniería o en alguna otra línea, "suponemos"que traen un gran deseo de aprender. No es así, el alumno inmerso en la cultura de la imagen, de las actividades fáciles al alcance de la mano -no quiere saber mayor cosa de lo que se está escribiendo o proponiendo en el "tablero". También, habiéndose matriculado ya, en un programa específico, existe en los estudiantes, mucha resistencia para aceptar los procesos académicos. La lectura en contexto y la consulta sistémica no parecen hacer parte de su cultura cotidiana. La Universidad además está abocada a las deserciones asociadas a varias causas, entre las cuales aparecen las siguientes:

- De acuerdo con el comportamiento o desenvolvimiento académico del sujeto; una causa fuerte de deserción es la consecución de empleo.
- En relación con las evaluaciones, los estudiantes cuando pierden el primer parcial, claudican y cancelan el curso. No existe en ellos un sentido de lucha que los ayude a sostenerse hasta el final.
- El profesor en ocasiones no dialoga con el estudiante para que éste permanezca en el curso y aproveche otras oportunidades (de ahí que los parciales rígidos sean una talanquera para dinamizar el proceso).
- El alumno sigue siendo un receptor pasivo de la información, que le aporta el profesor, la dinámica del estudiante es muy lenta. Basta observar lo que ocurre en un taller de gráficas de funciones, por ejemplo, en una codificación de datos: los alumnos dubitan, tratan de copiar a un compañero, hablan en voz baja y luego clavan la mirada perdida en el tablero acrílico que siempre está irregularmente situado en el fondo del salón. Transcurren algunos minutos y el estudiante se resiste a empezar. Cuando lo hace, desea concluir rápido y a menudo optan por dedicarle demasiado tiempo a la tabulación y demás formas externas. Como se ve, se corre el peligro de consumir precioso tiempo. Luego muy lentamente empieza a buscar respuestas sobre qué y cómo se construye una tabla y aún no se ha iniciado el proceso de aprendizaje.

Basados en este panorama surge en el marco de la maestría de Educación Matemática este proyecto, que busca mediante la aplicación de estrategias de representación, hacer más significativo el aprendizaje de los estudiantes objeto de esta intervención.

1.2. GENERALIDADES

Este trabajo de investigación está centrado en el marco de la educación matemática y busca crear entornos de aprendizaje significativo en los estudiantes objeto de esta investigación, a partir de una metodología centrada en talleres dinámicos, utilizando al mismo tiempo las formas de representación (visualización- modelación) como estrategia a través de mediadores como instrumentos más eficaces y eficientes.

La deserción de los estudiantes en los cursos básicos son motivo de preocupación no sólo de la universidad sino de investigadores y de la comunidad en general. Este fenómeno es una buena razón para intentar proponer soluciones académicas que aminoren el fenómeno. La forma como fueron desarrollados los talleres de este trabajo de investigación y los resultados obtenidos han estimulado a muchos estudiantes a continuar en las aulas, sin pretender afirmar que el problema ya ha sido resuelto. Al mirar por ejemplo los resultados de la escala Likert podemos afirmar que el estudiante se concientizó de que la matemática es un componente básico en su carrera profesional (La escala Likert nos confirmó un equilibrio entre la actitud de los estudiantes hacia la matemática y la utilidad de la misma).

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

2.1. MARCO TEÓRICO

En el ámbito escolar es imperativo que el estudiante alcance su propio aprendizaje, para esto se requiere la aplicación de nuevas metodologías en el aula de clase, pues se busca utilizar eficazmente el tiempo en el trabajo académico (economía de tiempo) con los estudiantes, para que éstos se dediquen más a la interpretación (visualización) y asimilación de los conceptos, y a partir de problemas reales hacer el ejercicio de la modelación, utilizando mediadores en su proceso de auto-aprendizaje. Existen diferentes teorías que estudian cómo alcanzan los resultados plausibles utilizando procesos asociados al aprendizaje significativo, teoría que hoy es admitida por toda la comunidad educativa.

Se considera que en algunos textos actuales constantemente se desea que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo y para ello existe una gran cantidad de textos de cálculo como los de Larson, Stewart, Warner y otros, que están propiciando no sólo la incorporación de mediadores (software, calculadora, etc) en la enseñanza del cálculo, sino aplicando estrategias para interpretar (visualizar) y llevar dicha interpretación a un modelo matemático (modelación) más acorde con la realidad y la formación de los alumnos.

Actualmente se han incorporado otros mediadores gracias a la aparición de nuevas tecnologías en las calculadoras y las herramientas computacionales (Derive, Cabri, Maple, Excel,etc). Textos como el de Purcell, han hecho a partir de 1970, una amplia presentación de las calculadoras en sus contenidos. El autor hace hincapié en la capacidad de la calculadora para expandir expresiones algebraicas tales como $(x-3y)^{12}$ o la solución de ecuaciones polinómicas. Incluso lleva durante todo el texto una serie de símbolos con significados relativos a: $\boxed{\text{C}}$ utilice una calculadora, $\boxed{\text{Gc}}$ utilice una calculadora gráfica o $\boxed{\text{CAS}}$ utilice un sistema de álgebra computacional. Según lo anteriormente expuesto, todo aparece como una simple aplicación de un instrumento al proceso Docente- Educativo, lo cual es una manera simple de ver la interrelación entre un <u>mediador</u> y su aplicación al proceso educativo.

Así mismo, se considera que este tipo de mediador, no fue creado para trabajar propiamente en el proceso Educativo. Hay que re-orientarlo y contextualizar sus comandos y sus prestaciones. A continuación, a modo de información haremos referencia a los mediadores, algunos de los cuales se utilizaron en este trabajo de investigación.

- <u>MAPLE</u>: Es un sistema de cálculo matemático, simbólico, numérico y gráfico que se viene desarrollando desde 1980 en la Universidad de Waterloo, Canadá.

- <u>MATHEMÁTICA</u>: Es un sistema de cálculo matemático desarrollado por S. Wolfram, actualmente disponible para usar en ordenador personal.

- DERIVE: Es un sistema más fácilmente disponible sobre micros. Se desarrolló a partir del sistema mumath. Incluye ficheros de utilidades específicas con funciones definidas en el propio lenguaje. Es el más apropiado para la interacción matemática con fines docentes. Este software fue utilizado en esta investigación.

- LA CALCULADORA GRÁFICA TI-89/92/200: Es un poderoso instrumento para graficar y hacer cálculos simbólicos. Su ventaja estriba en que puede llevarse a las aulas por su facilidad de manipulación. Evidentemente también pueden utilizarse Hp:48/49 y casio, pero TI es más versátil. Este mediador fue utilizado en esta investigación.

En los textos de cursos básicos de matemáticas se hacen recomendaciones de tipo metodológico, no sólo para estructurar el marco sobre el uso y aporte de los mediadores en Educación, sino para potenciar el aprendizaje significativo de los alumnos mediante el ejercicio de la visualización - modelación en lo que atañe a funciones de una y dos variables. Purcell por ejemplo, recomienda: **"Hagan los cálculos que puedan realizarse con facilidad a mano y sin una calculadora, especialmente si éstos permiten una respuesta exacta".** En otro aparte dice este mismo autor: **"El proceso de estimación es sólo sentido común organizado, combinado con aproximaciones razonables de los números** "[1].

Simmons [2], por ejemplo, habla de áreas del cálculo en las cuales se puede, sin sustituir el pensamiento y el aprendizaje matemático,usar la calculadora para esbozar las gráficas de funciones, haciendo el ejercicio del pensamiento como parte fundamental de las matemáticas. Así mismo, el autor hace hincapié en la **motivación y comprensión intuitiva** del cálculo tendiente a estructurar nuevas situaciones que nos conduzcan a

[1]RIGDON,Varbery. Cálculo. Mexico,Prentice Hall,2001. p.9

[2]SIMMONS,George F. Métodos del cálculo y geometría analítica. sl,Mc Graw Hill,2002.

desarrollos más sistémicos y generales, con los cuales, el estudiante se acostumbre cotidianamente a identificar el comportamiento de las variables, a **visualizar las variables** dependientes e independientes y a **crear modelos que relacionen dichas variables**
.

Actualmente se observa en los libros de matemáticas que los autores manejan representaciones en la misma línea de pensamiento, Duval [3] considera que los matemáticos han desarrollado sistemas de representación semiótica tanto para los tratamientos simbólicos, como para los aspectos visuales gráficos, figuras geométricas y en general códigos que le son propios. Así mismo, afirma que "para observar una clase es necesario poner en juego un dispositivo que contemple **variaciones sistemáticas** en la presentación de tareas simples, cuyas variables **independientes** sean representaciones que luego, igualmente puedan ser utilizadas como **variables de aprendizaje.** "[4]

De otra parte, los mediadores potencian y explicitan las posibilidades numéricas,gráficas y simbólicas de un problema, nos permite encontrar distintas soluciones, al poder variar los parámetros, comparar y contrastar resultados y lo que es más importante: **Nos impulsan a darle una nueva explicación a lo que hemos visualizado**.

Una evidencia en el ámbito educativo con respecto al aprendizaje eficiente es a través de propuestas metodológicas experimentales ya que éstas enfatizan el "aprender haciendo":

Hay que tener en cuenta que la estructura de talleres en este proyecto fue enfatizando en el aprender haciendo. "Es un sistema basado en el aprendizaje activo y focalizado

[3]DUVAL,Raymond. Op. cit., p.25
[4]ibíd., p.28

en el proceso de aprendizaje, más que en un proceso de enseñanza." [5].

Según el mapa adjunto ilustrado en la próxima página, se muestra un esquema frecuente de metodología experimental.[6]

Vemos pues que las metodologías de aprendizaje requieren del uso eficaz de mediadores y la participación activa del estudiante para insertar a éste en un "aprendizaje significativo."

[5] Fiol,M. Luisa; Fortuny,Aymemi y Josep M. Proporcionalidad directa: La forma y el número. En MATEMÁTICAS: Cultura y aprendizaje, No 20. Madrid,Sintesis,1990. p. 16,18

[6] Ibid., p.17

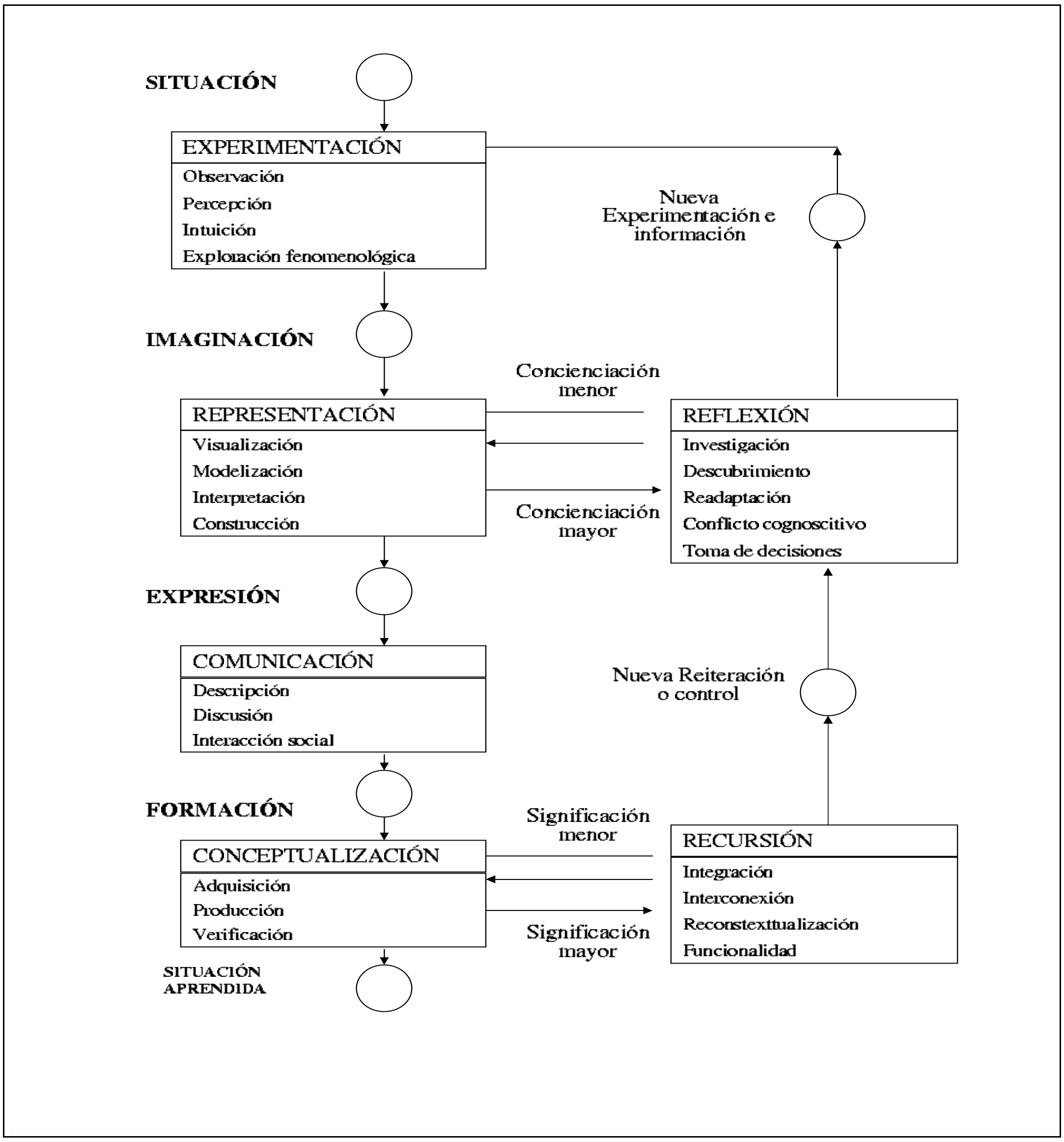


Figura 3

"Hoy en día en trabajos con matemáticas hay una tendencia a la utilización de una metodología experimental para asegurar la relación entre la experiencia y la palabra o representación simbólica"

2.1.1. Mediadores

Los mediadores según vigotsky

> Vygotsky propone que el sujeto humano actúa sobre la realidad para adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismo a través de unos instrumentos psicológicos que denomina "mediadores". Este fenómeno, denominado mediación instrumental, es llevado a cabo a través de "herramientas"(mediadores simples, como los recursos materiales) y de "signos"(mediadores más sofisticados, siendo el lenguaje el signo principal). También establece que la actividad es un conjunto de acciones culturalmente determinadas y contextualizadas que se llevan a cabo en cooperación con otros y la actividad del sujeto en desarrollo es una actividad mediada socialmente.[7]

Los mediadores según Vygostky determinan la forma como aprende el alumno, además, hace referencia concreta a los mediadores como todos aquellos elementos con los que trabaja el alumno y el docente: Los signos (el lenguaje oral y los símbolos), las herramientas(lápiz, taller, software,etc).

> Tanto el uso de signos como el de herramientas comparten algunas importantes propiedades; ambos incluyen una actividad mediata. Sin embargo, también difieren el uno del otro, los signos están internamente orientados, según Vygostky, y constituyen un medio de influencia sicológica destinado al dominio de uno mismo; por su parte, las herramientas están externamente orientadas, destinadas a dominar y triunfar sobre la naturaleza[8]

[7]http://www.monografias.com/trabajos14/cognitivismo/cognitivismo.shtml

[8]VYGOTSKY Lev.S. Procesos Sicológicos Superiores. Córcega, Crítica, 1979. p.191

Existe una relación directa según Vygostky entre los instrumentos que pueden utilizarse por parte de profesores y alumnos y la ganancia conceptual lograda con el apropiado manejo del instrumento, cuando el proceso se hace dinámico. Así mismo, Vygotsky hace referencia concreta a la construcción social del conocimiento. Él considera el aprendizaje como un "proceso profundamente social, hace hincapié en el diálogo y en los distintos papeles que desempeña el lenguaje en la instrucción y en el desarrollo cognoscitivo mediato"[9](El trabajo grupal, la socialización y los talleres en esta tesis, mostraron resultados alentadores). Por ello, el estudiante se ha encontrado con diferentes contextos tecnológicos en un entorno de visualización y ha aplicado más efectivamente la estrategia. El estudiante tuvo a su disposición no sólo el Derive, sino la Hoja de Cálculo y la calculadora y en la medida que construyó los modelos, visualizó los elementos más significativos del proceso. **No es suficiente con construir una tabla que interpreta el comportamiento de una función, hay que rescatar su ley de formación y compararla con otras, incluso, graficarla y llegar al terreno de la corrección numérica si fuese necesario**. Este proceso no busca solamente utilizar mediadores a través de estrategias de modelación, busca mejorar en forma más efectiva el aprendizaje de los conceptos matemáticos, el planteamiento y solución de una mayor cobertura de problemas y ¿por qué no?, iniciar el dominio de una nueva metodología para el planteamiento, solución, interpretación y recontextualización de situaciones problemáticas.

Para Vygostky el individuo está inmerso en una actividad mediada socialmente, por tal razón, desarrolló diversas concepciones sobre el aprendizaje:

"Lo fundamental del concepto de Vygotsky consiste en considerar al individuo como el resultado del proceso histórico y social donde el lenguaje desempeña un papel esen-

[9]Ibíd., p.196

cial"[10]. Vygotsky habló acerca de las **herramientas sicológicas** (Uno de los conceptos fundamentales de Vygotsky) de las cuales considera la más importante, el lenguaje, el cual usamos como medio de comunicación entre los individuos en las interacciones sociales y a través del cual conocemos, desarrollamos y creamos nuestra realidad.

Cabe resaltar que se entiende como herramientas sicológicas los símbolos, las obras de arte, la escritura, los diagramas, los mapas, los dibujos, los signos y los sistemas numéricos, en una palabra, las herramientas sicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores (son aquellas con las que nacemos, son las funciones naturales y están determinadas genéticamente) y las funciones mentales superiores (estas funciones se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social). Estas herramientas median nuestros pensamientos, sentimientos y conductas.

"Al igual que las herramientas de trabajo cambian históricamente, también las herramientas del pensamiento cambian históricamente. Y así como las nuevas herramientas de trabajo dan lugar a nuevas estructuras sociales, también las herramientas del pensamiento provocan el nacimiento de nuestras estructuras mentales." [11]

"Considera el aprendizaje como un proceso profundamente social, hace hincapié en el diálogo y los distintos papeles que desempeña el lenguaje en la instrucción y en el desarrollo cognoscitivo mediato." [12]

Cabe entonces preguntarnos y proponernos como objetivo:

[10] $http://es.wikipedia.org/wiki/Liev_{S}._Vygotski$

[11] VYGOTSKY,Lev.S. Op. cit., p.198

[12] VYGOTSKY Lev.S. Op. cit., p196

¿Se logra un mejor aprendizaje significativo en el área de funciones mediante el uso de las formas de representación modelación-visualización, a través del uso eficiente de mediadores?

Los mediadores y el proyecto

En esta investigación concluimos que el trabajo con mediadores mediante la visualización de funciones, potenciaron y mejoraron los procesos de interpretación y construcción de nuevos modelos matemáticos. Lo anterior, posibilitó en forma más generosa, la asimilación de conceptos y estructuras de la matemática en la medida que el alumno enfrentó conflictos cognoscitivos e hizo además el ejercicio de la contrastación de modelos funcionales que implican diversos comportamientos según el tipo de fenómeno que representan. El mediador, llámese Hoja de Cálculo, calculadora simbólica (cas), Matlab, Derive,Maple determina diferentes formas de trabajo de alumnos y docentes y por ende, enriquecen el lenguaje tecnológico y científico de los actores, propiciando así, mayor flexibilidad en el manejo de cifras y visualización o interpretación de fenómenos. Aquí es bueno aclarar algunos enfoques que pueden llevarnos a evitar errores conceptuales."Los aportes de las ciencias cognitivas muestran que aprender haciendo es necesario pero no suficiente. "[13]

2.1.2. Herramientas tecnológicas

Las investigaciones en educación matemática, hoy en día, tienden a modificar la forma de enseñanza tradicional, buscando que el estudiante más que memorizar, razone acerca de los conceptos de una forma más eficaz. Es así, como las nuevas tecnologías ejercen gran influencia en el quehacer educativo. En el trabajo de investigación,se ob-

[13]JOLIBERT,Josette. El vaivén permanente en una construcción recíproca En Educación y Pedagogía, N0 7. Bogotá,Magisterio,(febrero 2004). p.8

servó por ejemplo que el uso de la tecnología disminuyó notablemente el tiempo invertido para el desarrollo de los talleres, basta mirar el tiempo de reacción entre un taller y otro y la posibilidad de trabajo colectivo que se asocia a la multiplicidad de soluciones.

Son muchos los campos de la matemática que vienen recibiendo en las últimas décadas importantes aportaciones obtenidas gracias a las nuevas tecnologías. Se hace así imprescindible el uso sistémico de mediadores, a fin de propiciar un mejoramiento en el proceso enseñanza aprendizaje "en la enseñanza,desde hace algún tiempo se viene trabajando en el desarrollo e incorporación de algunas experiencias de apoyo informático."[14] . Si la introducción de estas nuevas tecnologías en la enseñanza se hace en forma arbitraria y sin una buena reflexión previa se puede caer en consecuencias irreparables o simplemente seguir en forma tradicional.

Se trata pues de utilizar el potenciador o mediador como lo llamó Vygotsky en forma dinámica y en actividades regulares de clase, en las cuales se haga el ejercicio de la reflexión sobre lo modelado, se sistematice lo que se vaya descubriendo, para contrastarlo con otros entornos y en otros momentos. Lo anterior se diferencia de lo tradicional que consiste en memorizar las estructuras (Modelos lineales, cuadráticos, cúbicos, etc) y aplicarlas después. En el trabajo de investigación esta tendencia tradicional se manifestó en los estudiantes cuando su participación en el trabajo de clase se dificultó.

"Una forma de enseñanza eficiente debería contemplar no sólo la presentación de conceptos y resultados con las correspondientes técnicas del cálculo, sino también un entrenamiento de la intuición, que permita al alumno descubrir propiedades y carac-

[14]GARCIA,Alfonsa; MARTINEZ,Alfredo y MIÑANO, Rafael. Nuevas Tecnologías y enseñanzas de las matemáticas. Madrid, sintesis, 2000. p.20.

terísticas de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones."[15]

Con frecuencia se alude a la falta de tiempo para madurar suficientemente los conceptos y asimilar las características de los distintos objetos matemáticos. **Las nuevas tecnologías permiten una especie de proceso de simulación, que facilita, en menos tiempo, el estudio de diferentes situaciones y la experimentación a bajo costo**.

Para el trabajo en el salón de clase existe una gran variedad de herramientas denominadas mediadores; éstos no están diseñados con fines docentes, sino con el fin primordial de ayudar a resolver los problemas matemáticos que aparecen en cualquier trabajo científico o tecnológico. A partir de aquí, nos corresponde a los docentes adaptar este proceso

Veamos algunas ventajas del uso de mediadores tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas:

2.1.2.1 Abren la posibilidad de experimentar y así crear distintos entornos de visualización. Podemos construir varios gráficos de una familia de funciones. Ejemplo: Contrastar, $y = x^n$ y $y = a^x$

2.1.2.2 Desde un punto de vista efectivo, el dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios permite facilitar la reflexión y el análisis de los resultados. Las posibilidades gráficas se asocian a una mejor comprensión de muchos conceptos.

Es posible presentar una matemática más próxima a los problemas reales tal como se trabaja en la actividad profesional, sin necesidad de usar datos preparados para facilitar los cálculos.

[15] Ibid., p.20

2.1.2.3 Se logra un trabajo más autónomo del estudiante, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal. Por otra parte, también favorece el trabajo en equipo.

2.1.2.4 Resulta sumamente gratificante ver cómo los estudiantes encuentran atractivo y ameno el trabajo matemático ante las posibilidades del sistema, que eliminan la labor rutinaria y potencian la parte creativa (Mejoramiento de la actitud).

2.1.2.5 Motiva al estudiante a involucrarse más en el desarrollo de conceptos y en la investigación.

Sería contraproducente ignorar la realidad de estos nuevos instrumentos ya que la matemática, además de una disciplina formativa, es también una herramienta científica.

El mediador, en la medida que es utilizado, aporta un mayor nivel de confianza en los alumnos, se familiarizan con él, lo cambian o lo dejan, se fabrican su propia estrategia y ¿por qué no?, como en la guerra, cada estratega "se fabrica un modelo de adversario. "

2.1.3. La visualización

La visualización según Miguel de Guzmán

La visualización en matemáticas es distinto al concepto dado por la sicología, Para ésta, la visualización es una técnica entroncada en el análisis transaccional que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos.

Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa, las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva y geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa en las tareas de presentación, manejo de conceptos, métodos y en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.

"La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta." [16]

Las ideas básicas del análisis elemental, por ejemplo: orden, distancia, operaciones entre números, nacen de situaciones bien concretas y visuales. Lo mismo sucede con otras partes aparentemente más abstractas de la matemática; esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto develan las relaciones abstractas que al matemático interesan, constituye lo que denominamos visualización en matemáticas.

La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante procesos de matematización. En ésta, se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas que nos lleva a captar de las percepciones, lo común y abstraible para luego someterlo a una elaboración racional y simbólica que nos permita, manejar más claramente la estructura subyacente de tales percepciones. Es por ello que los docentes de matemáticas a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de representación que les acompañan en su trabajo, haciéndoles adquirir una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita una visión unitaria de las relaciones entre objetos en estudio.

[16] DE GUZMAN, Miguel. Op. cit., p.18

La visualización aparece así como algo connatural tanto, en el nacimiento del pensamiento matemático, como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también en la transmisión y comunicación propias del que hacer matemático.

2.1.3.1 FORMAS DE VISUALIZACIÓN

Recordando del concepto de visualización de Guzmán:

"La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta."[17] Esta visión nos lanza a los docentes a buscar nuevas formas visuales que aportan un contenido estructural subyacente a partir de procesos interpretativos.

Ilustremos con un ejemplo que con una mera visión inmediata no es posible entender directamente el teorema de Pitágoras, y por el contrario, la gráfica exige una lectura interpretativa.

[17] DE GUZMAN, Miguel. Op,cit., p.18

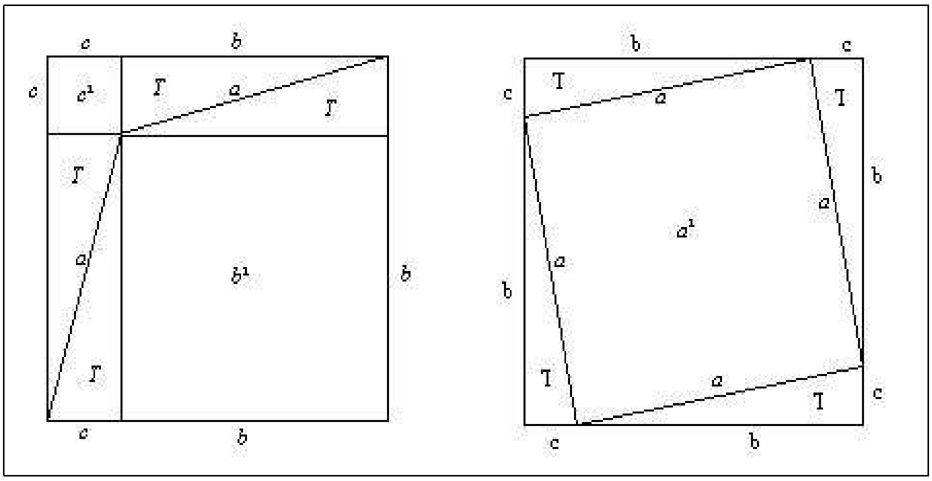


Figura 4

En la figura se presenta una mostración visual del teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 + 4T = a^2 + 4T$: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. En el triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos b y c (figura de la derecha) el cuadrado sobre la hipotenusa (a^2) tiene un área igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los dos catetos ($b^2 + c^2$) de la figura de la izquierda. Los triángulos T en las dos figuras son congruentes

De otro lado, según el grado de correspondencia, más o menos cercana, más o menos natural, o incluso simbólica, entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo, van a existir distintas formas de visualización. Trataremos brevemente algunas de ellas:

2.1.3.1.1 **Visualización isomórfica:**

Se refiere a establecer una correspondencia directa entre ciertos aspectos de la presentación visual, y los significados matemáticos que representan. Es útil esta visualización en la medida que la manipulación de objetos percibidos por los sentidos o nuestra imaginación se nos hacen más fácil que el tratamiento de conceptos abstractos.

Los objetos tienen un correlato “exacto” en nuestra **presentación** en cuanto a las relaciones que nos interesa estudiar ¿Qué significa la palabra exacto? significa que sería posible, en principio establecer una especie de tabla de correspondencias entre ciertos aspectos de la **presentación visual**, y los significados matemáticos que **representan**, hasta tal punto, que las posibles manipulaciones con los objetos de nuestra presentación visual podrían ser traducidos en las relaciones matemáticas abstractas que representan; su utilidad es bien clara, ya que la manipulación de objetos percibidos **por nuestros sentidos o nuestra imaginación** se nos hace más fácil que el tratamiento de concepto abstractos.[18]

Ejemplo:

El teorema del valor intermedio afirma lo siguiente: Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea k cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

[18]DE GUZMAN, Miguel. Op.cit., p.20

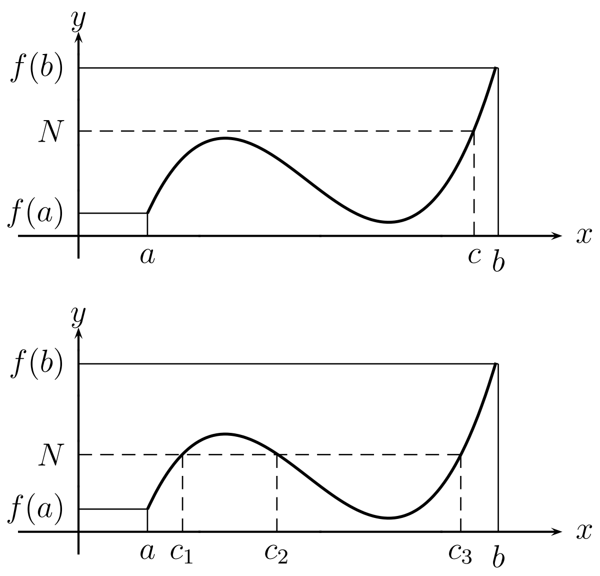


Figura 5

Ejemplo de visualización isomórfica:
teorema del valor intermedio

Este teorema presentado en esta secuencia simbólica puede ser objeto de una presentación isomórfica en el campo visual, lo que mejora y enriquece en el estudiante y el profesor, la estructura perceptiva y por ende su visualización estructurada. (ver la Figura 5)

De las formas de visualización, la isomórfica fue la que se utilizó en este trabajo de investigación.. Para una mejor ilustración del lector vamos a presentar un aspecto suscinto de esta estrategia propuesta y explicada exhaustivamente ya por la mayoría de autores de cálculo. Situémonos en el aula 1-434-curso de cálculo-curso experimental: Estamos trabajando procesos gráficos de funciones escalonadas como la función valor absoluto:$y =\mid x \mid$, función parte entera: $y = [\mid x \mid]$ y todas las combinaciones posibles. Aquí hay que combinar los diferentes lenguajes: icónico, numérico y simbólico para que el grupo mediante el ejercicio interpretativo, deduzca conceptos como: dominio, rango, asíntotas, translaciones, función uno a uno y demás proposiciones asociadas. Se observó en este trabajo que una expresión gráfica de la forma $y = [| x |] - x$ o $y = | x | + x$, no constituía ya sorpresa alguna para los estudiantes. Lo que se ha hecho es un proceso dinámico de doble vía, entre ir y venir de lo gráfico a lo simbólico (una interpretación matemática), o sea, que se realizó una visualización isomórfica.

El inicio en este esquema de visualización para un alumno que está comenzando una disciplina a partir de talleres que no le permiten estar mucho tiempo ocioso en el aula de clase, lo confronta. **En principio, los alumnos dubitan, tratan de copiar y buscan una respuesta inmediata entre sus compañeros, se dirigen a ellos en voz baja y luego observan el tablero del aula de clase. Pasan algunos minutos y el estudiante todavía se resiste a empezar; cuando lo hace, desea concluir rápido y a menudo opta por dedicarle precioso tiempo a la tabulación y demás formas externas.** Como se ve, se corre el peligro de consumir precioso tiempo en algo que todavía no es un proceso de aprendizaje calificado para él. Luego, muy lentamente empieza a buscar respuestas sobre cómo y con qué traza un intercepto (Uso del plano cartesiano y desde luego los números reales),no sólo con el eje x ($y = 0$) sino con el eje y($x = 0$). **Aquí se inicia incipientemente el camino de la visualización.**

2.1.3.1.2 **Visualización homeomórfica:**

En algunos casos de representación los elementos importantes tienen conexiones entre sí que imitan suficientemente las relaciones entre los objetos que representan, ofreciendo una ayuda poderosa para los procesos mentales de búsqueda y demostración. Así por ejemplo, El teorema de Pitágoras dado en términos de áreas de cuadrados es un caso típico cuando se afirma que: “El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos", imita suficientemente el propósito de relación entre los objetos.

2.1.3.1.3 **Visualización analógica:**

Sustituimos mentalmente los objetos con los que trabajamos por otros que se relacionan entre sí de forma análoga y cuyo comportamiento resulta más conocido por haber sido mejor explorado.

Arquímedes obtiene entre sus descubrimientos, el cálculo del volumen de la esfera a través de analogías con otros cuerpos. En este caso estamos refiriéndonos a semicírculos y sectores poligonales regulares.

2.1.3.1.4 **Visualización diagramática:**

Los objetos mentales y sus relaciones en los aspectos que nos interesan, son meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos nos ayuden en nuestro proceso de pensamiento alrededor de ellos. Los diagramas en árbol que usamos en probabilidad son de esta naturaleza.

2.1.3.2 LA VISUALIZACIÓN A LO LARGO DEL TIEMPO

La palabra griega (Zeorein) significa contemplar y (Zeorema) es lo que se contempla, y no, lo que se demuestra. Entre los Pitagóricos primitivos, se consolidó la matemática como ciencia, los números y sus relaciones eran estudiados a través de configuraciones diversas realizadas con piedrecillas (cálculos) ejemplos:

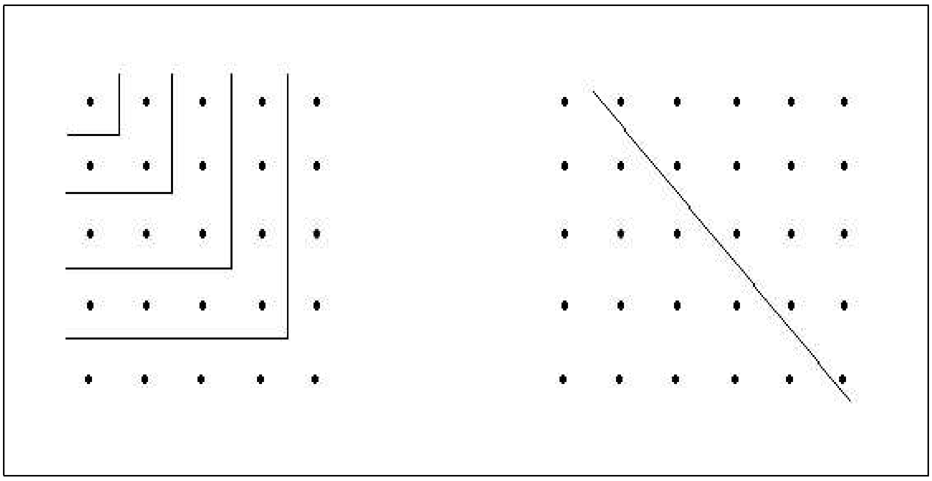


Figura 6

$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$	2(1+2+3+...+n)=n(n+1)

Para ellos la visualización era algo totalmente connatural a la matemática.

El círculo pintado no es la realidad del círculo, la realidad del círculo es la idea, pero la imagen juega un papel bien importante de evocación, es decir de recuerdo de la idea.

La visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos y ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático, como tenía que ser, dada la naturaleza cognoscitiva del hombre, tan condicionada por los elementos visuales, intuitivos, simbólicos, representativos, y como corresponde a la naturaleza de la matemática y a sus propósitos.

Sin embargo las tendencias formalistas imperantes durante una buena parte del siglo XX, han relegado a un segundo término la visualización, tratándola en algunos casos con desconfianza y con sospecha.

Entre las circunstancias que han contribuido a arrojar sospechas sobre la visualización tenemos:

La justificación del cálculo, estuvo inmersa desde el siglo XVII en oscuridad y confusión de las que no se libró hasta finales del siglo XIX con la aritmetización del análisis por Weierstrass. Las geometrías no Euclídias condujeron a mediados del siglo XIX a desconfiar de la intuición. Los resultados falsamente o incompletamente demostrados en base a una confianza ingenua en ciertos elementos intuitivos contribuyeron a escudriñar con intenso recelo los argumentos meramente intuitivos. Todo esto creó un ambiente de desconfianza respecto a la visualización y llevó a la influencia del formalismo en la presentación de los resultados de la investigación.

Hacía un retorno de la visualización: En la actualidad se percibe cierta tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático. Entre las obras recientes se podría destacar la recopilación de artículos: Zimmermann, W. Y Cunningham, S. (eds): Visualitatión in Teaching and Learning Mathematics, Mathematical Association of América, Notes, 19, 1991.[19] entre otros. Una buena parte de la responsabilidad de estas tendencias recientes, hay que situarla en las facilidades ofrecidas para la visualización por el ordenador, los modernos sistemas de cálculo simbólico y los mediadores.

Desde una consideración pedagógica lo visual, como argumento heurístico, ayuda en el trabajo informal, para avanzar hacia la concepción más seria de los valores probativos y demostrativos de los procesos de la visualización y desde luego abstracción matemática.

[19] http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Visualizacion/03tiempo.htm

2.1.3.3 EL PAPEL DE LA VISUALIZACIÓN EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO

La imagen, tiene papeles muy diferentes e importantes en el quehacer de los matemáticos. La imagen es frecuentemente:

- Estimuladora de problemas de interés relacionados con los objetos de la teoría.
- Sugeridora de relaciones un tanto ocultas, capaces de conducir hacia la resolución de problemas y hacia la construcción de la teoría.
- Auxiliar potente para la retención de forma unitaria y sintética de los contextos que surgen recurrentemente en el trabajo.
- Vehículo eficaz de transmisión rápida de las ideas.
- Ayuda poderosa en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría.

Todo lo anterior deja bien patente la conveniencia de hacer ejercicios de visualización y de entrenar a quienes queremos seducir hacia la actividad matemática.

Las imágenes visuales convenientemente seleccionadas suelen contener en sí mismas, todos los elementos necesarios para construir, con apoyo de mediadores, parte de la estructura formal del teorema o problema en cuestión.

2.1.3.4 OBSTÁCULOS A LA VISUALIZACIÓN

Son muchos los obstáculos y objeciones que el ejercicio de la visualización encuentra hoy día en la comunicación, trasmisión de los resultados y procesos del quehacer matemático.

La visualización puede conducir a errores por diversos motivos:

- Porque la figura nos puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar.
- Porque nos induce a aceptar relaciones que son tan engañosamente transparentes que ni siquiera se nos ocurre pensar en la conveniencia de justificarlas.

Pero la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error no invalida su eficacia y su potencia en los diferentes procesos interactivos calificados de la escuela. Incluso las técnicas más formales conducen a veces a errores, razonamientos incompletos, falacias, etc., lo cual es natural que esto suceda, ya que el lenguaje matemático es un cruce entre el lenguaje natural, el lenguaje formalizado, una jerga extraña, compuesta por elementos del lenguaje natural y símbolos lógicos y matemáticos. Es de esperarse que en el trabajo matemático se produzcan equívocos, confusiones y oscuridades que pueden conducir a errores frecuentes.

En educación matemática apenas se está inculcado el hábito de interpretar y descodificar adecuadamente las visualizaciones, reduciéndolas, cuando esto resulta adecuado, a un lenguaje formal. Theodore Eisenberg y Tommy Dreyfuss han mencionado en un artículo titulado On the Reluctance to Visualize in Mathematics, en los obstáculos de todo tipo que se oponen a la tarea de visualización en los procesos de la educación y formación matemática [20].

La visualización es un proceso para el cual hay que prepararse; una imagen vale más que mil palabras, pero con tal de que se entienda. De otro modo no sirve de nada.

Hay que tener en cuenta que un mapa por ejemplo: no es la realidad de lo representado, sino un conjunto de símbolos y códigos que hay que aprender a interpretar. Efectivamente, la realización de la visualización de modo correcto, de manera tal que sea un proceso verdaderamente provechoso requiere una preparación previa. La

[20]http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Visualizacion/05obstac.htm

visualización es un proceso dinámico. La letra escrita por sí sola es un medio muy estático que hay que adaptar a los procesos de visualización. Probablemente, el medio de comunicación del futuro, sobre todo a nivel de libros de texto, haya de ser algo semejante al **CD-ROM que permite mezclar de forma interactiva texto, imagen dinámica y programas informáticos adecuados al campo de estudio en cuestión.**. Por lo tanto, es de resaltar que la visualización es de gran utilidad en el proceso aprendizaje y por tal razón se requiere que el estudiante la valore . Por lo anterior, conviene insistir en visualizar y en escribir cotidianamente las expresiones formales para pasar con más facilidad de un tipo de lenguaje a otro.

2.1.3.5 VISUALIZACIÓN SIN Y CON ORDENADOR

Los gráficos son auxiliares de la imaginación y nos ayudan a retener las relaciones que consideramos útiles para una mejor comprensión de los temas tratados y de los problemas que intentamos resolver.

Pero con la aparición de instrumentos potentes, como los mediadores con sistemas algebraicos computacionales, cuya influencia sobre el quehacer matemático se va dejando sentir en muchos aspectos, se generaliza el uso de programas de cálculo simbólico, tales como el Derive con capacidades de representación versátiles e interactivos aplicables en todos los campos de la matemática actual, y ésto está cambiando la forma misma de practicar tanto las actividades de investigación como las de la interacción enseñanza - aprendizaje a todos los niveles. Un ejemplo podría ser que ante la tarea de representar una curva en el plano se le aconsejaba al alumno que comenzara por representar cortes con los ejes, posibles asíntotas horizontales y verticales, a fin de tener una primera idea sobre la curva. Con cualquier programa de cálculo simbólico actual, dada una función compleja, el alumno puede obtener inmediatamente una gráfica de ella, con la que las respuestas a muchos interrogantes quedan sugeridas. El alumno, en diálogo con la máquina, puede a través del programa, perfilar las respuestas exactas a tales cuestiones, esto ha permitido la exploración de temas tales como el de los sistemas dinámicos y la geometría fractal. Por tanto, cada vez van surgiendo más programas dedicados a promover las facilidades y aplicaciones de la visualización en diferentes campos de la matemática, lo cual contribuye a facilitar el progreso de la tendencia hacia la revitalización de la visualización en todos los quehaceres de la matemática, y muy en particular, en el cálculo y el álgebra lineal.

Parece claro que el paso próximo serán las nuevas máquinas de calcular, que tengan incorporados programas de cálculo simbólico (CAS) y programas con fines específicos (la TI-92 incorpora algo análogo al programa Derive en el cálculo simbólico y el programa Cabri para geometría plana de tipo sintético). La presencia de tales instrumentos en el aula habrá de modificar sustancialmente la enseñanza y los modos de evaluación. Hablamos de evaluación porque en un taller de cálculo, ya no es temerario exigir al estudiante el cálculo de la primera y segunda derivadas de una expresión racional compleja. Esto se lo dejamos a la calculadora y al alumno le exigimos interpretación de la gráfica.

Relación entre visualización, modelación y el proyecto

La visualización en matemáticas se refiere a una forma específica de atender explícitamente a las posibles representaciones concretas que permitan decodificar, develar, las relaciones abstractas que puedan interesar a los matemáticos. La visualización es una de las áreas de crecimiento más acelerado en la investigación matemática, es una forma de representación que cuidadosamente estudiada, ofrece la posibilidad de encontrar patrones ocultos en las estructuras y formulaciones matemáticas.

"La representación visual da lugar a intuiciones profundas que con frecuencia se mantienen ocultas en los enfoques estrictamente analíticos "[21]

La visualización contribuye a aspectos fundamentales de la actividad matemática, debido a su naturaleza misma, la cual trata de explorar y explicar las estructuras de la realidad. Precisamente, el análisis matemático nació del intento de explicar las semejanzas que nuestras percepciones abstraían de las situaciones relativas al cambio y transformaciones de las estructuras de las cosas en el tiempo y en el espacio.

En geometría por ejemplo se enseña el razonamiento deductivo, teoremas y demostraciones, pero sobre todo enseñar a visualizar los temas básicos para la comprensión exitosa del cálculo integral. La visualización es clave para la comprensión de la forma y ésta conlleva a la asociación con los temas de proporcionalidad y semejanza.

[21]STEEN LYNN Arthur. La enseñanza agradable de las matemáticas. Mexico,Limusa, 2001. p.13

Un buen ejemplo puede ser la siguiente «*Mostración sin palabras*»:

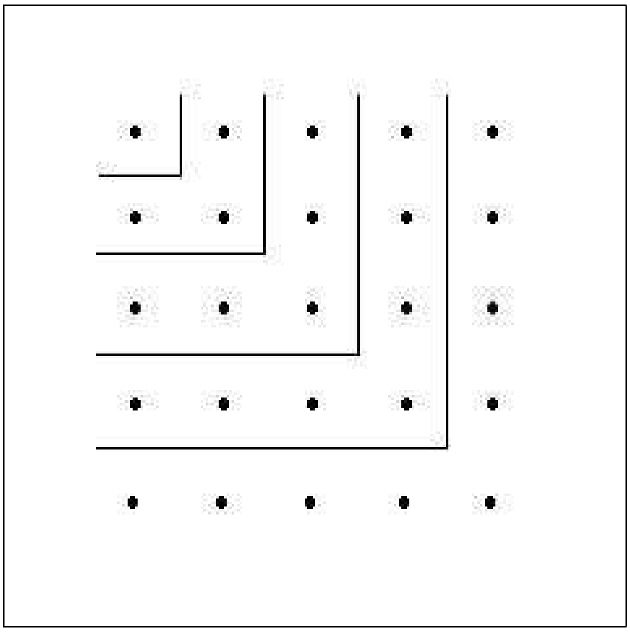


Figura 7

sumatoria de números impares

En la figura se ilustra

la representación de la sumatoria

de los números impares

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1 = n^2$

para $n \in Z, n \geq 1$

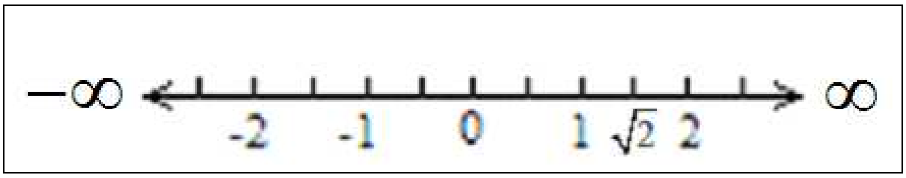


Figura 8
Un ejemplo de visualización ampliamente conocido es la recta numérica de los números reales

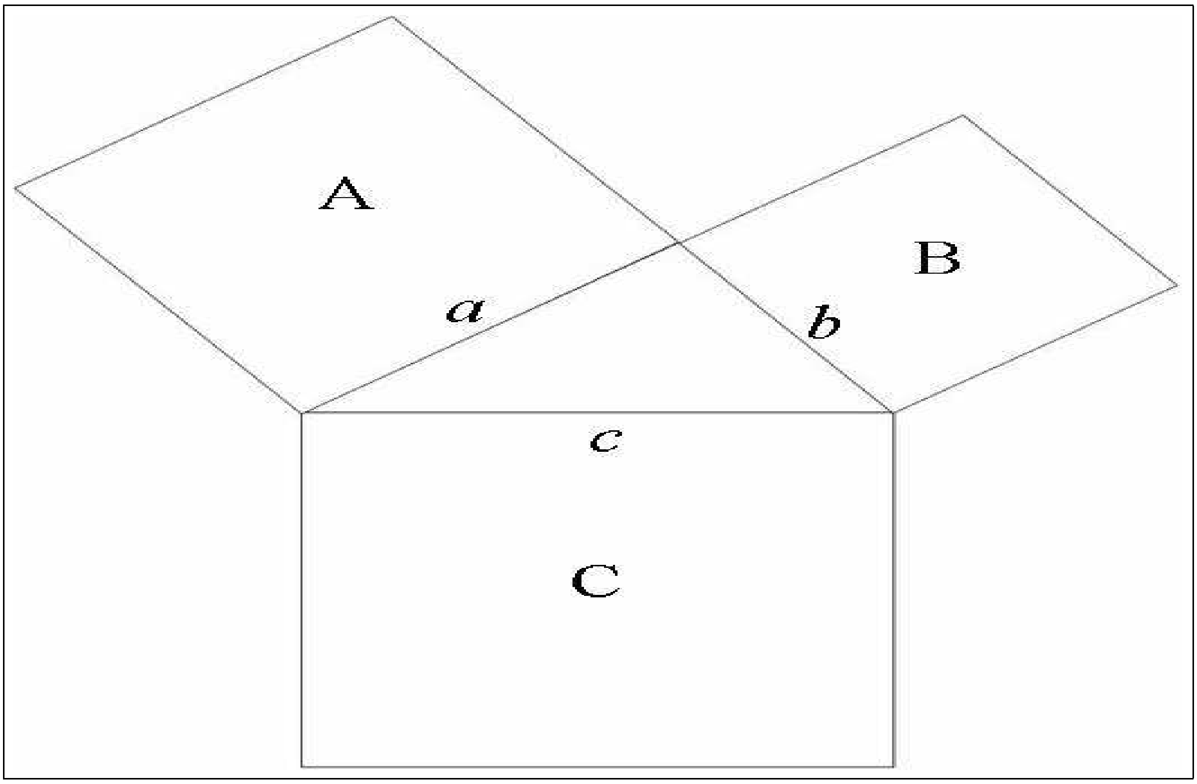


Figura 9
Otra visualización conocida es la del teorema de Pitágoras

Estos tipos de visualización son denominados isomórficos si a partir de ellos se deduce el hecho simbólico (relaciones matemáticas abstractas). Algunos otros, como los diagramáticos, los homeomórficos, analógicos muestran una revolución en el estudio de la geometría, el cálculo y el álgebra, por lo anterior tendrá que tenerse en cuenta que la visualización con el uso eficiente de mediadores requiere de nuevas propuestas curriculares que incluyan la modelación matemática. En este proyecto se hace una propuesta metodológica que utiliza la visualización isomórfica con tal fin.

Como en nuestra propuesta se incluye la modelación matemática, consideramos que obtener modelos a través de visualizaciones no es tarea fácil:

« *obtener el modelo que cumple una determinada función es en definitiva abstraer lo esencial de una determinada función y, como sucede con la adquisición de otros conceptos matemáticos, se trata de una tarea difícil*» [22]

Como se verá, en la mayoría de los textos que trabajamos hoy en día, planteamos al estudiante: Una función lineal $y = mx + b$ como modelo o una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ y procedemos a visualizar y a apoyar cada lugar geométrico con ejercicios. Es probable que un camino inicial para lograrlo sea el manejo de tablas suficientemente condensadas y explícitas. Entre otras cosas porque una tabla es una herramienta fundamental en el manejo de datos dado que: [23]

- Organiza la variedad de datos condensados.

[22]AZCARATE,Carmen y DEULOFEU,Jordi. Funciones y gráficas. EnMATEMÁTICAS: Cultura y Aprendizaje, No 26. Madrid,Sintesis,1996. p.82

[23]LONDOÑO B.,Oscar;SANDOVAL,Juan de Jesús y QUINTERO,María Eva. Manual de Estadística aplicada a la investigación cualitativa. Medellín,Nicolás Aristizabal,2002. p.49.

- Permite contrastar los puntos de vista diferentes a partir de datos al interior de la tabla.
- Permite identificar los datos que faltaron; un buen cuadro o una buena tabla sirven de soporte visual al análisis, explican al mismo tiempo que describen.
- Las tablas pueden facilitar la matematización de semejanzas entre los datos para agrupar adecuadamente los elementos homogéneos.

Recogiendo entonces las formas de representación (visualización y modelación) con el uso eficaz de mediadores, llegamos al estudiante para impulsarlo a desarrollar esquemas conceptuales propios para que haga significativo su propio aprendizaje.

Algunos autores afirman que el primer problema que plantea la cultura escolar se refiere a la utilidad de los contenidos; Peters [24] por ejemplo considera que "el aprendizaje de un contenido de enseñanza no puede considerarse educativo más que cuando, en torno a ese contenido, el alumno es capaz de desarrollar esquemas conceptuales propios. "

Una forma de desarrollar los esquemas conceptuales propios es relacionando actividades escolares con experiencias del mundo que rodean al estudiante. Aquí es fundamental la labor de acompañamiento del profesor.

[24] VALLEY, Peters. Esquemas conceptuales. En Cuadernos de pedagogía,No 309. Mexico,Fontalba,(enero 2002). p.88

"En la misma línea, diversos autores coinciden en señalar que la cultura es algo que nos debe hacer capaces de entender el mundo que nos rodea. "[25] Consideremos que es necesario seleccionar bien los contenidos y las actividades académicas en función de experiencias que desarrollen esquemas conceptuales propios en el alumno. Es así, por tanto, que se deben seleccionar los métodos más acordes con los objetivos; y, sin lugar a dudas, bien importante es, alcanzar una actitud positiva, a partir de estrategias eficaces para que el educando siga aprendiendo a lo largo de su vida. Para el logro de este propósito este grupo ha introducido una propuesta llamada "modelación de funciones en un entorno de la visualización para el aprendizaje significativo "que busca construir el concepto de función a través de experiencias reales de los estudiantes por medio de la experimentación y articular así el aprendizaje de los contenidos a partir de la experiencia. Obviamente, como toda experimentación, hay una gran probabilidad de cometer errores, pero éstos, no se utilizan como aspectos negativos, sino, todo lo contrario, serán como un material exploratorio previo al aprendizaje.

Se observa entonces que este trabajo tiene una tendencia constructivista del conocimiento, puesto que, para la teoría constructivista los conocimientos deben construirse y no reproducirse. Los alumnos participan activamente en la construcción de sus estructuras del conocimiento y además, todo lo que el alumno aprende, depende del conocimiento previo, de lo significativo que lo haga y de cómo la nueva información es interpretada por él; aquí es donde entra a jugar un papel fundamental la visualización, desde lo pedagógico **"toda labor pedagógica busca seducir, es decir,hacer interesar para lograr identidad con cierto campo disciplinario"**. y se seduce a partir de la imagen dinámica, estática, jerárquica y coloreada para ver lo obvio y sobre todo, lograr un pensamiento visual estructurado con el cual se extraiga información

[25]Ibid., p.88,89

fina y prepare al estudiante para ver cosas donde otros no ven nada. Además, la visualización conlleva a cosas como la lectura e interpretación de códigos en matemáticas y por lo tanto convierte al docente en un profesor de lectura. Se recuerda entonces que lo que se aprende en un momento determinado depende tanto del nivel de competencia cognitiva como de los conocimientos que se han podido construir en el transcurso de las experiencias previas. Se puede elaborar un nuevo contenido de aprendizaje por medio de los siguientes aspectos, tal como lo indica Monereo [26]:

- La enseñanza debe partir de actividades reales que faciliten su posterior tranferencia pero que al mismo tiempo integren la complejidad que caracteriza a las situaciones del mundo real. Por este motivo, se han de buscar actividades contextualizadas que favorezcan el aprendizaje. Por lo tanto,en este proyecto vemos conveniente partir de experiencias previas y acercarnos poco a poco a procesos de modelación matemática.

- La enseñanza debe favorecer una búsqueda activa y continua del significado por parte del alumno. El conocimiento se construye a partir de la experiencia.

- El error es considerado como una posibilidad de autovaloración de los procesos realizados y permite al mismo tiempo la reflexión del alumno para la mejora de los resultados. En este sentido, el error no es considerado como negativo sino como paso previo para el aprendizaje, por ello, para nuestro proyecto, el error es un obstáculo cognitivo que ayuda al alumno a encontrar explicaciones apropiadas en los procesos de aprendizaje.

- Los elementos motivacionales para llevar a cabo aprendizajes significativos son también fundamentales.

[26] http://www.geocities.com/haralfano/normal/files/Solucion_de_problemas.doc

Por ello, para apoyar la necesidad de la durabilidad y significatividad del cambio cognitivo producido en los alumnos vemos pertinente la afirmación de Jolibert en el sentido de la construcción:

> Es construyendo que uno se transforma en creador, y no aprendiendo primero a crear para poder construir después; no es legítimo instaurar una separación en el tiempo, ni en la naturaleza de la actividad entre aprender a construir y construirlas. Cuando un niño se enfrenta a una situación de la vida real, donde el requiere elaborar un sentido (para su información y su placer), el niño pone en juego sus competencias anteriores y debe elaborar nuevas estrategias para llegar al final de la tarea[27]

Para Mario Carretero,

El constructivismo es la idea que sostiene que el conocimiento es una construcción propia que se va haciendo día a día, como resultado de la interacción tanto de los aspectos sociales y cognitivos, como de los afectivos en el individuo [28]

Pero esta construcción que se realiza poco a poco depende de la representación inicial que tengamos de la nueva información y de la actividad interna o externa que desarrollemos al respecto, es decir de las formas de visualización. El conocimiento no se podrá construir (según esta teoría) si no se dispone de esquemas, que como representaciones mentales, posibiliten la función de aprender.

Estos esquemas son las herramientas que sirven de instrumentos para elaborar fun-

[27] Jolibert, Josette. Op.cit., p.22

[28] CARRETERO, Mario. Constructivismo y Educación. España, Luis Vives, 1993. p.45

ciones elementales o muy complejas y específicas en el caso de nuestro proyecto.

Al estudiante por lo tanto, hay que darle la oportunidad de ver y oír muchas cosas, visitar sitios y tener vivencias de varias situaciones, viajar, leer, conversar, escudriñar, manipular, observar, esto es, que el docente es quien debe acompañar al estudiante para construir esquemas o transformarlos.

El constructivismo es entonces una teoría de conocimiento referida a la relación entre el sujeto (conocedor) y el objeto (conocible), a la naturaleza del producto de esta enseñanza (conocimiento) y a la naturaleza de la realidad. (lo cognoscible).

Sin embargo para los empiristas la realidad objetiva se descubre por medio de los sentidos y para los racionalistas se descubre mediante el uso de razón crítica, para los kantianos el ser humano al interactuar con la realidad sólo puede conocer las manifestaciones fenomenológicas de la misma en una construcción que surge de las interacciones entre el sujeto y el objeto [29]

Diferentes tendencias de la investigación psicológica y educativa comparten este enfoque constructivista. entre ellas se encuentran las teorías de Peaget, Vygotsky, Ausubel y la actual Psicología cognitiva; no puede decirse por tanto que es un término unívoco por el contrario, puede hablarse de varios tipos de constructivismo con lo cual el problema empieza por lograr una definición integradora. Veamos una propuesta dada de la definición de constructivismo en educación:

“Es una explicación acerca de cómo llegamos a conocer en la cual se concibe al sujeto

[29]BUSTOS C,Félix. constructivismo epistemológico, psicológico y didáctico. Bogotá,Magisterio,1994. p.7

como un participante activo que, con la ayuda de mediadores, establece relaciones entre su bagaje cultural y la nueva información para lograr reestructuraciones cognitivas que le permiten atribuirle significado a las situaciones que se le presentan." [30].

De cada uno de los elementos que se trabajan en esta definición, el enfoque constructivista tiene importantes implicaciones; en primer lugar, hay que propiciar la activación de los recursos personales: Cognitivos, afectivos y valorativos. Convertir el proceso educativo en un diálogo más que en un monólogo en el cual el educador o un sistema informatizado suministre información. El otro elemento ampliamente destacado por Ausubel (Ausubel, Novak y Hannesian, 1968) es la necesidad de partir de los conocimientos previos del aprendiz. Esta idea de tener en cuenta los conceptos previos se destacan en la teoría cognitiva de "aprendizaje significativo.".

2.1.4. Aprendizaje significativo

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE AUSUBEL

Para Ausubel, es el aprendizaje en donde el alumno relaciona lo que ya sabe con los nuevos conocimientos, es decir sus experiencias representan un factor de mucha importancia, es por ello que el docente debe enfocar su labor facilitadora y enseñar en consecuencia de lo que descubra sobre lo que el alumno ya conoce.

"Ausubel plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado

[30]RIOS,Fabián et al.Modelos Didácticos diseñados con tecnología informática para la construcción y aprendizaje de conceptos básicos en ciencias naturales y matemáticas. Medellín,s.e,1999. p.22,23

campo del conocimiento, así como su organización." [31]

Para la matemática este tipo de aprendizaje representa un modo eficaz para lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente en base a las experiencias del alumno, ello significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático el docente debe explorar lo que el alumno conoce sobre el tema, solo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a sus estructuras cognitivas.

En este tipo de aprendizaje se pretende buscar que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo hacia la autonomía al momento de pensar, de modo tal, que desarrolle su inteligencia, relacionando de manera integral lo que tiene y conoce respecto a lo que se quiere aprender.

Debe todo docente de matemática promover que el alumno trabaje y construya sus propios aprendizajes, que caminen a ser autónomos, que integren sus experiencias a otras ya conocidas, que elijan lo que desean aprender y no buscar sólo el desarrollo de la memoria y la repetición como alternativa de aprendizaje.

El aprendizaje significativo persigue entre otros aspectos, romper con el tradicionalismo memorístico que busca y desarrolla solamente la memoria y la repetición; el aprendizaje significativo se preocupa por los intereses, necesidades y otros aspectos que hacen que lo que el alumno desea aprender tenga significado y sea valioso para él, de allí vendrá el interés por el trabajo y las experiencias en el aula.

Es por todos conocidos que si el aprendizaje se logra de modo memorístico y mediante la repetición al poco tiempo se olvidará, más en matemática, ya que los nue-

[31] http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ausubel/

vos conocimientos se incorporarían en forma arbitraria en la estructura cognitiva del alumno y éste no lograría integrar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos, es por esto, que el alumno no concede valor a los contenidos presentados por el profesor y solo estudian para el momento. Por su parte, el aprendizaje significativo como se construye basado en lo que el alumno conoce, es una actividad donde éste puede desarrollar habilidades y recordar con facilidad de manera activa tal actividad de aprendizaje.

Podemos caracterizar el aprendizaje significativo por lo siguiente:

- Los nuevos conocimientos se fijan más fácilmente en las estructuras cognitivas del alumno.
- Relaciona los nuevos conocimientos con los conocimientos previos que tiene el alumno.
- Toma en cuenta los intereses, necesidades y realidades del alumno, de ahí su interés por aprenderlo, porque lo considera valioso.

Algunas de las ventajas del aprendizaje significativo para la enseñanza de la matemática son:

- El alumno tiene una retención más duradera del concepto matemático; este tipo de aprendizaje modifica la estructura cognitiva del alumno mediante reacomodos de la misma para integrar a la nueva información. Se presenta el caso cuando comparamos funciones de la forma $y = x^2$ y $y = 2^x$, en las cuales mediante procesos inductivos en la calculadora y en hojas de papel milimetrado, todos llegamos a la generalización: $y = x^n$ y $y = a^x$. Aquí establecemos claramente diferencia entre una función exponencial con $a > 1$ y una función potencia con $n \in \mathbb{Z}$. Los reacomodos se establecen en cuanto a los siguientes conceptos:

- Función exponencial: $y = a^x$ con dominio los reales y rango $y \in \mathbb{R}^+$
- Función potencia: $y = x^n$ con dominio los reales

Además, cuando relacionamos la función exponencial $y = a^x$ en problemas de aplicación de la vida real tenemos que considerar como variable independiente a x. Ejemplo: Una función de crecimiento $C(t)$ de la población mundial que se duplica cada 35 años, tiene como variable independiente a t.

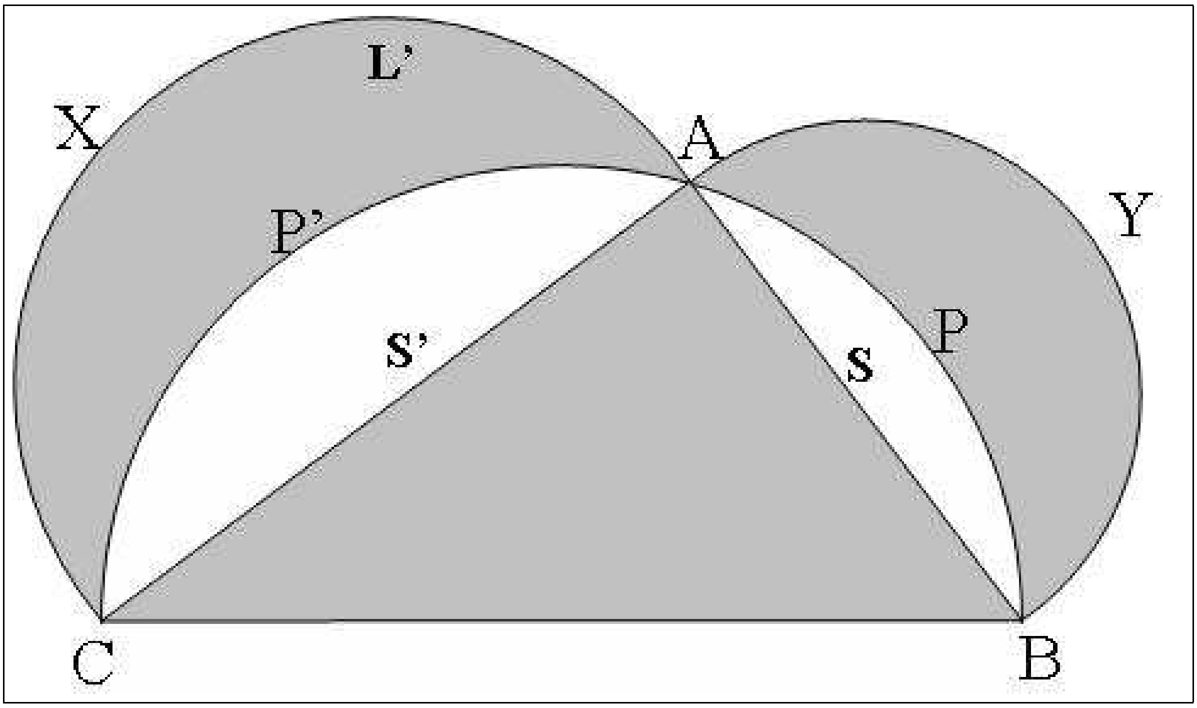
- El alumno puede adquirir nuevos conocimientos de la matemática con mayor facilidad relacionando los ya aprendidos con los nuevos en forma significativa, ya que al estar claramente presentes en la estructura cognitiva se facilita su relación con los nuevos contenidos.

  Tomemos aquí un ejemplo: Un caso espectacular se presenta con las lúnulas de hipócrates; éstas son las dos figuras comprendidas entre la semicircunferencia construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo como diámetro, y las construidas sobre los catetos. Veamos cómo podría el estudiante volver este conocimiento significativo.

Figura 10

Lúnulas de hipócrates.

$\overline{BC} = d, \overline{AB} = d_1, \overline{AC} = d_2,\ \overline{AC} \perp \overline{AB}$



1. Empezar a identificar figuras geométricas ya conocidas.
   - $\widehat{BAP'C}$ semicírculo sobre $\overline{BC}$(diámetro)
   - $\overline{BC}$: Hipotenusa de triángulo rectángulo ABC.
   - $\overline{AB}$:Cateto y diámetro del semicírculo $\widehat{BYA}$
   - $\overline{AC}$: Cateto del triángulo ABC y diámetro del semicírculo $\widehat{AXC}$
2. Identificar propiedades de esas figuras conocidas:
   - En el triángulo ABC: $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ (Teorema de Pitágoras donde $d = \overline{CB}$, $d_1 = \overline{AB}$ y $d_2 = \overline{AC}$)
   - $S' + L' = \frac{1}{2}\pi(\frac{d_2}{2})^2$;

     $S + P = \frac{1}{2}\pi(\frac{d_1}{2})^2$;

- Area de $\widehat{BAP'C} = \frac{1}{2}\pi(\frac{d}{2})^2 =$
  $\frac{1}{2}\pi(\frac{d_1^2+d_2^2}{4}) =$
  $\frac{\pi}{8}(d_1^2 + d_2^2)$

3. Comprobar la equivalencia:

   $P + L' = T$

   $\frac{\pi}{2}(\frac{d_1}{2})^2 - S + \frac{\pi}{2}(\frac{d_2}{2})^2 - S' =$

   $\frac{\pi}{8}(d_1)^2 + \frac{\pi}{8}(d_2)^2 - (S + S') =$

   $\frac{\pi}{8}((d_1)^2 + (d_2)^2) - (S + S') =$

   $\widehat{BAP'C} - (S + S') = T$, T es el área del triángulo rectángulo ABC.

4. **Conclusión:** Si se construyen tres figuras semejantes $\widehat{BAP'C}$,$\widehat{BYA}$ y $\widehat{AXC}$ sobre los tres lados $\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo, el área T de la figura construida sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de las áreas de las figuras P y L' construidas sobre los catetos.

- La nueva información sobre los conceptos matemáticos, se conserva y no se olvida fácilmente pues ha sido de interés para el alumno.

- Es un aprendizaje activo, pues se construye basados en las acciones y las actividades de aprendizaje de los propios alumnos.

- Es personal, pues la significación de los aprendizajes depende de los recursos cognitivos del alumno, de sus necesidades, de su interés, de su realidad.

Para lograr un aprendizaje significativo en una clase de matemática debemos tener presente y recordar a todo momento que en este tipo de aprendizaje no se debe forzar la experiencia de aprendizaje y el trabajo del alumno a lo que nosotros queremos, sino a sus necesidades e intereses, es por ello que las experiencias y conocimientos previos, deben ser nuestro punto de partida en este proceso y recordar que la etapa de razonamiento que tiene el alumno es importante, pues no podemos pretender que construya un aprendizaje si previamente no ha adquirido conocimientos del tema para relacionarlos con los nuevos. Debe el docente tener presente que el material presentado exige una estructura interna organizada, que sea susceptible de dar lugar a la construcción de significados y que exista la posibilidad de que el alumno conecte, el conocimiento presentado, con los conocimientos previos ya incluidos en su estructura cognitiva y también que el conocimiento adquirido sea plausible para que el mismo estudiante logre automotivación.

TIPOS DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

1. Aprendizaje subordinado

   - Inclusión derivativa: No se cambian los atributos de criterio de un concepto determinado, pero se reconocen nuevos ejemplos como relevantes.

     Ejemplo:

     Idea establecida: "Las aves vuelan" (se extiende este concepto aunque hay excepciones)

     - El colibrí vuela, es un ave
     - La gaviota vuela, es un ave
     - El mirlo vuela, es un ave
     - "La lechuza vuela", es un ave (nuevo ejemplo)

   - Inclusión correlativa:

     La nueva información es vinculada a la idea establecida pero es una modificación o una imitación de ésta. Los atributos pueden ser extendidos o modificados con la nueva inclusión correlativa.

Ejemplo Idea establecida: "Las aves vuelan"(se extiende este concepto aunque hay excepciones)

- El colibrí vuela, es un ave
- La gaviota vuela, es un ave
- El mirlo vuela, es un ave
- La lechuza vuela, es un ave
- El pingüino no vuela, nada, pero igual es un ave (se extiende este concepto aunque hay excepciones)

2. Aprendizaje supraordinado:

Las ideas se reconocen como ejemplos más específicos de la nueva idea, que se define a través de un conjunto de criterios que abarcan a las ideas supraordinadas.

Ejemplo

Idea nueva: **Las aves se caracterizan por tener el cuerpo** recubierto de plumas, algunas están adaptadas al vuelo y otras al desplazamiento por agua.

Ideas establecidas:

- El colibrí vuela, es un ave adaptada al vuelo (ejemplo más específico).
- La gaviota vuela, es un ave adaptada al vuelo (ejemplo más específico).
- El mirlo vuela, es un ave adaptada al vuelo (ejemplo más específico).
- La lechuza vuela, es un ave adaptada al vuelo (ejemplo más específico).

- El pingüino no vuela, nada, pero igual es un ave adaptada al desplazamiento por agua (ejemplo más específico).

3. Aprendizaje combinatorio:

   La nueva idea es vista en relación con otras ideas preexistentes, pero ésta no es ni más inclusiva ni más especifica que éstas. Se considera que la nueva idea tiene algunos atributos de criterio comunes a las ideas pre-existentes.

   Ejemplo:

   Idea nueva: **Algunas aves están adaptadas al vuelo y otra al desplazamiento por agua** se relaciona con la idea pre-existente. **Algunos mamíferos están adaptados al vuelo y otros al desplazamiento por agua**

El aprendizaje significativo y el proyecto

Este trabajo de investigación, apuntó siempre al logro de aprendizaje significativo en un tema tan fundamental como el de funciones. Para ello, como el lector ha venido observando utilizamos formas de representación (visualización y
modelación) y el uso eficiente de mediadores, entendidos éstos como herramientas materiales(calculadora, software, hojas milimetradas, etc) y signos(mediadores más sofisticados como el lenguaje).

2.1.5. Modelación matemática

"Un **modelo matemático** es una representación simplificada de un aspecto de la realidad que incluye alguna entidad matemática." [32] y la "**modelación matemática**

[32]http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/ Modelizando %20en %20matematica.pdf

o la construcción de modelos es el proceso completo que conduce desde la situación matemática real original hasta un modelo matemático." [33]

Teniendo en cuenta los conceptos de modelo matemático y modelación matemática debemos aclarar el término modelo para entender posteriormente las clases de actividades que se desarrollarán con los estudiantes:

"Hay que tener en cuenta que el término modelo no se debe tomar literalmente. Los modelos que hacen los estudiantes se pueden referir a una situación modelo, a un esquema, a una descripción o a una forma de simbolizar".[34]

Ejemplo: ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Un estudiante de grado noveno describió su solución de la siguiente manera:

> Ensayé con varios polígonos trazando todas sus diagonales y pude darme cuenta que desde un vértice solamente podía trazar un número de diagonales igual al número de vértices del polígono menos tres, repitiendo esto para cada uno de los vértices, noté que cada diagonal se trazaba dos veces; entonces el número total de diagonales de un polígono de n lados es igual a la mitad del producto $\frac{1}{2}n(n-3)$.[35]

Aquí vemos que el estudiante ha modelado el problema planteado por medio de una descripción.

[33] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Op.cit., p 98

[34] http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/Modelizando %20en %20matematica.pdf

[35] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Op.cit., p.101

Algunos autores también hablan del concepto de "modelización matemática":

"Modelización: Es el proceso de formular comportamientos del mundo real en términos matemáticos. En el proceso de la modelización matemática lo que se hace normalmente es **construir una descripción de un fenómeno de la vida real en términos matemáticos** , es decir, estamos creando un segundo mundo en el cual considerar una situación." [36]

Tanto la modelación como la modelización matemática hablan de una interrelación entre el mundo real y las matemáticas, sin embargo en el ámbito educativo se resalta el proceso de construcción del modelo matemático (modelación). Este proceso de construcción de modelo no es tan sencillo según afirman algunos autores, entre los cuales se destacan Hans Freudenthal [37], Andrés de la Torre [38] y otros.

[36]JODAR SANCHEZ, Lucas. Op.cit., p.94,95.

[37]http://www.google.com.co/search?hl=es&q=freudenthal+hans +%22construcci%C3%B3n+de+modelos%22&spell=1

[38]DE LA TORRE,Andrés. Modelización del espacio y del tiempo. Medellín,Universidad de Antioquia,2003. 289p

Estos autores coinciden en que es dificultoso que el alumno pueda crear un modelo matemático por sí mismo por lo que se hace necesario que:

- El docente explique previamente en que se basa el modelo matemático que se presenta, su utilidad, sus puntos débiles, etc.
- El conjunto de modelos matemáticos hayan sido discutidos en clases anteriores por un profesor o por un grupo de profesores de materias afines.
- Los modelos presentados por el profesor y que deben ser valorados a posteriori, no disten demasiado de los previamente analizados. Esto significa que los alumnos puedan transferir sus construcciones anteriores en la interpretación y utilización del modelo matemático presentado, mostrando así las competencias adquiridas en esta metodología de trabajo.[39]

Se considera que el alumno a través de la modelación matemática intenta aprender matemáticas "haciendo matemáticas a través de la construcción de modelos,"[40] lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria. La resolución de problemas se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación.

Los modelos matemáticos pueden estar referidos:

- A su función (descriptivos, predictivos, normativos)
- A su estructura (icónicos, analógicos, simbólicos)

[39] http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/Modelizando %20en %20matematica.pdf

[40] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. La Modelación. Op.cit., p.97

- Al tiempo (Estáticos y dinámicos)
- A su incertidumbre (Probabilísticos y determinísticos)

En este proyecto hemos apostado más por los analógicos, en ellos hay un gran paralelismo con el sistema que se está modelando y en términos elementales, hay más procesos isomórficos.

Veamos algunos ejemplos:

1. ejemplo elemental de un proceso inicial de modelación para estructura polinomial: Sea $y = x^2 - 1$, donde $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ son respectivamente la primera, la segunda y la tercera diferencia:

x	y	$\triangle 1$	$\triangle 2$	$\triangle 3$
0	-1			
		1		
1	0		2	
		3		0
2	3		2	
		5		0
3	8		2	
		7		
4	15			

   Llegamos a que $\triangle 3$ es constante y coincide con el grado de la función polinómica que es precisamente 2.

2. Sea $y = x^3 - 1$,

x	y	$\triangle 1$	$\triangle 2$	$\triangle 3$	$\triangle 4$
0	-1				
		1			
1	0		6		
		7		6	
2	7		12		0
		19		6	
3	26		18		
		37			
4	63				

Entonces $\triangle 3$ es constante y el grado del polinomio es 3

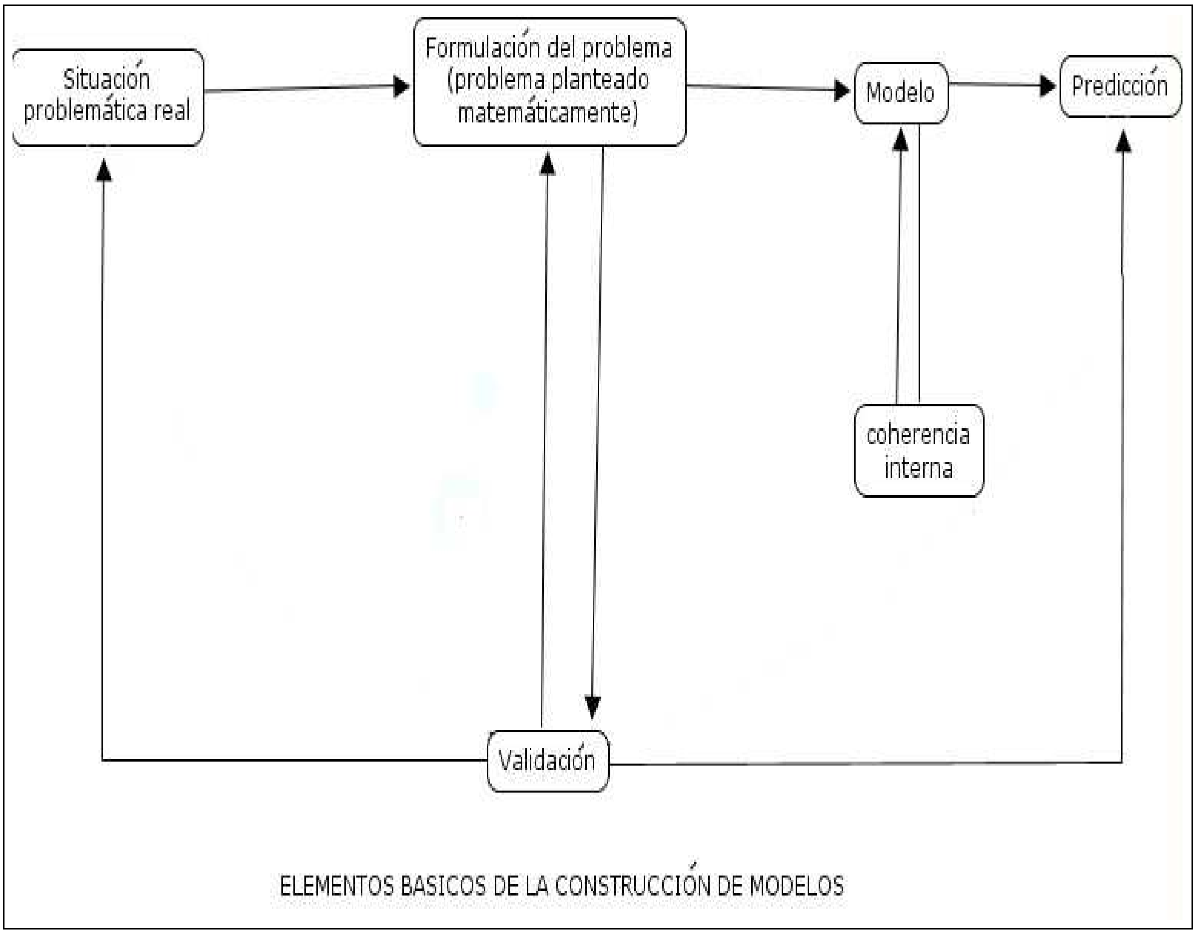


Figura 11

Elementos básicos de la construcción de modelos propuesto por Hans Freudental, matemático holandés.

El punto de partida de la modelación es una situación problémica real. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema.

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente deben trasladarse a las matemáticas y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta esencialmente de ciertos objetos, que corresponden a los elementos básicos de la situación original o del problema formulado, y de ciertas relaciones entre esos objetos, que corresponden también a relaciones entre esos elementos básicos.

Los computadores pueden utilizarse también para simular casos que no son aceptables desde el punto de vista analítico. Los resultados matemáticos tienen que ser validados; es decir se tienen que volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original. De esta manera el que resuelve el problema valida el modelo, si se justifica usarlo para el propósito que fue construido.

Cuando se consigue un modelo satisfactorio, éste se puede utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problemática real o modelado, para tomar decisiones y para emprender acciones.

Treffers y Goffree describen la modelación como **"una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas."** [41]

Estos autores proponen que para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente, pueden ayudar algunas actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Esquematizar

[41] http://www.google.com.co/search?hl=es&q=treffers+y+goffree+ %22 modelaci %C3 %B3n %22&btnG=B %C3 %BAsqueda&meta=

- Formular y visualizar un problema en diferentes formas
- Descubrir relaciones
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas (es el caso de nuestro proyecto)
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido

Luego el problema puede ser tratado con herramientas matemáticas para lo cual se pueden realizar actividades como las siguientes:

- Representar una relación en una fórmula
- Probar regularidades
- Refinar y ajustar modelos
- Utilizar diferentes modelos
- Combinar e integrar modelos
- Formular un concepto matemático nuevo
- Generalizar

Se ha visto que la mayoría de las definiciones que dan los libros son el resultado de un proceso de modelación que si se omite, obliga a los estudiantes a aprendérselas de memoria porque no ha formado el modelo mental en el cual la definición sí tiene sentido.

Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas, como se ha hecho tradicionalmente, se está privando al alumno de la experiencia de modelación, para llegar a esos sistemas simbólicos.

A continuación como una forma de comprensión global, resumiremos aquí, la clasificación de los distintos tipos de modelos, sin ser exhaustivos.

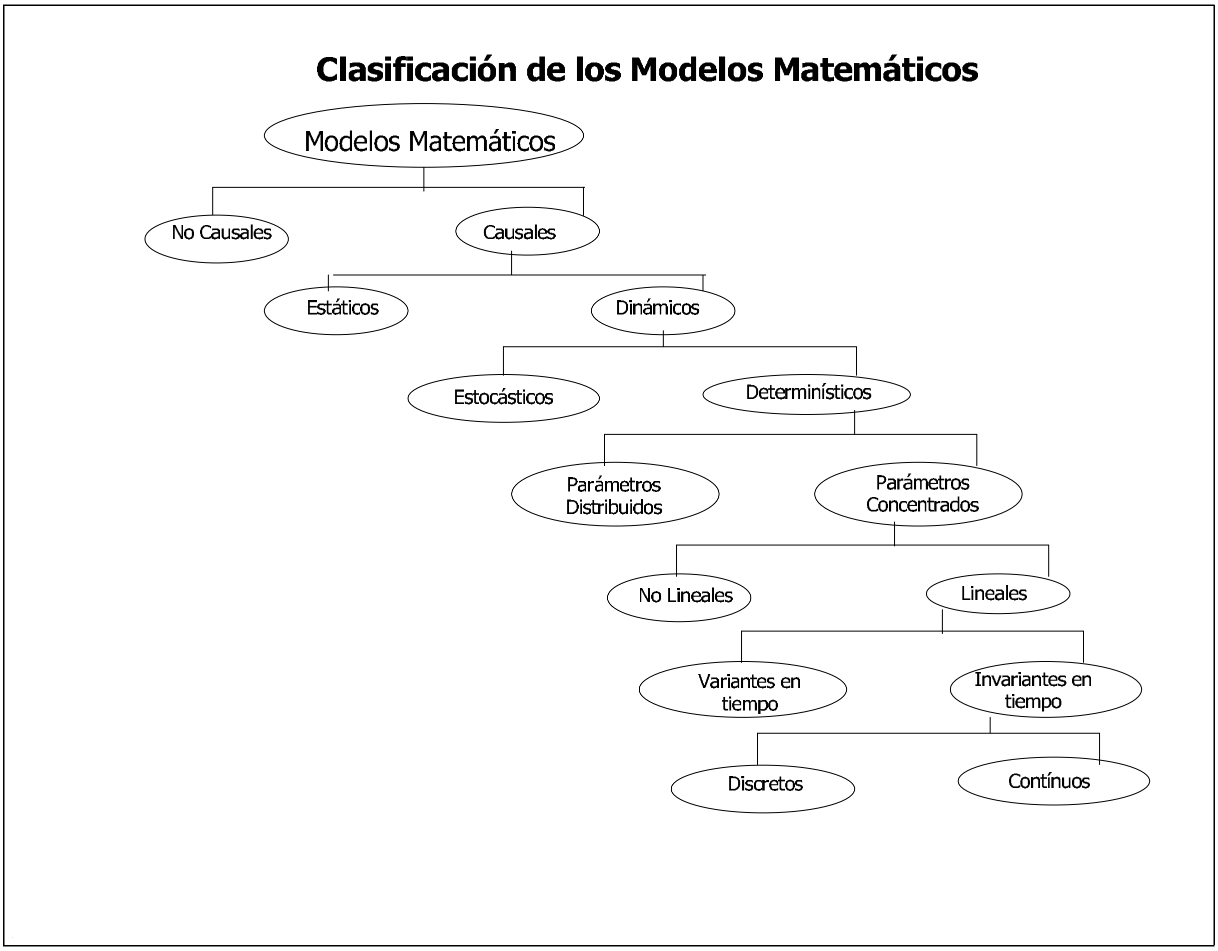


Figura 12

Clasificación de los modelos matemáticos

a. Modelos causales y no causales: el estado de un sistema causal depende sólo de las condiciones presentes y pasadas, pero no de las futuras. Los sistemas físicos son causales, pero uno puede concebir modelos de ciertos sistemas que no lo sean.

b. Modelos estáticos y dinámicos: El estado de un sistema estático depende sólo de las condiciones presentes, en cambio el estado de un sistema dinámico depende de lo que haya sucedido en el pasado. Los modelos de sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales o de diferencia.

c. Modelos estocásticos y determinísticos: En ocasiones se sabe que existen variables que afectan el sistema pero no es posible predecir el valor que éstas pueden tomar; una de las alternativas para enfrentar estos casos consiste en considerar que esta variable es aleatoria y buscar técnicas basadas en la teoría de probabilidades para analizar el sistema. Un modelo que incluya variables aleatorias es un modelo estocástico, mientras que modelos exentos de aleatoriedad se denominan modelos determinísticos.

d. Modelos Paramétricos Concentrados y Distribuidos: La mayoría de los fenómenos físicos ocurren en una región del espacio, pero en muchos ocasiones es posible representar ese fenómeno como algo puntual; ejemplo: para estudiar la atracción entre el sol y la tierra es posible representar toda la masa de cada uno de esos cuerpos concentrada en un único punto (su centro de gravedad).

   Sin embargo, otros fenómenos como la transmisión de ondas electromagnéticas o las olas en el mar requieren una representación que considere qué está sucediendo en cada punto del espacio, en éste caso se necesita un modelo de parámetros distribuidos en el espacio. A pesar de estos modelos existentes no son ajenas las tragedias como el maremoto ocurrido en las costas indonésicas en marzo del 2005.

   Los modelos de parámetros distribuidos implican ecuaciones diferenciales con derivadas parciales, por su parte los modelos de parámetros concentrados, requieren ecuaciones derivadas o ecuaciones de diferencia ordinaria.

e. Modelos Lineales y no Lineales: La linealidad es un propiedad que pueden tener o no la funciones; realmente se trata de dos propiedades agrupadas bajo un mismo nombre. Dada una función $y = f(x)$ éstas propiedades son:

1. Proporcionalidad: es igual calcular la función en un argumento amplificado por un factor que calcularla sobre el argumento y luego amplificar el resultado por ese mismo factor: $f(\alpha x) = \alpha(f(x))$

2. Superposición: es igual calcular la función en la suma de dos argumentos que calcularla por separado en cada uno de los argumentos y sumar los resultados.

   $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Entre los modelos no lineales podemos mencionar:

1. El modelo de proporcionalidad inversa: En general una función de proporcionalidad inversa es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $xy = k$ ó $y = \frac{k}{x}$. La representación gráfica corresponde a una curva llamada hipérbola equilátera.

2. El modelo cuadrático: Una función cuadrática es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $y = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$ y a, b, c son reales.

3. El modelo exponencial: Una función exponencial es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $y = a^x$ con $a > o$.

f. Modelos variantes e invariantes en el tiempo: Un modelo se dice invariante en el tiempo cuando las propiedades del sistema modelado se consideran constantes en el tiempo. En caso contrario se dice variante en el tiempo.

g. Modelos continuos y discretos: Para describir el comportamiento de sistemas dinámicos es posible definir la variable tiempo en dos formas distintas.

1. Tiempo continuo: se considera que el tiempo t es una variable continua, cuando puede tomar cualquier valor real. Las ecuaciones en las cuales la variable independiente es continua, generalmente se resuelven por ecuaciones diferenciales.

2. Tiempo discreto: se considera que el tiempo t es una variable discreta, cuando sólo toma valores en ciertos puntos de la recta real. Estos instantes están espaciados de forma regular en un intervalo T, en unidades de tiempos adecuados, que pueden ser años, meses, días, horas, minutos, segundos, entre otros, de esta forma t es una variable entera generalmente positiva.

Las situaciones en las que interviene una variable discreta son de gran importancia en las ciencias económicas. Las ecuaciones en las que la variable independiente debe ser discreta se denominan, ecuaciones en diferencias finitas con las cuales podemos resolver problemas propios de las matemáticas financieras.

La modelación y el proyecto

En este trabajo de investigación tuvimos en cuenta las características implícitas en el concepto de modelación matemática en el aprendizaje:

"La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera, construir conceptos matemáticos **en forma significativa**. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles." [42]

[42] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. La modelación. Op.cit., p101.

Para lograr que el estudiante adquiera los conceptos significativamente a través de la modelación, tuvimos en cuenta no solamente la interrelación entre el mundo real y las matemáticas (los conceptos de modelización y modelación tienen en común en sus conceptos esta interrelación), sino también el proceso de construcción del modelo matemático (modelación).

Aclaramos aquí que las dificultades que hemos encontrado con los estudiantes al intentar procesos de modelación, están referidos al sistema de estudio y aprendizaje que ellos ya traen desde mucho tiempo atrás. El alumno siempre ha tenido que:

- Entregar respuestas correctas.
- trabajar con el modelo ya pre-establecido.
- Aprobar la asignatura.
- Saberse la fórmula y aplicarla.
- Usar al máximo su memoria para resolver problemas o sino: "pasteliar y no dejarse coger".

Capítulo 3

OBJETIVOS DEL PROYECTO

3.1. OBJETIVO GENERAL

Lograr aprendizajes significativos en el área de funciones a través de las formas de representación visualización-modelación en estudiantes del primer semestre de farmacia de la Universidad de Antioquia (UdeA) a partir del uso eficaz de mediadores.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Lograr aprendizajes significativos en los estudiantes objeto de esta tesis a partir de la estrategia de la visualización, expresada en la asimilación e interpretación de expresiones funcionales.

2. Determinar el cambio de actitud de los estudiantes hacia la matemática en general a partir del uso sistémico de mediadores, al hacer el ejercicio de la visualización y modelación.

3. Mejorar la asimilación de contenidos en el área básica de funciones a partir del uso sistémico de mediadores como calculadoras gráficas y softwares (Excel y Derive).

Capítulo 4

HIPÓTESIS

H_0: No hay diferencias significativas en cuanto al aprendizaje significativo en estudiantes de los grupos control y experimental del primer semestre de Ingeniería y Química Farmacéutica, al aplicar respectivamente el método tradicional y el de talleres asociados a las formas de representación (visualización, modelación)

H_1: Si hay diferencias significativas en cuanto al aprendizaje significativo en estudiantes de los grupos control y experimental del primer semestre de ingeniería química farmacéutica, al aplicar respectivamente el método tradicional y el de talleres asociados a las formas de representación (visualización, modelación)

H_0: La aplicación de la estrategia visualización-modelación, cambia las actitudes de los estudiantes favorablemente hacia la matemática.

H_1: La aplicación de la estrategia visualización-modelación, no cambia las actitudes de los estudiantes favorablemente hacia la matemática.

Capítulo 5

DISEÑO METODOLÓGICO

5.1. CRITERIOS IMPLEMENTADOS PARA DESARROLLAR LOS TALLERES A PARTIR DE LA VISUALIZACIÓN Y MODELACIÓN

Esta investigación se llevó a cabo con estudiantes de primer semestre de las facultades de Ingeniería y Química Farmacéutica de la Universidad de Antioquia.

5.2. POBLACIÓN Y MUESTRA

La muestra se obtuvo en forma aleatoria de una población de estudiantes de primer semestre de Ingeniería y Química Farmacéutica de la Universidad de Antioquia. Los grupos seleccionados fueron dos de Química Farmacéutica y uno de ingeniería (diferentes programas de ingeniería). El personal o muestra seleccionada constó de 150 estudiantes. En general tanto hombres como mujeres eran estudiantes entre 16 y 21 años de clase media baja. La gran mayoría aunque trabajaron con calculadoras no posee computador en su casa, sin embargo, la Universidad tiene dotación de salas de cómputo. El software que viene en los equipos es variado: Excel, Derive, Gramática, etc.

5.2.1. Grupo experimental

Esta selección recayó en los estudiantes de Química Farmacéutica de las asignaturas de cálculo diferencial cuyo contenido tiene un tratamiento muy completo sobre funciones. Las edades de los estudiantes oscilan en términos generales entre 16 y 21 años. Su predisposición para las matemáticas es notable, la eluden y por lo general desean "pasarla como sea".

Académicamente es la primera vez que se enfrentan a un curso formal de cálculo y no han visto el prerrequisito natural, o sea, matemáticas operativas.

Otra característica de estos grupos es que son muy numerosos y no cuentan por lo general con aulas adecuadas.

El grupo de las 8 am estaba en el aula 1-434, no disponía de sillas suficientes, ya que asistían entre 58 y 60 alumnos y el aula estaba acondicionada sólo para 40 aproximadamente.El grupo de las 2pm tenía un auditorio en el 10-218 asistían entre 70 y 80 estudiantes, el tablero era muy pequeño, las luces eran deficientes y cuando llovía no se podía ingresar al aula. Los estudiantes de estas dos aulas de aproximadamente 150 estudiantes constituyeron el grupo experimental.

En el proceso académico el grupo experimental fue sometido a un trabajo intenso utilizando recursos tecnológicos apropiados en forma sistémica. Se espera que los estudiantes matriculados en ingeniería tengan una mejor predisposición hacia la matemática; pero no siempre es así, se afirma ya que los resultados de este trabajo de investigación ofreció una gran sorpresa: Se llegó a la conclusión de que no existen logros o atajos para llegar primero, que no tengan que ver con el trabajo sistémico y bien planeado.

5.2.2. Grupo control

Recayó esta selección en el grupo de Ingeniería de primer semestre, de asistencia miércoles y sábados en el horario 10am. Este grupo era de matemáticas operativas y tenía 30 estudiantes matriculados de clase media. Este grupo hizo el cubrimiento de los temas sobre funciones, igual que el grupo experimental, sólo que en forma magistral. También el grupo control recibió talleres sobre los mismos temas y fue sometido a las mismas pruebas pre-test y post-test que el grupo experimental.

5.3. El GRUPO EXPERIMENTAL: METODOLOGÍA

La metodología desarrollada con el grupo experimental constó de las siguientes etapas, que se llevaron a cabo en clase:

1. Se le dio al estudiante la información del tema de clase por escrito con su respectivo taller; este material fue leído por ellos individualmente en un tiempo prudente (los primeros minutos de la clase).

2. El profesor utilizando "mediadores" ilustra los elementos básicos del tema razonando conjuntamente con los estudiantes (en esta etapa de la clase el alumno es agente activo paralelamente a la orientación que da el profesor pues ya el alumno tiene indicios del tema a trabajar).

3. Los estudiantes en grupos, discuten los ejercicios del taller apoyados por el profesor (trabajan en búsqueda de procesos de solución: en este momento requieren esforzarse más en desarrollar procesos si se introducen aspectos interpretativos de la estrategia). Transitoriamente hay suspensión de las actividades para discutir en forma general el "comportamiento" de un problema o gráfico para una posible interpretación. Este proceso genera tensión en los alumnos, y aunque algunos se rezagan, la gran mayoría termina imponiendo el ritmo y una gran dinámica de trabajo. El resultado que empieza a lograrse en esta interacción se ve a medida que avanzamos en el hacer y en la reflexión de este hacer, a partir siempre de la lectura interpretativa del gráfico, la formulación del algoritmo y la asimilación del concepto. **No es lo mismo "dictar" clase que colocar al estudiante rápidamente en situación de aprendizaje**. Se les impulsa a enfrentar los problemas sin temor a equivocarse. Desarrollar gráficas utilizando mediadores como la calculadora y desde luego, hacer sus propias construcciones.

4. Al final de la clase se les recibió la solución de unos ejercicios propuestos para realizar en forma grupal denominada "hoja resumen". El objeto de esta hoja resumen fue el de ocasionar tensión en el estudiante, evitar que esté pasivo y obligarlo a ser más autónomo en su proceso de aprendizaje.

Con esta metodología se logró situar al estudiante como:

- Agente activo en la construcción de su propio aprendizaje.
- Elemento participante no sólo individual sino también grupal.
- Buscador de procesos de solución con el grupo de trabajo: Es aquí donde el sujeto se desarrolla en una actividad mediada socialmente (Vygostky) además se

esfuerza para obtener resultados.

- Usuario de la estrategia de la visualización de funciones a través del uso eficiente de los mediadores.

- Sujeto que "economiza" tiempo en el desarrollo de los temas si pone al profesor como "orientador" del proceso de aprendizaje del estudiante.

- Elemento que va apropiado de un trabajo más permanente y sistemático.

5.4. VARIABLES

5.4.1. Variables independientes

Metodología dinámica asociada a las formas de representación

La metodología del trabajo de investigación requirió del uso de "mediadores" y de las formas de representación (visualización-modelación) para su desarrollo. Recordemos que hay dos tipos de mediadores:

- Herramientas (mediadores simples como los recursos materiales). Ejemplos: talleres, calculadoras, cuestionarios, hojas de papel milimetrado, reglas y escuadras.

- Signos (mediadores más sofisticados, siendo el lenguaje el signo principal). Ejemplos: software, la palabra, cuadros sinópticos, mapas. (En nuestra tesis se utilizaron estos signos enmarcados dentro de la visualización y modelación.

5.4.2. Variables dependientes

1. Mejoramiento(manejo eficiente) de formas de representación (visualización-modelación)como habilidades fundamentales del pensamiento moderno.

2. Asimilación de contenidos en el área de funciones.

3. Mejoramiento de la actitud hacia la matemática.

5.5. INSTRUMENTOS UTILIZADOS EN LA MEDICIÓN DE ESTE PROCESO

1. Cuestionarios, talleres, software enfocados a la visualización y modelación de funciones con miras a lograr aprendizaje significativo en los estudiantes objetos de este proceso.

2. Una escala Likert para medir actitudes positivas o negativas de los estudiantes hacia la matemática en este proceso.

5.6. CLARIDAD Y PRECISIÓN SOBRE LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA PLANTEADA

Lo primero que se quiso lograr con el grupo experimental fue lo siguiente: que cada alumno discriminara, identificara y razonara sobre las características comunes o esenciales que tenía cada situación problemática.

No olvidemos que según Bruner[1] el proceso por el cual el ser humano clasifica los objetos y acontecimientos de una situación real, en forma significativa para él, como una forma de entender y discriminar lo que le rodea es lo que podríamos llamar la

[1]http://maestro.ucsc.cl/educacion/cursos/bte-111/material%20de%20clases/docs/5

conceptualización.

Ejemplo ilustrativo: Determinar el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono, conocido el número de lados. Para realizar esta actividad primero complete la tabla a partir de la siguientes figuras en el plano:

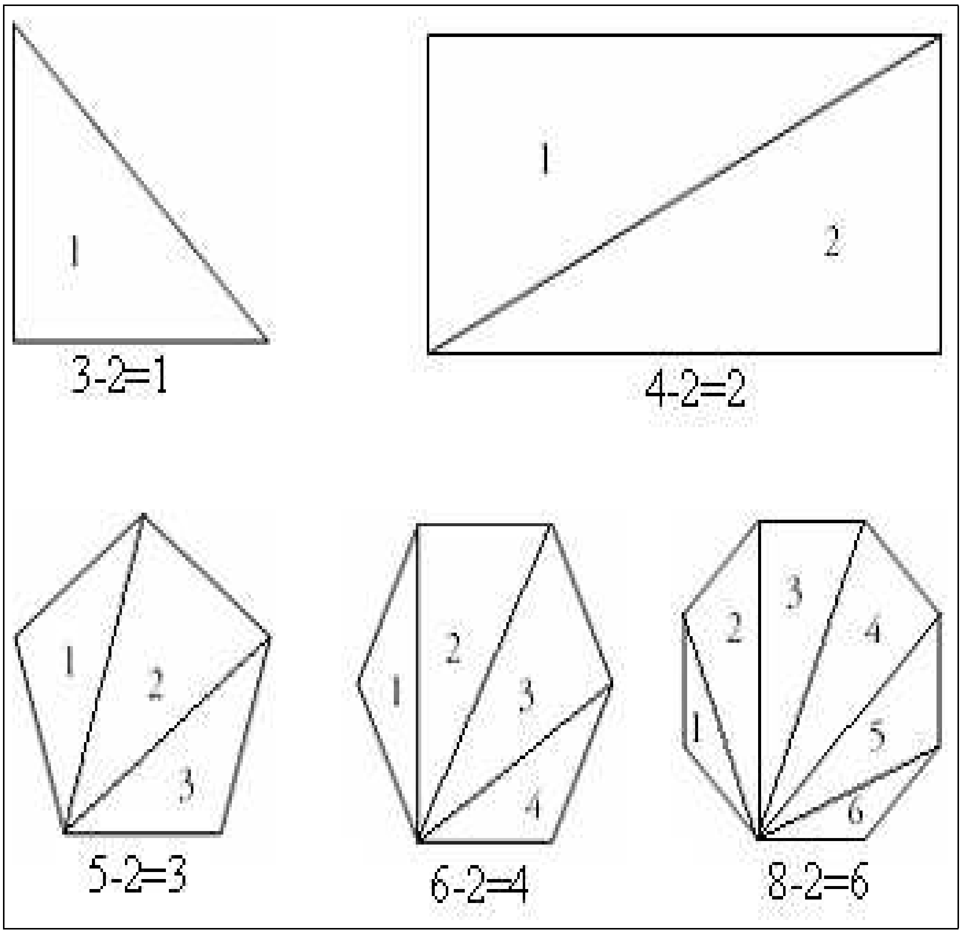


Figura 13

Formación de triángulos a partir de un mismo vértice

n : número de lados	3	4	5	6	......	n
número de triángulos	1	2	3	4	......	n-2
sumatoria de ángulos del polígono	2R	4R	6R	8R	......	(n-2)2R

Observación: Tenga en cuenta que la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es 2R , donde R es 90 grados

Lo segundo que se quiso fué lograr que el alumno relacione las variables dependientes e independientes en un mismo contexto.

Ejemplo: De acuerdo con el problema anterior responder:

- Si llamamos n el número de lados de un polígono y y la suma de los ángulos interiores de un polígono, enuncie una expresión algebraica que relacione estas dos variables y logre la generalización: **solución**

  $y = (n-2)180 = (n-2)2R$

- Si cada uno de los polígonos fueran regulares (polígonos equiláteros y equiángulos) se cumplirá la misma fórmula del anterior numeral? **solución** Si
- Cuál sería la expresión algebraica para hallar la medida de un ángulo interior α de un polígono regular? **solución:**$\alpha = \frac{(n-2)180}{n}$
- Cuántas diagonales tendría cada una de las figuras anteriores. Para resolver esto completa la siguiente tabla:

lados	*diagonales*
3	$3(3-3)/2 = 0$
4	$4(4-3)/2 = 2$
5	$5(5-3)/2 = 5$
6	$6(6-3)/2 = 9$
n	$n(n-3)/2$

- Existe una relación directa entre el número de lados (n) de un polígono y la suma de sus ángulos interiores?

  solución Si porque al aumentar n aumenta y: $y = (n-2)2R$

- Qué significado tiene para usted la expresión $f(n) = 2R(n-2)$?

  solución: Que la suma de los ángulos está en función de los lados

- Haga completar la tabla que contiene el número de lados, el número de vértices y el número de diagonales $f(n)$

n : número de lados	3	4	5	6	....	n
número de vertices	3	4	5	6	....	n
número de diagonales	0	2	5	9	....	$\frac{n(n-3)}{2}$

Observación: Tenga en cuenta que una diagonal en un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

Capítulo 6

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

6.1. RESULTADOS ESTADÍSTICOS

El análisis que se utilizó en estos resultados fue un Análisis de Varianza Multivariado de mediciones repetidas (antes / después)(1). Para el análisis se tomó como variable respuesta el promedio de las notas de los estudiantes antes (pretest) y después (postest); la variable dependiente fue la asimilación de contenidos referida a promedios que constó de tres factores a saber: grupo control, grupo experimental 01 y grupo experimental 02. debido a la influencia que podían tener variables como el sexo, edad, estrato socioeconómico(2); se hizo control de estas variables desde el modelo, resultando un modelo de análisis de covarianza de mediciones repetidas con tres factores y una covariable (edad). El modelo de análisis de varianza tiene unos supuestos que debieron ser validados(3), por consiguiente en el modelo multivariado de varianza, se validó el supuesto de homogeneidad de matrices de covarianza con el test de Box(4) (p-valor $= 0,079$), lo que indicó que las matrices de covarianzas fueron homogéneas entre los grupos de estudio, no fue posible evaluar el supuesto de multinormalidad entre los grupos, pero se evaluó de manera univariada mediante el test gráfico Normal Probability plot(5), el cual se cumplió a satisfacción entre los grupos. Se evaluó también la homogeneidad de las varianzas e independencia de los residuales del modelo mediante diagramas de dispersión y el test de Levene de homogeneidad de varianzas del error (p-valor$> 0,05$), lo cual evidenció varianzas homogéneas entre los grupos. El software utilizado fue SPSS 11.5.

En la tabla No 1 se muestran los resultados del análisis de varianza multivariado, donde la variable respuesta fue el promedio antes/después. Los resultados muestran que hubo diferencias estadísticamente significativas en los promedios de las notas antes y después (Pretest/postest) (p-valor$< 0,05$). También hubo diferencias entre promedios entre los grupos de estudio de manera global (p$< 0,05$). De manera multivariada no se detectaron diferencias entre los promedios por sexo, edad y estrato socioeconómico (E.S.E) (p$> 0,05$), lo que indicó que estas variables no fueron determinantes en los resultados finales de los promedios antes y después del experimento.

Tabla No 1. Resultados del Análisis de Varianza Multivariado de mediciones repetidas, usando el estadístico Traza de Pillai

Test Multivariado			
Efecto	Pillai's Trace	F	p-valor
Test/Postest	0,069	5,679	0,020
Test/Postest*SEXO	0,028	2,225	0,140
Test/Postest*ESE	0,014	0,556	0,576
Test/Postest*Grupo	0,087	3,676	0,030
Test/Postest*Edad	0,019	1,471	0,229

Mediante el test de Greenhouse-Geisser y el de Esfericidad se observó que dentro de los sujetos (pretest/postest), hubo diferencias entre los promedios antes/ después y entre los grupos (p$< 0,0196$), lo que evidenció que hubo diferencias estadísticamente significativas entre los promedios (Pretest/postest) y entre los grupos experimentales con el grupo de control.

Tabla No 2. Análisis de varianza de mediciones repetidas dentro de los sujetos en los resultados antes y después.

Tabla de efectos dentro de los sujetos						
Fuente	test	suma de cuadrados tipo III	df	cuadrado medio	Razón F	p-valor
Pretest/Postest*	Sphericity	2,5701	1	2.5701	5,6793	0,0196
	Greenhouse-Geisser	2,5701	1	2,5701	5,6793	0,0196
Pretest/Postest* GRUPO	Sphericity	3,3274	2	1,6637	3,6763	0,0299
Error(Pretest/Postest)	Sphericity	34,8454	77	0,4525		
	Greenhouse-Geisser	34,8454	77	0,4525		

Finalmente se muestran los resultados del análisis de varianza de mediciones repetidas entre los sujetos (tabla No 3). El test de la razón de la F.Fisher/Snedecor muestra efectivamente que entre los diferentes grupos existe diferencias estadísticamente significativas al 5 % entre al menos un par de promedios entre los diferentes grupos ($p < 0,05$).

Tabla No 3. Análisis de varianza de mediciones repetidas entre los sujetos en los resultados antes y después.

Fuente	suma de cuadrados tipo III	G.L	cuadrado medio	F-Radio	p-valor
Intercepto	34,093	1	34,093	18,521	0,000
SEXO	0,698	1	0,698	0,379	0,540
ESTRATO	6,517	2	3,259	1,770	0,177
GRUPO	14,831	2	7,416	4,028	0,022
EDAD	0,941	1	0,941	0,511	0,477
Error	141,743	77	1,841		

Para evidenciar estas diferencias y observar entre cuales pares de promedios se establecieron las diferencias, se realizaron test de comparaciones múltiples con el estadístico LSD (mínima diferencia significativa), a un nivel de significación de 5 %. Los resultados se muestran en la tabla No 4.

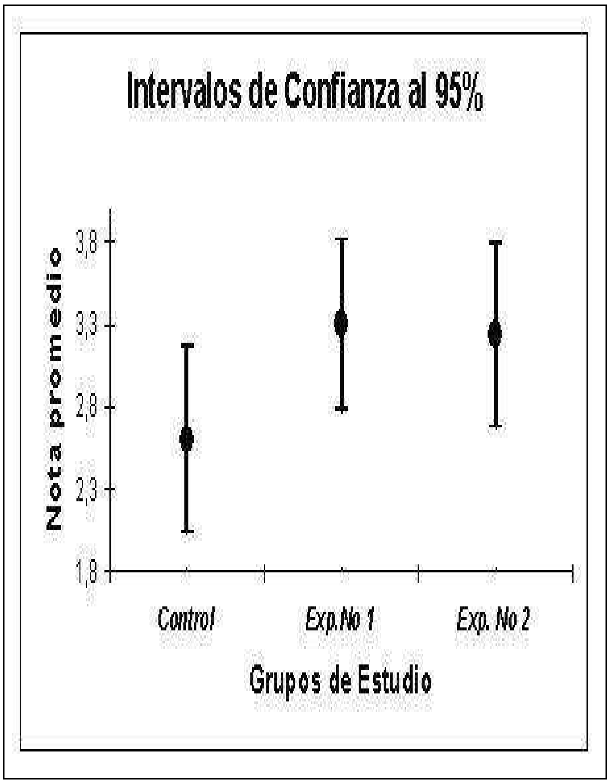
Los resultados en la tabla No 4 con asterisco (*), muestran que efectivamente hubo diferencias entre los dos grupos experimentales con el grupo de control (p$< 0,05$) y que no hubo diferencias entre los dos grupos experimentales (p $= 0,848 > 0,05$) mediante el test LSD a un nivel de significación de 0,05. Estas diferencias se muestran siempre a favor de los grupos experimentales. En los dos siguientes diagramas, se evidencian más claramente las diferencias entre promedios con los intervalos de confianza del 95 % para los diferentes grupos entre y dentro de los sujetos.

Tabla No 4. Resultados de las comparaciones múltiples de pares de promedios antes / después mediante el test Mínima Diferencia Significativa (LSD), para los diferentes grupos en el análisis.

		Diferencia promedio			intervalo de para la	confianza 95 % diferencia
(1) GRUPO	(J) GRUPO	(I-J)	Std.Error	P-valor	Límite inferior	Límite superior
control	Exp 01	-0,695(*)	0,28	0,015	-1,253	-0,137
	Exp 02	-0,641(*)	0,268	0,019	-1,175	-0,107
Exp 01	Exp 02	0,281	0,848	0,848	-0,506	0,604

Figura 14

“Intervalos de confianza para los promedios de las notas entre los tres grupos de estudio.



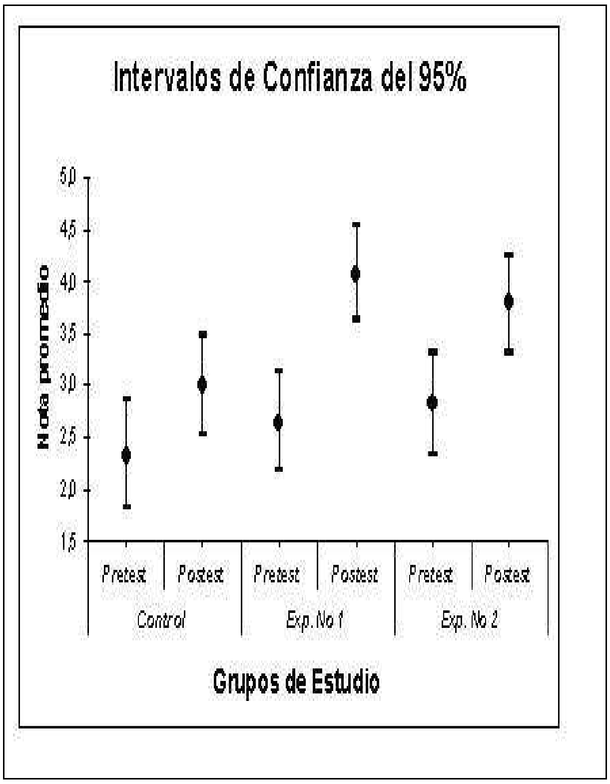


Figura 15

"Intervalos de confianza para los promedios de las notas entre los tres grupos de estudio entre los grupos pretest / postest.

6.2. ESCALA DE ACTITUDES

Uno de los métodos más conocidos para medir por escalas las variables que constituyen las actitudes es el **escalonamiento Likert** :

¿Qué es una escala Likert?

Este método fue desarrollado por Rensis Likert a principios de los treinta; sin embargo, se trata de un enfoque vigente y bastante popularizado. Consiste en un conjunto de items presentados en forma de afirmaciones o juicios ante los cuales se pide la reacción de los sujetos. Es decir, se presenta cada afirmación y se pide al sujeto que externe su reacción eligiendo uno de los cuatro puntos de la escala. A cada punto se le asigna un valor numérico. Así, el sujeto obtiene una puntuación respecto a la afirmación y al final se obtiene su puntuación total sumando las puntuaciones obtenidas en relación con todas las afirmaciones.

¿Cómo se construye la escala Likert?

En términos generales, una escala Likert se construye generando un elevado número de afirmaciones que califiquen al objeto de actitud y se administran a un grupo piloto para obtener las puntuaciones del grupo en cada afirmación. Así mismo, debe calcularse la confiabilidad y validez de la escala.

¿En qué forma se aplicó la escala Likert?

Se le entregó la escala o cuestionario a cada individuo y éste marcó respecto a cada afirmación o pregunta la categoría que mejor describe su reacción o respuesta (selecciona sólo una de las cuatro opciones dadas para cada pregunta)

El siguiente es el cuestionario de la escala Likert que se aplicó a 30 estudiantes de los grupos experimentales; los estudiantes fueron seleccionados aleatoriamente:

CUESTIONARIO DE ACTITUD HACIA LA MATEMÁTICA

Instrucciones:

En el siguiente cuestionario usted encontrará una serie de afirmaciones, con cuatro respuestas posibles.

Usted debe seleccionar una, marcando con una equis (x) en el espacio respectivo así:

TD: Totalmente en desacuerdo D: En desacuerdo A: De acuerdo. TA: Totalmente de acuerdo.

Usted puede afirmar o negar en este cuestionario. Le solicitamos sinceridad en las respuestas.

1. Pienso que todo profesional no necesita conocimientos en matemáticas.

TD _____	D _____	A _____	TA_____
1	2	3	4

2. Pienso que la matemática no permite entender eventos de actualidad científica y tecnológica.

TD _____	D _____	A _____	TA_____
1	2	3	4

3. Pienso que los fundamentos matemáticos no son indispensables para todo profesional.

TD _____	D _____	A _____	TA_____
1	2	3	4

4. Si tuviera que elegir una asignatura para estudiar me inclinaría por matemática.

TD ____	D ____	A ____	TA____
1	2	3	4

5. Pienso que el estudio de mi carrera es más interesante si se intensifica la matemática.

TD ____	D ____	A ____	TA____
1	2	3	4

6. Pienso que la investigación en mi carrera se facilitaría con el uso de herramientas matemáticas.

TD ____	D ____	A ____	TA____
1	2	3	4

7. Pienso que todas las carreras técnicas se deben apoyar en la matemática.

TD ____	D ____	A ____	TA____
1	2	3	4

8. Me gusta la matemática porque puedo aplicarla.

TD ____	D ____	A ____	TA____
1	2	3	4

9. Pienso que la matemática ayuda a razonar.

TD ____	D ____	A ____	TA____
1	2	3	4

10. Creo que la metodología del profesor de matemáticas me ayuda a entenderla.

TD ______ D ______ A ______ TA______

1 2 3 4

11. Creo que el área de matemáticas no es importante en el desarrollo del país.

TD ______ D ______ A ______ TA______

1 2 3 4

12. Pienso que la matemática nos permite comprender cómo se relaciona la ciencia con la técnica.

TD ______ D ______ A ______ TA______

1 2 3 4

13. Si pongo más interés en la matemática creo que me va a ir bien en la carrera.

TD ______ D ______ A ______ TA______

1 2 3 4

14. Me gusta insistirle a la solución de un problema sobre todo si puedo utilizar un gráfico.

TD ______ D ______ A ______ TA______

1 2 3 4

15. Pienso que los talleres de matemáticas en grupo me ayudan a entenderla más.

TD ______ D ______ A ______ TA______

1 2 3 4

16. Me agrada el trabajo en equipo para resolver talleres de matemáticas.

TD _____ D _____ A _____ TA_____

1 2 3 4

17. Pienso que en matemáticas deberíamos utilizar siempre paquetes computacionales.

TD _____ D _____ A _____ TA_____

1 2 3 4

18. Desearía estudiar matemáticas utilizando calculadoras.

TD _____ D _____ A _____ TA_____

1 2 3 4

19. Pienso que para aprender matemática lo lograría a través del software matemático más eficientemente.

TD _____ D _____ A _____ TA_____

1 2 3 4

20. Pienso que la calculadora es esencial en el aprendizaje de la matemática.

TD _____ D _____ A _____ TA_____

1 2 3 4

21. Pienso que las formas gráficas que aportan las calculadoras son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas.

TD _____ D _____ A _____ TA_____

1 2 3 4

A continuación mostramos los resultados obtenidos de la escala de Likert:

	SUJETOS																														Σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	1	1	1	1	3	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	1	3	2	1	1	1	40
2	1	4	1	2	2	1	3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	42
3	1	3	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	3	3	1	1	1	44
4	3	4	4	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	2	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	4	4	90
5	3	3	4	3	2	3	4	2	4	4	4	3	3	3	1	3	3	2	2	4	3	4	1	3	3	3	2	3	4	4	90
6	3	4	4	3	2	3	4	3	4	4	4	3	3	3	2	3	2	2	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	4	102
7	2	4	1	1	3	1	3	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1	1	48
8	3	4	4	3	3	3	4	4	3	3	4	3	3	3	3	3	3	2	4	3	3	3	4	3	4	3	4	4	4	4	101
9	1	1	4	3	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	39
10	3	2	4	4	3	2	3	3	3	3	4	3	4	3	3	3	3	4	4	3	4	3	4	3	1	3	3	3	3	4	95
11	2	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	39
12	1	1	3	2	2	1	2	3	2	4	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	1	2	1	1	2	50
13	3	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	3	4	4	4	2	4	3	4	4	4	4	4	3	4	3	4	3	4	4	110
14	3	4	4	4	3	3	4	4	3	4	4	3	4	3	3	4	3	2	3	4	4	4	3	3	3	3	4	3	3	4	103
15	3	4	3	4	4	3	3	4	4	4	4	1	4	3	3	4	1	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4	4	105
16	3	4	4	4	3	3	4	4	4	3	4	1	4	3	3	3	1	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4	3	103
17	3	4	2	3	3	2	3	2	3	3	3	1	2	3	4	4	2	2	4	4	3	2	3	2	3	3	2	3	3	3	84
18	3	4	3	4	3	2	3	3	3	3	3	4	3	2	4	4	2	3	4	4	4	2	3	2	2	3	4	2	3	3	92
19	3	4	2	3	3	2	2	3	3	2	2	1	2	2	2	2	3	2	3	4	3	1	2	2	3	4	2	3	2	3	75
20	2	4	2	3	3	2	2	2	2	2	2	1	3	2	4	2	3	3	4	4	2	1	2	2	2	4	4	2	3	3	77
21	2	4	3	4	2	3	3	2	2	3	2	1	3	2	3	2	3	4	4	4	3	1	3	2	3	3	4	2	2	3	82
Σ	49	69	59	63	54	44	61	53	56	55	54	38	53	47	51	50	48	47	60	60	58	45	53	47	53	61	62	49	54	58	

Figura 16

“Escala Likert aplicada y tabulada (ver la tabla anterior y las dos siguientes

sujeto	P.total	Xi	Xi−x̄	Xp	Xp−x̄	$(Xi$−x̄$)^2$	$(Xp$−x̄$)^2$	$Xi * Xp$
1	49	24	-1.2	25	-3.5	1.44	12.25	600
2	69	34	8.8	35	6.5	77.44	42.25	1190
3	55	26	0.8	33	4.5	0.64	20.25	858
4	63	31	5.8	32	3.5	33.64	12.25	992
5	54	27	1.8	27	-1.5	3.24	2.25	729
6	44	21	-4.2	23	-5.5	17.64	30.25	483
7	61	28	2.8	33	4.5	7.84	20.25	924
8	53	23	-2.2	30	1.5	4.84	2.25	690
9	56	27	1.8	29	0.5	3.24	0.25	783
10	55	25	-0.2	30	1.5	0.04	2.25	750
11	54	24	-1.2	30	1.5	1.44	2.25	720
12	38	15	-10.2	23	-5.5	104.04	30.25	345
13	53	24	-1.2	29	0.5	1.44	0.25	696
14	47	23	-2.2	24	-4.5	4.84	20.25	552
15	51	24	-1.2	27	-1.5	1.44	2.25	648
16	50	24	-1.2	26	-2.5	1.44	6.25	624
17	48	25	-0.2	23	-5.5	0.04	30.25	575
18	47	22	-3.2	25	-3.5	10.24	12.25	550

sujeto	P.total	Xi	$Xi-\bar{x}$	Xp	$Xp-\bar{x}$	$(Xi-\bar{x})^2$	$(Xp-\bar{x})^2$	$Xi*Xp$
19	60	28	2.8	32	3.5	7.84	12.25	896
20	60	29	3.8	31	2.5	14.44	6.25	899
21	58	28	2.8	30	1.5	7.84	2.25	840
22	45	20	-5.2	25	-3.5	27.04	12.25	500
23	53	24	-1.2	29	0.5	1.44	0.25	696
24	47	22	-3.2	25	-3.5	10.24	12.25	550
25	53	26	0.8	27	-1.5	0.64	2.25	702
26	61	31	5.8	30	1.5	33.64	2.25	930
27	62	28	2.8	34	5.5	7.84	30.25	952
28	49	23	-2.2	26	-2.5	4.84	6.25	598
29	54	24	-1.2	30	1.5	1.44	2.25	720
30	58	26	0.8	32	3.5	0.64	12.25	832
$\sum$	1611	756		855		392.8	349.5	21824
$\sum/30$		25.2		28.5		13.09333	11.65	

De acuerdo con los datos obtenidos en las tablas hallemos el coeficiente de Pearson y el coeficiente de Correlación para visualizar el ajuste entre las preguntas:

$\sum$ puntajes impares= $Xi = 756$

$\sum$ puntajes pares= $Xp = 855$

N=30: Muestra

$\bar{X}$i= $\frac{\sum X_i}{N} = \frac{756}{30} = 25{,}2$

$\bar{\text{X}}\text{p}= \frac{\sum X_p}{N} = \frac{855}{30} = 28{,}5$

$\sum(Xi-\ \bar{\text{X}}\text{i})^2 = 392{,}8$

$\sum(Xp-\ \bar{\text{X}}\text{i})^2 = 349{,}5$

$s_i = \sqrt{\frac{\sum(Xi-M)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{392{,}8}{29}} = 3{,}68033$, M= $\bar{\text{X}}$i

$s_p = \sqrt{\frac{\sum(Xp-M)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{349{,}5}{29}} = 3{,}4716$, M= $\bar{\text{X}}$i

Ahora hallamos el coeficiente de Pearson:$\mathbb{R}xy$:

$\mathbb{R}xy = \frac{\sum \frac{xy}{N} - W}{(si)(sp)} = \frac{\frac{21824}{30} - (25{,}2)(28{,}5)}{(3{,}4716)(3{,}6833)} = \frac{9{,}2667}{12{,}7869} = 0{,}7247$, W:media de $(Xi)(Xp)$

Hallemos el coeficiente de correlación:$\mathbb{RC}$:

$\mathbb{RC} = \frac{2\mathbb{R}xy}{1+\mathbb{R}xy} = \frac{2(0{,}7247)}{1+0{,}7247} = \frac{1{,}4494}{1{,}7247} = 0{,}8404$

Esto significa que el ***RC*** de PEARSON está brindando una correlación o ajuste entre las preguntas pares e impares de más del 84 %, es decir **la escala nos confirma un equilibrio de la actitud de los alumnos hacia la matemática y la utilidad de la misma**. Este resultado demuestra que la correlación entre las distintas puntuaciones es positiva y alta, lo cual confirma que los diversos items están midiendo lo mismo, esto manifiesta una confiabilidad alta y satisfactoria permitiendo concluir, que la prueba aplicada es consistente internamente, es decir, que los diversos items tienden a medir la misma variable actitudinal.

Capítulo 7

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS

7.1. DESDE LO MATEMÁTICO Y METODOLÓGICO

En esta tesis se trata de pensar desde los objetos matemáticos, en este caso funciones, los problemas del aprendizaje de los cimientos de la matemática. ¿Cómo vuelven significativos los estudiantes, los subtemas de funciones e interpretación de gráficas de éstas?. ¿Cómo logran modelar algunos problemas y en términos generales cómo se acostumbran a razonar? Podemos utilizar un proceso metodológico nuevo (no tradicional) para visualizar e interpretar con el estudiante los mismos contenidos de siempre.

Si hemos hecho esfuerzos conjuntos para utilizar sistemáticamente **mediadores a través de la estrategia de la visualización y modelación**, es apenas obvio que la clase que dictaba el profesor, en la cual se analizaban una o dos gráficas y el estudiante tomaba nota y luego repetía el proceso, es la aplicación de una metodología tradicional y no de la metodología propuesta en este trabajo de investigación. Con la metodología propuesta, es más natural y de más contenido matemático la forma como el estudiante se ha planteado los problemas, justificando conjeturas y haciendo el análisis de expresiones básicas como por ejemplo la siguiente secuencia:

$y = |x - h| \qquad y = |x + h| \qquad y = |x \pm h| \pm k$

$y = [|x|] \qquad y = [|x|] + x \qquad y = x - [|x|]$

En la cual, a partir de esta base, se puede intentar una forma de apropiación de los conceptos básicos de dominio, rango, asíntota, translación, rotación y simetría, contrastando y comparando los modelos para dinamizarlos y darles mayor significado: es decir, el estudiante **los hace en su estructura mental más significativos**. Por ello, la clase siempre se dio de tal forma que el estudiante fuera el agente activo; el profesor sólo fue un orientador del proceso de aprendizaje a través del uso adecuado de mediadores: Se le dió al estudiante la información del tema de clase por escrito con su respectivo taller; este material fue leído en un tiempo prudente (en los primeros minutos de clase), luego el profesor utilizando mediadores (Calculadora, Derive, etc) ilustraba los elementos básicos del tema razonando conjuntamente con los estudiantes. Posteriormente y en grupos los estudiantes discutieron los ejercicios del taller apoyados por el profesor y al final de la clase se les propuso realizar la "hoja resumen"en forma grupal. Esto creó el ambiente y el contexto de lo que hemos llamado "trabajar en búsqueda de procesos de solución " razonar y hacer por parte de cada uno de los alumnos el ejercicio del pensamiento. Nuestra idea con ellos era "trabajen en grupo y exploren además individualmente", que significaba para todos esforzarse más en desarrollar procesos sin importar el cometer errores pues el trabajo individual era sometido posteriormente a discusión con el grupo o equipo respectivo. **De antemano, no hay respuestas "correctas, hay procedimientos para interpretar resolver problemas: descubra usted el suyo, yo aporto algo como docente y usted**

construya su propio camino de aprendizaje".

Esta tesis en verdad fue un microproyecto que se convirtió en otra riqueza especial de este proceso y que contribuyó al manejo de los ritmos de aprendizaje. La graficación, la interpretación y la construcción conceptual permitieron la diversidad no sólo de los tiempos sino de los contenidos. Muchos grupos elaboraban una gráfica a partir de una tabla y luego hacían un proceso interpretativo, y otros visualizaban la gráfica y luego procedían a hablar de proposiciones conceptuales en las cuales se resaltaron aspectos como: Dominio, rango, asíntotas, crecimientos, decrecimientos, translaciones y simetrías.

Desde la parte correspondiente a la educación matemática se ha logrado que los estudiantes en forma secuencial y estructurada, ayudados, eso si, por las formas de representación (modelación y visualización) a través del uso eficiente de mediadores, construyan un conjunto de categorías y un sistema de códigos, gracias a los cuales se efectúa una relación con la estructura de funciones, con el objeto de hacer más significativa esta misma estructura.

En el mapa adjunto podemos observar cómo el estudiante a partir del concepto de par ordenado generaliza los conceptos de AXB, función, tipos de funciones y su expresión gráfica para que a partir de la interacción a través de hojas de papel milimetrado o esquemas con cuadrícula, gráficas con ayuda de la calculadora y la interpretación de los códigos en forma visual y conceptual, él reformule la estructura y saque conclusiones.

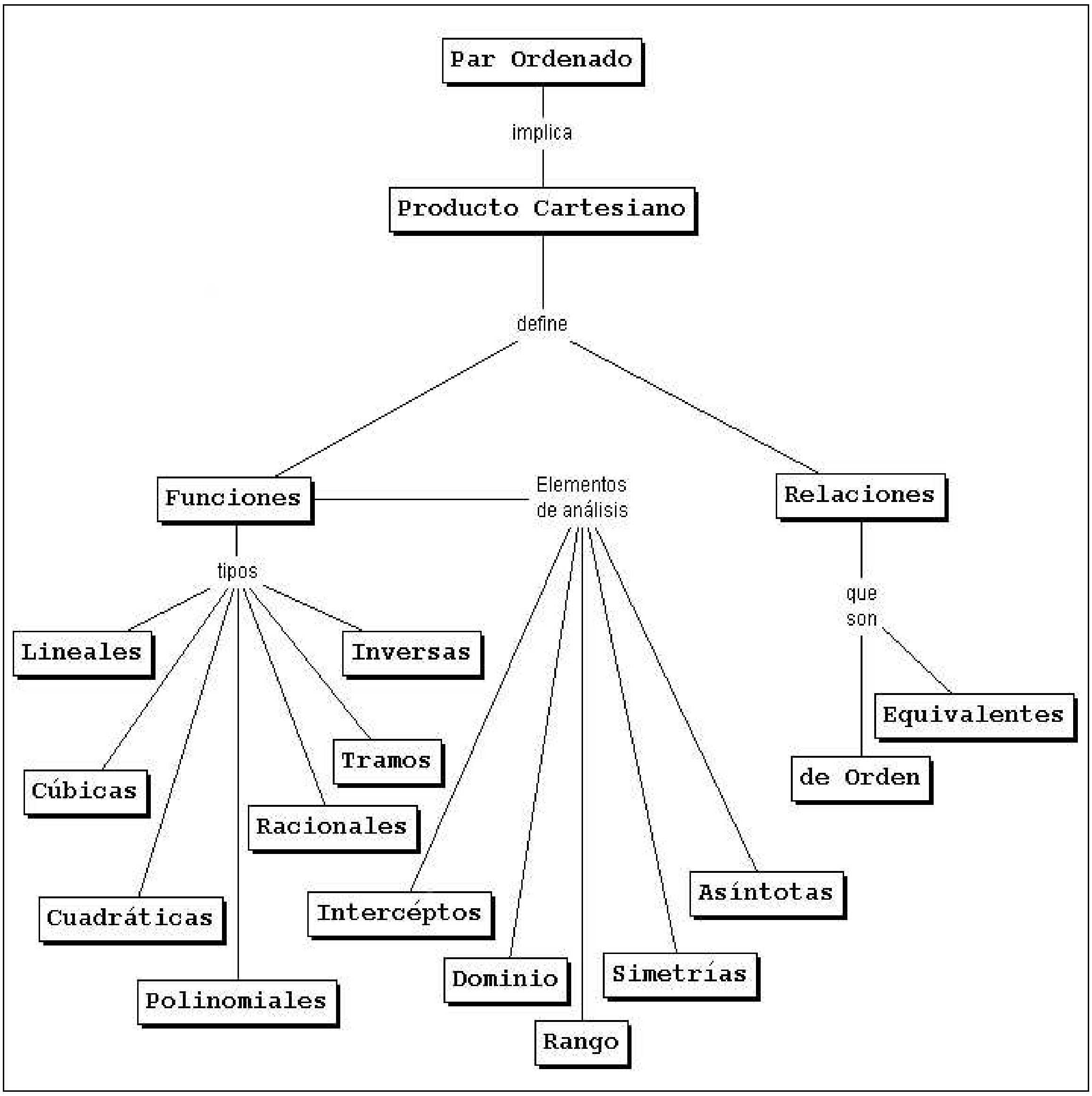


Figura 17

“Pares ordenados,producto cartesiano, funciones y relaciones

7.2. DESDE LO PEDAGÓGICO

En este trabajo de investigación se experimentó con una metodología de enseñanza en el aula de clase que rescate el uso de:

- **Mediadores**

  Con los estudiantes de los grupos experimentales, dentro del aula se utilizaron diferentes "mediadores": herramientas materiales como los talleres, la calculadora gráfica y signos como el software Derive, el lenguaje, etc.

  Los mediadores (como el Derive, los talleres, la palabra) en el grupo experimental fueron utilizados de forma eficiente para el logro del proceso aprendizaje sobre todo por el uso de las nuevas tecnologías.

  En el ámbito educativo, el complicado problema de la constante necesidad de actualización de conocimientos está recibiendo el impacto del avance tecnológico y está extendiendo el convencimiento de que la educación, como actividad básica para el desarrollo humano se ha quedado retrasado, en comparación con otras actividades, en la incorporación de las nuevas herramientas tecnológicas; por tal razón cuando comparamos los resultados del grupo control con los grupos experimentales observamos que en estos últimos se obtuvieron mejores resultados.

- **Visualizaciones**:

  En el trabajo realizado en clase el estudiante se enfrentó a actividades diferentes como desarrollar relaciones entre elementos, comparaciones, graficaciones, discusiones, puestas en común, procedimientos, todas estas actividades conllevaron a que el estudiante interpretara los resultados obtenidos mediante la visualización.

Por ejemplo: Se le asignaron a los estudiantes preguntas a partir de un problema específico; cuando el estudiante reconoció objetos, propiedades, relaciones y proposiciones acerca de dicho problema, obtuvo una visualización.

Vigotsky afirmó: "Las conceptualizaciones reposan sobre el reconocimiento de objetos, propiedades, relaciones y proposiciones" [1]

- **Modelaciones**

  Cuando el estudiante obtuvo a partir de un problema o enunciado una representación matemática de la situación planteada, tuvo que recorrer un proceso para obtener dicha representación; en el proceso identificó las variables dependientes e independientes y obtuvo relaciones entre dichas variables. En los talleres se plantearon problemas de aplicación en los cuales los estudiantes obtuvieron las expresiones algebraicas correspondientes y ofrecieron expresiones verbales que representaban la solución para dichos problemas.

- **Representaciones**

  En las actividades desarrolladas en clase se tuvo en cuenta utilizar diferentes representaciones para los diferentes conceptos. El concepto de función se presentó en forma de tablas, representación algebraica, representación por medio de una expresión verbal y en forma gráfica.

Con el manejo adecuado de estos cuatro elementos (mediadores, visualizaciones, modelaciones, representaciones), se buscó que el estudiante obtuviera a través de un trabajo tanto individual como grupal y una orientación conjunta con el docente un aprendizaje significativo.

[1] http://www.uned.ac.cr/servicios/global/ensenanza/diseno/articulos/mediadores.html

"Para Ausubel es el aprendizaje en donde el alumno relaciona lo que ya sabe con los nuevos conocimientos, es decir, sus experiencias representan un factor de mucha importancia, es por ello que el docente debe enfocar su labor facilitadora y enseñar a consecuencia de lo que descubra sobre lo que el alumno ya conoce"[2].

El aprendizaje significativo consideramos nosotros en esta tesis se ha materializado en la medida que:

- El estudiante fue abordando los códigos funcionales en forma estructurada y secuencial como en los casos siguientes:

    1. $f(x) = x^2 \qquad f(x) = (x-h)^2 \qquad f(x) = (x-h)^2 + k$

    2.
        - Un número x: x
        - El triplo de un número: $3x$
        - El triplo de un número multiplicado por el doble de otro número: $(3x)(2y)$
        - $\frac{9}{5}$ del triplo de un número multiplicado por el doble de otro número: $\frac{9}{5}(3x)(2y)$.
        - $\frac{9}{5}$ del triplo de un número multiplicado por el doble de otro número, excede en cuarenta:$\frac{9}{5}(3x)(2y) + 40$

- Desarrolla los procedimientos en forma lógica, gráfica, interpreta y corrige las gráficas que a su vez representan lugares geométricos (Uso de mediadores).

[2]AUSUBEL, David;NOVAK, Joseph y HANESIAN, Helen. Psicología Educativa, Mexico,Trillas, 1992. p.107

- Desarrolla autónomamente destrezas, razonamientos y estrategias visuales para darle un sentido lógico y prospectivo a los comportamientos funcionales (Hace la interpretación o visualización)

- Se habitúa al uso racional del gráfico y del mediador para realizar modelaciones y de esta forma se logra una "economía en el tiempo". Dinamiza mucho más los temas y modifica la forma como el estudiante venía abordando su proceso de aprendizaje.

El estudiante obtuvo un aprendizaje significativo a través de un **"proceso inductivo"** y gracias a una interacción social y cognitiva desarrolla un conocimiento como una interacción propia.

Existen otros autores que rescatan el trabajo social en el aprendizaje, tal es el caso de Mario Carretero:

"*El constructivismo es la idea que sostiene que el conocimiento es una construcción propia que se va haciendo día a día, como resultado de la interacción tanto de los aspectos sociales y cognitivos, como de los afectivos en el individuo*" [3]

Se considera que el estudiante lleva un "proceso inductivo" ya que el material teórico y los talleres que se le ofrecen llevan un "contenido secuencial estructurado"de tal forma que los nuevos temas tratados se desarrollen a través de los preconceptos y temas ya vistos. Ejemplos:

1. - $y = |x|$ $\quad y = |x-2|$ $\quad y = |x+3|+2$ $\quad y = |x-3|-2$

[3]CARRETERO, Mario. Op.cit., p.45,46

- $y = x + 2$ $\qquad y = x - 2$ $\qquad y = x + k$

- $y = x^2$ $\qquad y = (x-1)^2$ $\qquad y = (x-2)^2 + 3$

- $y = ax^2$ $\qquad y = x^2 + k$ $\qquad y = (x-h)^2$ $\qquad y = a(x-h)^2 + k$

2. Visualizar el diámetro H que coincide con el lado de un triángulo inscrito en una semicircunferencia con altura h sobre H, radio r y catetos x, y.

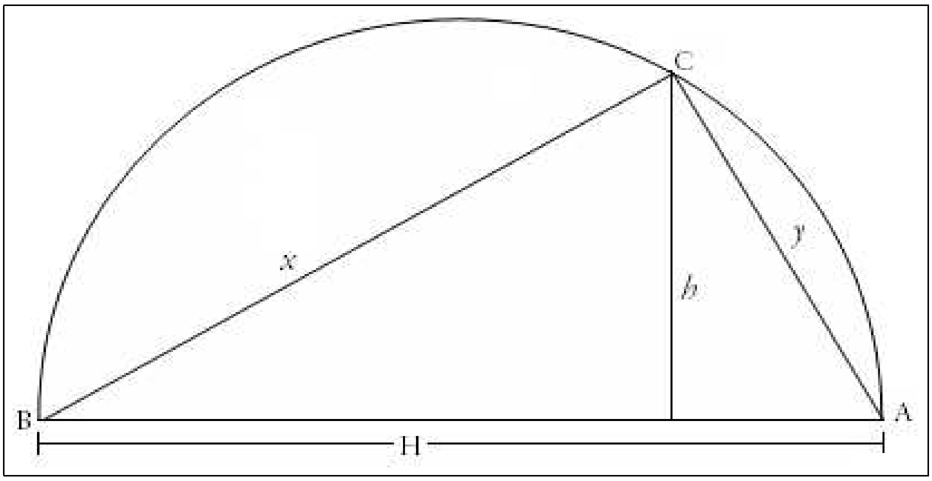


Figura 18

“triángulo inscrito en una semicircunferencia

Encontremos una expresión algebraica (códigos) que exprese la hipotenusa H en términos de los catetos x, y y hallemos la función $y = f(x)$ cuando $r = 5$.

Solución:

- Como el ángulo B$\hat{C}$A es inscrito en una semicircunferencia, su media es 90^0 (el ángulo es recto).
- Como el ángulo B$\hat{C}$A es recto, el triángulo ABC es rectángulo.
- Como el triángulo ABC es rectángulo se puede aplicar aquí el teorema de Pitágoras: $H^2 = x^2 + y^2$.
- Como $H^2 = x^2 + y^2$, $H = \sqrt{(}x^2 + y^2)$
- como H es un diámetro entonces $H = 2r$.
- Como $H = 2r$ y $H = \sqrt{(}x^2 + y^2)$ entonces, $2r = \sqrt{(}x^2 + y^2)$

- Como $r = 5$ y $2r = \sqrt(x^2 + y^2)$ entonces, $100 = x^2 + y^2$.
- Como $x^2 + y^2 = 100$ entonces $y = \sqrt(100 - x^2)$

Y se afirma también que el estudiante desarrolla una "construcción propia" ya que es él quien recibe un material de información general para leer luego analizar en conjunto con el profesor, luego socializarlo a través de los talleres en grupo y por último vuelve a tener la orientación con el profesor. Así por ejemplo cuando el estudiante resuelve un ejercicio de modelación como:

La vida media del estroncio es de 25 años. Esto significa que la mitad de cualquier cantidad dada de estroncio se desintegrara en 25 años. Si una muestra de estroncio tiene una masa de 24mg, encuentre una expresión (función)para la masa m(t) que queda después de t años.

Solucion.

Inicialmente la masa es de 24mg y se reduce a la mitad durante cada 25 años, por tanto,

Para $t = 0$, $m(0) = 24$

Para $t = 25$, $m(25) = \frac{1}{2}(24)$

Para $t = 50$, $m(50) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(24) = \frac{1}{2^2}(24)$

Para $t = 75$, $m(75) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(24) = \frac{1}{2^3}(24)$

Para $t = 100$, $m(100) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(24) = \frac{1}{2^4}(24)$

Con base en este patron, parece que la masa restante después de t años es:
$m(t) = \frac{1}{2^{\frac{t}{25}}}(24)$

Cuando halló la función $m(t)$ obtuvo una representación algebraica (usó códigos) que concuerda con el problema real dado.

Cuando hablamos acerca de socializar también nos referimos a la construcción social del conocimiento; es Vygotsky quien hace referencia en este aspecto tal como lo habíamos mencionado anteriormente: "El aprendizaje es un proceso profundamente social, hace hincapié en el diálogo y en los distintos papeles que desempeña el lenguaje en la instrucción y en el desarrollo cognoscitivo mediato" [4]

Es en la socialización entonces donde el estudiante realiza un intercambio de ideas y se enriquece con los aportes de sus compañeros y el profesor, pues, en el momento del desarrollo de los talleres y orientación general del profesor es cuando el estudiante está en el proceso de lo que hemos llamado **"trabajar en búsqueda de procesos de solución"**; es aquí donde se razona y se hace el ejercicio del pensamiento. Cuando afirmamos que el estudiante "busca procesos de solución" nos referimos a que el estudiante estuvo presionado a enfrentar los problemas que se le plantearon pues al final de la clase debe presentar la "hoja resumen" en forma grupal del tema visto de funciones. El hecho de que el estudiante se haya sentido "presionado"(tener conflictos cognitivos) es fundamental para lograr adquirir un razonamiento y trabajo en grupo más eficaz con respecto al tema de funciones.

"Es construyendo que uno se transforma en creador, y no aprendiendo primero a crear para poder construir después; no es legítimo instaurar una separación en el tiempo, ni en la naturaleza de la actividad entre aprender a construir y construirlas". [5]

[4]VYGOSTKY ,LeV.S. Op.cit., p.196
[5]JOLIBER, Op.cit., p.22

Es importante que aclaremos el párrafo anterior. El proyecto en su dinámica siempre tuvo en cuenta los complejos procesos de aprendizaje y buscó por todos los medios lograr que el estudiante fuera protagonista de su propio aprendizaje. A esto se debe que tanto el taller como la hoja resumen no encasillaran al estudiante con instrucciones que tenía necesariamente que seguir, respuestas correctas que lograr o pautas para cumplir a cambio de una nota. Lo que se generó en cada momento en el cual se estuvo trabajando el taller, fue un ambiente cooperativo, abonado para la construcción, el atrevimiento a lograr cosas, al ensayo y el error y ¿por que no?, a la pregunta que genera el asombro después de que el estudiante construye funciones tan expresivas como $y = e^{-x}$, $y = e^{x}$ o $y = (\frac{1}{2})^{x}$.

Desde luego que la secuencia estructurada de las unidades de información siempre se mantuvieron a lo largo del proceso. Por ejemplo: Se ve lógico que un estudiante, recorra una ruta, en el caso de funciones escalonadas, iniciando en: $y = x$, $y = x + k$, $y = mx + k$; $y = |x|$, $y = |x \pm k|$, $y - h = |x \pm k|$; $y = [|x|]$, $y = [|x|] - x$, $y = x - [|x|]$

Y luego ingresar a funciones lineales y cuadráticas combinadas y así sucesivamente. Como se ve, el participante, variando valores en el dominio de la función construía familias completas aprovechando la calculadora, el Derive o el Excel.

Como docentes facilitadores siempre estimulamos en los estudiantes experiencias desencadenantes. Por ejemplo: Ellos visualizaron combinaciones complejas de funciones a partir de formas más simples. En el caso de las funciones $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ teniendo en cuenta los dominios. Así también, fog y gof, que no es conmutativa. Los principios generales sobre las funciones cuadráticas, fueron sintetizados en su mayor parte por los alumnos. Se plasmaron reglas sobre parábolas, veamos:

- $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$. Parábola con vértice (h, k) y $x = h$ como eje vertical.

- $f(x) = ax^2$ si $|a| < 1$ la gráfica es más ancha y $|a| > 1$, f es más angosta.

- si $a < 0$ la gráfica abre hacia arriba y si $a < 0$ la gráfica abre hacia abajo.

7.3. DESDE LO ESTADÍSTICO

1. La escala Likert construida dentro de este proceso investigativo en el cual participaron estudiantes de los grupos experimentales, es consistente y confiable, la confiabilidad arroja un $\mathbb{RC}$ del 84 %. La escala nos confirma un equilibrio entre la actitud de los alumnos hacia la matemática y la utilidad de la misma.

2. Según los resultados obtenidos a través de la escala tipo likert aplicada a los estudiantes, existe la idea de que la matemática es un componente básico de su carrera profesional y además su ejercitación sirve como fuente de conocimiento profesional.

3. Las notas promedio de los grupos control y experimental tienen diferencias significativas en las notas post-test obtenidas.

4. Las notas promedio de los grupos control y experimental no tienen diferencias significativas en las notas pre-test obtenidas.

5. No se detectaron diferencias entre los promedios por sexo, edad y estrato socioeconómico, lo que indica que estas variables no fueron determinantes en los resultados finales de los promedios antes y después del experimento.

Capítulo 8

CONCLUSIONES

8.1 Con respecto a uno de los mediadores instrumentales de mayor importancia : la calculadora, podemos afirmar:

La calculadora en esta investigación fue incorporada al proceso docente educativo en forma normal para apoyar su uso en la elaboración de las tareas académicas sin que la interacción en el aula de clase estuviera en función de las herramientas mismas. La representación gráfica cotidiana nos dio una amplia gama de conceptos visuales que podíamos trasladar y rotar en forma flexible. Ejemplo: los tipos de asíntotas (verticales,horizontales y oblicuas) enriqueció el análisis de gráficas de la forma: $\frac{1}{x}$ con $x \neq 0$, $\frac{1}{x^2}$ con $x \neq 0$, $\frac{1}{x-1}$ con $x \neq 1$, $\frac{1}{x+1}$, con $x \neq -1$, por la manera como se podía visualizar el tipo de gráfico en el plano,así mismo, las expresiones como, $\frac{x^2}{x-1}$, $\frac{x^2}{1-x^2}$, $\frac{x}{x^2-2}$, $\frac{5x}{\sqrt{(x^2+4)}}$, nos permitieron visualizar y luego concluir, el concepto sobre asíntotas verticales. Aprovechamos al máximo la visualización, para mejorar la operativización de objetos matemáticos y utilizarla como herramienta útil y extractar conceptos a partir de las mismas gráficas. Cuando se propone a un alumno contrastar expresiones gráficas en un plano común: $y = x$,$y = |x|$, $y = |x \pm k|$, $y = |x \pm k| \pm h$, está incitando al descubrimiento y a la experimentación, así mismo, si la gráfica puede hacerla mixta, mucho mejor. Este es el caso de expresiones funcionales como:

$$y = \begin{cases} \text{x} & si\ x > 0 \\ |x| & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} |x| & si\ x \in \mathbb{R} \\ |x + k| & si\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En las cuales se combinan diversos tipos de funciones. En cada caso existe una posibilidad mayor de incidir en los procesos de aprendizaje (funciones escalonadas). En el postest por ejemplo, en el ejercicio 5 (ver en anexos el examen postest), por simple inspección, el estudiante podía descartar algunas funciones. Estas ventajas visuales se lograron después de mucho insistir en la forma de mirar la gráfica, y hacer mayor énfasis en las propiedades que presenta el ícono y no tanto en los cálculos puntuales.

Algo que pudimos observar, fue el hecho de que las prestaciones de la calculadora (casio, HP,TI-89) se van acercando muy rápidamente a los sistemas de cálculo simbólico. Otra característica importante fuera de la flexibilidad con la cual se pueden construir, interpretar y contrastar los gráficos, es **la portabilidad de la calculadora y su bajo costo, lo que favorece el uso cotidiano del instrumento como mediador y su incorporación al proceso de aprendizaje**.

Muchos alumnos pasaron del trabajo con calculadoras al uso del sofware Derive en las salas de computo de Química, Educación e Ingeniería; lo hicieron porque estaban motivados por la construcción de figuras en las cuales la calculadora les implicaba cambios obligados de Mode. Una calculadora sencilla marca Fx-82MS permite desarrollar cálculos con funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas, factoriales, números aleatorios, combinación y permutación. Las más avanzadas como son las TI-85 ó TI-89 tienen la capacidad de ejecutar programas que poseen CAS o sea sistemas de cálculo simbólico. Un ejemplo sencillo que permitió a los estudiantes, estimar y hacer pronósticos, evaluando una función en puntos muy concretos, fue la expresión, $\frac{senx}{x}$, en una tabla en la cual intuitivamente trabajamos el concepto de límite, cuando hallamos puntos tales que $x \longrightarrow 0^+$ y $x \longrightarrow 0^-$. Al final se concluye que $lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

El uso de diversas operaciones de zoom en una HP o una TI-89,le permitía al estudiante observar en pantalla distintos casos de una gráfica: $y = mx$, $y = mx + b$, $y = mx - b$, $m > 0$,y $y = mx$, con $m < 0$, que representan distintos comportamientos en el plano cartesiano. Logramos a partir de aquí construir con los alumnos una serie de procesos operativos y mentales interesantes como por ejemplo hablarles del caso cuando la pendiente no está definida.

Veamos algunos casos relacionados:

-Evaluar el costo medio de un libro de cálculo que ha fluctuado en precios de 10.500, 14.200 y 16.000 pesos y llegar a mirar el proceso de cambio$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$ como la forma promedio de cambio de "y" por unidad de cambio en "x". Lo anterior permitió interpretar problemas muy simples pero de una gran aplicación. Ejemplos:

- Si una rampa se eleva 2m por cada 10m sobre la horizontal, expresar esta situación en forma de tasa promedio de cambio.

- Establecer la relación lineal entre las temperaturas en grados centígrados y grados Fahrenheit. Se sabe que cuando $C = 0°$, $F = 32°$ y que cuando $C = 100°$, F=212°. Expresar a F en términos de C utilizando la tasa promedio de cambio, o sea $m = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$ y $(C_1, F1) = (0, 32)$

8.2 Desarrollo de los procesos académicos por **unidades de información**:

Estas **unidades de información** con sus respectivos talleres se realizaron de tal forma que el estudiante requirió visualizar, modelar y manejar eficazmente mediadores para el logro de un aprendizaje significativo:

8.2.1 Desigualdades

Ofrecimos la información básica de la relación entre dos números (propiedad de tricotomía, basándonos en el conocimiento previo del estudiante)con las propiedades de las desigualdades para introducir el concepto de inecuación lineal y no lineal; para ésto, se dieron ejemplos concretos por medio de dos métodos de solución: Método por casos y método del cementerio (Uso de rectas numéricas con signos $+$ y $-$ a través de ella) . Para operar con estos métodos se ilustró cómo representar la solución de una inecuación: En forma de desigualdad, en forma de intervalos y en forma gráfica. En el proceso se dieron ejemplos de aplicación relacionados con desigualdades y ejemplos algebraicos para llegar a la solución de inecuaciones. Finalmente desarrollaron un taller de ejercicios sobre desigualdades en los cuales se involucraron todos los teoremas básicos en el conjunto de los reales. Veamos algunos ejemplos al respecto:

- Para interpretar cuál es el conjunto solución de $x^2 + 2x + 2 \leq 5$ se analizó su representación gráfica, en intervalos y en forma de desigualdad;

de esta manera se **visualizó** el concepto de solución de una desigualdad en el conjunto de los reales.

- Para que el estudiante modele a través de problemas reales donde intervinieron desigualdades,se presentaron muchos ejemplos: Si el área de un prado de forma rectangular de 15 metros de largo es menor que $90m^2$ ¿Qué se puede afirmar del ancho del prado?.
- Se requiere el uso de "mediadores" para hallar rápidamente la solución de una inecuación de este estilo: $2,57x+6,723 > \frac{45}{368}$. Hallar el conjunto solución.

8.2.2 **Función**

Para razonar sobre el concepto de función se partió de la observación de las características de un par ordenado que son: Tener componente en X y en Y y tener un criterio de orden; en esta forma se hallaron los pares ordenados resultantes en un producto cartesiano determinado AxB y BxA tal que $AxB = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$

Se concluyó que si $A = B = \mathbb{R}$, entonces el producto cartesiano respectivo corresponde a todas las parejas ordenadas que conforman el plano cartesiano, éste contiene dos ejes de coordenadas que nos orientan para ubicar las parejas ordenadas.

Se utilizaron pares ordenados especiales como $(a, 0), (0, b)$ con a y $b \in \mathbb{R}$, los cuales son los puntos de intersección con los ejes.

Posteriormente se hallaron conjuntos determinados de pares ordenados denominados relaciones, se analizaron sus características (dominio, rango), algunas clases de relaciones (reflexiva, simétrica, transitiva y de equivalencia) y su forma de representación (en el plano cartesiano y diagrama sagital).

Finalmente se identificó una relación en particular denominada función la cual también fue desarrollada en forma gráfica (en el plano y diagrama sagital) y se identificaron sus características básicas para diferenciarla de otras relaciones. Veamos alguno ejemplos que fueron trabajados:

Dada la relación $M =$ "A es menor que B", donde $A = \{2, 4, 5\}$ y $B = \{6, 1\}$ responder:

- Hallar los pares ordenados de M:
  $(2, 6), (4, 6), (5, 6)$
- Hallar AxB
- Hallar BxA
- $AxB = BxA$ discuta.
- Hallar dominio de M
- Hallar rango de M
- ¿M es función? Justifique
- Ubique los pares ordenados de M en el plano cartesiano y con el método de rectas verticales, identifique si la relación M es función.
- Dibuje el diagrama sagital correspondiente a la relación M.
- ¿Es M una relación reflexiva, simétrica, transitiva, de equivalencia o ninguna de las anteriores? Justifique

con un ejercicio como el anterior el estudiante se motivó a diferenciar los elementos implícitos del concepto de función, fue así como se logró "visualizar el concepto de función".

8.2.3 Formas de representación de una función visualizando su concepto y algunas funciones especiales

Se aprovechó esta unidad de información para ilustrar con ejemplos particulares las diferentes formas de representación de una función, así por ejemplo:

- Las funciones parte entera y valor absoluto se ilustraron en forma algebraica y gráfica.

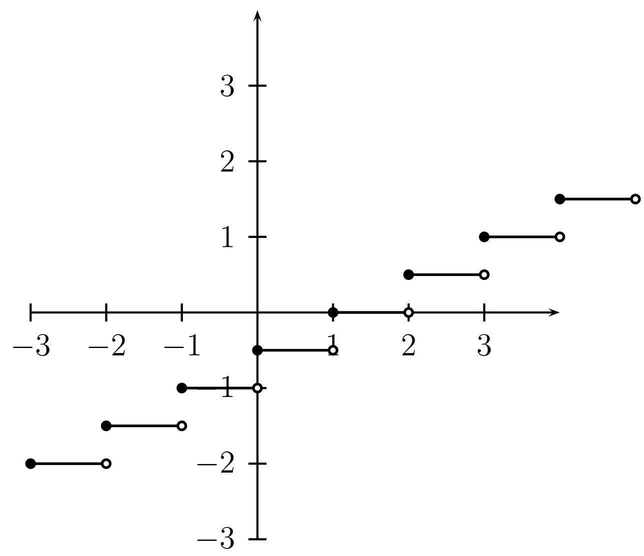


Figura 19

Función parte entera:

$y = [|x|]$

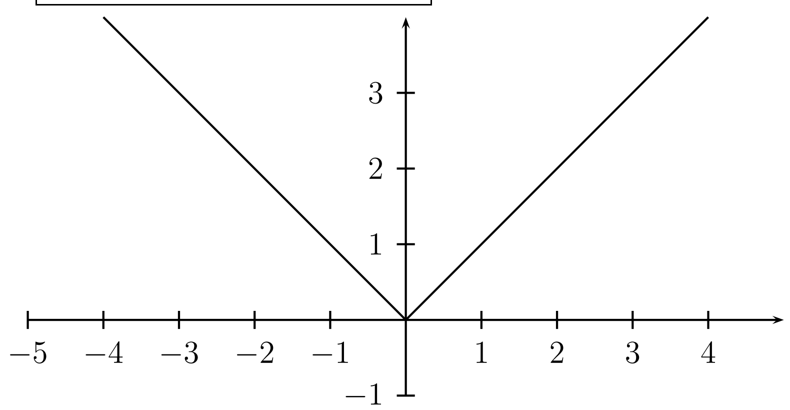


Figura 20

Función valor absoluto:
$y = \|x\|$

- Se dieron ejemplos gráficos de funciones por partes, crecientes, decrecientes, par e impar. Ejemplo:

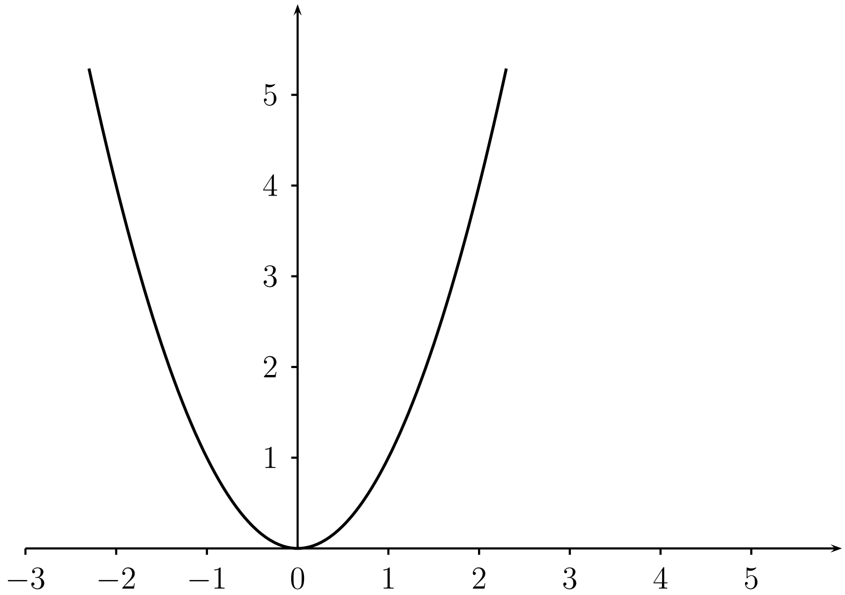


Figura 21

Función par: $y = x^2$

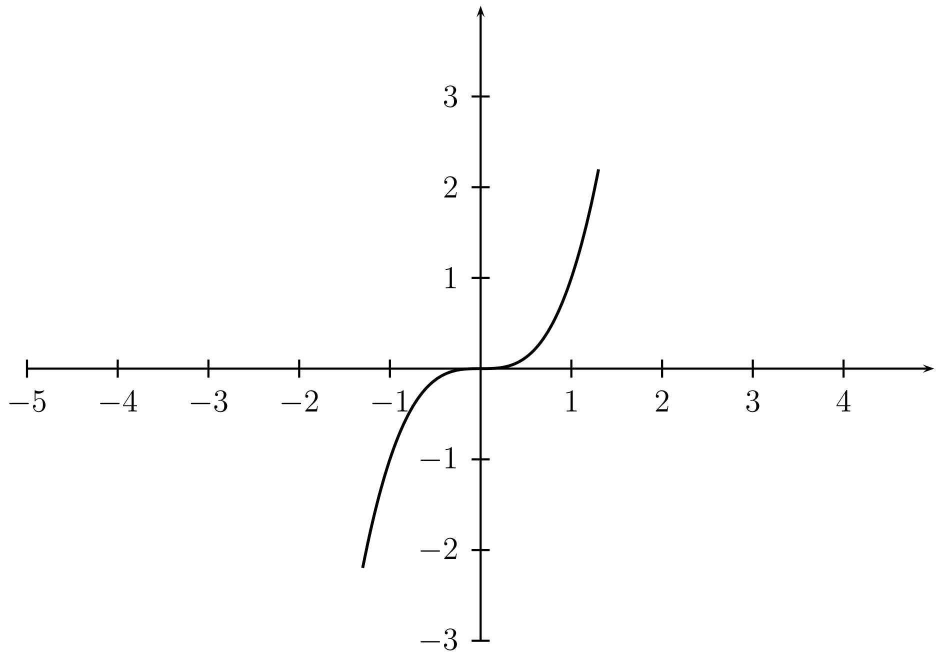


Figura 22

Función impar:

$y = x^3$

- Se ilustró verbalmente, combinación de funciones, función uno a uno y funciones inversas.Ejemplo:

  En cada caso la gráfica se enriqueció cambiando expresiones más complejas $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, etc.

  La función inversa de f es una regla de correspondencia que "invierte" la función original f, es decir, la x de f se convierte en "y" y la "y" de f se convierte en "x (el dominio de f es el rango de la función inversa de f, lo mismo ocurre con el rango: el rango de f es el dominio de la función inversa de f). Si quisiéramos determinar que propiedad debe tener una función para que "la regla de inversión" sea también una función debe ocurrir que cada elemento del rango esté asociado con un sólo elemento del dominio. A este tipo de funciones se les denomina uno a uno: Ejemplo: funciones lineales ($y = mx + b$)

- A partir de la descripción de una función por medio de una tabla de pares ordenados se expresó la función numéricamente: Ejemplo:

  Los datos que se muestran en el cuadro provienen de un experimento sobre la concentración $C(t)$(moles por litro) de un óxido en un tiempo t (t en minutos).

t	$C(t)$
0	$0,08$
2	$0,057$
4	$0,0408$
6	$0,0295$
8	$0,021$

  Hubo ejercicios que tenían una información introductoria para complementar los datos requeridos. Ejemplo:

  Dada la función f cuya ecuación es $y = |x|$ definida por

$$y = \begin{cases} \text{x} & si\ x \geq 0 \\ \text{-x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

  cuya representación gráfica es:

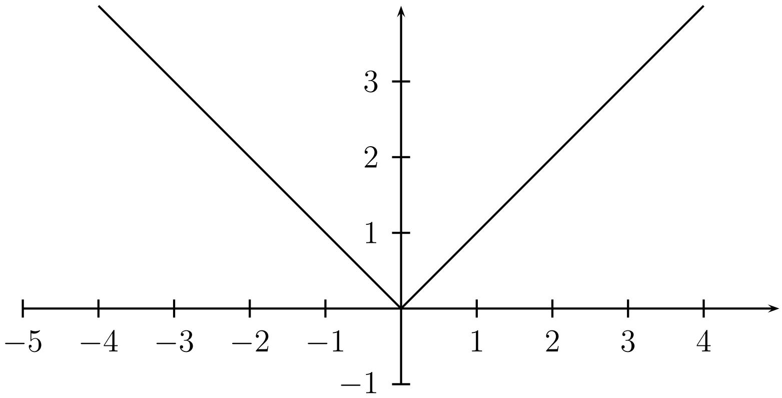


Figura 23

Función valor absoluto

Interpretar a f, expresar su:

- Dominio
- rango
- Intervalo I donde f es creciente
- Intervalo I donde f es decreciente
- ¿f es par o impar? Justifique

Se observa que con esta metodología de trabajo se requiere "interpretar" y no "memorizar" para resolver un ejercicio.

8.2.4 Función lineal y no lineal

Basados en el proceso anterior en el cual involucramos los temas de desigualdades, par ordenado y función, introdujimos ejemplos de funciones, uno de estos fue la función lineal; este concepto se introdujo a partir de datos tabulados ya que con éstos analizamos si tenían incrementos iguales tanto en x como en "y", es decir, hallamos los incrementos $\triangle x$ y $\triangle y$, para encontrar así la pendiente $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, si era posible. Si no era posible entonces se llegaba a la conclusión de que la función no era lineal. Con la metodología anterior se logró diferenciar una función lineal, de una no lineal.

Cuando los alumnos identificaban las funciones lineales con la información suministrada, los estudiantes con la unidad de información ya tenían las herramientas para reconocer las características de la pendiente m, es decir, sabían si $m < 0$, $m = 0$, $m > 0$ ó si m no está definida, tanto en forma algebraica como gráfica. Además, se hizo énfasis en dar la estrategia para encontrar el **modelo** algebraico de función lineal en un problema de aplicación en el área de economía: Ejemplo:

Un fabricante puede vender cierto producto a 50 dólares por unidad. El costo total de unos gastos generales fijos es de 4500. Si queremos saber el costo C de la producción de x artículos, sabiendo que b=4500 son los costos fijos, entonces:

Costo de un artículo: $C(1) = 50(1) + 4500$

Costo de dos artículos: $C(2) = 50(2) + 4500$

Por tanto,

el costo de x artículos es: $C(x) = 50x + 4500$

En general,

$C(x)$ **es el costo de producción de x artículos**

m **es el costo marginal (variación del costo con respecto a la producción)**

b **es el costo fijo.**

Concluimos que con esta unidad de información el estudiante

diferenció la función lineal de la no lineal, **modeló** una función a partir de un problema de aplicación y utilizó el **mediador** calculadora en ejercicios como éste:

Identificar si la función representada numéricamente es lineal o no:

x	-10	0	10	20	30
$h(x)$	$-1,5$	0	$1,5$	$2,5$	$3,5$

8.2.5 Función lineal y su pendiente

Como en la unidad de información anterior se diferenció una función lineal de una no lineal, ahora interesa profundizar en los elementos de estas dos clases de funciones. En la presente unidad temática nos referimos a la función lineal: Se inició con el concepto de incremento a partir de una situación dada:

Si un móvil está en la posición $P_1 = 1$ y en un tiempo t pasa a la posición $P_2 = 2$ y así sucesivamente, tenemos los siguientes incrementos: $\Delta x_2, \Delta x_3$......

$\Delta x_2 = P_2 - P_1 = 2 - 1 = 1$

$\Delta x_3 = P_3 - P_2 = 3 - 2 = 1$

$\vdots$

gráficamente,

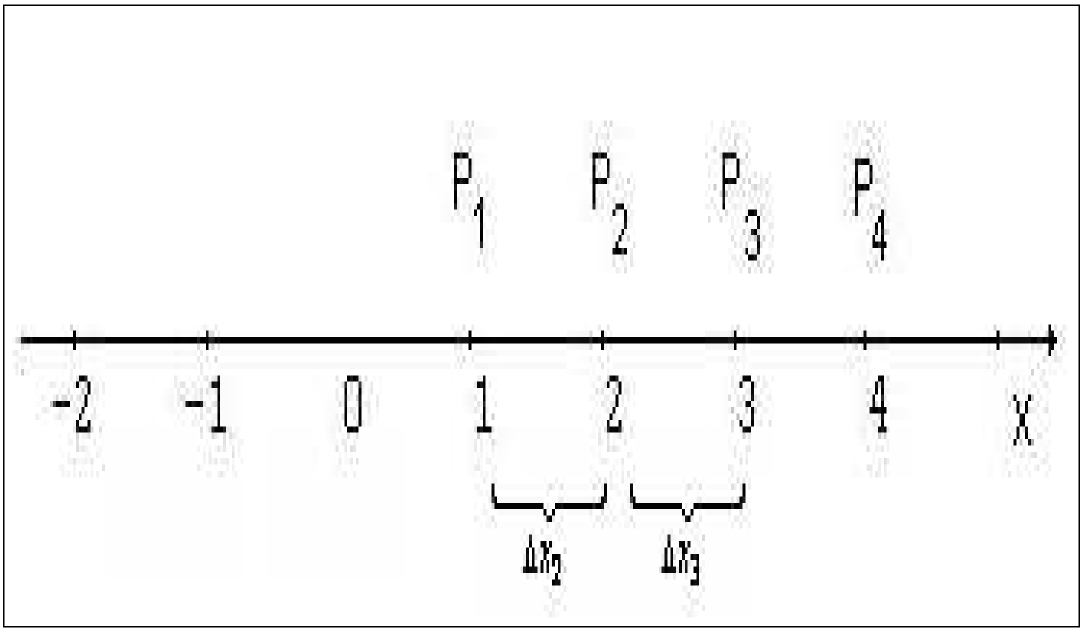


Figura 24

recorridos en intervalos de tiempo iguales: $\Delta x_2 = \Delta x_3$

Pero como el móvil hace estos recorridos en intervalos de tiempo t iguales, podemos hallar el incremento (así $\Delta t_2 = \Delta t_3$).De esta forma se aplicó un **modelo matemático** .

Luego teniendo los incrementos $\Delta x, \Delta t$ pudimos introducir el concepto de pendiente como $tang\theta$.

Ejemplo:

Dados los siguientes puntos $(0, -1), (2, 3), (4, 7)$ ilustrarlos en el plano cartesiano y encontrar los Δx y Δy para hallar la pendiente:

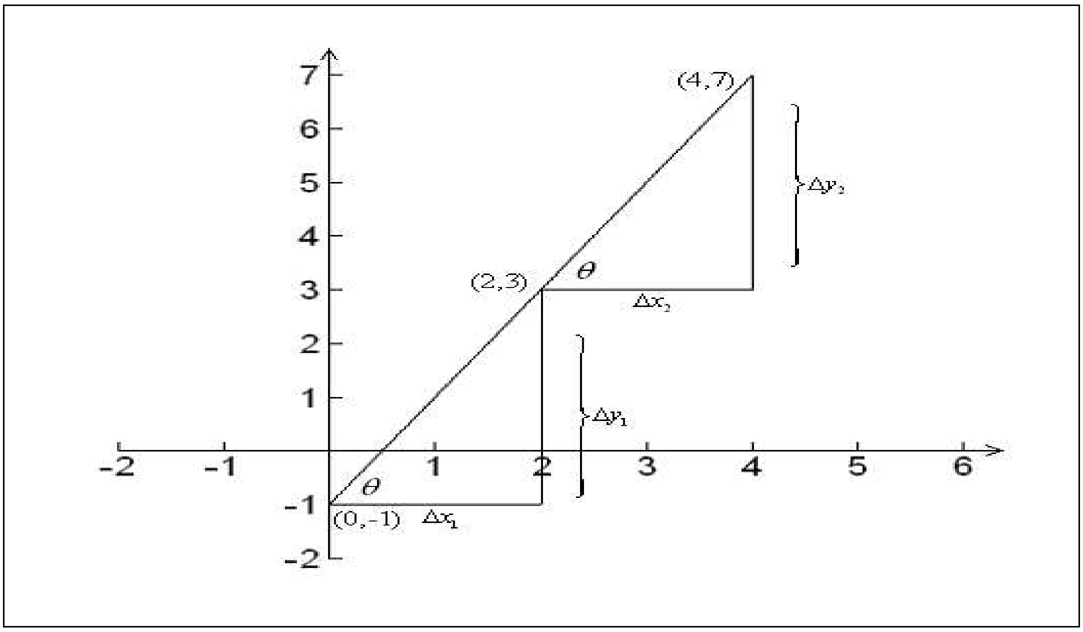


Figura 25

la pendiente a través de los incrementos Δx y Δy para introducir su concepto de pendiente como $tang\Theta$

$\Delta y_1 = 3 - (-1) = 4$

$\Delta y_2 = 7 - 3 = 4$

$\Delta x_1 = 2 - 0 = 2$

$\Delta x_2 = 4 - 2 = 2$

$m = tang\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$

De esta forma se **visualiza** el concepto de pendiente en términos de $tang\theta$.

Utilizando el gráfico del ejemplo anterior se introdujo el concepto de coordenada al origen . Ya teniendo la pendiente m y la coordenada al origen b se llega a las notaciones de funciones lineales y ecuaciones lineales:

$f(x) = mx + b$

$y = mx + b$

Se recordó el concepto de relación directamente proporcional en el caso que $b = 0$ ya que la ecuación $y = mx$ es una relación directamente proporcional.

Luego a través de gráficos se **visualizaron** las posibilidades de la pendiente m de acuerdo al ángulo θ que forma la recta con la horizontal.

Finalmente, a partir de un conjunto de pares ordenados y a partir del uso eficaz del mediador Excel identificamos y enriquecimos el concepto de función lineal asociado a los cambios de m.

8.2.6 **Función cuadrática**

En esta unidad de información se introduce el primer caso de una función no lineal denominada función cuadrática $y = x^2$, la cual se construyó algebraica y gráficamente con el fin de apreciar su vértice e introducir el concepto de simetría con respecto a un eje vertical. Partimos inicialmente de fenómenos naturales como $y = \frac{1}{2}gt^2$, caída libre y luego a las formas clásicas

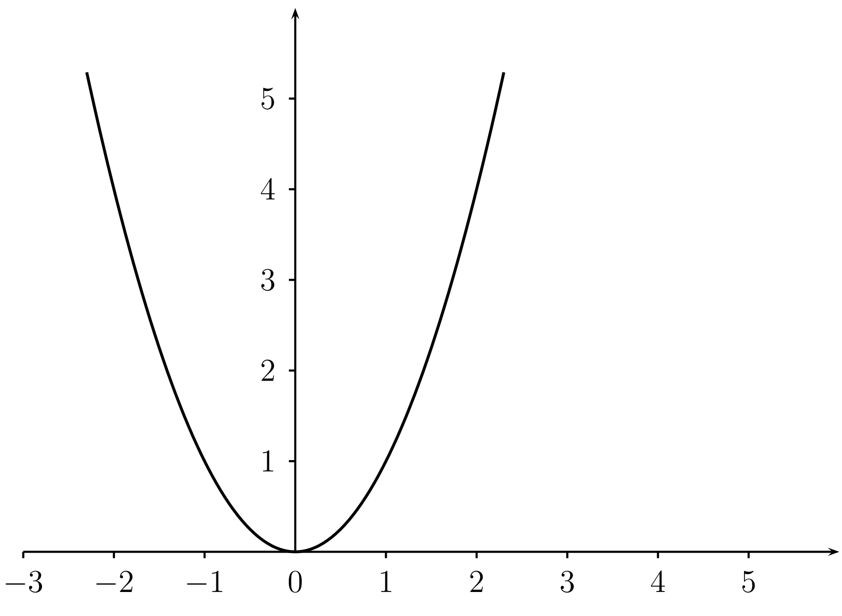


Figura 26

$y = x^2$

Luego se **visualizó** el caso de las parábolas $y = ax^2$ para $a > 0$ y $a < 0$, las parábolas $y = ax^2 + c$ con $c > 0$ y $c < 0$ con el fin de observar el desplazamiento vertical en sus gráficas y las parábolas $y = (x - b)^2$ para $b > 0$, $b < 0$ con el fin de observar el desplazamiento horizontal de las gráficas.

Ejemplos:

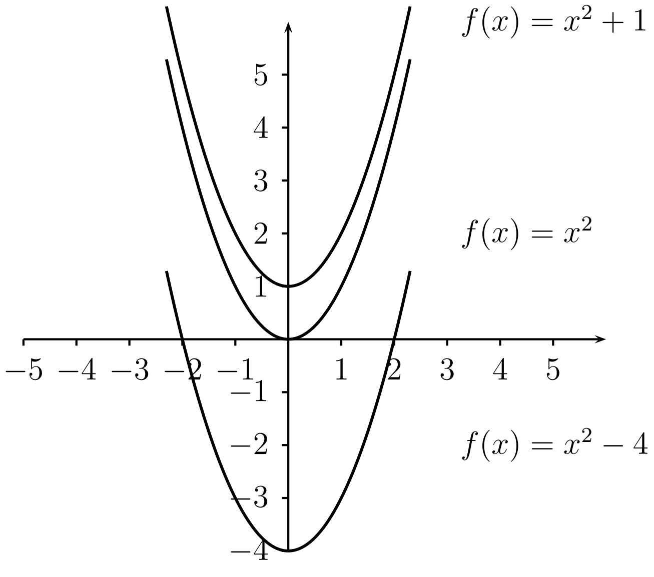


Figura 27

transformaciones de la función $y = x^2$ a través del eje "y"

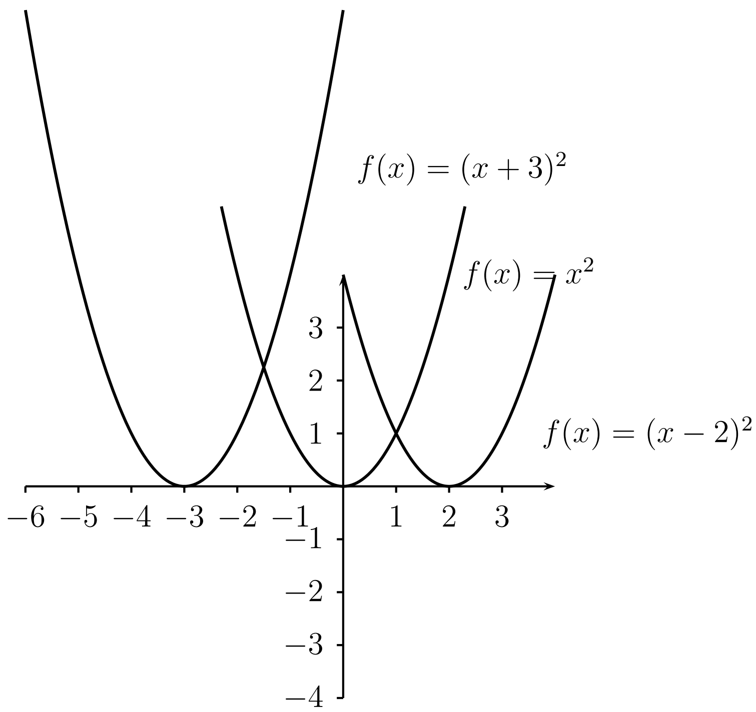


Figura 28

transformación de la función $y = x^2$ a través del eje x

No es lo mismo “enseñarle” a un alumno qué es y con qué se grafica $y = x^2$, que incitarle a construir formas cuadráticas cada vez diferentes y visualizadas simultáneamente en el plano. Se trata de expresiones como $y = x^2 \pm c$, $y = ax^2 \pm c$, $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, etc.

Posteriormente a partir de la expresión general de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ obtuvimos de dos formas el vértice, una es en forma analítica: $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$ y la otra forma, fue haciendo la completación del trinomio cuadrado perfecto . En este momento el estudiante puede hallar el vértice tanto en forma gráfica como en forma analítica.

Finalmente, se ofreció un esquema para obtener un **modelo matemático** para diferentes funciones, pero los ejemplos y ejercicios propuestos se manifestaron sólo en el caso de funciones cuadráticas, la aplicación de este esquema en otras funciones se postergó hacia las unidades temáticas siguientes.

En este momento se observa como el estudiante se enfrenta a **modelar** funciones a partir de un problema real y puede verificar los resultados a través del uso eficaz de **mediadores** como la calculadora gráfica.

Ejemplo:

Sara desea cercar un corral rectangular para su perro, junto a su casa. La casa sirve como uno de los lados, necesita cercar sólo tres lados. Si utiliza 80m lineales de cerca; ¿Cuáles son las dimensiones del corral con las que obtendrá el área máxima posible?

Solución:

Siguiendo el esquema para obtener el modelo matemático se aplican los siguientes pasos :

1) El diagrama está dado a partir de el enunciado del problema.

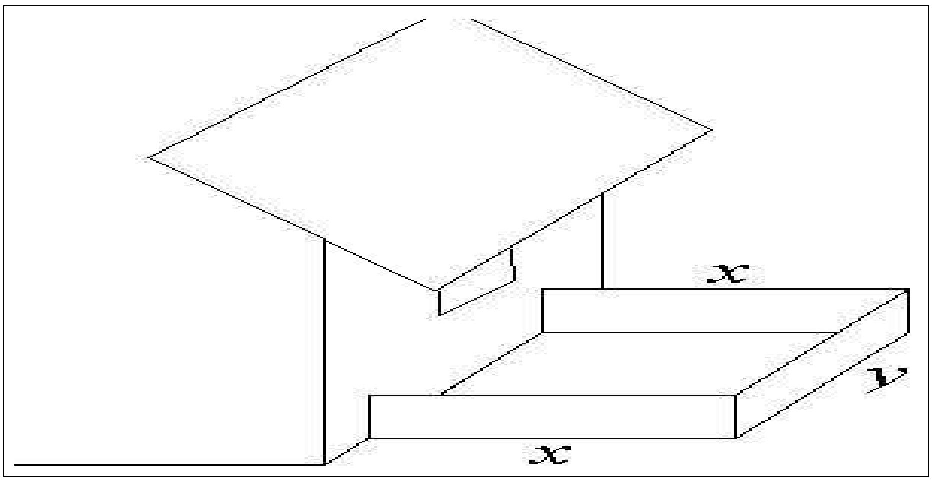


Figura 29

corral rectangular

2) Escribimos una fórmula para el área del rectángulo. $A = bh$

3) Aplicamos esta fórmula al corral rectangular $A = xy$:(3), cantidad que intentamos maximizar. Ahora vamos a expresar el área como función de una variable,

4) como la longitud de cerca para utilizar es 80m tenemos $2x + y = 80$, $y = 80 - 2x$

5) Luego sustituimos en la ecuación (3): $A = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$, y la expresión la reconocemos como una ecuación cuadrática.

6) si graficamos la anterior función con x como el eje horizontal y $A(x)$ como el eje vertical, obtenemos una parábola que se abre hacia abajo.

El vértice de esta parábola nos proporciona el máximo de $A(x)$, o del área. Utilizaremos el método de completación de un trinomio cuadrado perfecto y así determinar el vértice

$A(x) = -2x^2 + 80x$

$A(x) = -2(x^2 - 40x + 400 - 400)$

$A(x) = -2(x^2 - 40x + 400) + 800$

$A(x) = -2(x - 20)^2 + 800$

En el proceso anterior se llevó $A(x)$ a la forma $a(x-h)^2 + k$ por lo tanto $h = 20$ y $k = 800$ y así el vértice es $(20, 800)$.

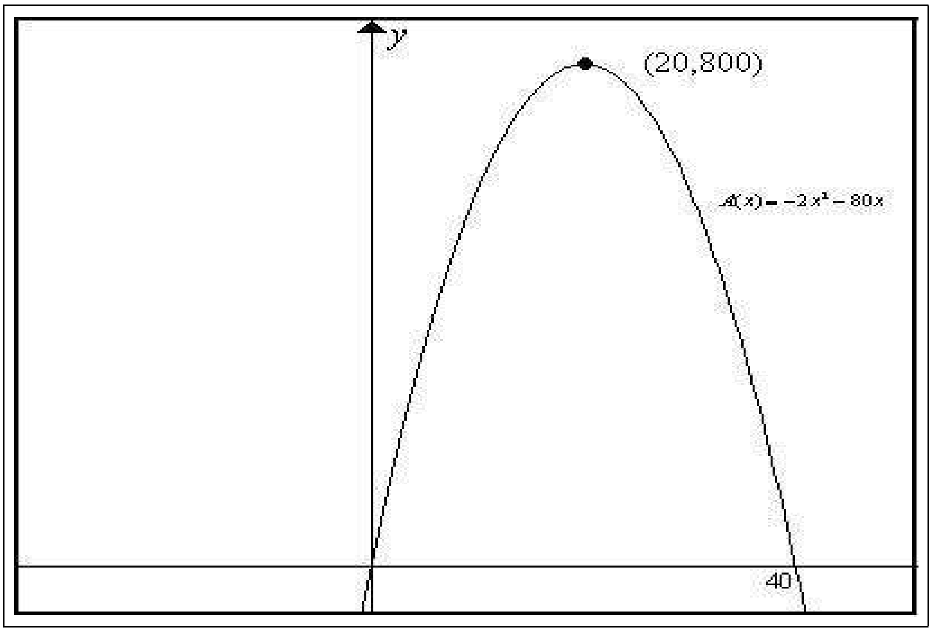


Figura 30

La máxima área del rectángulo es 800 pies cuadrados

Esto significa que el valor máximo de $A(x)$, el área del rectángulo es 800 pies cuadrados y esto sucede cuando x = 20m; como x es la longitud de un lado, el otro lado (y) mide $80 - 2x = (80 - 2(20) = 40$m, por lo tanto, las dimensiones que producen el área máxima son $x = 20, y = 40$. Como el área no puede ser negativa el dominio para la función $A(x)$ es $x \in (0, 40)$

8.2.7 Transformaciones de funciones

La unidad de información anterior se aplicó en una función particular (función cuadrática). Existen otras transformaciones posibles y además, se aplican para cualquier tipo de función. En la presente unidad de información se ilustran dichas transformaciones: ampliaciones y reducciones tanto verticales como horizontales; desplazamientos horizontales y verticales con una función trigonométrica, aprovechando su periocidad.

Ejemplo:

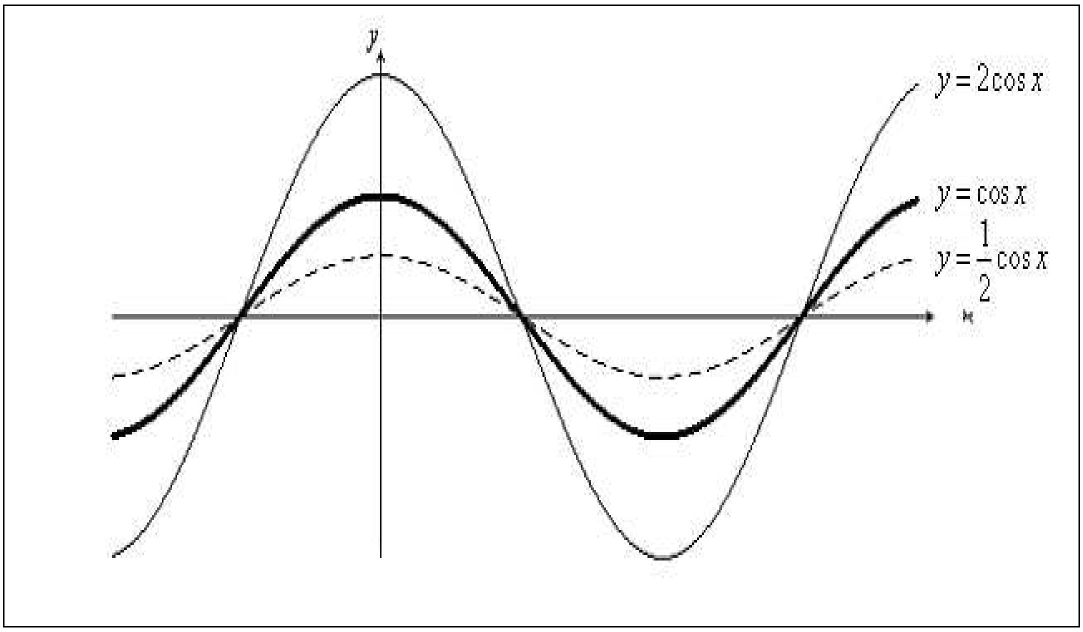


Figura 31

algunas transformaciones de la función $y = cosx$

En esta unidad de información los estudiantes pudieron utilizar el **mediador** calculadora gráfica para verificar dichas transformaciones, además con la cantidad de gráficas y explicaciones respectivas ilustradas a manera de ejemplo los estudiantes pudieron **visualizar** y diferenciar las transformaciones de la curva: Amplitud, desplazamiento, periodicidad.

8.2.8 Clasificación de las funciones

En esta unidad de información se hace una clasificación general de las funciones existentes con sus respectivas definiciones y gráficas. Con algunas de estas funciones se realizaron **modelos** utilizando el esquema general de modelación de funciones descrita en la unidad de información de ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo:

Un tanque de petróleo tiene la forma de un cono circular recto, con una altura de 15 pies y un radio de 4 pies. Suponga que el tanque se llena hasta una profundidad de h pies. Sea x el radio del círculo sobre la superficie del petróleo. Exprese el volumen del petróleo en el tanque como una función de x.

Solución:

1) La figura ilustra la situación descrita.

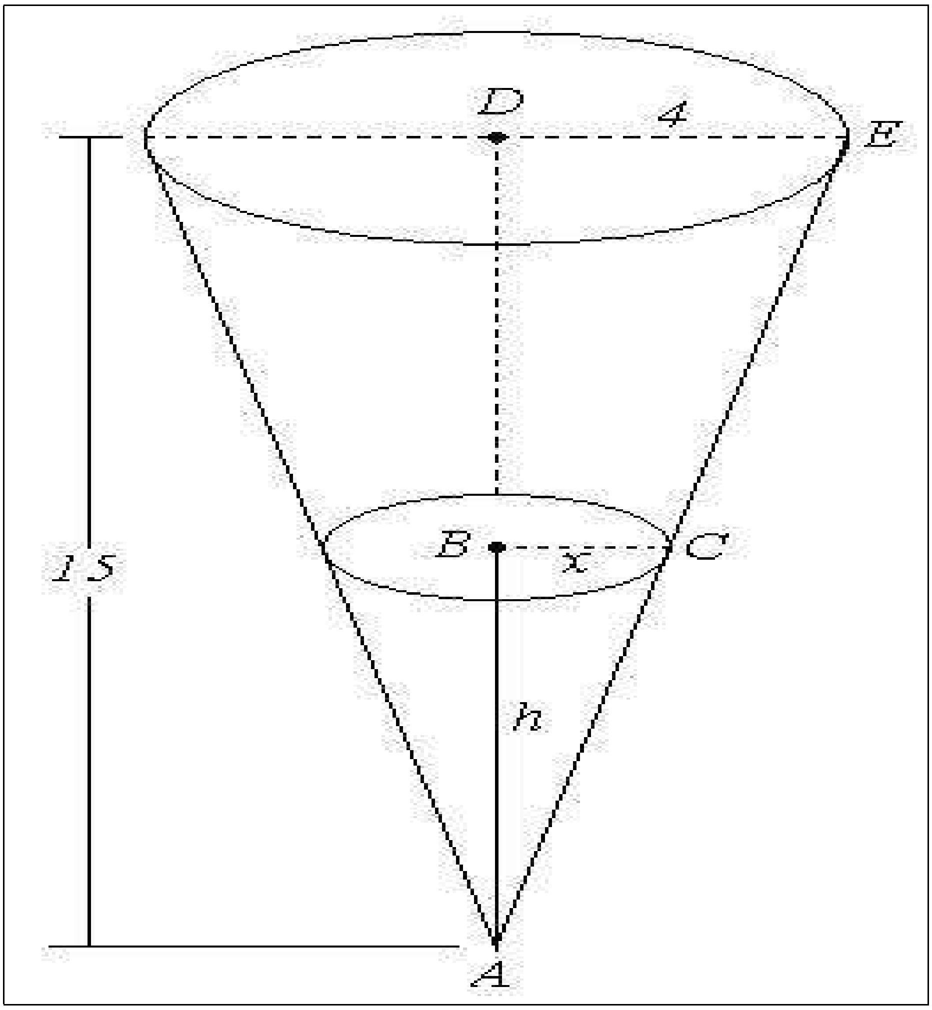


Figura 32

tanque con forma de cono circular recto

2) La fórmula para el volumen V de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. [formula genérica]

3) El volumen del petróleo en el tanque es $\frac{1}{3}\pi x^2 h$ [formula genérica] aplicada a este caso particular]. Para expresar el volumen como función de

x necesitamos determinar una relación entre x y h.

4) En la figura podemos ver que el triángulo ABC es semejante al triángulo ADE, por lo que podemos escribir la siguiente proporción:

   $\frac{h}{x} = \frac{15}{4}$

   $h = \frac{15}{4}x$

   luego sustituimos h en la fórmula de volumen así,

   $V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(\frac{15}{4}x)$

   $V(x) = \frac{5}{4}\pi x^3$

5) $V(x) = \frac{5}{4}\pi x^3$

6) Puesto que x es el radio del círculo sobre la superficie del petróleo, x sólo puede tener un valor mayor o igual que 0 (si el tanque está vacío) y menor o igual que el radio del tanque (si el tanque está lleno). Por lo tanto, el dominio de V(x) es $0 \leq x \leq 4$.

En el anterior problema se da un repaso de:

1) Conocimientos previos del alumno: visualizar el cono, su base,su altura y su generatriz.

2) Conocimientos de geometría: triángulos semejantes, área de un círculo y volumen de un cono, triángulos rectángulos.

Se hallaron también otros modelos para funciones exponenciales y logarítmicas los cuales requerían el uso del **mediador** calculadora para algún valor determinado.

Ejemplo:

La vida media del estroncio es de 25 años. Esto significa que la mitad de cualquier cantidad dada de estroncio se desintegrara en 25 años.

a) Si una muestra de estroncio tiene una masa de 24mg, encuentre una expresión (función)para la masa m(t) que queda después de t años.

solución:

Inicialmente la masa es de 24mg y se reduce a la mitad durante cada 25 años, por tanto,

Para $t = 0$, $m(0) = 24$

Para $t = 25, m(25) = \frac{1}{2}(24)$

Para $t = 50, m(50) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$

Para $t = 75, m(75) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$

Para $t = 100, m(100) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$

Con base en este patrón, parece que la masa restante después de t años es:
$m(t) = \frac{1}{2^{\frac{t}{25}}}(24) = 24\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^t$

b) Encuentre la masa restante después de 40 años.

solución:

$m(40) = \left(\frac{1}{2^{\frac{40}{25}}}\right)(24) \approx 7{,}9mg$

c) Utilizando la función hallada estimar el tiempo requerido para que la masa se reduzca hasta 5mg.

solución:

$5 = 24\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^t$

$\frac{5}{24} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^t$

$ln\left(\frac{5}{24}\right) = tln\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)$

$t = \frac{ln\left(\frac{5}{24}\right)}{ln\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)}$

donde ln es el logarítmo natural.

$t \approx 57$ años

d) Grafique o en la calculadora verifique el resultado hallado en la pregunta anterior.

solución:

$y = 24\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^t$

$y = 24\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^{57} \approx 5$

También se introdujeron en esta unidad de información temas como: asíntotas, problemas de aplicación utilizando ángulos de elevación y depresión, ángulos notables de funciones trigonométricas entre otros, con el fin de que el estudiante no reciba las funciones como una simple lista de elementos, sino como una herramienta funcional y atractiva a sus intereses.

8.3 Se observó que los estudiantes del grupo experimental en términos generales (75 % según las evaluaciones), identificaron y diferenciaron rápidamente las funciones y sus respectivos elementos(rango, dominio, simetrías,asíntotas,etc).

8.4 Los estudiantes del grupo experimental a través de las actividades propuestas "interpretaron e identificaron funciones con el uso eficiente de mediadores (según las evaluaciones postest).

8.5 Para los estudiantes de los grupos experimentales **se hizo habitual** la interpretación de las diversas funciones con el uso eficiente de mediadores .

8.6 Se observó que los estudiantes llegaron a un conocimiento secuencial y estructurado en el tema de funciones propuesto.

8.7 El estudiante a través de las actividades realizadas con la metodología trabajada logró por sí mismo plantear su propia estrategia de solución a la hora de encarar un problema (aprendizaje significativo). Es decir, siempre estuvimos atentos a que cada alumno viviera su propio proceso con el objeto de propiciar en él, formas propias del conocimiento y por ende que lo aprendido lo aplicaran en otros contextos, **volviéndolo así significativo**.

8.8 A través del uso eficiente de mediadores el estudiante mejoró mucho las actividades propuestas en un tiempo mínimo. Por ejemplo, para operar con decimales es mejor usar la calculadora y así ahorra tiempo. Para hallar los elementos de una gráfica no standard como su dominio, rango, interceptos, etc la utilización de la calculadora gráfica o un software como derive nos ofrece el resultado rápidamente y la opción interpretativa pertinente.

8.8 Con la metodología propuesta los estudiantes estuvieron en "búsqueda de procesos de solución", pues al final de la clase entregaron diversas soluciones de los ejercicios propuestos en la "hoja resumen".

8.10 Se logró que los estudiantes fuesen agentes activos en un entorno social en las actividades de la clase, pues no fueron simples receptores de estímulos sino transformadores de éstos.

"Para Vygostky, el entorno social representa un papel fundamental en el aprendizaje: el conocimiento no es un objeto que se pasa de uno a otro, sino que es algo que se construye por medio de operaciones y habilidades cognoscitivas que se inducen en la interacción social." [1]

Un caso sensible para ellos se dió en el intercambio de algunas hojas resumen en las cuales el estudiante actuó como evaluador.

[1] http://www.psicopedagogia.com/definicion/teoria%20del%20aprendizaje%20de%20vigotsky

8.11 El estudiante logra a través de las actividades propuestas en una forma muy lenta ser cada vez más autónomo en su propio proceso de aprendizaje.

8.12 La dinámica básica que implementamos con los grupos experimentales fue el trabajo colectivo e individual con entrega material de conceptos básicos,cuestionario grupal e individual.Es en el momento del desarrollo del cuestionario o taller grupal cuando el estudiante está en el proceso que hemos denominado "búsqueda de procesos de solución"(momento de tensión) . Los cuestionarios fueron propiciatorios del trabajo gráfico, interpretativo y prospectivo.

8.13 El grupo control de aproximadamente 30 estudiantes fue sometido a una dinámica de clase tradicional, es decir, clase expositiva abierta pero tratando los mismos temas vistos con los grupos experimentales.

8.14 Observamos varias limitaciones con respecto al trabajo experimental realizado:

- Hubo un grupo experimental ubicado en el bloque 1 del aula 434; esta aula está diseñada para 30 estudiantes y allí se acomodaban alrededor de 50 alumnos.
- En el auditorio 1D-218 asistieron 70 estudiantes, las luces funcionaban deficientemente, el tablero era muy pequeño.
- Los estudiantes que tuvieron suficientes inasistencias o llegadas tarde a clase mostraron más dificultad para el desarrollo de las actividades pero esto se subsanaba en parte con las asesorías individuales.

8.15 Con los resultados obtenidos en el trabajo experimental se concluye que mediante las formas de representación (visualización y modelación) de funciones y a través del uso eficiente de mediadores, los estudiantes lograron hacer mucho mas significativo el tema de funciones es decir, alcanzaron un "aprendizaje significativo".

8.16 El problema de los recursos y de los costos: Para el desarrollo de estas actividades concretas (talleres), utilizamos 15 calculadoras, sin contar claro está con las que llevaron los estudiantes. Además, en las salas de cómputo de Ingeniería y Farmacia el programa "Derive" estaba disponible pero no siempre a las horas del taller, por lo que fue necesario utilizar tiempo extraclase. Creemos que la Universidad debe acondicionar salas de calculadoras, ya sea al lado de las de cómputo o en la misma biblioteca central. Las calculadoras portátiles son más baratas que los computadores.

8.17 Como propuesta prospectiva para ser desarrollada recomendamos la siguiente: Un proyecto de visualización alrededor de límite de una función que incluya la visualización del concepto de límite, la visualización del límite uniforme y la visualización del límite superior e inferior de una función con la condición épsilon-delta (ϵ y δ)

BIBLIOGRAFÍA

1. AUSUBEL,David;NOVAK,Joseph y HANESIAN,Helen Psicología Educativa. Mexico,Trillas,1992. P.107.

2. AYRES,Frank. Teoría y problemas de cálculo diferencial e integral: 1175 problemas resueltos. Mexico,Mc Graw Hill, 1986.

3. AZCARATE,Carmen y DEULOFEU,Jordi. Funciones y Gráficas. En: Matemáticas: Cultura y aprendizaje. No 26. Madrid,Síntesis,1996. p.82.

4. BUSTOS C,Félix. Constructivismo epistemológico, psicológico y didáctico. Bogotá,Magisterio,1994. p.7.

5. CARRETERO Mario. Constructivismo y Educación. España,Luis Vives,Zaragoza,1993. p.45.

6. DE GUZMÁN,Miguel. El rincón de la Pizarra: Ensayos de Visualización en análisis matemático. Madrid,Pirámide, 2001. p.11-41.

7. DIAZ CADAVID,Abel y GUTIERREZ ARIAS,Armando. Estadística General. Medellín,Universidad de Antioquia,1991. p.87

8. DUVAL,Raymond. Semiosis y Pensamiento Matemático: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali,Instituto de Educación y Pedagogía,2004. p.34.

9. ECO,Humberto. Cómo se hace una tesis. Barcelona,Gedisa, 1994. p188-214.

10. FIOL,m.Luisa;FORTUNY,Aymemi y JOSEP M. Proporcionalidad directa: La forma y el número. En:Matemáticas Cultura y aprendizaje,No 20. Madrid,Síntesis,1990. p.16,18.

11. GARCIA,Alfonsa, MARTINEZ,Alfredo y MIÑANO, Rafael. Nuevas Tecnologías y enseñanzas de las matemáticas. Madrid,Síntesis,2000. p.20.

12. HAIR,JF;ANDERSON RE;TATHAM,RL y BLACK WC. Análisis Multivariante, 5 ed. Madrid: Person Educación, 1999.

13. HAND,D.J;TAYLOR,C.C. Multivariate Analysis of Variance and Repeated Measures. London,Chaptman and Hall, 1987.

14. KUME,Hitoshi. Herramientas estadísticas básicas para el mejoramiento de la calidad. Argentina, norma, 1992.

15. JODAR SANCHEZ,Lucas. Modelización: El puente entre las matemáticas y el mundo real. España, Universidad Politécnica de Valencia,2002. p.94,95.

16. JOHNSON,R.A. WICHERN,D,W. Applied Multivariate Satatistical Analysis. N.Y,s.e. 1992.

17. JOLIBERT,Josette. El vaivén permanente en una construcción recíproca En:Educación y Pedagogía,No 7, Bogotá,Magisterio,(febrero 2004). p.8

18. KASNER Edward, NEWMAN James. Matemáticas e Imaginación. Argentina, Hispamerica, 1967.

19. LONDOÑO B,Oscar;SANDOVAL,Juan de Jesús y QUINTERO,Maria Eva. Manual de Estadística aplicada a la investigación cualitativa. Medellín,Nicolás Aristizabal,2002. p49,129-154.

20. MARTINEZ ARIAS,R. Psicometria: teoría de los test psicologicos y educativos. Madrid: 1996.

21. MATA,Guevara, Luis B. .Aprendizaje Significativo como Linea de Investigación", Editorial Universo, Maracaibo, 1994.

22. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas Lineamientos curriculares: Areas obligatorias y fundamentales. Santa Fe de Bogotá,Magisterio,1998. p.97-102.

23. MONTGOMERY,D. Diseño y Analisis de Experimentos. Mexico,Limusa Wiley,2004.

24. RIGDON,Valery. Cálculo. Mexico,Prentice Hall,2001. p.9.

25. RIOS,Fabián et al. MOdelos Didáctiocos diseñados con tecnología informática para la construcción y aprendizaje de conceptos básicos en ciencias naturales y matemáticas. Medellín,s.e,1999. p.22,23.

26. RUNYON,Haber. Estadística: Para las ciencias sociales. Mexico, Fondo Educativo Iberoamericano S.A, 1984.

27. STEWART,James. Cálculo Diferencial e Integral. Mexico, Thomson, 1999. p.12-93.

28. SPIEGEL,Murray R. Estadística: Teoría y problemas. Colombia, Mac Graw Hill, 1969.

29. TAKEUCHI,Yu y ALBIS,Victor. Cálculo I: Introducción al Cálculo. Medellín,Universidad Nacional,1967.

30. VIGOTSKY Lev.S. Procesos Sicológicos superiores. Córcega,Crítica,1979. p.191,196

31. VYGOTSKY,Lev.S. Obras Escogidas. Madrid, Visor,1991.

32. VYGOTSKY,Lev.S. El desarrollo de los conceptos científicos en la infancia.

33. VALLEY, Peters. Esquemas Conceptuales. En Cuadernos de Pedagogía,No 309. Mexico,Fontalba,(enero 2002). p.88.

34. WILLS,Dario et al. Serie Matemática Moderna Estructurada. bogotá,Norma,1976. p.99-107

Capítulo 9

ANEXO:UNIDADES DE INFORMACIÓN Y CUESTIONARIOS DE APLICACIÓN