UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

José Wilde Cisneros

LA OBJETIVACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL A PARTIR DEL PROCESO DE MEDICIÓN

Trabajo de grado para optar al título de magister en Educación Matemática

Asesores

Walter Fernando Castro Gordillo

Sandra Yaned Cadavid Muñoz

Medellín, Colombia 2014

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DE MAESTRÍA

LA OBJETIVACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL A PARTIR DEL PROCESO DE MEDICIÓN

José Wilde Cisneros

Asesores: Walter Fernando Castro Gordillo

Sandra Yaned Cadavid Muñoz

Nota de Aceptación

____

____

____

____

____

Presidente del jurado

Luis Radford

Jurado

Solange Roa Fuentes

Jurado

Medellín, Colombia 2014

AGRADECIMIENTOS

A la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia por haberme brindado el apoyo para mi formación como investigador en Educación Matemática.

A los docentes Walter Fernando Castro Gordillo y Sandra Yaned Cadavid Muñoz por haber aceptado el reto de continuar con mi proceso de formación.

A los colegas y amigos del grupo de investigación Matemática Educación y Sociedad (MES) con quienes tuve la oportunidad de compartir esta investigación en algunos de los encuentros realizados y me posibilitaron construirla de una mejor manera.

A la Institución Educativa Andrés Bello, por brindarme el espacio para realizar el trabajo de investigación y a los alumnos del grado 7°- 4 del año 2013, por su compromiso, dedicación y responsabilidad para llevar a cabo las actividades propuestas.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación vincula elementos de la perspectiva sociocultural (Vygostky, 1982) y la teoría de la actividad (Leontiev, 1978) con los lineamientos de la teoría de la objetivación (Radford, 2006, 2008, 2011, 2013) en la construcción del número racional, para dar respuesta a la pregunta ¿Cómo objetivan el número racional, a partir de los procesos de medición alumnos de grado séptimo de la Institución Educativa Andrés Bello?

Para ello, se tiene en cuenta un marco referencial donde se inscribe la mediación[1] como un punto de partida desde el cual se desentraña el proceso de objetivación, proceso que permite establecer un vínculo con la producción cultural histórica de los artefactos[2] que usan los niños para producir y reproducir conocimiento. En este sentido, se analizan los procesos de producción y reproducción de conocimientos a partir de actividades o situaciones en las cuales los niños comparten y se apropian de significados culturales tanto en forma individual como en interacción social, particularmente se analiza la elaboración del concepto de razón a partir de los procesos de medición desencadenadores del proceso de objetivación.

La investigación se realiza en el ambiente natural escolar, con seis niños en edades entre 11 y 12 años, de grado séptimo, de la Institución Educativa Andrés Bello, municipio de Bello, departamento de Antioquia; se asume en el marco metodológico el paradigma cualitativo,

[1] "Es entendida en esta investigación como procesos donde los niños llevan a cabo acciones con artefactos disponibles culturalmente (palabras, textos, símbolos, cuaderno, hoja de producción de conocimientos) que a su vez están conformados en y por actividades donde se negocian significados" (Daniels 2003). Son las relaciones posibles entre el sujeto y el objeto mediante artefactos.

[2] "Un artefacto ha sido producido para un uso determinado y se incorpora a un sistema de fines y propósitos humanos" (Ibídem). Los artefactos poseen una naturaleza dual en el sentido que son ideales y materiales simultáneamente. "Es algo que adquiere significado y valor mediante su existencia en un campo de actividad humana" (Ibídem). Los artefactos desarrollan la cognición humana.

teniendo como soporte el método estudio de casos, el cual se focaliza en la interacción social de los sujetos y la mediación instrumental.

Palabras clave. Actividad, objetivación, número racional, medición, mediación.

ABSTRACT

The present research links elements of sociocultural perspective (Vygotsky, 1982) and activity theory (Leontiev, 1978) along the guidelines of the theory of objectification (Radford, 2006, 2008, 2011, 2013) in the construction of the rational number, to give response to the question ¿How they objectify rational number from the processes of measurement pupils of the seventh degree of the Educational Institution Andrés Bello?

For it, one considers a framework where the mediation[3] enroll as starting point of item from which the objectification process unravels, a process that provides a link with the historical cultural production of artifacts[4] that children use to produce and to reproduce knowing. In this sense, the processes of production and reproduction of knowing from activities or situations in which children share and appropriate of cultural meanings both individual form and in social interaction , particularly the development of the concept of reason is analyzed from measurement processes triggers the process of objectification.

Research is conducted in the natural school environment, with six children in ages between 11 and 12 years, of the seventh degree, of the Educational Institution, municipality of Bello, Antioquia department, is assumed in the methodological framework the qualitative paradigm, having to support the case study, which focuses on the social interaction of the subjects and the instrumental mediation method.

---

[3] It is understood in this investigation as processes where the children carry out actions with available culturally (words, texts, symbols, notebook, and leaf of production of knowing) that in turn are shaped in and for activities where meanings are negotiated” (Daniels 2003). They are the possible relations between the subject and the object by means of appliances.

[4] "An artifact has been produced for a particular purpose and incorporated into a system of human ends and purposes" (ibid.). The artifacts have a dual nature in that they are ideal and material simultaneously. "It's something that acquires meaning and value through its existence in a field of human activity" (Ibid). Artifacts develop human cognition.

Keywords. Activity, objectification, rational number, measurement, mediation.

CONTENIDO

LISTADO DE FIGURAS

LISTADO DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Esta investigación se sitúa en el campo de la objetivación del número racional y se asume desde el desarrollo de actividades o tareas que involucran aspectos sobre las magnitudes el conteo y la medición, considerados esenciales (Estándares Básicos de Matemáticas, 2006) para el desarrollo del concepto de número racional.

La pregunta de investigación es, ¿Cómo objetivan el número racional, a partir de los procesos de medición, alumnos de grado séptimo de la Institución Educativa Andrés Bello?

Se plantea como objetivo general de la investigación: Analizar la objetivación del número racional, en estudiantes de grado séptimo, a partir de los procesos de medición que generan la razón.

Para responder a esta pregunta es necesario tener en cuenta la realidad escolar en la cual los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia proponen un enfoque que busca el desarrollo de competencias que permita a los alumnos afrontar los problemas matemáticos de la vida y del trabajo empleando los mejores medios posibles. Para ello, las instituciones educativas podrían adelantar esfuerzos para proponer procesos de aprendizaje matemático que armonicen el desarrollo del pensamiento con actividades matemáticas que ayuden en la formación de sujetos críticos, para los cuales las matemáticas aprendidas en la escuela sean la base para la toma de decisiones en su vida cotidiana, en especial cuando se utiliza el número racional.

De otra parte, es necesario una fundamentación teórica para analizar el proceso de objetivación del número racional abordada desde la perspectiva sociocultural de la educación y de la Educación Matemática, para lo cual se sustenta en la teoría sociocultural (Vygostky, 1982), la teoría de la actividad (Leontiev, 1978), la teoría de la objetivación (Radford 2006, 2008, 2011, 2013) y las actividades diseñadas de forma que permeen la interacción entre el investigador, los alumnos y el conocimiento matemático subyacente, expresadas como una unidad entre la teoría y la práctica.

Este informe está conformado por seis capítulos cuya descripción se esboza a continuación.

El primer capítulo presenta la problemática relacionada con las dificultades de aprendizaje del número racional que han sido tema de estudio de muchas investigaciones (Behr, Harel, Post, y Lesh, 1993; Cedillo, 2006; Charalambous y Pantazi, 2007; Escolano, 2010; Kieren, 1988, 1993; Lamon, 2012; Pontón, 2012; Obando, Vasco y Arboleda, 2013). Las investigaciones referidas se focalizan en el proceso de enseñanza y en las dificultades que presentan los niños en su aprendizaje. Las investigaciones mencionadas realizan contribuciones sobre la comprensión y sobre la apropiación del objeto matemático en cuestión.

También se aborda en este capítulo la metodología cualitativa, la cual supone una aproximación interpretativa a la comprensión de los objetos matemáticos manifestada por los alumnos (Denzin y Lincoln , 2005) y se respalda en el estudio de casos, el cual se focaliza tanto en la interacción social de los sujetos como en la mediación (semiótica e instrumental). En este sentido se identifican algunas concepciones que poseen los niños sobre la razón y específicamente sobre el número racional. Estas concepciones ponen en juego actividades o situaciones en determinados contextos, en especial el contexto de la medida.

El segundo capítulo presenta tres fases (Tabla 1) que fueron el escenario natural donde se desarrolló la investigación. Se destacan los aspectos asociados con la metodología de la investigación, con su estructura, con la descripción general de la investigación, con la caracterización de los participantes y con el contexto institucional. Adicionalmente se presentan los instrumentos de producción de la información y, finalmente se procede con la descripción metodológica de las fases de la investigación y de los criterios de análisis de la información.

El tercer capítulo presenta el marco teórico así como los elementos considerados en el análisis de la objetivación del número racional. Se inicia con el enfoque sociocultural cuya intención es describir las relaciones entre los niños y las situaciones culturales, institucionales e históricas donde se realiza la indagación. Se detallan los aspectos más relevantes de la teoría sociocultural, a través de la cual se enfatiza la relación entre el desarrollo del pensamiento y el lenguaje. Además se discute el uso de instrumentos y de signos como mediadores para la comprensión de procesos sociales.

El cuarto capítulo, sobre la metodología, incluye las actividades cuya finalidad es promover la actividad (necesidades, motivos, acciones y operaciones) matemática de los niños por la acción del docente.

El capítulo cinco plantea la manera como emerge la categoría mediación, es decir, la relación entre los instrumentos psicológicos y el aprendizaje mediado, abordada desde los análisis de los datos.

A partir del análisis de episodios[5] se formalizan las interpretaciones de las actividades desarrolladas por los niños en una perspectiva de producción de conocimientos, donde se evidencia cómo la elaboración del concepto de razón se logra a través de la mediación instrumental como proceso que guía la objetivación del número racional.

[5] Episodio es la metodología para el análisis de los registros de las clases (audio, video y escrito) en el que se destaca un conjunto de elaboraciones y acciones de los alumnos que entienden los factores relacionados con la cuestión que impulsa la investigación, es decir, "el conjunto de acciones que desencadena el proceso de búsqueda de la respuesta al problema de que se trate" (Moura, 1992, p. 77).

Este capítulo explora además, cómo el uso de instrumentos permite comprender los procesos sociales y los cambios que provoca en el pensamiento el empleo de artefactos (lápiz, papel, cintas, zapatos, colores, regla, etc.) o de instrumentos psicológicos (símbolos, signos, producciones gráficas, lenguaje). Por una parte, los instrumentos psicológicos ayudan a los niños, a dominar sus funciones psicológicas; por otra, reestructuran algunas funciones naturales, como la memoria y la imaginación, haciéndolas dependientes de ayudas simbólicas externas (Kozulin, 1998).

Se realiza en este capítulo un análisis de los datos a partir de los episodios, proceso de reproducción y producción de conceptos relacionados con la razón, la fracción, la proporcionalidad, la relación parte-todo y el número racional, lo cual permite evidenciar cómo se logra el objetivo de la investigación. El análisis está centrado en los episodios y es dirigido dentro del marco de la teoría de la objetivación y el conocimiento matemático.

En el último capítulo se presentan las conclusiones del estudio entre las que se revela la pregunta de investigación: Fue posible verificar cómo objetivan el número racional a partir de los procesos de medición los alumnos de grado séptimo de la IE Andrés Bello. Este hallazgo surgió del análisis e interpretación de los procesos de medición a través de actividades relacionadas con la razón, la proporcionalidad, la relación parte-todo y las fracciones. El proceso de objetivación del número racional en los niños participantes del estudio de caso, se fue originando en cada una de las acciones mediatizadas por artefactos, acciones que les posibilitaron dotar de sentido y significado al número racional.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de investigación surgió, en primer lugar, desde las investigaciones internacionales que resaltan las dificultades en el aprendizaje del número racional, en segundo lugar, desde los análisis de las investigaciones realizadas en Colombia, las cuales informan sobre las dificultades reveladas por los niños durante el aprendizaje de dicho objeto matemático, en tercer lugar a partir de la experiencia del autor de la tesis, lograda durante la experiencia docente con alumnos del grado 7° de la Institución Educativa Andrés Bello (IEAB), mientras enseñaba el número racional.

Algunas investigaciones (Kieren, 1993; Behr, et al., 1993) estudian las fracciones considerando cinco constructos:

a) *Razón*. Comparación entre dos cantidades de la misma naturaleza o de naturaleza diferente.
b) *Operador*. Transforma el cardinal de un conjunto discreto que puede ser partitivo (en caso de la fracción $\frac{1}{b}$, b $\neq 0$) o partición multiplicativa (en el caso de la fracción $\frac{a}{b}$ con b $\neq 0$)
c) *Cociente*. Un número racional puede verse como una división indicada entre dos números naturales.
d) *Medida*. Una magnitud que resulta cuando se comparan dos cantidades, una de las cuales se considera como la unidad.
e) *Parte-todo*. Comparación entre la parte de un todo continúo o discreto, es decir, el número racional representa la relación donde el numerador indica el número de partes que componen

el todo, el denominador es el número de partes en que se divide la totalidad; este concepto es importante para la comprensión de los demás significados.

Gould, Outhred y Mitchelmore (2000) resaltan que esta forma de enfocar el número racional, hace que el alumno no focalice la fracción como una unidad fundamental de análisis y la comprensión de la relación parte-todo puede verse limitada:

> Muchos alumnos parecen ver fracciones como dos números no relacionados y tres cuartos es el número entero tres escrito sobre el número entero cuatro. En esta interpretación $\frac{a}{b}$ denota una relación entre dos números, por ejemplo $\frac{3}{7}$ significa "tres de cada siete". (p.262)

Petit, Laird y Marsden (2010) abordan las dificultades de aprendizaje del número racional en un informe elaborado para la National Mathematics:

> La dificultad con el aprendizaje de las fracciones es un fenómeno generalizado y es un obstáculo para nuevos avances en las matemáticas y otros ámbitos que dependen de las matemáticas, incluyendo el álgebra. También se ha relacionado con dificultades en la edad adulta, como la falta de comprensión de los regímenes de medicación. (p. xi)

De forma similar Escolano (2010) resalta:

> Es cierto que buena parte de las dificultades de comprensión de los escolares se sitúa en el conjunto de conceptos, procedimientos, relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y así se pone de manifiesto en distintas investigaciones (Kerslake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren 1993). Pero también es cierto que existen dificultades de comprensión provocadas por el proceso instructivo. (p. 19)

Por su parte Lamon (2012) afirma:

> Varios saltos conceptuales muy grandes contribuyen a la dificultad de los niños en el aprendizaje de las fracciones. En los años de preescolar, los niños aprenden a contar, haciendo coincidir el

> nombre de un número con cada objeto del conjunto que están contando. La unidad "uno" siempre se refiere a un solo objeto. En las fracciones, sin embargo, la unidad puede constar de más de un objeto o puede ser una unidad compuesta, es decir, que puede constar de varios objetos empaquetados en uno. Sin embargo, la nueva unidad es particionada (dividida en partes iguales) y un nuevo tipo de número se utiliza para referirse a las partes de dicha unidad. (p. 21)[6]

Pontón (2012) en su investigación de tesis doctoral reportó:

> Uno de los mayores problemas en el aprendizaje del sistema numérico de los racionales y sus sistemas de numeración, en el ciclo de la educación básica e incluso, con mayor preocupación, en el ciclo de la media, es que muy pocos alumnos logran la coordinación entre las transformaciones entre representaciones numéricas fraccionarias con las trasformaciones posibles en representaciones figurales y con aquellas propias de las representaciones semióticas producidas en el registro semiótico de la lengua natural. (p. II)

Moreno, de la Barrera, Mantilla y Carreño (2003) estudian el diseño de actividades de enseñanza de la razón y abordan las dificultades a las que se enfrentan tanto los docentes como los alumnos cuando abordan el estudio de la razón. “Con respecto al aprendizaje pudimos ver que existen dificultades y obstáculos relacionados con la naturaleza del objeto de estudio y el lenguaje que se usa y/o se requiere para referirse a situaciones en las que está implicada la razón” (p.108).

Se aprecia a partir de los párrafos anteriores que la dificultad de comprensión del número racional es ampliamente reportada en diferentes tipos de investigaciones.

Adicionalmente el número racional se suele presentar de la siguiente forma: $Q = \{ \frac{x}{y}, x, y \in Z, y \neq 0 \}$. Se argumenta que los números racionales fueron originados cuando el hombre trató

[6] Traducción libre del autor.

de resolver ecuaciones de la forma $n \cdot x = m$, con lo cual $x = \frac{m}{n}$ este concepto es relacionado casi que en forma inmediata con "aplicaciones" las cuales son ejercicios que involucran la solución de una ecuación. A manera de ejemplo se ilustra la presentación que se hace en Puerta (2012):

> Las ecuaciones en Q dadas por $m + x = n$ y $m \cdot x = n$ donde m, n son dados o conocidos y son respectivamente $x = n - m$ y $x = \frac{n}{m}$ siempre que $m \neq 0$ en la última ecuación $3 \cdot x = 1$ tiene solución $x = \frac{1}{3}$. O dicho de otra manera $\frac{1}{3}$ es aquel número racional x que multiplicado por 3 da como resultado la unidad. (p. 2)

La enseñanza tradicional, suele promover este tipo de forma del número racional, el cual provoca que los alumnos aprecien dos números aislados (m y n) en la solución de la ecuación; en este sentido Obando (2003) comenta:

> Al poner la atención en actividades de partir y contar, los alumnos centran el proceso de conceptualización en el número natural y no en la fracción como tal. En efecto, al centrar la atención en el número de partes que representa el numerador y el número de partes que representa el denominador — y no en la relación cuantitativa entre las cantidades de magnitud de la parte y el todo —, se piensa la fracción como dos números naturales separados por una rayita (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo. (p.169)

Los autores mencionados anteriormente muestran diferentes posturas didácticas, las cuales se centran en el desarrollo y la descripción de relaciones numéricas y de relaciones cuantitativas que otorgan diversidad de sentidos al número racional. Sin embargo el concepto de medida permanece separado de los contextos que lo generan, así mismo, no se realizan conexiones entre los diversos significados asociados al número racional en diversos contextos de uso.

En cuanto al aprendizaje del número racional, se evidencia el predominio de algunos significados tales como parte-todo, cociente y operador, los cuales pueden obstaculizar el uso y la comprensión de los restantes significados, al respecto Lamon (2012) establece:

> Una razón es un par ordenado que expresa las magnitudes relativas de dos cantidades. Bajo esta definición, la fracción parte-todo es una relación, sin embargo, toda relación no es una comparación parte-todo. Una relación puede comparar medidas de dos partes de un mismo conjunto (una comparación parte-parte) o las medidas de dos cantidades diferentes (por ejemplo, tazas de jugo concentrado por tazas de agua). (p. 31)

La práctica docente en la enseñanza del número racional ha permitido documentar la dificultad de su comprensión por parte de los niños. Las Figuras 1 y 2 muestran el procedimiento utilizado por niños frente a situaciones que requieren el uso de aspectos conceptuales, vinculados con la razón, a partir del proceso de medición.

Los niños manifiestan comprensiones sobre el número racional, como las que se muestran en la Figura 2, a partir de una representación gráfica de los $\frac{5}{7}$ se pregunta: ¿qué significa en términos de la tarea[7] (no se especifica) el resultado $\frac{5}{7}$? dos niños de grado séptimo responden:

[7] La situación es un caso típico del aula donde la instrucción dada al alumno no es explícita. Así mismo no se es claro al preguntar sobre los $\frac{5}{7}$ referentes a alguna magnitud.

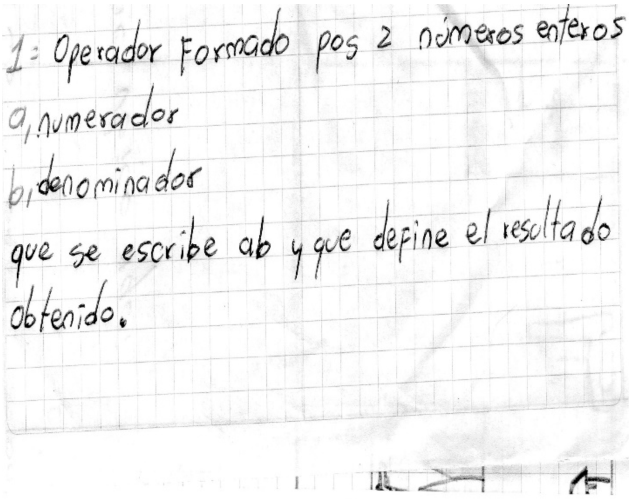


Figura 1. Concepción sobre la fracción **Figura 2.**Concepción sobre el número racional

Se aprecia que los niños consideran la fracción como dos números aislados. Enfatizan en la partición sin que luzca evidente la relación entre magnitudes.

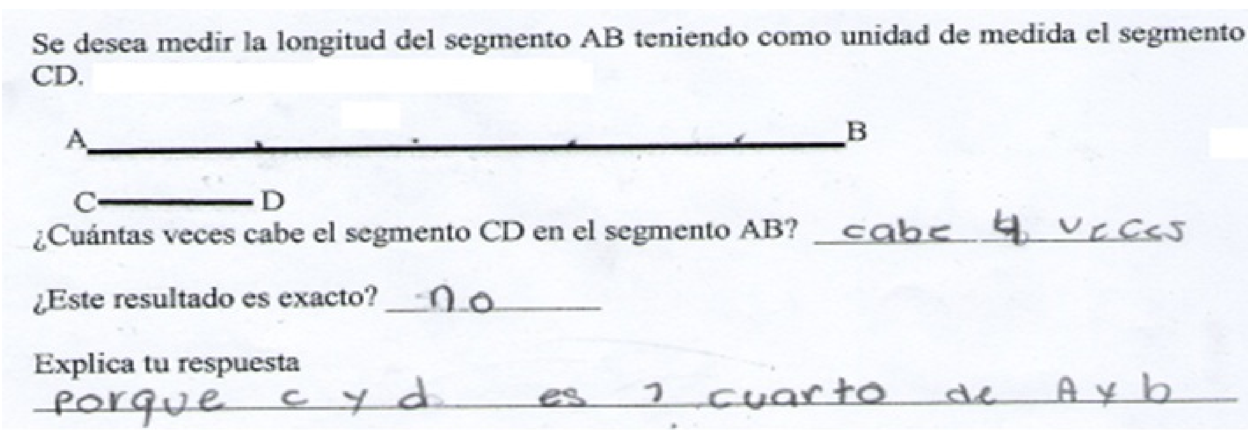


Figura 3. Comparación de segmentos

Al niño se le dificulta identificar la relación que cuantifica la medida relativa entre las partes y el todo (Figura 3); además, parece reconocer la relación numérica, pero desconoce la fracción como una nueva significación que surge en el procedimiento.

El proceso de enseñanza del número racional se ha centrado tradicionalmente en una sola interpretación de los números racionales, que es la relación parte- todo como comparación de dos enteros. Se considera que debe proporcionarse oportunidades de acceso a otras formas de interpretar $\frac{a}{b}$: como razón, como medida, como cociente, y como una relación o como una tasa.

Diversas investigaciones se han realizado (Charalambous y Pantazi, 2007; Gould, 2005; Mazzocco y Devlin, 2008) sobre las dificultades en la comprensión sobre los números racionales y aún persisten las dificultades en su aprendizaje, en este sentido, Pontón (2012) señala:

> Es asombroso que después de 30 o 40 años de investigación alrededor de los números racionales aún sigue siendo urgente la necesidad de desarrollar unos marcos teóricos que entreguen a los maestros de la educación básica un conjunto de herramientas conceptuales y metodológicas a partir de las cuales se puedan llegar a comprender no solo los procesos constitutivos de tales objetos de conocimiento matemático, sino también los caminos y dificultades de los alumnos en la construcción de tales procesos. (p. 40)

Justificación

La presente investigación indaga sobre la objetivación del número racional a partir del proceso de medición, donde las magnitudes continúas y discretas se incluyen en actividades para la generación del significado del número racional como razón. Este enfoque es apoyado en la IE Andrés Bello que favoreció la inclusión, en el plan de área del grado séptimo, del número racional como eje transversal articulado con la razón. Se incluye curricularmente la relación parte-todo y las aplicaciones sobre proporcionalidad.

La objetivación y su relación con los instrumentos permiten al niño generar nuevas posibilidades de conocimiento. Los instrumentos[8] por sí solos no se constituyen en mediadores, se requiere del docente y del uso del lenguaje. Así debe ofrecerse a los niños un vasto y

[8] En esta disertación, los instrumentos y los instrumentos materiales también son considerados artefactos.

complejo conjunto de enfoques conceptuales sobre la razón, de forma que a partir de actividades o situaciones mediadas por instrumentos psicológicos[9] y artefactos, pueda objetivar el número racional abordado a partir de procesos de medición.

La objetivación del número racional a partir del proceso de medición que favorece la comprensión de la razón como la relación cuantitativa entre las dos magnitudes es clave en esta propuesta, dado que permite vincular los diversos significados (como aquellas cantidades que surgen de comparación por cociente a partir de la razón).

Dado que, curricularmente, la razón no es uno de las acepciones más usadas del número racional, su inclusión en el currículo es interesante para explorar su enseñanza y aprendizaje.

Así mismo, es significativa esta investigación para la educación matemática en Colombia, en tanto que se atiende a la sugerencia de inclusión del número racional en el currículo de la matemática escolar. Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) considera:

> Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en el trabajo con las magnitudes, las cantidades y sus medidas como base para comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con el pensamiento métrico. Por ejemplo, para el estudio de los números naturales, se trabaja con el conteo de cantidades discretas y, para el de los números racionales y reales, de la medida de magnitudes y cantidades continuas […]. (p. 58)

En esta investigación, se articula la actividad mediada por instrumentos[10] y por la interacción social de los sujetos como eje fundamental para la objetivación del número racional a

[9] Los instrumentos psicológicos son entendidos en esta disertación como recursos de origen social para dominar los procesos mentales entre los que se encuentra el lenguaje.

partir de los procesos de medición que generan la razón, donde se elaboran y comparten los significados producidos referentes a la razón, la fracción, la relación parte-todo y el cociente, para establecer un saber común que los niños dotan de sentido en el contexto en el cual se desenvuelve. Al respecto Rückriem (2009) resalta:

> El entorno social influye en la cognición por medio de sus instrumentos, esto es, de sus objetos culturales y su lenguaje e instituciones sociales. El cambio cognoscitivo se logra al utilizar los instrumentos culturales en las interrelaciones sociales, e internalizarlas y transformarlas mentalmente. (p.1)

Para Cedillo (2006) los instrumentos son determinantes en la forma en que se realiza la actividad humana, pueden ser los instrumentos externos como las calculadoras, pero que pueden ser también instrumentos cognitivos, como el lenguaje. Moreno (1996) indica que “todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico” (p.3).

En concordancia con las perspectivas anteriores, los artefactos e instrumentos serán conceptos importantes que se someten a examen en esta investigación. Se considera que ayudarán a los niños a tomar conciencia de los procedimientos realizados durante la actividad, lo cual requiere efectuar acciones como: medir, comparar y representar. De esta manera, la objetivación permitirá a los niños confrontar ideas del número racional usando diferentes significados generados a partir de las acciones anteriores.

Petit, Laird, y Marsden (2010) consideran que las fracciones son un tema de cierta dificultad que tanto matemáticos como educadores matemáticos reportan problemas en el aprendizaje de las fracciones, y que tal dificultad interfiere con el aprendizaje de otros temas de

---

[10] Radford (2010) le otorga el sentido a los artefactos como "un objeto hecho por un ser humano, por lo general un elemento de interés cultural o histórico"

las matemáticas que incluso llegan a afectar a los adultos mientras desarrollan procesos matemáticos en sus actividades diarias. Para la comprensión de las fracciones, proponen usar modelos[11], y usarlos en el aula como parte de la instrucción. Señalan que “los modelos son los medios para las matemáticas, no el fin, los modelos ayudan a los alumnos a desarrollar la comprensión del concepto de fracción” (p.2).

Tema

La objetivación del número racional a partir de los procesos medición.

Objeto de estudio

La objetivación del número racional

Pregunta de investigación

¿Cómo objetivan el número racional, a partir de los procesos de medición, alumnos del grado séptimo de la Institución Educativa Andrés Bello?

Objetivo general

Analizar la objetivación del número racional, en estudiantes de grado séptimo, a partir de los procesos de medición que generan la razón.

[11] Petit et al (2010), se refieren a los modelos en el sentido de las diferentes sistemas de representaciones, por ejemplo el uso de la recta numérica.

CAPÍTULO II

DISEÑO METODOLÓGICO

Enfoque metodológico

Este apartado se dedica a explicitar el marco metodológico propio desde el que se aborda el trabajo de investigación. La estructura general de este marco metodológico se sintetiza en tres fases (Tabla 1). Se destacan los aspectos asociados con la metodología de la investigación, con su estructura, así mismo con la descripción general de la investigación, la caracterización de los participantes y el contexto institucional. Se presentan los instrumentos de producción de la información y finalmente se procede con la descripción tanto de las fases de la investigación como de los criterios de análisis de la información.

Tabla 1. Descripción fases de la investigación.

FASE I: Diseño de la investigación	FASE II: Aplicación e indagación del trabajo de campo	FASE III: Análisis de la información y validación teórica
Se fundamentó el marco teórico sobre el cual se analizó el problema de investigación, los objetivos y la justificación. Se determinó: ➢ El contexto de la investigación. ➢ Los participantes. ➢ Los escenarios de análisis. ➢ El diseño de los instrumentos para la producción de los datos.	Se aplicaron los instrumentos que permitieron la generación de información objeto de análisis de la investigación. Se realizaron los registros de audio, registro fotográfico y video en el ambiente escolar.	Definición de las categorías de análisis a partir de la aplicación de indicadores de análisis de los datos obtenidos. Se analizaron los episodios, los cuales permiten dar cuenta de la relación entre el marco teórico construido y la información obtenida en el trabajo de campo de la fase II. Se aplicó una entrevista semi - estructurada.

Elementos metodológicos de la investigación

Se asumió la metodología de investigación cualitativa de tipo descriptivo-interpretativo, con método de estudio de caso, el cual fue diseñado para realizar el análisis del proceso de objetivación del número racional. Bajo este enfoque los alumnos están vinculados a un mundo simbólico, sociocultural e histórico, con valores, ideales, proyectos e intereses personales, que hacen que su comportamiento sea complejo, por lo cual desde esta fundamentación, se hace posible una orientación hacia la comprensión de las situaciones particulares de los alumnos. O como lo plantean Denzin y Lincoln (2005): “los investigadores cualitativos estudian las cosas en su contexto natural, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas le dan” (p.3).

El enfoque metodológico se fundamentó en el método de estudio de caso que constituye una técnica de investigación para el análisis de la realidad social e implica un proceso de indagación caracterizado por el análisis minucioso, metódico y en profundidad del caso objeto de estudio. Además, porque puede ser abordado desde diferentes perspectivas (analítica u holística, orgánica o cultural, o metodologías mixtas, entre otras) puesto que su rasgo distintivo no son los métodos de investigación utilizados, sino el interés en un caso particular (Cohen, Manion y Morrison, 2007).

Para Cohen, et al. (2007):

> … el estudio de casos observa efectos en contextos reales, reconociendo que el contexto es poderoso determinante de causas y efectos … los contextos son únicos y dinámicos, por lo tanto, investigan e informan las complejas interacciones y despliegue de eventos, relaciones humanas y otros factores en instancia única. (p.253)

Desde esta óptica, la investigación se lleva a cabo en un contexto sociocultural específico, en el que se consideran los modos en que los niños habrían de realizar acciones y operaciones con artefactos propios del entorno, lo cual permite interpretar y describir las diferentes interacciones estrechamente relacionadas con los elementos de la actividad.

De acuerdo con Stake (1998) el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, en este sentido, se realizaron descripciones abiertas de diferentes episodios de las actividades o situaciones concluidas por los niños y discutidas con el docente investigador para la comprensión la actividad en circunstancias concretas.

Caracterización de los alumnos

La investigación, se llevó a cabo en el grado séptimo, con el método de estudio de caso como estrategia que contribuye al desarrollo de conocimiento de fenómenos independientemente de si son o no observados en grupo, razón por la cual la unidad de análisis son seis niños vinculados a un contexto propio sociocultural e histórico, donde los valores, ideales, creencias e intereses personales son constitutivos de su proceso de aprendizaje.

Si bien la clase se ofreció a un grupo de 45 niños, el estudio de caso se centró en seis niños. La selección de los seis niños se realizó teniendo en cuenta los diferentes niveles de desempeño académico, a partir de la valoración realizada por el docente quien funge de investigador; se escogió al azar a seis niños de aquellos que se postularon voluntariamente para participar la investigación.

Por otro lado, la elección del grado séptimo se hizo para trabajar con niños que estuviesen familiarizados con las fracciones, de tal manera que las actividades o situaciones presentadas no fueran del todo desconocidas para ellos.

Contexto de la investigación

Los participantes de este estudio de caso son seis niños de grado séptimo de Básica Secundaria , de la Institución Educativa Andrés Bello del municipio de Bello, de carácter oficial, ubicada en el centro del municipio, la cual ofrece todos los niveles de educación, desde preescolar hasta undécimo grado, la población estudiantil es mixta. El sector presenta diversas problemáticas (delincuencia juvenil, maltrato intrafamiliar), las familias pertenecen a los estratos[12] I y II, en su mayoría conformados por abuelas, tíos, madrastras o padrastros.

La institución educativa fue seleccionada dado que allí ejerzo como docente, además, conté con la aprobación de las directivas institucionales; de igual forma, con la autorización de los padres de familia o acudientes para que los niños participaran del proyecto investigativo.

[12] Los estratos están determinados por el poder económico e inmueble, y ayudan a determinar el monto de los impuestos a pagar, las tarifas de los servicios públicos domiciliarios, el acceso a los servicios de salud, las matrículas a pagar en los colegios y universidades estatales.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

En el primer capítulo se explicitaron los elementos relacionados con las dificultades de aprendizaje del número racional para el análisis del problema de la investigación: la objetivación del número racional a partir de los procesos medición. A partir de la revisión de literatura sobre algunos estudios referentes a las dificultades de aprendizaje, las prácticas pedagógicas y el currículo escolar; se observa que, si bien ha existido un interés para la solución de dichas dificultades, también se han presentado diferentes puntos de vista sobre el número racional. Éste capítulo se dedica a fundamentar el marco teórico necesario para abordar el problema de investigación.

Este apartado presenta los fundamentos de la teoría de la actividad, y de la teoría sociocultural que orientan el diseño de tareas, para posterior análisis de la actividad mediada a través de diferentes instrumentos. De igual forma, se presenta la teoría de la objetivación en la cual el aprendizaje según Radford (2006) es una experiencia mediada por artefactos culturales, se trata de dotar de sentido y significado los objetos que el niño encuentra en su cultura, los cuales se constituyen en el proceso de objetivación del número racional. Por otra parte se consideran aspectos de naturaleza matemática relacionados con la razón como comparación entre dos magnitudes, aspecto que permite la producción de significados del número racional como un conocimiento matemático producto de la interacción social.

Teoría sociocultural

La teoría sociocultural (Vygotsky, 1982) permite asumir al sujeto como un ser social, y al conocimiento como una producción social que fundamenta el desarrollo del pensamiento de los niños. Así mismo, enfatiza el carácter sociocultural de la cognición y propone la existencia de las funciones psicológicas naturales y culturales. Las naturales se evidencian en las funciones cognitivas del niño en el transcurso de su desarrollo y madurez. “La civilización humana interviene de manera radical [funciones cognitivas] transformando las funciones naturales en culturales. Este cambio se produce bajo la influencia de instrumentos materiales y simbólicos y también a través de formas de comunicación interpersonal” (Kozulin, 1998, p.16).

El desarrollo de las funciones psíquicas superiores es el desarrollo de sus órganos artificiales y no el cambio de sus propios órganos ni la estructura corporal. Los niños adquieren la facultad de coordinar sus funciones psicológicas naturales mediante la mediación de instrumentos simbólicos externos que, más adelante son internalizados (desarrollo de las funciones psíquicas de afuera hacia adentro).

Durante la internalización [toma de conciencia] el niño reconstruye, mediante la actividad mental, los procesos que han ocurrido durante la interacción social; de ésta manera, el niño hace suyo aquello que en un principio sólo existió con la ayuda de otras personas (adultos incluidos). Desde ésta perspectiva será el lenguaje el principal instrumento de transmisión cultural y de mediación semiótica en la interacción adulto-niño (Vygotsky, 1981).

El objetivo básico del enfoque sociocultural es el estudio de los procesos mentales humanos que reconocen las relaciones fundamentales entre esos procesos y su cultura, historicidad y marcos institucionales. En este sentido “el objetivo del enfoque sociocultural consiste en explicar las relaciones entre las acciones y las situaciones culturales, institucionales e históricas donde se realiza esta acción” (Daniels, 2003, p.115).

Para la teoría sociocultural el aprendizaje es un proceso distribuido, interactivo, contextual que es el resultado de la participación de los aprendices en una comunidad de práctica. Aprender, significa participar en una serie de actividades que implican procesos en continuo cambio.

Vygotsky (1982) manifiesta sobre el aprendizaje:

> El aprendizaje es una actividad social, y no sólo un proceso de realización individual, una actividad de producción y reproducción del conocimiento mediante la cual el niño asimila los modos sociales de actividad y de interacción, y más tarde en la escuela, además, los fundamentos del conocimiento científico, bajo condiciones de orientación e interacción social. (p. 89)

El aprendizaje así planteado se ubica en un contexto social para que el niño se apropie (comprensión e internalización de los símbolos y signos propios de la cultura) del conocimiento históricamente acumulado en interacción con otros: docente-alumno y alumno- alumno, en condiciones sociales y de culturas determinadas a través de acciones como comunicar, objetar, experimentar, abstraer, generalizar. La forma de construcción la constituyen las transformaciones internas del sujeto, es decir, la modificación de sus propias funciones psicológicas.

Teoría de la actividad

Leontiev (1978) señala que la actividad se concibe como "una unidad molecular…cuya función real consiste en orientar al sujeto en el mundo objetivo… un sistema que tiene su propia estructura, sus propias transformaciones internas, su propio desarrollo" (p.67). En este sentido, la actividad responde a ciertas necesidades del sujeto, tiende hacia el objeto de esa necesidad, desaparece cuando la necesidad es satisfecha y vuelve a reproducirse, tal vez en condiciones totalmente diferentes y modificadas (Leontiev, 1978).

La actividad es un proceso, en un sistema de relaciones que da cuenta de la naturaleza social de los seres humanos, es el lugar donde “el sujeto y el mundo social están conectados de tal manera que ambos son reproducidos y transformados” (Dreier, 2011, p. 22).

Se considera la actividad como un proceso social, realizado por un sujeto, que de manera sistemática conduce a la transformación activa de la realidad. Es decir, la actividad está en relación al conjunto de acciones organizadas, estructuradas, orientadas y dirigidas socialmente con el objetivo de alcanzar un fin.

Desde esta perspectiva, las actividades enfatizan una relación dialéctica entre el sujeto y el objeto, en la cual el sujeto al transformar el objeto, el sujeto se transforma a sí mismo. De esta forma la teoría de la actividad admite realizar análisis integral de las actividades planteadas a los niños, explicando su estructura a través de sus componentes (sujeto, objeto, motivos y objetivos) y las relaciones que entre ellos se generan, donde se reconoce lo planteado por Vygostky (1982) al indicar que, la actividad humana requiere factores intermediarios como los instrumentos psicológicos simbólicos y los medios de comunicación interpersonal.

Para observar la actividad que los niños realizan se deben analizar las funciones de orientación y de ejecución. La primera incluye las necesidades, los motivos y los objetivos; la segunda la constituyen las acciones y las operaciones. Necesidades, objeto y motivo son componentes estructurales de la actividad. Sin embargo la actividad no puede existir sino por las acciones individuales y grupales, vinculadas y orientadas hacia objetivos parciales derivados del objetivo general.

“La base de todo conocimiento humano es la actividad objetal práctica” (Davidov, 1988, p. 115). De esta manera, las necesidades originan la actividad del sujeto y la dirigen, lo que indica que, el objeto de la actividad es su verdadero motivo, “no hay actividad sin motivo, una actividad no motivada, realmente no es una actividad carente de motivo, sino con un motivo subjetivo y objetivamente oculto” Leontiev (1978, p. 82).

La tarea por su parte se revela por la unidad entre el objetivo de la actividad y las condiciones de su logro, de alguna manera transforma los objetos con los que actúa el sujeto o se transforma al sujeto, esto ocurre con la internalización de nuevos conocimientos y experiencias que originan cambios en el desarrollo cognitivo. Las acciones de la actividad responden a una tarea. El objetivo y las condiciones de la tarea se corresponden con las acciones y las operaciones.

La acción que realiza un niño, está dirigida a un objeto material o ideal, con el fin de dar cumplimiento a un objetivo. La necesidad de realizar la acción está dada por el motivo, por lo que sí existe un motivo, entonces también debe existir un objetivo. El motivo y el objetivo deben coincidir, es decir, la actividad debe satisfacer una necesidad.

Las operaciones están relacionadas con las condiciones, medios o procedimientos para efectuar la acción, de tal forma que, las operaciones no pueden separarse de las acciones, así como tampoco las acciones de la actividad. Las acciones son un proceso orientado por el motivo de la actividad. Leontiev (2001) sostiene que las operaciones son los métodos por medio de los cuales se realiza la acción, de este modo, las operaciones no corresponden ni al motivo ni al objetivo de la acción, sino a las condiciones en las cuales está dado el objetivo. “La acción entonces tiene un aspecto intencional (qué debe ser logrado) y un aspecto operacional (cómo, de qué modo puede ser logrado) el cual está determinado por las condiciones objetivo/objetales que se requieren para lograrlo” (Leontiev, 1978, p.85).

Con referencia al aprendizaje, el objetivo del niño es generar objetos conceptuales; el motivo es la necesidad objetivada, es la toma de conciencia del objeto, en este sentido el niño otorga significado y sentido al conocimiento. Por su parte las acciones corresponden a los procedimientos y estrategias utilizadas por el niño para alcanzar el objetivo, las acciones presentan además el aspecto intencional un aspecto operacional, es decir, la forma como se realizan las operaciones; las operaciones la constituyen el uso de instrumentos que sirven de auxiliares al aprendizaje.

Davidov (1988) hace referencia a actividades de estudio:

> Así, la necesidad de la actividad de estudio estimula a los escolares a asimilar los conocimientos teóricos; los motivos, a asimilar los procedimientos de reproducción de estos conocimientos por medio de las acciones de estudio, dirigidas a resolver las actividades de estudio. (p.178)

En este sentido, Davidov (1988) indica "hay que orientar la enseñanza escolar a la comunicación de tales conocimientos, que los niños pueden asimilar en el proceso de generalización y abstracción teóricas, conducentes a los conceptos teóricos" (p.6). Las actividades de estudio son las mediadoras entre la actividad de aprendizaje y la actividad de enseñanza donde la finalidad de ambas coincide con el aprendizaje de los conceptos constituidos histórica y socialmente.

Los párrafos precedentes revelan que la actividad se caracteriza por el uso de diferentes instrumentos de naturaleza social, esto es, la actividad humana requiere de componentes intermediarios tales como los instrumentos psicológicos, los instrumentos materiales además de seres humanos. Al respecto Kozulin (1994) indica que "una actividad que genera procesos mentales superiores es una actividad mediada socialmente significativa. La fuente de la mediación reside ya sea en una herramienta material, en un sistema de símbolos o en la conducta de otro ser humano” (p.115).

Dentro de los elementos del marco teórico se desarrolla la mediación semiótica, que se evidencia en la producción, reproducción y construcción del conocimiento (elaboración de significados) como consecuencia de la actividad donde los signos emergen y se desarrollan dentro de la interacción social. En este sentido: “…los instrumentos psicológicos son recursos simbólicos─signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráficos simbólicos─ayudan al individuo a dominar sus propias funciones psicológicas, «naturales» de percepción, memoria, atención…” (Kozulin, 1998, p. 29). Los instrumentos materiales buscan un empleo colectivo, una comunicación interpersonal, están dirigidos a los objetos de la naturaleza y sirven como conductores de la actividad humana orientada a objetos externos.

Los instrumentos psicológicos y los sistemas numéricos, medios escritos entre otros, son medios auxiliares que modifican el aprendizaje de los niños, favoreciendo el empleo de representaciones mentales esquematizadas y generalizadas, lo que permite a los niños resolver problemas, recordar, reconocer, comparar, evaluar y tomar decisiones de forma consciente, es decir, regular su propio desarrollo cognitivo.

En relación con la mediación con otros (niño-niño, niño-docente, niño-adulto), Vygotsky (1978) expresa que cualquier función en el desarrollo cultural del niño, aparece dos veces: al principio, en el nivel social entre personas (nivel interpsicológico) donde la actividad es observable y práctica, y se hace concreta mediante el empleo de los instrumentos materiales, comunicación que implica la producción, reproducción e interpretación de conocimiento, de esta forma, las acciones son las respuestas a las formas de obrar de un sujeto sobre un objeto bajo determinadas condiciones sociales. Al final en el nivel individual del niño (nivel intrapsicológico) toma significado las acciones prácticas, es decir, el proceso de producción y reproducción de conocimiento socialmente elaborado se desplaza a un plano interno, esto significa un proceso de internalización.

La internalización se fundamenta en el uso de signos tales como el lenguaje natural, los gestos, los sistemas de numeración que generan la producción e interpretación de diversas representaciones. Según Bartolini y Mariotti (2008) el uso de signos en el cumplimiento de una tarea tiene una doble función cognitiva: el sujeto produce signos relacionados directamente para realizar la tarea, y de otra parte para comunicarse con los compañeros que colaboran en la tarea. En este segundo caso, la producción de signos está relacionada con el proceso de interpretación que permite la comunicación y el intercambio de información. Durante la producción e interpretación de los signos es cuando se desarrollan las funciones mentales superiores (Wertsch y Stone, 1985).

Los signos son considerados instrumentos simbólicos que provocan cambios en nuestro pensamiento reestructurando algunas de nuestras funciones naturales como la memoria, la atención y la imaginación haciéndolas dependientes de ayudas externas.

Los signos como los sistemas algebraicos, sistemas de numeración, representaciones gráficas entre otros, se utilizan como medios auxiliares en la solución de un problema, ellos permiten realizar acciones como recordar, comparar, informar, elegir, es decir, actúan como instrumentos psicológicos. Es de esta forma en que las habilidades cognitivas se desarrollan a través de la producción y la interpretación de los signos, en particular, hablando o escribiendo e interpretando lo que se dice o se escribe, es decir, a través de la interacción social de la comunicación.

Por otro lado, el artefacto es un material o un objeto simbólico en sí. Se debe entender el artefacto como "algo" que nos permite hacer o actuar. Desde esta perspectiva los artefactos se ven como una posible extensión del individuo. Ellos ayudan a cambiar nuestra perspectiva cognitiva del mundo. No son sólo facilitadores de la adquisición de conocimientos, se convierten en parte de la forma en que llegamos a pensar y a conocer, es decir, cambian nuestras formas de pensar. Se consideran dispositivos culturales que modifican nuestro funcionamiento cognitivo.

Los objetos matemáticos son generados históricamente desde la actividad matemática de los sujetos. Desde la teoría de la objetivación, Radford (2006) concibe al objeto matemático como, "patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (p. 111).

Todos los objetos matemáticos son "reflexionados" en la forma de actividad de los sujetos, y de esta manera se han expresado a lo largo de la historia (por ejemplo como una representación gráfica, una fórmula, una tabla de valores) y cada una de esas formas de expresión toma diferentes significados, que están relacionados con los anteriores.

Sobre la mediación

Los medios semióticos de objetivación son entendidos como los objetos, instrumentos, artefactos, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidentes sus intenciones, y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2010).

El concepto de mediación, que se utiliza en esta investigación, se basa en los medios semióticos de objetivación que son empleados como instrumentos de mediación semiótica para expandir los signos matemáticos que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas durante la realización de la actividad, en particular la objetivación del número racional.

La afinidad entre los signos e instrumentos se basa en la función de mediación que ambos pueden tener en el cumplimiento de una tarea. La interacción social con artefactos en la realización de la tarea involucra tanto al mediador como a los medios, en esa interacción se generan signos comunes, los cuales están relacionados con el objeto que va a ser mediado, es decir, se crea una vía de comunicación entre el docente y el niño sobre la base de un contenido compartido.

Durante la mediación la actividad surge y se construye sobre la acción práctica con los objetos materiales, inicialmente se realiza en el plano externo y posteriormente pasa al plano interno cuando se realizan acciones prácticas mentales con los mismos objetos, este proceso es llamado mediación instrumental. Durante este proceso, el sujeto modifica la realidad y se transforma a sí mismo a través de los instrumentos psicológicos y materiales. Este es un proceso de internalización, el cual Vygostky (1978) define como "proceso de la reconstrucción interna de una operación externa" (p. 56).

Vygotsky concibe la internalización como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasan a ejecutarse en un plano interno (Wertsch et al., 1985), como un proceso de control de los signos que en su origen formaban parte de una actividad social.

Mediante la participación en interacciones sociales, los niños dotan de significado, reconstruyen e interpretan, mediante la mediación semiótica, las situaciones y actividades en función de sus motivos, conocimientos y experiencias previas. Esta reconstrucción es considerada por Vygotsky como apropiación y se trata de un proceso activo, de interacción y de reconstrucción personal.

Uno de los elementos de esta investigación ha sido desarrollado en la mediación semiótica, que se evidencia en la producción y reproducción del conocimiento (construcción de significaciones) como consecuencia de la actividad instrumentada donde los signos emergen y se desarrollan en el seno de la interacción social. Desde esta perspectiva se describe el proceso individual experimentado por los niños en el que los instrumentos son interiorizados y apropiados; gracias a estos instrumentos, los niños disponen de medios para construir sus relaciones con el mundo exterior e interior.

Teoría de la objetivación

La teoría de la objetivación se ocupa del saber y del ser, por ello es clave entender la objetivación como procesos sociales mediante los cuales los niños alcanzan una comprensión crítica dotando de significado a los objetos culturales matemáticos. Asimismo, se considera en esta disertación el aprendizaje como un proceso mediante el cual los estudiantes adquieren gradualmente significados culturales y formas de razonamiento y acción constituidos históricamente.

Para Radford (2006) la teoría de la objetivación sugiere que el pensamiento es una práctica social y como tal, la considera como una reflexión mediatizada del mundo acorde con la forma de actividad que realizan los sujetos, “es un movimiento dialéctico entre la realidad que es constituida histórica y culturalmente y un sujeto que se refracta en ella y la transforma acorde a su subjetividad” (p. 108).

En esta perspectiva, el pensamiento al ser considerado una reflexión mediatizada, está referido al papel que desempeñan los artefactos - objetos, instrumentos materiales, sistemas de signos, etc.- e instrumentos psicológicos en la práctica social.

Radford (2008) considera la objetivación como procesos sociales a través de los cuales los alumnos entienden la lógica cultural con la cual han sido dotados los objetos de conocimiento y que pueden convertirse en formas históricamente constituidas de acción y pensamiento.

La objetivación se entiende en esta disertación como un proceso donde el conocimiento emerge en procesos sociales de producción de significados, de la dialéctica entre el sujeto y la naturaleza y las maneras como el sujeto accede al objeto, donde el sujeto se transforma y al mismo tiempo transforma al objeto; en la movilización del conocimiento la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos culturales, sino también por la presencia del otro, da cuenta de la forma en que el niño alcanza y se apropia del saber cultural; la adquisición del saber se asume como un proceso de producción y reproducción activa de significados.

Acorde con la teoría de la objetivación, los procesos de producción y adquisición de significados se analizan a través dela interacción social y la movilización de signos y artefactos que hacen los niños. La objetivación del número racional se origina como un proceso social de acercamiento de significados subjetivos a los significados históricos y culturales.

Conocimiento matemático

Desde la epistemología tradicional se considera el conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas a las evidencias empíricas, de esta forma es posible que en la actividad el hombre elabore hipótesis sobre el mundo físico y a la vez pueda producir estructuras de pensamiento cada vez más refinadas. En el plano del conocimiento matemático es importante el rol que los escenarios culturales, históricos y sociales desempeñan en la producción del conocimiento de la matemática. De esta forma, los saberes matemáticos son un bien cultural producto de la actividad humana en la práctica social donde se produce y modifica la realidad tanto social como cultural.

Según Ernest (1994) citado por Socas y Camacho (2003):

> El contexto social y cultural dentro del que aparecen las matemáticas (relaciones interpersonales, instituciones sociales y relaciones de poder); los procesos sociales que aparecen en la determinación, construcción y negociación de los conceptos matemáticos, métodos, simbolismos, argumentos y resultados; el contexto histórico cultural de las matemáticas; la bases lingüísticas del conocimiento matemático, en particular el simbolismo; los valores, propósitos y metas que subyacen en los procesos de educación matemática; la dependencia de las Matemáticas de la construcción subjetiva del conocimiento requiere introducirse en un mundo matemático imaginado por medio de práctica de comunicación social de los alumnos y, por último, que las matemáticas y el conocimiento matemático son prácticas que no están separadas de otras prácticas sociales tanto intraescolares como extraescolares. (p. 161)

Desde este punto de vista el conocimiento puede concebirse como un proceso cultural producido en la actividad social de los sujetos en la actividad humana, ubicado en un contexto de influencias históricas, sociales y culturales, es decir, el conocimiento es una producción histórica y cultural situada en una época y lugar en función de la práctica social de los sujetos. De forma más específica el conocimiento es mediatizado por la actividad.

Radford (2013) considera el conocimiento como un "conjunto de procesos consagrados cultural e históricamente constituidos de reflexión y acción" (p. 10). En el caso del número racional, tales procesos de reflexión, expresión y acción surgieron en Egipto a partir actividades concretas humanas, en este sentido Ordóñez (2012) señala:

> Al escriba le correspondía llevar a cabo una gran contabilidad material, tanto el registro de la producción (suministro de simientes, herramientas, materias primas y recogida de cosechas), como para el reparto de los bienes de consumo (alimentos, vestidos,) entre los miembros de las comunidades agrícolas o artesanas. Esto explica la importancia de los problemas de reparto y de la fidelidad al sistema de fracciones. (p.30)

A partir de la actividad misma de la matemática y a partir de los aspectos sociales y de su naturaleza histórica y cultural se favorece la producción y reproducción del conocimiento, además que se observa su evolución como un proceso cultural donde el lenguaje es elemento mediador en la cultura matemática.

Finalmente cabe preguntar ¿Cuál es la verdadera esencia del conocimiento matemático? De acuerdo con la Real Academia Española, esencia es "aquello que constituye la naturaleza de las cosas, lo permanente e invariable de ellas"; por lo tanto la esencia del conocimiento matemático yace en la identificación de su naturaleza, sus raíces, su evolución, las teorías y conceptos que la constituyen, los métodos empleados, las aplicaciones y relaciones con otras ciencias. En términos de Aleksandrov (1976), la esencia del conocimiento matemático, está constituida por sus contenidos, su significado, sus métodos y su desarrollo.

Los diversos contenidos matemáticos, la aritmética, la geometría, el álgebra, la trigonometría y el análisis, entre otros, han surgido desde la actividad humana, de la necesidad de resolver problemas de la cotidianidad, de la realidad misma. Aleksandrov (1976) señala "la aritmética y la geometría son las dos raíces sobre las cuales han crecido toda la matemática. Su influencia mutua se hace sentir desde el mismo momento de su nacimiento" (p. 43). En la relación mutua entre la aritmética con la geometría y ante necesidad de acciones tan cotidianas como contar, medir, han surgido los números enteros, los racionales y los reales.

La razón

Obando et al. (2013) presenta la noción fundamental de la razón de la manera siguiente:

> Se puede decir que una *atribución de cantidad* es aquella que realizada sobre un fenómeno (objeto, evento, sucesión de eventos u objetos indexados de acuerdo a la ocurrencia de los mismos en función de condiciones espacio-temporales) permite organizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada. (p.978)

A partir de la noción anterior se forman los sistemas de cantidades y a partir de éstos se origina la razón, la que Obando et al. (2013) define así:

> Dados dos sistemas de cantidad A_1 y A_2 (no necesariamente distintos) y dos cantidades $x \in A_1$, $y \in A_2$, entre dichas cantidades se pueden definir dos razones, a saber, "la razón de x a y", y "la razón de y a x" (en la notación clásica x: y o y: x). […] una de ellas se puede usar como base para determinar unívocamente la otra "si la razón de *x* a *y* es α" entonces "la razón de *y* a *x* es α^{-1}" .(p.979)

Esta aproximación a la razón favorece expresar situaciones de acuerdo con la naturaleza de las cantidades involucradas en tales situaciones, entre las que se encuentra la relación parte-todo cuando en un sistema de cantidades se compara por medio del cociente para determinar la medida relativa de una cantidad respecto a la otra. Obando et al. (2013, p. 981) indican:

> Si las cantidades son conmensurables, la razón es un número racional, y se puede encontrar a partir de uno de los dos procedimientos siguientes:
>
> **Caso 1**: Si *y* mide a *x*, entonces existe n ∈ ℕ tal que $x = n.y \Leftrightarrow y = \frac{1}{n} . x$
>
> **Caso 2**: Si *y* no mide a *x*, entonces existe otra cantidad *c*, tal que: $x = n.c \ \wedge y = m.c$, dónde se deduce que $y = \underbrace{\frac{1}{n} . x + \frac{1}{n} . x + \frac{1}{n} . x + \ldots \frac{1}{n} . x}_{\text{m - veces}} = \frac{m}{n} . x$

Lo anterior indica que m y n pueden ser números enteros para que se cumpla la conmensurabilidad, por ejemplo 3 no mide a 10 de manera exacta, entonces se busca una cantidad que mida exactamente a 3 y a 10, para este caso es 1, luego 1 es la décima parte de 10 y cabe 3 veces en 3, por lo tanto la medida de 3 tomando 10 como unidad, es $\frac{3}{10}$.

La fracción, la relación parte todo y el número racional

Lamon (2012) manifiesta que los niños experimentan obstáculos cognitivos en el estudio de las fracciones, al tratar de establecer conexiones tanto con los números enteros como con las operaciones con las cuales están familiarizados. Además la fracción es utilizada de dos maneras diferentes, como un numeral y, en un sentido más abstracto, como un número:

> En primer lugar, las fracciones son símbolos bipartitos, una forma determinada para escribir los números: $\frac{a}{b}$ en este sentido la palabra fracción se refiere a una forma de escribir los números, un

sistema de notación, un símbolo, un número, dos números enteros escritos con una barra entre ellos. En segundo lugar, las fracciones son números racionales no negativos. Tradicionalmente, porque los estudiantes inician el estudio de las fracciones mucho antes de que se les presenten los números enteros, a y b están restringidos al conjunto de números enteros. Esto es sólo un subconjunto de los números racionales. (p.30)

El párrafo precedente señala que la fracción no es un número en sí, es una simbolización, además, al considerar la fracción como número, lo que se indica es realmente al número racional subyacente. Lamon (2012) indica refiriéndose a $\frac{1}{4}$ “independientemente del tamaño de las piezas, su color, su forma, su disposición, o cualquier otra característica física, la cantidad relativa y el mismo número racional está indicado en cada imagen” (p.30). (Figura 4).

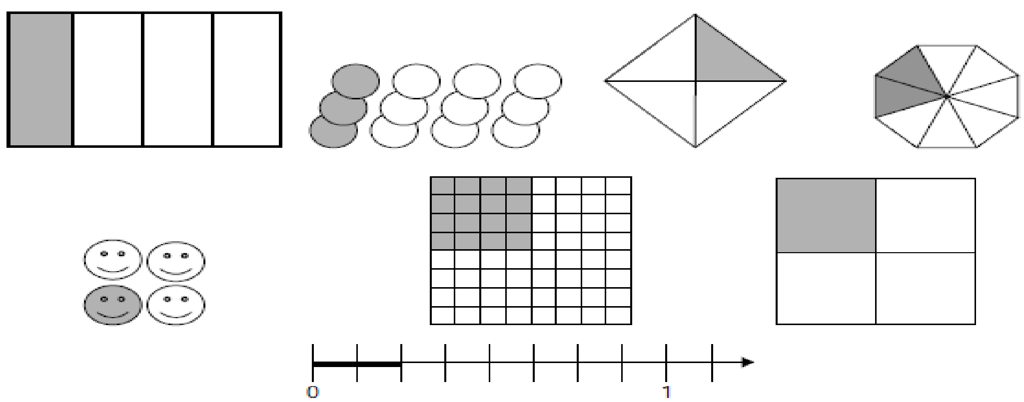


Figura 4. Lamon (2012). Enseñanza de razones y fracciones (p.30)

La Figura 4 ilustra la relación entre el concepto de equivalencia entre fracciones y la congruencia de figuras planas. La relación está circunscrita a un procedimiento relacional cuantitativo parte-todo (se observa la relación entre la cantidad de superficie sombreada con respecto a la cantidad total de superficie de cada figura).

Como fracción cada figura expresa $\frac{1}{4}$ de ella, donde la equivalencia se da por la relación cuantitativa entre las superficies sombreadas y las correspondientes cantidades de superficie de cada figura. Se revela también el tipo de unidad y el tipo de magnitud tanto discreta como continua. Para el caso de la ilustración de "los círculos" se comprende:

a) "Doce" es una unidad

b) Debe realizarse la repartición de la unidad, en cuatro partes iguales

c) Considerar la parte obtenida, como la cuarta parte de la unidad

d) La cuarta parte corresponde a tres círculos (lo cual no significa tres unidades)

Las cuatro consideraciones anteriores son pertinentes para la concepción del número racional; ellas muestran cómo en lugar de centrar la atención en dos cantidades para escribir el símbolo que representa la fracción, la atención se centra en la cantidad relativa que expresa cada figura.

En este mismo orden Lima y Moisés (1998) sostienen que la "fracción no es propiamente un número. Es apenas un pre-número, una forma de registrar las relaciones entre las cantidades, una notación" (p.3). Esta cita puntualiza que las fracciones no son números, sino formas de notación particulares para los números racionales.

Para los autores, la fracción "es una representación numérica de una parte en relación al entero del cual participa. Es una representación numeral de una cantidad que es menor que la unidad, o sea, se trata de una sub-unidad" (p.100).

Se deja percibir un fraccionario como un número generado a partir del proceso de medición de un segmento, esto es: $\overline{AB} = \frac{m}{n}\ \overline{CD}$, lo cual tiene sentido cuando se mide el segmento $\overline{AB}$ a partir del segmento $\overline{CD}$.

Sobre la medición, la razón y el número racional

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) llaman la atención para desarrollar procesos curriculares y organizar actividades focalizadas en la comprensión, de los números racionales, a partir de las magnitudes y las cantidades continuas y discretas.

De igual forma, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), consideran el estudio de las fracciones en el pensamiento numérico y sistemas numéricos desde la Educación Básica, sin embargo esta investigación está limitada al grado séptimo, donde los niños deben utilizar los números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contexto de medida, reconocer y generalizar las propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.), relacionar las fracciones con la notación decimal y los porcentajes, y utilizar fracciones en la resolución de problemas. Al respecto los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) señalan:

> […] el paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Las primeras situaciones llevan al número racional como medidor o como operador ampliador o reductor (algunos de estos últimos considerados a veces también como “partidores” o “fraccionadores” de la unidad en partes iguales. […] Las otras situaciones llevan al número racional como razón, expresado a veces por frases como “3 de 4”, o “3 por cada 4”, o “la relación de 3 a 4”, o por la abreviatura “3:4”.(p.59)

Desde esta perspectiva y desde los conceptos presentados por Lima y Moisés (1988) se promueve la generación del número racional.

Para contar basta tener los elementos de un conjunto infinito numerable, caso en el cual se usan los números naturales o un subconjunto finito de éstos y para generar los números racionales, se debe iniciar la acción de medir, (contar y medir son actividades relacionadas). Medir se asocia con la acción de comparación de dos magnitudes[13] de la misma especie, es decir, las magnitudes son consideradas homogéneas. Por ejemplo para comparar dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (longitudes), basta con colocar un segmento de recta sobre el otro haciéndose coincidir los extremos A y C (Figura 5).

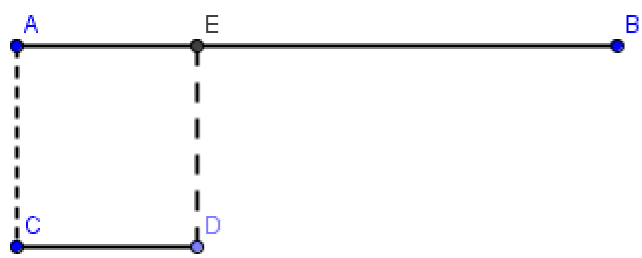


Figura 5. Medición de un segmento

Realizada la operación, se observa que el punto D coincide con un punto E sobre el segmento $\overline{AB}$, es decir, D está entre A y B, lo cual puede indicarse como el resultado de la operación (división no realizada con el algoritmo convencional). En este caso, se realiza una comparación del tipo “mayor que” o “menor que”. El resultado de la comparación indica que la longitud del segmento $\overline{CD}$ es menor que la longitud del segmento $\overline{AB}$ o que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es mayor que la longitud del segmento $\overline{CD}$. Pero esta comparación no agota el asunto, puede surgir la pregunta: ¿Cuántas veces está contenido el segmento menor en el mayor?

Para responder esta pregunta se requiere el uso de los sistemas numéricos (descontextualización de los objetos), debido a que tales mediciones conducen a la determinación

[13] Se entiende en esta disertación una magnitud como una cualidad o atributo de una serie de objetos que puede variar en forma cuantitativa y continua o en forma cuantitativa y discreta.

de unidades y magnitudes sobre las que se opera. Esto indica que no basta con emplear valores numéricos, sino que además, se deben tener en cuenta tanto las magnitudes que dan origen a estas cantidades así como las unidades en que son medidas. Al respecto Caraça (1951) indica que requiere:

> a) Establecer un estado único de comparación para todas las magnitudes de la misma especie; ese estado se llama unidad de medida de magnitud.
>
> b) Responder a la pregunta -¿cuántas veces?- es colocar sobre, o que se ha obtenido un número que expresa el resultado de comparación con la unidad.
>
> Este número se llama magnitud en relación a esa unidad. (p.31)

Al medir la longitud representada en el segmento $\overline{AB}$, se toma para su unidad de medida de magnitud, la unidad *u* representada por el segmento $\overline{CD}$, y se verifica que la medida de $m\overline{AB}$ = nu (n veces u), que es la magnitud en relación a u, entonces se obtiene la medida de $\overline{mAB}$ con respecto a u, con n ∈ ℕ. Para ello, se supone que al iterar la unidad sobre la longitud al cabo de n veces, el extremo B de la longitud coincide con el extremo D de la unidad *u* dando como resultado un número entero, en este caso la unidad (u) es divisible finitamente, dando lugar a magnitudes discretas (un número racional como cuantificación de la razón, existe conmensurabilidad con la unidad u), lo cual genera unidades aritméticas.

Si se tiene que al iterar n veces la operación de comparación sucede que: nu < $\overline{m\ AB}$ < (n+1) u, la medida lograda es un racional, en tal caso se dice que se deriva la fracción, (Figura 6).

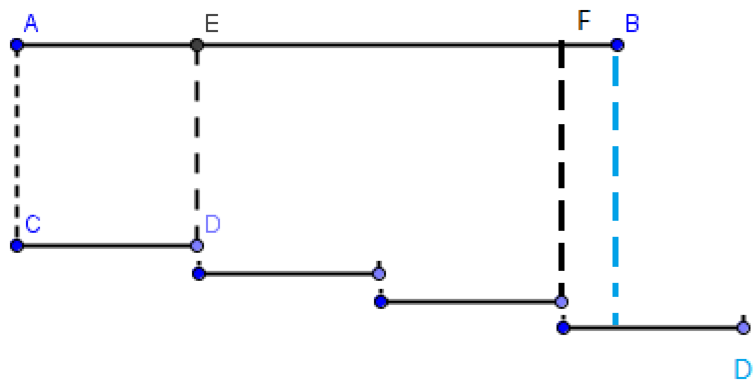


Figura 6. La fracción

Dado el caso que n $u < \overline{mAB} <$ (n+1) u, entonces se debe tener en cuenta que existe un punto F entre $\overline{AB}$, tal que $\overline{FB} < u$, con $\overline{AF} + \overline{FB} = \overline{AB}$. Si se quiere tener una medida exacta o más cercana a $\overline{m\ AB}$ es necesario dividir a u en d partes iguales, tal que $u = d \propto$, de esta forma la medida de $\overline{mFB}$ con la nueva unidad $\propto$ es: r $\propto < m\overline{FB} <$ (r+1) $\propto$ con $0 < \propto < d$. Con esta consideración si la medida de $m\overline{FB}$ es r α = $\overline{mFB}$, entonces la medida de $\overline{m\ AB}$ será el número racional: n u + r $\propto$, es decir, $\overline{mAB} = (\frac{n+r}{d})\ u$, con u como unidad. Cuando existe este racional que permite expresar la medida, se dice que $\overline{mAB}$ es conmensurable con la unidad u.

Ahora, ¿Qué tipo de comparación se involucra cuando se comparan dos medidas, en este caso las medidas correspondientes a los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$? Al comparar dos medidas se puede realizar un análisis en el cual se puede evidenciar las relaciones de orden, dado que las cantidades que se pueden expresar numéricamente son susceptibles de ser ordenadas o ser comparadas a partir dicha relación. La comparación se hace por diferencia o por cociente.

El cociente indicado permite interpretar $\frac{a}{b}$ como una razón entre dos cantidades, caso en el cual se tiene una fracción, donde el cociente indicado expresa que la división no se realiza a través del algoritmo convencional, sino que la fracción es el cociente, pero además puede producirse el cociente $\frac{b}{a}$ en el cual la primera magnitud disminuye y la segunda aumenta, esto visto desde la estructura multiplicativa. La primera de esas razones se identifica como la relación multiplicativa entre las dos cantidades dadas; esto es, como la medida relativa de una cantidad mayor con respecto a la menor tomada como unidad (o de la menor con respecto a la mayor).

La comparación por diferencia, produce $a - b$ ó $b - a$, donde una aumenta la otra disminuye aditivamente. Una de estas diferencias se identifica como la relación aditiva entre las dos cantidades dadas; esto es, como lo que le sobra a la cantidad mayor con respecto a la menor (o lo que le falta a la menor con respecto a la mayor).

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

El cuarto capítulo sobre la metodología incluye las actividades cuya finalidad es promover necesidades y motivos en los niños por la acción del docente. Actividades que permiten en la interacción sujeto-objeto (donde el objeto puede ser un artefacto u otro sujeto) la apropiación de conceptos construidos cultural e históricamente. Es a través de estos procesos intersubjetivos mediante los cuales los niños se posicionan en las estructuras de las prácticas sociales en las que participa y a través de las cuales se reconoce y es reconocido como miembro de una comunidad sociocultural (Radford y Hernández, 2011).

Instrumentos de recogida de datos

Cohen et al. (2007) indican “el investigador debe tener claro qué es lo que se quiere sobre el análisis de datos para hacerlo, ya que esto determinará el tipo de análisis que se emprende” (p. 461).

Los instrumentos de recogida de datos utilizados son: las elaboraciones de los niños en el marco de las actividades diseñadas, vídeos, registros fotográficos, grabaciones, producciones de texto y entrevistas, cuyo análisis aportó al proceso de interpretación del proceso de objetivación del número racional.

El docente investigador interpreta los datos desde sus perspectivas personales (subjetivas), teóricas y experienciales, para asignar significados a las acciones de los alumnos durante el proceso de objetivación del número racional.

Finalmente, para la realización de la entrevista se siguió a Kvale (2009), quien expresa "… en una conversación de entrevista, el investigador pregunta y escucha lo que las personas cuentan sobre su mundo vivido" (p.23). Las entrevistas como instrumentos de producción de datos, sirven de base para dar confiabilidad al estudio, su importancia radica en la posibilidad de indagación a cerca de las situaciones que el investigador no alcanzó a comprender en otros espacios.

Análisis de datos

El análisis de datos se llevó a cabo teniendo en cuenta la relación entre los diferentes sistemas semióticos utilizados durante la investigación (lenguaje, producción de texto, producción de gráficas y tablas) y su articulación para generar significados, lo cual permitió evidenciar el proceso de objetivación del número racional.

El análisis de datos se realizó con base en los episodios desde donde surgieron las categorías de análisis: la mediación y la medición. Estas categorías serán analizadas en los capítulos V y VI respectivamente.

Actividad

En este apartado se describe la actividad como unidad de análisis para lograr la objetivación del número racional, proceso dado en la relación sujeto-objeto en la cual el sujeto se constituye como persona y percibe otras formas de conocimiento. "La función real de esta unidad es orientar al sujeto en el mundo de los objetos" (Wertsch, 1988, p. 210).

Las actividades fueron propuestas a los niños y realizadas por ellos en el contexto de su cultura y con los artefactos culturales disponibles. Las actividades desarrolladas por los niños fueron de tipo social porque la actividad discursiva se hizo en grupo de trabajo y discusión, y sus diversos roles fueron compartidos por los miembros del grupo de niños. De las actividades se resalta la interacción social, discursiva, comunicativa, intencional que permite escuchar y entender a los otros miembros del grupo. Este proceso es determinante para lograr que la generación del conocimiento sea producto de las interacciones grupales y de los aportes individuales.

El desarrollo de la actividad en el ambiente escolar permitió al docente investigador crear un espacio para el debate y para promover la actitud crítica y, desde allí, lograr la construcción de objetos matemáticos con ayuda de la mediación. De esta manera, la práctica pedagógica influyó tanto en el aprendizaje del niño como en su desarrollo cognitivo y afectivo; de igual manera la actividad favoreció el proceso de aprendizaje en un ambiente natural en el aula, donde se observan las tensiones y contradicciones propias de los actos discursivos y comunicativos de los niños. Al respecto Engeström (citado por Daniels, 2003) señala:

> La actividad se realiza mediante una constante negociación, orquestación y lucha entre las distintas metas y perspectivas de los participantes. […] la construcción de objetos mediado por artefactos […] es un proceso dialogal (sic) y en colaboración donde distintas perspectivas […] y voces […] se encuentran, chocan y se fusionan. (p.131)

En el entorno escolar el encuentro con nuevos objetos de conocimiento se produce a través de actividades específicas que relacionan el conocimiento con su objeto social. Es aquí donde el diseño pedagógico de las actividades (que incluye las formas de interacción social, el uso de artefactos, la división del trabajo y situaciones) favorece el desarrollo del proceso de objetivación por parte de los estudiantes.

Las actividades se llevaron a cabo entre los niños en una cultura determinada y con herramientas que aportó la propia cultura. Las actividades son sociales porque fueron compartidas y se concibieron como funciones distribuidas en el grupo; en ellas se resaltó la interacción como el proceso que permite escuchar y entender otras voces y otras conciencias, es decir, aprender a ser con otro.

Sobre las actividades propuestas

Las actividades tienen la intencionalidad de lograr obtener información sobre las dificultades, la utilidad de las matemáticas y sobre su naturaleza como disciplina científica; además, de ofrecer información sobre el proceso de cómo los niños producen y reproducen conocimiento sobre la comparación de magnitudes, la razón, la fracción, la proporcionalidad y en particular del proceso de objetivación del número racional.

Actividad N° 1.

Intención. Indagar los conocimientos que poseen los niños en relación con la medida, la razón, la relación parte-todo y la proporcionalidad. La Tabla 2 presenta las relaciones entre algunos elementos de la actividad.

Tabla 2. Actividad diagnóstica

Necesidad	Acciones	La intencionalidad
Reconocimiento de magnitudes discretas y continuas. Determinar la medida relativa de una cantidad respecto a otra.	Modelación de la actividad. Comparación magnitudes. Diferenciación de la razón con la relación parte-todo y la fracción. Conceptualización de la proporción.	Identificar relaciones entre magnitudes como: Razones.

1. La Tabla 3 muestra las cantidades correspondientes a cuatro tipos de árbol que crecen en un parque[14].

Tabla 3. Actividad 1

Tipo de árbol	Número de árboles
Pino	200
Abeto	100
Roble	50
Abedul	50

Explique cuál de las siguientes figuras representa la información de la tabla. Debe relacionar el gráfico o el círculo con el tipo de árbol.

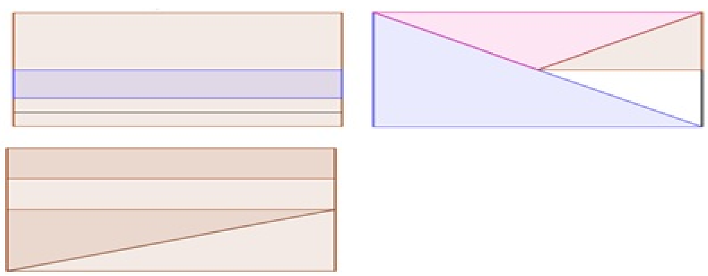


Figura 7. Representación 1

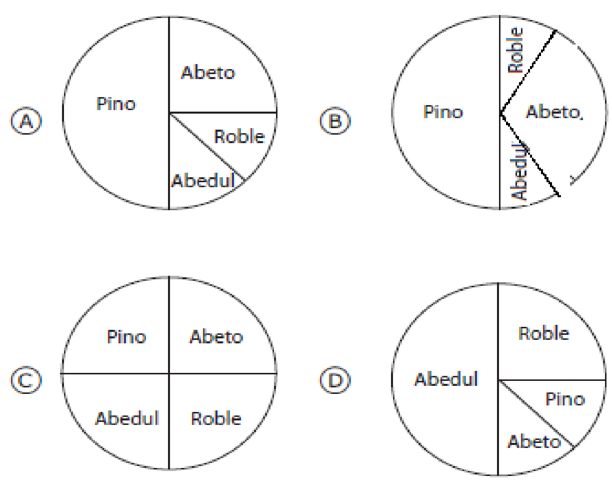


Figura 8. Representación 2

[14] Adaptado de: TIMSS preguntas de Ciencias y Matemáticas (2007).

2. Explique en cuál de las Figuras , la cantidad de Abetos representa la mitad de Pinos:

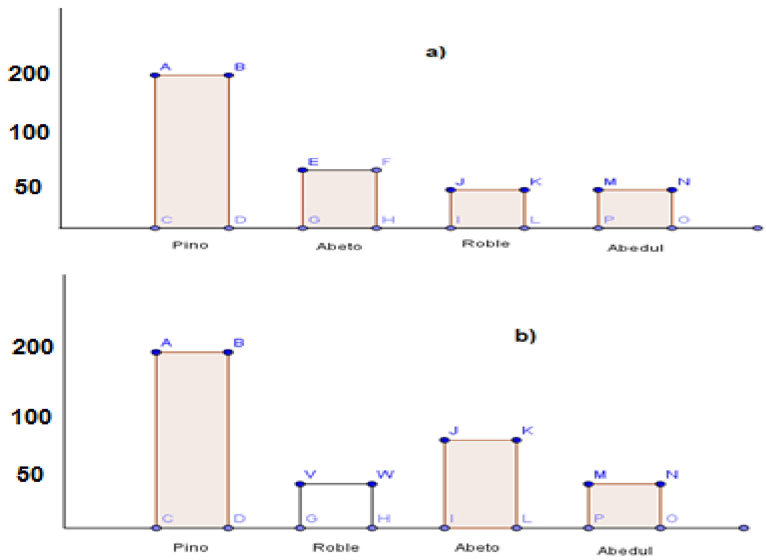


Figura 9. (a) y (b)

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) La cantidad de pinos es dos veces la cantidad de robles.

   b) La cantidad de abedules es la cuarta parte de los pinos.

   c) La cantidad de robles y abedules es la misma cantidad de pinos.

   d) La cantidad de abetos es el doble de la de pinos.

4. Una de las siguientes afirmaciones es falsa:

   a) La cantidad de robles representa el 50% de la cantidad de abetos.

   b) La cantidad de abetos representa el 25% de la cantidad de pinos.

   c) El 50% de los árboles está representado por abetos.

5. Señale a cuántas galletas corresponde $\frac{1}{3}$ de la cantidad total de galletas.

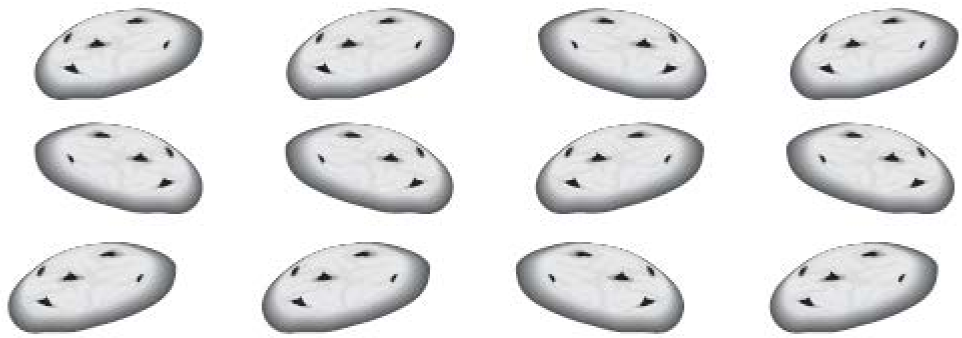


Figura 10. Galletas

El ítem anterior no se analizó en la investigación debido a que los niños no lo resolvieron por falta de tiempo.

6. Se presentan dos lados de un rectángulo. Dibuja los otros dos y explica cuántas veces está contenida el área del rectángulo obtenido en la cuadrícula (rectángulo formado por todos los cuadrados pequeños).

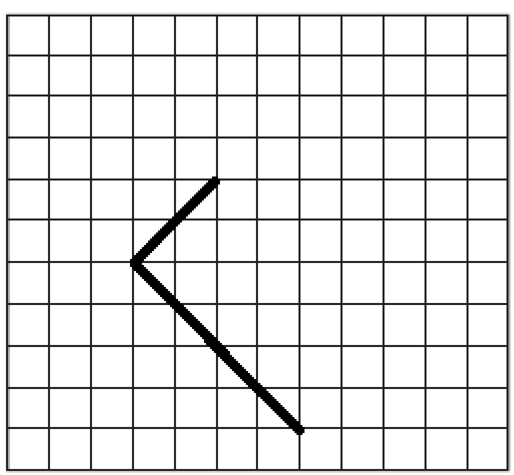


Figura 11. Completar rectángulo[15]

Los niños no resolvieron esta actividad por falta de tiempo, de igual forma no se abordó en la investigación.

[15] Tomado de: TIMSS preguntas de Ciencias y Matemáticas (2007).

7. Utiliza la información de los anuncios para completar las tablas[16].

Figura 12. Alquiler de bicicletas.

Tabla 4. Relación hora precio alquiler bicicletas

Alquiler de bicicletas de montaña	
Horas	Precio (zeds)
1	8
2	11
3	
4	
5	
6	

Alquiler de bicicletas de carretera	
Horas	Precio (zeds)
1	10
2	12
3	
4	
5	
6	

Este ítem fue solucionado posteriormente, cuando los niños ya habían logrado desarrollar otras actividades (Capítulo VI).

8. Realice la medición de la superficie S1 (la llave), utilizando el cuadrado U1 como unidad de medida. Realice la medición de la superficie S2 (el pájaro), utilizando el cuadrado U2 como unidad de medida.

[16] Tomado de: TIMSS preguntas de Ciencias y Matemáticas (2007). Zeds es una moneda imaginaria.

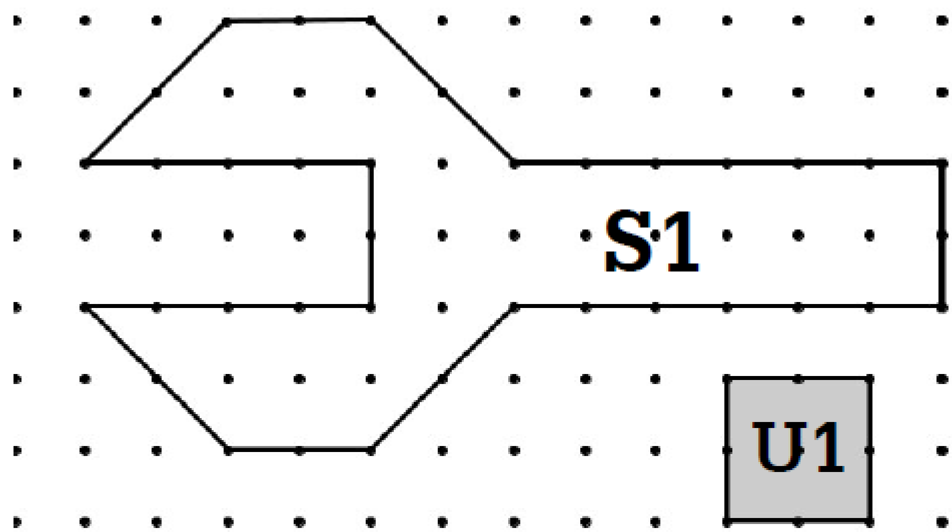


Figura 13. Llave

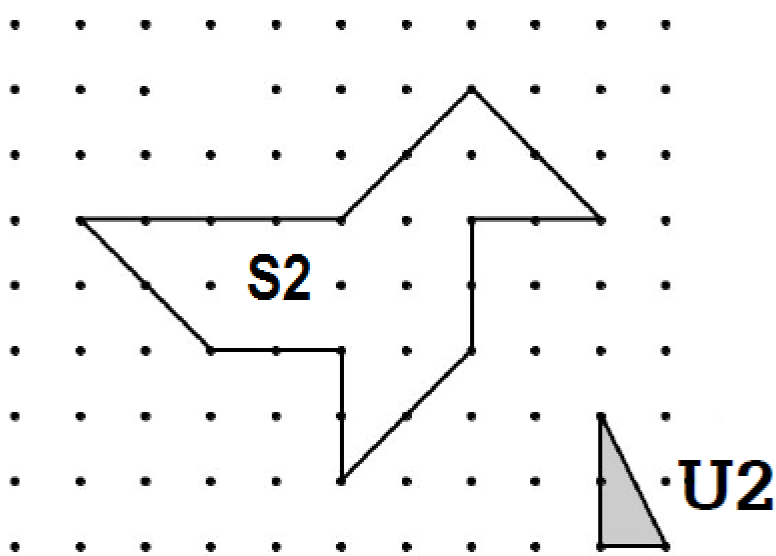


Figura 14. Pájaro

Compare las unidades U1 y U2. Sí se midiera S1, utilizando U2, como unidad de medida, ¿Cuál sería el resultado?

Si se midiera S2, utilizando U1, como unidad de medida, ¿Cuál sería el resultado?

Los procedimientos realizados por los niños en esta actividad permitieron evidenciar los conocimientos que les permiten interpretar las gráficas que representan una fracción cuando se usa en su acepción parte-todo (Capítulo V), sin embargo, los niños manifiestan dificultades cuando deben usar una unidad de medida. Esta dificultad fue abordada por el investigador mediante el diseño de otras actividades cuyo objetivo fue objetivar el “número racional”

Actividad N° 2.

Los niños cuando cuentan hacen coincidir el número nombrando con un objeto de un conjunto dado. El "uno" es la unidad y siempre es referido a un solo objeto. En las fracciones, la unidad puede consistir en más de un objeto o puede ser una unidad compuesta, es decir, que puede constar de varios objetos empaquetados como uno. Por otra parte, la nueva unidad se reparte (se divide en partes iguales) y un nuevo tipo de número se utiliza para referirse a partes de esa unidad.

Intención: Identificar la razón a partir de magnitudes discretas (cardinalidad).

Tabla 5. Magnitudes discretas

Necesidad	Acciones	La intencionalidad
Objetivar la cuantificación de la razón.	Medir y comparar magnitudes discretas.	Identificar relaciones entre magnitudes discretas que generan la razón y la fracción.

Enunciado. Una caja contiene 6 colombinas, con forma de círculo, ellas van a ser repartidas entre tres de sus compañeros.

Figura 15. Colombinas

A. ¿Qué cantidad representa una colombina?

B. ¿Cuál es la relación entre colombinas y compañeros?

C. Representa la mitad de las colombinas.

D. Se desea repartir las colombinas entre cuatro de tus compañeros. ¿Cómo harías dicho reparto?

E. Represente $\frac{1}{3}$ de las colombinas.

Actividad N° 3.

Los niños iniciaron la actividad relacionada con la proporcionalidad, dado que en la actividad anterior manifestaron dificultades para repartir colombinas, por ejemplo, no lograron distinguir tres colombinas como una "parte" (el todo) de seis. Esta dificultad fue un obstáculo para lograr la participación de los niños en el proceso de la objetivación del objeto matemático.

Los niños no lograron apreciar que las fracciones no son números, al parecer comprender que ellas son formas de notación para los números racionales, presenta cierto grado de dificultad para los niños.

Intención: Diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación que precede a la objetivación del número racional.

Tabla 6. Objetivación razón.

Necesidad	Acciones	La intencionalidad
Cuantificación de la razón.	Generar relaciones entre cantidades a partir de diferentes medidas.	Conservar la proporcionalidad.

Enunciado. En un supermercado se encuentran canastas de huevos rojos unos y blancos otros. Usted debe llenar las canastas A y B de modo que el número de huevos blancos y rojos conserven la misma proporción mostrada en la canasta C. Posteriormente debe empacar 33 huevos de tal suerte que la proporción sea la misma mostrada para la canasta C (Figura 16).

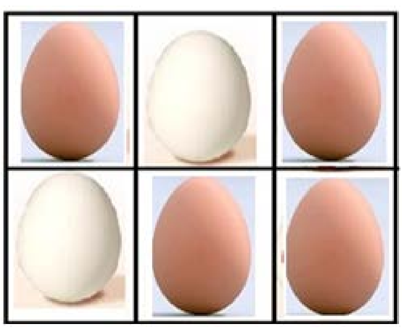


Figura 16. Canasta C

Figura 17. Canasta A

Figura 18. Canasta B

Se logró analizar las interacciones entre los niños (en el aula) mediante palabras que componen aspectos subjetivos como partes constituyentes del proceso de la objetivación del número racional (Capítulo VI).

Actividad N° 4.

En la actividad anterior los niños han logrado realizar procedimientos que les permitieron cuantificar la razón. La siguiente actividad realizada por los niños mediante la interacción social y con los artefactos les permitió la adquisición del saber, en este caso cuantificar la razón:

> Una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno… y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas. (Radford, 2006, p.11 3)

Intención. Analizar cambios entre las magnitudes tanto en términos absolutos como en términos relativos.

Tabla 7. Hacia la objetivación del número racional.

Necesidad	Acciones	La intencionalidad
Obtención de subunidades de medida a partir de la unidad dada.	Comparar diferentes medidas de tipo continuo.	Analizar, identificar y estimar la unidad de medida en cada partición.

Enunciado. A un niño de preescolar se le desea medir su estatura con una cinta de color azul. A otro niño de mayor estatura se le realiza el proceso de medición con otra cinta de color naranja. ¿Cuántas cintas de color naranja son necesarias para medir la estatura del niño de preescolar?

Aunque los niños durante la realización de las actividades- comparar dos magnitudes y medir- lograron objetivar el número racional, se decidió realizar otra actividad de apoyo, con la finalidad de observar si los niños realmente logran realizar el proceso de partición de una unidad en subunidades de forma natural, es decir, sin ser guiados por el docente produzcan significados y doten de sentido el número racional.

Actividad N° 5.

Con esta actividad se logra evidenciar la objetivación del número racional. Los niños acuden a los objetos conceptuales que la cultura les brinda para obtener unidades artificiales de medida, las que a su vez dividen en subunidades. Se aprecia que los niños realizan el procedimiento en forma natural, esto indica que han dotado de sentido al objeto matemático en cuestión. Sin embargo se plantea otra actividad complementaria para verificar que la objetivación efectivamente tuvo lugar.

Intención: Realizar la medición de una longitud con unidades artificiales.

Tabla 8. Proceso de objetivación del número racional

Necesidad	Acciones	La intencionalidad
Dotar de sentido el número racional	Transformar diferentes relaciones entre medidas de objetos. Abstraer el concepto matemático de número racional desde la triada acción-proceso-objeto.	Analizar las diferentes comparaciones de las magnitudes de los objetos.

Enunciado. Medir la longitud del lado de un “rectángulo” ubicado sobre el piso de la cancha de baloncesto de la Institución.

Actividad N° 6.

A través del proceso de medición, realizado durante varias sesiones, se orientaron las actividades realizadas por los niños hacia la objetivación de objetos matemáticos tales como la razón, la proporcionalidad, la fracción y el número racional, los procedimientos utilizados para realizar esta actividad dan cuenta de la objetivación del número racional. La objetivación se percibe en el uso de los signos en la relación epistémica sujeto-objeto (Capítulos V y VI).

Intencionalidad: Abordar las fracciones desde procesos de medición

Tabla 9. Dotación de sentido al número racional.

Necesidad	Acciones	La intencionalidad
Dotar de sentido al objeto matemático número racional.	Expresar el objeto matemático número racional de diversas formas y codificarlo en las prácticas culturales en formas de hacer, pensar y en la memoria.	Utilizar la mediación para dotar de sentido al número racional.

A cada grupo se le entregan tiras de papel de diferentes tamaños y colores, así:

- Tiras rojas de longitud 5 cm.
- Tiras azules de 10 cm de longitud.
- Tiras amarillas de 20 cm de longitud.

Cada grupo escoge un (1) objeto y determina la longitud que quiere medir.

Las preguntas propuestas a los niños que evidencian la objetivación del número racional fueron:

1. Realice una estimación de la longitud del objeto a medir.
   a. Si fueras a medir con la longitud de la tira roja, ¿Cuántas tiras rojas necesitarías para cubrir la longitud de ese objeto?
   b. Si fueras a medir con la longitud de la tira azul, ¿Cuántas tiras azules necesitarías para cubrir la longitud de ese objeto?
   c. Si fueras a medir con la longitud de la tira amarilla, ¿Cuántas tiras amarillas

necesitarías para cubrir la longitud de ese objeto?

2. Ahora, a partir de las tiras azules, amarillas y rojas, realice algunas relaciones que hay entre sus longitudes.

   a. Si fueras a medir la longitud de la tira amarilla con la longitud de la roja, ¿cuántas tiras rojas necesitarías para cubrir la tira amarilla?
   b. ¿Qué parte de la longitud de la tira amarilla es la longitud de la tira roja? Si lo fueras a representar ¿cómo lo harías?
   c. Si fueras a medir la longitud de la tira amarilla con la longitud de la azul, ¿Cuántas tiras azules necesitarías para cubrir la tira amarilla?
   d. ¿Qué parte de la longitud de la tira amarilla es la longitud de la tira azul? Si lo fueras a representar ¿Cómo lo harías?
   e. Si fueras a medir la tira azul con la roja, ¿Cuántas tiras azules necesitarías para cubrir la tira azul?
   f. ¿Qué parte de la longitud de la tira azul es la longitud de la tira roja? Si lo fueras a representar ¿Cómo lo harías?
   g. Si fueras a medir la longitud de la tira azul con la longitud de la roja, ¿Cuántas tiras rojas necesitarías para cubrir la tira azul?
   h. ¿Qué parte de la longitud de la tira azul es la longitud de la tira roja? Si lo fueras a representar ¿Cómo lo harías?
   i. Si fueras a medir la longitud de la tira azul con la longitud de la amarilla, ¿Cuántas tiras necesitarías para cubrir la tira azul?

CAPÍTULO V

Categoría Mediación

Se inicia este apartado proponiendo una hipótesis. Se considera que las funciones mentales superiores están mediadas por herramientas psicológicas, materiales y por sistemas de signos, entre los que se encuentra el lenguaje natural (Vygostky, 1981). La hipótesis anterior será motivo de validación a partir de los análisis de los episodios relacionados con las actividades. Se elabora la categoría de análisis mediación como emergente de las actividades realizadas por los niños en el proceso de medición. La elección de los indicadores está apoyada en los elementos que proporcionan el marco teórico respecto a la teoría de la actividad.

En esta categoría se analizó cómo se llevó a cabo el proceso de mediación semiótica e instrumental que contribuyó a la objetivación del número racional, que en el sentido de Vygotsky (1978) es un elemento a partir del cual se considera que la construcción del conocimiento es favorecida por el uso de instrumentos (psicológicos, materiales y artefactos) que son consustanciales y constitutivos del pensamiento.

La Tabla 10 presenta la categoría de mediación con sus respectivos indicadores.

Tabla 10. Categoría de análisis mediación

Categoría mediación	Indicadores
	Uso del lenguaje, signos, símbolos e instrumentos psicológicos
Mediación semiótica.	Dotación de significados a los símbolos y a los signos. Interiorización o internalización. Uso de sistemas numéricos. Uso de textos. Análisis de gráficos. Empleo de tablas. Empleo de representaciones mentales Resolución de Actividades.
	Uso de artefactos e instrumentos materiales
Mediación Instrumental.	Interacción sujeto-objeto. Comunicación interpersonal. Interacción social. Interacción docente-alumno. Funciones mentales psicológicas. Praxis social.

Este capítulo da cuenta de la emergencia de la categoría mediación la cual se revela en el análisis realizado a la producción (escrita, oral, el uso de artefactos y signos) de los niños. En general en los recursos que median la actividad que inciden en el proceso de objetivación del número racional.

La naturaleza de la mediación del pensamiento se refiere a la función, en el sentido dado por Vygotsky, desempeñada por los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social.

Análisis de datos a partir de los episodios

El análisis de los episodios tiene como objetivo responder a la pregunta de investigación ¿Cómo objetivan el número racional, a partir de los procesos de medición, alumnos de grado séptimo de la Institución Educativa Andrés Bello? Para ello se analizan las acciones realizadas por los niños de las diferentes formas de medir magnitudes discretas y continuas, los análisis aportan datos sobre las relaciones entre la mediación y la medición que permiten precisar las condiciones bajo las cuales los niños han logrado objetivar el número racional, caracterizando los factores que facilitan o dificultan la objetivación.

Actividad N°1.

La actividad inicial fue concebida como una manera de explorar los recursos semióticos que movilizan los niños, es decir, los conocimientos que poseen sobre la razón, la relación parte-todo y la proporción.

En los ítems 1,2, 4,5, los estudiantes señalaron la respuesta correcta, sin realizar análisis de la situación o actividad. Los ítems 3,7 y 8 no fueron resueltos inicialmente.

Se realizó un análisis posterior del ítem 3. Los siguientes episodios dan evidencia de cómo los niños dotan de significado a los signos y símbolos mediante palabras que componen aspectos subjetivos como partes constituyentes del proceso de la objetivación del número racional, para ello utilizan la mediación semiótica y la mediación instrumental.

El ítem 3 tiene como objetivo verificar los conocimientos de los niños referentes a la equivalencia de fracciones y cuantificación de la razón.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) La cantidad de pinos es dos veces la cantidad de robles.

b) La cantidad de abedules es la cuarta parte de los pinos.

c) La cantidad de robles y abedules es la misma cantidad de pinos.

d) La cantidad de abetos es el doble de la de pinos.

Un niño responde en la entrevista:

> E6: Ehhh… vea, la pregunta dice: la cantidad de abedules es la cuarta parte de los pinos, entonces los abedules son cincuenta árboles y los pinos son doscientos. Entonces, cincuenta más cincuenta daría cien, y cien más cincuenta daría ciento cincuenta más otros cincuenta darían doscientos que sería otra parte... Que sería la cuarta parte de los pinos.

Los instrumentos psicológicos, como el lenguaje utilizado por el niño, forman un sistema jerárquico lógico y coherente para relacionar los objetos matemáticos con los conceptos científicos en la producción de conocimiento, de esta forma el lenguaje se constituye en una actividad social de comunicación en relación con el proceso de pensar, es decir, pensar es un proceso social de comunicación mediado por la cultura.

A pesar de que se escribió de manera incorrecta el inciso b (debió ser la cuarta parte de la cantidad de pinos), los niños la interpretaron en forma correcta. Los niños pudieron recordar los conocimientos requeridos para elaborar una representación mental del problema. Los niños desarrollan una actividad perceptual y de acciones semióticamente mediatizadas.

Los instrumentos psicológicos dominan los procesos cognitivos y conductuales naturales del individuo, los instrumentos psicológicos se orientan hacia el interior y transforman los procesos psicológicos naturales internos en funciones mentales superiores (Kozulin ,1998).

Con respecto al ítem 7 uno de los niños utiliza el lenguaje escrito donde le asigna sentido a las tablas propuestas y las interpreta para resolver la actividad (Figura 19).

A. Utiliza la información de los anuncios para completar las tablas.

Alquiler de bicicletas de montaña	
Horas	Precio (zeds)
1	8
2	11
3	14
4	17
5	20
6	23

Alquiler de bicicletas de carretera	
Horas	Precio (zeds)
1	10
2	12
3	14
4	16
5	18
6	20

8+12=20
Porque 1 Hora son 8 (zeds) mar 5 que valen cada una 3 (zeds) por sumadas dan 12.

10+6=16
Porque ~~una~~ 1 Hora vale 10 (zeds) y 3 Adicionales que valen 6 zeds

B. ¿Para qué número de horas es igual el precio en los dos clubs?

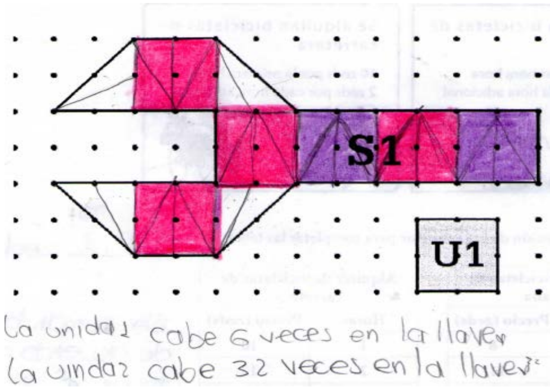
3 h

Figura 19. Solución mediante lenguaje escrito

Los niños realizan procedimientos como las acciones mentales y las operaciones matemáticas para comunicar la relación entre las horas y el precio de alquiler de los dos tipos de bicicleta que llevan a concluir la Actividad.

Completar la tabla, el uso de los signos matemáticos y las operaciones matemáticas realizadas por el niño sobre el papel, son artefactos que mediatizan y materializan el pensamiento. Esos artefactos son parte integral del pensamiento, se piensa con y a través de artefactos culturales (Radford, 2006).

En el ítem de la actividad 8, uno de los grupos de niños pintó la llave utilizando el cuadrado dado como unidad de medida para realizar la comparación entre las partes y el todo (Figura 20). Su percepción de la configuración de la unidad de medida U_1 la manifiesta mediante la acción de dejar cuatro triángulos como si no fuesen parte del todo. No ocurre lo mismo con la comparación del “pájaro” (Figura 21) respecto a la unidad de medida $U_{2.}$



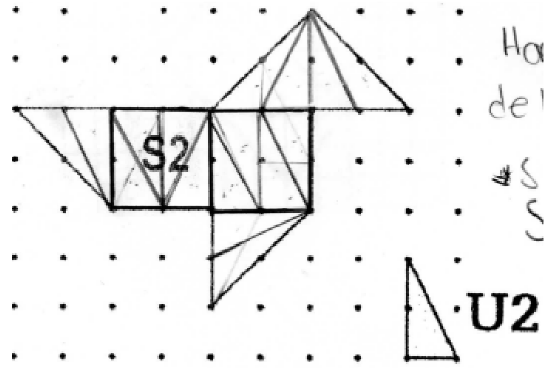


Figura 20. Llave pintada por uno de los niños

Figura 21. Pájaro dividido en triángulos

Se observa la dependencia cognitiva de los recursos culturales, formas de percibir la realidad y sus fenómenos. El niño se centra en el objeto matemático cuadrado y no percibe el objeto matemático triángulo para formar una unidad de medida. Pero para darse cuenta de que los recursos naturales son una parte integral del pensamiento hay que aprender a utilizarlos, por ello, el desarrollo de las funciones psicológicas centrales como la atención, la memoria y la simbolización se alteran.

Refiriéndose a estos recursos culturales como herramientas psicológicas:

> Por ser incluido en los procesos comportamentales, las herramientas psicológicas alteran el flujo y la estructura de las funciones mentales. Para ello, la determinación de la estructura de un nuevo acto instrumental como una herramienta técnica altera el proceso de adaptación natural por determinación de las formas de operaciones del trabajo (Vygotsky, 1981, p. 137)[17].

Incorporarse a la praxis social de la interpretación gráfica requiere un esfuerzo imaginativo para aproximarse al significado subjetivo de los signos con sus significados culturales y objetivos. Los signos de hecho, son objetos sociales y productos subjetivos. Los signos en general y los signos matemáticos en particular (como los gráficos de la llave y el pájaro) son

[17] Traducción libre del autor.

objetos sociales que son portadores de hechos culturalmente objetivos en el mundo que trascienden la voluntad de los niños.

Actividad N° 2.

Los niños resuelven la actividad y dan cuenta del uso de instrumentos materiales. A continuación se exhibe un episodio en donde los niños utilizan “las tortas fraccionarias” para resolver una actividad.

Episodio1.

P: ¿qué van a hacer para representar esas colombinas?

E2: Representaremos la Actividad gráficamente con las tortas.

Figura 22. Utilizando las tortas fraccionarias

Los niños utilizan en forma colectiva los instrumentos psicológicos y artefactos (Figura 22) para resolver la Actividad. “Los instrumentos materiales no existen como instrumentos individuales: presuponen un empleo colectivo, una comunicación interpersonal y una representación simbólica” (Kozulin, 1998, p. 17).

Las tortas fraccionarias utilizadas para comparar cantidades es un medio semiótico de objetivación, incluye abstracciones culturales como la unidad de medida (formada por más de un objeto), la relación parte-todo como una relación que cuantifica la medida relativa entre la parte y el todo. “Así, el acceso a los objetos matemáticos se da por medio de diversos medios semióticos de objetivación que los estudiantes utilizan en una actividad determinada y a través de los cuales ocurre la dotación de significados” (Miranda, Radford y Guzmán, 2013, p. 187).

A continuación se muestra un episodio que corresponde a la apreciación que hacen los niños basados de la unidad de medida, para establecer la conexión entre el tamaño de cada pieza de torta fraccionaria y la representación fraccionaria de las colombinas.

Episodio 2.

P: Eh ¿Qué cantidad representa una colombina?

E1: Eh… una colombina representa un cuarto ve… un sexto de una unidad.

P: ¿Que dicen ustedes? Miremos cómo están interpretando la actividad (Figura 23)

(Silencio).

P: Esta torta que ustedes tienen aquí (el docente señala la Figura 23) ¿Cuántas partes la componen?

E4: Seis pedazos.

P: ¿Qué me está representando cada parte?

E4: Una colombina.

P: Miren la situación entonces este tamaño que esta (señala una parte más grande que las otras)

E3: Este está más grande.

Se evidencia la emergencia de un problema: el significado dado por los niños a la fracción como la relación cuantificada entre las partes y el todo no corresponde con la representación realizada con las piezas debido a que éstas no son congruentes; esto es un indicio que no han logrado dotar de significado a la relación parte-todo.

Episodio 3.

P: ¿Simboliza realmente una de las seis colombinas? (señala una de las piezas de la Figura 23).
E2: Sí profe.
P: ¿Que dicen ustedes? Miremos la situación que están simbolizando.
E3: Tres…
P. ¿Representan las seis colombinas?
E3: Si vea… Sí.
P: ¿Seguro? ¿Usted está de acuerdo Manuela?
E5: Sí.
P: ¿Y ya observó bien, Manuela?
(Silencio)

Figura 23. Representación de 6 colombinas de tamaños diferentes

E1: No.

P: Katherine ¿Por qué no?

E1: Porque…

E5: Porque tienen diferente tamaño.

P: Observen miren la situación que están simbolizando, qué sucede con el tamaño…

E3: Este está más pequeño que todos.

P: Entonces, ¿Qué pasa?

E3: No tiene el mismo tamaño porque vea este es más grande.

E4: Entonces hay que representar con una torta de seis pedazos de igual tamaño.

Los niños simbolizan las seis colombinas utilizando las tortas fraccionarias, pero ubican dos piezas de diferente tamaño (Figura 23), sin embargo llegan a darse cuenta, por la mediación del docente investigador, que aunque el conocimiento procedimental es correcto, tienen dificultades con el objeto matemático de congruencia. “Esto significa que, en la vía hacia el conocimiento, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino también por la presencia del otro…Viene a desempeñar un papel epistemológico junto con la relación sujeto-objeto” (Miranda et al., 2007, p. 9).

Después de realizar acciones de comparación entre las piezas, los niños logran simbolizar con las tortas fraccionarias las seis colombinas en forma correcta (Figura 24) y logran dar solución a la actividad propuesta.

Figura 24. Simbolización de las colombinas

A pesar de que varios de los niños eran capaces de interpretar correctamente la representación del problema, la dificultad surge del hecho de que el problema requiere que los niños doten de sentido a las simbolizaciones que involucra valores relativos.

Lo anterior permite afirmar que los niños realizan deducciones cuando existe interacción sujeto-objeto y que esta interacción es evidencia para la producción del conocimiento, es decir, el desarrollo de las funciones psíquicas superiores están mediadas por instrumentos. Así mismo, el pensamiento como praxis social es una forma activa de participación social en la cual lo que sabemos y la forma en que llegamos al conocimiento están enmarcadas por la formas socioculturales.

Los signos son productos subjetivos mediante los cuales el niño expresa intenciones subjetivas y personales. El uso de signos se basa en la comprensión, que es la transformación -o la interpretación- de una señal en una anterior (una internalización, en términos de Vygotsky) para los que el niño ha alcanzado significados culturales más o menos estables.

Los niños realizan deducciones cuando existe interacción sujeto-objeto. Además, la interacción promueve la producción del conocimiento, es decir, el desarrollo de las funciones psíquicas superiores son mediadas por instrumentos. Así mismo, el pensamiento como praxis social es una forma activa de participación social en la cual lo que sabemos y la forma en que llegamos al conocimiento están enmarcadas por la formas socioculturales.

Actividad N° 3.

En esta actividad para representar la proporción de los huevos, los niños utilizan la representación gráfica y esquemas mentales que les permite tomar decisiones para generar la cuantificación de la razón. Para lograr el objetivo conforme a las condiciones reales, los niños realizan operaciones tales como: contar con los dedos, repartir los huevos en las celdas, y conservar la "proporción" que tienen los huevos en la canasta C (Figura 16). En la Figura 25 se muestra una respuesta de uno de los niños.

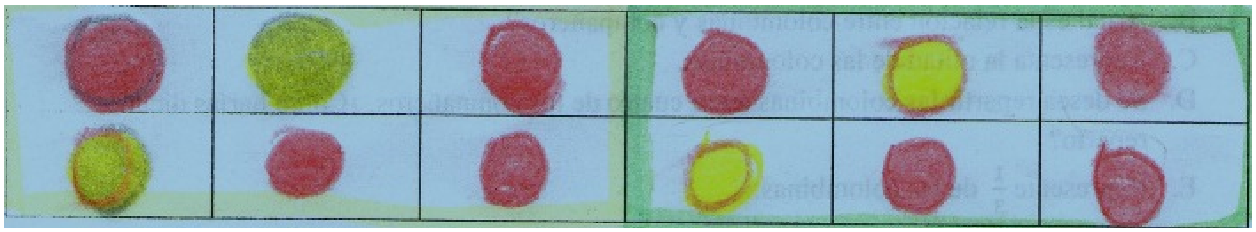


Figura 25. Solución de uno de los niños

El hecho de que los niños realicen conteos con los dedos es un signo de reconocimiento del sistema de numeración decimal, éste está en la cultura y es en sí un sistema semiótico cultural, es un instrumento no contextualizado que utilizan los niños, que pasa a su pensamiento transformándolos de forma tal que no pueden utilizar otro sistema de numeración para realizar el conteo. Los niños desarrollan sus capacidades para emplear funcionalmente los signos culturales; ellos reproducen figuras similares al modelo (Figura 16) en función de los parámetros dados (forma y cantidad) y los conceptos presentes y emergentes. Esta actividad ayuda a los niños a actualizar los procesos cognitivos, es decir, ayuda a generar procesos mentales superiores que hacen que el objeto proporción se convierta en una relación parte-todo.

La acción de realizar conteos con los dedos se haya ligada a la aparición del sistema numérico decimal, lo cual da evidencia de lo que Vygostky llamó la descontextualización de los instrumentos de mediación "Proceso mediante el que el significado de los signos se vuelve cada vez menos dependiente del contexto" (Wertsch, 1988, p. 50).

Según Vygotsky, el hombre, al tratar de relacionarse con los objetos utiliza sistemas simbólicos provistos por la cultura. Este tipo de operación favorece el tránsito-de la abstracción y la generalización- desde lo social hacia lo individual.

Los efectos de los instrumentos psicológicos en la cognición se pueden observar cuando los niños utilizan la aritmética elemental (conteo) y cuando se apropian de los contenidos (proporción).

Actividad N° 4.

En esta actividad los niños van a realizar la medida de la estatura de Darwin (el cual es un niño estudiante de pre-escolar de la Institución Educativa Andrés Bello) con una cinta para luego realizar la comparación de la medida de la estatura de Manuela (niña del grado séptimo).

Durante el proceso de medición de Darwin, lo que impulsa la actividad es el motivo de los niños para encontrar la estatura de Darwin tomando como unidad de medida la cinta de mayor longitud. Sin embargo para satisfacer la necesidad de la medida, los niños ejecutan acciones que no están relacionadas directamente con la obtención de la medida, por ejemplo apoyar a Darwin contra la pared. “La actividad humana no existe más que en forma de acción o cadena de acciones.” (Leontiev, 1978, p.83). La búsqueda de la medida de Darwin les permite a los niños avanzar en la producción del significado del concepto de medición como comparación de dos magnitudes y desde esa postura observar la génesis del número racional.

En este episodio la acción de colocar a Darwin contra la pared y las operaciones como el conteo y la medición llevadas a cabo por los niños son los elementos de naturaleza histórica donde el conocimiento previo es retomado por los niños en el curso de procesos socioculturales de producción de significados.

Episodio 4.

E4: Como solo tenemos dos cintas, vamos a poner una debajo de la otra y a medida que vamos bajando vamos contando para saber cuántas cintas son requeridas.

P: ¿Y porque la están colocando al niño en la pared?

E6: Porque sería más fácil para tener algo en que apoyarnos.

P: Bueno y las cintas ¿tienen la misma longitud?

E4: Si profe cada cinta mide 20 cm.

P: ¿Que les pasó? ahí que veo.

E6: Sobra.

P: Y ¿cuánto sobró?

E4: Una pequeña parte.

La actividad involucra acciones dirigidas a la determinación de la estatura de cada uno de los niños; para ello eligen la vía hacia la consecución de la finalidad. Las acciones emprendidas comprende una serie de decisiones: adaptar las acciones a las condiciones como colocar al niño junto a la pared, luego rectificar su medida acostándolo en un papel Craft. Son las operaciones (medios con los que se ejecuta la acción) de la actividad orientadora hacia la finalidad que facilita y promueve que los niños interioricen la medición como comparación de dos magnitudes.

Durante el proceso de medición de Manuela, los niños realizan un procedimiento similar al realizado con la medida de Darwin, esto indica que los niños han logrado ejecutar otras operaciones como base orientadora en forma consciente para lograr la medida de Manuela: dividir la unidad de medida en unidades más pequeñas con dobleces sucesivos.

En este episodio se percibe la interacción social no como una forma de negociación de significados, sino como un elemento cultural de producción de conocimiento del cual se van apropiando los niños.

Episodio 5.

E1: Entonces vamos a medir ya que hicimos la figura de la compañera, vamos a medir con esta cinta naranja para ver cuánto mide.

P: ¿Bueno jóvenes cuánto les dio?

E1: 33.

P: 33 y qué…

Un medio… en coro.

E1: No, 33 y un poquito.

P: ¿Y cómo van a hacer para medir ese pedacito?

E1: Lo divido.

E1: Cogemos una regla y medimos.

P: No tengo regla en este momento, no hay regla como hago para medirlo.

Silencio.

E2: Por eso hay que dividir la cinta.

P: ¿Y cómo la divido?, ya tienen la cinta, muy bien, como la divido.

E1: Doblamos el pedacito aquí que quedó.

El uso de expresiones tales como: la cinta mide 20 cm, sobra una pequeña parte, 33 y un poquito, lo divido, hay que dividir la cinta, doblamos el pedacito…, permite a los niños entender, comprender e interpretar la actividad. Esta forma lingüística de transformación de signos gráficos en signos verbales mediante un rico conjunto de modos lingüísticos (por ejemplo, "un medio", "pedacito", "divido", "doblamos"), son medios semióticos de objetivación que expresan un acercamiento a la forma de objetivar la razón, la fracción y el número racional.

Se percibe que los niños progresivamente van revisando y refinado sus posturas teóricas hacia la solución del problema matemático propuesto.

Actividad N° 5.

Para el desarrollo (Ver enunciado de la actividad 5) de esta actividad los niños se dividen en dos grupos y establecen unidades artificiales para realizar la medición, una de ellas es el zapato y la otra una cartuchera (Figuras 26 y 27).

Un elemento del modelo teórico a desarrollar es la mediación semiótica, que se ve en la construcción del conocimiento como consecuencia de la actividad con artefactos donde los signos emergen y se desarrollan dentro de la interacción social.

Episodio 6.

P: Vamos hacer la medición de un lado del rectángulo ¿Cómo lo van a medir ustedes?

E6: Nosotros vamos a medir con una cartuchera.

(Silencio)

P: … ¿Cómo lo van a medir ustedes?

E1: Con los zapatos.

Figura 26. Midiendo con la cartuchera **Figura 27.** Midiendo con los zapatos

El Episodio 6 da evidencia sobre el papel que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social de la medición. Se piensa con y a través de los artefactos culturales. “Los artefactos no son meras ayudas al pensamiento (como lo plantea la psicología cognitiva) ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste” (Radford, 2006, p.107).

El pensamiento de los niños no es algo que transcurre solamente en el plano cerebral. El pensamiento también ocurre en el plano social. La cartuchera, los zapatos, los dibujos para representar una secuencia, el recubrimiento de superficies con colores, la forma de utilizar el lenguaje y los conceptos para solucionar una actividad, los signos matemáticos sobre la hoja, el uso de las tortas fraccionarias, son instrumentos o artefactos que mediatizan y materializan el pensamiento. Esos artefactos son parte integral del pensamiento.

La actividad mental de los niños se moviliza por el efecto de la práctica social en la medida en que paulatinamente dotan de significado a los componentes culturales, entre ellos los signos, los símbolos, el lenguaje y los tipos de señales que tienen algún significado definido socialmente.

La progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es un proceso social llamado objetivación. En palabras de Radford (2006, p.116) “La objetivación es […] ese proceso social de toma de conciencia progresiva […] de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido"

En los ejemplos anteriores, "El pensamiento de los alumnos se desarrolla a lo largo de una compleja coordinación de actividad perceptual y de acciones semióticamente mediatizadas según la interpretación y los sentidos subjetivos de los alumnos" (Radford, 2006, p. 108.). Desde este punto de vista, la percepción, signos y artefactos son considerados como partes constitutivas del pensamiento.

Los análisis de los episodios de este capítulo posibilitaron mostrar cómo los artefactos modifican las estructuras cognitivas de los niños, es decir, como "La existencia de herramientas psicológicas o signos, pueden ser utilizados para controlar la actividad propia" Wertsch (1988, p.44). Al proponer a los niños actividades diseñadas teniendo en cuenta la teoría de la objetivación, el aprendizaje fue caracterizado por las interacciones con los artefactos culturales que el niño encontró en su medio, los artefactos no solo fueron mediadores, sino que fueron constituyentes en su pensamiento, "el aprendizaje se tematiza como una forma compleja de actividad, caracterizado por dos fuentes de producción de significados: el uso de artefactos y la interacción social (Radford, 2006).

CAPÍTULO VI

Categoría Medición

Este capítulo presenta la emergencia y el análisis de la categoría medición asociada al rol social de las prácticas de medición y la adquisición de conceptualizaciones de significados en torno a la noción de unidad de medida; ello da cuenta de cómo los niños producen objetos conceptuales.

Se considera que a partir del proceso de medición que generan la razón se posibilita la objetivación del número racional. La afirmación anterior será motivo de validación a partir de los análisis de los episodios relacionados con las actividades. Se elabora la categoría de análisis medición como emergente de las actividades realizadas por los niños en el proceso de medición. La elección de los indicadores (Ver Tabla 11) de esta categoría está apoyada en los elementos que proporcionan el marco teórico respecto a la teoría de la objetivación y el conocimiento matemático.

En esta categoría se analizó cómo se llevó a cabo el proceso de medición que contribuyó a la objetivación del número racional desde las interacciones sujeto-objeto en las actividades realizadas por los niños, ello en relación con la dotación de sentidos y significados por parte de los niños dada a la medición, como la forma en la que transforman sus interpretaciones a la vez que la relacionan con la razón, la relación parte-todo, la proporción y las fracciones en el curso de un encuentro de interacción socio cultural en el cual refinan sus posturas teóricas hacia la emergencia del objeto de conocimiento. “Este refinamiento conlleva una determinación sucesiva de conocimiento” (Radford, 2013, p.15).

En la Tabla 11 se presenta la categoría medición y los indicadores respectivos.

Tabla 11. Categoría de análisis medición

Categoría medición	Indicadores
Proceso de medición	Comparación de magnitudes La razón La fracción La relación parte-todo La proporcionalidad Relación Sujeto-Objeto de conocimiento Proceso de objetivación

Análisis de datos a partir de los episodios

Se analiza la objetivación del número racional a partir del proceso de medición desde la transformación de los significados culturales en procesos sociales de toma de conciencia[18]. El proceso de medición es mediatizado a dos niveles: socialmente por la interacción entre los niños e instrumentalmente y por la mediación semiótica (medios semióticos de objetivación). En este contexto, el interés se focaliza en detectar los cambios en los significados delos niños respecto a la razón, la fracción, la relación parte-todo, la proporción a partir del proceso de medición, según los dos niveles de mediatización.

Actividad N° 3.

Esta actividad muestra un proceso sobre la comparación de magnitudes discretas. Inicialmente la actividad está organizada en función del concepto de proporcionalidad. El logro de esta actividad se basa en la interpretación de determinadas situaciones (proporcionalidad, razón, relación parte-todo y fracción) como elementos centrales que son utilizados como

[18] Desde el punto de vista metodológico, el aprendizaje se investiga como serie de procesos de objetivación; es decir, procesos sociales de toma de conciencia crítica en los que intervienen diferentes medios semióticos puestos en juego por los estudiantes (lenguaje, gestos, símbolos, artefactos (Miranda et al., 2013).

herramientas de mediación semiótica. Finalmente, el uso de la gráfica de la proporcionalidad se promueve como un medio para resolver la actividad.

Episodio 7.

P: … En la canasta C ¿qué es esto? (señala toda la canasta) ¿Cómo están repartidos los huevos?

E1: Que hay cuatro, cuatro unidades rojas y dos blancas.

P: ¿Cómo se puede llamar esa repartición? ¿Cómo se puede indicar?

E2: Una fracción.

P: Y ¿Cómo la expresaríamos?

E2: Seis cuartos…

El episodio evidencia una manera de comparar cantidades y examinar las relaciones entre ellas por medio de una razón, los niños comparan la cantidad total con respecto a una parte de ella, indicando que $\frac{6}{4}$ es una fracción , es decir, denominan la razón como una fracción.

Algunas personas utilizan la palabra fracción para referirse específicamente a una comparación parte-todo, ello es posible debido a que en la escuela primero se construye la fracción a partir de la relación parte- todo (Kieren, 1993). También puede referirse a cualquier número escrito en la forma simbólica $\frac{a}{b}$ (Lamon, 2012).

En el seguimiento del desarrollo de la mediación semiótica durante la actividad con las canastas de huevos, la intención del docente investigador está dirigida a fomentar la producción de signos por parte de los niños. Se espera la producción espontánea de signos relacionados con el uso del artefacto.

Episodio 8.

E2: O dos cuartos.

E1: Sí.

E3: Profe, también se puede decir que… que hay cuatro medios.

P: ¿Eso qué nos indica?

E3: Que son equivalentes a cuatro medios a dos unidades, que son dos huevos, cuatro medios de huevos rojos y dos huevos enteros, la unidad completa de huevos blancos.

La comprensión del enunciado en esta actividad debe tomarse de la respuesta (E2: O dos cuartos), que es una expresión de la acción de comparación que E1 pone a disposición de los demás miembros del grupo, donde E3, indica la equivalencia para expresar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa. En el proceso de solución de la actividad, E3 realiza la objetivación de la razón $\frac{4}{2}:2$, y logra identificar la cuantificación de la relación cuando afirma “ser el doble de” cuantificada como 2.

En el Episodio 8 los niños manifiestan la formalización de la fracción al realizar la cuantificación de la razón *4:2 como 2,* pasan de observar dos enteros a percibir una relación entre magnitudes.

En la Actividad 3 donde se solicita llenar la canasta con 33 huevos, los niños realizan la operación de llenar las celdas siguiendo el procedimiento 2 a 4 dando respuestas que se agrupan según el modelo de la Figura 28.

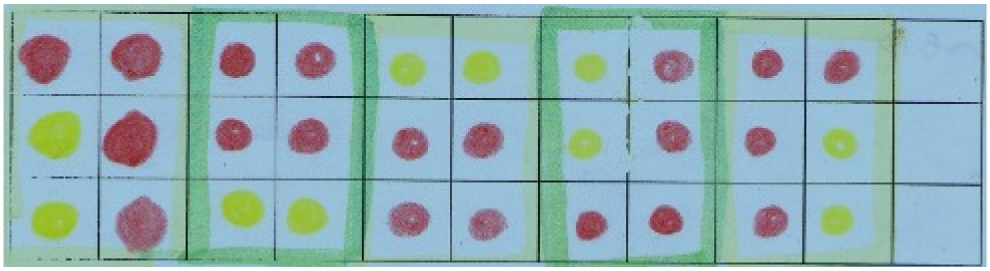


Figura 28. Solución dada por un niño

La operación de llenado manual de la canasta impulsa a que el niño deje tres celdas vacías. Parece claro que no identifica la relación entre el número de huevos rojos y el número de huevos blancos, como el criterio requerido para empacar los huevos de acuerdo con la proporción dada inicialmente.

La Figura 29 muestra la reinterpretación del problema, y la Figura 30 muestra la solución y la justificación escrita dada por uno de los niños.

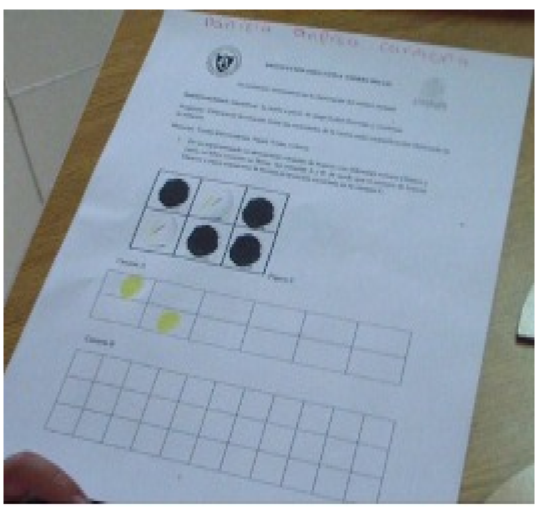
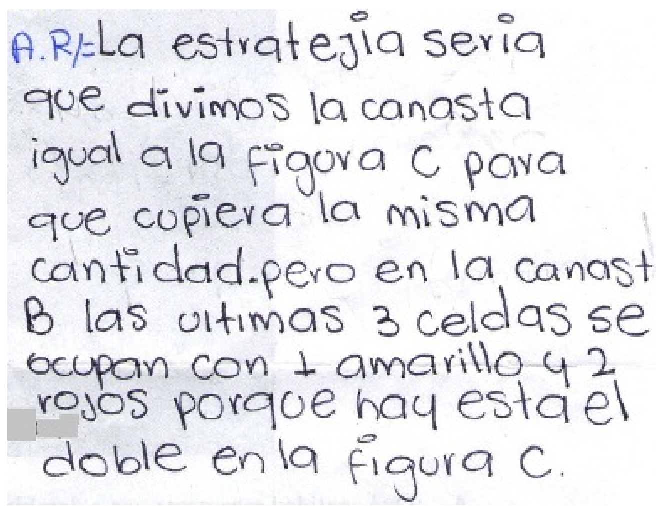


Figura 29. Reinterpretación del problema



A.R/:La estratejia seria
que divimos la canasta
igual a la figora C para
que copiera la misma
cantidad.pero en la canast
B las ultimas 3 celdas se
ocupan con 1 amarillo y 2
rojos porque hay esta el
doble en la figura C.

Figura 30. Expresión escrita de la solución

En la ubicación de los 33 huevos, inicialmente el niño realiza un proceso (operación) similar al realizado con los 12 huevos, aunque es válido, inicia con una estrategia de planear acciones con el uso adecuado de artefactos como mediadores, en este caso el uso del concepto “ser el doble de” con el cual el niño puede pensar y establecer una relación entre el significado social y el personal, este proceso le permite encontrar una representación simbólica equivalente a la relación 2 a 4, la cual percibe como 1 a 2. La estrategia le permitió reconocer el objeto razón, es decir, objetivar la cuantificación de la razón entre dos cantidades.

Para expresar su solución a las actividades, los niños utilizan instrumentos materiales y psicológicos (medios semióticos de objetivación, artefactos tecnológicos, sistemas de signos) que son portadores de prácticas sociales y a la vez son formas culturales que mediatizan y materializan el pensamiento; en este sentido, Radford (2006) afirma:

> Los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural. (p.7)

Se aprecia que el niño ha “preservado” la configuración mediante la reproducción de la ubicación de los huevos en la canasta C (Figura 16).

Actividad N° 4.

En la actividad realizada por el grupo de niños para comparar la estatura de dos niños, el grupo se apoya en el uso de artefactos para realizar tanto la actividad (comparar las longitudes correspondientes a las estaturas de los dos niños midiéndolos con diferentes cintas) como comunicarse con los pares que colaboran en la actividad (comunicación interpersonal). La comunicación entre ellos y los énfasis discursivos se aprecian en el siguiente episodio.

Episodio 9.

> E4: Como sólo tenemos dos cintas, vamos a poner una debajo de la otra y a medida que vamos bajando vamos contando para saber cuántas cintas son requeridas.
>
> E6: Mirar para cuántas cintas azules son necesarias para medir a Darwin.
>
> E1: Vamos a medir la compañera Manuela con unas cintas rojas.

P. Después de que midan a manuela entonces que van a hacer.

E1: Vamos a hacer la comparación con Darwin y Manuela[19].

Figura 31. Midiendo a Manuela **Figura 32.** Midiendo a Darwin

En el Episodio 9 se manifiesta como los niños interactúan socialmente en diferentes configuraciones: docente- alumno, alumno-alumno, para dar solución a la actividad planteada.

El docente investigador deja solos a los niños y ellos inician la discusión la cual consiste en la articulación conveniente de los significados propios de cada uno de los objetos matemáticos: razón, fracción y número racional. Desde esta perspectiva se analiza el carácter sociocultural de la formación de pensamiento y de formas particulares de razonamiento, elementos del proceso social de objetivación del saber, en particular del número racional.

"La adquisición de instrumentos psicológicos debe tener el carácter de una acción deliberada. Si no hay ninguna intencionalidad por parte del enseñante-mediador, no habrá apropiación de los instrumentos psicológicos […]" (Kozulin, 1998, p.105). Esta es la intención al dejar solos a los niños, la matriz o cuadro propuesto por uno de los niños para resolver el

[19] Los padres de familia autorizaron publicar las fotos de los niños.

problema son parte de un conocimiento sistemático. En este proceso de objetivación del número racional, el artefacto es esencial: es el punto de partida del proceso, es la fuente de una rica producción de signos (Figura 33).

Episodio 10.

E4: Yo voy a empezar haciendo un cuadro midiendo por cada cinta larga cuántas cortas hay para ver cuántas…

Interviene un profesor de matemáticas ofreciendo su ayuda como mediador.

(Silencio)

Los niños ignoran el ofrecimiento de ayuda por parte del profesor.

Se evidencia que el aprendizaje escolar es una actividad colectiva y en la perspectiva sociocultural el aprendizaje es un fenómeno social, sucede y se desarrolla en las relaciones mediadas por intercambios simbólicos que se establecen entre los niños. Por lo tanto, el entorno social es la fuente en la que se basa el desarrollo de los conceptos.

"Un instrumento sólo desempeña su papel si es adquirido como un instrumento generalizado, capaz de organizar los procesos cognitivos y de aprendizaje del individuo en contextos y tareas diferentes" (Kozulin, 1998, p. 106). Los niños realizan un vínculo entre el dibujo y la expresión matemática escrita, los niños con el artefacto, construyen un significado matemático útil para resolver la actividad (Figura 33).

E5: ¿Cristian usted que está haciendo?

E1: Estoy mirando como… Cuántas… cintas largas media Darwin, y cuántas chiquitas medía Manuela.

E5: ¿Daniela usted que está haciendo?

E4: Estoy mirando en cada cinta larga cuántas veces caben las cortas.

E4: ¿Manuela usted que está haciendo?

E5: Estoy mirando cuántas cintas caben la estatura pequeña en la grande.

E6: ¿Qué estrategia está utilizando, que procedimiento estás haciendo, como lo estas solucionando?

Los niños comparten el mismo objeto de la actividad en el aprendizaje, donde la división del trabajo se refiere a la división de funciones y actividades. Se nota un trabajo organizado en el cual los alumnos, en interacción social, controlan la actividad para lograr generar desarrollo cognitivo que les posibilite la producción de conocimiento.

Los niños realizan operaciones (conteo, medición) matemáticas para obtener la medida, del niño de preescolar, expresada en cintas de color naranja. El siguiente episodio muestra la interacción entre los niños:

Episodio 11.

E5: Yo voy a empezar midiendo primero la estatura del niño de prescolar y después la estatura del niño de prescolar con cintas cortas y al niño grande con cintas de color azul.

E4: Yo voy a empezar haciendo un cuadro midiendo por cada cinta larga cuántas cortas hay para ver cuántas…largas azules caben ¿cuántas cortas?

E2: La larga mide 20 cm ¿sí o no?

E4: Y la corta mide 5 cm.

E2: O sea que caben 4 cintas cortas, entonces seria 33 cintas pequeñas.

E4: Serian 21 cintas cortas porque yo pienso que por que 4 cintas cortas caben en cada larga de 20cm. entonces 4 x 5 = 20 y un pedacito que sobró de cinta que también era de 5 cm de cinta son 21.

E2: No vea, por cada cinta larga caben 4 pequeñas ¿sí o no?, entonces serian….en cada cinta larga silencio largo.

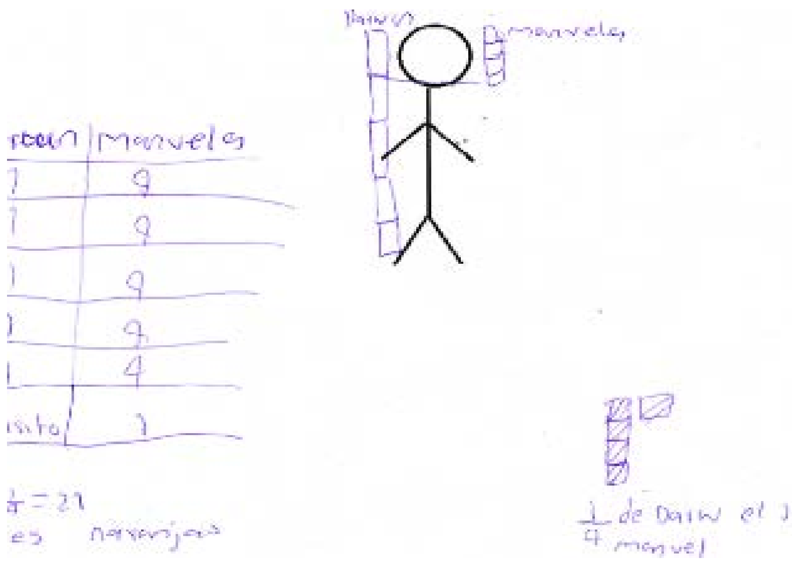


Figura 33. Análisis de las medidas

Se evidencia en la Figura 33 cambios cualitativos significativos, al observar cómo los niños realizan tablas y dibujos de comparación entre las magnitudes de las cintas, el proceso de medición emerge de forma natural, se está ante un proceso de transición, “evocado experimentalmente desde un tipo de memoria natural a otro cultural” (Kozulin, 1994, p. 139).

Las acciones realizadas por el niño le permiten abandonar formas simples del uso de la memoria para favorecer el uso estructural y funcional del pensamiento que le proporciona formas mentales superiores, por ejemplo, para la abstracción de características (proporcionalidad) que le permiten simbolizar la fracción $\frac{1}{4}$ como resultado del proceso de medición de las dos cintas. Al respecto Lamon (2012) señala:

> El razonamiento proporcional es uno de los mejores indicadores que los estudiantes han alcanzado la comprensión de los números racionales y de los conceptos multiplicativos

relacionados. Mientras que, de un lado, es una medida de la comprensión de las ideas matemáticas elementales, por otra parte, es la base para los conceptos más complejos (pág. 3)[20].

En el proceso de medición los niños realizan acciones de comparación por medio del fraccionamiento para comprobar la medida de las cintas, dividen la cinta larga en cuatro partes y la relaciona con la tira pequeña indicando que ésta es $\frac{1}{4}$ de la cinta larga. Con esta relación obtienen la medida de la estatura del niño de preescolar. Los niños llegan a establecer relaciones entre las dos magnitudes, logrando objetivar la relación parte-todo al comparar entre sí dos magnitudes de un mismo sistema a través de su cociente determinando la medida relativa de una con respecto a la otra.

En el siguiente episodio se evidencia la verificación de la objetivación del racional.

Episodio 12.

P: ¿Por qué acostaron al niño en ese papel Craft?

E4: Profe para verificar si la medida que tomamos en la pared es la misma que podamos obtener en esta misma medida con el papel Craft.

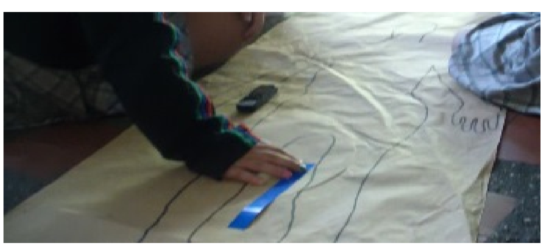


Figura 34. Medida de la silueta

Los niños realizan una silueta (Figura 34) para Manuela y otra para Darwin, acuestan al niño y luego realizan la medición nuevamente, posiblemente debido a que han encontrado alguna

[20] Traducción libre del autor.

dificultad en la medición inicial; para ello utilizan otro instrumento, el papel Craft, el cual es comúnmente usado por los niños en sus actividades escolares Se aprecia que los niños combinan los instrumentos dados por el docente (cintas) con otros que son conocidos para ellos en su ámbito cultural (el papel Craft). El uso del papel Craft pretende verificar la medida tomada inicialmente, con el fin de dar cuenta de una medida precisa de cada uno de los niños. Al respecto Radford (2006) señala que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación, que hacen a la semiótica un campo bien situado para entender las relaciones entre el contexto cultural y los signos a través de los cuales piensan los individuos.

El diálogo entre los niños se ilustra en el siguiente episodio:

Episodio 13.

P: Bueno ¿cuál es el objetivo de la medida del niño?

E6: Mirar cuántas cintas azules son necesarias para medir a Darwin.

P: ¿Tú estás de acuerdo?

Sí.

P: ¿Y entonces como lo van a hacer?

P: ¿Que les pasó? ahí que veo.

E6: Sobra.

P: Y ¿cuánto sobró?

E4: Una pequeña parte.

"Una pequeña parte" es un signo o un objeto de mediación semiótica de cierta forma histórica cultural de pensar el racional, implica una reorganización en la manera de dar génesis al número racional.

P: ¿Y cómo van a hacer para medir ese pedacito?

E6: utilizando…

E6 Medidas ¡pues!

P: Bueno, vamos a mirar haber ¿cuántas cintas les dio?

E2: Cinco y sobró una pequeña parte.

P: Y con la parte que sobra ¿qué van a hacer?

E6: La vamos a dividir en partes más pequeñas.

P. ¿En cuántas partes la dividieron?

Nos dio 4 (al unísono).

Los niños realizan la acción de dividir (la pequeña parte sobrante) una magnitud en magnitudes más pequeñas, a ésta operación ya la han dotado de sentido y le han dado significado. Esta acción anterior está dirigida hacia el objetivo de contribuir a la objetivación del número racional a partir del proceso de medir asociado con la acción de comparación de dos magnitudes, se produce el número racional como cuantificación de la razón, existe conmensurabilidad con la unidad.

En el Episodio 14 el docente investigador crea las condiciones para promover que los niños perciban una estructura general subyacente al número racional. El docente investigador lo hizo mediante la movilización de recursos semióticos.

Episodio 14.

P: Y si las cintas no son exactas, ¿entonces qué pasa?

E6: Si las cintas no son exactas entonces…

E4: Que ese pedacito sería… sería $\frac{1}{5}$ o… $\frac{1}{4}$ de cinta, por ejemplo 5 cintas y $\frac{1}{4}$

P: ¿Cuánto mide la cinta?

E6: 20 cm.

P: Y entonces ¿cuánto sería el cuarto de cinta? Si mide 20 la cinta ¿cuánto sería $\frac{1}{4}$ de 20 cm?

E4: 5 cm.

P: Entonces cuánto mediría el niño.

Mediría 5 y $\frac{1}{5}$.

P: De $\frac{1}{4}$ pasaste a $\frac{1}{5}$ no entiendo.

E4: $\frac{1}{4}$.

P: Bueno entonces cuanto sería la medida del niño.

E4: 5 cintas y $\frac{1}{4}$.

La intervención del docente investigador, en la discusión para la objetivación del número racional, tiene el propósito que los niños doten de sentido a la relación entre las magnitudes. Se espera que doten de sentido no solo a la razón, a la fracción y la relación parte-todo y sino también al número racional. Las dificultades que surgen en el proceso requieren que el docente investigador actúe como mediador. El docente investigador tiene la actividad de mediar entre la cultura y los niños, entre las matemáticas, como producto de las actividades humanas, y el niño como aprendiz.

Los niños finalmente logran verificar la medida de Darwin por medio de una misma acción: medir (la cual contribuye a la realización de diferentes actividades).

Uno de los niños realiza el siguiente análisis: (Figura 35).

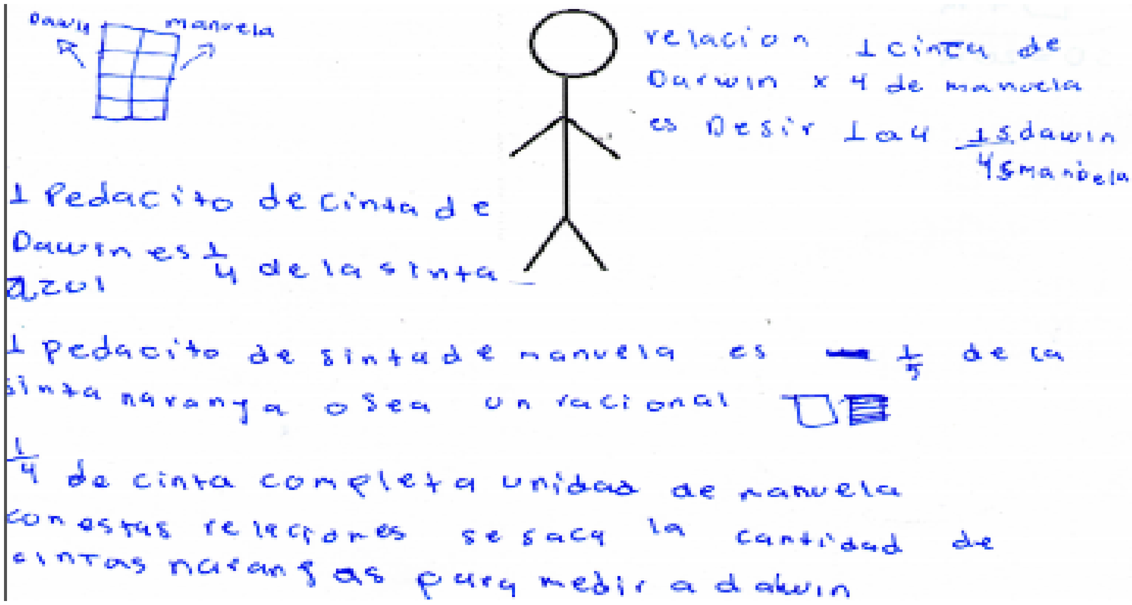


Figura 35. Análisis medidas

El niño expresa la relación: una cinta de Darwin por cuatro de Manuela la cual es fácilmente representada y objetivada, esto se evidencia cuando escribe *1 a 4* o realiza la simbolización $\frac{1\ cinta\ de\ Darwin}{4\ cintas\ de\ Manuela}$. En palabras de Obando et al., (2013):

> La razón es entonces una *cantidad numérica* que expresa o bien la relación de multiplicidad de la mayor con respecto a la menor, o bien la relación de que parte es la menor de la mayor. En general esta cantidad numérica se expresa a través de un número real. Si las cantidades son conmensurables, la razón es un número racional. (p.981)

Además se advierte (Figura 35) cómo los niños han logrado formalizar la interpretación inicial del racional $\frac{a}{b}$ mediante diferentes situaciones: “un pedacito de cinta de Darwin es $\frac{1}{4}$ de la cinta azul”; “un pedacito de la cinta de manuela es $\frac{1}{5}$ de la cinta naranja o sea un racional”. Los niños ya no perciben la relación $\frac{a}{b}$ como dos números enteros aislados sino que la interpretan como un número racional, los niños refinan sus posturas teóricas.

Otro de los niños realiza el análisis siguiente: (Figura 36)

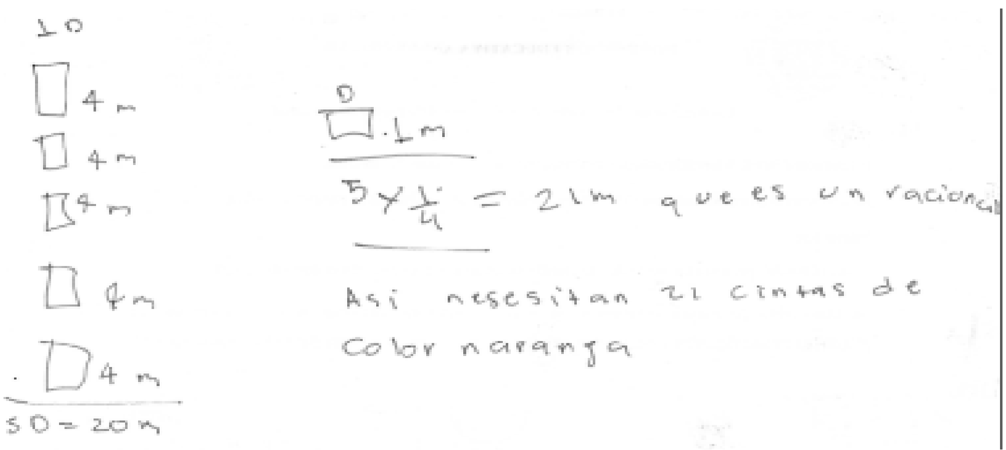


Figura 36. Análisis medidas realizado por otro niño

En ambos análisis se revela cómo a partir del proceso de medición, los niños centrados en las magnitudes generan la razón, la fracción y el número racional; simultáneamente los niños no solo interpretan el resultado de la comparación de las medidas sino que lo articulan convenientemente con la comprensión de los significados y de los conceptos asociados a tales objetos matemáticos. Los niños aprendieron a pensar sobre las magnitudes y sobre las formas en que se relacionan entre sí para objetivar la relación parte-todo.

Actividad N° 5.

En la actividad 5 se propone a los niños medir la longitud del lado de un “rectángulo” ubicado sobre el piso de la cancha de baloncesto de la Institución. El propósito es realizar la medición de una longitud con unidades artificiales para la generación y comprensión del número racional.

En el siguiente episodio se aprecian algunas interacciones entre los niños, vinculadas con la comprensión del número racional.

Episodio 15.

P: …vamos a continuar con el proceso de medición que hemos venido haciendo,…hoy vamos hacer la medida de la longitud de este rectángulo (señala un rectángulo sobre el piso de la cancha de baloncesto), unos van a medir un lado y los otros miden el otro lado, ustedes deciden como hacerlo, a medida que lo hacen, van hablando, discutiendo y reflexionando sobre la medición.

(Silencio)

E5: bueno en estos momentos mi compañera está midiendo con una cartuchera.

(Silencio)

E5: ¿Cuánto lleva?

E4: Trece

(Silencio).

E5: En este momento mi compañera está terminando de hacer la medición. Y le va dando... y le dio…

E4: Noooo… me dio veintidós pero me sobró un pedazo.

E5: A mi compañera le dio veintidós, pero le acaba de sobrar un pedazo, hay que hacer la medición más pequeña.

A pesar que efectuaron la medición con la cartuchera, y ante el sobrante (sobra un pedazo), los niños deciden usar otro objeto del entorno como "unidad de medida", tal vez con la esperanza, no manifiesta, que no haya sobrantes.

Episodio 16.

E4: hagámosla entonces con este lapicero.

(Silencio).

P: Bueno muchachos, ¿Cómo van las medidas? ¿Qué les dio?

E5: Profe pues, mi compañera midió con la cartuchera y le acaba de sobrar un pedazo, entonces vamos a…

P: Bueno cuéntenme cómo así, no entiendo cómo que sobra un pedazo.

E5: Le dio veintitrés y le sobró un pedacito.

E4: Mire profe… me dio veintidós…

P: ¿Veintidós qué?

E4: Veintidós cartucheras, pero me sobró este pedazo, por lo cual estoy midiendo con una unidad más pequeña, que es con este lapicero.

P: Una unidad más pequeña, entonces ¿la cartuchera ya nos les va a servir?

E5: No.

El Episodio 16 muestra como los artefactos mediatizan las relaciones entre docente-alumno, alumno-alumno y alumno-conocimiento. Los niños necesitan usar artefactos (a los cuales les han dado un sentido personal y un significado cultural) de forma tal que les permitan organizar sus acciones para lograr medir con precisión la longitud del rectángulo.

En los diálogos se aprecia que al no obtener una medición precisa de la longitud del lado del rectángulo con la unidad inicial establecida arbitrariamente-la cartuchera-, los estudiantes la cambian por otra unidad de medida más pequeña-el lapicero-.

Episodio 17.

P: Entonces ¿van a tomar otra unidad de medida?

E5: Sí.

E5: En estos momentos nos acaba de sobrar un pedazo, un pedacito más chiquito que el de la cartuchera, entonces vamos a coger una unidad más grande, un poco más grande.

(Silencio).

E5: Hay un color y si nos queda grande le sacamos punta.

En este episodio llama la atención que los niños ofrezcan “sacar punta”, tal vez para reducir la longitud de la unidad y lograr que la relación entre el objeto a medir y la unidad elegida sea un número entero. Los niños, sin embargo, siguen cuestionando el tipo de unidad, y ahora ofrecen cambiarla de nuevo.

E3: Hagamos con un borrador.

Los niños, sin embargo, siguen cuestionando el tipo de unidad, y ahora ofrecen cambiarla de nuevo.

E2: No.

E4: Es mejor con este borrador.

E1: Muestre ese borrador ese borrador era mío.

Se resalta en este episodio que los niños mezclan asuntos extra matemáticos -la pertenencia del borrador- con la medición. El conocimiento matemático de base se “mezcla” espontáneamente con asuntos personales, sin embargo tales asuntos parecen no entorpecer el flujo discursivo que los niños desarrollan.

E6: Usted no tiene borrador… a no entonces seguimos con los borradores.

E5: Vamos a seguir con un color.

E5: Y con un borrador.

A partir de los diálogos se logra advertir elementos conceptuales, como: la escogencia de una unidad de medida, clave en el proceso de objetivación del número racional; el cambio de la unidad medida, asociado al rol social de las prácticas de medición y la negociación de significados en torno a la noción de unidad de medida; ello da cuenta de cómo los niños generan objetos conceptuales, éstos “son patrones fijos de actividad reflexiva […] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006, p. 111). Se identifica que los niños comprenden el proceso de conteo, pero no han logrado establecer la relación entre las magnitudes.

Episodio 18.

P: ¿Quién quiere contar cómo se realizó la medición?

E4: Yo noté que, como es, que nosotros también estábamos midiendo con, como se dice, con un zapato más… mucho más grande, pero nos quedaba siempre (*Silencio*) eh nos sobraba.

E1: Sobraba, entonces.

E4: Nos sobraba mucho pedazo.

En los anteriores diálogos, se logra identificar, que la unidad artificial establecida no cabe un número exacto de veces en la longitud a medir.

E3: Entonces eh… el zapato nos dio diecisiete, pero pues no quedó completo porque quedó sobrando, entonces dividimos la unidad de medida en una unidad más pequeña.

P: Y ¿cuál era su unidad de medida?

E2: El zapato.

P: ¿Dividieron a quién?

E2: A la unidad de medida.

E3: Y nos dio diez y siete y medio (Silencio).

En este episodio, los niños dividen la unidad en sub-unidades para generar un número racional, pero aún no lo logran identificar el racional debido a que no han realizado la acción de comparación de las dos magnitudes, para determinar la relación entre ellas. Vale decir que para calcular la medida de la longitud, colocaron una magnitud sobre la otra, estableciendo aparentemente una comparación entre magnitudes.

P: ¿Cómo fue la relación que les dio en la medida?

(Silencio).

E2: Fue exacta.

E2: Eh mmm…

P: ¿Cómo se logró?

E4: Comparando (Silencio).

Los niños han logrado identificar que al colocar una magnitud sobre la otra se obtiene una medida "exacta", lo cual indica que la longitud es conmensurable con la unidad de medida elegida. Los niños han conseguido formalizar el fraccionario como un símbolo (diez y siete y medio) para representar el número racional.

Episodio 19.

P: Bueno, cuéntenme entonces… si ustedes hubieran tenido, otras unidades para medir esa longitud, ¿Con cuál creen ustedes que les daría más precisa?

E2: Con el metro.

E4: Porque el metro se puede dividir, eh… en centímetros y los centímetros en milímetros.

E6: Unidades más pequeñas.

E5: Si, unidades más pequeñas.

¿Cómo sería la comparación?

(Silencio).

E3: Daría más exacta.

Cabe resaltar que la idea de exactitud para los niños está relacionada con el uso de una medida que se pueda dividir.

P: ¿Cómo llaman ese resultado?

E5: Racional.

E5: Un número racional.

En el Episodio 19 el racional para los niños parece estar relacionado con la idea de sobrar poco (residuo pequeño).

Los niños logran objetivar el número racional a partir del proceso de medición, tomando una unidad artificial, sin embargo reconocen que es necesario el uso de un patrón de medida estándar como el metro, con el cual pueden obtener unidades de la misma especie cada vez más pequeñas y lograr más exactitud para la obtención del número racional.

Actividad N° 6

Para el desarrollo de esta Actividad los niños se dividen en dos grupos identificados como Grupo 1 y Grupo 2.

Vale decir que entre la realización de la Actividad 5 y la Actividad 6, transcurrieron 3 semanas.

Las medidas se realizan con cintas, cuyas longitudes son conocidas para los estudiantes. El docente les dio esta información.

Episodio 20.

P: ¿qué artefacto tomaron para realizar la medida?

Grupo 2: Un celular.

P: ¿en cuánto tomaron la estimación de la longitud del celular?

Grupo 2: Profe tomamos como estimación 7 cm.

P: Cuando lo compararon con alguna de las cintas ¿cuál fue la medida?

Grupo 2: 11 cm.

Figura 37. Medida del celular con la cinta roja

Durante el proceso de análisis de los datos, el docente se percató que no había introducido o discutido la acepción para el término "estimación"; sin embargo el término es usado espontáneamente por los niños. También fue espontánea la estimación de las medidas en centímetros. Los estudiantes no utilizaron una regla graduada-instrumento de medición- para comprobar si efectivamente la medida conferida de 7 y 11 centímetros correspondía a la magnitud medida. Parece ser que los estudiantes han hecho algún tipo de elaboración vinculada con el significado de los centímetros como medidas de longitud, y manifiestan esta elaboración en este episodio. El docente no ha enseñado a medir con reglas graduadas.

Los niños siguen discutiendo sobre los artefactos que desean medir:

Episodio 21.

P: Katherine ¿qué artefacto tomaron para medir?

Grupo 1: Un lapicero.

P: ¿En cuánto tomaron la estimación de ese artefacto?

Grupo 1: 15 cm.

P: Cuando lo compararon con alguna de las cintas ¿cuál fue la medida?

Grupo 1: 16,1 cm.

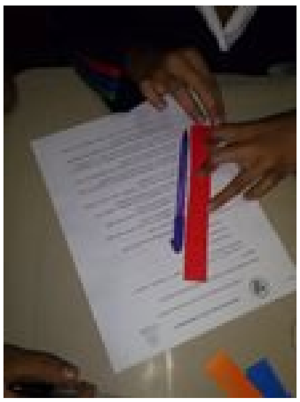
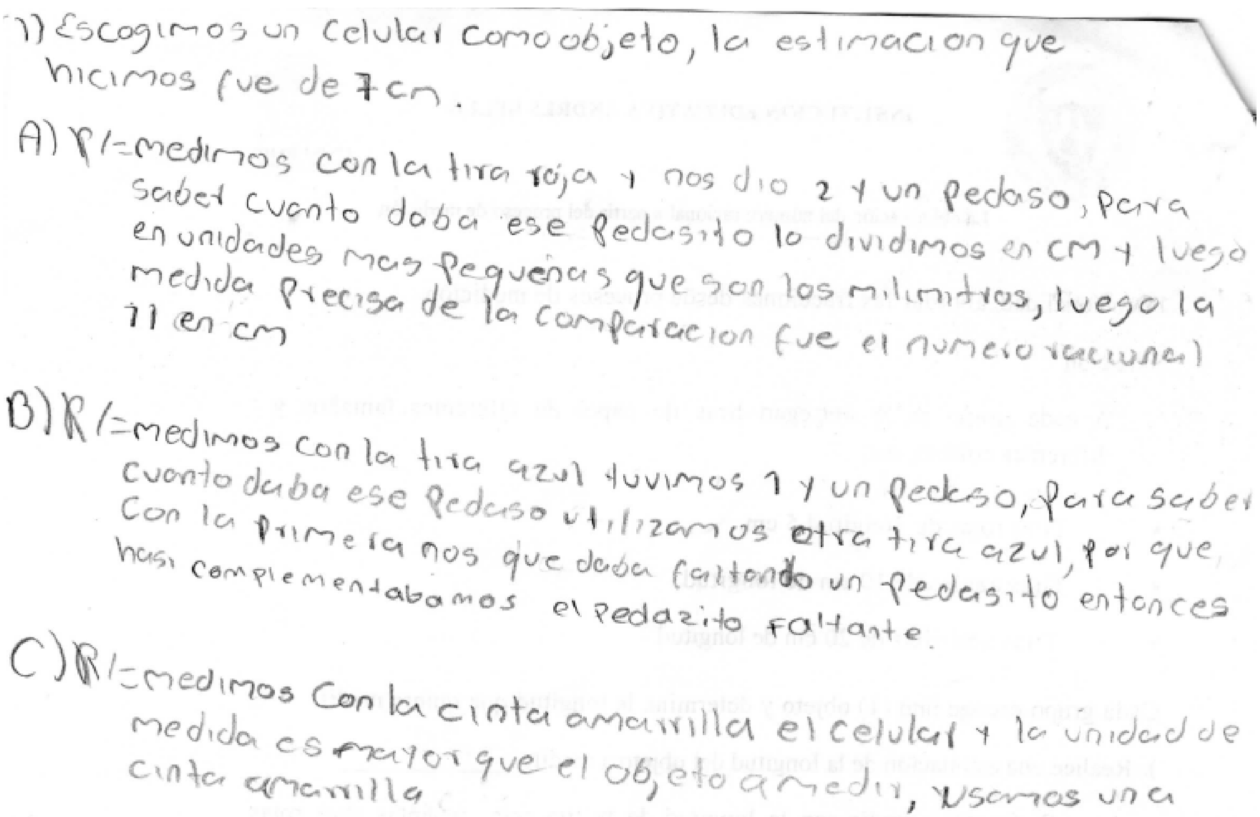


Figura 38. Medida del lapicero con cinta roja.

Los dos grupos de niños intentan de estimar que los artefactos tienen medidas exactas, en cm, sin embargo al realizar la comparación con las cintas se dan cuenta que realizaron una estimación "alejada" de la medida real del artefacto. Recurren así a la comparación (medición), siendo ésta quien les ayudará a reconocer y a reforzar diversos conceptos y procedimientos involucrados.



1) Escogimos un celular como objeto, la estimacion que hicimos fue de 7cm.

A) R/=medimos con la tira roja y nos dio 2 y un pedaso, para saber cuanto daba ese pedasito lo dividimos en cm y luego en unidades mas pequeñas que son los milimitros, luego la medida precisa de la comparacion fue el numero racional 11 en cm

B) R/=medimos con la tira azul tuvimos 1 y un pedaso, para saber cuanto daba ese pedaso utilizamos otra tira azul, por que con la primera nos que daba faltando un pedasito entonces hasi complementabamos el pedazito faltante.

C) R/=medimos con la cinta amarilla el celular y la unidad de medida es mayor que el objeto a medir, usamos una cinta amarilla

Figura 39. Explicación de la medida del celular.

Los niños explican (Figura 39) la forma en que realizaron las operaciones para encontrar la medida exacta del celular a partir del proceso de medición. El procedimiento es habitual, lo que indica que los niños se han apropiado del artefacto, han aprendido a utilizarlo correctamente y se han realizado las acciones y operaciones motrices y mentales necesarias para ello los niños han dotado de sentido al objeto conceptual.

En el siguiente episodio es notable que los niños verbalicen la palabra milímetro. Durante este episodio el docente no exploró el uso de esta palabra ni la comprensión que los niños tenían de ella.

Se podría inferir que este intento de usar divisiones cada vez más pequeñas corresponde a la acción de doblado sucesivo que se exhibe en la figura 40.

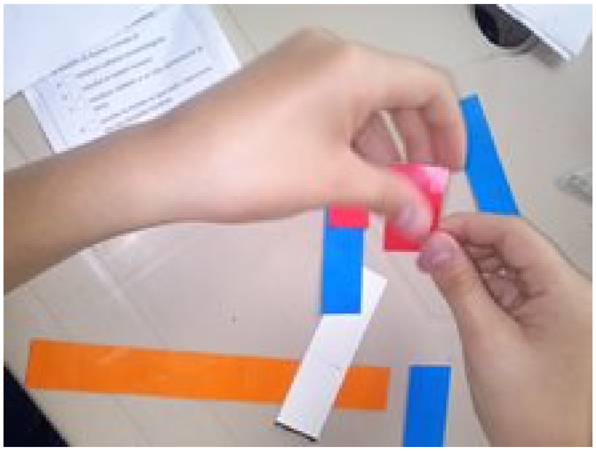


Figura 40. División de la cinta roja en unidades más pequeñas

Después de esta acción, uno de los niños afirma "debemos utilizar la regla". Parece ser que en este momento "surge" la necesidad de usar una manera sistemática y establecida de usar medidas más pequeñas.

Episodio 22.

> Grupo 1: Su medida fue 3 cintas rojas y un pedacito, dividimos la tira roja en centímetros y milímetros, de tal forma que después de hacer el proceso nos dio el número racional 16,1 cm.

Las Figuras 41 y 42 muestran la manera en que los niños realizan el proceso de obtención del número racional a partir de la comparación de dos magnitudes. Durante el proceso de medición los niños evidencian haber objetivado el número racional, todo esto indica un amplio desarrollo de las funciones superiores que va más allá de la capacidad de manipular símbolos. Objetivar el número racional revela haber desarrollado formas de pensamiento que le permiten hacer conexiones con diversos contextos: razón, relación parte-todo y proporcionalidad las cuales las relaciona matemáticamente.

b-medimos con la cinta azul la cual su medida es de 10cm
1 cinta azul y un pedazo dividimos una cinta azul
en centimetros y milimetros, despues de medir y Realizar
un respectivo proceso nos dio en número racional 16,1cm

Figura 41. El número racional

P: ¿Y cuáles fueron esas unidades más pequeñas?

Grupo 2: Milímetros y después nos dio la medida precisa.

P: Y ¿cuál fue la medida?

Grupo 2: 11cm.

P: Y qué clase de número es 11cm.

Grupo 2: Racionales.

-medimos con la tira roja y nos dio 2 y un pedaso, para
saber cuanto daba ese pedasito lo dividimos en cm y luego
en unidades mas pequeñas que son los milimitros, luego la
medida precisa de la comparacion fue el numero racional
11 en cm

Figura 42. Proceso objetivación del racional

Los niños han logrado objetivar el número racional a partir del proceso de división de una longitud (cm) en longitudes más pequeñas (mm). La división resulta ser un proceso de reflexión y de acción históricamente constituido e incorporado en la cultura. Para desarrollar con detalle el conocimiento como un conjunto de procesos incorporados cultural e históricamente constituidas de reflexión y la acción, los niños:

a) Escogen un objeto.

b) Lo ubican sobre una superficie y lo comparan con una cinta.

c) Adicionan o recortan en “segmentos” más pequeños, dado que la cinta es más pequeña o más grande que el artefacto.

d) Logran subdividir la unidad en subunidades.

Las operaciones realizadas por los niños en la división de “centímetros” (cm) en unidades más pequeñas “milímetros” (mm) (Figuras 41 y 42) son el proceso que evidencia el papel de la práctica social de la medición en la génesis de la objetivación del número racional. Inicialmente las operaciones están dirigidas entre los niños (plano intersubjetivo) y se luego se dirigen hacia cada niño (plano intrasubjetivo), en ese proceso de internalización que es mediado por el docente, la actividad se desarrolla de forma reflexiva y aparecen formas lingüísticas (como las expresiones “medimos”, “pedazo”, “realizar el respectivo proceso” [de medición], “medida precisa”, “número racional”) en las que los símbolos 16.1cm y 11 cm dan lugar a la objetivación del número racional.

Estas acciones llevadas a cabo en la solución de las actividades 4, 5 y 6 son particularidades del proceso de objetivación del número racional. La acción de comparar, como un medio para efectuar subdivisiones suficientes y para obtener la medida exacta del artefacto, favorece producir y reproducir conocimiento. “Ese conocimiento es una codificación cultural de formas de actuar y de hacer significativo que el conocimiento es algo general: no se puede equiparar a una u otra secuencia particular de acciones coordinadas[21]” Radford (2013, p. 12).

El episodio 23 revela cómo los niños producen, en interacción social, sus conocimientos específicos que les permite identificar la situación planteada y concretar métodos y argumentos, que serán considerados para reafirmar la objetivación del número racional.

[21] Traducción libre del autor.

Episodio 23.

P: ¿Cuántas tiras amarillas necesitaron para cubrir la longitud del artefacto?

Grupo 1: Una amarilla de la cual solo se utiliza una parte.

En la operación de comparación la cinta resulta ser de mayor longitud que el artefacto

Grupo 2: La cinta amarilla, y la unidad es mayor que el objeto.

P: miremos el segundo punto como lo hicieron, a partir de tiras azules, amarillas y rojas que medición o que relaciones utilizaron y que hicieron, cuénteme que hicieron

Grupo 1: Realizamos un cuadro.

En el segundo grupo de niños ocurrió lo contrario: la cinta fue más pequeña que el artefacto.

Los niños intentan sistematizar y organizar la información derivada de esta actividad, y para ellos proponen espontáneamente usar una tabla. Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) indica que los niños deben “Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas” para ser competentes en matemática. El uso natural de la tabla y sus bondades son propuestos por los propios niños. Ellos pueden usar de manera natural sus conocimientos matemáticos para dar respuesta a situaciones problemática sin que medie una enseñanza específica por parte del docente investigador.

P: Un cuadro y qué relacionaron en el cuadro.

Grupo 1: Relacionamos las tiras rojas, con azules y las amarillas.

Grupo 2: Usamos también la tabla para observar relación entre las figuras rojas, azules y amarillas.

P: Bueno yo vea aquí en esta un uno que quiere decir ese uno de la roja.

P: ¿Cómo me explican ese 1, $\frac{1}{2}$ y este $\frac{1}{4}$?

El docente investigador proporciona diferentes formas de interpretar y dar sentido y significado a la razón $\frac{a}{b}$: como cociente, como cuantificación de la razón y como relación parte-todo a través del proceso de medición de las cintas. En este proceso los niños objetivan el número racional, lo cual se observa en las relaciones entre las diferentes situaciones modeladas por esos símbolos (Figura 43).

Grupo 1: Que ese 1, es la figura roja, entonces el azul es el doble y la amarilla va como aumentando, es 4 veces.

P: ¿Qué indica este 1?

Grupo 1: Que hay una cinta roja.

P: Bueno, que hay una cinta roja, y esta mitad ¿que indica aquí, este $\frac{1}{2}$?

Grupo 1: Que la roja es la mitad de la azul.

P: ¿Y este $\frac{1}{4}$ que indica?

Grupo 1: La roja es $\frac{1}{4}$ de la amarilla.

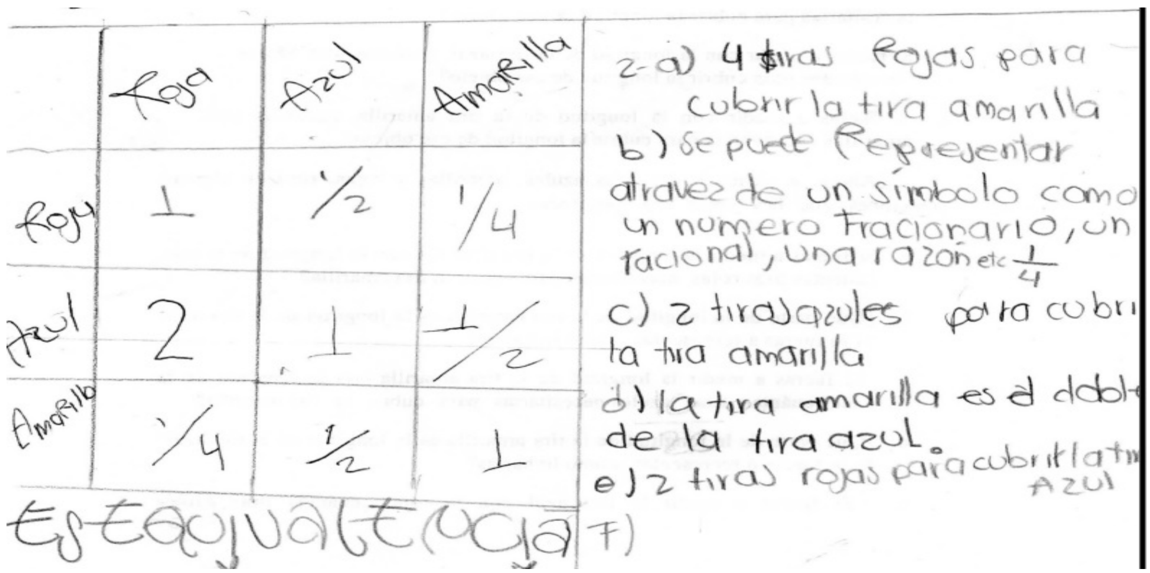


Figura 43. Equivalencia entre las cintas

Se aprecia que durante el episodio anterior, los niños usaron expresiones "un medio" y "un cuarto", que replica la comprensión natural que los niños tienen. La verbalización de la expresión "un medio" puede no representar una comprensión matemática, puede representar tan solo una afirmación cultural. Sin embargo, en la Figura 43, los niños han escrito por propia mano las expresiones " $\frac{1}{2}$ " y " $\frac{1}{4}$ ", lo cual es un indicio del proceso de objetivación simbólica de la relación entre las medidas de dos objetos.

La pregunta ¿Qué parte de la longitud de la tira amarilla es la longitud de la tira roja? Si lo fueras a representar ¿cómo lo harías? es respondida por uno de los grupos (Figura 44).

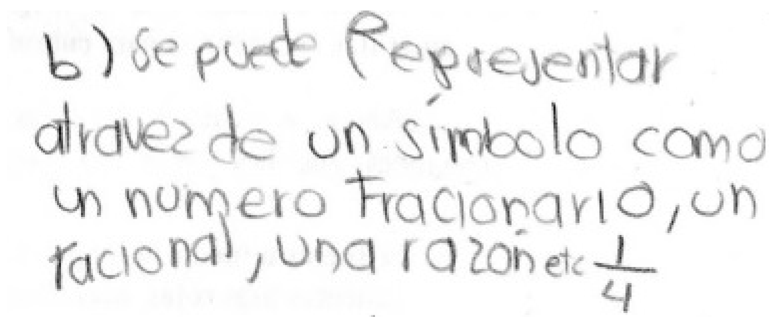


Figura 44. Representación de uno de los grupos

Se aprecia que los niños están pensando matemáticamente, esta actividad social de la interpretación del número racional los ha llevado a considerar el significado subjetivo de los signos con sus significados culturales y objetivos. Los niños manifiestan que la razón o la fracción descrita con el símbolo $\frac{1}{4}$ no es un número propiamente, es un símbolo, una manera de representar al número racional.

A través de los análisis de los episodios, se ha logrado evidenciar el proceso de objetivación del número racional, los niños realizaron conteos, luego cuantificaron la razón a partir de magnitudes, la unidad "uno" se logró no refiere a un solo objeto, finalmente el proceso de medición llevó a los niños a partir la unidad cada vez en partes más pequeñas para realizar la comparación de dos magnitudes y un nuevo tipo de número se utiliza para referirse a las partes de dicha unidad: el número racional.

Los niños han logrado sus propias transformaciones y su propio desarrollo, la actividad les ha permitido representar el objeto matemático de diferentes formas. Al mismo tiempo el objeto es transformado subjetivamente por los niños. Las acciones realizadas tales como la cuantificación de la razón, proponer una magnitud como unidad de medida, les han permitido lograr el resultado deseado. A través de las interacciones sociales, los niños han dotado de significado al objeto matemático número racional en función de sus características personales, sus motivaciones y conocimientos.

Se observa cómo las actividades permite a los niños obrar recíprocamente mediados por un contenido y compartir significados sobre el objeto de conocimiento al que luego dotan de sentido, así, las situaciones destacan el surgimiento de la actividad, generan condiciones para la reproducción y producción de los conocimientos matemáticos en un espacio educativo particular

En la teoría de la objetivación, los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico cultural; en específico, estos objetos no son entidades substanciales. Los objetos son entendidos como formas culturalmente codificadas de movimiento (Miranda et al., 2013).

CONCLUSIONES

En esta disertación se analizó el proceso de objetivación del número racional que emerge de la interacción social, basado en una visión teórica y epistemológica según la cual el sujeto y el contexto sociocultural se constituyen mutuamente. Fue posible verificar cómo objetivan el número racional a partir de los procesos de medición los alumnos de grado séptimo de la IE Andrés Bello. La objetivación surgió del análisis e interpretación de los procesos de medición a través de actividades relacionadas con la razón, la proporcionalidad, la relación parte-todo y las fracciones. El proceso de objetivación del número racional por los niños participantes del estudio de caso, se fue originando en cada una de las acciones mediatizadas por artefactos y acciones que les posibilitaron dotar de sentido y significado al número racional. Los artefactos culturales utilizados como elementos que poseen dimensión histórica, fueron parte constituyente del proceso de las acciones de los niños que les posibilitó producir nuevos sentidos y significados fundamentos de la producción de la objetivación del número racional. Cada actividad resuelta por los niños fue de hecho, producto de sus significados culturales e interpretaciones que, mediados por los diferentes artefactos les favoreció establecer relaciones entre los elementos de las magnitudes y transformar ese conocimiento cultural en un objeto consciente.

La objetivación del número racional no se produce de manera sincrónica a la objetivación de la cuantificación de la razón y la objetivación de la fracción, sino de forma paulatina. Tal progresión estuvo caracterizada por distintos niveles de toma de conciencia identificados por los medios semióticos puestos en juego por los niños. La forma como los niños objetivaron el número racional estuvo caracterizada por el uso de artefactos propios de la cultura y palabras de lo cotidiano “pedacito, pedazo, una pequeña parte” usadas en los Episodios 4 , 11 y 13 las cuales el docente investigador ignoró por considerar como el conocimiento empírico de los niños.

Posteriormente, durante los Episodios 5, 7, 8, l4, 18 y 19 la intervención del docente investigador, los medios semióticos que los niños involucraron en su análisis de problema de la medida contribuyó a la transformación de los niños respecto de la forma de pensar la razón, la fracción, la proporción y el número racional, refinando su lenguaje “un medio, una fracción, un racional”. Con acciones e interacciones se crearon condiciones necesarias para la transformación en los niños del conocimiento empírico al científico es el surgimiento de la toma de conciencia de los niños.

Se resalta la forma en la cual la teoría de la actividad, la teoría sociocultural y la teoría de la objetivación ofrecieron elementos para dar tratamiento al estudio de las prácticas educativas aplicadas al proceso de enseñanza y aprendizaje desde donde se plantea la incorporación del sujeto a la cultura a través de la mediación semiótica. Desde esta perspectiva el aula se convirtió en el espacio de interacción donde el niño, a través de los recursos materiales que le brinda el entorno sociocultural, logró formalizar no sólo la objetivación del número racional a partir de los procesos de medición, sino determinar generalizaciones síntesis sobre la formación de otros conceptos.

Las diferentes intervenciones del docente investigador en el proceso de medición generaron condiciones necesarias para la producción, reproducción y apropiación del conocimiento. Se necesitó de la actividad y de formas de interacción social que, a través del uso de artefactos permitieron en palabras de Radford (2013) que el saber “en sí mismo” se convirtiera en saber “para sí mismo”. Esta transformación del saber requiere una objetivación. En este caso, la manera de dar cuenta del uso e interpretación del proceso de medición (razón, proporción, relación parte-todo y la fracción) posibilitó pensar el número racional a través de la labor conjunta que hacen los niños, adoptando una postura epistemológica que les permitió tomar conciencia para expresar y razonar el proceso de medición como un proceso social codificado (formas de medida, cartuchera, el zapato, la cinta) transformando el conocimiento cultural en objeto consciente.

Este aporte investigativo sobre la objetivación del número racional es significativo para la educación matemática en Colombia, atendiendo a las sugerencias planteadas en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) en dos sentidos: primero de inclusión del número racional en el currículo de la matemática escolar y segundo percibir las matemáticas como una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura donde el aprendizaje de las matemáticas no depende sólo de aspectos cognitivos sino que incluye prácticas sociales inmersas en contextos históricos y socioculturales particulares en las cuales se utilizan distintos recursos semióticos. Desde este punto de vista, el aporte realizado a la IE Andrés Bello reviste interés particular por la contribución que se hace al currículo institucional de incluir en el plan de área del grado séptimo el número racional a partir de procesos de medición como eje transversal articulado a la razón, donde se incluye la relación parte-todo y las aplicaciones de proporcionalidad.

En los indicadores la categoría mediación presenta la relación sujeto-objeto la cual es un elemento clave en la objetivación del número racional a partir de las actividades que realizan los niños, es una relación mediada por el lenguaje, los signos, los sistemas numéricos, los instrumentos psicológicos y artefactos culturales que el niño encontró en su medio y la participación de los aprendices en una comunidad de práctica social que permiten que el objeto sea percibido por el sujeto como objeto no acabado.

Este trabajo quizás abre puertas para la adaptación de la teoría de la objetivación como una herramienta de análisis a partir del uso de software y otros artefactos culturales de dimensión histórica como las regletas de Cuisenaire (los cuales no se emplearon en esta investigación),teoría que permite reflexionar y discutir la importancia de los medios semióticos de objetivación en diferentes situaciones contextuales, y por lo tanto podría ser el camino a la comprensión de la importancia de los instrumentos como soporte a la actividad y cómo la configuran, es decir posibilitan otras formas de pensar el número racional que permite la toma de conciencia del objeto.

Nos preguntamos ahora ¿cómo puede verse desde el punto de vista de la teoría de la objetivación la percepción, la actividad lingüística, la mediación semiótica en la formación de significados de otros objetos matemáticos?

REFERENCIAS

Aleksandrov, A.D. (1976). *Visión General de la Matemática*. En Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. (Eds.). La matemática: su contenido, método y significado. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Bartolini, B., y Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *"Handbook of international research in Mathematics education* (pp. 746-783).

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis- emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, y T. A. Romberg (Ed.). *Rational numbers: An integration of research,* (pp.13–47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bezuk, N. & Bieck, M. (1993). Current Research on Rational Numbers and Common Fractions: Summary and Implications for Teachers. In Douglas T. Owens (Ed.). *Research Ideas for the Classroom Middle Grades Mathematics* (pp. 118-136). New York: McMillan.

Caraça, B. (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa. Tipografia matemática.

Charalambous, Y., Pantazi, D (2007). Drawing on a theoretical model to study students understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* (64), 293-316. doi: 10.1007/s10649-006 - 036-2.

Cedillo, E. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista mexicana de investigación educativa, 11*(28), 129-153.

Cohen, L., Manion, L y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education.* New York. Routledge.

Daniels, H. (2003). *Vygostky y la pedagogía.* Barcelona: Paidós.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.* Unión Soviética. Progreso.

Denzin, N., y Lincoln, Y. (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research.* Londres: Sage

Dreier, O. (2011). Personality and the conduct of everyday life. *Nordic Psychology, 63*(2), 4-23. doi: 10.1027/1901-2276/a000030.

Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R. (Eds.). (1999). *Perspectives on activity theory. Learning in doing: Social, cognitive, and computational perspectives*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

Ernest, P. (1994). Evaluation of the effectiveness and implementation of a math manipulative project. *Paper presented at the annual meeting of the Mid-South Educational Research Association, Nashville, TN*. Recuperado de la base de datos Eric el 20 de marzo de 2012.

Escolano, R. (2010). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. Recuperado el 15 de mayo 2012 de http://www.google.com.co/#hl=esyoutput=searchysclient

Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006). Bogotá. Edit. Magisterio.

Gould, P. (2005). Really Broken Numbers. *Australian Association of Mathematics Teachers.10*

(3). Recuperado de la base de datos Eric el 20 de marzo de 2012.

Gould, P., Outhred, L., y Mitchelmore, M. (2000). *One_Third is Three-cuarters of One-Half*. Recuperado el 10 de marzo 2012 en http:// www.merga.net.au/documents.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd., Darville House, 2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire SL4 1DF, England.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: Its intuitive and form development. In J. Hiebert, y M. Behr, *Number concepts and operations in the Midlle Grades* (pp. 162-181).

Kieren, T. (1993). Rational and fractional number: From quotient fields to recursive understanding, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, (pp. 261–288). Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Kozulin, A. (1994). *La psicología de Vygostky. Biografía de unas ideas.* Barcelona. EditoriaAlianza.

Kozulin, A. (1998). *Instrumentos psicológicos.La educación desde una perspectiva sociocultural.* Buenos Aires. Editorial Paidós.

Kvale, S. (2009). *Las entrevistas en la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding:Esential content knowledge and instructional strategies for teachers.* New york: Routledge.

Leontiev, A. (1978). *Actividad, conciencia, personalidad.* Ediciones Ciencias del Hombre.

Leontiev, A. N. (2001). Acerca de la importancia del concepto de actividad-objetal para la psicología, en Quintanar, L. (compilador). *Problemas teóricos y metodológicos de la rehabilitación neuropsicológica*. México: Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Lima, L., y Moisés, R. (1998). *A Fracao. A reparticao da terra. Momentos de criar Matemática* Sao Paulo: Camara Brasileira do livro.

Lineamientos curriculares para el área de matemáticas(1988). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mack, N. (1993). Making Connections to Understand Fractions. Arithmetic Teacher. *National Council of Teachers of Mathematics*, (40), 362-64.

Mazzocco, M., Devlin, K. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science, 11*(5), 681–691. doi:10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19* (3), 5-30.

Miranda, I., Radford, L., y Guzmán, J. (201 3). Un Origen Matemático vs Dos Orígenes Fenomenológicos: la Significación del Movimiento de Objetos Respecto del Punto (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education, 2* (2), 183-208. doi: 1 0.4471 /redimat.201 3.27.

Moreno, A., De La Barrera, A., Mantilla, M., y Carreño, N. (2003). Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de la razón como tópico matemático. Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., y Fernández F. (Eds.). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer* (pp. 95-112). Bogotá.

Moura, M. (1992). *A construção do signo numérico em situação de ensino*. (Tese de doutorado). Faculdade de Educação, USP, São Paulo.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema*, *8* (2),157-182.

Obando, G., Vasco, C y Arboleda, L. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: Configuraciones epistémicas para la educación básica. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 26, (pp. 977 – 988). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Ordóñez, M. (2012). *La Fracción, Elemento Dialogante en el Contexto Matemático*. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Petit, M., Laird, R., y Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions. Bringing research to the classroom.* New York: Rutledge.

Ponton, T. (2012). *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el Aprendizaje inicial de los números racionales*. (Tesis doctoral de Educación Matemática, no publicada). Universidad del Valle, Colombia.

Puerta, F. (2012). *Un recorrido geométrico por los diferentes conjuntos numéricos*. Escuela de Matemáticas). Facultad de Ciencias.Universidad Nacional de Colombia . Envigado: Gobernación de Antioquia.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9, 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learn. L. Radford, G., Schubring, and F. Seeger (Eds.). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture,* 215–234.

Radford, L. (2010). Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 73-80. Belo Horizonte, Brazil, PME.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In Ubus (Ed). *Proceding of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education,* Vol. 4, 17-24. Ankara, Turkey, PME.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. Journal of Research in Mathematics Education, 2 (1), 7- 44. doi:http//:doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19 .

Radford, L., y Hernández, G. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. *El caso de la didáctica de las matemáticas*. Université Laurentienne. Canadá.

Rückriem, G. (2009). La tecnología digital y la mediación: un desafío a la teoría de la actividad. *Conferencia invitada de la facultad de psicología de la UNAM y de la Universidad Abierta y a*

Distancia. Mexico.

Socas, M, y Camacho, M (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X* (2), 151 – 171.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*.Madrid. Ediciones Morata.

Trends in International Mathematics and Science Study (2007). Preguntas de Ciencias y Matemáticas. *TIMSS 2007. Guía del usuario para la base de datos internacional*. España. TIMSS & PIRLS.

Vygostky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher Psychological processes.* Cambridge, MA.Harvard University Press.

Vygostky, L. S. (1981).The instrumental method in psychology. En: J. V. Wertsch (ed.) *The concept of activity in Soviet psychology,* 135-143. Armonk, New York: Sharpe.

Vygostky, L. (1982). *Pensamiento y lenguaje. Barcelona.* Barcelona. Paidós.

Wertsch, J y Stone, A. (1985). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.) *Culture, Communication and cognition: Vygotskian perspectives,* Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1988). *Vygostky y la formación social de la mente*. Barcelona. Paidós.

ANEXO

Entrevista: 130416

P: Hola Katherine, ¿cómo estás?

E6: Bien y usted.

P: Bueno, cuénteme como resolviste la pregunta b con respecto, el profesor señala y háblame.

E6: Ehhh… vea, la pregunta dice: la cantidad de abedules es la cuarta parte de los pinos, entonces los abedules son 50 árboles y los pinos son doscientos. Entonces, quedarían cincuenta más cincuenta daría cien, y cien más cincuenta daría ciento cincuenta más otros cincuenta darían doscientos que sería otra parte... Que sería la cuarta parte de los pinos.

P: Bueno, pero los robles también son cincuenta.

E6: (Silencio)… Es que eso era lo yo venía a preguntar.

P: Entonces que pasaría ahí, dime.

E6: Que eso que dice es falso, pues no es verdadero.

P: Bueno y…

E6: Porque también hay otra posibilidad con otro árbol.

P: Hay otra posibilidad, bueno pero en esa posibilidad recuerda que, se te está preguntando la que está allí, (Silencio) ¿Por qué dudaste entonces?

E6: Porque, es… hay dos árboles que tienes la misma cantidad.

P: Pero, ¿la pregunta está dirigida a cuál de los dos árboles?

E6: A los… Abedu.

P: A los…

E: A éstos (señala).

P: Bueno muy bien, entonces ¿ahora qué vas a hacer?, vas a realizar un proceso… matemático, para mirar cómo me hiciste esa suma. ¿Estamos de acuerdo?

E6: Si señor.

Episodio: 130416

P: Bueno Katherine, ahora si cuénteme ¿Cómo lo hiciste matemáticamente?

E6: Matemáticamente sume las veces… las veces de…. Vea porque tenemos cincuenta, cincuenta árboles en el parque, entonces son doscientos…

P: Pero ¿árboles de cuáles?

E6: De los abeu…

P: ¿De qué tipo?

E6: Abedules.

P: Bueno.

E6: Y tenemos doscientos pinos entonces, la cuarta parte sería los abedules, porque…

P: ¿Y cuánto?

E6: ¿Cómo?

P: ¿A cuánto corresponde esa cuarta parte?

E6: Cincuenta… (Silencio). Porque la otra parte ya seria de él, porque… (Silencio), porque vea, son cincuenta que le pertenecen a él que son árboles contables y son otros cincuenta que le pertenecen a los otro a… a los pinos porque es una cuarta parte.

P: Bueno muy bien, usted entonces me indica que esa afirmación era verdadera.

E6: Sí señor.

P: O sea que para ti; ¿la cantidad de robles y abedules es la misma cantidad de pinos, no es verdadera?

(Silencio).

P: ¿Por qué?

(Silencio)

E6: Pues también es posible.

P: ¡Seguro!

(Silencio).

Entrevista 130429: Llave y pajarito

P: Muy bien jóvenes, entonces vamos a empezar la parte de discusión que la hacemos como siempre entre todos. Bien, entonces habían una preguntas claves, primero vamos hacerlo así: comparen la unidad uno con la unidad dos, haber ¿Quién quiere hablar respecto a esa comparación? (Silencio) ¿Daniela?, dime.

E4: La unidad uno, es un cuadrado que tiene… es decir cuatro lados y esos cuatro lados teníamos que ponerlos en ese uno, la llave; la unidad dos era un triángulo que no era muy grande, pero tenía que caer en la… en ese dos, en la figura dos pajarito, porque…

P: Bueno Daniela sí, pero la pregunta es comparar las dos unidades ¿Cómo lo hiciste?

E5: Mm… yo creo que…

P. Manuela.

E5: El triángulo es un cuarto del cuadrado.

P: Y ¿Por qué crees eso?

E5: Porque el cuadrado se puede partir en tres triangulitos de esos. (Señala)

P: Se puede partir en tres ¿le da cuánto?

E5: Pues en el de la llave, (Silencio) A me dio un cuarto se puede partir.

P: Un cuarto, bueno lo puede contener ¿Cuántas veces?

E5: Tres.

P: Tres veces, entonces ¿me estás diciendo que cuánto?

E5: Es un tercio.

P: ¿Cómo Daniela?

E3: Es un tercio.

P: Un tercio ¿por qué Daniela?

E3: Un tercio, porque un tercio esta tres ve… es una vez tres triangulitos, y esta… y tres triangulitos caen el cuadro.

P: A bueno, haber digamos Cristian ¿Qué les dio a ustedes cuando comparan? Porque ustedes trabajaron juntos.

E1: Eh Bueno nos dieron, en la llave nos dieron veintitrés, pues el total de cuadritos solos nos daba diez, y con los… y lo empezamos hacerlos con la triángulos y no dio veintitrés, partiendo cada cuadro a la mitad entonces nos daba veintitrés, y en la otra figura.

E1: El pajarito.

E1: La del pajarito, eh con los… haciéndole triángulos nos dio dieciséis y contándolo bien había acá con… pusimos que habían, también contando dos cuadros, porque, habían aquí dos cuadros.

P: Dos cuadros o cuadrados.

E1: Cuadrado.

E1: Cuadros.

P: ¿Cuadros? ¿Así se llaman?

E1: Pues cuadrados.

P: A bueno, hay que asignarle el nombre de triángulo o cuadrado.

Bueno pero no me han dicho cuando intercambiaron, por ejemplo, vamos a medir ese dos que es el pájaro ¿cierto?, utilizando como unidad ¿Quién?

E1: Uno.

E3: Uno.

E4: Uno.

P: A ustedes ¿Cuántos cuadrados les dio? Manuela, Daniela…

E4: A nosotros nos dio ocho.

P: ¿Ocho qué?

E4: Ocho cuadrados.

E2: Ocho…

E4: Ocho cuadrados en…

E5: Perdón, perdón… Nos dio...

E4: Cuatro.

E2: Cuatro, cuatro cuadrados, (Silencio) ya que había algunos…

P: Entonces si les dio ocho cuadrados, uno, entonces ¿cuántos triángulos obtuvieron?

E6: Diez y seis.

E2: Diez y seis.

P: ¿Diez y seis? (Silencio).

P: Cuando intercambiaron de unidad de medidas.

E4: Cuando intercambiamos de…

E4: Cuando intercambiamos de unidad de medida, profe, eh en el pajarito contando cuadrados nos dio dos y con los triángulos partiéndolos pues ya en la mitad nos dio diez y seis

P: Bueno entonces ustedes me indican que ese dos tiene ¿cuántos cuadrados dos?

E1: Dos.

P: Muestre como lo hicieron aquí en la… muéstrenme ahí los cuadrados por favor.

E1: Véanlo aquí uno y el otro acá (señala y muestra).

P: Bueno, entonces ¿ustedes porque me dejaron los otros por fuera?, miren que hay una superficie que me la dejan… que no me la cuentan ¿Por qué?

E1: No, no, no, si uno la cuenta vendrían a hacer cuatro… cuatro cuadrados, porque se juntaría este con este.

P: Pero hay ¿qué juntarlos o no hay que juntarlos?

E1: Sí.

P: A bueno y ¿Por qué hay que juntarlos?

E2: Para que pueda formar dos cuadrados…

E5: Para formar la unidad.

P: A bueno, y en este caso ¿cuál es la unidad? ¿Daniela?

E2: El cuadrado.

P: ¿El cuadrado? A bueno.

(Silencio).

E3: Pero no nos da la figura si juntamos estos dos.

P: Haber Juan Pablo cuéntenos, pero no les da ¿Qué?

E3: La figura si juntamos estos, queda como un cuadrado pues ya así, grande.

P: Haber ¿la idea tuya es que no le da la figura completa con cuadrados?

E3: Sí.

P: Entonces, ¿sobrarían o harían falta?

E3: Mm… sobraría.

P: ¿Qué sobra?

E3: Eh (Silencio), Eh dos… dos cuadrados sobrarían.

P: No, te pueden sobrar cuadrados, porque antes lo que estamos haciendo es introduciendo los cuadrados acá. (El profesor señala)

E2: Antes les faltaría.

E4: Le falta.

P: ¿Cómo?

E1: Le falta.

P: A Daniela y a Manu… a las dos Daniela si (risas)… Daniela dice que le falta, ¿Por qué?

E4: Porque no hay solo dos, porque que este complementa a este, sí… (Señala)

P: Señálamelo ¿Cuál complementa?

E4: Si, unimos este con este da un cuadrado, ya son tres, este con este ya son cuatro, nosotros lo que hicimos fue unirlo, porque así separado quedaría nada más este pedacito de figura.

P: Entonces ¿Cuántos cuadrados completos tiene finalmente el pájaro?

E4: Cuatro.

E1: Cuatro.

P: Cuatro y cuántas ¿Cuántos triangulitos tiene…?

E1: Diez y seis.

E5: Diez y seis.

P: ¿A todos les dio diez y seis?

E3: Sí.

E5: Sí.

P: ¿No hubo alguien a quién le dio diferente?

E3: No.

E5: No.

P: Manuela a ti no te dio.

E5: Solo la falta que tuvimos nosotros fue los cuadrados, no los unimos.

P: Bueno, entonces ahora miremos, realmente ¿Qué era lo que ustedes estaban haciendo en estas dos figuras?

E4: Eh estábamos descomponiendo el cuadrado (Silencio).

P: Estaban descomponiendo el cuadrado.

E4: Sí.

P: Pero, para descomponerlo ¿realmente que era lo que estaban haciendo?

E4: Estábamos subrayándolos, O sea, hacíamos los cuadrados y luego los contábamos y luego hacíamos los triángulos.

P: ¿Ese proceso que estás haciendo cómo se llama?

E4: Descomposición.

P: Descomposición, ¿De qué otra manera lo podremos llamar?

E1: Eh (Silencio) como una desigualdad.

P: Bueno si hay una desigualdad, pero ¿Cómo se llama el proceso que ustedes me estaban diciendo, que ustedes me estaban hablando de descomposición…?

E2: Medición, ¿no?

P: ¿Cómo?

E2: Medición.

P: ¡Medición! Bueno, entonces ¿qué es medir?

E4: Contar.

P: ¿Contar?

(Risas)

P: Dígalo tranquilo no te preguntes.

E4: Contar.

P: Medición es contar, para ti Manuela.

(Silencio).

P: ¿Que entiendes por medición?

E5: Es medir una figura y partirla en varias… en varias pedazos…

P: ¿Cuál partirías en varios pedazos?

E5: Podría ser el cuadrado (Silencio) la llave.

P: La llave, entonces ¿la llave es más grande o más pequeña?

E5: Es más grande.

P: Entonces ¿Cuál estas partiendo en pedazos?

(Silencio).

E5: La llave.

P: Entonces cuando se parte en pedazos ¿Cuál es el objetivo?

E2: Sacar la unidad.

P: ¿Cuál unidad?

E2: El cuadrado.

E5: El cuadrado seria la unidad.

P: Muy bien, en otras palabras, ¿es hacer qué?

E3: Descomposición.

P: Sí ya la descomposición me dijeron, pero es mirar…

E5: Cuánto cabe el cuadrado en la llave.

P: Muy bien, entonces finalmente ¿Qué podemos concluir? ¿Qué es medir?

(Silencio).

E2: Cuántas veces cabe en la unidad, la unidad en la llave.

E2: La unidad en la llave.

P: Aa... muy bien, entonces ¿eso se llama?

E2: Medir.

E5: Medir.

P: Medir, entonces lo que estamos haciendo ¿Cuántas veces cabe, es una?

E2: Comparación.

E4: Manera de…medir.

E2: Comparación.

P: Comparación, ¿Qué me ibas a decir Daniela? ¿Manera de qué? Tranquila.

(Silencio).

E1: Manera de medir.

P: ¡Manera de medir! Bueno muy bien, entonces ya nos queda claro ¿cierto?

E1: Sí.

P: ¿Qué es medir finalmente?

E3: Si señor.

P: Entonces me dicen, repitámoslo.

E5: Medir es cuánto cabe una unidad en una figura.

P: En términos generales.

E4: Una comparación.

P: ¿De quién?

E4: De la unidad en la llave, o en la figura.

E2: En la figura.

E5: En cualquier figura.

P: A bueno.

E1: Puede ser la llave.

P: Entonces ¿para medir siempre necesitamos…?

E1: Una unidad.

E3: Una unidad.

E5: Una unidad.

P: ¿Para poder?

E2: Comparar.

E4: Comparar.

P: Muy bien, entonces ahí tenemos ya bueno…hay algo que no me dijeron, que no me quedó muy claro y es con respecto sí la unidad del cuadrado…

E3: Es un tercio.

P: Al compararlo con la unidad del triángulo, era un cuarto o un tercio. No me quedo muy claro, haber ¿Quién es un tercio?

E5: El cuadra…

E5: El triángulo.

E1: El cuadrado.

E4: Una figura.

E4: El cuadrado es la… está tres veces.

P: ¿En dónde? ¿El cuadrado esta tres veces o quien está tres veces?

E4: El triángulo, el triángulo esta tres veces en el cuadrado.

P: A muy bien, o sea quiere decir ¿que el cuadrado es qué?

E4: Es la figura.

P: Recuerde que estamos es comparando.

E3: La unidad.

E4: Tres veces.

P: Entonces decimos que…

E4: El cuadrado es mayor…

E4: Es mayor tres ves que el triángulo.

P: O en otra palabras el triángulo comparado con el cuadrado, entonces…

E1: Es menor.

E5: El triángulo está tres veces.

E4: Es menor tres veces que el cuadrado.

E5: Es menor tres veces que el cuadrado.

(Silencio).

P: Bueno ustedes me dijeron que el pajarito o el pájaro, tenía cuatro cuadrados, entonces la pregunta es ¿si tiene cuatro cuadrados, cuantos triángulos tiene?

E6: Diez y seis.

E4: Diez y seis.

E1: Diez y seis.

P: ¿Están seguros de eso?

E4: Sí.

E2: Sí.

E4: No, si este triángulo estas tres veces en el cuadrado, no puede haber ocho triángulos…

E2: Diez y seis.

E5: Porque serian de sacar de un cuadrado tres triángulos.

P: Bueno exactamente, entonces ¿Qué pasaría?

E4: O sea cuatro por…

E6: Cuatro por tres.

P: Si Daniela dilo.

E4: Doce.

P: Entonces.

E5: Hay doce triángulos...

E6: Triángulos.

P: ¿En dónde?

E6: En el pajarito.

P: Entonces ahora vamos para la unidad, perdón para la superficie uno, que es la llave, entonces ¿Cuántas unidades uno, O sea cuantos cuadrados hubo en ese…?

E4: Hay ocho.

P: En esa llave.

E1: Ocho.

P: Entonces ¿cuántas unidades?

E4: Diez y seis.

(Silencio).

E4: No, espérate.

E5: Ocho por doce.

E1: Son veintitrés.

P: ¿Por qué veintitrés? Dime.

E1: Ocho por tres.

P: ¿Cómo?

E4: Tendríamos que hacer la multiplicación ocho por tres.

P: Bueno…

E4: ¿Cuánto da?

E1: Ocho por tres, veinticuatro.

P: Entonces ¿la superficie uno cuantas unidades dos tiene?

E4: veinticuatro.

E2: veinticuatro.

P: Y ¿Cuántas unidades uno?

E2: Ocho.

E3: Ocho.

P: ¿Ustedes se dieron cuenta de que en este proceso…?

E4: De que en este proceso, eh se requiere una unidad y una figura para poder…

E5: Medir.

E4: Se requiere multiplicar…

E6: Como para…

(Silencio).

P: ¿Que más desean decir? Haber Johan, Cristian, quieren decir algo Juan Pablo, frente al trabajo que acabaron de hacer.

E5: Eh pues muchas gracias profe por enseñarnos a medir y… ya.

P: Bueno entonces ¿ustedes como creen ahora que median nuestros antiguos hombres que no eran civilizados, que no tenían las medidas, ni las cuadriculas que nosotros tenemos? ¿Cómo se imaginan que ellos median?

E2: Con sus cuerpos…

E5: Con sus manos.

P: Y si las distancias eran muy grandes, por ejemplo, si ellos tenían terrenos, no podrán medir con la manos, ¿Cómo lo haría?

E2: Pues yo pienso profe, por decir si sería una larga distancia digamos que…

E1: Cuerda.

E1: … de aquí, por eso, cuerdas o un hombre ir contando paso a paso hasta llegar al objetivo dígamelo así.

E2: Como hicimos en el salón.

E6: Eso se llama pies.

P: ¿Cómo hicieron en el salón? Cuénteme.

E2: Que usted nos para en un cuadrado a muchos, a ver cuántos cabía ahí en esa unidad.

P: A bueno, entonces se fijan ¿hay alguna diferencia entre la medición de… que hubo históricamente a la medición actual?

E2: Sí.

E4: Si hay mucha.

E3: Mucha.

P: ¿En qué se diferencia?

E1: Porque ahora hay…

E1: Porque ahora que nosotros tenemos… podemos tener metros, metros para medir reglas, la… una calculadora, entonces por medio de eso podemos saber cuánto mide una superficie, digámoslo así.

E5: Porque ahora… en tiempos pasados era muy difícil, ahora es muy fácil porque tenemos todas esas cosas que ahora mi compañero acabo de decir.

(Silencio).

E4: Eh y además nosotros, antes no tenían tanta tecnología como ahora, y la tecnología hace que sea muy fácil.

E2: Que las cosas avancen.

P: Bueno muy bien, pero el hombre bueno no tenía la tecnología, pero entonces ¿el hombre tenía que?

E1: La mente.

P: ¿Y que tenía esa mente?

E5: Inteligencia.

P: Bueno pero todos tenemos inteligencia…

E1: Eh bueno pero por medio de la mente podía medir cuánto… cu'anto media la…

E4: O tenia racional.

P: ¿Que podía ser el hombre en forma…?

E2: Razonar.

E2: Razonar.

E2: Razonaba.

P: A bueno él razonaba, ¿razonaría mejor que nosotros?

E1: Sí.

E6: Quien sabe…

E1: No, porque nosotros podemos.

E2: De pronto sí.

E3: Podemos estar más seguros…

E5: No se sabe.

E5: Pues profe yo digo que no, porque ahora en día tenemos una tecnología más avanzada, en esos tiempos… y en esos tiempos el hombre razonaba pero con algo mucho más simple, porque ahora hoy en día nosotros podemos medir con metros, reglas, calculadoras incluso podemos usar las tablas de multiplicar, entonces profe yo creo que si podían razonar pero muy simplemente.

P: Bueno muchachos, como sonó el timbre, nos toca cambiar de clase, los estaré molestando para una nueva versión.

Episodio: 130520

P: Jóvenes buenos días.

Buenos días profe (al unísono).

P: Bueno siguiendo con la actividad que hemos viniendo desarrollando Katherine lee la situación

E1: Una caja contiene seis colombinas, con figura de circunferencia ella representa la unidad.

P: Bueno, entonces ¿qué van a hacer para representar esas colombinas?

E2: Representaremos gráficamente con las tortas fraccionarias.

P: Bueno muy bien, Katherine sigue leyendo el problema.

P: ¿Qué cantidad representa una colombina?

E1: Eh… una colombina representa un cuarto ve… un sexto de una unidad.

P: Bueno, ¿Una colombina representa un sexto?

E3: No.

P: Los demás que dicen.

E2: Sí.

E3: Si más o menos.

P: ¿Cómo que más o menos, sí o no?

E2: Eh profe, yo digo que sí.

P: ¿Por qué?

E3: Yo también.

E2: Porque una fracción normal el seis digamos es la unidad, entonces sacamos una, pues un sexto.

P: Un sexto bueno, ¿Qué más nos dice el problema Katherine?

E1: ¿Cuál es la relación entre colombinas y compañeros?

P: O sea, ¿indica que las colombinas las vamos a repartir entre cuántos compañeros?

E3: Entre seis, nos tocaría de a una seria igual.

P: A bueno, y si yo le digo que las colombinas las vamos a repartir entre doce…

E3: Seria de a media cada una.

E2: De a mitad.

P: Bueno y eso de a mitad…

E1: Cada colombina habrá que partirla a la mitad y… Por qué seis es la… doce es la…

E3: Mitad de… seis es la mitad de doce.

E1: Seis es la mitad de doce.

(Silencio).

E1: Entonces para ver seis… para ver una unidad, que son seis colombinas habrá que partir a la mitad para que alcanzara para los doce.

P: Y ¿Cómo representaremos eso con esas tortas que ustedes tienen ahí? ¿Cómo harían esa repartición?

E2: Con dos medios.

P: ¿Seguro?

E4: Con seis.

P: No entiendo.

E4: Una torta de seis pedazos.

(Silencio).

P: Esta torta que ustedes tienen aquí de los… que tú estás diciendo ¿Cuántos pedazos?

E4: Seis pedazos.

P: ¿Qué me está representando cada pedazo?

E4: Una colombina.

P: Muy bien, yo ahora lo que les quiero… lo que quiero es que me respondan esta pregunta ¿si ya los compañeros no son seis, si no que ya son doce en las que vamos a repartir las colombinas, entonces cual es la parte que le corresponde a cada uno de sus compañeros?

E3: Seria, seria, seria de a…

E5: Mitad de…

E3: Mitad para cada uno.

E5: Mitad de colombinas o de tortas de…

E3: No, de una colombina.

P: Bueno, y ¿Cuánto seria esa mitad de colombina o de torta?

E3: La mitad vendría a ser…

E2: Un medio ¿no?, un medio de cada pedacito.

P: Y ¿Cómo lo haríamos?

(Silencio).

E3: Ahí sí pailas.

P: Esa es la situación, yo te pregunto…

(Silencio)…

P: Bueno eso que usted me está dibujando o representando con las tortas…

(Silencio).

P: ¿Representa realmente las seis colombinas?

E2: Si profe.

P: ¿Que dicen ustedes? Miremos la situación que él me está representando.

E3: Tres…

P. ¿Representan las seis colombinas?

E3: Si vea… Sí.

P: ¿Seguro? ¿Usted está de acuerdo?

E5: Sí.

P: ¿Y ya miró bien Manuela?

(Silencio).

E1: No.

P: Katherine ¿Por qué no?

E1: Porque…

E5: Porque tienen diferente tamaño.

P: Ah miren la situación, entonces este tamaño que esta…

E3: Este está más pequeño que todos.

P: Entonces, ¿Qué pasa?

E3: No tiene el mismo tamaño porque vea éste es más grande.

E4: Entonces hay que representar con una torta de seis pedazos de igual tamaño.

P: Ahora vamos a la situación que tenemos… (Silencio) ¿Cómo la están haciendo?

(Silencio).

P: Si aquí tenemos la… miremos la situación que hizo Katherine ¿La situación que hizo Katherine, está bien la representación?

E3: Eh si…

E5: Si está bien.

P: La que hizo…

E3: Juan Pablo…

P: ¿La que hizo Juan Pablo está bien?

E3: Sí.

P: Miremos, ¿están seguros?

E5: No.

E3: A… este está más grande.

P: ¿Cuál está más grande?

E3: Ésta (señala).

P: ¿Ésta o ésta? (señala).

E3: Está…

P: A bueno entonces ¿Qué sucede?

E3: Que ésta puede dañar la… como la… el…

E5: Ahí se puede dañar el problema.

(Silencio)

P: ¿Cómo así?

E1: La gráfica, pues como nos están diciendo que representemos las colombinas…

P: A entonces, se daña o no la gráfica, ¿Se daña la…?

E2: La unidad.

E1: La representación.

P: La representación… Muy bien, entonces como se daña la representación trate de hacer la representación que hizo Katherine.

(Silencio).

P: ¿Listo Juan Pablo? Para que mires la de Katherine y ahora Katherine ya está haciendo la otra situación, ¿Qué estás haciendo Katherine? Cuéntanos Katherine que estás haciendo

(Silencio).

E1: Profe, como nos están diciendo que… como nos están diciendo que somos doce compañeros, entonces solo hay seis colombinas, entonces lo que se hace, es dividir las colombinas en dos partes.

P: ¿Y que estas utilizando para ello?

E1: Las…

E2: Las representaciones.

(Silencio).

P: ¿Qué me estas representando aquí? Cada una de las situaciones… vengan chicos miren acá… cada una de estas, cada uno de estas tortas que representó Katherine ahí…

E5: Cada uno de esos pedacitos representa una mitad.

P: ¿De quién?

E4: De la torta.

E5: De la colombina.

P: De la colombina muy bien, ¿Y a que equivale aquí en la repartición que ella hace?

E5: Eh, dos mitades equivalen a una colombina.

P: Si muy bien, dos equivalen a una colombina, pero lo que le estamos diciendo de lo que está haciendo Katherine aquí, la representación que nos está haciendo ella aquí ¿Cuándo termina a que equivale cada torta?

(Silencio).

E2: A doce.

P: ¿A doce? ¿Está seguro?

E2: Eh…

E5: A uno sobre dos.

E2: Un doceavo.

P: Bueno muy bien, entonces si es un doceavo, una… cuando partimos la…

E4: La colombina.

E1: La colombina.

P: Para los doce compañeros, que es lo que ustedes me están diciendo para cada compañero, entonces ¿Cuánto le toca a cada compañero?

(Silencio).

E4: Un cuarto…

E2: Un veinticuatroavo.

E5: Un doceavo.

(Silencio)

P: ¿Les toca cuánto?

E3: Un doceavo.

E4: Un doceavo.

E5: Un doceavo.

P: Y ¿Por qué no un veinticuatroavo como él dice?

E3: Porque no.

E1: Porque… ya no sería para doce sino que ya seria para más personas.

E4: Para cuatro.

P: ¿Seguro? Miremos acá ¿Cuántas es esta? (señala el docente)

E3: Un sexto…

E5: Un doceavo.

P: ¿Y esta? (señala otra).

E3: Un sexto.

E5: Un doceavo.

P: Entonces ¿Cuántos doceavos tengo?

E5: Dos.

E3: Dos doceavos

P: ¿Qué representan?

E5: Veinte… una colombina.

E1: Un veinticuatroavo.

E3: Un sexto.

E2: Un sexto.

P: ¿Qué también representan?

E1: Una colombina.

P: Entonces, ¿Cómo se solucionara la situación finalmente?

(Silencio).

E1: Profe, que se divide la colombina y así le toca a cada compañero.

E1: A un doceavo.

(Silencio).

P: ¿Teniendo en cuenta que la unidad era?

E2: Un sexto.

E5: Un sexto.

E1: Una colombina.

E4: Una colombina.

(Silencio).

P: Y ¿Qué esa unidad representa cuántas colombinas?

E1: Seis.

E5: Seis.

P: Muy bien, miremos que otra situación tiene él… respecto a las colombinas para que ustedes las resuelvan.

E1: Representa la mitad de las colombinas.

P: A bueno, ¿Cómo lo lee?

E3: No es clara.

P: ¿Cuál sería la mitad de las colombinas en este caso?

E3: Son seis vendrían a ser tres.

P: ¿Qué equivalen?

E3: A un tercio…

E4: A un sexto.

E3: A tres sextos.

P: ¿Qué equivalen?

E3: A tres sextos.

P: Y entonces eso me indica ¿Qué hay una equivalencia o no?

E1: Sí.

E4: Sí.

P: Y ¿Cuál sería esa equivalencia?

E2: La mitad.

E1: Tres sextos son…

E4: Es igual…

E1: Es igual a la mitad de seis… de un sexto.

P: La mitad de un sexto ¿Están de acuerdo?

E2: La mitad de…

E1: La mitad de, de, de tres sextos.

E2: De seis doceavos.

(Silencio).

P: Seis doceavos, seis doceavos que corresponden…

E3: A dos colombinas.

(Silencio).

P: Seis doceavos que corresponden entonces.

E4: Tres sextos.

E5: A seis colombinas.

P: Miremos a ver si es cierto, ¿Cuánto es esto? (señala)

E2: Seis doceavos.

E3: A… dos doceavos.

P: Entonces ¿Cuántos de estos necesitan para representa los seis doceavos?

E2: Doce.

E1: Doce.

E3: Doce.

P: ¿Seguro?

E3: Son seis.

(Silencio).

E5: A tres seisavos.

P: ¿Tres seisavos o tres sextos?

(Silencio).

P: Entonces miremos lo que está haciendo ¿Cuántas de cuántas? ¿Aquí cuantas colombinas hay?

E4: Una.

E1: Una.

E4, E1, E2: Dos, tres, cuatro, cinco…

P: ¿Y son cuantas, me dijiste?

E4, E1, E2: Seis.

P: Seis cierto, ¿Tú me estás hablando de cuántos doceavos? De seis entonces contemos

(Silencio).

P: ¿Esto me representaría?

E1: Seisavos.

P: Seisavos no, observen bien.

E2: Mm… un doceavo.

P: ¿Y así?

E2: Dos doceavos.

P: ¿Qué representan?

(Silencio).

E5: Cuatro doceavos, representan dos colombinas.

E4: Seis doceavos representan tres colombinas.

(Silencio).

P: ¿Cuántos llevamos ahí?

(Silencio).

E4: Cuatro doceavos.

E1: Ocho doceavos.

P: Bueno ¿Cuánto? Ocho doceavos, y cuánto me habías dicho, seis ¿Cierto?, entonces miremos los seis… los seis doceavos ¿Qué me representan?

E4: Tres colombinas.

E1: Tres colombinas.

E5: Tres colombinas.

E3: La mitad.

P: ¿De quién?

E1: De la unidad.

E4: De la unidad.

E3: De la unidad.

P: entonces, eso nos indica que hemos hecho unas equivalencias, díganme ¿Qué equivalencia hemos hecho?

(Silencio).

E2: (No se le entiende) Continúa.

P: No, estamos hablando de equivalencias frente a los…

E2: Fraccionarios.

P: Entonces, dígamelos ¿Cuáles son?

(Silencio).

P: Partimos de la mitad ¿Cierto? Entonces, aquí tenemos también una mitad ¿Cuánto es esta mitad?

(Silencio).

E1: Doce, docea…

E6: Seis doceavos.

(Silencio)

P: ¿Cuánto es, esta mitad?

E2: Seis doceavos.

E6: Seis doceavos.

E1: Seis doceavos.

P: Entonces, ¿Seis doceavos es lo mismo que, que…?

E6: ¿Qué?

E4: No se le entiende.

P: ¿O sea?

E1: La mitad de la unidad.

P: Esa es un… y ahorita me dijeron otra forma de obtener la mitad ¿Cuál fue?

E2: Doce seisavos.

E2: Seis doceavos.

(Silencio).

P: Mírenla bien.

(Silencio).

P: ¿Será eso lo que él está diciendo, doce seisavos, será la mitad también?

(Silencio).

P: Otra forma de decir doce seisavos.

E2: Doce…

P: ¿Doce qué?

E6: Doce sextos.

P: Bueno, ¿Doce sextos serán también la mitad?

E1: Profe, no se le entiende.

P: ¿Cómo así?

E1: Es que vea…

P: O sea que doce sextos, es lo mismo que seis doceavos.

E1: Decimos que seis…

P: ¿Por qué no?

E2: Porque, no vendrá a ser la misma igualdad, no vendrá hacer lo mismo, vendría a ser… más.

P: ¿Dónde hay más cantidad?

E2: En doce seisavos.

P: Pero acuérdese que no decimos doce seisavos, digamos…

E5: Doce sextos

P: Entonces doce sextos ¿Qué cantidad de colombinas iniciales tiene?

(Silencio).

E4: Dos.

P: ¿Dos qué?

E4: Dos veces.

P: Dos veces muy bien, y ¿En la otra hay?

(Silencio).

P: En seis doceavos.

E1: La mitad.

P: Entonces vamos a concluir, los doce sextos ¿Cierto?, de los que nos hablaba Daniela inicialmente ¿A cuántas colombinas equivalen?

E2: A seis.

E1: A diez.

E2: A diez.

E1: A doce.

E2: A doce.

E3: A doce.

P: Y entonces, la mitad de las originales ¿A cuántas colombinas equivalen?

E2: A tres.

E6: A tres.

P: Entonces, ¿Se dan cuenta que no es lo mismo, tener…?

E3: Doce a tres.

P: ¿Doce qué?

E3: Doce colombinas.

E2: Doce…

P: ¿Doce…?

E6: Doce sextos.

P: Entonces, ¿Doce sextos son diferentes a…?

E3: A tres sextos.

P: Y ¿Diferente a?

E3: A la unidad.

P: No, a la que me dijeron ahorita la que tú dijiste.

E1: A seis.

P: ¿A seis qué?

E1: A seis…

E5: A seis doceavos.

P: Entonces, ¿Qué le paso a la primera fracción, de doce sextos a seis doceavos, que le pasó a esa fracción?

E4: La dividimos.

P: ¿Seguro?

E2: No.

E3: No.

P: Miren bien, doce sextos y la otra seis doceavos ¿Qué hicimos?

E1: ¡Le cambiamos el orden!

P: ¡Le cambiamos el orden!

E2: Pero, el orden de la fracción no altera el resultado.

P: ¿Seguro que no altera? Vamos a mirar a ver lo que estás diciendo, analicemos lo que ella está diciendo.

E2: Se supone que cambiamos los denominadores ¿Cierto?, como es una fracción cambia…

E3: No profe, pero si lo cambiaria, profe, porque daría doce seisavos dará mucho más y seis sextos.

P: ¿Cuánto?

E2: Doce seisavos darían…

P: ¿Cuántas colombinas nos dan doce…?

E1: Nos daría…

E2: Dan como ciento… ciento…

E4: Darían tres.

E3: Darían doce.

P: Doce… y cuándo hablamos de seis doceavo ¿Cuántas colombinas tenemos?

E1: Tres.

E2: Tres.

E5: Tres.

P: Entonces ¿Es lo mismo?

E3: No, pero si altera el resultado.

P: Entonces, ¿Daniela que paso?, ¿altera o no altero?, porque hicimos lo que se llama algo que es el inverso… entonces ¿El inverso de seis doceavos es?

E3: Doce…sextos.

P: Doce sextos muy bien, entonces no es lo mismo ¿No es cierto?, ¿Por qué no se aplica que propiedad que ustedes saben? ¿Cuál sería la propiedad que nos habría dicho Daniela?

E4: La comparación.

P: No.

E3: Conmutativa.

P: Es correcto, entonces ¿La conmutativa no se aplica?

E5: Cuando cambiamos el orden.

P: Listo muchachos, por hoy vamos a dejar ahí, ya sonó el timbre, ustedes tienen otra clase yo también.

E2: Bueno profe hasta luego.

P: Hasta luego, suerte.

Episodio: 13050: Huevos

P: Vamos a leer para entender la situación, empieza.

E1: En un supermercado se encuentra canastas de huevos con diferentes colores, blancos y rojos, su labor consiste en llenar las canastas A y B, de modo que el número de huevos blancos y rojos conserven la misma proporción, mostrada en la canasta C.

P: Bueno, entonces en la canasta C que es esta ¿Cómo está lo proporción de huevos?

E1: Que hay cuatro, cuatro unidades rojas y dos blancas.

P. Entonces ¿Cómo puedo llamar esa proporción? ¿Cómo puedo decir?

E2 Una fracción.

P: Y ¿Cómo la expresaríamos?

E2: Seis cuartos…

P: Seis cuartos, ¿están de acuerdo…?

E2: O dos cuartos.

P: Dos cuartos, bueno entonces dos cuartos ¿estás de acuerdo?

E1: Sí.

P: Bueno y ¿de qué otra manera la podríamos llamar en lugar de dos cuartos?

E1: Mm… podría ser un... ¿no podría ser por ahí un sexto de cada figura?

P: Un sexto si estuviéramos hablando del total, pero no estamos hablando de un total ¿Por qué hay cuantos huevos blancos?

E1: Dos.

E2: Dos.

P: A bueno…

E3: Profe, también se puede decir que… que hay cuatro medios.

P: Hay cuatro medios y ¿eso que nos indica?

E3 Que es equivalente cuatro medios a dos unidades, que son dos huevos, cuatro medios de huevo rojo y dos huevos enteros la unidad completa de huevos blancos.

P: Bueno entonces eso para poder realizar la situación ¿Qué indica? ¿Qué nos está indicando eso?

E3: que la cantidad de huevos es equivalente.

P: Pero no, no entiendo, ¿Cómo que es equivalente? No me da.

(Silencio).

P: No pero vengan sigan, sigan explicando porque necesitamos mirar.

(Silencio).

E1: Entonces…

P: ¿Cuántos huevos blancos?

E1: Dos…

P: ¿hay y cuántos rojos?

E1: Cuatro.

P: Entonces ¿Qué podemos decir?

E1: Que hay dos…

P: ¿Qué podemos decir? ¿Qué podemos relacionar, entre la cantidad de huevos blancos y la cantidad de huevos rojos?

(Silencio).

P: Johan, haber háblanos, que no sean los mismos que hablen siempre, para que los iluminemos a ellos.

(Silencio).

P: Explica la situación como tú la entiendes.

E2: (Manuela): Pues yo la entiendo que esta es como la unidad, pues como lo… seis pues

P: Sí.

E2: Pero hay dos blancos…

P: Claro.

E2: Que sería como así… y los rojos serian cuatro.

P: Bueno, entonces ¿Qué es lo que tú, nos quieres decir ahí?

(Silencio).

E2: Que la unidad como…

E3: O sea que los blancos es como un medio, porque la unidad digamos…

P: ¿Un medio de quién?

E2: De los huevos.

E3: Huevos.

P: ¿De cuáles huevos?

E2: De los blancos…

P: Repítemelo nuevamente.

E3: Que los blancos… a no. No, no, eso no es un medio.

P: Tranquilo dilo nuevamente no te preocupes.

E3: Un medio, son los huevos blancos.

P: ¿Un medio de quién?

E3: De la unidad.

P: ¿Y cuál sería la unidad?

E3: Los seis huevos, pero…

P: Entonces miremos ¿los medios si serían esos dos?

E3: No.

P: A bueno, entonces piénsalo de otra manera a ver cómo sería.

(Silencio).

P: Vayan pensando tranquilos y vamos diciendo… Vayan pensando y vamos a mirar que tiene el otro grupo y ahorita concluimos. Bueno mis niñas ustedes acá que están trabajando también, díganme entonces ¿Qué relación están haciendo? ¿Cómo lo están haciendo? Daniela cuéntanos.

E4: Bueno profe, eh aquí nos decían de proporción y vimos que aquí hay seis huevos, cuatro rojos y dos blancos.

P: ¿Y eso que quiere decir?

E4: Que hay más rojos que blancos y que hay que ponerlos en la canasta A y en la canasta B.

P: Bueno, y ¿Cómo lo debemos colocar en esas canastas?

(Silencio).

E4: Pues yo personalmente, yo digo que hay que separar los… los blancos de los rojos, poniendo los rojos en la canasta B y los blancos en la canasta A.

P: A bueno, no espérate, estas entendiendo mal no, lo que pasa es que haz de cuenta que tú estás en el supermercado y la tarea que tienes que hacer es, en esta canasta de huevos ¿Qué son cuántos?

(Silencio).

P: Una canasta para doce huevos, en esa canasta para doce huevos vas a repartir huevos rojos y ¿huevos...?

E4: Blancos.

P: Blancos y lo mismo en la canasta B, vas a repartir huevos rojos y huevos blancos, de forma que se conserve la proporción que nos dice aquí…

E4: Aa…

P: Entonces eso es lo que ustedes tienen que entender con la proporción.

E5: A profe yo creo que sería…

P: Dígame tranquila.

E5: Haber si no estoy mal, haber… Seria poniendo… como es… poniendo vea estos son los huevos rojos ¿cierto?

P: Sí.

E5: Entonces poniéndolos como están aquí, pero llenar todo en el orden indicado ¿no?

P: Si bueno, pero ¿Cómo lo harían? Tienen que tener una estrategia ¿Qué estrategia tendrían?, vamos a mirar la tuya y vamos…

E6: Más o menos seria…

E4: ¿Profe tiene que ocupar todo el espacio?

E6: (Katherine): Si… vea, como hay cuatro huevos rojos, se ubican primero del orden indicado, por ejemplo, en la canasta a se ubicarían los huevos blancos, en la canasta b se ubicarían los huevos rojos.
P: No, no me entendiste cuando le explique allí a Daniela… mira Katherine, los huevos blancos y rojos van en ambas canastas, que es lo que tú tienes que hacer, en la canasta a van tanto como huevos rojos como huevos blancos, pero necesitas repartir doce huevos, de tal manera que se conserve esta proporción que te dan allí en el supermercado, luego debes hacer lo mismo con la canasta b, pero ya la canasta b ¿está para cuantos huevos?
E6: Para treinta y tres.
P: Eso, para treinta huevos ¿cierto?
E6: Treinta y tres.
P: ¿Para treinta y tres?
E6: Vea tres, seis, nueve, doce, quince, dieciocho, veintiuna, veinticuatro, veintisiete, treinta, treinta y tres.
(Silencio).
P: Bien, esos treinta y tres huevos entonces los debe repartir acá, conservando esta proporción…
E5: Profe yo, vea…
P: Haber miremos.
E5: Yo creo que lo tengo bueno.
P: No, vamos a mirar ¿Cómo hiciste?
E5: Bueno pues, profe (Silencio) dice que vea, aquí conserve el mismo orden
P: Y ¿Cuáles es el orden?
E5: Primero, un… pues yo primero coloque los huevos rojos ¿cierto?
P: ¿Cuántos?
E5: Eh cuatro, mmm ¿cierto? cuatro, entonces agregue los huevos blancos.
P: Si y ¿Cómo hiciste?
E5: Profe yo, haber yo hice así conservando el mismo orden ¿Cierto?, pero llenando todos los cajoncitos, O sea repitiendo este mismo acá y repitiéndolo acá.
P: Pero entonces haber, pero no entiendo bien lo que tú me hablas del orden.
E5: Vea profe, este es el huevo rojo ¿cierto? Entonces yo lo puse acá, entonces este es el mismo orden que yo tengo acá y está aquí ¿cierto?, entonces como acá dice: eh… de modo que el número de huevos blancos y rojos conserve la misma proporción mostrada en la canasta, profe, entonces yo considero que la proporción seria este mismo orden e irlo repitiéndolo hasta terminar los cajoncitos de la canasta.

P: Bueno entonces, si lo vas haciendo ordenadamente como tú estás hablando ¿Cuántos huevos blancos te dieron?

E5: uno, dos, tres, cuatro.

P: Y ¿Cuántos rojos?

E5: Ocho.

P: Bueno, entonces ¿Eso que indica? ¿Eso qué quiere decir? ¿Cuál es la conservación de que tú estás hablando? ¿Me estás hablando de una conservación de orden o de una conservación de relación?

E5. De orden.

P: Bueno de orden y ¿Por qué no de relación?

E5: Pues profe, haber yo considero que las dos.

P: Las dos, bueno y entonces ¿cómo sería la relación de orden?

E6: Profe vea, por ejemplo el orden es que están siguiendo la misma… el mismo orden que nos dieron, pues el que debemos de representar y… y la otra ¿Cuál es?

P: La otra es una relación que hay entre dos cantidades, la relación ya entre cantidades, ya no una relación ordenada como se ve en la figura.

E6: Pero igual forma se relacionan, porque es por decir si usted los separa ¿cierto? Si usted lo separa entonces vendría siendo la misma figura, la misma que viene… pues que nos están diciendo que representemos.

P: Bueno, y ¿Necesariamente la figura tiene que ser de esa manera, como lo indican aquí?...

E5: Sí.

P: O ¿los huevos pueden ir de otro forma, en otro orden?

E5: Tienen que ir de ese orden, porque…

P: ¿Porque tú dices que tienen que ir en ese orden?

E5: Porque nos hablan que se debe de… de conservar la misma proporción.

P: ¿La proporción es lo mismo que el orden?

(Silencio).

E6: Pues profe, yo considero que la proporción es la cantidad ¿no?

(Silencio).

P: A bueno entonces, ¿Qué pasaría? Muy bien, ¿si es la cantidad que pasaría?

(Silencio).

E5: no nos hablan del orden, pero sí de la proporción.

P: Bueno, entonces en que están ustedes en estos momentos ensimismados.

E5: Que…

E6: En las…

E5: Pueden ser los seis huevos ¿Cierto? Los dos blanco y los cuatro rojos, no necesariamente si tienen que ser en el mismo orden pero…

(Silencio).

P: ¿Pero?

E6: Pues deben de llevar una cantidad exacta ¿No?

P: Y ¿Cómo sería la cantidad?

E5: Deben de… pues sí…

P: Y ¿Cómo sería esa cantidad? Cuéntenme, haber ustedes también váyanle ayudándole, Daniela, Manuela, ayudémosle a Johan y a Katherine.

E5: Vea es por decir, se pueden poner los… se puede decir que se puede cuatro rojos acá y dos blanco ahí o dos blancos y los cuatro acá así… pero es decir, uno los puede poner como uno crea que es más adecuado, pero sin… sin salirse de la cantidad que nos están dando.

P: Bueno muy bien, entonces ahora lo que vamos a hacer es que me van a decir la estrategia que utilizaron para mirar, entonces la comparamos con la de los otros compañeros para mirar si sí estamos todos de acuerdo, bueno vamos a mirar.

(Silencio).

P: Miremos ustedes por acá que nos hicieron, Juan y Johan.

E4: Pues, nosotros entendemos así.

P: ¿Cómo lo entendieron?

(Silencio).

E4: Que hay como seis huevos, entonces cuatros son rojos que serian que como así, (Silencio) y dos blancos.

P: Bueno…

(Silencio).

E4: Así entendemos nosotros.

P: Si así lo están entendiendo entonces ¿Cómo me explicarían la solución que nos están dando?

(Silencio).

E3. Profe que los huevos que hay en la canasta, en la canasta C, son equivalentes a los que hay que colocar en la canasta a y la canasta B.

P: ¿Son equivalentes en qué sentido? No entiendo.

E3. Son equivalentes porque cuatro medios equivalen a dos… a dos enteros.

P: Bueno.

E3: Porque si dividimos los dos huevos enteros…

P: Bueno, ¿Cómo es que me dices? Repítame eso por favor.

E3: Que equivalen…

P: ¿Quién equivale?

E3: Cuatro medios equivalen a dos huevos enteros, porque…

P: Bueno ¿Pero a que huevos te estás refiriendo?

E3: A los huevos blancos.

(Silencio)

P: A los huevos blancos… entonces eso me indica que hay una relación entre huevos blancos y ¿huevos?

E3: Rojos.

P: Rojos… ¿Cuál es?

E3: La relación es que son equivalentes al… al sumar las cantidades y al compararlas con la unidad de medida son equivalentes.

P: Bueno, de todas maneras me dejas sin entender todavía, no he podido entender bien, lo que me estás hablando de esta equivalencia en este sentido, pero entonces debes de tener en cuenta algo que me estás diciendo de…

E3: los dos huevos blancos.

P: ¿Qué pasa con esos dos huevos blancos? Porque en esos dos huevos blancos con relación a…

E3: Al… a la canasta C y a los huevos rojos.

P: Y a los huevos rojos, hay una relación, esa relación es la que me tienes que explicar bien, para que podamos resolver la situación, entonces vas haciéndole hay con el compañero Juan Pablo mientras tanto ¿Estamos de acuerdo? Si quieren pueden utilizar las tortas o si no, no hay problema.

Bueno volvamos acá con ustedes dos haber que han avanzado en estos momentos. Ahora sí, cuéntenme que entendieron de la situación que leyeron.

E1: Ay ay y ay…m…

(Silencio).

P: Dime, no se preocupe.

(Silencio).

P: ¿Cómo lo han planteado?

E1: Haciendo acá como las…

(Silencio).

E1: Haciendo profe acá… hicimos, haciéndole a cada una un cuarto de… un cuarto de la figura y dejando…

P: Bueno y ¿Por qué un cuarto de la figura? No entiendo.

E1: Porque… explícale… no profe.

E2: En la canasta debe de haber doce huevos.

P: Si señorito.

E2: Hay cuatro huevos rojos y dos blancos, la proporción seria pues, adecuar a la canasta los mismos… los cuatro.

P: ¿Cómo sería la proporción?

E2: Cuatro… cuatro cuartos.

P: Cuatro cuartos ¿Seguro?

E1: ¿No serían cuatro séptimos?

P: No, miren bien, cuatro…

E1: Cuatroooooo mm…cuatro… dos cuartos.

P: Cuatro, dos cuartos y ¿Dos cuartos que sería?

(Silencio).

P: Haber, ¿Dos cuartos que sería?

E2: Medio de…

E1: el medio de…

E2: Medio de…

P: ¿El medio de…?

E1: De una figura…

E2: De cuatro…

P: ¿De cuatro qué?

E2: De cuatro huevos.

P: ¿De cuales cuatro huevos?

E2: De los rojos.

P: De los rojos, entonces que podemos decir… ahora sí.

(Silencio).

E2: Hay cuatro medios.

P: Si estamos bien, ¿cuatro medios les da cuánto?

E1: Dos.

P: ¿Dos qué?

E1: Dos medios.

P: Dos…

E2: Dos cuartos.

(Silencio).

P: ¿Dos qué?

E1: Dos…

E2: Dos huevos.

P: Dos huevos… ¿De qué color?

E1: Blancos.

P: ¡Blancos! Bueno entonces ¿eso que me quiere decir?

(Silencio).

P: ¿Qué se conserva?

E2: Los mismo huevos blancos.

P: ¿Cuántos?

E2: Los dos.

E1: Dos.

(Silencio).

P: Los dos…

E2: Cuartos.

P: No, los dos huevos blancos si... ¿Cada cuánto? o ¿Por cuánto?

E2: Cada…

(Silencio).

P: ¿Los dos huevos blancos qué?

E1: Mm… dos…

(Silencio).

P: Ahí tenemos los dos huevos blancos y ¿Que más tenemos?

E2: Los cuatro rojos.

P: A entonces ¿Qué es lo que se está conservando?

E2: Los mismos cuatro… rojos.

P: Si ¿por?

E2: Los dos blancos.

P: O al contrario, dígamelo al contrario.

E2: Los blancos por los cuatro rojos.

P: Bueno entonces, ¿Esa sería la que, de lo que me está hablando en la situación?

E2: La proporción.

P: Y ¿Esa proporción la debe conservar dónde?

E1: Mm…

E2: En las canastas, la canasta A.

E1: La canasta A.

P: ¿Y?

E2: En la B.

P: Bueno, entonces hagámoslo primero para la casta A, tal como me lo dijeron. Bueno vamos a mirar si allí ya también lo hicieron y vamos mirando. Bueno miremos por acá entonces, ¿en qué continuaron ustedes?

E4: Eh la proporción…

P: ¿Qué proporción les dio?

E4: Eh hay que hacer la… hay que hacer lo mismo que hay acá pero dos veces, por ejemplo, no en orden pero si no que los mismos huevos, por ejemplo, hay cuatro huevos acá, entonces yo como puede ser en desorden o en orden como usted lo desee pueden ser… en mi caso fue en desorden porque aquí no está así, aquí cuatro rojos, amarillos y rojos, pues aquí son blancos, eh ya que hay cuatro rojos entonces aquí también hay cuatro rojos, pero como se repite… entonces ya se crea los doce… la canasta de doce huevos…

P: Y ¿Ustedes como lo hicieron?

E2: Profe, por ejemplo Esneider y yo ya estamos en la canasta B, entonces…

P: Ya están en la canasta B… bueno, pero al fin en la canasta A, ¿Cómo resolvieron la situación?

E2: En esta profe, Eh por ejemplo, yo y Esneider lo hicimos de esta manera, es una canasta de huevos que trae doce huevos, pero la dividí en dos partes, O sea una parte trae seis huevos y otra parte trae otros seis, que al total de huevos serian doce.

P: Doce huevos, pero no me estás hablando de los colores.

E2: No por eso…

P: Veo que están repartidos.

E2: Esta divididos y están en la misma proporción de acá, pero la... una parte de la… una parte de la canasta está en el igual orden que esta la figura que no la están representando y la otra parte de la canasta si la tenemos en desorden, pues yo la tengo en desorden.

P: Manuela.

E4: Profe, pues nosotros pensamos que, como hay huevos amarillos y huevos rojos, se reparten en la canasta A y la canasta B, pero desordenada, pero de la igual forma que están en la figura.

E5: Deben tener la misma proporción.

E4: Deben tener la misma proporción.

P: Y ¿Cuál es esa proporción? Hace rato me están hablando de una proporción…

E5: Seis huevos profe, vea yo aquí entendí…

P: Pero en seis huevos de proporción… ¿Cuál es la proporción de la que me están hablando?

E5: Seria profe la cantidad ¿no?

P: Pero no sé.

E5: Vea… vea profe yo aquí pude entender en la canasta a que… que los huevos, O sea yo tengo de color rojo los huevos y los…

P: ¿Cuántos?

E5: Tengo ocho, ¿Cierto? Entonces, pero como esta canasta debe tener seis… doce huevos, yo hice esto, yo aquí lo hice en este mismo orden, pero yo pude entender algo, que se podían hacer en desorden, pero debían tener como la misma cantidad de acá, para que nos pudiera dar el número que nos exigían acá O sea el número dos.

P: Muchachos vengan acá para que concluyamos sobre esta primera situación y miremos a ver si les quedo o no algo claro sobre esa proporción que es la que necesito que me den bien.

E5: Profe, si siempre estaría conservando los dos huevos blancos.

P: A entonces ¿Cuál es la proporción?

E5: Siempre estaría conservando los dos huevos blancos serian diez rojos.

P: Bueno, ¿Entonces como es la proporción?

E5: Dos…

P: Sí.

E5: Dos… Eh dos…

P: ¿Dos qué?

E1: Dos cinco.

P: ¿Dos qué?

(Silencio).

P: ¿Dos qué? ¿De qué estamos hablando?

E5: Dos blancos…

P: Dos blancos, pero ¿Dos blancos son qué? ¿Dos qué?

E5: Dos huevos.

P: Dos huevos…

(Silencio).

E5: O sea profe que también la relación podría ser que en todas las canasta tiene huevos blanco

P: No, pero es que en todas la canastas hay huevos blancos y hay rojos.

E5: Sí pero hay dos.

P: ¿Dos qué?

E5: Huevos blanco.

P: ¿En todas las canastas hay dos huevos blancos?

E5. Pues en estas que nos están dando.

E6: Si siempre conserva los dos.

P: Entonces en que canasta es que hay dos huevos blancos.

E6: En la A.

P: En la a que es la que ustedes están tomando como muestra, que es la que les da el supermercado.

E6: Sí.

P: Entonces esa es la proporción que le das el supermercado, esa proporción es la que quiero que me digan, ¿Cómo está? O ¿Cuál es la razón que tenemos ahí?

(Silencio).

P: Bueno ya sonó el timbre ¿Cierto?

E6: Si señor.

P: Vamos a concretarlo la próxima clase ¿estamos de acuerdo?

E6: Si señor.

P: Bueno entonces todos nos vemos la próxima clase, bien juiciecitos y tratan de resolver bien el problema lo pueden llevar para que lo traten de hacer en casa… Muchachos pero es que ¿Cuántos huevos blancos hay?

E6: Dos.

P: Muy bien hay dos y ¿Cuántos rojos hay?

E6: Cuatro.

P: Entonces ¿qué puedo decir?

E6: Dos cuartos.

Entrevista: 130507

P: Bueno mis queridas niñas, ¿Ya leyeron la situación?

E2: Sí señor.

P: Bueno entonces explíquenme en qué consiste y qué es lo que ustedes van a hacer

E1: Eh llenar las canastas con el mismo número de huevos, blancos y rojos.

P: Bueno y ¿Cómo lo van hacer? que no entiendo

E1: Dividimos la caja en…

E2: Doce partes.

E1: En doce.

P: Bueno listo y ¿Entonces?

E1: Entonces se llena la canasta con el mismo número de huevos.

P: Y ¿Cómo?

E2: En el orden que muestran.

E1: En un orden.

P: ¿Necesariamente tienen que ser en orden?

E2: No.

E1: Si porque acá es como lo estamos viendo que queden en la mismas partes.

P: Que queden en las mismas partes, ¿Tu qué dices?

(Silencio).

E3: Que sí que tienen pues… que debe ser en un orden.

P: Y ¿Cómo así el orden? No entiendo.

(Silencio).

E2: Profe es que vea, no debe ser el orden lo único que importa es que debe tener la misma cantidad.

P: A bueno y ¿Cómo sería esa cantidad?

E3: O sea que echándole una cantidad no quede los… que los blancos se pasen pues de los rojos.

P: Entonces ¿cómo? Explícame.

E2: Porque esta es la primera cantidad de la canasta A.

P: Bueno entonces ¿Cómo llenaron la caja A?

E2: Haciendo el mismo orden que nos aparece en la figura C

P: Bueno ustedes insisten en el orden, díganme como…

(Silencio).

E2: Pues primero se colocan en la…

P: Si pero, ¿Cómo?

(Silencio)

E3: Vea se colocan en un orden, O sea en un orden dado, eh seis de un mismo orden y seis de un mismo orden ¿si me entiende?

P: ¿Cómo que seis de un mismo orden y seis de un mismo orden? Yo no entiendo.

(Silencio)

E1: En la figura C nos muestran que son cuatro…que son cuatro huevos rojos y son…

E2: Dos amarillos.

P: Entonces…

E1: Pero como nos dan la canasta que son de doce partes.

P: Muy bien…

E2: Hacemos el mismo orden.

P: ¿Y ahí encuentran alguna relación?

(Silencio).

P: ¿Qué relación?

E2: Si porque siguen siendo más huevos rojos que amarillos.

P: Bueno muy bien esa es una parte y la otra parte de relación ¿Cómo sería?

(Silencio).

E3: Que siguen siendo del mismo orden.

P: Estamos hablando de relación y no de orden, ya me dijiste el orden ¿La relación como seria?

(Silencio).

E3: Se relacionan que tienen el mismo orden.

(Silencio).

P: Bueno ¿cómo le ayudaríamos a ellos?

(Silencio).

E4: haber siempre van a guardar el mismo orden, ¿Cierto? Siempre va a tener los mismos huevos y la canasta no puede… más blancos.

P: Pero, ¿dos huevos de qué color?

E1: Pero como nos dieron una canasta de doce… sigue siendo la misma forma…

P: Entonces sigue siendo una relación ¿Qué relación encuentran?

E3: De que hay… hay dos… eh mire, que hay que desarrollar cada unidad.

E4: Dos huevos blancos por cada cuatro huevos rojos.

P: Entonces ¿Cómo distribuyeron los huevos? ¿Cómo quedaron distribuidos los huevos en la canasta doce?

E3: Dividimos la canasta en…

E2: La canasta de doce en dos partes, de seis y seis, en cada caja de seis hay dos huevos amarillos y cuatro rojos.

P: Entonces ¿Cuántos resultaron al final?

E2: Doce.

P: ¿Distribuidos cómo?

E4: Cuántos blancos y cuántos rojos

E3: Dos blancos…

E2: Cuatro amarillos y…

E3: cuatro amarillos y ocho rojos.

P: Bueno ustedes ¿Por qué me hablaron ahorita de blanco y acá me están hablando de amarillos, rojos cuéntenme?

E1: Porque es que acá dicen que blancos pero ahí están es amarillos.

P: A entonces estos amarillos están representando el…

E3: Blanco.

P: Blanco, bueno muy bien, entonces ahorita sigan haciendo la otra situación y empiezan a describir como hicieron la de abajo, vamos al otro grupo.

E3: Estos si nos alcanzan para los treinta.

P: Si vamos a mirar…

(Silencio).

P: Jóvenes, ¿Cómo están ustedes?

E5: Bien profe.

P: Bueno entonces cuéntenme haber ustedes que es lo que entendieron y como están haciendo lo de la situación de los huevos.

E6: Bueno, entonces la canasta con huevos se divide en…

E5: Dos partes.

E6: Dos partes.

E5: Y cada uno lleva seis.

E6: Cada una lleva seis huevos…

E5: Cuatro rojos y dos amarillos.

E6: Cuatro rojos y dos amarillos.

P: Bueno y ¿Por qué hicieron eso?

E6: Siguiendo la secuencia de la…

E5: Para seguir la secuencia de la figura C.

P: Y ¿la figura C que es para ustedes?

E5: Eh… la unidad.

P: A bueno listo, y ¿Cómo está distribuida esa unidad?

E5: eh hay cuatro huevos rojos y dos blancos.

P: Bueno entonces ahí hay una relación ¿Qué relación es? ¿Cómo diríamos matemáticamente?

(Silencio).

E6: Relación.

P: Si una relación, ¿Matemáticamente como hablaríamos de esa relación que ustedes me están diciendo? ¿Cómo fue que me dijiste?

E5: La unidad.

P: No pero antes de decirme la unidad.

E5: A que hay…

E6: Cuatro rojos y dos blancos.

P: Pero ¿Matemáticamente como lo diríamos?

E4: Hay cuatro unidades rojas.

(Silencio).

E5: No, hay seis tercios, dos tercios…

E6: Por cada cuatro huevos hay dos…por cada cuatro huevos rojos hay dos blancos.

E5: Así es.

P: Entonces a ver, ¿Cómo llenaron la canasta de doce?

E5: Bueno entonces…

E4: Aquí partimos a la mitad.

E5: La partimos a la mitad y pusimos, acá como en la secuencia, que muestra dos huevos blancos y cuatro huevos rojos.

P: Bueno muy bien, ahora ¿Yo podría hacer otra relación? Digamos ¿Por un huevo blanco cuantos rojos habrían?

E5: Sí.

P: ¿Cómo hacen ustedes ahí? Cuéntenme.

E5: Ponemos en… lo partimos normal en la mitad, ponemos una ficha roja y reemplazando uno de esos huevos blancos.

P: Entonces ¿Cómo quedaría la relación?

E5: Quedaría un…

E4: Un huevo blanco cinco huevos rojos.

P: Seguro ¿Está seguro de lo que me estás diciendo?

E4: Pues si se da...

P: Mire la primera ¿Cómo es la primera relación?

E5: Dos huevos blanco y cuatro…

E4: Uno rojo y uno…

E5: Eso cuatro huevos rojos y dos blancos.

P: Eso entonces ¿Cómo quedaría la otra?

(Silencio).

E4: Dos huevos rojos y uno blanco.

P: Esa sería la relación, entonces si estamos hablando de relaciones, matemáticamente ¿Cómo lo escribiríamos?

(Silencio).

P: Escríbanlo en la hoja para eso tienen la hoja…escríbanlo ahí en la hojita donde están solucionando el problema.

(Silencio).

P: No ya lo dijeron ahora lo van es a escribir… escríbanlo, la relación que me dijeron

P: Escríbanmelo acá simbólicamente.

(Silencio).

P: ¿Cómo la tienes tú allá?

E4: Cuatro huevos…

P: A bueno pero ahí la están describiendo, pero ahora la necesito matemáticamente… hagan de cuenta que están en un trabajo matemático ¿entonces como lo escribiríamos?

E6: Cuatro mitad.

E5: Cuatro sobre dos.

P: ¿Cómo?

E4: Cuatro mitades.

E6: Cuatro mitades.

E5: Cuatros sobre…

P: Y ¿esas cuatro mitades a que equivalen?

(Silencio).

E4: A cuatro.

E6: A dos unidades.

P: A dos unidades bueno, entonces ¿Este cuatro me está representado a quién?

E4: A cuatro huevos rojos.

P: Y ¿Este dos?

E4 A los dos huevos rojos… a los dos huevos blancos.

P: Entonces esto me da un resultado ¿Qué es?

E5: Cuatro medios…

(Silencio).

E4: Cuatro sobre dos.

P: ¿Cuál es el resultado?

(Silencio).

P: ¿Cuál es el resultado de esos cuatro medios?

(Silencio).

P: ¿Cuál es el resultado? ¿Cuándo hago la división cual es el resultado?

(Silencio).

E6: Dos…

P: Entonces ¿Eso quiere decir dos qué?

E4: Dos huevos blancos.

P: Dos huevos blancos ¿Seguro?

(Silencio).

P: O dos huevos rojos.

(Silencio).

P: Ese dos ¿Que le representa a ustedes?

E4: Dos huevos rojos y un huevo blanco.

P: ¿Cómo?

E4: Dos huevos rojos y un huevo blanco.

E5: Por que mire.

E5: Porque se… acá darían dos y acá daría uno.

E5: Entonces dos sobre uno.

P: Eso, entonces esas operaciones que me están diciendo me las van a continuar realizando ahí, para mirar cómo nos queda el trabajo ¿Estamos de acuerdo? Bueno, gracias.

Entrevista: 130505

P: Bueno jóvenes entonces ahora vamos a hacer la plenaria, realmente que fue lo que hicieron.

(Silencio).

P: ¿Quién va a empezar? (Silencio) ¿Cuándo midieron que fue lo que hicieron? cuéntenme a ver

(Silencio).

E4: Profe eh nosotros empezamos a medir con la cartuchera, pero cuando lo medimos con la cartuchera nos dio veintidós y nos quedó sobran… nos quedó faltando, perdón, nos quedó faltando un pedazo.

P: Bueno y ¿Qué hicieron?

E4: Entonces tuvimos que tomar una medida más pequeña, una unidad de medida más pequeña.

P: Y ¿Que paso?

E4: Y en esa unidad nos dio treinta y cuatro, pero en esa… en esa unidad no nos sobro si no que nos faltó.

P: A les hizo falta un poquito.

E4: Sí.

P: ¿Qué hicieron para remediar eso?

E4: Eh (silencio).

E6: Íbamos a medir con el borrador cuando usted nos dijo que viniéramos a discutir todo.

P: Ah bueno ¿Entonces no alcanzaron a hacer la medida?

E4: No.

P: O sea, ¿Iban a qué?

(Silencio).

E6: A… comparar (Silencio).

E6: Con el borrador.

P: Bueno listo.

P: Vamos a mirar el otro grupo, que hicieron, cuéntenos el otro grupo.

E3: Bueno, nosotros empezamos a medir con el zapato y no nos dio con el zapato y… un lápiz y no… entonces estábamos utilizando 2 unidades de medida, entonces usted nos explicó que era una sola unidad de medida, entonces nos dio diecisiete zapatos y medio. (Silencio).

P: Quien otro quiere…

E2: Diga usted (silencio).

E1: Yo noté que, como es, que nosotros también estábamos midiendo con, como se dice, con un zapato más… mucho más grande, pero nos quedaba siempre (Silencio) eh nos sobraba.

E3: Sobraba, entonces.

E2: Nos sobraba mucho pedazo.

E3: Entonces eh el zapato nos dio diecisiete pero pues no quedo completo porque quedo sobrando, entonces dividimos la unidad de medida en una unidad más pequeña.

P: Y ¿cuál era su unidad de medida?

E3: El zapato.

P: Entonces ¿dividieron a quién?

E2: A la unidad de medida.

P: Y ¿cuál era?

E2: El zapato.

P: Bueno muy bien, ¿Entonces?

E2: Y nos dio diecisiete y medio (Silencio).

P: Bueno, cuéntenme entonces ustedes… si ustedes hubieran tenido, otras unidades para medir esa longitud, ¿Con cuál creen ustedes que les darían más precisa?

E2: Con el metro.

P: Bueno y ¿Porque le hace sentir eso?

E2: Porque el metro se puede dividir, eh en centímetros y los centímetros en milímetros.

E4: Unidades más pequeñas.

E2: Sí, unidades más pequeñas.

P: Y entonces eso hace…

E2: Eh la unidad puede dar exacta.

P: A bueno, entonces si midiéramos con el… ¿Qué me dijeron?

E2: Con el metro.

E4: Con el metro.

P: La comparación ¿Cómo sería?

(Silencio).

E3: Daría más exacta.

P: Y entonces como se llamaría ese resultado. ¿Cómo lo llaman?

E6: Racional.

P: ¿Cómo?

E4: Racional.

E3: Un numero racional.

P: A bueno y ustedes ¿Que opinan?

E4: Eh yo opino que no sería un número eh rac… Pues si sería un número racional pero se le llamaría fraccionario, sería un fraccionario.

P: A ¿para ti es un fraccionario?

E4: Sí.

P: A bueno y ¿Para los demás? ¿Están de acuerdo, no están de acuerdo? (Silencio)

E6: Profe pues yo estoy de acuerdo con mi compañera Daniela porque (Silencio) pues eso que usted nos explicó y todo, entonces nosotros entendimos todo y entonces Daniela captó y yo capté y todos mis compañeros captaron, entonces si…

P: Bueno, entonces ¿La relación que les dio en la medida cómo fue?

(Silencio).

E3: Fue exacta.

E3: Eh mm…

P: Fue exacta y ¿Cómo?

E6: Comparando.

P: ¿Cómo?

E6: Comparando (Silencio).

P: No pero, ¿Cómo? ¿Cuál fue la relación? (Silencio) A ver acuérdense de la de la que son las relaciones, ya ustedes me dijeron ¿Qué las relaciones eran qué?

E2: Una comparación.

P: Bueno entonces ¿Cuál fue la relación en la comparación?

(Silencio).

E2: Profe nos corchó.

P: Entonces listo, entonces ahí ustedes tienen que acordarse siempre de que medir es… ¿Qué?

E6: Una comparación.

E2: Una comparación.

P: Y ¿Que estamos comparando?

E3: Una unidad de medida.

E1: Una unidad de medida.

E3: Una unidad de medida.

P: ¿Con?

E2: Una longitud.

E4: Una longitud.

E3: Una longitud.

P: Con una longitud o una magnitud muy bien, entonces bueno entonces esa parte del trabajo ya les quedo claro ¿Cierto?

E6: Sí.

E2: Sí.

E3: Sí.

P: Ya que ellos dijeron ¿Que había nacido un número?

E2: Fraccionario.

P: Y tu dijiste que había nacido un número…

E4: Fraccionario.

E2: Fraccionario.

E3: Fraccionario.

P: Muy bien bueno, entonces eso es lo que vamos a tener en cuenta para el para la siguiente actividad o el siguiente que vamos hacer o ejercicio que vamos hacer (Silencio)

E6: Chao.

Entrevista: medidas

P: Buenos días.

Alumnos: Buenos días.

P: Gracias por acceder por la entrevista que vamos a iniciar hoy.

Alumnos: con mucho gusto.

P: Vamos a mirar lo que tú has comprendido de todo el proceso que realizamos en el semestre anterior y parte de este ¿entonces para ti que significa medir?

Alumnos: medir es comparar dos magnitudes.

P: ¿Cuando tú comparas esas dos magnitudes es posible tener varias unidades de medida?

Alumnos: Sí.

P: Explica.

Alumnos: Es posible tener varias unidades de medida ya que puede medir con varios objetos.

P: ¿Dime por ejemplo?

Alumnos: Metros, kilómetros, 60 kilómetros por una hora.

P: ¿Dime que más?

Alumnos: También con el tiempo, por cada 3 niñas son 6 niños, tres niñas a 6 niños pues, y otras cosas.

P: ¿Cuando tú me dices 3 niños a 6 niñas realmente que me estás diciendo ahí que hay?

Alumnos: Una razón.

P: Y en esa razón como me puedes hacer una comparación, ¿cómo la puedes hacer?

Alumnos: Esa comparación podría ser por mayor, menor.

P: ¿Quién es mayor ahí que quien dime, cuando dice 3 niños a 6 niñas?

Alumnos: Los niños porque cada 6 niños hay 3 niñas.

P: ¿Entonces como seria esa razón?

Alumnos: Que 6 niños es el doble de 3 niñas.

P: Ahora dime en tu diario vivir, tu cotidianidad ¿cómo puedes utilizar esas fracciones o esos números racionales?

Alumnos: Con el tiempo, por ejemplo ¾ de hora, en kilómetros cuando uno se monta a un taxi o un bus.

P: Explícame eso.

Alumnos: Por ejemplo usted se montó a un bus y el bus va a 30 kilómetros por hora.

P: ¿Cuándo se dice que tengo A dividido entre B que te está representando eso?

Alumnos: Un símbolo.

P: Un símbolo, ¿y ese símbolo que te representa?

Alumnos: Una comparación.

P: ¿De qué?

Alumnos: De dos medidas.

P: ¿Y el resultado de ese símbolo que puede ser?

Alumnos: Un número racional.

P: Entonces dejamos así por ahora y muchas gracias.

Episodio 130804

P: Bueno ¿cuál es el objetivo de la medida del niño?

E6: Mirar para cuántas cintas azules son necesarias para medir a Darwin.

P: ¿Tú estás de acuerdo?

E2: Sí.

P: ¿Y entonces como lo van a hacer?

E4: Como solo tenemos dos cintas, vamos a poner una debajo de la otra y a medida que vamos bajando vamos contando para saber cuántas cintas son requeridas.

P: ¿Y porque la están colocando al niño en la pared en la pared?

E6: Porque sería más fácil para tener algo en que apoyarnos.

P: Bueno y las cintas tienen la misma longitud.

E2: Si profe cada cinta mide 20 cm.

P: ¿Que les pasó? ahí que veo…

E6: Sobra.

P: y ¿cuánto sobró?

E2: Una pequeña parte.

P: ¿Y cómo van a hacer para medir ese pedacito?,

E6: utilizando…

E6 Medidas, pues.

P: Bueno, vamos a mirar haber ¿cuántas cintas les dio?

E2: 5 y sobró una pequeña parte.

P: Bueno jóvenes porque acostaron al niño en ese papel Craft

E2: Profe para verificar si la medida que tomamos en la pared es la misma que podamos obtener en esta misma medida con el papel Craft.

P: Bueno muy bien y si no les da la misma, ¿qué sucede?

E2: Se alteraría toda la medición que hicimos y tendríamos que volver a hacerla.

P: ¿Es necesario volver a realizarla?

E6: Si para tener un número exacto de cuántas cintas mide el niño.

P: Y si las cintas no son exactas, ¿entonces qué pasa?

E6: Si las cintas no son exactas entonces…

P: Que indica, ¿Si el número de cintas no es exacto?

E2: Que hicimos la medida mal.

P: ¿Están de acuerdo con eso? ¿Si el niño mide 10 cintas y un pedacito entonces está mal hecha la medida?

E6: No, no está mal hecha.

P: ¿Que indica eso?

E6: Indica que no es exacta.

P: Y que indica que no es exacta.

E4: Que ese pedacito seria… sería $\frac{1}{5}$ o… $\frac{1}{5}$ de cinta por ejemplo 5 cintas y $\frac{1}{4}$.

P: Bueno y cuánto mide la cinta.

E6: 20cm.

P: Y entonces cuánto seria el cuarto de cinta? Si mide 20 la cinta cuanto seria $\frac{1}{4}$ de 20.

E6: Cinco.

P: ¿Cinco qué? Mide 20 cm, cual es el $\frac{1}{4}$ de 20cm.

E4: 5cm.

P: Entonces cuánto mediría el niño.

Mediría 5 y $\frac{1}{5}$.

P: De $\frac{1}{4}$ me pasaste a $\frac{1}{5}$ no entiendo.

E4: $\frac{1}{4}$

P: Bueno entonces cuanto seria la medida del niño.

E4: 5 cintas y $\frac{1}{4}$

P: Bueno vamos a mirar si es cierto todo lo que me están diciendo, todavía ¿no has acabado Katherine? Quedó muy clara, pero no interesa, retíñelo, con lapicero o marcador.

E6: Vamos a medir la silueta de Darwin de tal manera de ver si obtenemos el mismo resultado que obtuvimos en la pared.

E6: Utilizando las cintas azules que miden 20 cm siguiendo una secuencia.

P: Cuántas cintas llevan hasta el momento que les han ido dando.

E6: 5 y sobra una parte.

P: Y con la parte que sobra ¿qué van a hacer?

E6: La vamos a dividir en partes más pequeñas.

P: A quién van a dividir.

E4: La cinta de 20 cm la voy a dividir en la partecita que me sobró para tener una medida exacta de Darwin.

P. Entonces están dividiendo a ¿quién?

E6: A la cinta azul.

P: Y esa cinta que viene a ser.

E2: Unidades de medida.

P: Entonces cuantas unidades de medida tienen, tienen muchas o tienen una.

E6: Tenemos una.

P: ¿Y cuál es?

E6: La cinta azul.

P. Bueno listo, entonces cuénteme en cuanto lo dividieron.

Nos dio 4.

P: Entonces eso indica que la estatura de Darwin finalmente es…

E4:5 cintas y $\frac{1}{4}$.

P: Bueno, y entonces ese 4 que me indica, las 5 cintas y $\frac{1}{4}$.

E6: Que la medida de Darwin no es exacta.

P: No es exacta, no es un número ¿qué clase de número sería la medida de Darwin?

E6: Sería un número racional.

P: Bueno muy bien entonces estamos diciendo que Darwin no tiene una medida de ¿qué clase de número?

E6: Entero.

P: Bueno, entonces finalmente ¿cuánto fue la estatura de Darwin?

E6: 5 cintas azules y $\frac{1}{4}$.

Entonces ahora vamos a hacer la medida de la compañera Manuela.

Episodio 130805

P: Bueno jóvenes Que es lo ustedes van a realizar hoy.

E1: Vamos a medir la compañera manuela con unas cintas naranja.

P: Bueno y cuál es el objetivo de hacer la medida con las cintas naranjas.

E1: Mirar cuanto mide la compañera.

P: Y esas cintas que viene a ser.

E2: La unidad de medida.

P: Entonces empiecen a… y cómo lo realizarían.

E1: Pasando una por una todo el cuerpo de ella cuánto mide.

P: Y ¿ahí sí le daría?

E1: Hay que medirla primero.

Silencio: están midiendo.

E2: Oiga es que así nos va quedar mal la medida, es mejor dibujar la silueta.

P: ¿Cómo Daniela?

E2: Así nos queda mal la medida, porque ella no se puede medir bien con ella, es mejor dibujar la silueta.

P: Entonces van a dibujar la silueta para luego, bueno por allá hay unos marcadores.

P. Después de que midan a manuela entonces ¿qué van a hacer?

E1: Vamos a hacer la comparación con Darwin y Manuela.

E1: Con estas fichitas para saber cuánto mide la compañera.

Señala las cintas de color naranja.

P: Bueno vamos a mirar si es cierto lo que hicieron.

E1: Entonces vamos a medir ya que hicimos la figura de la compañera, vamos a medir con ésta cinta naranja para ver cuánto mide.

P: ¿Bueno jóvenes cuanto les dio?

E1: 33.

P: 33 y…

Un medio (en coro).

P: ¿Un medio? ¿Cómo sabe que es un medio?

E1: No, 33 y un poquito.

P: Y bueno ¿cómo me doy cuenta de ese poquito?

P: ¿El pie de ella va a hasta aquí o hasta aquí? El profesor señala.

P: Cuándo está parado cual te esos te indica que está parado, bueno hasta donde tienes que medir, como hago para medir ese poquito.

E1: Lo divido.

P: Bueno y cómo lo van a dividir.

E2: ¿Cuánto dio?

E1:33.

P: 33 que y que van a dividir, y como me doy cuenta de ese y…

E1: Cogemos una regla y medimos.

P: No tengo regla en este momento, no hay regla como hago para medirlo.

(Silencio).

E2: Por eso hay que dividir la cinta.

P: ¿Y cómo la divido?, ya tienen la cinta, muy bien, cómo la divido.

E1: Doblamos el pedacito aquí que quedó.

P: ¿Y cuál es el objetivo de doblarla?

E1: Para mirar cuanto dividir hay y dividirlo en eso.

P: Y entonces ahora si nos dice cuántas…

E1: Entre uno y medio.

P: ¿Entonces cuántos pedacitos le salieron de la unidad?

E1: Uno y medio.

P: ¿Cómo que uno y medio? Entonces es más grande que la unidad? ¿Cuántos dobleces hiciste? Cuántos dobleces iguales.

E1:2 iguales y un pedacito.

P: Y si puedo tener dos iguales y uno desigual, entonces qué debo de hacer.

E2: Seguir dividiendo.

P: Exactamente, realice la división.

E1: Por el l más pequeño.

P: Ah bueno.

P: Entonces cuántos pedacitos les dio ahora sí.

E1:4.

P: Entonces que indica.

E1: Que hay que dividir.

P: Entonces cual sería más o menos o la estatura precisa de manuela.

E5: 33 sobre 4.

P: Están de acuerdo, ¿seguro?

E2: 33 y un cuarto.

P: No entiendo eso, cuántas unidades les dio.

E2: 33.

P: Y el pedacito que le sobró era de cuánto.

E1: $\frac{1}{4}$ de cinta naranja.

P: ¿Y qué es la cinta naranja?

E4: La unidad de medida.

P: Entonces ¿cuánto finalmente les dio?

E2: $\frac{1}{4}$ de 33.

P: ¿Este pedacito?

E2: 33 y $\frac{1}{4}$.

Episodio 130806

P: Jóvenes buenos días vamos a continuar con el trabajo de la medición del niño, ¿cómo es que se llamaba el niño? ¿Y la niña?

Estudiantes: Darwin y Manuela.

P: Entonces de acuerdo al problema, es tan amble y lo lee Katherine.

E6. Intencionalidad, identificación y estimación de la unidad de medida, realizar comparaciones con diferentes medidas que conducen el numero racional.

Situación: a un niño de prescolar se le desea medir su estatura con una cinta de color azul, a otro niño de mayor estatura se le mide la estatura con una cinta de color naranja, ¿cuántas cintas de color naranja son necesarias para medir la altura del niño de preescolar?

(Silencio largo)

Los niños se quedan solos.

Proceso de medición, silbidos.

E5: Yo voy a empezar midiendo primero la estatura del niño de prescolar y después la estatura del niño de prescolar con cintas cortas y al niño grande con cintas de color azul.

E4: Yo voy a empezar haciendo un cuadro midiendo por cada cinta larga cuantas cortas hay para ver cuántas… largas azules caben ¿cuántas cortas?

E2: La larga mide 20 cm sí o no.

E2: y la corta mide 5 cm.

E2: O sea que caben 4 cintas cortas, entonces seria 33 cintas pequeñas.

E4: Serian 21 cintas cortas porque yo pienso que por que 4 cintas cortas caben en cada larga de 20cm entonces 4 X 5= 20 y un pedacito que sobro de cinta que también era de 5m de cinta es 21

E2: No vea, por cada cinta larga caben 4 pequeñas sí o no, entonces serian….en cada cinta larga.

(Silencio largo).

Interviene un profesor.

Les ofrece ayuda y los estudiantes le indican con el silencio que no la necesitan.

E2: Sea que de cada 8 cintas largas están las 33 pequeñas.

E4: Por eso pero como solamente el niño midió 5 cintas y 5 centímetros $\frac{1}{6}$ mejor dicho entonces yo pienso que son 21… 21 cintas cortas.

E6: El color de cintas azules nos dio como resultado 5 cintas azul y una parte de una cinta,

E2: O sea que Darwin cual es la fracción, era 5 y $\frac{1}{6}$ cuando lo medimos nos dio 5 y $\frac{1}{6}$ y la de manuela 33 y $\frac{1}{4}$.

Humm…

Silencio.

E5: ¿Cristian usted que está haciendo?

E1: Estoy mirando como… ¿Cuántas… cintas largas media Darwin? y ¿cuántas chiquitas medía Manuela?

Los estudiantes piden silencio.

Manuela 33 y $\frac{1}{4}$.

E2: Y el niño: 5 y $\frac{1}{6}$.

E5: ¿Daniela usted que está haciendo?

E4: Estoy mirando en cada cinta larga cuantas veces caben las cortas.

E4: ¿Manuela usted que está haciendo?

E5: Estoy mirando cuantas cintas caben en la estatura pequeña en la grande.

E6: ¿Qué estrategia está utilizando que procedimiento estás haciendo, como lo estás solucionando?

E3: Pues tú que estabas tan atenta en estas clases ¿cómo estás calculando las veces de la cinta?

E5: Igual a usted.

E4: Pues te quiero preguntar lo estás haciendo con reglas, o con matemáticamente contando, ¿cómo lo está haciendo?

E5: Matemáticamente, con cuadros.

E2: Para medir a manuela con las cintas largas serian 8 y ½ porque un número aproximado por el 33 por el 4 sería 4X8=32 y sobraría una cinta para la 33 entonces serian 8 cintas y media

E5: Bueno yo también apoyo a mi amiga Daniela porque yo también estaba haciendo el procedimiento y me ha dado lo mismo que te dio a ti.

E4: A mí me dio pero ahora que Daniela lo menciona pienso que si serian 8 cintas y media para manuela porque como las cortas eran muy chiquiticas… y habían … y las largas alcanzaban para 4 chiquitas yo si pienso que para manuela sean 8 y medio.

E2: Pero yo creo que aquí tenemos una relación.

E1: ¿Juan pablo usted que está haciendo ahí?

E5: ¿Qué técnicas estás utilizando?

E2: Medir con las cintas, un cuadro, llegue a la conclusión de que Darwin mide 20 y un medio

E1: ¿Usted qué está haciendo Katherine?

E6: Yo hice una tabla de acuerdo a la medida, realizamos la silueta de Darwin y mi compañera manuela, con la cinta de color azul y naranjada, que la medida de Darwin con las cintas azules nos dio 5 cintas y sobro una parte y la de manuela fueron 35 cintas y un medio.

E2: ¿Y a que puedes concluir con esto?

E6: A una comparación que manuela mide más que Darwin.

E1: ¿Y usted manuela que está haciendo ahí?

E5: En este momento estoy haciendo el cuadro para hacer las mediciones.

E4: Bueno yo creo que ya hemos avanzado lo suficiente con lo que respecta a saber cuántas midieron para hallar las relaciones… entonces la misma relación que yo veo es 21 a 5 y $\frac{1}{6}$.

E5: ¿Bueno y Esneider a que conclusión llegó?

E3: Yo a la misma conclusión apoyo la de mi compañera Daniela.

E2: ¿Y Manuela?

E5: La misma tuya Daniela.

P: ¿Cómo les acabo de ir, si terminaron de hacerlo, o les falta algo?

E4: Nos fue bien en lo de Manuela.

P: de todas maneras vamos a tener que terminar porque los veo un poco lentos, continuamos en la otra sesión.

Entrevista: Cintas

P: Bueno jóvenes vamos a empezar a realizar el taller que tiene que ver con las fracciones durante el proceso de medición que estamos haciendo, bueno el grupo de Katherine que está compuesto por Manuela, Daniela y Katherine ¿qué objeto tomaron?

Grupo 1: Como objeto tomamos un lapicero.

P: El grupo dos que está conformado por Cristian, Juan Pablo y Esneider ¿qué objeto tomaron para medir?

Grupo 2: Un celular.

Entonces vamos a mirar la primera pregunta Esneider en ¿cuánto tomaron la estimación de ese celular?

Grupo 2: Profe tomamos como estimación 7cm.

P: Bueno y cuando lo compararon con alguna de las tiras ¿cuánto les dio?

Grupo 2: 11cm.

P: Entonces qué paso, ¿estimaron muy bien o muy mal?

Grupo 2: muy mal.

P: Ustedes Katherine ¿qué instrumento u objeto tomaron para medir?

Grupo 1: Un lapicero.

P: Bueno y ¿en cuánto tomaron la estimación de ese objeto?

Grupo 1: 15 cm

P: Bueno y cuando lo midieron cuanto les midió en sí.

Grupo 1: 16,1 cm.

P: ¿Si fuera a medir con la longitud de la tira roja cuántas tiras necesito para cubrir la longitud de ese objeto? Señala el lapicero.

Grupo 1: Pues su medida fue 3 cintas rojas y un pedacito dividimos la tira roja en centímetros y milímetros, de tal forma de hacer después el proceso nos dio en número racional 16,1 cm

P: Bueno y ustedes.

Grupo 2: Medimos con la tira roja y nos dio 2 y un pedazo, y para saber cuánto nos daba ese pedazo lo dividimos en centímetros, y luego lo hicimos en unidades más pequeñas.

P: ¿Y cuáles fueron esas unidades más pequeñas?

Grupo 2: Milímetros y después nos dio la medida precisa.

P: Y ¿cuál fue la medida?

Grupo 2: 11cm.

P: Y qué clase de número es 11cm.

Grupo 2: Racionales.

P: Muy bien ahora ustedes, con la tira amarilla ¿cuántas tiras amarillas necesitaron para cubrir la longitud de ese objeto?

Grupo 1: Una amarilla de la cual sólo se utiliza una parte.

P: Y ustedes.

Grupo 2: La cinta amarilla, y la unidad es mayor que el objeto, y a medir usamos una cinta amarilla.

P: Miremos el segundo punto cómo lo hicieron, a partir de tiras azules, amarillas y rojas que medición o que relaciones utilizaron y que hicieron, cuénteme que hicieron.

Grupo 1: Realizamos un cuadro.

P: Un cuadro y que miraron en ese cuadro.

Grupo 1: Relacionamos las tiras rojas, con azules y las amarillas.

P: Y ustedes.

Grupo 2: Usamos también la tabla para observar relación entre las figuras rojas, azules y amarillas.

P: Bueno yo vea aquí en está un uno ¿qué quiere decir ese uno de la cinta roja?

P: Como me explican ese 1, $\frac{1}{2}$ y este $\frac{1}{4}$.

Grupo 2: Que 1, es la figura roja, entonces el azul es el doble y la amarilla va como aumentando, es 4 veces.

P: La de ustedes, vamos a mirar por ejemplo este 1, ¿que indica este 1?

Grupo 1: Que hay una cinta roja.

P: Bueno, que hay una cinta roja, y esta mitad que indica aquí, este ½ que veo acá (señala).

Grupo 1: Que la roja es la mitad de la azul.

P: ¿Y este $\frac{1}{4}$ aquí que indica?

Grupo 1: La roja es $\frac{1}{4}$ de la amarilla.

P: Bueno listo.

P: Entonces de acuerdo a eso que me están hablando ahí, entonces vamos a hacer las mediciones, ¿Qué parte de la longitud de la tira amarilla es la longitud de la tira roja? Quien me la quiere contestar.

Manuela: se puede representar a través de un símbolo como un número fraccionario o racional.

P: Y cuál es ese número, o cual es ese símbolo.

Grupo 1: Uno de 4, $\frac{1}{4}$.

Grupo 2: Profe también lo podemos representar con el símbolo ¼ y también la relación 1 sobre 4

P: Bueno, muy bien, si fuéramos a medir la longitud de la tira amarilla con la longitud de la tira azul, cuantas tiras azules necesitaron para cubrir esa tira, cuántas tiras azules necesitaron.

Grupo 1: Dos

P: ¿Cuántas y que indica eso?

Grupo 1: Que la amarilla es el doble de la azul.

P: Bueno, y si fueran a medir la tira azul con la roja, ¿cuántas tiras rojas necesitaron?

Grupo 1: Dos también ya que la roja es la mitad de la azul.

P: Y ustedes que indican de eso, que me está diciendo esa mitad.

Grupo 1: Que la azul es el doble de la tira roja.

P: Y si fueras a medir la longitud de la tira azul con la longitud de la tira amarilla ¿Qué relación se puede hacer?

Grupo 1: La tira amarilla es el doble de la azul.

P: Ustedes como podrían hacerla ahí también ¿qué relación vieron ustedes?

Grupo 2: 10 a 20 que es igual a un medio que se representaría con el símbolo $\frac{1}{2}$.

P: Bueno, entonces ahí finalmente que fue lo que hicimos, obtener qué clase de números.

Números racionales (en coro).

P: Y que se puede representar como…

Con símbolos (en coro).

P: Cuales símbolos.

Números fraccionarios, razones (coro).

P: Y cuando decimos, por ejemplo ya que me están hablando de proporciones, ¿cuándo tenemos una proporción?

Grupo 1: Con el doble.

P: El doble de…

Grupo 1: De la unidad de medida.

P: Doble de la unidad de medida pero como lo haríamos allá, díganme un ejemplo aquí.

Grupo 1: La tira azul es el doble de la roja, ahí hay como una proporción.

P: Que más podemos decir.

La tira amarilla es el doble de la tira azul (coro).

P: Entonces ahí estamos hablando de…

Grupo 1: Proporciones. Y cuando estamos hablando de una fracción entonces, por ejemplo, cuando hablamos de proporciones. Es como lo mismo.

P: ¿Seguro qué es lo mismo?

Grupo 1: Porque por decir si la tira amarilla es el doble de la azul ahí sacamos $\frac{1}{2}$

P: Y pero de donde vienen esas fracciones.

De una unidad de medida (coro).

De una comparación (coro).

P: Comparación de qué.

De dos magnitudes (coro).

P: Y en este caso cuales son las magnitudes.

Las tiras y el objeto (coro).

P: Y las tiras las están representando en…

Centímetros y milímetros (al unísono).

P: Ah bueno, ¿entonces finalmente para tener un numero racional que se hace o que se hizo?

Se comparó (al unísono).

P: Qué comparó.

Las tiras (al unísono).

P: En general, ya si no le diéramos las tiras por ejemplo que se hace para generar un numero racional.

Comparar magnitudes (al unísono).

P: ¿Y qué pasa cuando comparo las magnitudes?

Un resultado por el cociente (al unísono).

P: Como así no entiendo, explíquenme esa parte.

El resultado del cociente (al unísono).

P: ¿De quién?

De las dos magnitudes (al unísono).

P: Entonces al final, porque los veo dudando mucho.

P: ¿Cómo se obtiene un número racional?

De un resultado del cociente de las dos magnitudes.

P: O sea finalmente ¿qué un racional?

Una cantidad (al unísono).

P: Una cantidad que resulta de…

Del resultado del cociente de dos magnitudes (al unísono).

P: ¿Y siempre puedo decir eso?

Si (al unísono).

P: Y entonces ese resultado de magnitudes podemos obtener, díganme cualquier número racional, díganme un numero racional.

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$.

Otro.

5, 2.

1 a 2.

$\frac{1}{2}$.

P: No lo necesito así, ¿cuándo midieron ustedes que le dio la medida del objeto?

16,1 cm.

P: A entonces díganme más números racionales.

15.

P: Me estás diciendo el mismo. Otros números racionales.

14, 2, 25, 3.

30,5

P: ¿Bueno muy bien y que más?

-30, 5.

P: ¿Muy bien y que más?

P: ¿Dónde podríamos encontrar esos números racionales?

En una comparación (al unísono).

P: ¿De qué?

De dos magnitudes (al unísono).

P: ¿Y entonces en la calle cómo comparo yo esas dos magnitudes, no se o en la casa como comparo esas dos magnitudes?

Con dos o más objetos.

P: pero que los usen a diario.

Por ejemplo para estudiar necesitamos lapiceros, cuadernos.

P: ¿y qué pasa con esos lapiceros y cuadernos, que pasa con eso?

Para escribir, son magnitudes que el lapicero necesitamos para escribir en un cuaderno.

Y donde más podríamos ubicar esos números racionales.

En la casa.

P: en donde, ¿cómo así que en la casa?

Por ejemplo cuando uno se está bañando, por cada 5 minutos se gasta 3 litros de agua.

P: Muy bien, en otro, otro más cotidiano.

Haciendo el arroz.

P: Mas cotidiano, ustedes no hacen arroz.

Organizando la casa, los cajones donde organizamos la ropa.

P: ¿Cómo? No entiendo esa parte.

Por cada 5 min que usted va a organizando, por cada 5 Blue Jean hay 10 blusas, cuando por ejemplo mis papás le echan gasolina al carro.

P: ¿Bueno y como seria ahí?

Por galones.

P: ¿cómo sería?

Por ejemplo si el carro necesita 10 galones y solamente venden la mitad de a 5 galones entonces el compra 2 galones.

P: No entiendo ahí no entiendo nada.

Por decir profe si mi papá le va a echar 10 galones de gasolina y nada más venden la mitad o sea 5, o sea el compraría 5 y 5 mitad para ajustar los 10 galones.

P: No es muy entendible, pero bueno, y ¿en la institución como lo utilizan a diario? Esos números racionales.

En los descansos.

P: ¿Cómo?

Por ejemplo para comprar necesitamos plata.

P: Y entonces, pero ahí no me ha dicho nada, que pasa con la plata.

Si usted tiene 1000 pesos le puede alcanzar a una empanada con gaseosa o sea comprar dos productos alimenticios.

P: Puede ser pero…

Se puede gastar la mitad de los 1000.

O compartiendo con los otros compañeros.

P: Y que compartiría con sus compañeros.

Lo que uno compra en la tienda.

P: Entonces usted que…

Por ejemplo uno compra una empanada y se puede partir y uno puede compartir con el otro compañero.

Por ejemplo si son dos y nada más se compra una empanada se parte a la mitad.

P: ¿Y si no es a la mitad entonces?

Si hay más compañeros se puede partir en 4.

P: No, no pero venga si yo no la parto en la mitad, ¿necesariamente tiene que ser en la mitad?

No.

P: A bueno, entonces…

Podría ser la parte de una empanada, una parte, ¼.

P: ¿Dónde más aquí en la institución?

En la fotocopiadora.

P: ¿Cómo que en la fotocopiadora? no entiendo.

Si por ejemplo uno tiene una hoja de block y necesita 2, la puede partir a la mitad.

P: ¿Y si necesita dos como la va a partir a la mitad?

Le decimos a un compañero que comparta con nosotros.

Si necesita dos pedazos de hoja de block, ahí si lo parte a la mitad.

ENTREVISTA A ESTUDIANTES

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: LA OBJETIVACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL A PARTIR DEL PROCESO DE MEDICIÓN

DERROTERO

Fecha de la entrevista: 10/01/2012

Nombre del entrevistado: Daniela

Institución Educativa Andrés Bello

Grado Escolar: 7º

Edad: 12 años

Investigador: José Wilde Cisneros

Sobre el número racional

1. Recuerdas durante el desarrollo de las actividades ¿qué conceptos matemáticos se abordaron en la clase de matemáticas?

   La razón, la fracción los números racionales, la medición.

2. ¿Cómo aplicas la medición, la razón, la fracción y el número racional? Menciona algunos ejemplos.

   La medición la caracterizo más con los alimentos cuando se está haciendo el arroz porque una taza de arroz por dos tazas de agua. La razón es la comparación entre dos magnitudes. La fracción es un símbolo y el número racional sale de la comparación de dos magnitudes. Lo aplicaría comparando dos objetos me daría la razón y el número racional como cociente.

3. ¿Cómo evidencias que durante el proceso de desarrollo de las actividades te apropiaste del número racional?

Bueno, eso fue complejo porque al comienzo el profesor nos daba el taller nos explicaba poco y nosotros hacíamos el resto, así nos fuimos apropiando del número racional. También porque compramos una torta y somos 5 y de esos 5 pedazos te comes uno, representa un quinto y quedan 4 quintos. Cuando medimos a Manuela y a Darwin utilizamos cintas y se compara las cintas para obtener cada una de las estaturas. También cuando medimos con el metro.

Sobre las actividades desarrolladas en el proyecto

4. De las actividades que se desarrollaron en el aula de clase, ¿cuáles recuerdas más y por qué?

Bueno la que yo recuerdo más fue la de las bicicletas de carretera y montaña, porque fue más compleja para hallarle la razón y el número racional porque era entre los precios y el tiempo y uno más se esforzaba y uno quería saber el resultado.

5. Si por ejemplo, te dijéramos que debes explicarle a otros compañeros que es un número racional, ¿qué actividades propondría?, ¿harías las mismas que hiciste durante el proyecto, las cambiarías?

Combinaría las que hicimos con otras nuevas, porque es bueno tener nuevas ideas, por ejemplo usando lo que vimos de regla de tres cuando una manguera gasta cierta cantidad de agua en cierto tiempo y qué pasaría si se tienen dos mangueras para la misma cantidad de agua.

Sobre las interrelaciones en el aula de clase

6. ¿Cómo te sentiste trabajando en equipo?

   Muy bien porque los que entendían le explicaba a los otros, pero si tú estás sólo ¿quién te va a explicar?

7. ¿Estar interactuando con otros compañeros favoreció tu aprendizaje y apropiación de los conceptos abordados?

   Sí, porque teníamos varios puntos de vista que al final lo discutíamos para obtener el número racional.

8. ¿Cuál fue el papel del profesor durante las actividades del proyecto?

   Él nos entregaba las actividades nos explicaba cómo resolverlas, si no habíamos terminado la actividad la dejábamos para el próximo encuentro y si las terminábamos él nos ayudaba para que nosotros interactuáramos con el equipo para tener claro el concepto de fracción, de razón y nosotros producir el número racional.

9. ¿Crees que el trabajo con esta clase de actividades, genera otro tipo de relaciones (ambiente) en el aula de clase, entre los estudiantes, el profesor y las matemáticas?

   Si porque hay parte práctica y parte escrita y fue como hablar con el profesor de las matemáticas, no cómo el profesor lo escribió y lo dictó y yo me lo tengo que aprender, no... . Es como yo me lo quiero aprender por mí misma con mis compañeros, es un trabajo en equipo que además del el profesor y tú están otros compañeros que te pueden aportar más.

ENTREVISTA A ESTUDIANTES

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: LA OBJETIVACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL A PARTIR DEL PROCESO DE MEDICIÓN

DERROTERO

Fecha de la entrevista: 10/01/2012

Nombre del entrevistado: Katherine

Institución Educativa Andrés Bello

Grado Escolar: 7º

Edad: 12 años.

Investigador: José Wilde Cisneros

Sobre el número racional

1. Recuerdas durante el desarrollo de las actividades ¿qué conceptos matemáticos se abordaron en la clase de matemáticas?

   Profe utilizamos las razones las proporciones las magnitudes las formas de medida.

2. ¿Cómo aplicas la medición, la razón, la fracción y el número racional? Menciona algunos ejemplos.

   Profe en la calle cuando vamos a llenar un carro por galones, lo que necesita un carro, también el reparto de colombina, que ese tema lo trabajamos, las colombinas que le corresponden a los compañeros, las que sobran las que se pueden dividir, la relación entre el agua y la cantidad de arroz, los kilómetros que recorre un auto en un tiempo determinado.

3. ¿Cómo evidencias que durante el proceso de desarrollo de las actividades te apropiaste del número racional?

   Cuando compramos en el colegio, una razón como cuatro sobre dos, dos mil pesos para cuatro productos.

Sobre las actividades desarrolladas en el proyecto

4. De las actividades que se desarrollaron en el aula de clase, ¿cuáles recuerdas más y por qué?

   Cuando medimos a Darwin y a Manuela porque fue entre nosotros mismos y utilizamos bien los recursos que teníamos para medir a los compañeros. Vemos cómo nace el número racional cuando se divide la unidad en unidades más pequeñas.

5. Si por ejemplo, te dijéramos que debes explicarle a otros compañeros que es un número racional, ¿qué actividades propondría?, ¿harías las mismas que hiciste durante el proyecto, las cambiarías?

   Profe relacionaría más actividades como también las que usted nos ha explicado. Metería más de lo que he aprendido. Hablaría del tiempo que duran los obreros realizando una obra por ejemplo.

Sobre las interrelaciones en el aula de clase

6. ¿Cómo te sentiste trabajando en equipo?

   Me sentí bien porque estuve experimentando con personas que no había hablado mucho.

7. ¿Estar interactuando con otros compañeros favoreció tu aprendizaje y apropiación de los conceptos abordados?

   Si porque todos aprendimos de todos.

8. ¿Cuál fue el papel del profesor durante las actividades del proyecto?

   Explicarnos que debíamos realizar mientras hacíamos las actividades y de mediador.

9. Crees que el trabajo con esta clase de actividades, genera otro tipo de relaciones (ambiente) en el aula de clase, entre los estudiantes, el profesor y las matemáticas?

   Profe genera un mejor ambiente entre los compañeros, se aporta para que todos aprendamos cosas que no sabemos.