MÓDULO DE APRENDIZAJE PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

SANDRA MILENA ZAPATA

EDISON SUCERQUIA V.

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

JUNIO DE 2009

MÓDULO DE APRENDIZAJE PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Trabajo de investigación enmarcado en el proyecto "Las fases de aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia", CODI ACTA 421 CÓDIGO E01106.

SANDRA MILENA ZAPATA

EDISON SUCERQUIA V.

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemáticas.

Asesor

Ph. D. CARLOS MARIO JARAMILLO L.

Profesor Departamento de Matemáticas

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

JUNIO DE 2009

"Educar es despertar el espíritu de innovación"

A nuestras familias...

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Agradecimientos

Este trabajo de investigación representa un gran logro en nuestra formación profesional y académica, durante todo el proceso fueron muchas las personas que nos acompañaron brindandonos su apoyo, asesoría y conocimiento para el alcance de esta meta, a todos ellos les expresamos un agradecimiento muy especial por tal hecho.

En especial, queremos manifestar mucha gratitud para nuestro asesor, maestro y compañero el doctor Carlos Mario Jaramillo López, quien con su invaluable respaldo, dedicación, constancia y compromiso, nos acompañó y orientó en este camino de la investigación en educación matemática, para lograr la culminación de este estudio.

Queremos resaltar el acompañamiento de los maestros del grupo de investigación "Educación matemática e Historia (UdeA-EAFIT)" en especial a los Doctores Pedro Pérez Carreras y Pedro Vicente Esteban, a René Alejandro Londoño, Leonardo Ceballos, Flor María Jurado, Edison Darío Vasco y Jhonny Villa; ya que en múltiples ocaciones, estuvieron dispuestos a escucharnos, orientarnos y realizar observaciones a nuestro trabajo.

Agradecemos a los rectores, coordinadores, docentes y estudiantes de las instituciones educativas: Camilo Torres y Pedro Justo Berrio quienes nos permitieron el desarrollo de este trabajo en sus espacios.

Finalmente, queremos reconocer el acompañamiento de nuestras familias, ya que sin su apoyo y comprensión, no hubieramos logrado culminar esta investigación.

CONTENIDO

Capítulo 1

Planteamiento y justificación del problema

1.1. Introducción

El presente trabajo propone el diseño de módulos de instrucción (módulo de aprendizaje) en el marco de las fases del modelo educativo de van Hiele, los cuales son en sí mismos una herramienta metodológica, que le permitirá a los estudiantes progresar en sus niveles de razonamiento. Dicho modelo fue diseñado para lograr una mayor comprensión de los conceptos básicos de la geometría, pero en la actualidad y gracias a las investigaciones que se han realizado en lo referente a conceptos del análisis matemático, se ha comprobado que es posible extender la aplicación del modelo, más aún, cuando los conceptos poseen una componente visual geométrica (ver apartado 1.13).

Según van Hiele (1986), el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones. Propiciar el progreso del razonamiento matemático de un estudiante es función de las fases de aprendizaje, en las cuales la instrucción juega un papel determinante, ésta se puede dar mediante el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases, que contengan acciones concretas que pongan de manifiesto la red de relaciones que el alumno posee en su estructura mental, dado esto, se puede afirmar que el papel de la instrucción en las fases de aprendizaje es desarrollar propuestas que motiven a un estudiante a crear y fortalecer su red de relaciones en conceptos matemáticos y de la geometría y, así lograr mejorar su nivel de razonamiento.

En la actualidad, existen pocos estudios enmarcados en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, cuyo fin sea el mejoramiento del nivel de razonamiento de los estudiantes, frente a conceptos de análisis matemático. Dada esta necesidad es pertinente pensar cómo conseguir que los estudiantes logren un nivel de razonamiento avanzado, específicamente frente al concepto de convergencia de una serie infinita. Debido a que el paso de un nivel de razonamiento al siguiente es posible mediante las fases de aprendizaje, es necesario diseñar de manera cuidadosa y eficiente, un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje) que contenga experiencias de aprendizaje enmarcadas en dichas fases, los cuales faciliten el progreso en los niveles de razonamiento y ayuden a los estudiantes a construir redes de relaciones, además que den cuenta del grado de apropiación del concepto abordado y de la comprensión de sus propiedades.

1.2. Antecedentes del problema de investigación

Determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes de diferentes grados en cuanto a conceptos matemáticos y de geometría, ha sido un tema importante en los estudios e investigaciones realizadas en la última década por docentes de matemáticas. El modelo educativo de van Hiele describe de manera precisa y adecuada la evolución en este proceso, sin embargo, no abundan estudios que propongan el diseño de actividades para el paso de un nivel de razonamiento al siguiente, y prescriban en cuanto a conceptos del análisis matemático avanzado.

El presente estudio se basa en uno de los resultados planteado por la tesis de maestría titulada "Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas" Jurado y Londoño (2005), dicho trabajo, en el apartado de las conclusiones, menciona la dificultad que presentan los estudiantes en el progreso del nivel de razonamiento II al III, frente al concepto de convergencia de una serie infinita.

La mencionada tesis de maestría, de un lado propone una entrevista de carácter socrático con la que se busca identificar cómo razonan los estudiantes frente al concepto: suma de infinitos términos positivos, bajo áreas de figuras planas, y por otro lado, diseñó un instrumento para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes con respecto al concepto objeto de estudio, en el marco del modelo educativo de van Hiele. Es así como este estudio, entre sus resultados aborda la dificultad que presentan los estudiantes para progresar del nivel de razonamiento II al inmediatamente superior, ya que la mayoría de la población intervenida fue clasificada en el nivel II. La clasificación de los estudiantes, de acuerdo a los resultados de la entrevista y la aplicación del test, muestra que ellos no establecen relaciones entre conceptos de manera apropiada y significativa y, la estructura mental que tienen construida acerca del concepto objeto de estudio se ve limitada por el análisis de las propiedades características de las figuras, sin lograr hacer procesos de abstracción rigurosos y formales que les permitan hacer una clasificación de las mismas. En consecuencia, un porcentaje significativo de los estudiantes no logran consolidar una red de relaciones que fortalezca la estructura mental que poseen, quedando así clasificados en un nivel II, y poniendo de manifiesto la necesidad de crear mecanismos que les permitan enriquecer dichas estructuras y así progresar en los niveles de razonamiento.

Dada la necesidad existente de crear mecanismo para que los estudiantes logren progresar de un nivel II al III, el presente trabajo de investigación pretende dar continuidad a la tesis mencionada, la cual, además de identificar niveles, busca mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes frente al concepto: "Convergencia de una serie infinita". Esto será posible gracias al paso por las fases, las cuales les permiten a los estudiantes consolidar sus redes de relaciones, mediante una ampliación y fortalecimiento de sus estructuras mentales.

Entre los aspectos más relevantes del estudio anteriormente mencionado, se destacan los procesos de razonamiento finito e infinito, el concepto de área, límite y convergencia, entre otros. Estos aspectos se ven enmarcados en la división sucesiva e indefinida de áreas de figuras planas, con la cual se manifiesta la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar procesos infinitos, cabe anotar que el concepto de infinito es comúnmente abordado como "aquello que no tiene fin", "aquello que no es finito", y desde esta concepción resulta difícil para los estudiantes comprender que una suma infinita de términos positivos, bajo ciertas condiciones, puede tener resultado finito.

Generalmente, si se le propone a un estudiante sumar indefinidamente términos positivos, la respuesta usual es un resultado infinito, reafirmando con esto la concepción errada de que una suma indefinida de términos positivos siempre da un resultado infinito. El problema radica en la forma en que los estudiantes conciben el infinito, lo que para ellos representa y lo que matemáticamente significa, ellos no cuentan con elementos para dar una explicación adecuada acerca de la idea de infinitud, su concepción primaria de infinito difiere del concepto formal matemático. No es desconocido que este concepto ha sido, a través de los tiempos, inaccesible y paradójico y que grandes matemáticos negaron su existencia por mucho tiempo, debido a las contradicciones que implicaba su estudio y respectiva formalización matemática. En los procesos de razonamiento de los estudiantes, estas contradicciones siguen presentes, aún más cuando se carece de proceso de enseñanza y aprendizaje que permita desvirtuar las concepciones erroneas construidas este concepto.

En este sentido, es importante entonces que las prácticas docentes consideren la posibilidad de ampliar la concepción usual de infinito, pues la manera como se conciben los fenómenos finitos difiere de la manera de concebir fenómenos infinitos, de ahí que un estudiante no logre adquirir elementos para comprender porque una suma infinita de términos positivos en algunos casos es infinita y en otros finita. El concepto de convergencia de una serie infinita ha sido abordada desde diferentes tópicos, el presente trabajo de investigación retoma los procesos de visualización que conllevan a la deducción de una estructura formal del concepto, dicho concepto se ve favorecido gracias a que posee una componente visual-geométrica que fortalece la comprensión de dicha estructura, en tanto se generen elementos para vincular la visualización con la abstracción requerida para su respectiva comprensión.

1.3. El problema de investigación

Los estudiantes de los últimos grados de la educación media y el primer año de universidad, presentan dificultades en el paso de el nivel de razonamiento II (análisis) al inmediatamente superior (clasificación), frente al concepto del análisis matemático, en particular "la convergencia de series infinitas".

Con este estudio, se pretende realizar aportes significativos, en lo referente al componente prescriptivo del modelo educativo y demostrar su fuerte incidencia en la comprensión de conceptos del análisis matemático.

1.4. Objetivo general

Favorecer el progreso de los estudiantes ubicados en el nivel II de razonamiento al nivel III, mediante la implementación de un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje), diseñado en el marco de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, frente al concepto de convergencia de una serie infinita vía áreas de figuras planas.

1.5. Objetivos específicos

- Diseñar un módulo de instrucción de acuerdo al guión entrevista establecido por Jurado y Londoño (2005), que contempla actividades para cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele.
- Caracterizar, mediante la aplicación del módulo de instrucción, cada uno de los descriptores de las fases, que el estudiante debe abordar para la construcción del concepto de convergencia vía la suma de áreas de figuras planas.
- Construir un test basado en el módulo de instrucción, para aplicarlo a una población amplia de estudiantes y a su vez permita la validación del mismo, para confirmar que un estudiante alcanza un avanzado nivel de razonamiento.
- Emplear los mapas conceptuales como herramienta metodológica, que evidencie la red de relaciones que un estudiante posee y su progreso en su nivel de razonamiento.

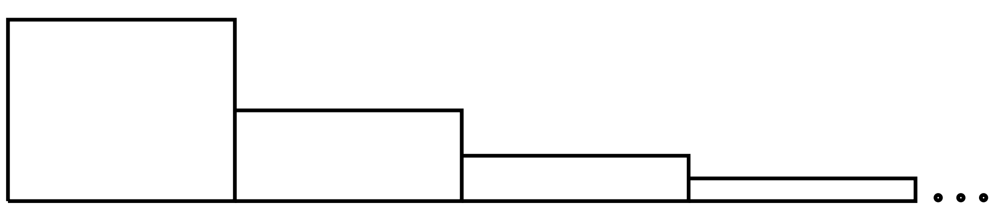
1.6. La pertinencia del modelo de van Hiele en este concepto

Según los lineamientos curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, p. 56), el modelo educativo de van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud la evolución del pensamiento matemático desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales.

El modelo educativo de van Hiele en su estructura considera una componente descriptiva, que permite identificar las dificultades manifiestas en un proceso de aprendizaje, en tanto que permite identificar cuál es el nivel de razonamiento de los estudiantes, y una componte prescriptiva, correspondiente a las fases de aprendizaje, que favorecen el progreso en los niveles, permitiendo establecer enlaces y relaciones que ayuden al estudiante avanzar de manera progresiva hacia un nivel de razonamiento avanzado, para esta componente se sugiere la creación de una serie de actividades que potencialicen el establecimiento de relaciones significativas que servirán de apoyo para conseguir tal progreso.

Dado que el modelo fue diseñado, inicialmente, para conceptos de geometría, la visualización es fundamental, es por esto que al abordar un concepto con una fuerte componente visual geométrica, como lo es el de "convergencia de series infinitas" resulta pertinente recurrir a él, pues las características del concepto objeto de estudio favorecen su implementación, permitiendo abordar el concepto sin desconocer la importancia de la visualización y además, teniendo en cuenta una herramienta fundamental, el lenguaje, que permite a los estudiantes manifestar su grado de apropiación frente a un concepto, y observar mediante éste, cuál es la red de relaciones que poseen y su correspondiente estructura mental.

El trabajo de investigación de Jurado y Londoño tiene como fuente de inspiración el problema propuesto en el libro de Cálculo y Geometría Analítica de Stein y Barcellos (1996, p. 590) este problema tiene un contenido geométrico ligado al concepto de convergencia, dado esto, fue abordado para detectar los niveles de razonamiento. El problema menciona como Oresme, alrededor del año 1360, sumó la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, usando el aspecto geométrico de una escalera sin fin como se muestra a continuación:



En esta escalera, cada escalón mide 1 unidad de ancho y duplica la altura del escalón inmediatamente a su derecha. Al observar la escalera desde su aspecto geométrico se pretende demostrar que:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$$

Es claro, que para los estudiantes no es sencillo llegar a este tipo de deducciones, más aún, cuando la dificultad para la construcción del concepto es evidente, pues son dos los aspectos a considerar, por un lado su formalización conceptual y por el otro su aspecto geométrico, ambos aspectos relacionados con el infinito como proceso y posible existencia del límite. La presente investigación centra sus esfuerzos en el aspecto geométrico, propone experiencias de aprendizaje, específicamente en el contexto geométrico de rectángulos, dispuestos como una escalera infinita decreciente, los cuales le permiten a los estudiantes determinar las condiciones suficientes y necesarias para afirmar cuándo una suma de infinitos términos tiene un resultado finito y cuándo no.

Partiendo de la componente visual geométrica elegida, el modelo de van Hiele nos brinda una estructura basada en esta componente que nos permite favorecer procesos de visualización y así lograr que los estudiantes construyan una definición cercana a la formal.

Dado que las fases de aprendizaje en el modelo educativo de van Hiele es un aspecto relevante y fundamental para lograr el progreso en los niveles de razonamiento, la labor del profesor se enmarcará en diseñar actividades que propugnen por dicho progreso. Es por esto, que el diseño de módulos de instrucción (módulos de aprendizaje) debe contener una serie de actividades cuidadosamente diseñadas que exigen una correspondencia directa con las fases de aprendizaje, para poder garantizar que los estudiantes logren un avanzado nivel de razonamiento, cuando abordan conceptos claves del análisis matemático, en el presente caso, en el concepto de convergencia.

1.7. Convergencia de series infinitas

Uno de los conceptos considerados en el campo de las matemáticas como más paradójico e inaccesible corresponde al *concepto de infinito*. A lo largo de la historia famosos matemáticos plantearon la existencia del infinito e intentaron definirlo, sin embargo, dado que la aceptación de este concepto generaba muchas contradicciones y en ocasiones atentaba contra el rigor de la ciencia, muchos matemáticos optaron por rechazarlo otros lo evadieron. Entre las dificultades para acceder al concepto de infinito, podemos considerar la imposibilidad de definirlo como un número ordinario, ya que no se puede incluir en el sistema de números reales, así como tampoco puede preservar las reglas fundamentales de la aritmética. Otra de las dificultades que perturbó fuertemente a los griegos radicó en que intentaban comprenderlo, sometiéndolo a la intuición del sentido común, que paradójicamente estaba inspirado en un mundo finito. Sin embargo, debido a que el concepto de infinito está inmerso en la mayoría de los objetos matemáticos, fue imposible evitar los procesos infinitos contenidos en algunos de ellos, que se debían analizar de manera precisa y reconocer como legítimos en los razonamientos matemáticos correspondientes.

Otro de los grandes matemáticos que rechazó la idea del infinito, debido a las contradicciones que generaba, fue Aristóteles, quien sin embargo, llegó a concebir dos tipos de infinito: el infinito potencial y el infinito actual, los cuales corresponden a las nociones que actualmente conocemos.

Dado lo anterior, cabe anotar, que en torno al infinito se han realizado muchos trabajos que permiten explicar algunas acepciones para el infinito potencial y el infinito actual. Con respecto al primero, podemos considerar la sucesión de enteros positivos:

$$1, 2, 3, \ldots, \text{n}, \ldots$$

como uno de los ejemplos más importantes de un conjunto infinito, es claro que esta sucesión no tiene fin, pues aunque n sea muy grande siempre será posible encontrar un $n + 1$, lo anterior sugiere la idea de un proceso infinito que no es acotado, y ejemplifica el concepto de infinito potencial que define Ortiz (1994) a continuación:

"La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural, siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este y así sucesivamente donde esta última expresión "así sucesivamente" encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito".

Por otra parte el infinito actual no se considera como un proceso sino como un todo, como una unidad, Aristóteles rechazaba el infinito actual por ser imposible de ser alcanzado por la experiencia.

Uno de los conceptos que es mediado por el infinito y que es objeto de estudio del presente trabajo de investigación es el de *series infinitas*. El estudio de las series infinitas surge durante el siglo XVIII como una de las áreas nuevas que se derivan del cálculo; a los precursores de esta temática, les surgen inquietudes acerca de qué se entiende por serie infinita, cómo se obtiene y si es posible aplicar a las sumas infinitas las reglas de las sumas finitas.

A partir de los trabajos de Newton parecía claro que era posible operar series infinitas de la misma forma que expresiones polinómicas finitas, es así como para Newton "el análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de las cantidades finitas y estaba regido por las mismas leyes generales". Newton justificaba estos argumentos mediante sus análisis acerca del infinito, cuya primera publicación fue en 1711, en el escrito titulado: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, en el cual expresaba que:

> "Todo lo que el análisis común (el álgebra) realiza por medio de ecuaciones de un número finito de términos (siempre que se pueda hacer) éste (nuevo análisis) puede realizar lo mismo en todos los casos, por medio de ecuaciones infinitas (series), de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle así mismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento en éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni concebir todos los términos de esas ecuaciones como para conocer exactamente de ellas las cantidades que deseamos".

En la actualidad podemos apreciar que no necesariamente los razonamientos empleados para explicar el comportamiento de lo finito se puede extender a situaciones mediadas por el infinito, como es el caso de la convergencia de series infinitas. Una muestra de ello es que la suma de finitos términos es asociativa y conmutativa y sin embargo una suma infinita no tiene porque serlo. Los errores cometidos en el tratamiento de las series infinitas y las conclusiones incorrectas llevaron pronto a los analistas a comprender la necesidad de clarificar el concepto de convergencia.

1.8. Series infinitas

Antes de estudiar de manera formal el concepto de serie es necesario definir una sucesión, que comúnmente puede ser reconocida como una colección de objetos o sucesos ordenados de modo que se identifique en ella un primer elemento, un segundo elemento, y así sucesivamente. De manera formal, una sucesión se define como:

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Los valores funcionales $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n \ldots$ se llaman términos de la sucesión.

Es posible estudiar el límite de una sucesión conforme n se incrementa indefinidamente o tiende a infinito.

Por ejemplo, la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = \frac{1}{n}$,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \ (1)$$

tiene límite 0 conforme aumenta n, es decir:

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty \text{ (2)}$$

Tratemos de establecer exactamente lo que se quiere decir con esto: conforme nos alejamos cada vez más en la sucesión, los términos se hacen cada vez más pequeños; después del centésimo término todos los términos son menor que $\frac{1}{100}$, después del milésimo término todos los términos son menores que $\frac{1}{1000}$ y así sucesivamente. Ninguno de los términos es realmente igual a 0. Sin embargo, si se avanza lo suficientemente lejos en la sucesión (1), se puede asegurar que cada uno de sus términos diferirá de cero en tan poco como se quiera.

El único problema con esta explicación es que no queda completamente claro: ¿Qué tan lejos es "suficientemente lejos", y qué tan poco es "tan poco como se quiera"? Si se puede asignar significado preciso a estas frases entonces se podrá dar un significado preciso a la relación de límite (2).

Una interpretación geométrica puede contribuir a aclarar la situación. Si se representan los términos de la sucesión (1) con los puntos correspondientes en la recta numérica, observamos que aquéllos se aglomeran alrededor punto O. Tómese un intervalo I en la recta numérica con centro el punto O y longitud total 2, de manera que el intervalo se extienda una distancia a cada lado del punto O. Si se escoge $\varepsilon = 10$, entonces, por supuesto todos los términos $a_n = \frac{1}{n}$ de la sucesión estarán dentro del intervalo I. Si se escoge $\varepsilon = \frac{1}{10}$, entonces los primeros términos de la sucesión quedarán fuera de I, pero todos los términos a partir de a_{11}:

$$\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \ldots,$$

quedarán dentro de I. Incluso si se escoge $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, sólo los primeros mil términos de la sucesión quedarán fuera de I, mientras que a partir del término a 1001, toda la infinidad de términos quedará dentro de I. Claramente, este razonamiento funciona para cualquier número positivo ε: tan pronto como se escoge un número positivo ε, no importa qué tan pequeño sea, podemos entonces encontrar un entero N tan grande que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

de lo cual se sigue que los términos a_n de una sucesión para los que $n \geq N$ quedarán dentro de I, y sólo el número finito de términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n-1}$ pueden quedar fuera.

Resumiendo: Sea ε cualquier número positivo; entonces podemos encontrar un entero N tal que todos los términos a_n de la sucesión (1) para los cuales $n \geq N$ quedarán dentro del intervalo I de longitud total 2ε y con centro en el punto 0. Este es el significado preciso de la relación de límite (2). El hecho de que una sucesión a_n tiene el límite a se expresa simbólicamente escribiendo:

$$\text{lím}\, a_n = a \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

O simplemente,

$$a_n \longrightarrow a \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

La definición de convergencia de una sucesión a_n al número a puede formularse de manera más concisa como sigue: La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ tiene límite a cuando n tiende a infinito, si corresponde a cualquier número positivo ε sin importar qué tan pequeño sea, puede encontrarse un entero N (que depende de ε) tal que $|a - a_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Hasta ahora, se han estudiado las sucesiones y la noción de convergencia para éstas; una importante aplicación de las sucesiones permite introducir la definición de serie como la suma de todos los términos de una sucesión. Así, de manera general, se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

A la expresión anterior se le llama serie infinita o simplemente serie, los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman términos de la serie.

1.9. El concepto de convergencia

Al sumar una cantidad finita de términos en una serie el resultado es una suma o un número finito, pero ¿qué sucede si se intenta sumar una cantidad infinita de términos? ¿En realidad tiene sentido hablar de sumar un número infinito de términos? Durante mucho tiempo, los matemáticos afirmaron que este concepto era ridículo.

Los anteriores interrogantes se remontan a la época de Newton, quien reconocía la necesidad de comprobar la convergencia de una serie, él era consciente de la importancia de esto pero no tenía una noción precisa del concepto.

Para Cauchy no era válido afirmar que lo que era cierto para las cantidades finitas también lo era para las infinitas, en consecuencia planta la necesidad de distinguir entre las series que tenían suma y las que no, es decir, series convergentes y series divergentes.

Es así como el nombre de Cauchy aparece hoy relacionado con un gran número de teoremas sobre series, debido a que, a pesar de los esfuerzos de Gauss y de Abel, la conciencia de los matemáticos se vio espoleada principalmente por Cauchy en lo que se refiere a la necesidad de vigilar la convergencia de las series infinitas. Después de definir una serie convergente como la que verifica la condición de que, a valores crecientes de n, la suma S_n de los n primeros términos tiende a un límite S, llamado suma de la serie, Cauchy demuestra que una condición necesaria suficiente (e intrínseca a la serie misma) para que una serie converja, es la de que, a cada valor de p, la diferencia entre S_n y S_{n+p} p tienda hacia cero según crece n indefinidamente. Esta condición “intrínseca”, en la que no aparece la posible suma la serie, se conoce con el nombre de criterio de Cauchy. Retomamos entonces el interrogante que se ha venido abordando a lo largo del capitulo ¿Tiene sentido hablar de la suma de una cantidad infinita de términos?, observemos lo que ocurre cuando intentamos calcular la suma de la serie:

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots$$

Al comenzar a sumar los términos, se observa que dicha suma crece tanto como n aumenta, siendo imposible determinar un valor para esta suma.

Pero existen otras series para las cuales es posible encontrar el valor de la suma de sus infinitos términos, observemos el comportamiento de la siguiente serie:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Mediante el siguiente análisis se puede observar que a medida que se sumen más términos, más se aproxima la suma de dichos términos a 1.

Número de términos n	Suma de los primeros n términos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

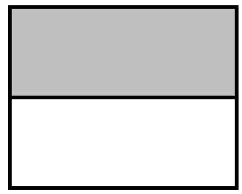
Así, al sumar suficientes términos de la serie, se pueden aproximar las sumas parciales a 1 tanto como se quieran, en consecuencia será razonable pensar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = 1$$

La determinación de la convergencia de la anterior serie se puede visualizar mediante procesos de divisiones sucesivas, dado que esta serie posee una componente geométrica representada mediante áreas de figuras planas. A continuación se presenta para esta serie un mecanismo visual-geométrico, que luego se generalizará.

Dado el siguiente rectángulo:

Si sombreamos la mitad de su área obtenemos que:



La región sombreada es la mitad del área del rectángulo original, y es también equivalente al área total del rectángulo menos el área sin sombrear, es decir, el área sombreada es:

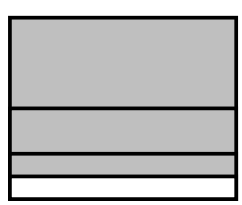
$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Si repetimos este proceso en la región que ha quedado sin sombrear, obtenemos una figura como la siguiente:

Donde la región sombreada se podrá representar:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4} \text{ o también } \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{2^2}$$

Si continuamos con este proceso, una vez más, obtendríamos una figura como esta:



Para la cual la región sombreada se podrá representar así:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8} \text{ o también } \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=1-\frac{1}{2^3}$$

Si continuamos este proceso de manera indefinida, observamos que para n particiones la expresión correspondiente será:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

Además si n, tiende a ser infinito, entonces, de acuerdo con la visualización se podrá afirmar que la suma de las infinitas áreas es igual al área del rectángulo, es decir 1, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{2^n}=1$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

Dada una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$, se denotará mediante el símbolo S_n a su n-ésima suma parcial:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ es convergente y si existe el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se llama convergente y se escribe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

El número S se denomina suma de la serie. Si fuera otro el caso, entonces la serie sería divergente.

1.10. La serie geométrica

Un ejemplo importante de series infinitas, es la serie geométrica, en la que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicando por la razón común r.

Definición: La serie dada por $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots, a \neq 0$, se llama serie geométrica de razón r.

Consideremos el caso en el que $r = 1$.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

Entonces las sumas parciales $S_n = a + a + a + \ldots + a = na$, tiende a ser infinito porque $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, luego la serie es divergente en este caso.

Si $r \neq \pm 1$, entonces

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

Multiplicando por r obtenemos que:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

En consecuencia, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$, por lo que la n-ésima suma parcial es:

$$S_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n)$$

Ahora bien, si $0 < |r| < 1$, se sigue que $r^n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, luego

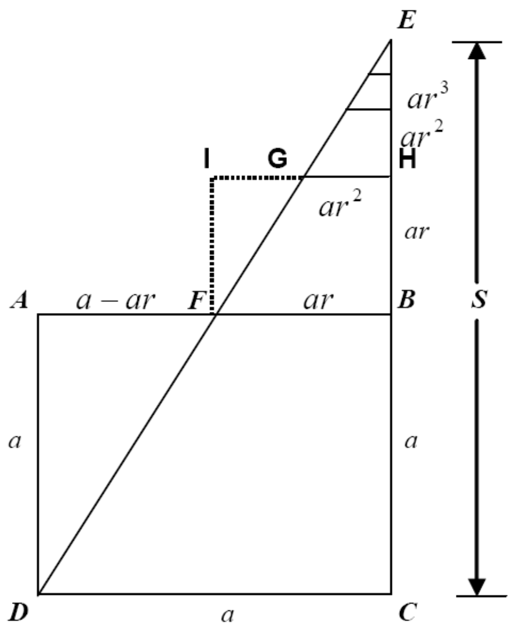
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r}(1-r^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r}(\lim_{n\to\infty}(1-r^n)) = \frac{a}{1-r}$$

Lo anterior significa que la serie converge y que su suma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad \text{si} \qquad |r| < 1$$

1.10.1. Demostración alternativa (Visual geométrica)

Otra forma de demostrar el teorema es utilizando la siguiente figura:



Ésta consta del cuadrado ABCD de lado a y del triángulo rectángulo CDE cuya base también mide a (Por supuesto recto en C). La hipotenusa $\overline{DE}$ del triángulo corta al lado $\overline{AB}$ del cuadrado en F de forma tal que diste ar unidades del vértice B y a-ar unidades del vértice A, de acuerdo a la razón elegida. Es decir, si se quiere probar la convergencia para la serie de razón $\frac{1}{2}$, pues se elegirá $r=\frac{1}{2}$ y el punto de corte F estará a $\frac{a}{2}$ unidades del vértice B y a $\frac{a}{2}$ unidades del vértice A. Así mismo, si se quiere probar la convergencia para la serie de razón $\frac{1}{3}$, pues se elegirá $r=\frac{1}{3}$ y el punto de corte F estará a $\frac{a}{3}$ unidades del vértice B y a $\frac{2a}{3}$ unidades del vértice A, y así sucesivamente. Pero nuestro propósito es probar la convergencia de la serie geométrica para cualquier razón r, tal que $0<|r|<1$. Luego, el segmento $\overline{FB}$ es la base del triángulo FBE, el cual tiene como longitud ar.

En este nuevo triángulo, trazamos el segmento $\overline{GH}$ paralelo al segmento $\overline{FB}$ de tal forma que estén a ar unidades entre sí. Se puede probar que el segmento $\overline{GH}$ tendrá como medida ar^2 unidades, haciendo una semejanza entre los triángulos AFD y IGF. Si se construye un nuevo segmento paralelo a $\overline{GH}$ y a ar^2 unidades entre sí, vemos que medirá ar^3 unidades. Si se hace este proceso sucesivamente, el lado $\overline{EC}$ medirá

$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$. Por último, la semejanza entre los triángulos AFD y CDE producirá la igualdad $\dfrac{S}{a} = \dfrac{a}{a - ar}$ se deduce que $S = \dfrac{a}{1-r}$, que era lo que se quería demostrar.

En conclusión, la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots, \text{ con } a \neq 0$$

Converge si $0 < |r| < 1$, y su suma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \qquad \text{sí} \qquad 0 < |r| < 1$$

Y diverge si $|r| \geq 1$.

1.11. Nicolás Oresme

Nicolás de Oresme nació en 1325 y falleció en 1382. Fue un matemático francés que ejerció como maestro en el Colegio de Navarra y fue obispo en Lisieux (nombrado en 1377), dejó una extensa obra científica sobre matemáticas y astronomía y llevó a cabo numerosas traducciones críticas de las obras de Aristóteles. Aplicó el cálculo de proporciones y la geometría al estudio del movimiento y, en cosmología, rebatió los argumentos aristotélicos en contra de la posibilidad de rotación de la tierra sobre su eje.

Este singular escolástico y teólogo de la edad media fue famoso por la genialidad y la modernidad de sus gustos científicos y culturales. Cultivador de la "geometría especulativa" en el Tratado de la latitud de las formas, en el algoritmo de las proporciones, en el De difformitate quantitatum (1370) y en otros trabajos todavía inéditos, anticipó muchos aspectos de la matemática moderna, como la representación analítica de las variaciones intensivas mediante el método de las coordenadas, el tratado de los irracionales mediante potencias con exponente fraccionario y el espacio cuatridimensional. Como físico, consideró posible el movimiento diurno de la tierra. Oresme también contribuyó al estudio de las series, y a él se le debe la hermosa demostración de la divergencia de la serie armónica; Oresme demostró de manera inteligible y sencilla a través de procedimientos gráficos que la serie armónica es divergente, "su demostración es la primera de este tipo evidentemente en toda la historia de la matemática".

1.12. La serie armónica

La serie armónica está dada por la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$, donde los términos de esta serie son los recíprocos de los números naturales.

En la siguiente tabla se analiza el comportamiento de la serie armónica y se puede observar que a medida que se suman más términos no es posible conjeturar un resultado para dicha suma. La serie armónica no sólo diverge, sino que lo hace muy lentamente.

Número de términos n	Suma de los primeros n términos $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
1	1,00000
2	1,50000
3	1,83333
4	2,08333
5	2,28333
6	2,45000
7	2,59286
8	2,71786
9	2,82897
10	2,92897
12	3,01988
13	3,18013
14	3,25156
15	3,31823

El incremento en el decimoquinto término es sólo de 0.06666 y el ritmo del incremento sigue disminuyendo conforme se incrementa el número de términos.

La demostración de la divergencia de la serie armónica dada por Nicolas Oresme, consistió en agrupar términos y usar desigualdades, así:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{2}{2}$

$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})$

$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$

$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16})$

$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$

De igual forma, $S_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ y $S_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ y en general $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

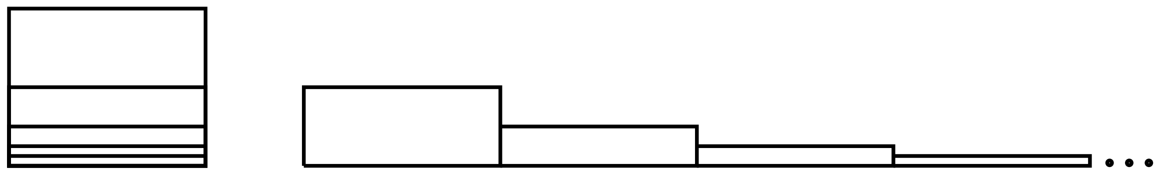
Esto demuestra que $S_{2^n} \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y entonces $\{S_{2^n}\}$ es divergente. Por tanto, la serie armónica diverge.

1.13. Los procesos de visualización y el concepto de convergencia

En el presente trabajo de investigación, se destaca la importancia de elegir series de términos positivos que puedan ser representadas mediante figuras de áreas planas, de manera particular se trabaja con rectángulos, dispuestos como escaleras; es importante aclarar que se llamará escalera a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que cada rectángulo tenga igual base y esté uno contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará escalera creciente, si se compone de infinitos rectángulos, escalera infinita creciente. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará escalera decreciente, si se compone de infinitos rectángulos, escalera infinita decreciente. Así mismo, se llamará área de una escalera a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman y la razón de una escalera será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior.

Debido a que el presente trabajo retoma el problema de Oresme, se mostrará cómo la visualización favorece la determinación de las condiciones para la convergencia de una serie infinita.

Recordemos que para un rectángulo de área 1 unidad cuadrada, dividido a la mitad de manera sucesiva, se encuentra que la suma de las infinitas áreas es igual al área del rectángulo inicial, esto es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, de manera particular dicho rectángulo tiene razón $\frac{1}{2}$ y es posible disponerlo como una escalera infinita decreciente de razón $\frac{1}{2}$, como lo indica la figura:

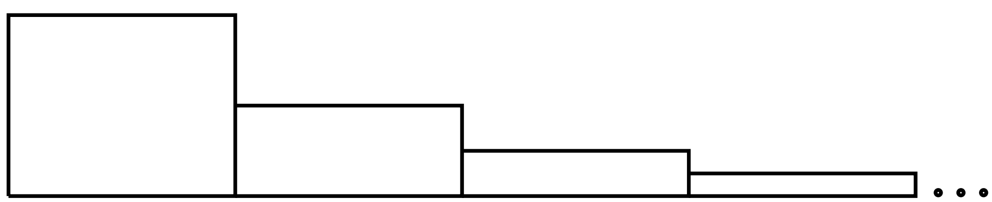


Es claro que si ambas figuras son equivalentes entonces el área de la escalera infinita decreciente también será igual a 1.

La anterior representación geométrica es un caso especial de la serie geométrica, donde $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, aquí también se puede deducir que para estos valores, la expresión $S = \frac{a}{1-r} = 1$.

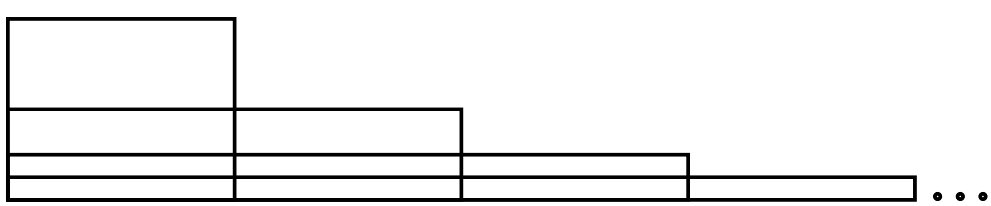
La escalera de razón $\frac{1}{2}$, ayudó a Oresme a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Oresme tomó una escalera cuyo escalón inicial tiene como área una unidad cuadrada y cada escalón tiene como base 1 y su altura duplica la altura del escalón inmediatamente a su derecha. Como se muestra a continuación:



Para esta escalera su área es igual a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$, utilizando los resultados obtenidos al estudiar la escalera de razón $\frac{1}{2}$.

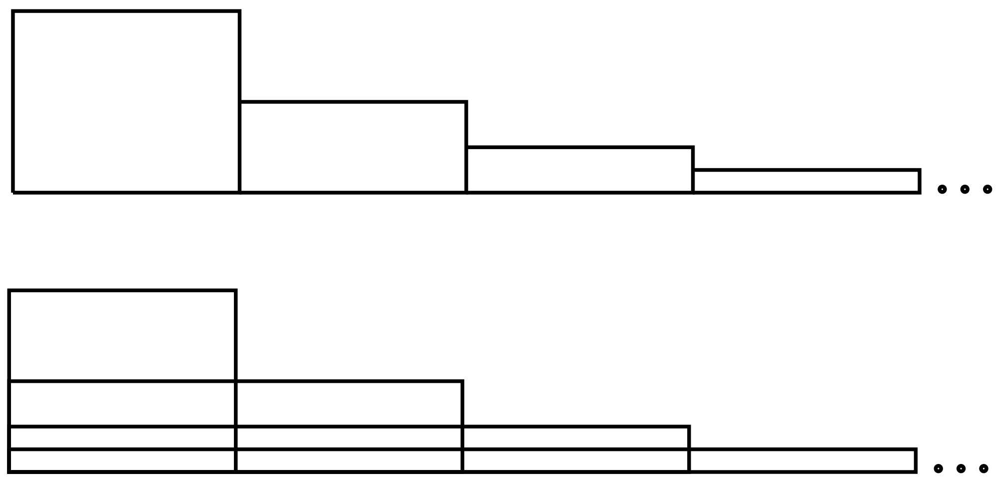
La anterior escalera también puede dividirse como se indica a continuación:



Y para este caso las sumas de sus áreas corresponden a

$$\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+4\frac{1}{2^4}+\ldots+n\frac{1}{2^n}$$

Dado que ambas representaciones son equivalentes se puede establecer que:



Lo cual implica también que las siguientes expresiones sean equivalentes:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+4\frac{1}{2^4}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Y esto a su vez implica que:

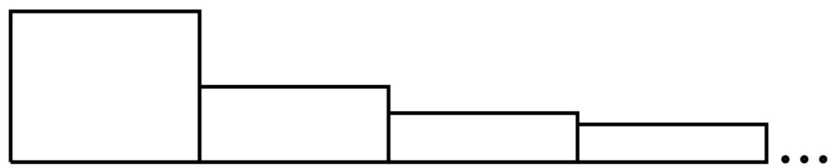
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Cabe anotar que en este mecanismo existe un concepto implícito de gran importancia, el de la razón de una serie geométrica. Así para una escalera que tenga razón menor que 1, no será posible construir una escalera infinita creciente. "Las escaleras ejemplifican la naturaleza de un proceso de razonamiento infinito con plausible resultado final finito, en lo que al concepto de área se refiere".

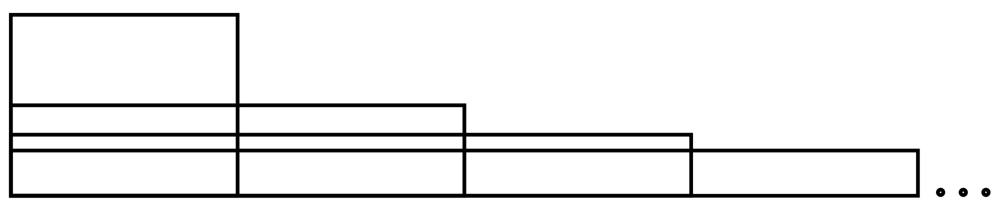
A continuación se presentará el análisis realizado por Oresme para la serie armónica, mediante la denominada escalera armónica, donde el área de esta escalera será igual a la suma de la serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

Para esta serie la escalera armónica es:



Haciendo el mismo tratamiento que se hizo con las escaleras de razón $\frac{1}{2}$, se dividirá la escalera armónica de una manera alternativa, como se indica a continuación:



Para la anterior escalera el área es:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}\dots$$

Obsérvese que de esta manera el área de la misma escalera resultaría de la sumatoria:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}\dots=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Es decir, suponiendo que el área existe, estas dos son iguales y por transitividad se obtiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

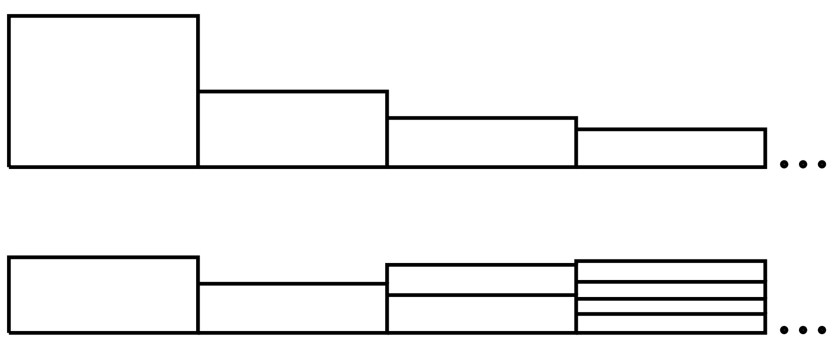
Que es lo mismo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Ahora, si suponemos que esta igualdad es correcta, entonces también sería correcta la igualdad $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, de donde se deduce que $1 = 0$, lo cual es una contradicción.

Se puede concluir entonces, que el procedimiento visual-geométrico que realiza Oresme con la escalera de razón $\frac{1}{2}$, no es correcto para la escalera armónica, pues se tendría que agregar como hipótesis que la escalera a la cual se le aplica el procedimiento tiene área.

Se puede observar que a diferencia de la escalera de razón $\frac{1}{2}$, la escalera armónica no tiene razón y será posible disponerla como una escalera infinita creciente, de manera tal que sobre el tercer rectángulo se coloque el cuarto, y sobre el quinto, el sexto, el séptimo y el octavo rectángulo (sin superponerlos) y así sucesivamente, obteniendo la siguiente figura:



Tomemos los rectángulos de la escalera armónica, tal que la suma del tercer y cuarto rectángulos sobrepasa el área del segundo rectángulo; la suma de las áreas desde el quinto rectángulo hasta el octavo sobrepasan el área de la suma de los dos anteriores y por ende la del segundo rectángulo; así mismo, la suma de las áreas de los rectángulos noveno a decimosexto sobrepasa el área de los cuatro anteriores, y así sucesivamente, esto corresponde a la visualización geométrica de la prueba que realizó Oresme para demostrar la divergencia de la serie armónica.

Cabe anotar que en este estudio, los estudiantes deberán, a lo largo de su proceso de razonamiento, determinar las condiciones para decidir cuándo una escalera tiene área y cuando no. Es decir, deberá afirmar sin vacilaciones que:

- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón, tiene área.
- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón no es posible disponerla de manera creciente.
- Toda escalera infinita que tenga área no es posible disponerla de manera creciente.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Educación matemática

El campo de la educación matemática ha inquietado profundamente tanto a expertos en el área como a pedagogos, sicólogos y sociólogos; la necesidad de lograr una mayor compresión en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como alcanzar mayor eficacia en la docencia de las matemáticas, constituyen las mayores inquietudes de los investigadores.

El campo de la investigación en educación matemática se puede clasificar en teórica y práctica. Las investigaciones teóricas centran sus esfuerzos en los procesos y capacidades de razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, obstáculos en el aprendizaje y formación o modificaciones de redes conceptuales. En cuanto a las investigaciones prácticas, Gutiérrez (1991) señala: "En este tipo de trabajos se trata de estudiar algún tema en particular de la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, analizando los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus dificultades y errores en el desarrollo de un método de enseñanza, entre otros".

El presente trabajo de investigación se encuentra enmarcado dentro de la Educación Matemática, la cual puede concebirse como un sistema social heterogéneo y complejo, que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en este sistema se distinguen dos campos:

i. La acción práctica reflexiva sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este es el campo propio del profesor y se realiza principalmente en las instituciones escolares.

ii. La Didáctica de las Matemáticas, se puede entender como una disciplina científica autónoma en la cual las matemáticas constituyen el saber que se quiere transmitir, a su vez se compone de dos áreas de investigación, a saber:

a) La investigación científica según Schoenfeld (2000), trata de entender la naturaleza del pensamiento matemático y de explicar el funcionamiento de sistemas didácticos y, en la medida de lo posible, predecir su comportamiento. Esta investigación es básica y descriptiva y sus resultados son las teorías y los modelos educativos matemáticos. Acerca de los criterios para construir teorías y modelos, véase Schoenfeld (2000, p.643).

b) La investigación aplicada a la tecnología didáctica, es un área prescriptiva y busca una mayor eficacia de la instrucción matemática, empleando los conocimientos disponibles en la elaboración de dispositivos para la acción: manuales escolares, material didáctico, diseño de currículos, módulos de instrucción, entre otros. La presente investigación se enmarca en este contexto, con la propuesta de actividades en correspondencia con las fases de van Hiele, las cuales constituyen un módulo de instrucción que permiten desarrollar y potenciar procesos de razonamiento avanzado en los estudiantes.

El objetivo principal de la investigación en educación matemática es conocer a profundidad cómo se desarrollan los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, para poder compartir con los docentes propuestas efectivas para implementar en el aula, y conseguir que los estudiantes logren un aprendizaje. Los especialistas en educación matemática, pretenden formar o instruir a sus educandos mediante las matemáticas, es decir, consideran esta ciencia, en todo o en parte, como objeto de educación para aquellos a cuya formación o desarrollo están contribuyendo. Para ellos, el análisis didáctico de los contenidos conjuga dos dimensiones igualmente importantes, a saber, la educativa y la matemática.

2.2. Teorías de aprendizaje

Los conocimientos que proporcionan una explicación general, tanto de las observaciones que se hacen de los procesos, como de los cambios de conducta de los sujetos, constituyen una teoría del aprendizaje.

Para abordar el interrogante ¿Existe una teoría que guíe el aprendizaje de las matemáticas?, es necesario remitirse al trabajo de Lee Thorndike y Frederic Skinner, exponentes del conductismo, que establece que el aprendizaje nace de la modificación de la conducta, basado en una visión estimulo - respuesta, que recompensa las buenas acciones y castiga las malas, al mismo tiempo que excluye el análisis de los procesos mentales del individuo.

La teoría de la Gestalt, afirma que: Cuando registramos nuestros pensamientos sobre nuestras sensaciones, en el primer momento no nos fijamos en los detalles pero luego los colocamos en nuestra mente, formando parte de entidades o patrones organizados y con significado (Pérez Gómez, 1992 p.41). Esta teoría hace aportes importantes al presente trabajo, pues en ella se establece que cada persona elabora en su mente sus propias estructuras con el conocimiento que va adquiriendo, y luego para resolver un problema piensa y especula comparando patrones diferentes.

El presente trabajo de investigación se enmarca en un enfoque constructivista, inspirado y protagonizado por Piaget, Ausubel y Vigostky; para los fundamentos del constructivismo son significativas las ideas surgidas del cognitivismo, en el sentido de centrar sus formulaciones en la asignación de una papel activo del sujeto en el desarrollo del conocimiento. La actividad mental y los procesos internos del pensamiento aparecen como factores intermedios entre los estímulos del medio y las respuestas, pero con una salvedad, pues no se trata sólo de respuestas reproductivas sino que implican reelaboración, reconstrucción, reinterpretación, representación y no copia.

2.2.1. El conductivismo

Una de las teorías que ha predominado en psicología durante muchas décadas es el conductismo, postulado por E. L. Thorndike, quien vinculó el aprendizaje con el comportamiento y la capacidad de adaptabilidad a las condiciones del ambiente sin mediación de la mente; en el marco de esta teoría tanto aprendizaje como comportamiento se dan mediante asociaciones que generan respuestas condicionadas por los estímulos del ambiente, sin la interferencia de procesos y representaciones mentales; de esta manera el aprendizaje se constituye en un cambio en la conducta resultado de la adquisición de conocimiento. Los siguientes enfoques se presentan dentro de las teorías conductistas según Pozo (1992):

- Conductismo metodológico: reconoce la existencia de la conciencia como algo perteneciente a la "cabeza" de las personas y por tanto no es posible que sea estudiado por la ciencia, sólo es posible el estudio de la conducta o el comportamiento.

- Conductismo radical: propone que los eventos de la conciencia privada o mente, generan conductas determinadas y por lo tanto la mente y la conciencia corresponden a los objetos de estudio de la psicología del aprendizaje, a partir de lo que es posible sólo observando el comportamiento.

- Conductismo mediacional: surge a partir de los estudios del aprendizaje en el hombre, considerando que éste es diferente al aprendizaje en los animales; diferencia dada principalmente en el concepto de mediación ya que los animales aprenden realizando asociaciones de los estímulos con las respuestas, mientras que los humanos aprenden controlando las respuestas y a partir de estímulos y respuestas simbólicas. Esta posición permitió la introducción de los procesos cognitivos humanos como la memoria y el pensamiento, siendo el conductismo mediacional la articulación histórica con las teorías de la cognición.

La corriente conductista ha sido fuertemente criticada por realizar sus experimentos en animales y transferir los resultados al área de la educación, de manera que el aprendizaje se centra en el desarrollo de destrezas que no requieren altos niveles de reflexión y que no contribuyen al desarrollo de habilidades del pensamiento y el papel del estudiante se reduce a esperar indicaciones del docente para lograr el aprendizaje, es decir, el desarrollo de actividades y habilidades no es posible si no se ha recibido instrucción.

En la actualidad el conductismo ha sido desplazado en buena medida por la psicología cognitiva, pero sigue siendo un modelo relevante para la comprensión del aprendizaje humano, sobretodo si se tiene en cuenta que entre los principios básicos del modelo conductista subyacen modelos asociativos que imperan en la psicología cognitiva. El principio de *correspondencia* asume que "todo lo que hacemos y conocemos es un fiel reflejo de la estructura del ambiente, se corresponde fielmente con la realidad. Aprender, es reproducir la estructura del mundo. Por lo tanto la instrucción se basará en presentar de la menor manera posible la realidad para que sea reproducida por el aprendiz" (Pozo, 1992 p. 56-57). El otro principio es el de equipotencialidad, que se refiere a la idea de procesos universales basados en leyes objetivas y en la tradición del positivismo lógico, donde todo aprendizaje, animal y humano, podía reducirse a unas pocas leyes objetivas y universales. Según Pozo, "Estos principios son cuestionables si precisamente analizamos los rasgos típicamente humanos de nuestro acervo cultural, el lenguaje simbólico, los deseos e intenciones, la creación artística y científica, etc., proceso que estudia el enfoque constructivista del aprendizaje".

Las ideas básicas del conductismo fueron cuestionadas por el surgimiento de aportes como la psicología genética de Piaget, las fuertes críticas de la teoría socio - histórico - cultural y en general por la psicología cognitiva.

2.2.2. El cognitivismo

En oposición a las teorías conductistas, surge la teoría del cognitivismo, como un enfoque que media entre la conducta y el conocimiento humano, a través de las representaciones que genera la mente humana y los procesos mediante los que las transforma; para este enfoque son primordiales las experiencias previas y el conocimiento construido por los sujetos, en este sentido, el aprendizaje no se da de manera directa, se presenta como un proceso en el que el individuo sufre una transformación en sus estructuras de pensamiento, de manera que se produzca un desequilibrio que conlleve a la acomodación de nuevos hechos en una nueva estructura.

En el marco del cognitivismo, el aprendizaje no se reduce a memorizar o repetir, sino más bien debe propender por desarrollar capacidades para deducir, inferir, conjeturar, descubrir, resolver, argumentar, entre otras; para las teorías cognitivas el conocimiento es una interacción entre la información que se nos presenta y la que ya se conoce, y aprender se basa en la construcción de modelos que permiten interpretar la información recibida.

Para la teoría cognitiva la enseñanza debe motivar la actividad del sujeto cognoscente de manera que éste logre integrar en su estructura mental la realidad objetiva ajena a él, de esta manera el docente debe producir conflictos o desequilibrios en las formas de pensar de sus estudiantes, frente a los objetos del conocimiento y debe generar ambientes ricos en oportunidades para que puedan vivir experiencias que les permitan comprender los sistemas con los que está interactuando.

La teoría cognitiva recibe significativos aportes que se derivan del trabajo de Piaget sobre el aprendizaje de las matemáticas en los niños, y además de ser extendidos por otros investigadores, también constituyen un punto de partida para modelos y teorías actuales, como el modelo de van Hiele, en el cual se enmarca el presente trabajo de investigación.

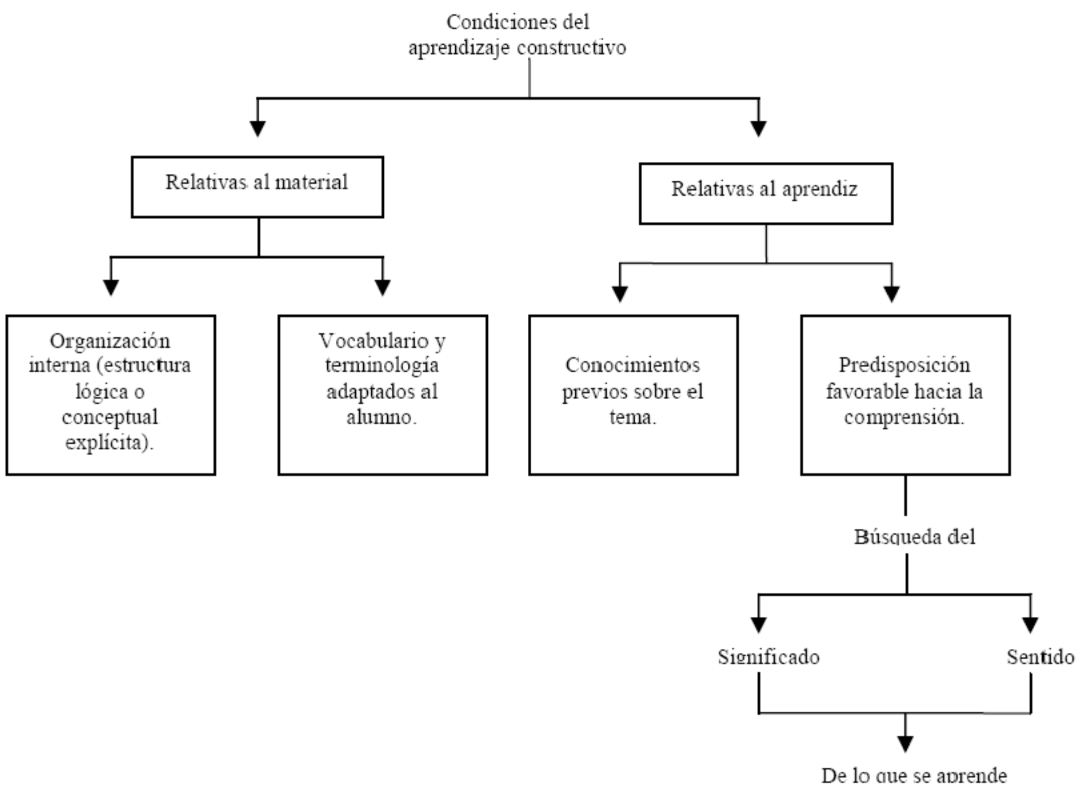
2.2.3. El constructivismo

Las teorías constructivistas del aprendizaje asumen que éste consiste básicamente en una reestructuración de los conocimientos previos, más que en la sustitución de éstos, no se trata sólo de reproducir respuestas, sino también de proponer soluciones nuevas, "No es un cambio originado en el mundo externo sino en la propia necesidad interna de reestructurar nuestros conocimientos, o de corregir sus desequilibrios" (Piaget, 1975). Se pueden argumentar varias razones para que el constructivismo se posicione como una teoría epistemológica. En primera instancia se tiene que el constructivismo se enfoca a cómo se origina y cómo se modifica el conocimiento. Además, se centra en los procesos que experimenta el sujeto, quien es el encargado de construir su propio conocimiento y no los puede recibir de otro.

Es justamente el conocimiento quien marca la diferencia entre el constructivismo y otras teorías como el empirismo y el innatismo. La diferencia con el empirismo radica en que el conocimiento no es una copia de la realidad exterior, sino que supone una elaboración por parte del sujeto. No quiere decir esto que las propiedades de la realidad no sean un determinante esencial del conocimiento. En cuanto al innatismo, la diferencia se presenta en tanto que el conocimiento no es resultado de las estructuras pre formadas, éste no puede identificarse con un proceso de externalización de algo interno.

La postura constructivista determina la concepción de conocimiento, desde una posición interaccionista en la que dicho conocimiento se considera resultado de la acción del sujeto sobre la realidad, esto implica referirse a la concepción de realidad, que en el marco del constructivismo se define como una construcción que el sujeto logra a través de los instrumentos de conocimiento que posee.

El siguiente esquema muestra las condiciones relacionadas con el aprendizaje constructivo:



Condiciones o requisitos para que se produzca un aprendizaje constructivo a partir de Ausbel, Novak y Hanesian (1978) (Tomado de Pozo, 1992)

De acuerdo con lo anterior, las siguientes condiciones diferencian claramente al constructivismo:

- El constructivismo presupone la existencia estados internos en el sujeto.

- Es una teoría del sujeto cognoscente y de cómo funciona cuando trata de explicar y actuar.
- El sujeto construye y establece representaciones que se atribuyen a la realidad.
- El constructivismo es la teoría genética que explica la génesis del conocimiento desde sus inicios.
- Tiene en cuenta los conocimientos anteriores, pues todo conocimiento se explica a partir de conocimientos anteriores.
- El sujeto tiene un papel activo en la construcción del conocimiento, ya que él provoca e interpreta la resistencia de la realidad por medio de representaciones.
- Las unidades psicológicas del funcionamiento del sujeto son los esquemas, que son el resultado de elementos comunes de un conjunto de acciones que se ejercen de forma semejante. Los esquemas son siempre esquemas de acción, puesto que supone una modificación o transformación ya sea a nivel material o mental de la realidad. Por ello se dice que la teoría constructivista no es reduccionista, puesto que el sujeto está en continua modificación para generar nuevos esquemas y conceptos. Estos últimos al relacionarse de una manera determinada forman representaciones que permanecen implícitas la mayoría de veces. Sólo algunas de ellas tienen un carácter más explícito y elaborado para eliminar las contradicciones y se constituyen como teorías. Así los esquemas se generan a partir de situaciones concretas y se generalizan a otras que son semejantes.

De acuerdo con esto, en el proceso de aprendizaje no debe presentarse desconexión entre los conocimientos, no es un cambio mecánico sino que requiere una implicación activa, que debe estar basada en la reflexión y la toma de conciencia por parte del aprendiz.

2.2.4. Aprendizaje significativo

Ausubel (2003) plantea que la estructura cognitiva de los individuos está constituida por el conjunto de ideas y conceptos que poseen acerca de un campo de conocimiento; en este sentido el proceso de aprendizaje depende de la estructura cognitiva y de la manera como ésta se relaciona con las ideas nuevas.

Ausubel resume este hecho de la siguiente manera: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia".

El aprendizaje significativo admite la adquisición de nuevos significados que a su vez, son el producto final de dicho aprendizaje; en este sentido, la aparición de nuevos significados en los estudiantes refleja la ejecución y la finalización de un proceso de aprendizaje.

La esencia del proceso del aprendizaje significativo radica en la manera como los estudiantes relacionan de una manera no arbitraria y no literal las nuevas ideas con aquello que ya sabe. Cabe anotar que el aprendizaje significativo no establece una "simple conexión" de la información nueva con la que ya existe en la estructura cognoscitiva del que aprende, debe involucrar la modificación y la evolución de la nueva información, que a su vez generará modificaciones en la estructura cognoscitiva del individuo.

De esta manera el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que el individuo logre vincularlas y relacionarlas con la estructura ya existente. Este aspecto fundamental respalda el presente estudio y describe de manera análoga cómo el estudiante avanza en las fases de van Hiele, mediante el establecimiento, fortalecimiento y mejoramiento de redes de relaciones que permiten progresar en los niveles de razonamiento.

2.3. Teorías que guían el presente trabajo de investigación

El presente trabajo se encuentra enmarcado principalmente en el modelo educativo de van Hiele, para el cual es fundamental tanto los niveles de razonamiento, que dan una explicación detallada de cómo tiene lugar la construcción del concepto en la mente del estudiante, como las fases de aprendizaje, que tienen como objetivo encaminar un conjunto de actividades mediadas por la instrucción y la construcción de redes de relaciones, para la consecución del progreso en niveles de razonamiento matemático.

A continuación se presenta brevemente el trabajo de algunos autores de teorías que comparten ideas o criterios afines con el modelo de van Hiele.

2.3.1. El trabajo de Jean Piaget

El trabajo de Jean Piaget ha constituido una de las formulaciones más consistentes y sistemáticas del constructivismo, destaca como propósito fundamental la reflexión filosófica acerca de una teoría biológica, conociendo la génesis de los procesos cognitivos, es decir, con un abordaje desde la psicología, de ahí surge la epistemología genética. La teoría de Piaget postula que la biología, la psicología y la epistemología, son tres ciencias que generan los mismos tipos de procesos, y en esta medida existe continuidad funcional entre vida y pensamiento, el desarrollo psicológico depende del biológico que a su vez depende del epistemológico.

La teoría de Piaget combate el innatismo y el empirismo, porque asumen el conocimiento como pasivo, para la primera corriente el conocimiento depende de una activación de estructuras, mientras en la segunda es una copia de la realidad; para Piaget, el conocimiento es una innovación, el sujeto tiene que crearlo, construirlo, pues no se genera a partir del sujeto o el objeto solo, es necesario interponer la acción, es en ella donde emergen los objetivos y contenidos del conocimiento. La relación sujeto - objetos implica coordinar las relaciones que surgen en la interacción.

Según Riviere (2003), "En la concepción piagetiana, los aspectos funcionales del conocimiento, su naturaleza adaptativa y organizadora, no varían a lo largo del desarrollo. Por eso Piaget habla de invariantes funcionales, para referirse a esas funciones de organización y adaptación, esta última implica, por una parte, la incorporación de los objetos de conocimiento a las estructuras de la acción del sujeto (asimilación). Por otra parte, la modificación de tales estructuras para conformarse a la naturaleza de tales objetos (acomodación). Sin asimilación no habría conocimiento. Sin la acomodación no sería posible el desarrollo de las estructuras que nos permiten conocer. Pues es eso precisamente lo que sí se desarrolla: las estructuras de las acciones (o de las operaciones) con que se transforman los objetos en la actividad de conocer".

La epistemología propuesta por Piaget se basa en la convicción de que todas las estructuras que conforman la cognición humana tienen una génesis a partir de la estructura anterior, de acuerdo con Rosas (2004), "Por medio de procesos de transformación constructiva, las estructuras más simples van siendo incorporadas en otras de orden superior. Es en este sentido que esta epistemología es llamada genética".

El trabajo de Piaget se puede enmarcar en las siguientes ideas, que retoman las directrices básicas de su trabajo:

- Es el punto de partida del constructivismo contemporáneo, aunque esto no significa que contiene todos los aspectos necesarios para ser una teoría constructivista.

- Trata de explicar los progresos que se producen en el conocimiento durante el desarrollo y cómo se generan los instrumentos para conocer.

- Se preocupa por los procesos internos que tienen lugar en el sujeto, así como también considera las condiciones externas como dadas.

- El factor social es esencial en el desarrollo, se toma lo social como constante para ocuparse de cómo el sujeto integra su experiencia para producir conocimientos.
- No es una teoría de los factores que aceleran o retrasan el desarrollo, no es una teoría de los determinantes del desarrollo, sino del desarrollo mismo.
- Para algunos estudios presenta un enfoque funcional, parte de su obra se dedica a descubrir estructuras. Esa explicación es insuficiente para dar cuenta de la actuación del sujeto.
- No excluye en absoluto los contextos, es decir, los ambientes en los que se produce el desarrollo. Que no los haya estudiado no quiere decir que no pueda hacerlo.

La teoría considera las etapas del desarrollo intelectual en relación con el periodo escolar, estas las clasifica en:

Preoperativa: En esta etapa se realizan abstracciones primarias relacionadas con experiencias concretas empíricas. La necesidad de manipular objetos reales es el requisito o condición necesaria para el aprendizaje; ésta es el punto de partida para entender algunas proposiciones simples que incluyan un concepto.

Operaciones concretas: En esta etapa aparecen conceptos secundarios o que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta, se evidencian limitaciones para referirse a conceptos, es necesario hacer uso de las ejemplificaciones.

Operaciones abstractas: Esta etapa abarca relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis, se buscan explicaciones y se establecen conclusiones. Se puede entender el significado de abstracciones verbalmente, sin necesidad de referirse a objetos particulares.

Es así como en el marco de la teoría desarrollada por Piaget, el alumno construye su propio conocimiento. Cabe anotar que el modelo educativo de van Hiele, y en general, todas las ideas relevantes que se señalarán en el presente capítulo, participan en mayor o menor medida de ese convencimiento, el estudiante es el principal protagonista de su propio conocimiento.

2.3.2. El trabajo de Benjamín Bloom

El modelo propuesto por Benjamín Bloom (1956) se centra en "la operacionalización de los objetivos educativos"; en su trabajo se resalta la importancia de elaborar especificaciones, mediante las cuales pudieran organizarse los objetivos educativos de acuerdo con su complejidad cognitiva. Bloom propone como modelo la taxonomía cognitiva, basada en la idea de que las operaciones cognitivas pueden clasificarse en seis niveles de complejidad creciente, y que cada nivel depende de la capacidad de un estudiante para desempeñarse en éste o en los precedentes. Se basa además, en el supuesto de que el estudiante debe disponer de la información necesaria, comprenderla, aplicarla, analizarla, sintetizarla y evaluarla.

La taxonomía de Bloom no se constituye en un esquema de clasificación, sino más bien un intento por ordenar jerárquicamente los procesos cognitivos, clasifica los objetivos de conducta de los estudiantes, esto es, "los caminos a través de los que los individuos actúan, piensan o sienten como resultado de su participación en alguna unidad de instrucción" (Bloom, 1956, p.12).

El trabajo de Bloom puede situarse en lo que llamamos modelos de aprendizaje jerarquizados, comenzando por lo más sencillo y finalizando con los aspectos más complejos; entre el modelo de Bloom y el de van Hiele se encuentran puntos en común en cuanto a la concepción del proceso de aprendizaje, pues se organiza de una forma jerárquica. A continuación se presenta un paralelo entre la estructura del modelo de Bloom y las fases de aprendizaje de van Hiele:

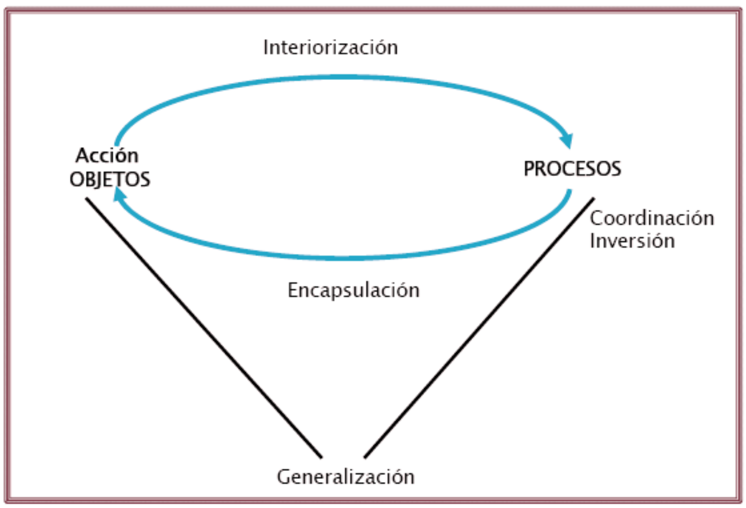
Bloom	van Hiele
Conocimiento	Información
Comprensión	Orientación dirigida
Aplicación	Explicitación
Análisis	Orientación libre
Síntesis	Integración
Evaluación	

El modelo de van Hiele permite comprender la clasificación de niveles de razonamiento y fases de aprendizaje, mientras que Bloom describe los objetivos de la conducta. Bloom hace una distinción de niveles en algunos de sus objetivos: "El análisis, como objetivo, puede ser dividido en tres tipos de niveles. En el primero, se espera que el estudiante desmenuce el material en sus partes constitutivas, para identificar o clasificar los elementos de la comunicación. En el segundo nivel, se le requiere para que establezca con más claridad las relaciones entre los elementos, y que determine sus conexiones y sus interacciones. El tercer nivel comporta el reconocimiento de principios de organización, orden y estructura, con lo que puede colocar el concepto en su lugar" (Bloom, 1956, p.145). En el trabajo de Bloom no se determinan criterios para identificar cuándo la actividad de los estudiantes está dirigida correctamente hacia la consecución de los objetivos propuestos. Mientras que el modelo de van Hiele está orientado a proporcionar el marco para el progreso hacia la consecución de esos objetivos, mediante la determinación de los niveles de razonamiento.

2.3.3. El trabajo de Ed Dubinsky

La teoría de Acción - Proceso - Objeto - Esquema (APOE), desarrollada por Dubinsky, presupone que cada individuo construye su propio conocimiento matemático a través de un proceso de abstracción reflexiva. Esta teoría, basada en Dubinsky (1996) "...comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso hacia el cual se formaron. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas".

El siguiente esquema describe la teoría de (APOE) de E. Dubinsky.



Visión de Esquema y su construcción. Tomado de Meel (2003, p. 244)

Dubinsky propone cinco tipos de construcciones para el desarrollo de conceptos matemáticos los cuales son:

- Interiorizado y convertido en rutinario.
- Resumido para considerarlo como concepto.
- Coordinado con cada uno de los siguientes procedimientos.
- Invertido para ser ejecutado en la dirección inversa.
- Generalizado siendo puesto en un contexto más extenso.

La teoría de Dubinsky adapta aspectos importantes del trabajo de Piaget acerca de la construcción de conceptos matemáticos. Así, Meel (2003) destaca que:

> "La piedra angular más importante de la comprensión es la acción (similar a los esquemas de acción de Piaget), conforme una acción se interioriza a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues vuelve una construcción interna llamada proceso (similar a las operaciones de Piaget); el logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e incluso revertir los pasos de transformación sin requerir el estimulo externo. El elemento final de la teoría de Dubinsky, es el esquema, una colección de procesos y objetos, puede ser más o menos coherente, pero el estudiante la utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o concepto observado".

En la teoría de Dubinsky se pueden encontrar las fases o etapas del aprendizaje de un concepto matemático, al igual que en las taxonomías de Bloom, en la teoría de van Hiele y en algunas otras teorías, en las que dichas fases aparecen con matices o formas distintas.

2.3.4. El trabajo de Tall y Vinner

El "concepto imagen" y el "concepto definición", son los términos introducidos por Tall y Vinner, en 1980 y utilizados para describir el estado de los conocimientos del sujeto en relación con un concepto matemático.

"Usaremos el término ***concepto imagen*** *para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. (...). Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente aparece cualquier sensación de conflicto o confusión. Por otra parte, el* ***concepto definición*** *es la fórmula con palabras usada para especificar ese concepto"* (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

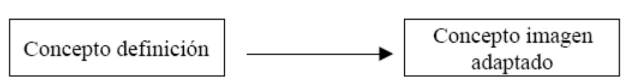
En la actualidad estos de términos son de importancia relevante en los procesos de investigación que implican el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos o en el pensamiento matemático avanzado, especialmente en el análisis matemático. Tall, (1992 p. 495-496) define:

> "El pensamiento matemático avanzado -como se evidencia por las publicaciones de las revistas de investigación- se caracteriza por dos importantes componentes: Las definiciones matemáticas precisas (incluyendo las afirmaciones de los axiomas en las teorías axiomáticas) y las deducciones lógicas

> de los teoremas basadas en ellas. La atención prioritaria de la educación matemática en los niveles superiores se dirige no sólo a iniciar el aprendizaje en el mundo del matemático profesional en los términos que el rigor requiere, sino también en proporcionar la experiencia en aquellos conceptos en los que se fundamenta. Tradicionalmente esto se ha hecho a través de una pausada introducción en los conceptos matemáticos y en el proceso de la demostración matemática en la escuela, antes de progresar a las matemáticas más formalmente organizadas y lógicamente estructuradas en la universidad.
>
> El movimiento hacia el pensamiento matemático más avanzado comporta una dificultad de transición, desde una posición en que los conceptos tienen una base intuitiva fundamentada en la experiencia, hacia otra que se especifica a través de deducciones lógicas. Durante esta transición (y mucho después) pueden existir simultáneamente en la mente las primitivas experiencias y sus propiedades, junto con el creciente cuerpo del conocimiento deductivo. La investigación empírica ha demostrado que eso produce una extensa variedad de conflictos cognitivos que pueden actuar como un obstáculo en el aprendizaje. Los "nuevos matemáticos" de los años setenta hicieron un intento esforzado para crear un enfoque basado en definiciones claras de los conceptos matemáticos, presentados de forma (eso esperaban) que los estudiantes pudieran aprender. Pero fallaron en la consecución de todos esos elevados ideales. El problema es que el método individual de pensamiento sobre los conceptos matemáticos depende de algo más que de la forma de las palabras usadas en una definición".

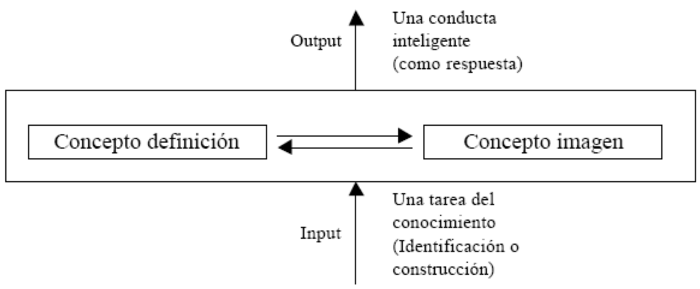
Vinner expone tres situaciones posibles de cómo los estudiantes enfrentan las nuevas definiciones que se le presentan, de manera sintetizada, se describen a continuación:

1. **Reconstrucción o Adaptación:** El concepto imagen cambia y se convierte en una imagen local, perdiéndose la imagen de corte en un solo punto. Esta sería la opción deseable; revocado por el nuevo concepto definición, se construye, o reconstruye el concepto imagen, tal como se representa en la siguiente figura:



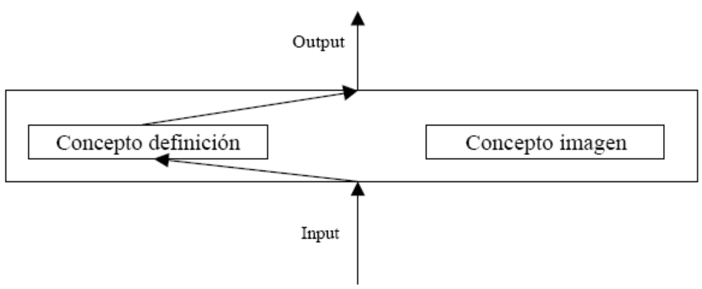
El conocimiento crece desde un concepto formal.

Generalmente el docente presupone que es viable que los estudiantes a partir del concepto definición logren concebir un concepto imagen adecuado para ésta, sin embargo esto ocurre pocas veces, pues la definición formal se construye con éxito generalmente gracias a la imagen y a los esquemas que pueden representar el concepto. La siguiente figura resume esta afirmación.

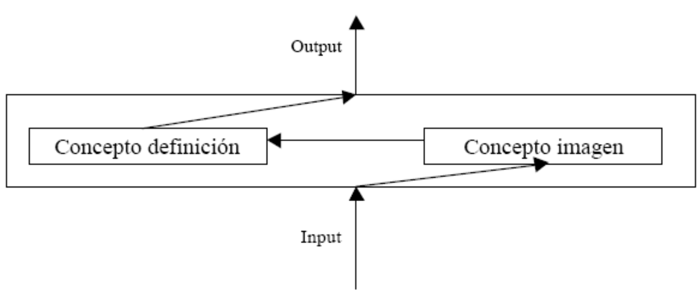


Deducción formal con apoyo del concepto imagen

Cuando el estudiante se apoya en el concepto imagen, como vía de intuición, o en el uso de deducciones formales para resolver un ejercicio o problema, sigue un esquema como los representados en las siguientes figuras:

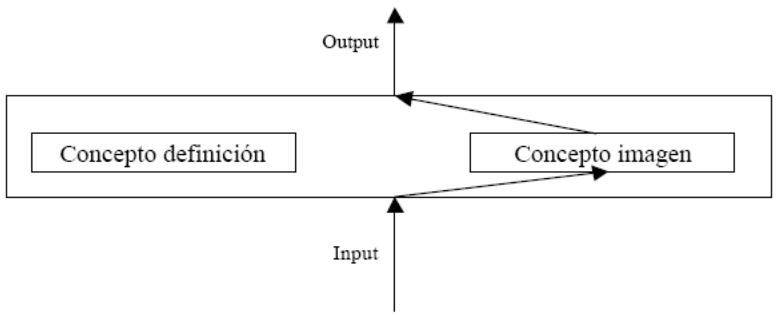


Una deducción formal pura



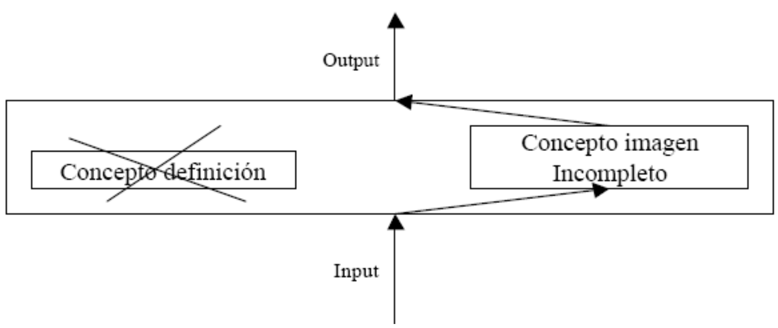
Deducción siguiendo una idea intuitiva

De acuerdo con Vinner (1991), los procesos de deducción desde las ideas intuitivas (concepto imagen) hasta las ideas formales (concepto definición), serían los ideales, en este sentido afirma que: *"Ese es, desde luego, el proceso deseable. Desdichadamente, la práctica es diferente. (. . .) Un modelo más apropiado para el proceso que ocurre en la practica es el siguiente:"*



Respuesta intuitiva

2. **Pérdida del concepto definición:** El concepto imagen se conserva, sin embargo el concepto definición dado por el profesor se pierde totalmente, los estudiantes olvidan las definiciones formales y se limitan a utilizar únicamente las reglas como recetas, sin tener en cuenta la más mínima relación con el concepto.

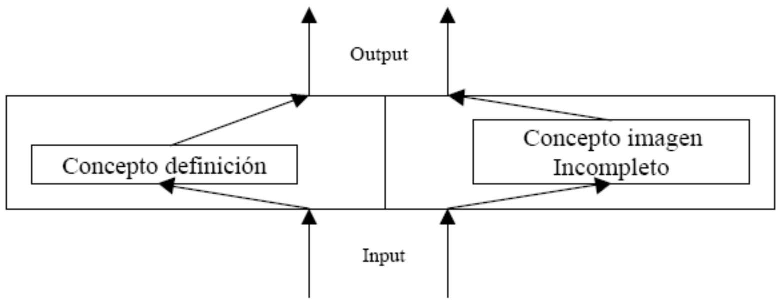


Carencia de concepto definición y concepto imagen incompleto o erróneo.

3. **Concepto definición en colisión con concepto imagen incompleto:** En este caso ambos conceptos permanecen, y el estudiante utilizará el que considera más pertinente, de acuerdo a la situación, Vinner (1991, p 73), afirma al respecto que: *"Y sólo los problemas no rutinarios, en los que los conceptos-imagen incompletos pueden ser equivocados, pueden estimular a referirse al concepto-definición. Tales problemas son raros y cuando se proponen a los estudiantes suelen considerarlos improcedentes o injustos. Por tanto, no parece haber nada que tienda a cambiar los*

hábitos comunes de enseñanza que son, en principio, inadecuados para contextos técnicos".

En este sentido se hace necesario el planteamiento de ejercicios adecuados, que provoquen que el estudiante confronte el concepto imagen incompleto o erróneo, y sienta la necesidad de reestructurarlo o adaptarlo al nuevo concepto definición, pues si no se produce una reestructuración, concepto imagen y concepto definición serán trabajados como si fueran distintos, la siguiente figura ilustra este proceso:



Ejemplos no adecuados, no producen enfrentamiento.

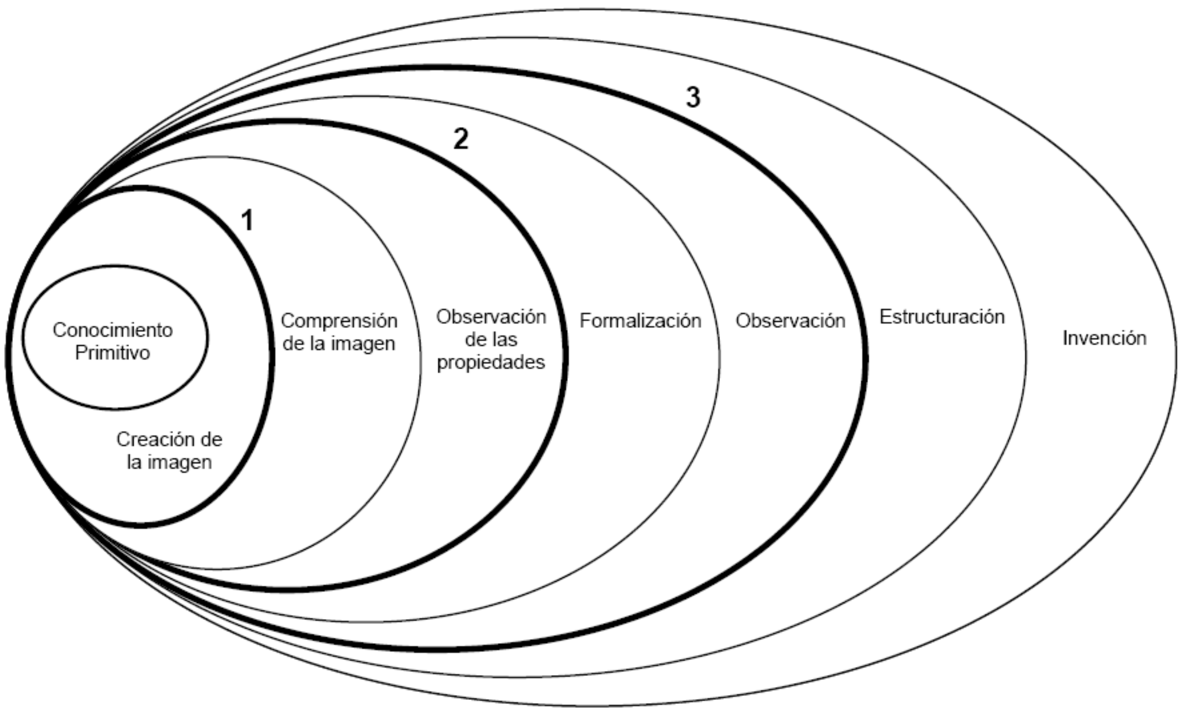
Es claro que la visualización permite presentar algunos conceptos matemáticos de la misma forma que se originaron, así como el nivel I del modelo de van Hiele es también llamado *nivel visual*, en general, en otros modelos educativos estructurados, aparece una *fase visual* como una de las primeras etapas del proceso de entendimiento o de enseñanza, es evidente la relación del modelo de Vinner con el modelo de van Hiele, pues ambos suponen incrementar la *experiencia* al tiempo que se explicitan las imágenes de los conceptos (visuales, manipulativas, entre otras.) para construir a partir de ellas el pensamiento matemático avanzado.

2.3.5. El trabajo de Pirie y Kieren

El modelo para el crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren, estima que el entendimiento se caracteriza por estratos o niveles que no son lineales, además agrega que éste es un fenómeno recursivo que ocurre cuando el pensamiento se mueve entre niveles sofisticados. De esta manera cada nivel de entendimiento está contenido en los niveles siguientes y cualquier nivel en su interior no sólo depende de las formas y los procesos, también está condicionado por los niveles externos.

De acuerdo con Meel (2003, p. 237): "...el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores" y agrega que "como resultado, las acciones que se realizan en este estrato involucran desarrollar las concesiones entre los referentes y los símbolos".

La siguiente ilustración representa el modelo para la evolución de la comprensión matemática, el cual está compuesto por ocho niveles potenciales, junto con las tres etapas del modelo diferenciadas en las líneas de trazo grueso y que corresponden a acciones más informales, acciones más sofisticadas, y acciones matemáticas totalmente formales, respectivamente:



Características del Modelo de Pirie and Kieren

Este modelo tiene una característica fractal, pues el nivel de conocimiento primitivo comprende muchos tópicos cada uno entendido en su propio nivel. El desdoblamiento es otra característica que ocurre cuando se experimenta un aprieto y el entendimiento presente no satisface las exigencias cognitivas del problema. El estudiante examina los niveles anteriores de comprensión a la luz de la parte que no encaja y reorganiza este nivel bajo para acomodar la nueva información.

Otra característica es la llamada no necesidad de fronteras que se denota por anillos de líneas más negras. Trascender estos límites significa el desplazamiento del estudiante a un entendimiento más elaborado y establece que no necesariamente requiere de los elementos del nivel más bajo. La última característica del modelo se llama el complemento de un proceso y una acción de forma orientada, se deben exhibir algunas acciones y verbalizaciones con el fin de considerar que se está operando en el nivel particular respectivo.

2.4. El modelo educativo de van Hiele

En 1957, los esposos Dina van Hiele-Geldof y Pierre Marie van Hiele, profesores de matemáticas de enseñanza media, presentaron el modelo educativo como resultado de sus estudios Doctorales desarrollados en la Universidad de Utrecht.

Dicho estudio se basó en las reflexiones desarrolladas a la luz del modelo de Piaget, la preocupación de los van Hiele se centraba en que los estudiantes tenían problemas en el manejo del vocabulario específico de la geometría, mostraban habilidad para desarrollar problemas concretos pero carecían de ideas para abordar los mismos problemas en otros contextos, debido a esto, los procesos de abstracción y formalización se limitaban a razonamientos memorísticos, siendo estos mecanismos útiles para desarrollar un problema, pero no adecuados pues se desconoce la importancia de los razonamientos y de la comprensión de los estudiantes, así como también el significado y utilidad de las matemáticas.

Pierre van Hiele diseñó un sistema de niveles de pensamiento en geometría y Dina van Hiele, enfocó sus estudios en el aumento de los niveles de pensamiento de los estudiantes. (Hofer, 1983, p. 207).

Según van Hiele (1955, p. 298): "Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aún así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance un nivel superior de pensamiento".

Así, las ideas centrales del modelo creado por los esposos van Hiele, se pueden enunciar según Gutierrez (1999, p. 305), de la siguiente manera:

1. Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes.

2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

2.4.1. Descripción del modelo educativo

El Modelo Educativo de van Hiele ha venido siendo, en los últimos años, el que mejor describe la evolución de un estudiante en la construcción del pensamiento geométrico o del análisis matemático, desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, este modelo incluye dos aspectos, uno descriptivo y otro prescriptivo. El primero explica a través de una secuencia de *"niveles de razonamiento"*, cómo un estudiante progresa en su razonamiento desde el comienzo de su aprendizaje, hasta llegar al máximo grado de desarrollo en un concepto matemático. El segundo aspecto del modelo, llamado *"fases de aprendizaje"*, propone pautas a los docentes las cuales ellos pueden utilizar en la construcción de una serie de actividades, con el fin de ayudar a progresar a un estudiante en su forma de razonar, ampliar y construir sus conocimientos matemáticos.

Para dar una visión del modelo educativo de van Hiele, es necesario mencionar sus tres componentes principales:

Los niveles de razonamiento, a través de éstos un estudiante progresa en su capacidad de razonamiento matemático.

Las fases de aprendizaje, constituyen una serie de directrices sobre cómo los docentes pueden ayudar a sus estudiantes a alcanzar fácilmente un nivel superior de razonamiento.

El insight, es el interés original y el tema de disertación. Para tener insight, los estudiantes no sólo deben ser capaces de aplicar sus conocimientos para resolver problemas, también deben entender que están haciendo, por qué lo están haciendo y cuándo lo deben hacer.

A continuación se hará una descripción detallada de los componentes del modelo educativo.

2.4.2. Niveles de razonamiento

La componente descriptiva del modelo considera los niveles de razonamiento, en los cuales las personas pueden ser ubicadas según el grado de comprensión que tengan frente a un concepto específico, esto permite hacer una estratificación del pensamiento humano. Se distinguen cinco niveles de razonamiento, los cuales son:

Nivel 0

Predescriptivo: En este nivel, los estudiantes reconocen los elementos básicos de estudio para el concepto tratado, la información de estos elementos pueden variar entre distintos conceptos.

Nivel I

De reconocimiento, visual: Es uno de los niveles más elementales, en éste predomina la información visual, se presenta una percepción de los objetos como elementos aislados, basada en su apariencia global, es por esto que en este nivel los estudiantes no definen, lo que hacen es describir o identificar atributos físicos de los objetos, y con base en dichos atributos también los comparan y clasifican; el vocabulario utilizado generalmente no es apropiado para describir los elementos básicos relacionado con el concepto.

Nivel II

De análisis: En este nivel se analizan las relaciones entre los elementos básicos de estudio, los estudiantes reconocen las propiedades matemáticas de los objetos, aunque siguen basando sus razonamientos en la percepción física, es necesaria la observación y la manipulación para descubrir propiedades que no se conocían. Los razonamientos se ven limitados porque las propiedades se usan de manera independiente, por lo general se enuncian listas de propiedades que permiten identificar los objetos geométricos, pero de éstas no se determinan cuáles son suficientes y necesarias para definir un objeto, así como tampoco la definición juega un papel relevante.

Nivel III

De clasificación, de relación: En este nivel se inician procesos de razonamiento formal, el estudiante comienza a establecer relaciones, ahora las proposiciones no se perciben aisladas, sino que se infieren los vínculos de dependencia entre unos elementos y otros. El papel de la definición ahora es más relevante, porque permite establecer interrelaciones entre una figura y sus partes, así como también permite hacer clasificaciones según las propiedades analizadas, las relaciones entre los elementos básicos de estudio y el análisis de sus propiedades permiten dar definiciones verbales del concepto tratado.

Nivel IV

De deducción formal: En este nivel los estudiantes completan el desarrollo del razonamiento lógico formal, analizan el concepto en distintas situaciones y pueden llegar a hacer demostraciones formales. Ahora es importante verificar la validez de una afirmación o razonamiento, mediante deducciones matemáticas formales o demostraciones; las definiciones son correctas y el vocabulario empleado es especializado, reconocen la posibilidad de que existan definiciones equivalentes, porque comprende las interacciones entre las condiciones necesarias y las suficientes y distinguen entre una implicación y su recíproca.

2.4.3. Descriptores de los niveles

Para caracterizar cada uno de los niveles es necesario recurrir a los descriptores que corresponden a éstos; los descriptores de los niveles de van Hiele constituyen las principales características que permiten reconocer cada uno de esos niveles de razonamiento matemático, a partir de la actividad del estudiante.

Algunos de los descriptores que se presentan a continuación hacen referencia a aspectos geométricos y se encuentran tanto en el trabajo de los van Hiele como en en los trabajos de Jaime Gutiérrez.

Nivel I: De reconocimiento visual

- Los estudiantes reconocen las figuras geométricas por su apariencia global.
- Perciben las figuras como objetos individuales, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otras figuras del mismo tipo.
- Pueden aprender cierto vocabulario que identifican las figuras geométricas (tal como cuadrado, rectángulo y otras).
- Describen las figuras geométricas por semejanza con otros objetos que no necesariamente son figuras geométricas, ni del tipo de las que están describiendo.
- Identifican la forma de la figura o la propia figura como un todo, sin distinguir partes que la formen, ni las propiedades matemáticas que las caracterizan.

Nivel II: De análisis

- Los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades.
- Por la observación de esas partes, puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase.
- No relaciona las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades.
- Las deducciones y extensión de propiedades tienen un carácter informal.

Nivel III: De clasificación, de relación

- Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades, reconocen que unas propiedades se deducen de otras y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra.

- No reconocen la necesidad del rigor, ni la relación entre lo que han aprendido con otros sistemas deductivos que pueden ser semejantes.
- Los estudiantes pueden seguir una demostración formal, pero generalmente no son capaces de reproducirla.
- El tipo de argumentación es informal (aunque correcta) y, frecuentemente, recurre a argumentos basados en la experiencia.
- Los estudiantes pueden clasificar lógicamente y aprender relaciones entre distintas clases de figuras. Pero no comprenden la necesidad de la formalización (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

Nivel IV: De deducción formal

- Los estudiantes pueden analizar varios sistemas deductivos y relacionarlos.
- Conocen propiedades de un sistema deductivo tales como la consistencia, la independencia y la completitud de sus postulados.
- Los estudiantes conocen y valoran la importancia de la precisión al tratar con los fundamentos y con las interrelaciones de estructuras axiomáticas formales.

2.4.4. Caracterización de los niveles

A partir de la descripción dada para los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele, se ponen de manifiesto algunas características importantes de éste. Los descriptores del modelo deben cumplir con unas propiedades específicas, el presente trabajo utiliza la nomenclatura presentada por Usiskin.

Propiedad 1: (Secuencialidad fija): Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencialidad fija, esto es, “Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel *n-1*”. Cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior, no es posible progresar a un nivel inmediatamente superior sino se manejan los objetos de conocimiento del anterior.

Propiedad 2: (Adyacencia): El objeto de percepción del nivel *n-1* se convierte en el objeto de pensamiento del nivel *n*. Los niveles de van Hiele tienen una estructura recursiva, puesto que en el nivel n hay determinadas cualidades del pensamiento que se utilizan implícitamente y cuyo uso explícito se manifiesta en el nivel *n+1*. El siguiente esquema representa la estructura recursiva de los niveles.

	Elementos explícitos	**Elementos Implícitos**
Nivel I	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel II	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel III	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel IV	Deducción formal de teoremas	

Estructura recursiva de los niveles
Tomado de: Gutiérrez, J. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría. El modelo de van Hiele.

Propiedad 3: (Distinción): El nivel n requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel *n-1*, esto es la percepción de una nueva estructura.

Propiedad 4: (Separación): Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de conocimiento matemático.

Propiedad 5: (Cada nivel tiene su lenguaje): El lenguaje y los niveles tienen una estrecha relación, cada nivel tiene su propio lenguaje específico, y manifiesta las capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles, de van Hiele, mediante la forma de expresarse y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico.

2.4.5. Fases de aprendizaje

Para promover a un estudiante de un nivel de razonamiento al siguiente dentro de una materia (concepto), los van Hiele propusieron una secuencia de cinco fases de aprendizaje, una prescripción para la organización de la instrucción. Estas fases permiten establecer de manera aproximada la forma como las ideas son generadas, refinadas, extendidas y asimiladas por los estudiantes.

Para los van Hiele (año) "el aprendizaje es el resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas; por lo tanto, existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento fuera de la enseñanza escolar si se consiguen las experiencias apropiadas. No obstante, esas experiencias, aunque existen y no deben despreciarse, generalmente no son suficientes para producir un desarrollo de la capacidad de razonamiento completo y rápido, por lo que la misión de la educación matemática escolar es proporcionar experiencias adicionales, bien organizadas para que sean lo mas útiles posible.”

Las fases de aprendizaje del modelo son las etapas por las que debe atravesar un estudiante para adquirir las experiencias que le ayudarán a llegar a un nivel superior de razonamiento, el diseño de dichas experiencias es una responsabilidad propia del docente, quien debe procurar ser asertivo con la proposición de actividades que logren que los estudiantes construyan relaciones significativas entre los conceptos estudiados, para así lograr que los estudiantes adquieran conocimientos de manera comprensiva, puedan aprenderlos, utilizarlos y combinarlos.

En el marco de las fases de aprendizaje del modelo educativo y buscando que los estudiantes progresen en su nivel de razonamiento, se proponen una serie de descriptores para cada una de las fases, éstos constituyen un conjunto de características que los estudiantes deben poseer y que nos permitirán identificar si el estudiante tiene o no condiciones para estar ubicado en dichas fases. Los propósitos de cada fase, junto con sus principales características, de acuerdo con nuestra investigación, se describen a continuación:

Fase 1: Inquiry (Información)

El profesor interactúa con los estudiantes (en doble vía) conversando acerca de los objetos de estudio; en esta fase el profesor da a conocer el objeto de conocimiento que se estudiará, el tipo de trabajo que se realizará y da alguna explicación de los tópicos a ser estudiados. Esta fase también permite indagar por los conocimientos previos de los estudiantes y por su nivel de razonamiento, pues es esencial saber qué grado de conocimiento tienen con respecto al concepto objeto de estudio, esto se hace prestando especial atención a las intervenciones de los estudiantes, sus interpretaciones y el uso del lenguaje. En esta fase se hacen observaciones y se aclaran dudas, usando el vocabulario y objetos de estudio relativos al tópico específico.

En esta fase es donde los estudiantes empiezan a poner de manifiesto su red de relaciones (ver apartado 2.4.7), dependiendo de cómo esté constituida su estructura mental. A partir de las actividades propuestas, la red de relaciones irá mejorándose, puliéndose y fortaleciéndose a medida que avanza el proceso; el fortalecimiento de dicha red se evidenciará gracias a la construcción de relaciones significativas entre los conceptos abordados y al aumento progresivo del lenguaje.

Fase 2: Directed orientation (Orientación dirigida)

El profesor diseña cuidadosamente una secuencia de actividades para la exploración de tópicos por parte de los estudiantes, los cuales comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio y como llegan a familiarizarse con las características de las estructuras. Muchas de las actividades en esta fase son tareas paso a paso que producen una respuesta específica. Concretamente, en esta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión, es por esto que las actividades deben ser especialmente diseñadas para lograr este fin, de modo que constituyan una serie de experiencias significativas para lograr procesos de razonamiento avanzado, el cual nuevamente, será mediado y evidenciado por el lenguaje.

Al igual que en todas las fases, se deben generar, además, espacios para lograr que el docente identifique las características de las estructuras mentales de los estudiantes; debido a que éstas a su vez pueden ser flexibles, mediante el proceso de instrucción se pueden fortalecer gracias a la creación de nuevos vínculos y el establecimiento de nuevas relaciones significativas, de modo que la red construida en la fase anterior se vea favorecida gracias al uso apropiado y amplio del lenguaje matemático y al establecimiento de asociaciones pertinentes.

Fase 3: Expliciting (Explicitación)

Los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna del objeto de estudio. Durante esta fase, los estudiantes comienzan a formar las relaciones del sistema estudiado, es esencial que hagan explícitas las observaciones que infieren del concepto abordado. Así mismo es importante el intercambio de experiencias, en las que se manifiesten las observaciones realizadas durante el proceso de aprendizaje, las explicaciones que surgen para comprender un concepto, y el tipo de análisis que realizan, esto exige ordenar ideas y expresarlas con claridad; es en este sentido que uno de los propósito de esta fase apunta al refinamiento del vocabulario en correspondencia con el nuevo nivel que se trata de alcanzar, favoreciendo así la revisión del trabajo realizado y la puesta en común de conclusiones que hagan explícitos los procesos de razonamiento.

Otra de las finalidades de esta fase es que los estudiantes fortalezcan su red de relaciones y lo manifiesten de manera explícita mediante un mapa conceptual, que permita identificar de qué manera los estudiantes comienzan a construir relaciones entre las ideas subyacentes al concepto objeto de estudio. La explicitación está presente en todas las fases, en la medida que los estudiantes van construyendo su red de relaciones; las socializaciones y discusiones grupales también permitirán determinar el grado de apropiación que los estudiantes han logrado con respecto al concepto objeto de estudio.

Fase 4: Free orientation (Orientación libre)

Los estudiantes, ahora encuentran tareas multipaso, que pueden ser completadas de diferentes maneras, ganando experiencia al encontrar sus propias maneras de resolverlas. Se trata de que los estudiantes apliquen, en contextos diferentes a los comúnmente utilizados, tanto los conocimientos como el lenguaje adquirido. Los problemas planteados en esta fase pueden indicar el camino a seguir, pero principalmente deben permitir que se combinen y apliquen los razonamientos realizados en fases anteriores. Es importante resaltar que dichos problemas deben representar situaciones nuevas, con varias alternativas que permitan llegar a su solución, no puede tratarse de problemas que simplemente exijan la aplicación directa de un concepto, porque en esta fase las actividades deben permitir la consolidación de los conceptos estudiados, mediante el establecimiento de las relaciones que los vincula.

En esta fase, gracias a la orientación brindada, los estudiantes deben lograr transferir a contextos apropiados, los conceptos que han asimilado durante todo el proceso, de modo que reconozca la posibilidad ampliar y fortalecer la red de relaciones que hasta ahora han construido. La red de relaciones se amplia y se modifica dependiendo de las asociaciones que los estudiantes establecen entre los conceptos ya abordados y los nuevos, se enfatiza entonces que, el lenguaje es determinante y pone de manifiesto la manera de razonar de los estudiantes.

Fase 5: Integration (Integración)

Los estudiantes se forman una idea general de los nuevos conocimientos; los objetos y relaciones son unificados e interiorizados dentro de un nuevo dominio de pensamiento. El profesor ayuda en este proceso, brindando conocimientos previos generales que los estudiantes se supone conocen, siendo cuidadosos de no presentar nuevas o discordantes ideas, pues se trata de fomentar procesos de comprensión de lo que ya conocen.

El propósito fundamental de esta fase es lograr que el estudiante teja una red de relaciones que integre todos los conceptos vistos y que la materialice mediante un mapa conceptual, en el que se vea reflejado el progreso en el nivel de razonamiento. La red es reelaborada y fortalecida gracias al uso de un lenguaje matemático adecuado y a la ampliación, modificación y establecimiento de vínculos significativos que contengan los elementos representativos del concepto objeto de estudio.

Es importante mencionar de nuevo, que el objetivo, al término de estas cinco fases, es que un nuevo nivel avanzado de razonamiento frente al concepto de convergencia de una serie infinita, sea alcanzado, gracias al aprovechamiento de la riqueza de las visualizaciones y, buscando la integración entre el concepto imagen y el concepto definición, que ha representado un obstáculo cognitivo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Para todo esto es fundamental la modificación y fortalecimiento de la estructura mental de los estudiantes, que se pone de manifiesto mediante la constitución de una red de relaciones que se empieza a crear durante el proceso de aprendizaje y que es mediada por el lenguaje a través de las actividades propuestas en cada una de las fases.

2.4.6. Insight

El modelo de van Hiele se interesa en la forma de encontrar y desarrollar los insight en un estudiante. Una persona muestra insight si:

a. Es capaz de actuar en una situación no familiar.

b. Actúa competentemente (correcta y adecuadamente) en los hechos requeridos en una nueva situación.

c. Aplica intencionalmente (deliberadamente y conscientemente) un método que resuelve la situación.

2.4.7. Estructuras y redes de relaciones

Según van Hiele, la forma de poner de manifesto una estructura mental de un estudiante se da a partir del establecimiento de una red de relaciones , en la cual los vértices de la red son conceptos o propiedades de la noción estudiada y las líneas de conexión son las relaciones que existen entre dichos elementos. A medida que se vincule un nuevo concepto o propiedad o se establezcan nuevas relaciones, se consolida o se amplía dicha red, la cual manifestará el grado de comprensión del concepto estudiado; la creación de esta nueva red de relaciones favorece el paso hacia el siguiente nivel de razonamiento. Propiciar tal progreso es también función de las fases de aprendizaje, en las cuales la instrucción juega un papel determinante, esta se puede dar mediante el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases, que contengan acciones concretas que pongan de manifiesto la red de relaciones que el estudiante posee en su mente, por esto se puede afirmar que "El papel de la instrucción en las fases de aprendizaje es ayudar al alumno a crear y fortalecer su red de relaciones abundantes y complejas en conceptos matemáticos y de la geometría".

Para favorecer el proceso de instrucción, con el propósito de ayudarle al estudiante a crear y fortalecer sus redes de relaciones en conceptos matemáticos, se hace necesario diseñar, elaborar, desarrollar y validar módulos de instrucción que le permitan al estudiante alcanzar un avanzado nivel de razonamiento. Las actividades propuestas en dichos módulos para cada una de las fases deben estar organizadas de manera que potencien el progreso en los niveles de razonamiento, en los cuales el reconocimiento de una estructura y de sus propiedades constituye un factor determinante que fortalece la comprensión de los conceptos y propiedades en la matemática. Los estudiantes tienen incorporadas en su estructura mental una serie de ideas y conceptos que hacen parte de la construcción de su conocimiento. El concepto de estructura es un fenómeno importante, permite al hombre y al animal actuar en situaciones que son desconocidas, evita un interminable aprendizaje por ensayo y error y capacita a las personas para comprender otras cosas.

Una estructura se caracteriza según Piaget (1968), por las siguientes condiciones:

- La estructura tiene una totalidad.
- La estructura es llevada a cabo por transformaciones.
- La estructura es autorregulada.

Para la psicología Gestalt, existen cuatro importantes propiedades que caracterizan una estructura:

- Es posible extender una estructura.
- Una estructura puede ser vista como una parte de una estructura más fina.
- Una estructura puede ser vista como una parte de una estructura más inclusiva.
- Una estructura puede ser isomorfa con otra estructura.

Según van Hiele, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, una estructura mental se pone de manifiesto gracias a la red de relaciones que un estudiante constituye mientras aprende o modifica sus conocimientos, toda estructura mental puede ser ampliada, modificada y mejorada gracias a una instrucción adecuada.

El establecimiento de una red de relaciones constituye un aspecto crucial en la comprensión de un concepto en el marco del modelo de van Hiele; se propone para lograr la constitución de dicha red de relaciones, diseñar actividades en las que la instrucción juega un papel determinante, pero es necesario hallar un mecanismo que permita materializar la red de relaciones que se supone el estudiante debe construir; para ello hubo la necesidad de investigar cuál podría ser este mecanismo que se ajusta al modelo de van Hiele para avanzar en su nivel de razonamiento y que pueda ser parte de las fases de aprendizaje. Es así como se logra determinar que los mapas conceptuales, gracias a su estructura, cumplen con características análogas al planteamiento de las redes de relaciones del citado modelo. Pero no sólo eso, también es necesario hacer un estudio exhaustivo de los descriptores que corresponden a los niveles y fases y, de los obstáculos cognitivos de nivel, tanto epistemológico como visual y geométrico, que han impedido de alguna forma, la integración del concepto imagen y el concepto definición.

2.5. Los mapas conceptuales

Los mapas conceptuales como herramienta educativa, gracias a su estructura, facilitan la visualización de las transformaciones que un estudiante realiza a su red de relaciones, y para la cual el lenguaje representa un aspecto fundamental durante el proceso de construcción de un concepto, de esta manera y gracias a las propiedades del modelo de van Hiele se encuentra que el lenguaje es un factor común entre el modelo y los mapas conceptuales.

Según lo planteado por Jaramillo y Esteban (2003) "La estructura visual de la red de relaciones que un alumno adquiere en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se puede fortalecer con el empleo de la técnica de los mapas conceptuales", es así como los mapas conceptuales son una herramienta que facilita la explicitación de la red de relaciones que los estudiantes poseen, además que permite hacer un seguimiento a los cambios generados en dicha red de relaciones.

Los mapas conceptuales diseñados por Novak y Gowin (1988), podrían definirse como un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones, el objeto de los mapas conceptuales es "representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones; ...los mapas conceptuales, se emplean como una herramienta para el aprendizaje, que permite indagar por los conocimientos previos de los estudiantes, y que permite también organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento del concepto estudiado, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad".

Novak también los reconoce como una herramienta útil en la evaluación formativa en tanto que permite detectar errores conceptuales y de alguna forma da cuenta de la evolución del lenguaje empleado por los estudiantes, a lo largo del proceso educativo. Debido a que en el modelo de van Hiele el lenguaje constituye un aspecto relevante y crucial para poder explicar las estructuras referidas a la geometría, además, es una extensión del pensamiento, pues a medida que éste se refina, es necesario hacer un uso adecuado de él, con el propósito de que pueda comunicar las ideas, es decir: socializar el conocimiento, además también es un factor determinante tanto en la detección del nivel de razonamiento como en la fase de aprendizaje, en que se encuentran los estudiantes.

Según Novak y Gowin (1988), "Los mapas conceptuales no sólo son una técnica de estudio, también pueden ser empleados como una representación gráfica o esquemática del conocimiento acerca de un tema específico, de modo que el conocimiento es organizado y representado en todos los niveles de abstracción, situando los más generales e inclusivos en la parte superior del mapa y los menos inclusivos en la parte inferior. Esta manera gráfica de representar los conceptos y sus relaciones, brindan a los profesores y estudiantes una estrategia que permite interpretar y comunicar su estructura mental sobre un tema determinado".

Dado que el modelo de van Hiele propone la existencia e importancia del establecimiento de una red de relaciones en un proceso de aprendizaje, entonces una herramienta como los mapas conceptuales da elementos para representar relaciones significativas entre conceptos, encontramos así, un planteamiento común entre el modelo y los mapas conceptuales, la importancia del lenguaje. Podríamos mencionar que la red de relaciones es el aspecto primario para formar el mapa conceptual, ya que este último incluye asociaciones jerarquías que hacen que el estudiante reflexione y seleccione los conceptos o elementos primarios dentro del mapa. La implementación de los mapas conceptuales constituyen una fuente de información acerca del lenguaje que posee un estudiante y en concordancia con el modelo de van Hiele, el lenguaje utilizado en determinado nivel de razonamiento se refina a medida que el concepto es comprendido, y con esto se observa además, que las capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de van Hiele no sólo se reflejan en la forma de abordar problemas, sino también en la forma de expresarse y en el significado que se le da al uso de determinado vocabulario.

El siguiente mapa conceptual, sintetiza los componentes principales de la propuesta de Novak:

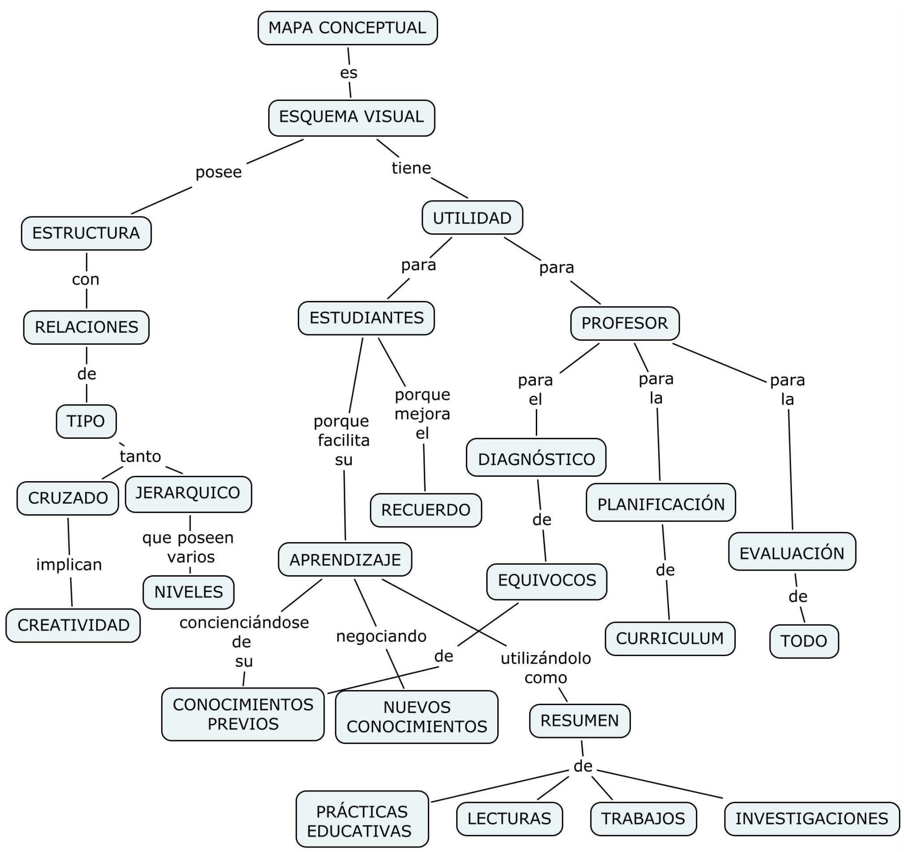


Figura tomada de: ONTORIA, Antonio. Mapas conceptuales: una técnica para aprender. Narcea. Quinta Edición. 1992.

Los mapas conceptuales son una herramienta que permite evidenciar el lenguaje que los estudiantes tienen para transmitir un concepto; las matemáticas hacen parte del lenguaje cotidiano de las personas pero en el momento de conceptualizarla, es donde realmente se encuentran las dificultades, por eso es necesario emplear herramientas que faciliten la comprensión y construcción de dichos conceptos de manera ordenada y jerarquizada, siendo así, los mapas conceptuales son un instrumento que contribuye a cambiar y sensibilizar la manera de pensar de los sujetos para poder transformar su red de relaciones durante el proceso de su aprendizaje.

2.5.1. Relación entre las redes de relaciones y los mapas conceptuales

En el proceso de conseguir el progreso de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, se encuentra que el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases constituye un papel determinante y que para este diseño, la implementación de los mapas conceptuales juega un papel fundamental en tanto se consideren como el "estetoscopio" para evidenciar cada una de las fases, permitiendo identificar la manera cómo los estudiantes están estableciendo su red de relaciones para la noción del concepto objeto de estudio.

Las redes de relaciones y los mapas conceptuales están estrechamente relacionados pero claramente diferenciados, a continuación se destacan algunas de sus características correspondientes:

Redes de Relaciones	**Mapas Conceptuales**
Es la representación de una estructura mental, en la cual los vértices son los conceptos asimilados o representaciones de los mismos y las líneas de conexión son las relaciones entre los conceptos.	Es un recurso esquemático para la representación de un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones. (Novak y Gowin, 1991).
Las líneas de conexión permiten organizar, interrelacionar y fortalecer asociaciones que favorecen la construcción del concepto, fomentando la reflexión, el análisis y la creación del mismo.	Las palabras enlace permiten, junto con los conceptos, construir frases u oraciones con significado lógico y hallar la conexión entre conceptos.

En el marco del modelo educativo de van Hiele, el paso a través de un nivel de razonamiento al siguiente por medio de las fases de aprendizaje se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones y el proceso de aprendizaje se ve favorecido gracias a que, a la red anterior se incorporan nuevos conceptos y nuevas relaciones entre ellos.	Contribuyen al aprendizaje porque representan una técnica de estudio que permite, según Ontoria (1993): Resumir esquemáticamente lo que se ha aprendido y organizar los conceptos jerárquicamente facilitando el aprendizaje significativo, al englobar los nuevos conceptos bajo otros conceptos más amplios.
Su construcción tiene por objeto representar relaciones significativas entre conceptos, poniendo de manifiesto el nivel de comprensión que se tiene de los mismos de acuerdo con la estructura de la red de relaciones.	Su estructura se refiere a la ubicación y organización de las distintas partes de un todo, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior y los más específicos y menos inclusivos en la parte inferior.
Su elaboración se facilita mediante mecanismos concretos: visual-geométricos y verbales o escritos, ambos estrechamente relacionados con el concepto objeto de estudio, que representan una sucesión de situaciones y conceptos vinculados entre si.	En el proceso de elaboración de los mapas se desarrollan nuevas relaciones conceptuales, en especial, si de una manera activa se construyen relaciones proposicionales entre conceptos que previamente no se consideraban relacionados.
Puede ser ampliada, modificada y mejorada gracias a los procesos de razonamiento. El fortalecimiento de la red de relaciones se favorece debido al establecimiento de vínculos significativos entre los conceptos que aparecen durante el proceso de aprendizaje, permitiendo la comprensión de los mismos.	Permiten seleccionar, extraer y separar la información significativa o importante de la información superficial, facilitando la organización lógica y estructurada de los contenidos de aprendizaje y proporcionan un recurso esquemático de todo lo que se ha aprendido.
El lenguaje es un medio importante que permite manifestar estructuras mentales, el grado de apropiación del éste pone de manifiesto el nivel de comprensión de un tema o tópico determinado.	El uso del lenguaje, tanto verbal como escrito, manifiesta la manera como se exteriorizan estructuras conceptuales, el refinamiento del mismo es muestra del dominio que se puede tener del concepto objeto de estudio.

La red de relaciones es de carácter teórico, pero los mapas conceptuales son de carácter concreto, ya que estos comunican las ideas y conceptos que el estudiante tiene en su mente de manera verbal y escrita.

Es así como los mapas conceptuales están supeditados a la construcción que cada estudiante haga de su red de relaciones, permitiendo materializar dicha red, evidenciando las construcciones y modificaciones en sus estructuras mentales.

2.5.2. Módulos de instrucción (Módulos de aprendizaje)

El módulo de instrucción contiene experiencias de aprendizaje que están en una relación directa con cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele, en el presente estudio el proposito es promover a los estudiantes ubicados en un nivel de razonamiento II al un nivel III, frente al concepto de convergencia de una serie infinita. Las experiencias de aprendizaje pueden ser entendidas no sólo como las que se realizan en el aula, sino también como aquellas que promueven aprendizajes significativos, independientes del contexto donde se lleven a cabo. Éstas deben ser enfocadas de tal manera que los estudiantes se involucren en procesos de enseñanza y de aprendizaje de temas o conceptos específicos. Así mismo, las experiencias de aprendizaje fuera del aula, serían aquellas que se realicen con propósitos formativos y que permitan al estudiante adquirir habilidades, destrezas y actitudes, además, establecer redes de relaciones válidas entre los conocimientos ya adquiridos.

El módulo de instrucción propuesto contiene un conjunto de actividades, cada una de ellas referidas en las diferentes fases de aprendizaje, las cuales a su vez, hacen énfasis en el aspecto visual geométrico del concepto de convergencia de una serie infinita. Dado esto, el diseño de las actividades es una tarea minuciosa y delicada, ya que la pretensión última, en el trabajo de investigación, es lograr que un estudiante adquiera un avanzado nivel de razonamiento y esto es posible, si el estudiante al término de las fases logra la integración entre el concepto imagen y el concepto definición de la convergencia de una serie infinita.

Además, el módulo de instrucción diseñado propone una serie de descriptores para cada una de las fases de aprendizaje, dichos descriptores corresponden a las condiciones o características que un estudiante debe poseer para progresar en las fases, pero a la vez éstos están en correspondencia con los descriptores de los niveles de razonamiento propuestos por Jurado y Londoño (2005). Específicamente en las fases de orientación libre y de integración, se concentran los descriptores que responden a las características de un estudiante que alcanza un nivel III de razonamiento; para un estudiante ubicado en la fase cuatro, de acuerdo con los descriptores de nivel, se puede decir que alcanza un nivel III, mientras que un estudiante que logra la fase cinco no sólo progresa a dicho nivel, si no que también adquiere elementos suficientes y necesarios para iniciar procesos de formalización, por lo tanto, se puede afirmar que un estudiante ubicado en una de estas dos últimas fases, ha logrado integrar el concepto imagen y el concepto definición y por consiguiente alcanza un avanzado nivel de razonamiento.

2.6. Investigaciones realizadas en el Contexto del Modelo de van Hiele

El modelo de van Hiele, aunque en sus comienzos se implementó sólo en geometría, en la última década se ha presentado una extensión del modelo, obteniendo valiosos avances en lo referido a la enseñanza de las nociones del análisis matemático. A continuación se presenta una síntesis de algunos de los trabajos desarrollados enmarcados en el modelo educativo de van Hiele y que han favorecido su extensión a conceptos del pensamiento matemático avanzado.

2.6.1. Memoria para optar al título de Magíster en Educación presentada por Alfonso López

El trabajo de investigación llevado a cabo por Alfonso López, titulado "Las fases de van Hiele para el Teorema de Pitágoras", fue presentado en el año 2007 en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. El objetivo de este trabajo de investigación fue caracterizar para los descriptores de cada una de las fases y luego diseñar un módulo de instrucción en correspondencia con las fases de van Hiele que le permita a los estudiantes de grados 8º y 9º de una institución de educación media, lograr un avanzado nivel de razonamiento en la comprensión del Teorema de Pitágoras. Para ello, se hipotetizaron descriptores para cada una de las fases y luego se diseñaron cuidosamente y de manera detallada actividades correspondientes para cada una de ellas, con el propósito de garantizar la comprensión del citado teorema. Basados en el módulo de instrucción, se elaboró un test que permitiera aplicarse a un número masivo de estudiantes y obtener una validación desde el punto estadístico del mismo y así poder garantizar que el módulo se convirtiera en si mismo en un módulo de enseñanza al momento de abordar el mencionado teorema.

2.6.2. Memoria para optar al título de Magíster en Educación presentada por Flor Maria Jurado H. y René Alejandro Londoño

El trabajo de investigación titulado “Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas”, presentado en la Universidad de Antioquia, en el año 2005, señala la dificultad en el paso del nivel de razonamiento II al III y la necesidad de diseñar mecanismos en el marco de las fases de aprendizaje del citado modelo, para favorecer el progreso en dichos niveles de razonamiento. Planteó entre sus propósitos una entrevista semi-estructurada de carácter socrático para la noción de límite como convergencia de una serie de términos positivos, a través de áreas de escaleras, para determinar descriptores de los niveles sobre el concepto estudiado y clasificar al entrevistado en uno de los niveles de razonamiento de van Hiele. Para comprobar que es posible la detección de los niveles de razonamiento propuestos en el modelo, se diseñó un test de selección múltiple, denominado ÁREAS DE ESCALERAS, que permitió automatizar la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel, esto facilitó analizar un número considerable de estudiantes y obtener datos suficientes para corroborar los resultados obtenidos en las entrevistas con respecto a la clasificación de los estudiantes en los niveles de razonamiento. En conclusión, el trabajo de investigación permite una extensión del modelo de van Hiele a conceptos del análisis matemático y muestra que el diseño de la entrevista socrática es apto como propuesta metodológica.

2.6.3. Memoria para optar al título de Magíster en Educación presentada por Edison Vasco y Jorge A. Bedoya

El trabajo de investigación titulado “Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele”, presentado en el 2005, se enfocó en el diseño riguroso de un módulo de instrucción que el docente debe seguir para lograr en sus estudiantes un progreso en los niveles de razonamiento, con respecto a conceptos de aproximación local (infinito, límite, derivada e integral). El módulo tiene dos finalidades, mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje y evitar el fracaso de los estudiantes en los primeros cursos de análisis que se imparten en la universidad.

El trabajo de investigación prueba la viabilidad de estudiar un concepto matemático determinado, que posea un alto componente visual y geométrico, a la luz del modelo educativo de van Hiele, destacando que es necesario un estudio teórico previo que haya detectado los descriptores para los diferentes niveles de razonamiento en relación al modelo mencionado, pues estos son la base del proceso de investigación.

La investigación prueba además, que el diseño de un módulo de instrucción, para el concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, permite planificar, desarrollar y aplicar experiencias de aprendizaje para que el alumno pueda progresar a través de los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, ya que durante su aplicación, suministra a los alumnos las herramientas necesarias para reformular sus esquemas conceptuales, permitiendo una mejor integración entre los elementos teóricos y prácticos.

Respecto al diseño metodológico, la investigación concluye que la elaboración de mapas conceptuales, enmarcados dentro del modelo educativo de van Hiele, permite una nueva forma de exploración de las condiciones propias del modelo, especialmente en el análisis del lenguaje empleado por los alumnos durante la intervención pedagógica. Además, permite hacer un mejor seguimiento y evaluación de las nuevas relaciones conceptuales que se van generando durante el proceso.

La investigación finalmente concluye que los estudiantes lograron comprender el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente, rompiendo con la dualidad entre el concepto imagen y el concepto definición, siendo ésta última, una condición necesaria para que el estudiante progrese del Nivel II al Nivel III de razonamiento del modelo de van Hiele.

2.6.4. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Maria de los A. Navarro

El estudio llevado a cabo por María Angelines Navarro, titulado: “Un estudios de la convergencia encuadrado en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica”, presentado en el año 2003, en la Universidad de Sevilla, España, utilizó “una nube de puntos” como un conjunto de puntos en el plano, cuya visualización le permite al estudiante la formación de un concepto imagen apropiado del proceso de convergencia de una sucesión.

La investigación planteó la entrevista de carácter socrático con el fin de determinar y caracterizar los descriptores para cada uno de los niveles de razonamiento en el marco del modelo de van Hiele. El guión entrevista previamente diseñado, se fue refinando a medida que se iba entrevistando a cada estudiante, para lograr así una elaboración adecuada de los descriptores de cada nivel de razonamiento y la detección de los mismos.

El trabajo proporciona una propuesta metodológica que permite introducir a un alumno en el proceso de convergencia de una sucesión a partir de la visualización elegida, para luego determinar su evolución en el razonamiento a través de cada uno de los niveles, esto facilita la transmisión de la esencia del concepto mismo, el cual es un proceso de razonamiento infinito y lo prepara para dar el salto a la definición formal de éste.

2.7. Otras investigaciones en el marco del modelo educativo de van Hiele

Desde 1982 inicia el desarrollo de proyectos de investigación cuyo propósito es llevar a cabo una revisión curricular, en cuanto a la geometría, aplicando el modelo de van Hiele. En EE.UU encontramos tres proyectos que se destacan y que han tenido gran difusión e importantes repercusiones en el ámbito educativo; se mencionarán brevemente sus alcances principales:

2.7.1. Proyecto Chicago

Este proyecto fue dirigido por Zalman Usiskin, tenía como propósito fundamental "analizar la habilidad de la teoría de van Hiele para describir y predecir el resultado de los estudiantes de geometría en la escuela secundaria" (Usiskin, 1982, p.8).

Entre los resultados relevantes obtenidos por el proyecto, se destacan los siguientes:

- La inexistencia o dificultad para detectar el quinto nivel, al respecto, van Hiele indica que los niveles que superan el nivel IV, son difíciles y que no tienen valor práctico (van Hiele, 1986, p.47). Cabe anotar que la nomenclatura de los niveles de van Hiele, cambia según los autores, y también ha sido revisada en varias ocasiones por el mismo van Hiele.
- Usiskin propone la propiedad de "secuencia fija" de los niveles, en la que "Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele, si no ha pasado a través del nivel *n-1*" (Usiskin, 1982, p.5).
- "Decisiones arbitrarias respecto al número de respuestas correctas necesarias para obtener un nivel pueden afectar al nivel asignado a muchos estudiantes". (Usiskin, 1982, p.80).
- Los niveles de van Hiele sirven para predecir los resultados actuales en geometría, así como también los resultados posteriores. (Usiskin, 1982, p.82, 89).

2.7.2. Proyecto Oregon

Este proyecto fue dirigido por William F. Burger de la universidad del estado de Oregon, el estudio se centró en contestar preguntas acerca de:

- La utilidad de los niveles de van Hiele para describir el proceso de pensamiento de los estudiantes de geometría.

- La posibilidad de caracterizar operacionalmente los niveles por la conducta de los estudiantes.
- La posibilidad de que una entrevista revele los niveles predominantes en el razonamiento en un tema especifico de geometría.

El proyecto de investigación respondió afirmativamente esas inquietudes, y concluyó además que:

- La utilización de la entrevista escrita, cuidadosamente desarrollada, y el formulario de análisis son útiles para revelar los niveles de razonamiento pre-encontrados.
- Burger y Shaughnessy (1986) dijeron, “Los niveles aparentan ser estructuras complejas envolviendo el desarrollo de conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchos ambientes de tareas”. Además, afirman también que “La oscilación entre niveles de razonamiento pre-encontrados en un estudiante, presumiblemente en un periodo de transición entre un nivel y el siguiente, indica que los niveles son más bien dinámicos que estáticos, como teorizó van Hiele”.

2.7.3. Proyecto Brooklyn

Este proyecto dirigido por Davis Fuys y Dorothy Geddes del Brooklyn Collage, desarrolló cuatro tareas específicas:

- La traducción de los materiales del trabajo de los van Hiele, del alemán al inglés, y el desarrollo de documentación más detallada sobre la versión conductista de los niveles.
- El desarrollo de tres módulos de evaluación-instrucción para ser usados con sujetos en entrevistas clínicas.
- Entrevistas con alumnos participantes del proyecto.
- Análisis de los niveles de razonamiento sobre material de geometría en tres series de libros de textos de EE.UU.

Los resultados más interesantes de este proyecto fueron:

- La caracterización operacional por la conducta del cuarto nivel de van Hiele.

- La existencia de periodos entre los niveles, donde un estudiante en un periodo transicional entre dos niveles estará fluctuando entre el nivel *n-1* y el nivel n de pensamiento.
- "...los niveles parecen ser complejas estructuras que envuelven los desarrollos de ambos, conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchas de las tareas".

Los tres proyectos mencionados anteriormente centran sus esfuerzos en un marco de investigación geométrico; a continuación se presentarán brevemente tesis de doctorado en el marco del modelo de van Hiele, y que han posibilitado una extensión del modelo a conceptos del análisis matemático:

2.7.4. Memoria para optar al grado de doctor presentada por J. Land

La memoria titulada: "Apropiatness of the van Hiele Model for describing Stundents Cognitive Processes on algebra task as typified by College Students Learning of Functions", presentada en la Universidad de Boston, en 1991, planteó los siguientes objetivos:

- Definir operacionalmente la conducta de los estudiantes en cada nivel usando el modelo de van Hiele para el tema de las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Determinar si las respuestas de los estudiantes a una entrevista escrita pueden ser caracterizadas de acuerdo con los niveles.
- Formular unos descriptores de niveles que describan el conocimiento y el metaconocimiento.
- Explorar el uso de fases para facilitar el recorrido de los estudiantes desde un nivel a otro.

El trabajo buscaba diseñar un instrumento para realizar una evaluación clínica sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes, en conceptos específicos del álgebra, al mismo tiempo que propone los descriptores de niveles correspondientes para esta materia; la innovación de este estudio radica en que aplica los niveles de van Hiele a un área diferente a la de la geometría, sirviendo de base para otras investigaciones que abordan conceptos fundamentales del análisis matemático como son el Concepto de Aproximación local y el de Continuidad, resaltando y concediendo un especial interés a la evolución del razonamiento del alumno.

2.7.5. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Jose L. Llorens

El trabajo de José Luis Llorens Fuster, titulado "Aplicación del modelo de van Hiele al Concepto de Aproximación Local", abre las puertas a lo que se podría llamar una extensión del modelo de van Hiele a conceptos del análisis matemático; dicho trabajo se desarrolló y se aplicó en estudiantes de los últimos grados de secundaria y primer semestre de universidad. Entre sus objetivos centrales se propuso:

- La caracterización mediante descriptores de los niveles I, II y III, en el marco del modelo de van Hiele, para conceptos de aproximación local en su manifestación de recta tangente en una curva en un punto del plano.
- El diseño de un modelo-guión para una entrevista semiestructurada, que permite la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento descritos.
- Verificar que es posible detectar niveles de razonamiento en una muestra de estudiantes seleccionada, al mismo tiempo que se automatiza su adscripción en su correspondiente nivel de razonamiento.

2.7.6. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Pedro Campillo Herrero

El trabajo de Pedro Campillo Herrero, titulado "La Noción de Continuidad desde la Óptica del Modelo de van Hiele", consiste en una propuesta metodológica para la asimilación del concepto de continuidad de Cauchy en niveles elementales, caracterizando mediante los descriptores de los niveles I, II y III, la aplicación del modelo mencionado al concepto de continuidad local, visualizado a través de la imagen de controlabilidad de errores.

El trabajo de investigación, propone entre sus objetivos:

- El diseño de un modelo guión para una entrevista semiestructurada que permita la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento que estudiamos.
- La detección de los niveles de razonamiento de los estudiantes, y la automatización de la adscripción a los mismos, mediante una prueba escrita y el tratamiento estadístico correspondiente.

La tesis también persigue otros objetivos importantes relacionados con el aspecto visual del concepto y las teorías de Vinner. Muestra que los procesos de razonamiento infinito son hecho evidente de que los estudiantes deben evolucionar en su razonamiento, para vencer obstáculos que les impiden comprender adecuadamente el concepto de continuidad.

2.7.7. Memoria para optar al título de doctor presentada por Carlos M. Jaramillo

La memoria titulada "La Noción de Serie Convergente desde la Óptica de los Niveles de van Hiele", presentada por Carlos Mario Jaramillo López, en el año 2000 en la Universidad Politécnica de Valencia (España), utiliza mecanismos de visualización para romper con ideas erradas acerca del infinito. Específicamente muestra que para la longitud de un zig-zag obtenido a partir de segmentos de recta, la acumulación de una cantidad infinita de términos no necesariamente debe tener un resultado infinito.

Con la utilización de entrevistas clínicas semiestructuradas de carácter socrático, se demuestra que es posible determinar los descriptores de los niveles I, II y III de razonamiento frente a la noción de serie convergente, al tiempo que es posible corroborar los resultados obtenidos en la clasificación de los alumnos en su correspondiente nivel, mediante el diseño de un test escrito.

Esta tesis doctoral abre paso a investigaciones posteriores, relativas al concepto de límite, entre ellos el estudio desarrollado por los profesores Carlos Mario Jaramillo López y Leonardo Ceballos Urrego, el cual tuvo como base los resultados encontrados por Jaramillo (2000), y entre sus objetivos estuvo comparar y convalidar estos resultados aplicando el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (A.F.C.M). Además, exploró la existencia de subniveles dentro de cada nivel, específicamente en la noción de convergencia vía longitudes de zig - zags, a la luz del modelo de van Hiele.

Gracias al tipo de análisis desarrollados en esta investigación, se logra no sólo la obtención de los objetivos propuestos en ella, sino que también la validación de una metodología de análisis para estudios de la misma naturaleza, en los que predominan las variables cualitativas.

2.7.8. Memoria para optar al título de doctor presentada por Pedro V. Esteban

La memoria titulada "Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele", presentada por Pedro Vicente Esteban Duarte, en la Universidad Politécnica de Valencia (España) en el año 2000, formula y confirma los descriptores para los niveles I, II y III de la noción estudiada, y la aplicación del modelo de van Hiele a este concepto. Emplea entrevistas clínicas semiestructuradas y de tipo socrático, en las que utiliza el haz de secantes como mecanismo, para definir la recta tangente a una curva plana en un punto dado.

Las entrevistas se caracterizan por enfatizar una componente visual y geométrica acorde con el modelo de van Hiele, y sirvieron de base para diseñar una prueba escrita que permitió confirmar sus resultados en muestras de estudiantes amplias; con la aplicación masiva de esta prueba fue posible desligar la adscripción de un estudiante a un determinado nivel de razonamiento de la subjetividad propia de las entrevistas clínicas.

El trabajo de investigación plantea entre sus objetivos analizar el concepto objeto de estudio a partir de la visualización que se obtiene por medio de los mecanismos del zoom y del haz de secantes, la conclusión obtenida fue que el ambiente gráfico que se crea al trabajar en el ordenador hace que los conceptos sean comprendidos por un mayor número de estudiantes.

2.7.9. Memoria para optar al título de doctor presentada por Andrés de la Torre

La memoria titulada "La Modelización del Espacio y del Tiempo: Su Estudio Vía el Modelo de van Hiele", presentada por Andrés Felipe de la Torre Gómez, en la Universidad Politécnica de Valencia (España), en el año 2000, consta de dos partes: la primera de ellas proporciona una propuesta metodológica para la asimilación del concepto de equipotencia de agregados infinitos de puntos, para alumnos de último grado de bachillerato y del primer año de universidad, y los prepara para comprender la modelización del espacio y el tiempo que se estudia en la segunda parte.

La segunda parte tiene por objetivo elaborar una propuesta metodológica, enfocada a la comprensión del proceso seguido en la formulación del modelo matemático del espacio y el tiempo y a la explicación de los hechos del mundo representativo a la luz del modelo de van Hiele. En esta última parte, De la Torre se sale del contexto geométrico para detectar los niveles de van Hiele verbalmente, analizando razonamiento puro. En esta parte se limita a la realización de entrevistas clínicas.

En ambos casos se proporcionan los descriptores de los niveles I, II y III de van Hiele en los procesos de razonamiento asociados con los conceptos en cuestión y se estudian los obstáculos cognitivos que le impiden al estudiante comprender dichos conceptos.

Capítulo 3

Diseño Metodológico

3.1. Diseño metodológico

A lo largo de este capítulo, se abordará de manera específica el diseño del módulo de instrucción (módulo de aprendizaje) en correspondencia con las fases de aprendizaje y como respuesta a nuestro planteamiento del problema de investigación, para lograr así un avanzado nivel de razonamiento en el estudiante. Del mismo modo, las actividades surgidas del trabajo de campo nos permiten caracterizar cada una de las fases y determinar por cual de éstas debe pasar un estudiante. Es importante resaltar que la teoría del modelo aporta luces al diseño cuidadoso del conjunto de actividades prácticas, y en este mismo sentido, el trabajo de campo nos permite nutrir y aportar de manera directa a la teoría, por lo tanto este proceso de interacción entre práctica y teoría permitirá lograr los resultados esperados.

Se pretende entonces, mostrar la manera cómo se ha logrado confeccionar las actividades que hacen parte del módulo de instrucción y al mismo tiempo su aplicación. Hay que tener en cuenta que el módulo cumple una doble función, una de ellas es discriminar la fase en la que se encuentra un estudiante de acuerdo a su razonamiento al momento de abordar cada una de las actividades y la otra es que el módulo se constituye a sí mismo en una experiencia de aprendizaje, que favorece el progreso de los estudiantes ubicados en un nivel II de razonamiento al nivel inmediatamente superior, para el concepto de convergencia de una suma infinita de términos positivos.

3.2. Diseño del módulo

De acuerdo con el modelo educativo de van Hiele, el progreso de los estudiantes a través de los niveles de razonamiento, se da de manera progresiva, partiendo desde un nivel visual hasta llegar a un nivel de formalización; dichos niveles son secuenciales y jerárquicos, lo que implica que un estudiante no podrá progresar a un nivel de razonamiento si no domina el inmediatamente anterior, así mismo los conceptos implícitamente comprendidos en un nivel llegan a ser explícitamente comprendidos en el siguiente, y de esta manera se pone de manifiesto el nivel de comprensión frente al concepto estudiado.

Lograr el progreso en los niveles de razonamiento es función de las fases de aprendizaje; cada una de ellas posee unos descriptores propios que constituyen las características que indican cuáles son las actividades que un estudiante debe estar en condiciones de realizar y los conceptos que debe poseer para avanzar en cada una de las fases y al mismo tiempo, adquirir elementos para avanzar hacia un nivel III de razonamiento; es así como un estudiante logra progresar en los niveles de razonamiento, atravesando cada una de las fases y apropiándose de los conceptos abordados en ellas. Para la consecución de estos objetivos es fundamental el papel de la instrucción y es labor del docente diseñar experiencias de aprendizaje que propugnen por el perfeccionamiento en los niveles de pensamiento.

Previo al diseño del módulo se uso un guión entrevista, el cual se fue refinando en el transcurso de las entrevistas con los estudiantes, lo que permitió ir elaborando cada uno de los descriptores de las respectivas fases para lograr el diseño de las actividades correspondientes a cada una de ellas.

El módulo de instrucción es una propuesta metodológica para lograr el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento; contiene una serie de experiencias de aprendizaje, diseñadas a la luz de cada una de las fases del modelo; su estructura contempla los elementos fundamentales del proceso de aprendizaje según van Hiele, como lo son el aumento progresivo del lenguaje, el refinamiento de las estructuras mentales mediante la creación de redes de relaciones, los procesos de visualización y la exploración de los conocimientos que poseen los estudiantes a través de preguntas que los lleven a razonar, inferir y conjeturar acerca del concepto.

3.3. Estructura del módulo

El módulo de instrucción diseñado, tiene para cada fase una descripción de los elementos fundamentales que la caracterizan, para el presente estudio son pertinentes al concepto de suma de áreas de figuras planas (convergencia de una serie infinita). En esta descripción y caracterización, se hace énfasis en el progreso que debe presentar la construcción de una red de relaciones elaborada por el estudiante durante el paso por cada una de las fases de aprendizaje.

En la descripción de cada una de las fases, se menciona su objetivo, la función del docente en el proceso de enseñanza, la función y el desempeño de los estudiantes de acuerdo a las construcciones que van haciendo del concepto objeto de estudio. Se hace énfasis en la construcción de redes de relaciones y mapas conceptuales, por lo cual se presenta en cada fase un esquema de lo que debe tener la red de relaciones que deben construir los estudiantes. Además, en cada una de las fases dicha red se mejora, amplía y refina, de acuerdo a los conceptos abordados.

Para cada fase se especifican los conocimientos básicos de los estudiantes y los descriptores que indican cuáles son las acciones y procesos que el estudiante debe abordar para progresar en su nivel de razonamiento. Se señala el objetivo a lograr de acuerdo al conjunto de actividades y la última actividad propuesta para cada fase es la elaboración de una red de relaciones o mapa conceptual que permita porner de manifiesto las construcciones conceptuales que los estudiantes están haciendo y brinde información al docente sobre las fortalezas y posibles errores que se presentan en el proceso de aprendizaje.

El módulo de instrucción diseñado tiene una doble intencionalidad, por un lado contribuye al mejoramiento de los procesos de razonamiento de los estudiantes, frente al concepto de suma de áreas de figuras planas (convergencia de una serie) y por otro contribuye a la labor del docente, pues representa una herramienta cuyo diseño, estructura e intención está direccionado a facilitar el proceso de instrucción.

Gracias a la estructura del módulo, el docente tiene la oportunidad de reflexionar sobre el concepto enseñando, básicamente frente a dos aspectos, en cuanto a las dificultades y fortalezas que se presentan en este proceso identificando cuáles son las más frecuentes y significativas, y en cuanto a la comprensión de los procesos de razonamiento y construcciones conceptuales de los estudiantes, lo cual favorece el proceso de aprendizaje.

De igual manera, la estructura del módulo le permite al estudiante construir y razonar de manera gradual frente a los conceptos, pasando de situaciones concretas a abstractas y viceversa, lo cual le facilita la comprensión de los mismos. El estudiante también se hace conciente de su aprendizaje, identifica cuál es el grado de comprensión que tiene con respecto al concepto objeto de estudio apoyado en la construcción e interiorización de su red de relaciones.

Es importante mencionar que, de acuerdo a los descriptores obtenidos en el trabajo de campo, un estudiante que no logra elaborar una amplia red de relaciones, no podrá alcanzar las dos últimas fases de aprendizaje del modelo, por lo cual no podrá asegurarse que alcanza un nivel avanzado de razonamiento (nivel III).

3.4. Características del módulo

El módulo de instrucción se apoya en el guión entrevista realizado en la tesis de Jurado y Londoño (2005) titulado *"Diseño de una entrevista clínica de carácter socrático para una manifestación de la noción de límite en el marco del modelo de van Hiele"*, en la cual intervienen conceptos tales como área, superficie, serie infinita, aproximación y suma de una serie infinita; es importante mencionar que muchos de los conceptos gravitan alrededor de la noción de límite y están implícitos o encubiertos. En la entrevista se manifiesta el concepto de límite como suma (convergencia) de una serie infinita de términos positivos, utilizando una componente visual geométrica en su aspecto bidimensional, mediante la suma de áreas de figuras geométricas planas (áreas de escaleras).

El presente trabajo de investigación aborda el concepto de convergencia de una serie infinita para términos positivos y lo enmascara en el concepto de suma de áreas de figuras planas, para ello se hace necesario tener en cuenta las características fundamentales del módulo de instrucción, propuesto por los van Hiele.

3.4.1. Carácter socrático del módulo

Sócrates inspira su obra en el arte de preguntar, ilustra su importancia dando prioridad a la discusión, es por esto que la esencia del diálogo socrático la constituye el arte de la conversación; el deseo de instruir llevaba a Sócrates a concentrarse en las necesidades de sus interlocutores y era mediante preguntas simples y aparentemente sencillas que lograba obtener las respuestas que deseaba, sin necesidad de influir directamente en ellas, con ejemplos y cuestionamientos conseguía que sus seguidores accedieran a sus propias verdades, logrando que descubrieran contradicciones que condujeran los planteamientos que él esperaba escuchar.

Las ideologías de Sócrates, se ven plasmadas en los trabajos de uno de sus seguidores: Platón, cuyos escritos adoptaban la forma de diálogos, a través de las cuales se exponían, se discutían y se criticaban ideas filosóficas en el contexto de una conversación o un debate en el que participaban dos o más interlocutores. Los diálogos de Platón, son claros ejemplos de entrevistas de carácter socrático, en ellos, Sócrates parte de las concepciones que tienen sus interlocutores acerca de ciertas cuestiones, trata de llevarlos a que deduzcan la verdad, mostrándoles las contradicciones o carencias que tienen acerca de las concepciones que poseen.

De acuerdo con Jaramillo L. y Campillo H. (2001), *"la entrevista socrática entra dentro de la estructura del modelo educativo de van Hiele, que se fundamenta en la necesidad de una experiencia específica de aprendizaje para que se produzca una evolución en el razonamiento"*. En este sentido y gracias a la estructura del modelo, cabe afirmar que la entrevista socrática constituye una experiencia de aprendizaje que propende por la evolución del razonamiento; ésta tiene una doble intencionalidad, en primer lugar observar la evolución del razonamiento, desde un razonamiento básico hasta el nivel más alto, y en segundo lugar lograr la asimilación y comprensión de conceptos matemáticos, partiendo de conceptos básicos de la geometría y su respectiva visualización, sin perder de vista, por ningún motivo el lenguaje.

De acuerdo a lo anterior y teniendo en cuenta el estudio desarrollado por Jurado y Londoño (2005), el carácter socrático del módulo obliga a influir en algunos momentos para provocar la reinterpretación y readaptación de ciertos conceptos que el estudiante tiene en su mente. Esto se hace mediante un guión entrevista de carácter socrático, realizando diferentes tipos de preguntas y aportes de información, que brindan a los estudiantes elementos para que alcancen a comprender los procesos correspondientes que deben abordar, para que obtengan herramientas que les permitan interpretar los conceptos y establecer relaciones pertinentes. Por otro lado, la estructura del módulo también permite conocer cómo se va formando el concepto de convergencia en la mente del estudiante y a su vez permite revisar sus concepciones, ideas y conocimientos para determinar qué se sabe y cuáles son sus carencias para razonar sobre el concepto objeto de estudio.

El módulo está estructurado dentro de un marco visual, es decir, el concepto es introducido inicialmente por medio de una componente visual - geométrica, (divisiones sucesivas de rectángulos), evitando al máximo notaciones o simbolizaciones engorrosas y sobre todo, que el estudiante necesite recurrir a herramientas algorítmicas o realizar cálculos computacionales. Se pretende inicialmente estimular su razonamiento con procesos básicos de visualización, pues según Jaramillo y Campillo (2001), "ésta es la forma en la que más se ha trabajado el modelo y la manera como se pretende introducir un concepto matemático susceptible de un acompañamiento visual geométrico". Con esto se busca evitar problemas de comprensión derivados de nomenclaturas, sin embargo, cabe aclarar que lo que se pretende finalmente es que el estudiante alcance un nivel de razonamiento formal del concepto, sin necesidad de la visualización, y donde de acuerdo al paso por cada una de las fases, integra el lenguaje matemático riguroso y preciso relativo al concepto de suma de áreas de figuras planas (convergencia de una suma).

3.4.2. El papel del lenguaje en la construcción de redes de relaciones y mapas conceptuales

En el marco del modelo educativo de van Hiele, el lenguaje y la evolución de éste constituyen un aspecto fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje; las actividades del módulo retoman este aspecto fuertemente y, dado esto, el trabajo propuesto se ve mediado por actividades que proponen la elaboración de redes de relaciones que proporcionen elementos para la construcción de mapas conceptuales.

El mapa conceptual representa dentro de todo este proceso, una herramienta que permite poner de manifiesto la red de relaciones elaborada mentalmente por los estudiantes durante el proceso de instrucción y aprendizaje; para la elaboración de redes de relaciones y de mapas conceptuales es primordial el lenguaje. A medida que un estudiante incrementa el uso progresivo de términos correspondientes al concepto objeto de estudio, y además, expresa de manera clara y precisa los métodos de razonamiento utilizados, evidencia los posibles errores que se pueden presentar en el proceso de conceptualización y el nivel de razonamiento que tiene frente al concepto; la amplia comprensión de las estructuras matemáticas le permitirán progresar a un nivel de razonamiento superior.

La elaboración de mapas conceptuales son una forma rigurosa y detallada de abordar el concepto, además exige mayor análisis y cuidado para su elaboración, pues es una herramienta que hace explícita la forma de comprensión de los estudiantes y con esto la estructura mental que poseen, de acuerdo a su propia red de relaciones.

Dado que la elaboración de un mapa conceptual no necesariamente es simple, se inicia con la elaboración de redes de relaciones, estas no solo pueden preceder perfectamente la construcción de un mapa, sino que también dentro del modelo de van Hiele son consideradas como imprescindibles para la construcción del concepto, es así como van Hiele considera que, según Jaramillo López y Esteban Duarte, (2006, p. 116) el paso de un nivel al siguiente se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones obtenida al incorporar a la anterior nuevos conceptos y nuevas relaciones (más complejas y más abundantes que las de la red anterior) entre ellos, sin la existencia de una red de relaciones el pensamiento es imposible.

Entre los componentes de un mapa conceptual y los de una red de relaciones se encuentran elementos en común, y a la misma vez complemantarios. Mediante un mapa conceptual los estudiantes hacen explícitos los procesos de razonamiento construidos, y están inmersos, no sólo, en la red de relaciones elaborada, sino también en las estructuras mentales que ellos poseen.

3.4.3. Conocimientos previos

Las preguntas a los estudiantes acerca de situaciones familiares o cotidianas, les posibilitan reflexionar y responder de acuerdo con el bagaje de conocimientos previos acerca del concepto a tratar, de manera que puedan manifestar todas las ideas que tenga alrededor del concepto estudiado. De acuerdo con Ausubel (1991):

> ...la adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas

> pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una interacción de la nueva información con ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado de la interacción que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una asimilación de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognitiva altamente diferenciada.

En este sentido, van Hiele afirma que: “El primer nivel es el nivel en el que los estudiantes piensan en su vida cotidiana, en el cual ellos tienen sus experiencias y toman sus decisiones”; es claro que partir de conocimientos previos permite, tanto a docentes como a estudiantes, identificar contradicciones, carencias o aciertos, frente a conceptos matemáticos.

3.4.4. Aportes de información

Algunas de las preguntas que se formulan brindan información necesaria (definición de nuevos conceptos, relaciones con otras ideas afines, ampliación del vocabulario, entre otros), fomentando pensamiento discursivo en el estudiante, para que razone y logre la comprensión del concepto, además está en concordancia con el carácter socrático del módulo. Los aportes de información presentan conceptos importantes que favorecen el desarrollo del módulo y contribuyen a la construcción de la red de relaciones, en tanto le brinda a los estudiantes, no sólo la información deseada sino también confianza para continuar con la construcción del concepto.

Van-Hiele habla acerca de la importancia del aporte de información cuando se refiere a las preguntas-comprensión:

> “De ahí que tendremos que perseguir una relación profesor-alumno en que el primero no actúe como juez sino como persona en quien el alumno pueda confiar, una tarea que considerando la historia de la enseñanza no resulta sencilla. En este tipo de relación, la pregunta-comprensión adquiere un carácter muy distinto. En cuanto se establece esta confianza entre el conductor y el sujeto las preguntas-comprensión ofrecen la información deseada tanto por el conductor como por el sujeto. La pregunta-comprensión debe ser de tal manera que resulte nueva para el sujeto. Sólo así el sujeto podrá cerciorarse de su comprensión cuando el conductor califique su respuesta de correcta…”.

3.4.5. Movilización del pensamiento

La movilización del pensamiento es la extensión, ampliación o modificación de nuevas estructuras sobre las cuales las concepciones nuevas que se van generando a través de la entrevista complementan las anteriores o las modifican (Jurado Hurtado y Londoño Cano, 2005). Es necesario que los estudiantes expliciten lo que sabe con respecto al concepto objeto de estudio, por lo que en ocasiones se hace necesario hacer preguntas similares o afines varias veces con el fin de obtener de ellos respuestas más elaboradas, toda vez que haya sido sometido a un proceso de razonamiento, producto de una indagación intencionada. El módulo de instrucción debe posibilitar que los estudiantes elaboren conjeturas que les permitan modificar muchas ideas del concepto en cuestión. Para esto, se emplean diferentes mecanismos como visual-geométricos, verbales o escritos, entre otros.

3.4.6. Problematización de las ideas y paso por los tres momentos

La reflexión por parte de los estudiantes sobre sus concepciones alrededor del concepto, les permite hacerse concientes y enriquecer su propio saber o explicitar sus carencias o dificultades. En el último caso, los estudiantes presentan un estado de contradicción, de problematización, de conflicto interno, de confrontación con sus ideas; algunas veces sus ideas cambiarán totalmente la estructura de pensamiento que inicialmente tenían del concepto (disonancia cognitiva), en otras, requerirán de la ayuda del docente para elaborar, modificar o ampliar sus nuevas estructuras de pensamiento. Los estudiantes deberán centrar su atención en el conflicto de ideas para conseguir una mayor objetividad en sus respuestas. De esta manera y de acuerdo al carácter socrático del módulo, los estudiantes pasan por tres momentos: Creen saber la respuesta a la pregunta, luego, a través de las mismas preguntas se dan cuenta que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantean la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto.

3.5. Descriptores de niveles

Entre los descriptores de fase y los descriptores de nivel es necesario establecer una correspondencia que permita reconocer la relación que existe entre ambas caracterizaciones, pues están estrechamente ligados pero claramente diferenciados, es decir, los descriptores de fase describen un conjunto de características que indican si el estudiante tiene o no condiciones para abordar las actividades propuestas en cada fase y así progresar en su nivel de razonamiento, dichos descriptores de fase de acuerdo al nivel de razonamiento alcanzado, se relacionaron con los descriptores de nivel propuestos en el trabajo de investigación de los magíster Flor María Jurado H. y René Alejandro Londoño (2005).

A continuación se presentarán los descriptores de nivel correspondientes para los estudiantes que pertenecen a un nivel II de razonamiento y que fueron definidos en el trabajo de investigación antes mencionado.

3.5.1. Descriptores nivel II (De análisis)

El estudiante:

- Reconoce el infinito potencial como proceso, mediante situaciones concretas relacionadas con el concepto de área.
- Admite que un rectángulo es infinitamente divisible.
- Reconoce que una superficie rectangular se puede representar como una escalera infinita decreciente. Empieza a percibir el dinamismo del concepto.
- Realiza procesos de aproximación. Consigue acumulaciones parciales de áreas de escaleras.

3.5.2. Descriptores nivel III (De clasificación o relación)

El estudiante:

- Reconoce Dada una escalera infinita decreciente, intenta disponerla de manera creciente para establecer si es posible calcular su área.
- Proporciona y aplica un método adecuado para determinar cuando una escalera infinita decreciente tiene área.

Afirma sin demasiadas dudas que:

- Toda escalera infinita decreciente que tiene razón, tiene área.
- Toda escalera infinita decreciente que tiene razón no es posible disponerla de manera creciente.
- Toda escalera infinita que tiene área no es posible disponerla de manera creciente.

Descriptor de separación del nivel III

- Manifiesta la necesidad de saber bajo qué condiciones una escalera infinita tiene área.

El trabajo de campo permite afirmar que cuando un estudiante ha respondido satisfactoriamente las actividades correspondientes a la fase 4 y manifiesta las características mencionadas en el descriptor de separación del nivel III, es posible ubicarlo en dicho nivel, sin embargo esto no significa que vislumbra procesos de formalizacion, como si lo haría si manifestara un avanzado razonamiento frente a los siguientes descriptores, que representan las características o condiciones que debe presentar un estudiante que ha experimentado las diferentes actividades propuestas en el módulo de instrucción diseñado, así que el cumplimiento de estos descriptores garantiza que el estudiante ha progresado en su nivel de razonamiento.

3.6. Descriptores de fases

La presente investigación pretende por un lado que las actividades propuestas mejoren el razonamiento de los estudiantes y que avancen en cada una de las fases y por otro, poder determinar o caracterizar cada una de la fases, es por esto que de acuerdo a los niveles II y III del estudio mencionado, se proponen para cada una de las fases, una serie de descriptores que nos permitirán determinar si el estudiante está o no comprendiendo los procesos realizados y mejorando su razonamiento, así como también, identificar la fase en la que muestra mejor desempeño, pues el paso exitoso por todas éstas garantizará el progreso del nivel II al nivel III de razonamiento.

A continuación se presentan los descriptores correspondientes a cada una de las fases de aprendizaje, para el concepto de suma de áreas de figuras planas (convergencia de una serie infinita). Estos descriptores responden a los descriptores de los niveles II y III mencionados, y están en correspondencia con el trabajo de campo, allí se han podido validar gracias a las entrevistas con los estudiantes y sus respuestas oportunas. el trabajo de campo, permitió confirmar una vez más la necesidad de fundamentar los descriptores de cada fase y tener en cuenta que un estudiante está en la fase n si ya ha pasado por la fase n - *1*, dado el carácter jerárquico del modelo.

3.6.1. Fase 1

- Diferencia los cuadriláteros, estableciendo clasificaciones.
- Reconoce las propiedades de los cuadriláteros.

- Reconoce el concepto de área como la medida de una cantidad de superficie.
- Identifica visualmente relaciones parte-todo para áreas rectangulares.
- Suma geométricamente áreas de rectángulos.
- Establece una red de relaciones que vincula los conceptos comprendidos en esta fase.

3.6.2. Fase 2

- Comprende la división de un retángulo en dos rectángulos de igual área, de infinitas maneras.
- Realiza procesos de razonamiento finito e infinito.
- Comprende el proceso de contrucción de una escalera infinita a partir de la división sucesiva de un rectángulo.
- Percibe que la suma de un número infinito de rectángulos puede ser finita bajo ciertas condiciones.
- Comprende el concepto de razón entre áreas.
- Representa aritméticamente una suma finita en correspondencia con su aspecto geométrico.
- Establece una red de relaciones y esboza un mapa conceptual de los conceptos abordados hasta el momento.

3.6.3. Fase 3

- Identifica la estructura de una escalera infinita decreciente que tiene área.
- Comprende que la infinita suma de áreas de rectángulos puede tener resultado finito.
- Reconoce la estructura y características de la escalera armónica.
- Explicita sus razonamientos a través de socializaciones.
- Representa aritméticamente una suma infinita.
- Elabora un mapa conceptual de acuerdo a su red de relaciones, lo cual refleja la evolución en su razonamiento.

3.6.4. Fase 4

- Identifica condiciones desde la visualización para determinar la suma de una escalera infinita.
- Establece una correspondecia entre las áreas de los rectángulos de una escalera y los términos de una suma aritmética.
- Reconoce sumas aritméticas equivalentes a partir de la visualización.
- Comprende desde la visualización la divergencia de la escalera armónica.
- Aplica en situaciones similares el concepto de convergencia comprendido hasta el momento.
- Realiza un mapa conceptual, vinculando otros conceptos que complementan la red de relaciones construida.

3.6.5. Fase 5

- Representa de manera aritmética una suma infinita de términos positivos, a partir de distintos contextos geométricos.
- Argumenta las condiciones necesarias para determinar la convergencia o no de una suma infinita.
- Elabora un mapa conceptual que pone de manifiesto las ideas relacionadas con el concepto de convergencia de una suma infinita.

Es importante insistir que un estudiante no puede progresar a la fase 5 sino ha pasado por cada una de las fases anteriores. Pretendemos así, estar en coherencia con las características propias de los niveles de razonamiento, los cuales son de carácter jerárquico, recursivo y secuencial, entre otros.

De acuerdo a lo anterior, el estudio brindó especial cuidado en diseñar actividades para cada una de las fases, de modo que permitieran el establecimiento de cada uno de los descriptores correspondientes, y que a su vez, tuviesen una estrecha relación con los descriptores de nivel para lograr uno de los objetivos fundamentales, el cual es la promoción del estudiante del nivel II al nivel III de razonamiento, en el concepto objeto de estudio. Insistiendo que el guión entrevista, propuesto para el desarrollo del trabajo de campo, alumbró de manera reiterada la confección de los descriptores de las fases y el perfeccionamiento del mismo, y viceversa. Todo esto condujo a una propuesta bastante refinada del módulo de instrucción.

3.7. Módulo de instrucción

3.7.1. Fase 1: información

En esta fase se pretende informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que se va a trabajar, el tipo de problemas que se van a plantear, los materiales que se van a utilizar. Además, los estudiantes aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos e imprescindibles, relacionados con el concepto objeto de estudio.

El estudiante debe iniciar la construcción de una red de relaciones basado en los conceptos de área, rectángulos y superficies, entre otros. Ésta le permitirá ser conciente del conocimiento que posee, establecer asociaciones entre las ideas previas y las nuevas ideas que debe construir con el propósito de ampliarla y fortalecerla. Por lo tanto, las orientaciones impartidas por el profesor, para desarrollar las actividades respectivas de cada fase, deben apuntar constantemente a la construcción de asociaciones que permitan consolidar relaciones significativas entre los elementos relacionados con el concepto objeto de estudio. Dicha red puede ser modificada, ampliada y mejorada de acuerdo a las interpretaciones y modificaciones que el estudiante hace durante el proceso de aprendizaje - enseñanza, abordado en esta fase.

Objetivos

- Indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes en relación a las figuras geométricas, específicamente los cuadriláteros.
- Reconocer las proporciones guardadas entre diferentes áreas.
- Realizar una red de asociaciones entre conceptos como actividad previa a un mapa conceptual relacionado con los cuadriláteros.
- Manipular herramientas virtuales como un geoplano virtual y el software cmap-tools.

Conocimientos básicos

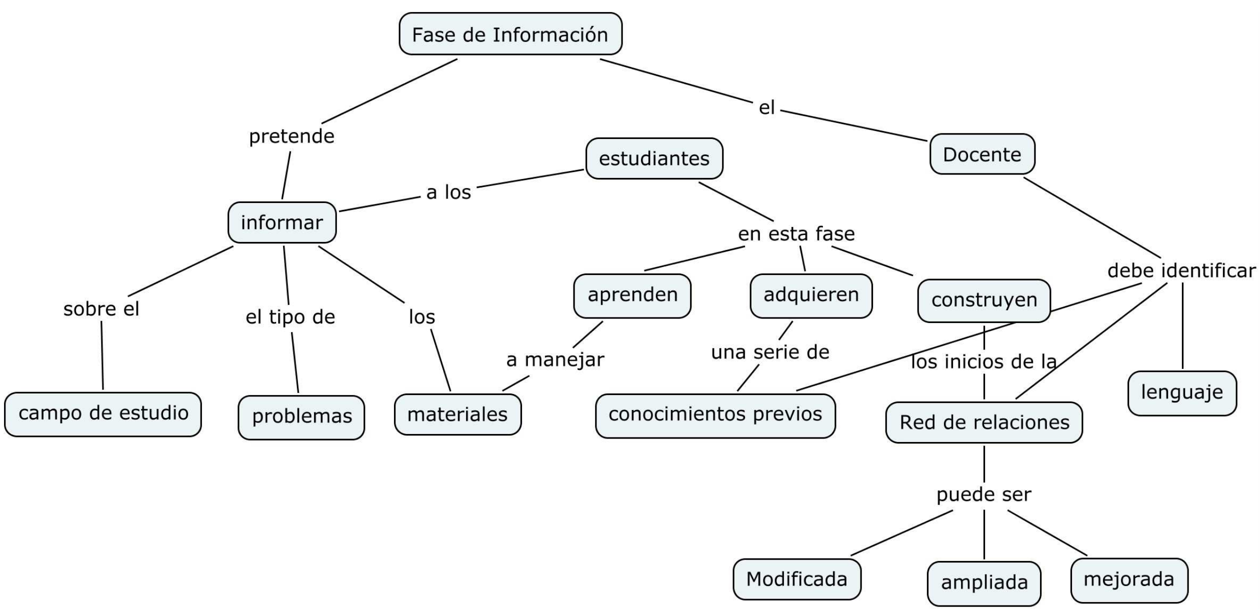
En esta fase se tratarán los siguientes conceptos: cuadriláteros, cuadrado, rombo, rectángulo, paralelogramo, paralelismo, simetrías, áreas, polígono, trapecio, relación parte todo. También se realizarán actividades con un geoplano virtual y el software cmap-tools.

Descriptores

- Diferencia los cuadriláteros, estableciendo clasificaciones.
- Reconoce las propiedades de los cuadriláteros.
- Reconoce el concepto de área como la medida de una cantidad de superficie.
- Identifica visualmente relaciones parte-todo para áreas rectangulares.
- Suma geométricamente áreas de rectángulos.
- Establece una red de relaciones que vincula los conceptos comprendidos en esta fase.

Mapa Conceptual

El siguiente mapa conceptual representa el proceso que será desarrollado durante esta fase.



Secuencia de Actividades

- Reconocimiento y construcción de figuras geométricas.
- Clasificación de figuras geométricas de acuerdo con sus propiedades.
- Razones entre áreas.

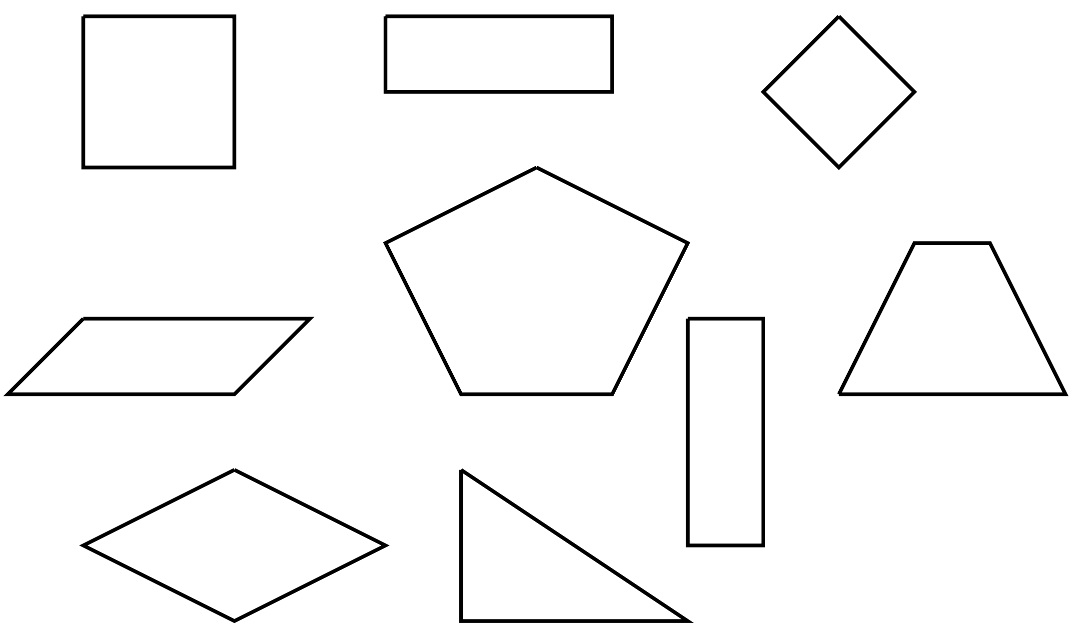
- Elaboración de red de relaciones que integren los elementos abordados en las diferentes actividades.
- Manipulacion del geoplano y el software cmap-tools

Actividad 1

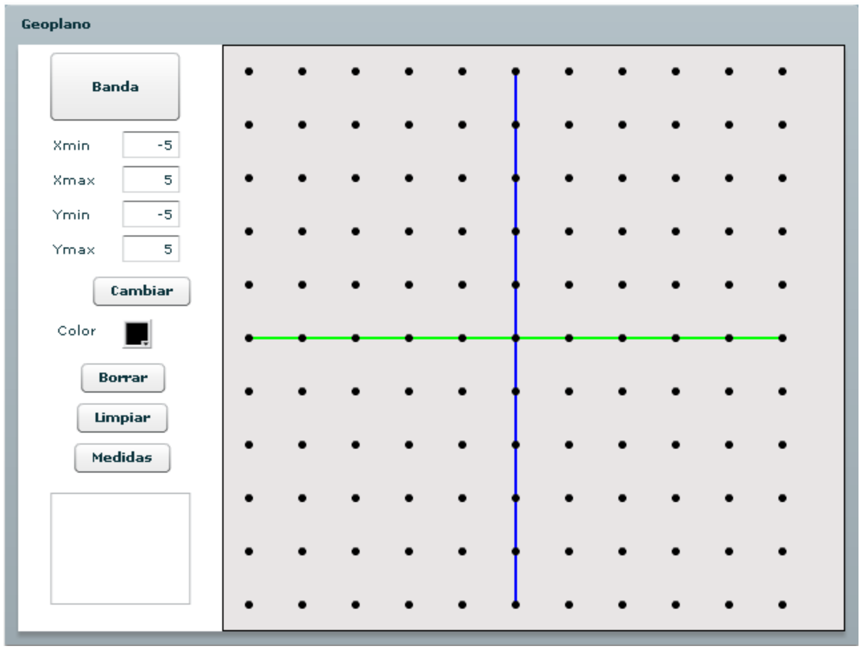
Objetivo de la actividad

- Reconocer y construir las figuras geométricas propuestas (cuadriláteros), enfatizando para cada una de ellas sus características y diferencias respectivamente.

1. Nombra las siguientes figuras geométricas



2. Utiliza el siguiente geoplano virtual, en caso de no tener acceso se puede utilizar un geoplano convencional



Geoplano creado por Wizard-3d y MATIC S.A.S

Ahora, con las diferentes bandas, construye un:

Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo, Trapecio, Trapezoide, Rombo y un Trapecio isósceles.

Realiza otras figuras que sean cuadriláteros y descríbelas.

3. ¿Identificas las similitudes que dichas figuras tienen con respecto a sus lados, sus ángulos, entre otras? Menciona algunas de ellas.

4. Completa el siguiente cuadro marcando con una X, la relación o propiedad que cumple cada una de las figuras geométricas:

Relaciones	**Todos los lados son congruentes**	**Los lados opuestos son congruentes**	Los lados opuestos son paralelos	Las diagonales ángulos de los polígonos	Los ángulos opuestos son congruentes	Las diagonales son congruentes	Las diagonales son perpendiculares
Paralelogramo							
Rectángulo							
Rombo							
Cuadrado							
Trapecio							
Trapecio Isoceles							
Trapezoide							

Actividad 2

Objetivo de la actividad

- Analizar los elementos de los cuadriláteros, para facilitar el establecimiento de relaciones que permitan generalizar las propiedades de éstos.

Dados los siguientes enunciados, responde cada uno de ellos señalando con una X la opción que consideres correcta.

1. Un paralelogramo es:

   a. Un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos.
   b. Un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
   c. Un cuadrilátero con cuatro lados iguales.
   d. Un cuadrilátero, con al menos dos lados paralelos.
   e. Ninguna de las anteriores.

2. Un paralelogramo cumple:

   a. Sus ángulos opuestos son iguales.
   b. Sus diagonales son iguales.

c. Sus diagonales son perpendiculares.
d. Sus ángulos son rectos.
e. Ninguna de las anteriores.

3. Un rectángulo es:

a. Un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos.
b. Un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
c. Un cuadrilátero regular.
d. Un cuadrado.
e. Ninguna de las anteriores.

4. Un rectángulo cumple:

a. Sus diagonales son iguales y perpendiculares.
b. Sus diagonales son iguales.
c. Sus diagonales son perpendiculares.
d. Sus diagonales son diferentes y no necesariamente perpendiculares.
e. Ninguna de las anteriores.

5. Un rectángulo es un polígono que se caracteriza por:

a. Ser un paralelogramo con sus cuatro ángulos rectos.
b. Tener al menos dos ángulos rectos.
c. Tener sus lados congruentes.
d. La suma de sus ángulos interiores es de 180^{o}.
e. Ninguna de las anteriores.

6. Del área de un rectángulo, se puede afirmar que:

a. Se mide en unidades cúbicas.
b. Representa las dimensiones del rectángulo.
c. Es la mitad de la base por la altura.
d. Es la medida de la superficie rectangular.
e. Ninguna de las anteriores.

7. Un cuadrado es:
    a. Un cuadrilátero regular.
    b. Un cuadrilátero con todos los lados iguales.
    c. Un cuadrilátero con todos los ángulos iguales.
    d. Un cuadrilátero irregular.
    e. Ninguna de las anteriores.
8. Un cuadrado cumple:
    a. Sus diagonales son iguales.
    b. Sus diagonales son perpendiculares en sus puntos medios.
    c. Sus diagonales son iguales y perpendiculares en sus puntos medios.
    d. Sus diagonales son diferentes y no necesariamente perpendiculares.
    e. Ninguna de las anteriores.
9. Los rectángulos y los cuadrados se relacionan porque:
    a. Todos los rectángulos son cuadrados.
    b. Algunos cuadrados son rectángulos.
    c. Todos los cuadrados son rectángulos.
    d. No todos los cuadrados son rectángulos.
    e. Ninguna de las anteriores.
10. Un rombo es:
    a. Un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos.
    b. Un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
    c. Un cuadrilátero con los cuatro lados iguales.
    d. Un cuadrilátero con los ángulos iguales dos a dos.
    e. Ninguna de las anteriores.
11. Un rombo cumple:
    a. Sus diagonales son perpendiculares en sus puntos medios.
    b. Sus diagonales son iguales.

c. Sus diagonales son iguales y perpendiculares en sus puntos medios.
d. Sus diagonales son diferentes y no necesariamente perpendiculares.
e. Ninguna de las anteriores.

12. Un romboide es:

    a. Un paralelogramo cuyos ángulos son rectos y sus lados son iguales.
    b. Un paralelogramo cuyos ángulos no son rectos y sus lados son iguales.
    c. Un paralelogramo cuyos ángulos no son rectos y no tiene todos los lados iguales.
    d. Un paralelogramo cuyos ángulos son rectos y sus lados no son iguales.
    e. Ninguna de las anteriores.

13. Un trapecio es:

    a. Un cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
    b. Un cuadrilátero con dos lados paralelos y otros dos no.
    c. Un cuadrilátero que tiene los lados paralelos dos a dos.
    d. Un cuadrilátero con dos de sus lados paralelos e iguales.
    e. Ninguna de las anteriores.

14. Un trapezoide es:

    a. Un cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
    b. Un cuadrilátero con dos lados paralelos y otros dos no.
    c. Un cuadrilátero que tiene los lados paralelos dos a dos.
    d. Un cuadrilátero con todos sus lados paralelos.
    e. Ninguna de las anteriores.

15. Un trapecio con dos ángulos rectos se llama:

    a. Isósceles.
    b. Equilátero.
    c. Recto.
    d. Equiángulo.
    e. Ninguna de las anteriores.

16. Un trapecio con los lados no paralelos iguales se llama:

    a. Isósceles.
    b. Equilátero.
    c. Recto.
    d. Escaleno.
    e. Ninguna de las anteriores.

17. Los lados paralelos de un trapecio se llaman:

    a. Altura.
    b. Base.
    c. Perímetro.
    d. Paralelogramos.
    e. Ninguna de las anteriores.

18. La distancia entre los lados paralelos de un trapecio se llama:

    a. Altura.
    b. Base.
    c. Perímetro.
    d. Lados.
    e. Ninguna de las anteriores.

19. Si dibujas dos segmentos que sean perpendiculares en sus puntos medios y unes sus extremos, obtienes un cuadrilátero. ¿Qué tipo de cuadrilátero es si sabemos que los dos segmentos tienen la misma longitud?

    a. Cuadrado.
    b. Rombo.
    c. Trapecio.
    d. Trapezoide.
    e. Ninguna de las anteriores.

20. Si dibujas dos segmentos que sean perpendiculares en sus puntos medios y unes sus extremos, obtienes un cuadrilátero. ¿Qué tipo de cuadrilátero es si sabemos que los dos segmentos tienen distinta longitud?

    a. Rectángulo.
    b. Romboide.
    c. Trapezoide.
    d. Cuadrado.
    e. Ninguna de las anteriores.

21. Dibuja dos segmentos que se cortan en sus puntos medios y no sean perpendiculares. Une sus extremos y di qué tipo de cuadrilátero se obtiene si los dos segmentos son iguales.

    a. Rectángulo.
    b. Romboide.
    c. Trapezoide.
    d. Cuadrado.
    e. Ninguna de las anteriores.

22. Dibuja dos segmentos que se cortan en sus puntos medios y no sean perpendiculares. Une sus extremos y di qué tipo de cuadrilátero se obtiene si los dos segmentos No son iguales.

    a. Rectángulo.
    b. Romboide.
    c. Trapezoide.
    d. Cuadrado.
    e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 3

Objetivo de la actividad

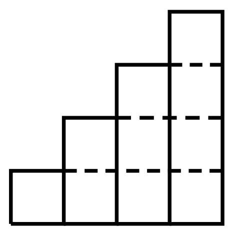
- Reconocer la unidad cuadrada como la medida de una superficie, estableciendo razones entre éstas.

Aporte de información

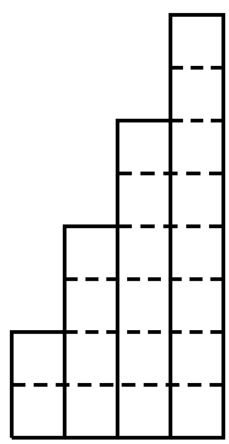
La noción de superficie hace referencia a la forma geométrica. Existen superficies rectangulares, triangulares, circulares, etc. Por otro lado, la noción de área hace referencia a la medida de una superficie (cantidad de superficie).

Se llamará escalera a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de modo tal, que cada rectángulo tenga igual base y esté contiguo al otro en forma horizontal.

Los siguientes rectángulos están dispuestos en forma de escalera que crece hacia la derecha, cada uno de ellos tiene la misma base, pero sus alturas difieren en una unidad.



1. Si se duplica la altura de cada rectángulo de la figura anterior, así:



¿Qué pasa con el área total de la nueva escalera?

a. No aumenta.
b. Se cuadruplica.
c. Se duplica.
d. No varía, aunque la altura cambia.
e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información

Razón: Es la comparación entre dos cantidades a y b mediante su cociente, el cual se representa como $\frac{a}{b}$, con a y $b \in Z$, con $b \neq 0$.

2. De acuerdo con la información anterior, podemos decir que la razón entre el área de la escalera inicial y el área de la escalera que resulta al duplicar la altura de los rectángulos, es de:

   a. Un medio.
   b. El doble.
   c. Un cuarto.
   d. El cuádruple.
   e. Ninguna de las anteriores.

3. Al triplicar la altura de cada rectángulo, ¿cuál es el área total de la nueva escalera con respecto al área de la escalera inicial?

   a. Un tercio.
   b. El cuádruple.
   c. El triple.
   d. La mitad.
   e. Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cuál es la razón entre el área de la escalera inicial y el área que resulta al triplicar la altura de los rectángulos?

   a. El triple.
   b. Un tercio.
   c. Un quíntuple.
   d. Uno quinto.
   e. Ninguna de las anteriores.

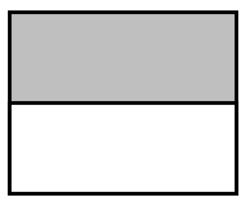
Actividad 4

Objetivo de la actividad

- Identificar relaciones parte-todo para diferentes áreas.

Aporte de información Disponemos de una figura plana rectangular.

Iniciamos el proceso de dividir un rectángulo en dos partes iguales y sombreando la superficie superior, como lo muestra la siguiente figura:



1. ¿Qué razón representa el rectángulo no sombreado, con respecto a la superficie total?
   a. La mitad.
   b. El doble.
   c. Un tercio.
   d. El triple.
   e. Ninguna de las anteriores.

Continuamos el proceso de división y sombreo, usando la superficie que ha quedado sin sombrear, dividiéndola en dos partes iguales y sombreando la parte superior de ésta, de la siguiente manera:

2. ¿Qué razón representa la nueva superficie sombreada con respecto a la superficie sombreada inicialmente?

    a. La mitad.
    b. Un cuarto.
    c. Un tercio.
    d. Tres cuartos.
    e. Ninguna de las anteriores.

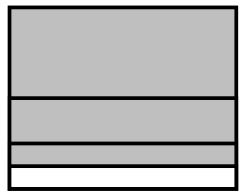
3. ¿Qué razón representa el rectángulo no sombreado con respecto a la superficie total?

    a. La mitad.
    b. Un cuarto.
    c. Un tercio.
    d. El doble.
    e. Ninguna de las anteriores.

4. La suma de las regiones sombreadas, para la última figura, es:

    a. Un medio más un medio
    b. Un medio menos un cuarto.
    c. Uno menos un cuarto.
    d. Un medio más un octavo.
    e. Ninguna de las anteriores.

Ahora, continuamos el proceso de división en dos partes iguales de la superficie que ha quedado sin sombrear, sombreando la parte superior de ésta, como lo indica la figura:



5. ¿Qué razón representa el rectángulo no sombreado de esta última figura, con respecto a la superficie total?
   a. Es la mitad.
   b. Es un cuarto.
   c. Es un octavo.
   d. Es un dieciseisavo.
   e. Ninguna de las anteriores.
6. La suma de las regiones sombreadas, para la última figura, es:
   a. Un medio más un cuarto
   b. Un medio menos un octavo.
   c. Uno menos un octavo.
   d. Un medio más un octavo.
   e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 5

Objetivo de la actividad

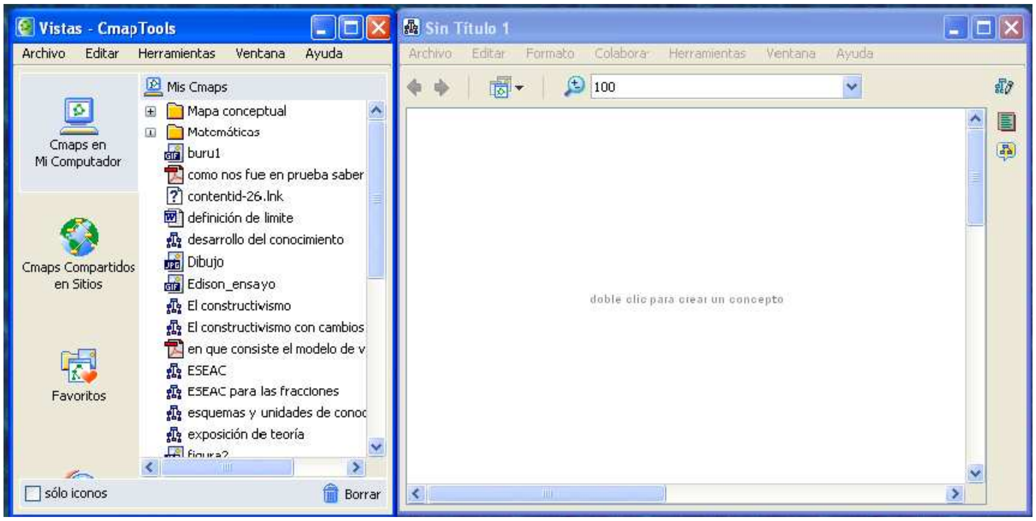
- Elaborar una red de relaciones que vincule las ideas y conceptos abordados en las actividades desarrolladas hasta el momento.

Procedimiento para la manipulación del software Cmap-Tools

1. Instalación del software

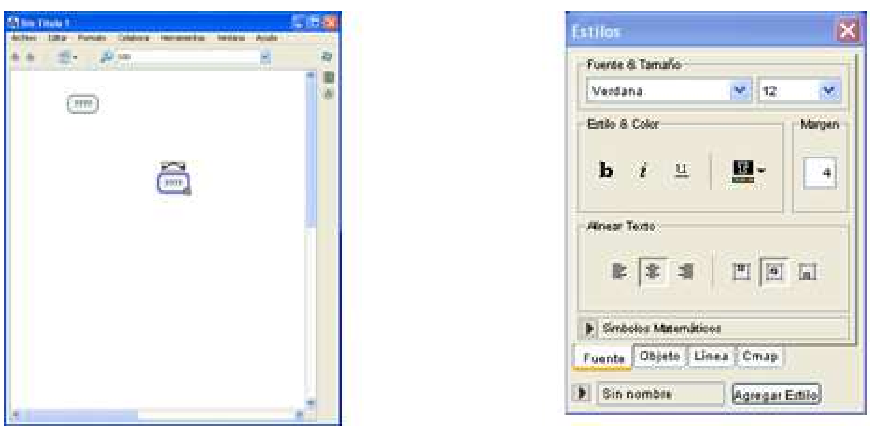
   http://cmap.ihmc.us/
   http://cmap.ihmc.us/download/

2. Una vez instalado el programa, accedemos a él, desde el menú de inicio Cmap-tools y encontramos una ventana similar a la siguiente:



A la Izquierda, Manipulación de mapas y archivos. A la derecha, Espacio para la creación y modificación de mapas

3. Posteriormente en la ventana para la creación de cmap, se presiona doble clic, en el espacio en blanco, para insertar un nuevo concepto así:



A la izquierda, Espacio para la creación y modificación de mapas. A la derecha ventana de estilos para la modificación del mapa conceptual

4. Introduce todos los conceptos abordados en esta fase y establece todas las posibles relaciones que entre éstos pueden existir.

3.7.2. Fase 2: orientación dirigida

En esta fase, los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de la reflexión y el razonamiento, producto de la interacción con el material que les ha sido proporcionado. El profesor diseña cuidadosamente una secuencia de actividades que le posibilitan a los estudiantes la exploración de ideas y conceptos que subyacen a estas actividades abordadas. Así, ellos comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio. En esta fase se proporcionan condiciones para que el docente se familiarice con las características de las estructuras mentales que los estudiantes poseen, dichas estructuras han sido ya constituidas, gracias a los conocimientos previos y las experiencias de ellos. Sin embargo, dado que una estructura puede ser flexible, durante el proceso de instrucción los estudiantes pueden construir nuevas relaciones o modificar las que tenía con el proposito de favorecer el fortalecimiento de la estructura correspondiente al concepto objeto de estudio. Muchas de las actividades en esta fase son tareas paso a paso que producen una respuesta específica.

En esta fase se continúa con la construcción de la red de relaciones, se refina, se amplía y se modifica; la red de relaciones constituye una actividad previa a la construcción de mapas conceptuales. La nueva red es más compleja, ya que vincula más conceptos que la anterior. Además, explicita la manera cómo el estudiante está relacionando las temáticas abordadas, y más importante aún, posibilita la identificación de posibles errores conceptuales. Es importante resaltar que la red de relaciones permite poner de manifiesto las distintas asociaciones mentales y las respectivas conexiones que los estudiantes deben realizar para lograr el razonamiento requerido con respecto al concepto objeto de estudio.

Objetivo

- Facilitar a los estudiantes el proceso de construcción de red de relaciones correspondiente al concepto objeto de estudio, mediante actividades paso a paso que les permitan avanzar en su razonamiento y mejorar en su proceso de aprendizaje.

Conocimientos básicos

Polígonos, cuadriláteros, áreas de cuadriláteros, razón.

Descriptores

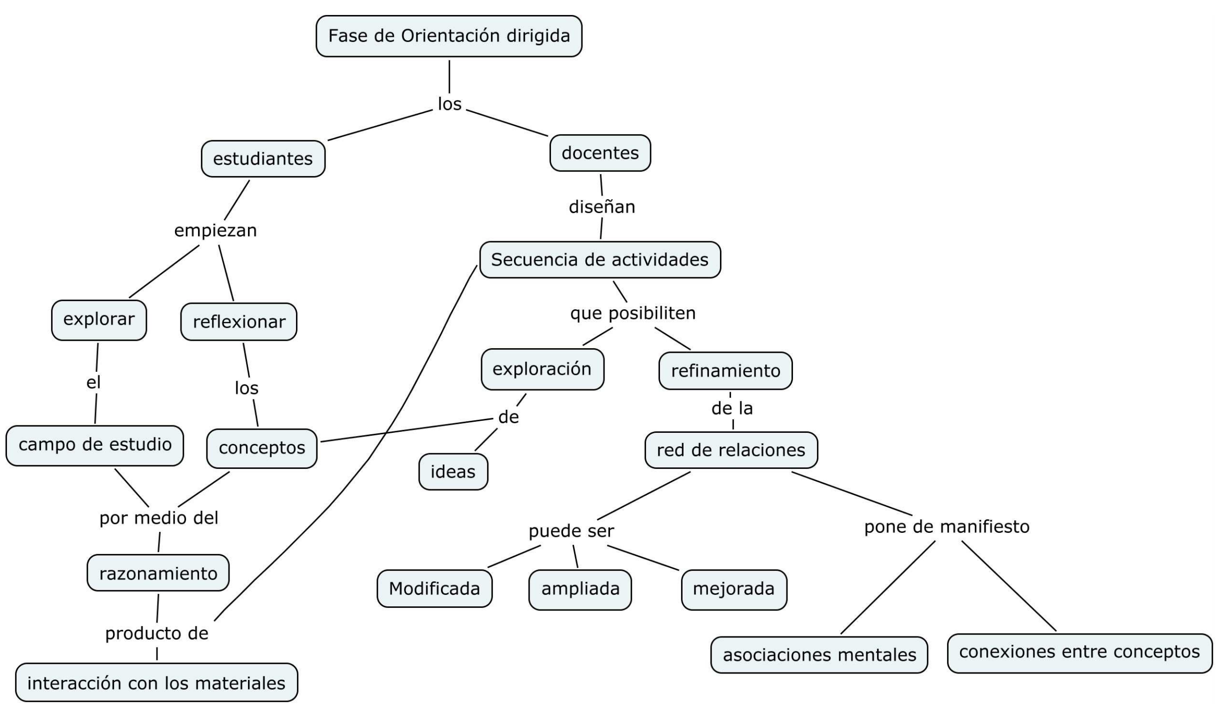
- Comprende la división de un retángulo en dos rectángulos de igual área, de infinitas maneras.

- Realiza procesos de razonamiento finito e infinito.

- Comprende el proceso de contrucción de una escalera infinita a partir de la división sucesiva de un rectángulo.
- Percibe que la suma de un número infinito de rectángulos puede ser finita bajo ciertas condiciones.
- Comprende el concepto de razón entre áreas.
- Representa aritméticamente una suma finita en correspondencia con su aspecto geométrico.
- Establece una red de relaciones y esboza un mapa conceptual de los conceptos abordados hasta el momento.

Mapa Conceptual

El siguiente mapa conceptual representa el proceso que será desarrollado durante esta fase.



Secuencia de Actividades

- Establecer diferentes sumas de áreas.
- Visualizar diferentes esquemas que representan una suma de áreas.
- Establecer diferentes proporciones entre las áreas de los rectángulos, producto de las particiones corrrespondiente realizadas en un rectángulo.

Actividad 1

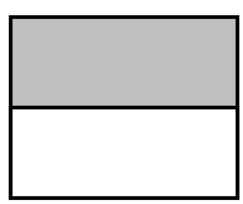
Objetivo de la actividad

- Encontrar el área de una superficie rectangular, a partir de representaciones visuales-geométricas, para establecer posibles regularidades en este proceso.

Aporte de Información

Dado el siguiente rectángulo, de área una unidad cuadrada:

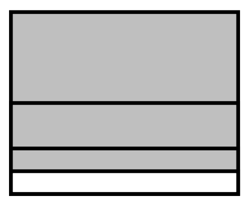
Iniciamos el proceso dividiendo nuevamente un rectángulo en dos partes iguales y sombreando la superficie superior, como lo muestra la siguiente figura:



La región sombreada es la mitad del área del rectángulo original, y es también equivalente al área total del rectángulo menos el área sin sombrear, es decir, el área sombreada se puede expresar matemáticamente como: $1-\dfrac{1}{2}$.

Para el siguiente rectángulo, la región sombreada es igual a la mitad del área del rectángulo original, más la mitad de la mitad que había quedado sin sombrear (es decir, un cuarto) por lo tanto, el área de la región sombreada se puede representar así: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$ o también $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{2^2}$.

Continuamos el proceso de división y sombreo, con la superficie que ha quedado sin sombrear, así:



Para la figura anterior el área sombreada se podrá representar como sigue:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

Podemos observar que la primera región sombreada se puede representar con la expresión $\frac{1}{2^1}$, la segunda región sombreada con $\frac{1}{2^2}$ y la tercera región sombreada con $\frac{1}{2^3}$.

1. Deduce las expresiones correspondientes para el área sombreada de los rectángulos que resultan si continuamos haciendo este proceso:

   a. Una vez más: ____

b. Dos veces más: ____

____

____

____

c. Tres veces más: ____

____

____

____

2. ¿Qué regularidades se observan en estas nuevas expresiones?

   a. El área sombreada es el área original, menos el área de la región sin sombrear.
   b. El área sombreada aumenta de mitad en mitad.
   c. El área sombreada es la suma consecutiva de las mitades.
   d. No se presentan regularidades.
   e. Ninguna de las anteriores.

3. ¿Crees que puedes llegar a generalizar dichas regularidades?, ¿Cómo?

   a. Si, restando siempre del área original, el área sin sombrear.
   b. Si, sumando consecutivamente mitades.
   c. No, porque no se presentan regularidades.
   d. No, porque los términos van aumentando de mitad en mitad para cada expresión.
   e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 2

Objetivo de la actividad

- Potenciar los procesos de razonamiento infinito, presentes en la división sucesiva de superficies rectangulares dadas.

1. Teniendo en cuenta el proceso anterior, si dividimos n veces, ¿cómo se podría expresar la n-ésima región sombreada?

   a. $\frac{1}{2}+n$

b. $n\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{2^n}$

d. $\frac{1}{2n}$

e. Ninguna de las anteriores.

2. Si el proceso de división y sombreo descrito anteriormente se realiza n veces, la suma de las áreas así sombreadas se puede expresar como:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$

b. $1+\frac{1}{2^n}$

c. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$

d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$.

e. Ninguna de las anteriores.

3. El proceso de división y sombreo, descrito anteriormente, ¿Se puede realizar de manera indefinida?

a. No, porque la superficie es limitada.

b. No, porque el rectángulo no puede quedar totalmente sombreado.

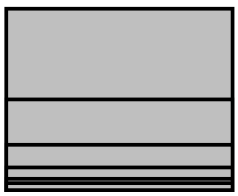
c. No, porque el límite de las divisiones debe ser definido.

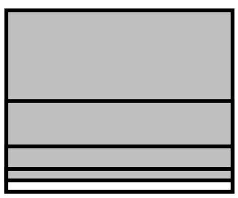
d. Si, porque siempre quedará una fracción sin sombrear a la cual se le pueda continuar haciendo el proceso de división.

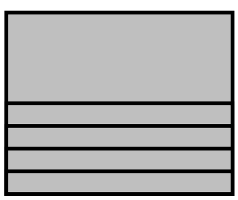
e. Ninguna de las anteriores.

4. Si continuamos el proceso de división y sombreo infinitas veces, tal como se describió anteriormente, la figura resultante será:

   a. 

   b. 

   c. 

   d. 

   e. Ninguna de las anteriores.

5. Si sumamos las áreas de los rectángulos sombreados, obtenidas del proceso infinito de división y sombreo, ¿Cuál consideras que es el resultado?

   a. Un medio, más un cuarto, más un octavo, más un dieciseisavo, más un treintaidosavo.

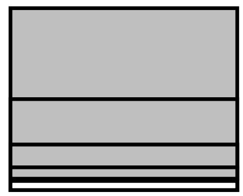
   b. El área del rectángulo dado.

   c. Un número infinito de rectángulos sombreados.

   d. No es posible calcularlo.

   e. Ninguna de las anteriores.

El siguiente rectángulo surge del proceso de dividir y sombrear un rectángulo a la mitad de manera indefinida.



6. De acuerdo con la figura anterior, se podría decir que el área total sombreada para un rectángulo dividido, tal como se describió anteriormente pero de manera infinita es:

   a. El área del rectángulo inicial menos el área sin sombrear.

   b. El área del rectángulo inicial.

   c. La suma de las áreas de infinitos rectángulos.

   d. No es posible calcularlo.

   e. Ninguna de las anteriores.

7. Teniendo en cuenta esta última figura, podemos concluir que la suma de las infinitas áreas sombreadas es:

   a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1-\frac{1}{2^n}=1$

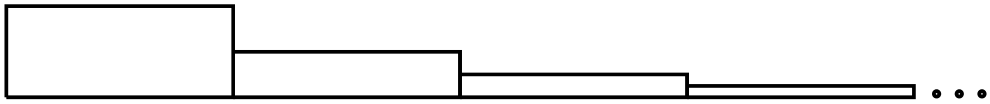
   b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\ldots-\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2^n}=\infty$

   c. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\ldots-\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2^n}=1$

   d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1-\frac{1}{2^n}=\infty$

   e. Ninguna de las anteriores.

8. Si el anterior rectángulo dividido indefinidamente se dispone en forma de escalera infinita decreciente de razón un medio, entonces se obtendría una figura como la siguiente:



Si tomamos el área del rectángulo inicial como una unidad cuadrada, entonces la suma de los infinitos rectángulos de la escalera se puede representar así:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$

b. $1+\frac{1}{2^n}=1$

c. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$

d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}=1.$

e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 3

Objetivo de la actividad

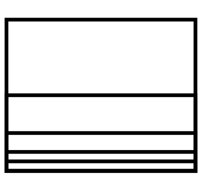
- Calcular el área de una escalera infinita decreciente mediante el establecimiento de relaciones entre áreas de rectángulos.

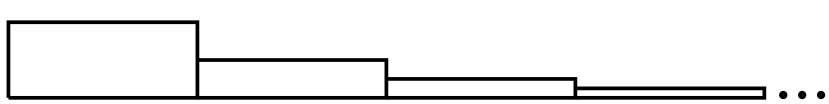
Aporte de información

Para una escalera, si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará **escalera creciente**, si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita creciente**. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará **escalera decreciente**, si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita decreciente**.

Así mismo, se llamará **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

1. Las siguientes figuras, corresponden a un rectángulo dividido infinitamente en varios rectángulos y a una escalera infinita decreciente. En ambas figuras, la altura de cada rectángulo tiene la mitad del inmediatamente anterior.





¿Es posible disponer el rectángulo de la izquierda como una escalera infinita decreciente, como lo indica la figura?

a. No es posible, porque la escalera es infinita.
b. Si es posible, porque las figuras son semejantes.
c. No es posible, porque el rectángulo tiene divisiones finitas.
d. Si es posible, porque en ambas figuras la superficie de cada rectángulo es el doble del siguiente.
e. Ninguna de las anteriores.

2. ¿Qué relación crees que es posible establecer entre el área del rectángulo y el área de la escalera?

a. El rectángulo tiene área mayor que la escalera.
b. La escalera tiene área mayor que el rectángulo.
c. Las dos figuras tienen igual área.
d. No es posible comparar ambas áreas.
e. Ninguna de las anteriores.

3. Si vuelves a unir las infinitas superficies rectangulares de la escalera, sin superponerlas, ¿cómo será la figura resultante?

a. Igual a la figura inicial.
b. Mayor que la figura inicial.
c. Menor que la figura inicial.
d. No es posible saberlo.
e. Ninguna de las anteriores.

4. La suma de las áreas de las infinitas superficies rectangulares de la escalera infinita decreciente, se puede representar así:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$
b. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\infty$
c. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\ldots-\frac{1}{2^n}=1$
d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\infty$
e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 4

Objetivo de la actividad

- Elaborar un mapa conceptual que corresponda a la red de relaciones construida para los conceptos abordados hasta el momento.

Revisa la red de relaciones que vienes construyendo en las actividades anteriores y vincula a ésta los nuevos conceptos abordados en esta fase; representa con un mapa conceptual la nueva red de relaciones, que enlace todas las ideas estudiadas hasta el momento.

3.7.3. Fase 3: explicitación

En esta fase, los estudiantes se encuentran en el proceso de construcción del concepto desde sus experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna del concepto objeto de estudio. Durante esta fase el proceso es guiado con el propósito de lograr que los estudiantes enriquezcan su lenguaje matemático; es así como los estudiantes comienzan a construir relaciones entre las ideas subyacentes al concepto objeto de estudio, dicha construcción se manifiesta gracias al fortalecimiento de la red de relaciones, en la que los estudiantes hacen explícitas sus observaciones, y en las que el profesor presta especial atención al uso del lenguaje empleado por ellos.

Un aspecto a resaltar, es que el estudiante que se encuentra en esta fase, establece relaciones y vínculos entre conceptos más abundantes, jerarquiza ideas, incluye ejemplos, busca nuevas relaciones y vinculan nuevos conceptos correspondientes al concepto objeto de estudio, con todo esto se favorece la consolidación de una nueva red. La explicitación es un aspecto que está presente en todas las fases, en la medida que los estudiantes van construyendo su red de relaciones y sobretodo puedan representarla mediante un mapa conceptual.

El mapa conceptual es una actividad añadida o adicional que le permite al estudiante hacer un afianzamiento del progreso de su pensamiento y sobre todo, le permite al profesor evaluar las condiciones del razonamiento en que se encuentran. Es decir, el mapa conceptual cumple una triple función: evidenciar la estructura mental o red de relaciones que tiene un estudiante, permitir que tenga consciencia de lo razonado hasta el momento y permitirle al profesor conocer el estado de razonamiento de sus estudiantes. Es importante tener especial cuidado con el uso del lenguaje matemático adquirido, el cual debe ser empleado en socializaciones y discusiones grupales, para poder determinar el grado de apropiación que los estudiantes han logrado y determinar por lo tanto, si ellos han progresado en su razonamiento.

Objetivo

- Socializar entre los estudiantes y conjuntamente con el docente, los conceptos y relaciones desarrollados en las fases anteriores, y establecer vínculos con las nuevas ideas, usando adecuadamente un lenguaje matemático para la construcción de la nueva de red de relaciones, que será representada mediante un mapa conceptual.

Conocimientos básicos

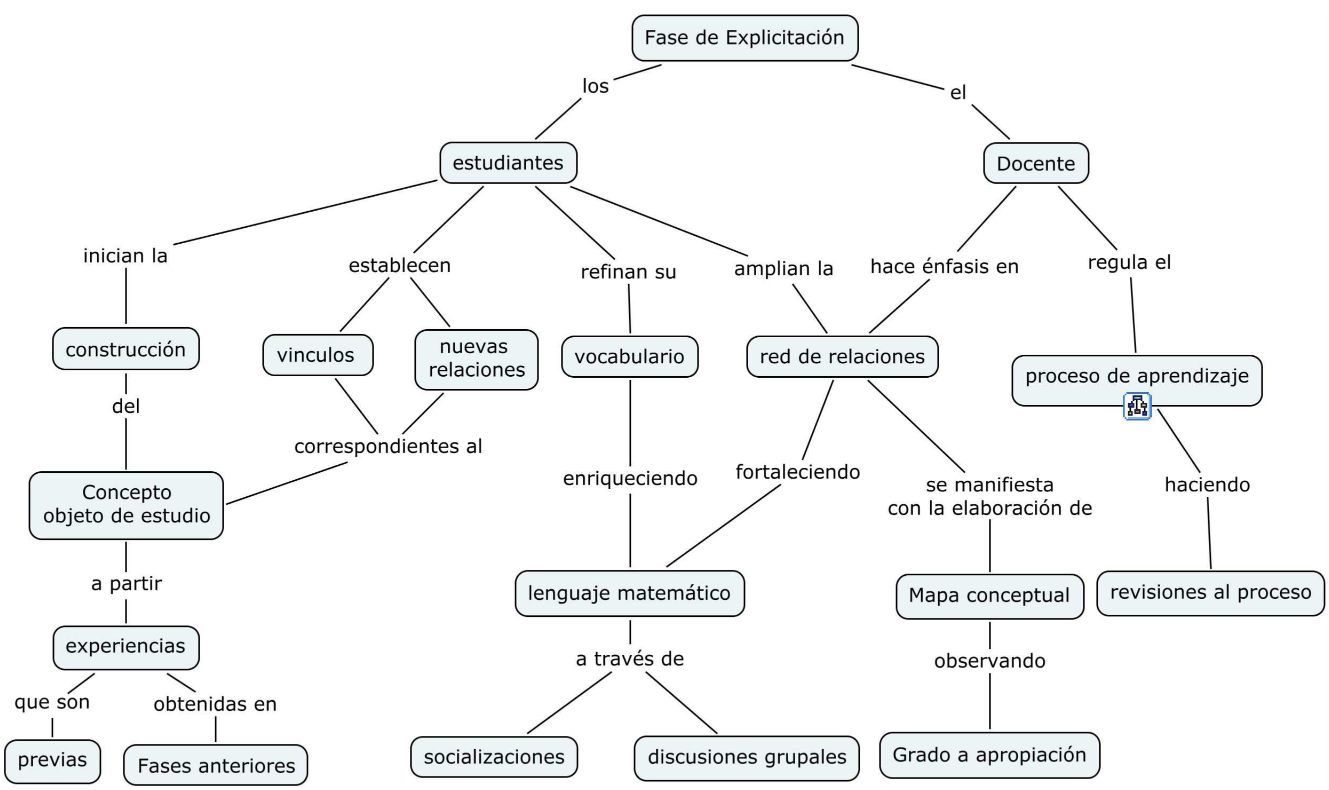
Suma de áreas, escaleras crecientes y decrecientes, aspecto finito y aspecto infinito en la suma de áreas de figuras planas.

Descriptores

- Identifica la estructura de una escalera infinita decreciente que tiene área.
- Comprende que la infinita suma de áreas de rectángulos puede tener resultado finito.
- Reconoce la estructura y características de la escalera armónica.
- Explicita sus razonamientos a través de socializaciones.
- Representa aritméticamente una suma infinita.
- Elabora un mapa conceptual de acuerdo a su red de relaciones, lo cual refleja la evolución en su razonamiento.

Mapa Conceptual

El siguiente mapa conceptual representa el proceso que será desarrollado durante esta fase.



Actividad 1

Objetivo de la actividad

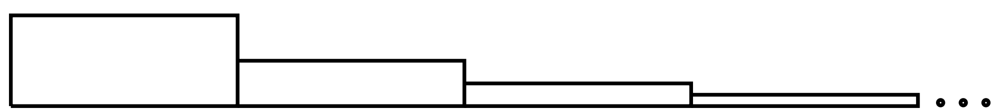
- Determinar la razón de una escalera infinita decreciente, reconociéndola como una condición suficiente para encontrar el valor de una suma infinita.

Aporte de información

La razón de dos áreas es el cociente de sus valores en la misma unidad de medida. Diremos que una escalera tiene razón, si la razón entre las áreas de dos rectángulos adyacentes cualesquiera siempre es la misma (constante).

Por lo tanto, se denominará razón de una escalera al cociente entre el área de un rectángulo dado y el área del rectángulo inmediatamente anterior.

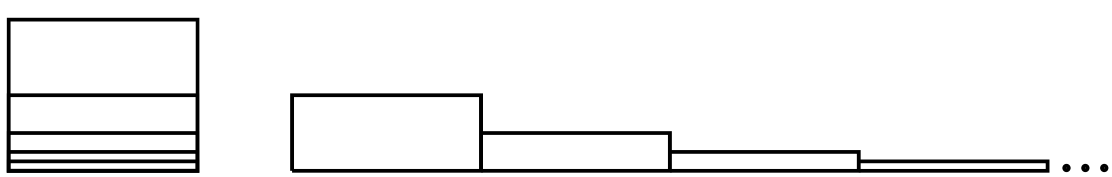
1. En la siguiente escalera infinita decreciente, la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior.



La razón de la escalera es:

a. 2
b. $\frac{1}{2}$
c. 1
d. $\frac{1}{2^n}$.
e. Ninguna de las anteriores.

2. Observa la figura:



Si disponemos los rectángulos de la escalera infinita decreciente de razón un medio, uno sobre otro, ¿crees que es posible construir un rectángulo como el de la izquierda, tal como lo indica la figura?

a. No, porque la escalera es infinita.

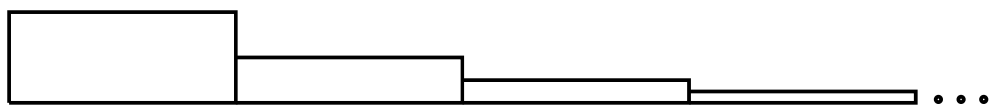
b. Sí, porque la razón de la escalera es un medio.

c. No, porque el rectángulo no tiene infinitas divisiones

d. Si, porque la escalera tiene infinitos rectángulos.

e. Ninguna de las anteriores.

3. Observa la siguiente escalera decreciente de razón un medio:



Acerca del área de la escalera se puede decir que:

a. Es infinita, porque consta de infinitos rectángulos.

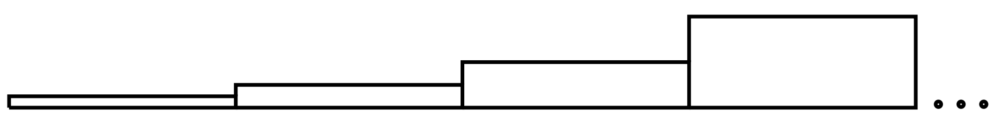
b. Es posible calcularla, porque su razón es menor que uno.

c. No es posible calcularla, porque si se unen los infinitos rectángulos el área será infinita.

d. No es posible calcularla, porque no se conocen las dimensiones de los rectángulos.

e. Ninguna de las anteriores.

4. La siguiente escalera creciente tiene la propiedad de que cada escalón duplica en altura al escalón inmediatamente anterior:



Consideras que el área de la escalera anterior es:

a. Infinita, porque la escalera crece infinitamente.

b. Finita, porque con esta escalera se construye un rectángulo.

c. Equivalente al área de un rectángulo.

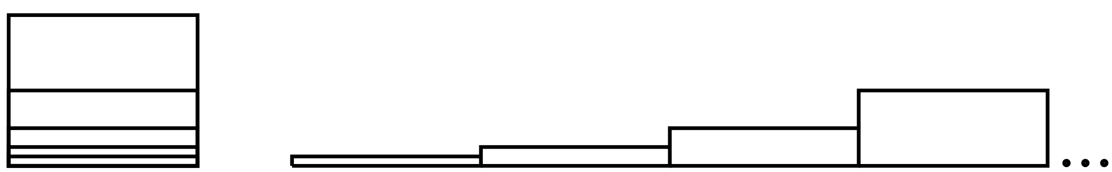
d. No es posible calcularla.

e. Ninguna de las anteriores.

5. La razón de la escalera anterior es:

   a. 2
   b. $\frac{1}{2}$
   c. 1
   d. $\frac{1}{2^n}$
   e. Ninguna de las anteriores.

6. Observa la figura



   Si unes los rectángulos de la escalera decreciente infinita de razón dos ¿crees que es posible construir un rectángulo, tal como lo indica la figura?

   a. No, ya que la escalera es infinita.
   b. Sí, es posible porque la escalera tiene razón.
   c. No, porque se obtendría un rectángulo infinito.
   d. No, porque el área del rectángulo sería infinita.
   e. Ninguna de las anteriores.

7. ¿Consideras que todas las escaleras infinitas crecientes tienen área?

   a. No, porque la escalera crece infinitamente y su área también.
   b. Sí, porque con estas escaleras se construyen rectángulos infinitos.
   c. Sí, tienen área finita.
   d. No es posible calcular el área de una escalera infinita.
   e. Ninguna de las anteriores.

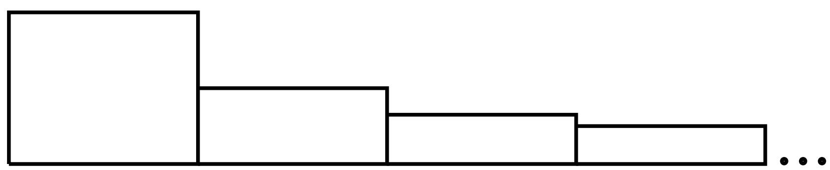
Actividad 2

Objetivo de la actividad

- Identificar las características de la escalera armónica, para reconocer bajo que condiciones una suma infinita tiene o no un resultado finito.

Aporte de información

Llamaremos **escalera armónica** a la escalera infinita decreciente donde la altura del segundo rectángulo es la mitad de la altura del primero, la altura del tercero es un tercio de la altura del primero, la altura del cuarto es un cuarto de la altura del primero, y así sucesivamente:



1. Para la escalera armónica, la suma de las áreas de cada rectángulo es:

   a. Uno, más un medio, más un tercio, más un cuarto, ...

   b. Un medio, más un cuarto, más un octavo, ...

   c. Uno, más un tercio, más un quinto, ...

   d. Un medio, más un tercio, más un cuarto, ...

   e. Ninguna de las anteriores.

2. La razón de la escalera armónica es:

   a. $\frac{1}{2}$

   b. $\frac{1}{3}$

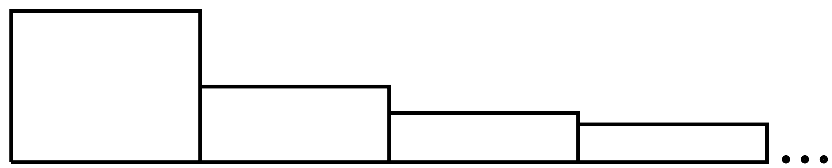
   c. $\frac{1}{4}$

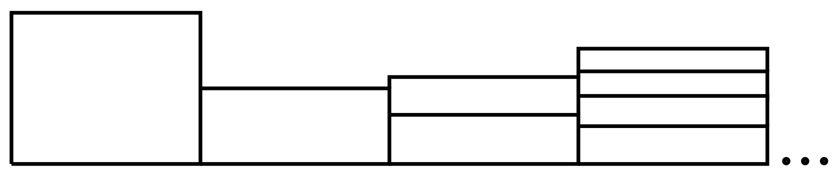
   d. No tiene razón.

   e. Ninguna de las anteriores.

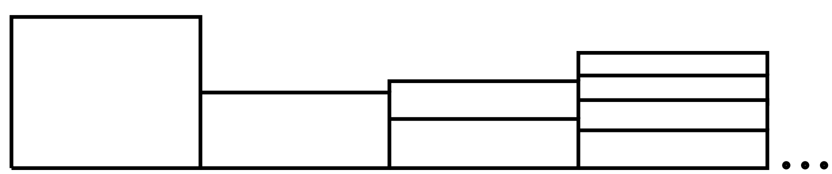
Aporte de información

A partir de la escalera armónica se forma otra escalera de manera tal que: después del segundo rectángulo, disponemos los dos siguientes uno sobre otro, luego los cuatro siguientes, luego los ocho siguientes y así sucesivamente, hasta obtener la siguiente figura:





Se obtiene entonces, que la suma de las áreas del tercer y cuarto rectángulos sobrepasa el área del segundo rectángulo; la suma de las áreas desde el quinto rectángulo hasta el octavo sobrepasan la suma de las áreas de los dos anteriores y por lo tanto la del segundo rectángulo; así mismo, la suma de las áreas de los rectángulos noveno a decimosexto sobrepasa el área de cada uno de los cuatro anteriores y así sucesivamente, como se muestra en la siguiente figura:



3. Si el proceso antes descrito se continúa de manera indefinida, la nueva escalera construida es:

   a. Infinita decreciente.

   b. Infinita creciente.

   c. Finita.

   d. No es posible determinarlo.

   e. Ninguna de las anteriores.

4. Para una escalera infinita decreciente que no tiene razón, será posible afirmar que:

a. Su área es finita.

b. No se podrá construir una escalera infinita creciente.

c. Su área es finita, porque aunque no tenga razón, si unimos los rectángulos, entonces obtenemos un rectángulo finito.

d. Su área puede ser infinita porque aunque no tenga razón, se podrá construir una escalera creciente.

e. Ninguna de las anteriores.

5. Consideras que es posible calcular el área de la escalera armónica:

a. Sí, porque es una escalera infinita decreciente.

b. No, porque está constituida por infinitos rectángulos.

c. Sí, porque es posible construir un rectángulo de área finita a partir de la escalera armónica.

d. No, porque se puede volver infinita creciente y por lo tanto su área es infinita.

e. Ninguna de las anteriores.

6. Una escalera infinita decreciente tiene área si cumple:

a. Que no tenga razón.

b. Que se pueda disponer de manera creciente.

c. Que no se pueda disponer de manera creciente.

d. Que tenga razón y pueda disponerse de manera creciente.

e. Ninguna de las anteriores.

7. Una escalera infinita no tiene área si se cumple:

a. Que sea decreciente y sea posible disponerla de manera creciente.

b. Que sea decreciente.

c. Que sea decreciente y tenga razón.

d. Que no sea posible volverla creciente.

e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 3

Objetivo de la actividad

- Revisar el lenguaje adquirido relacionado con el concepto objeto de estudio, por medio de una discusión grupal,en el transcurso del desarrollo de las actividades.

Realizar una puesta en común sobre la temática desarrollada, teniendo en cuenta la siguiente secuencia de preguntas:

a. Resalta cuáles son los aspectos más representativos de los elementos abordados durante las actividades anteriores.

b. Para establecer una relación parte-todo, con respecto al área de los cuadriláteros, ¿qué aspectos se deben de tener en cuenta? Enúncialos.

c. ¿Es posible disponer una secuencia infinita de cuadriláteros en forma de escalera y determinar el área resultante?

Observación: Las anteriores preguntas son orientadoras, a partir de éstas, el docente debe generar otras que permitan revisar el trabajo realizado, identificando el nivel de apropiación de las temáticas y los posibles errores conceptuales. Todo esto permitirá realizar mejoras al proceso que se viene desarrollando, de manera que se puedan perfeccionar las ideas y el lenguaje propio relacionado con el concepto objeto de estudio.

Actividad 4

Objetivo de la actividad

- Elaborar una red de relaciones y su respectivo mapa conceptual que muestren las relaciones entre los aspectos abordados hasta el momento

a. De manera individual, realiza una red de relaciones y represéntala en un mapa conceptual, el cual debe describir los aspectos desarrollados hasta el momento.

b. Socializa con dos compañeros el mapa conceptual que elaboraste, y construye de manera conjunta un nuevo mapa.

c. Presenta ante el grupo el mapa construido, argumentando las diferentes relaciones establecidas.

3.7.4. Fase 4: orientación libre

Los estudiantes encuentran tareas multipaso, o tareas que pueden ser completadas de diferentes maneras, logrando así, experiencias de aprendizaje mediante la resolución de las actividades propuestas. Dada la orientación brindada, muchas de las relaciones entre los objetos de estudio llegan a ser explícitas y de amplia comprensión para los estudiantes de acuerdo a su avanzado nivel de razonamiento; en esta medida, ellos deben lograr transferir los conceptos a contextos apropiados que han asimilado durante todo su proceso de razonamiento, de modo que reconozcan la posibilidad ampliar y fortalecer la red de relaciones que hasta ahora han venido construyendo.

En esta fase, la red de relaciones de los estudiantes es ampliada y modificada, de acuerdo con su razonamiento y con el grado de apropiación que muestren con respecto al concepto objeto de estudio. Se establecen relaciones significativas y validas entre conceptos nuevos y otros ya existentes, estas relaciones pueden ser manifestadas mediante la construcción de un mapa conceptual, que vincule todos los elementos abordados durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para esta fase, como en todas, el lenguaje es determinante, pues pone de manifiesto la manera cómo los estudiantes están construyendo su red de relaciones, es por esto que dicho lenguaje debe ser adecuado y debe estar en correspondencia con el grado de razonamiento que exige esta fase.

Objetivo

- Aplicar en otros contextos las ideas y conceptos relacionados con el concepto objeto de estudio, estableciendo nuevas relaciones que favorezcan consolidar la estructura mental construida durante el proceso de aprendizaje y sobretodo consolidar un avanzado nivel de razonamiento.

Conocimientos básicos

Áreas de figuras planas y Convergencia de series infinitas.

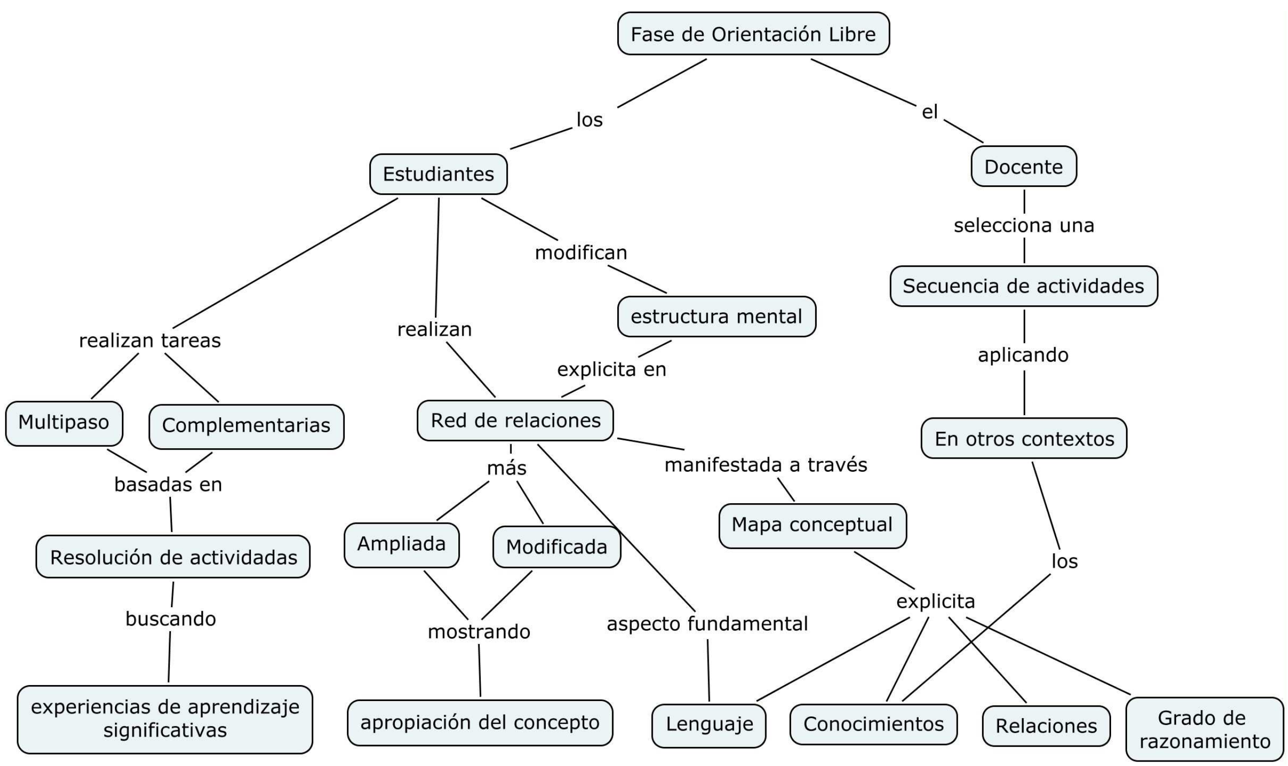
Descriptores

- Identifica condiciones desde la visualización para determinar la suma de una escalera infinita.
- Establece una correspondecia entre las áreas de los rectángulos de una escalera y los términos de una suma aritmética.
- Reconoce sumas aritméticas equivalentes a partir de la visualización.
- Comprende desde la visualización la divergencia de la escalera armónica.

- Aplica en situaciones similares el concepto de convergencia comprendido hasta el momento.
- Realiza un mapa conceptual, vinculando otros conceptos que complementan la red de relaciones construida.

Mapa Conceptual

El siguiente mapa conceptual representa el proceso que será desarrollado durante esta fase.



Actividad 1

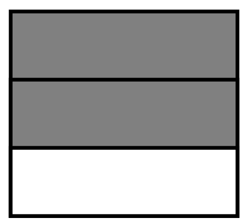
Objetivo de la actividad

- Encontrar patrones de regularidad para calcular la suma de la serie $\frac{1}{3^n}$, a partir de procesos de razonamiento infinito, subyacentes en la división indefinida de un rectángulo en el contexto visual geométrico de la división.

Aporte de información

Si ahora tomamos un rectángulo y lo dividimos en tres áreas iguales, y sombreamos dos de esas áreas, luego repetimos este proceso con el área restante, obtendríamos una representación como esta:

El primer proceso lo podemos representar de la siguiente forma:



Un rectángulo dividido en tres partes iguales, cada región representa un tercio, si sombreamos dos de estas regiones, el área sombreada es dos veces un tercio, y es equivalente al área del rectángulo inicial menos el área sin sombrear. El área sombreada es:

$$2\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

1. El área de la región sombreada para la figura es:

   a. La suma de las terceras partes sacadas consecutivamente.

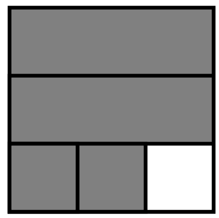
   b. La superficie original menos dos tercios de ésta superficie.

c. El área original, mas dos veces un tercio de esta área.

d. El área original sin el área correspondiente a un tercio.

e. Ninguna de las anteriores.

Si continuamos con el proceso, obtenemos una figura como la siguiente, donde el área sombreada es dos veces un tercio, más dos veces un noveno, o también, el área inicial menos el área sin sombrear.



2. El área sombreada de la figura anterior se puede representar así:

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

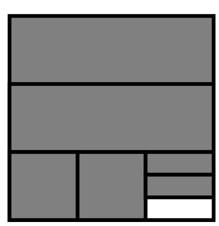
b. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{9}=1$

c. $1-2\frac{1}{3}-2\frac{1}{9}$

d. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}=1-\frac{1}{3^2}$

e. Ninguna de las anteriores.

Si continuamos dividiendo el área sin sombrear en tres partes iguales como en el proceso anterior, se tendría que el área sombreada es dos veces un tercio, más dos veces un noveno, más dos veces un veintisietevo



3. El área sombreada de la figura anterior se puede representar así:

a. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{9}+2\frac{1}{27}=1-\frac{1}{27}$

b. $2\dfrac{1}{3}+2\dfrac{1}{9}=1$

c. $2\dfrac{1}{3}+2\dfrac{1}{3^2}+2\dfrac{1}{3^3}=1-\dfrac{1}{3}$

d. $2\dfrac{1}{3}+2\dfrac{1}{3^2}=1-\dfrac{1}{3^2}$

e. Ninguna de las anteriores.

4. ¿Qué regularidades se observan en las expresiones anteriores?

   a. El área sombreada es el área original, menos el área de la región sin sombrear.
   b. El área sombreada aumenta de tercio en tercio.
   c. El área sombreada es la suma consecutiva de los tercios.
   d. No se presentan regularidades.
   e. Ninguna de las anteriores.

   Deduce las expresiones matematicas correspondientes para el área sombreada de los rectángulos que resultan si continuamos haciendo este proceso:

   a. Una vez más: ______________________________

   ____

   ____

   ____

   b. Dos veces más: ______________________________

   ____

   ____

   ____

   c. Tres veces más: ______________________________

   ____

   ____

   ____

5. ¿Qué regularidades se observan en estas nuevas expresiones?

   a. El área sombreada es el área original, menos el área de la región sin sombrear.
   b. El área sombreada aumenta de tercio en tercio.
   c. El área sombreada es la suma consecutiva de los tercios.

d. No se presentan regularidades.
e. Ninguna de las anteriores.

6. ¿Crees que puedes llegar a generalizar dichas regularidades? ¿Cómo?

a. Si, restando siempre del área original, el área sin sombrear.
b. Si, sumando consecutivamente las terceras partes.
c. No, porque no se presentan regularidades.
d. No, porque los términos van aumentando de tercio en tercio para cada expresión.
e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 2

Objetivo de la actividad

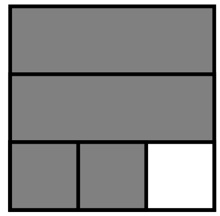
- Deducir condiciones suficientes y necesarias para determinar la convergencia de una serie, a partir del análisis realizado mediante procesos de razonamiento infinito.

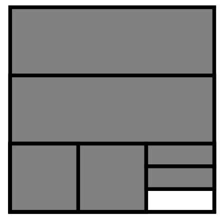
1. Para los procesos de división y sombreo descritos en la actividad anterior, si el número de divisiones que se hace del área es n, la suma de dichas áreas es:

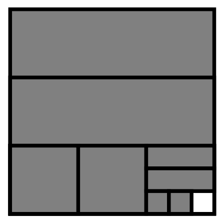
a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}$
b. $1+\frac{1}{3^n}$
c. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}+2\frac{1}{3^3}+\ldots+2\frac{1}{3^n}$
d. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^n}$
e. Ninguna de las anteriores.

2. Si el número de divisiones que se hace del área tiende a ser infinito, la figura resultante será:

a. 

b. 

c. 

d. 

e. Ninguna de las anteriores.

3. Para los procesos de división y sombreo, realizados en el rectángulo anterior, se puede afirmar que la suma de las infinitas áreas sombreadas es:

   a. El área del rectángulo original menos el área sin sombrear.
   b. El área del rectángulo original
   c. La suma de las áreas de infinitos rectángulos.
   d. No es posible calcularlo.
   e. Ninguna de las anteriores.

4. Podemos concluir que la suma de las infinitas áreas sombreadas es:

   a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=1$
   b. $1+\frac{1}{3^n}=1$
   c. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}+2\frac{1}{3^3}+\ldots+2\frac{1}{3^n}+\ldots=1$
   d. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}=1$
   e. Ninguna de las anteriores.

5. Si el número de divisiones que se hace del área es indeterminado, la suma de dichas áreas es:

$$2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}+2\frac{1}{3^3}+2\frac{1}{3^4}+\ldots+2\frac{1}{3^n}+\ldots=1$$

De la anterior expresion se puede concluir que:

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$

b. $1+\frac{1}{3^n}=1$

c. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}+2\frac{1}{3^3}+\ldots+2\frac{1}{3^n}+\ldots=\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}=1$

e. Ninguna de las anteriores.

6. Observa la siguiente escalera infinita decreciente, en ella cada escalón tiene como altura un tercio de la altura del rectángulo inmediatamente anterior, si el primer rectángulo tiene área equivalente a $\frac{1}{3}$ entonces para la siguiente escalera su razón es:

a. 3

b. $\frac{1}{3}$

c. 1

d. No tiene razón.

e. Ninguna de las anteriores.

7. La suma de las áreas de los rectángulos que constituyen la escalera anterior, se puede representar así:

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$

b. $1-\frac{1}{3}$

c. $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}+2\frac{1}{3^3}+\ldots+2\frac{1}{3^n}+\ldots$

d. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^n}$

e. Ninguna de las anteriores.

8. El valor de la suma anterior es:

a. 1
b. $\frac{1}{2}$
c. 2
d. Indeterminado.
e. Ninguna de las anteriores.

9. ¿Cuál es la condición necesaria para que una escalera infinita tenga área?

a. Que no tenga razón.
b. Que se pueda disponer de manera creciente.
c. Que sea decreciente y que tenga razón.
d. Que la escalera sea infinitamente decreciente.
e. Ninguna de las anteriores.

10. Sí, una escalera infinita decreciente tiene área, se puede afirmar que:

a. La escalera tiene razón igual a 1.
b. La suma de infinitos términos positivos es finita.
c. Su área es igual a la suma de infinitos términos positivos o negativos.
d. Toda escalera infinita decreciente tiene razón.
e. Ninguna de las anteriores.

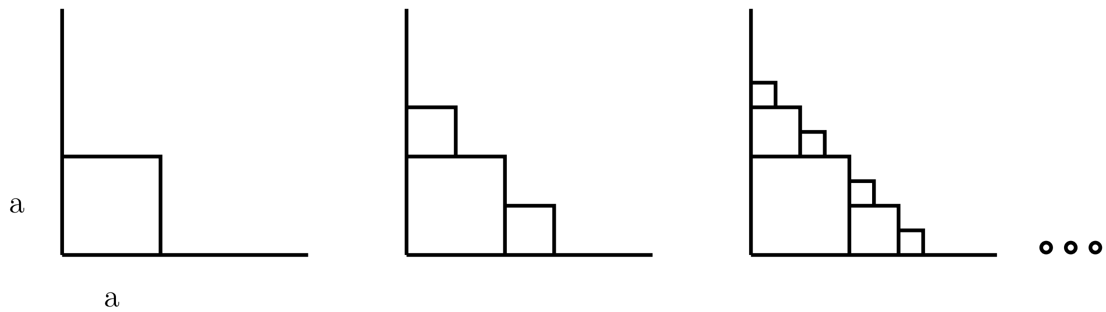
Actividad 3

Objetivo de la actividad

- Aplicar los conceptos trabajados en contextos diferentes, para determinar la convergencia o divergencia de una serie.

Aporte de información

La escalera de Orton (Tall,1991, pag. 165) se construye a partir de un cuadrado de lado a , al lado derecho y en la parte superior se dispone 2 cuadrados de lado $\frac{a}{2}$, luego se disponen 4 cuadrados de lado $\frac{a}{4}$ y así sucesivamente, como se observa en la figura:



1. La base de la figura resultante se puede representar por:

   a. $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \ldots$
   b. $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \ldots$
   c. $a + 2\frac{a}{2} + 4\frac{a}{4} + 8\frac{a}{8} + \ldots$
   d. $1 + a\frac{1}{2} + a\frac{1}{4} + a\frac{1}{8} + \ldots$
   e. Ninguna de las anteriores.

2. La base de la figura es:

   a. a
   b. $2a$
   c. 1
   d. 2
   e. Ninguna de las anteriores.

3. Para la escalera de Orton, la suma las áreas de los peldaños se puede escribir:

   a. $a^2 + 2\frac{1}{2^2}a^2 + 4\frac{1}{2^4} + 8\frac{1}{2^8} + \ldots$
   b. $a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2^3}a^2 + \ldots$
   c. $a^2 + 2\frac{1}{2^2}a^2 + 4\frac{1}{2^4}a^2 + 8\frac{1}{2^8}a^2 + \ldots$
   d. $a^2 + 2\frac{1}{2^2}a^2 + 4\frac{1}{2^4}a^4 + 8\frac{1}{2^8}a^8 + \ldots$

e. Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cuál es el área de la figura final en términos de a?

a. $\dfrac{a^2}{2^n}$

b. $2a^2$

c. $\dfrac{a^2}{2}$

d. a^2

e. Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cuál es el área de la escalera final, si a es 1?

a. $\dfrac{1}{2^n}$

b. 2

c. $\dfrac{1}{2}$

d. 1

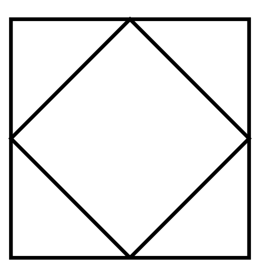
e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 4

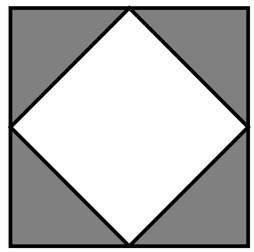
Objetivo de la actividad

- Realizar diferentes ejercicios relacionados con el concepto objeto de estudio, aplicando los conocimientos adquiridos en las distintas fases gracias a la ampliación y fortalecimiento de redes de relaciones y estructuras mentales.

Observa el cuadrado de lado una unidad, en el cual se han unido los puntos medios de cada lado.



Si sombreamos los triángulos que se forman sobre los lados del cuadrado inscrito se obtiene una figura como la siguiente:



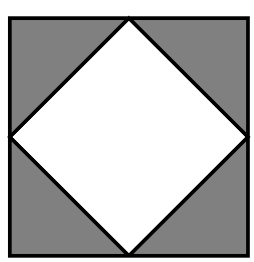
1. La suma de las áreas de los triángulos de la figura es:

   a. $4\frac{1}{4}$
   b. $4\frac{1}{8}$
   c. $4\frac{1}{2}$
   d. $4\frac{1}{16}$
   e. Ninguna de las anteriores.

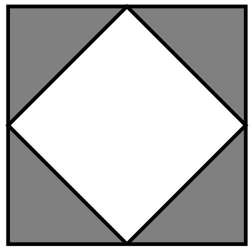
2. Para la figura anterior, el área sombreada es:

   a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{1}{8}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{16}$
   e. Ninguna de las anteriores.

   Si a partir de la siguiente figura:



Dibuja la figura resultante que se obtiene al repetir el proceso de unir los puntos medios de los lados del cuadrado no sombreado y sombrear los triángulos dibujados.

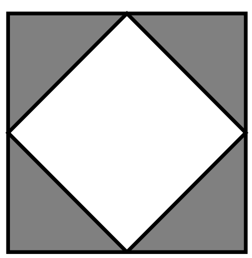


3. La suma de las áreas de los triángulos de la figura, es:

   a. $4\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}$
   b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{3}{2}$
   e. Ninguna de las anteriores.

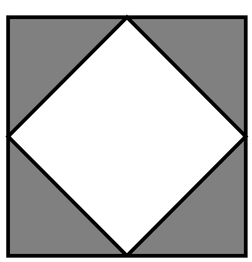
4. Dibuja las figuras que se obtienen al continuar con el mismo proceso:

   Una vez más:



   La suma de las áreas de los triángulos de la figura, es:

   Dos veces más:



La suma de las áreas de los triángulos de la figura, es:

5. Al continuar con el proceso indicado anteriormente, de manera infinita, la suma de las áreas de los triángulos resultantes corresponde a la expresión:

   a. $2\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}+2\frac{1}{16}+\ldots$
   b. $2\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}+2\frac{1}{16}+\ldots+2\frac{1}{2^n}+\ldots$
   c. $2+2\frac{1}{2^n}+\ldots$
   d. No es posible definirlo.
   e. Ninguna de las anteriores.

6. Para un proceso de divisiones infinitas, el área sombreada resultante será:

   a. $2\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}+2\frac{1}{16}+\ldots=1$
   b. $2\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}+2\frac{1}{16}+\ldots+2\frac{1}{2^n}+\ldots=1$
   c. $2+2\frac{1}{2^n}+\ldots=1$
   d. No es posible definirlo.
   e. Ninguna de las anteriores.

7. De las expresiones anteriores, podemos concluir que la expresión $2\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$es igual a:

   a. $2\frac{1}{2^n}$
   b. 2
   c. $\frac{1}{2}$
   d. 1
   e. Ninguna de las anteriores.

8. Teniendo en cuenta los razonamientos realizados para deducir el valor de la anterior serie, puedes proponer otras actividades para deducir que:

   - $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2^2}$
   - $\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2^3}$

Actividad 5

Objetivo de la actividad

- Perfeccionar el lenguaje matemático empleado en el proceso de razonamiento desarrollado en las fases ya abordadas.

Realiza diferentes mapas conceptuales en los cuales relaciones todos los conceptos propios asociados con el objeto de estudio.

3.7.5. Fase 5: integración

El razonamiento sobre los objetos matemáticos y sus relaciones le permiten a los estudiantes unificarlos e interiorizados dentro de un nuevo dominio de comprensión. Es decir, el estudiante debe lograr mediante el proceso que ha venido desarrollando, consolidar su red de relaciones, la cual debe ser mucho más amplia, abundante y compleja que las anteriormente manifestadas. El profesor media en éste proceso, haciendo énfasis en las relaciones significativas que los estudiantes han construido con respecto al concepto objeto de estudio.

En esta fase, los estudiantes reelaboran y reinterpretan su red de relaciones, estableciendo mediante su razonamiento los vínculos pertinentes para los conceptos abordados y que aún no se habían explicitado. Las ideas que gravitan en torno al concepto objeto de estudio se fortalecen mediante las relaciones significativas establecidas, y por lo tanto la red de relaciones se nutre con todos los elementos desarrollados e involucrados durante el proceso. El aspecto fundamental en esta fase, es que el estudiante ha logrado tejer o construir una red de relaciones que le va a permitir elaborar un mapa conceptual, el cual refleja o evidencia su avanzado nivel de razonamiento, es decir, dado esto se puede afirmar sin ninguna duda que el estudiante ha progresado a un nivel III de razonamiento. Es necesario resaltar de nuevo que la red de relaciones construida por los estudiantes, se hace explícita mediante un mapa conceptual que integra todos los aspectos relacionados con el concepto objeto de estudio.

Objetivo

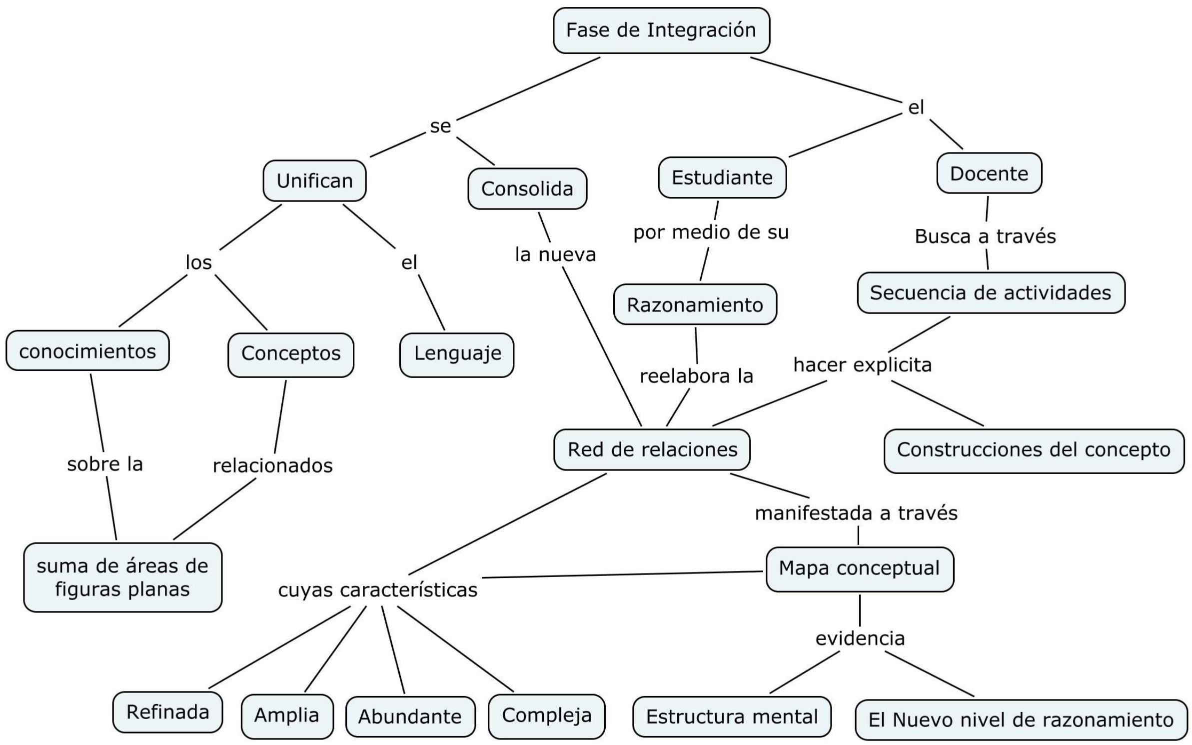
- Consolidar la transformación de la estructura mental de los estudiantes a través de la elaboración de una red de relaciones reinterpretada y refinada, la cual se puede evidenciar mediante un mapa conceptual, que defina el concepto en cuestión.

Descriptores

- Representa de manera aritmética una suma infinita de términos positivos, a partir de distintos contextos geométricos.
- Argumenta las condiciones necesarias para determinar la convergencia o no de una suma infinita.
- Elabora un mapa conceptual que pone de manifiesto las ideas relacionadas con el concepto de convergencia de una suma infinita.

Mapa Conceptual

El siguiente mapa conceptual representa el proceso que será desarrollado durante esta fase.



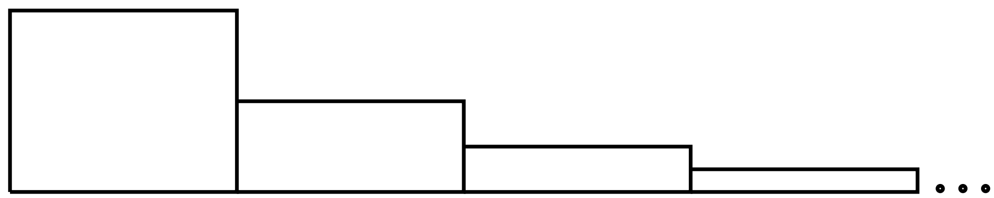
Actividad 1

Objetivo de la actividad

- Retomar los elementos significativos abordados en el transcurso de cada una de las fases, para integrarlos y dar solución al problema de Oresme e identificar las condiciones suficientes y necesarias para establecer la convergencia de una suma infinita.

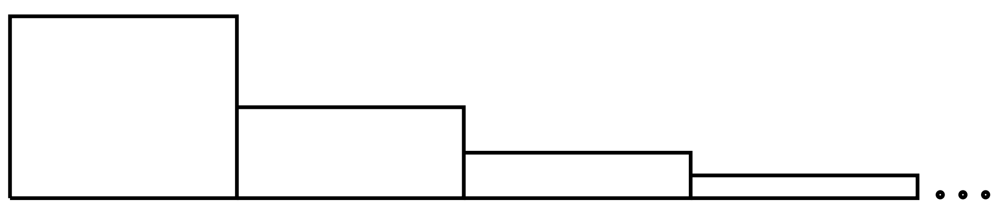
Aporte de información

Oresme, alrededor del año 1360, sumo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, mediante la representación geométrica de la escalera sin fin que aparece en la figura:



En la cual cada rectángulo tiene como base uno y duplica la altura del escalón inmediatamente a su derecha, es decir su razón es $\frac{1}{2}$.

Observa la siguiente escalera, en la cual el escalón inicial tiene un área equivalente a una unidad cuadrada y cada escalón tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior.



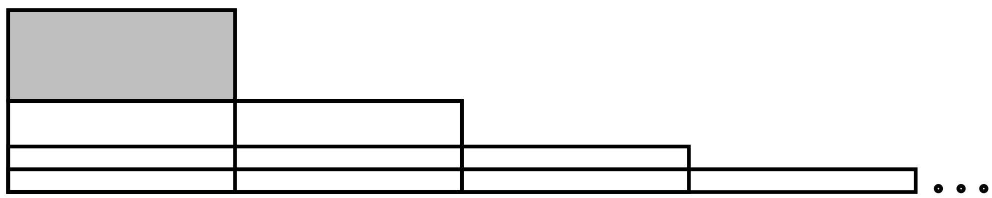
1. La suma de las áreas de los escalones de la figura anterior, se puede representar así:

   a. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$
   b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$
   c. 1
   d. $1+\frac{1}{2^n}$
   e. Ninguna de las anteriores.

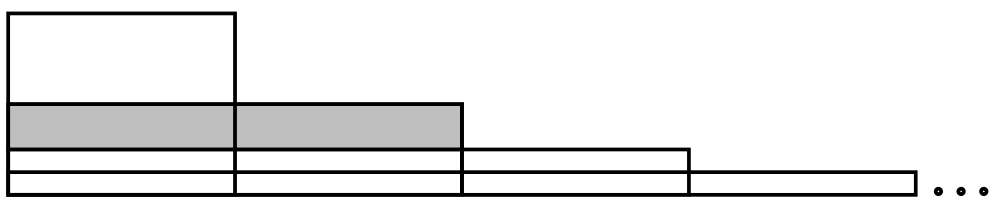
2. El resultado de la suma anterior es:

   a. 2
   b. 1
   c. No es posible calcularlo.
   d. $\frac{1}{2}$
   e. Ninguna de las anteriores.

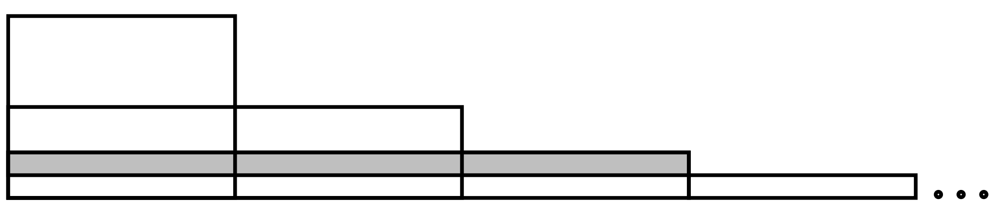
Observa otra forma de dividir esta escalera infinita decreciente, para la cual el área sombreada es un medio, que se escribe aritméticamente, $\frac{1}{2}$.



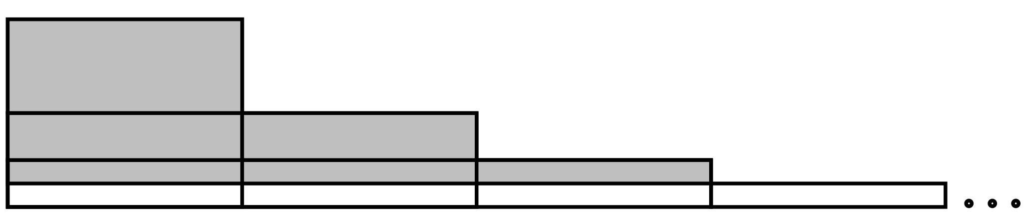
Para la siguiente figura, el área sombreada es dos veces un cuarto, es decir $2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2^2}$.



Así mismo para la siguiente figura, el área sombreada es tres veces un octavo, es decir $3\frac{1}{8} = 3\frac{1}{2^3}$.



La representación gráfica de la suma de las áreas sombreadas, de acuerdo a las anteriores figuras, es:



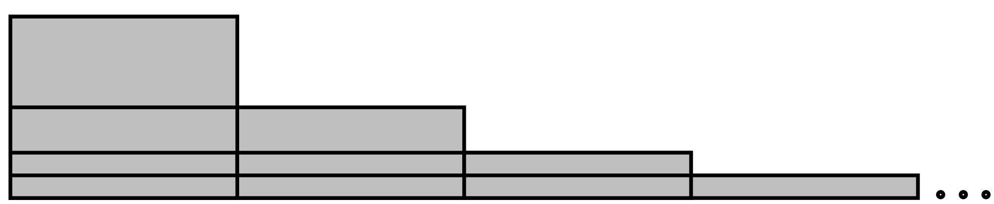
3. El área de la anterior escalera sombreada es:

   a. Un medio, más dos veces un cuarto, más tres veces un octavo.
   b. Un medio, más un cuarto, más un octavo.
   c. Uno, más dos veces un cuarto, más tres veces un octavo.
   d. Dos veces un medio, más dos veces un cuarto, más tres veces un octavo.
   e. Ninguna de las anteriores.

4. El área de la escalera sombreada anteriormente se puede escribir aritméticamente como:

   a. $\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}$
   b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
   c. $\frac{1}{2^0}+2\frac{1}{2^1}+3\frac{1}{2^2}$
   d. $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}$
   e. Ninguna de las anteriores.

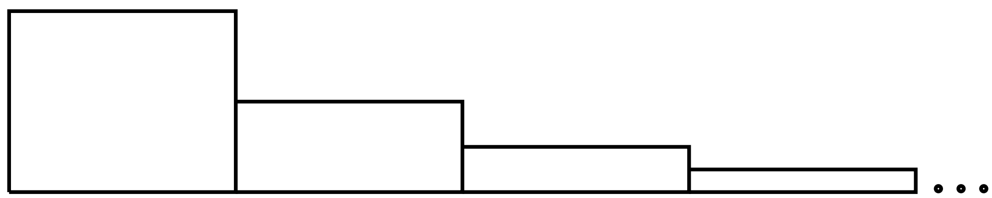
5. Continuando el proceso de manera infinita, obtenemos una escalera sombreada así:



   La suma de las áreas sombreadas se puede expresar como:

   a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$
   b. $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2^2}+4\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots$
   c. $\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots$
   d. No es posible calcularlo.
   e. Ninguna de las anteriores.

6. Observa la siguiente escalera, cuyo escalón inicial tiene como área una unidad cuadrada, cada escalón tiene como base una unidad y su altura duplica la altura del escalón siguiente.



Para la anterior escalera, se puede considerar que su área es:

a. $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

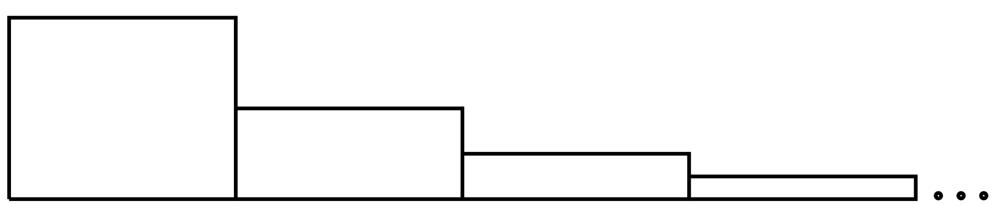
b. $1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

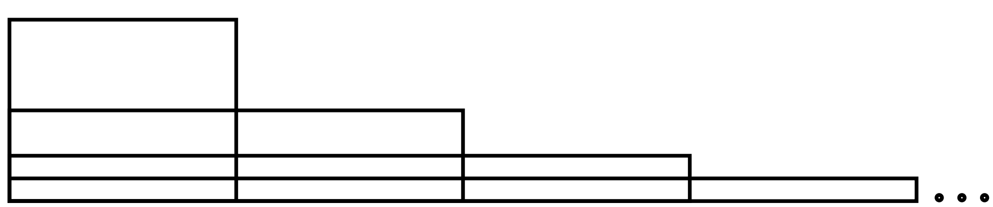
c. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

d. $1+\frac{1}{2^n}=2$

e. Ninguna de las anteriores.

Una manera alternativa de representar la escalera anterior, consiste en hacer divisiones como lo indica la figura:





7. Las anteriores representaciones muestran que las áreas de ambas escaleras son iguales, por lo tanto una de las siguientes igualdades es verdadera:

   a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

   b. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

   c. $1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

   d. $1+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+4\frac{3}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

   e. Ninguna de las anteriores.

Actividad 2

- De acuerdo a las actividades desarrolladas en las fases anteriores, selecciona las ideas y conceptos más significativos relacionados con el concepto objeto de estudio.

- Organiza de manera jerárquica los conceptos seleccionados, ubicando el concepto objeto de estudio como principal.

- Establece todas las relaciones posibles entre los conceptos e ideas abordados y represéntalas en un mapa conceptual.

Actividad 3

Utilizando el software cmap-tools, realiza un Mapa Conceptual que vincule los diferentes conceptos desarrollados en las fases anteriores y que represente la forma en que están relacionados estos elementos con el concepto objeto de estudio.

3.8. Análisis de las preguntas del módulo

A continuación se describen las preguntas relevantes del módulo, que fueron seleccionadas en correspondencia con la intencionalidad de cada una de las fases de acuerdo al trabajo de campo. Dichas preguntas permitieron la construcción del test y contemplan las relaciones inmersas en los conceptos encubiertos y los mecanismos utilizados para abordar el concepto objeto de estudio. Se trata de que los estudiantes razonen sobre el concepto convergencia de una serie infinita de términos positivos, pero esta no se le presenta como tal, dicho concepto se manifiesta como la suma de áreas de figuras planas; para tal efecto se aborda de forma intuitiva y de manera encubierta las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ y la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Pregunta 1

Se inicia indagando por las características de los rectángulos, con el fin de identificar si el estudiante las reconoce y está familiarizado con ellas. Dado que es necesario establecer un mecanismo que permita la elaboración de los razonamientos, se implementa la suma de áreas de rectángulos como el medio utilizado para abordar el objeto de estudio. El reconocimiento de las propiedades y características de los cuadriláteros, permite comprender los diferentes procesos de razonamiento visual - geométrico abordados a lo largo del módulo.

Pregunta 2

La pregunta indaga por el área de un rectángulo, este concepto es fundamental y permite dotar al estudiante de elementos que le permitirán razonar frente al concepto en cuestión; inicialmente y por el tipo de pregunta es posible que los razonamientos sean sencillos pues son de tipo finito, pero a medida que se avanza en el proceso de instrucción se busca que los estudiantes comprendan que el área de cada rectángulo corresponde a un término de una suma, y que razonen sobre la posibilidad de calcular la suma de infinitas áreas, estableciendo condiciones para determinar la existencia o no de dicha suma.

Pregunta 3

Es importante que el estudiante comprenda que todo cuadrado es rectángulo, más no todo rectángulo es cuadrado, pues esto indica que no sólo reconoce las propiedades de los cuadriláteros, sino que también deduce otras propiedades y hace clasificaciones a partir de éstas. Este tipo de deducciones permite confirmar que el estudiante razona en un nivel II, y que está en condiciones de comprender las preguntas que corresponden a dicho nivel, lo que facilitan el desarrollo del módulo.

Pregunta 4 y 6

Estas preguntas aparentemente no representan situaciones de dificultad, pretenden dar seguridad y hacer que los estudiantes consoliden sus conceptos, gracias al marco visual en el que se estructuran dichas preguntas es posible observar y captar su esencia; con el fin de que los estudiantes empiecen a familiarizarse con el concepto de escalera, la pregunta indaga por el área de una escalera que varía su altura, siendo ésta primero duplicada y luego triplicada. Este tipo de preguntas el estudiante deberá asociarlas posteriormente con otras que indagan por el área de rectángulos cuya altura varía, disminuyendo a la mitad, en una tercera parte o con una razón matemática diferente.

Pregunta 5 y 7

Estas preguntas aportan información acerca del concepto de razón, la manera de introducir éste concepto permite identificar si los estudiantes establecen relaciones parte todo entre áreas, reconociendo la mitad de éstas, su tercera parte, un cuarto, o cualquier otro tipo de partición realizado en una figura; este tipo de razonamientos son necesarios para comprender posteriores preguntas. De esta manera los estudiantes empiezan a ganar claridad frente a conceptos que aparecen de manera implícita a lo largo del módulo.

Pregunta 8

El aporte de información, dado en esta pregunta, indica cómo mediante un mecanismo de división y sombreo del área de un rectángulo es posible realizar divisiones sucesivas e indeterminadas. Este es el mecanismo empleado que permite al estudiante razonar frente al concepto de convergencia, para el presente estudio es usado inicialmente de forma explícita, pero a medida que avanza el proceso de instrucción, el estudiante debe lograr razonar sin necesidad de recurrir a representaciones visuales geométricas.

La pregunta 8 retoma el proceso de división y sombreo del rectángulo, inicialmente se presenta la división de un rectángulo a la mitad, luego se indaga por la razón de la región no sombreada con respecto a la superficie inicial, esta pregunta exige que el estudiante reconozca que es la mitad, un cuarto, un octavo de un área y que estas regiones surgen de hacer divisiones sucesivas a la mitad de las áreas no sombreadas. Aquí, se confirma que el estudiante razona de manera correcta sobre conceptos que impliquen relaciones parte - todo y además diferencia claramente cuáles son las regiones entre las que se establece esta relación; aunque la pregunta corresponde a un contexto netamente finito, induce al estudiante a pensar qué sucedería, si se repite el proceso de división y sombreo una cantidad indeterminada de veces.

Pregunta 9

Esta pregunta indaga acerca de lo que sucedería si se continúa dividiendo y sombreando el rectángulo de manera indefinida. La pregunta brinda la posibilidad de confrontar el proceso finito con el infinito, que el estudiante tiene en su mente. En el caso de que el estudiante considere que no es posible el proceso de división indefinida, se le pide que intente pensar en realizar un "zoom" al área que queda sin sombrear y que sombree su mitad, y que repita este proceso sucesivamente, para así inducirlo a razonar que sí es posible hacer divisiones sucesivas desde el punto de vista abstracto. Es decir, el estudiante considerará que analíticamente siempre será posible sacar la mitad de un valor y nuevamente la mitad del valor resultante, y hacer esto sucesivamente un número determinado o no de veces.

Pregunta 10

Esta pregunta indaga por la figura que resulta cuando se realiza un proceso infinito de división y sombreo, de manera implícita conduce al estudiante a razonamientos infinitos, retomando una componente visual geométrica que favorece la comprensión de procesos que serán primordiales en todas las actividades de las fases de aprendizaje desarrolladas. Las preguntas 9 y 10 generan una ruptura frente al razonamiento finito que el estudiante viene haciendo a lo largo del desarrollo del módulo y son fundamentales para la continuación del trabajo.

Pregunta 11

Esta pregunta retoma la figura resultante del proceso de división y sombreo infinito, que se ha venido indicando anteriormente; indaga por la suma de las regiones sombreadas, introduciendo al estudiante en la tarea de pensar cuál es el resultado de una suma infinita. La visualización es fundamental, a partir de ésta el estudiante puede apreciar que el proceso de dividir y sombrear un rectángulo repetidas veces conduce a la totalidad del rectángulo sombreado; este tipo de preguntas implícitamente inducen al estudiante a pensar en una suma infinita, en donde cada término de la suma corresponde al área de cada uno de los rectángulos sombreados. Posiblemente el estudiante está siendo más influenciado por lo que sus sentidos le indican, que por un razonamiento analítico. Sin embargo este es el tipo de desequilibrios de tipo mental o cognitivo que se quiere lograr para mejorar el nivel de razonamiento y conducirlo a pensar que es posible que una suma infinita tenga un resultado finito, aspecto bien paradójico en las matemáticas.

Pregunta 12

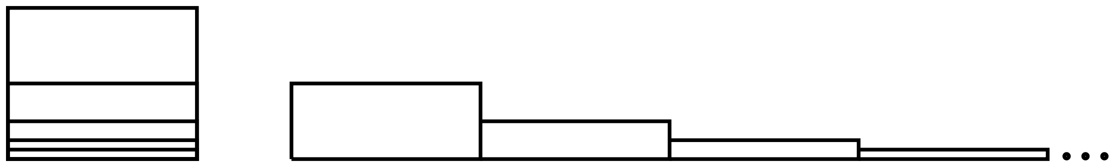
El aporte de información para esta pregunta retoma elementos fundamentales para los procesos de razonamiento, entre ellos los conceptos de escalera infinita decreciente, escalera infinita creciente y el concepto de área para una escalera. Esta pregunta indaga sobre la posibilidad de disponer un rectángulo que ha sido dividido sucesivamente de manera indefinida como una escalera decreciente, esto con el fin de que el estudiante acepte que se puede construir una escalera infinita decreciente a partir de un rectángulo dado, para que empiece a considerar la posibilidad de transferir las propiedades observadas en los rectángulos a las escaleras, sobre todo en lo que respecta a la suma de las áreas.

Pregunta 13

Para esta pregunta se presenta un aporte de información fundamental: la razón de una escalera. El concepto de razón se ha trabajado en preguntas previas, por lo cual el nuevo concepto no genera dificultades, el estudiante relaciona los conceptos de razón abordados en las preguntas iniciales con la nueva definición presentada, además, posteriormente será uno de los criterios que permitan determinar la suma de una escalera infinita (convergencia). Esta pregunta, es aparentemente fácil y motiva a los estudiantes a continuar con el desarrollo del módulo, pues utiliza un mecanismo familiar para ellos y retoma elementos trabajados con anterioridad, frente a los cuales se ha logrado claridad.

Pregunta 14

Aquí se indaga acerca de la posibilidad de disponer una escalera infinita decreciente de razón un medio, como lo indica la figura:



La pregunta en su formulación no es comprometedora, pues sugiere al estudiante la posibilidad de responder lo que cree, pero si es claro que su intención es que ellos reconozcan que, así se junten los infinitos escalones, esta unión nunca superará el área del rectángulo original, aunque el concepto de razón no aparece explícito en esta pregunta, el estudiante debe comprender qué relación tiene dicho concepto con este hecho. Los estudiantes además pueden corroborar que la suma de las infinitas áreas de los rectángulos tienen un resultado finito, es más, que es el área del rectángulo finalmente construido.

Esta pregunta, hace explícita la relación entre la escalera de razón un medio y el rectángulo dividido indefinidamente, si los estudiantes logran progresar en la fases, están en condiciones de transferir las propiedades observadas en los rectángulos a las escaleras infinitas decrecientes.

Pregunta 15

Esta pregunta resume ideas fundamentales de preguntas anteriores. Indaga por el área de una escalera de razón un medio. El estudiante a lo largo del proceso ha venido realizando una serie de relaciones entre los conceptos que ya poseía y los nuevos, más importante aún, él ha tenido que ir construyendo su propio razonamiento; así que el objetivo de esta pregunta es que los estudiantes logren relacionar y razonar sobre los siguientes hechos:

- Para un rectángulo cuyo proceso de división y sombreo se ha realizado infinitas veces, la suma de las áreas sombreadas es equivalente al área del rectángulo inicial, esto lo puede deducir el estudiante gracias a la visualización.
- La escalera de razón un medio, es construida a partir de un rectángulo que se ha divido a la mitad sucesivas veces, y por lo tanto deben compartir las mismas propiedades.
- El área del rectángulo es equivalente al área de la escalera, así, si el rectángulo estudiado tiene área, la escalera debe tener igual área; esta situación se puede

confrontar en preguntas posteriores que indagan por la validez del reciproco de este enunciado.

Pregunta 16 - 17

Para estas preguntas se presenta una escalera infinita creciente de razón dos, y se indaga por el área de dicha escalera; la pregunta busca que los estudiantes razonen que una escalera infinita creciente no tiene área, aunque tenga razón; este hecho debe proponer un desequilibrio cognitivo, pues ya han trabajado con escaleras que tienen razón y también área, sin embargo, dado que la razón de las escaleras decrecientes es menor que uno, no será posible que éstas se vuelvan crecientes; de esta manera los estudiantes empiezan a conjeturar sobre qué condiciones son suficientes y necesarias para hablar encontrar la suma de infinitos rectángulos, es decir, definir si la serie que representa dichas suma es o no convergente. El estudiante se puede preguntar en qué casos o para qué tipo de escalas el concepto de razón es importante, o si será siempre necesario que exista la razón, o para cuáles escaleras es suficiente la existencia de la razón para determinar su área.

Pregunta 18

El aporte de información define una escalera armónica como: una escalera infinita decreciente donde la altura del segundo rectángulo es la mitad de la altura del primero, la altura del tercero es un tercio de la altura del primero, la altura del cuarto es un cuarto de la altura del primero, y así sucesivamente. Aunque esta pregunta sigue el modelo de preguntas que se viene presentando, busca también brindar elementos para romper con la idea que todas las escaleras decrecientes tienen área, para ello el estudiante confronta el razonamiento para analizar la situación nueva que se le presenta. Cuando la pregunta indaga acerca de cual será la suma para las áreas de los rectángulos, implícitamente se está preguntando por el resultado al sumar los términos:

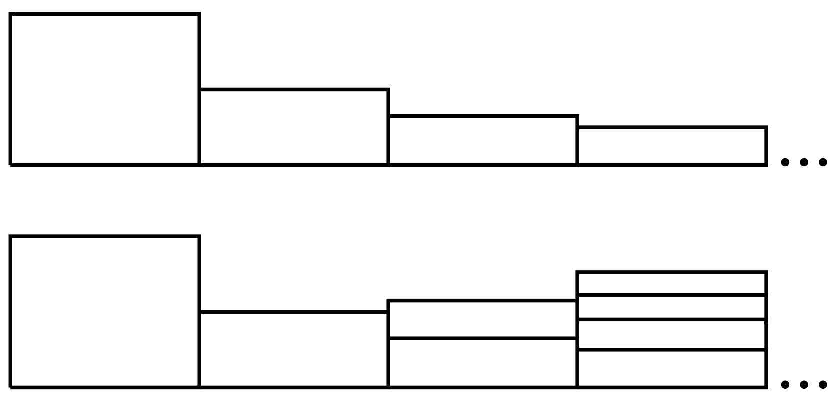
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Pregunta 19

De acuerdo a la definición de razón matemática, el estudiante debe deducir que la escalera armónica carece de ésta; con esta pregunta se plantean indirectamente los siguientes interrogantes: ¿Qué relación existe entre la razón de una escalera y el hecho que tenga área?, ¿tendrá alguna relación la razón de una escalera con el hecho de pueda o no volverse creciente?

Pregunta 20

La situación planteada en esta pregunta, busca que los estudiantes sientan la necesidad de definir algunas condiciones necesarias para determinar la suma de infinitas áreas. Pretende que el estudiante cambie de opinión (si el caso corresponde) con respecto a las ideas que ha venido construyendo, de acuerdo con Jaramillo y Campillo (2001): "así puede pasar a desarrollar un razonamiento más refinado, necesario para alcanzar a dar una respuesta a otras preguntas posteriores caracterizadas por un mayor significado matemático que exigen mayor reflexión". La manera de lograr esto es mostrando que al disponer la escalera armónica de manera tal que partir del segundo rectángulo, se disponen los dos siguientes uno sobre otro, luego los cuatro siguientes, luego los ocho siguientes y así sucesivamente, se obtiene una escalera creciente, como lo indica siguiente figura:



El procedimiento corresponde a una demostración geométrica análoga a la realizada por Oresme, en la que se agrupan los términos así:

$$\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\ldots)\ldots+\ldots$$

La pretensión es que el estudiante razone que la suma del tercer y cuarto rectángulos sobrepasa el área del segundo rectángulo; la suma de las áreas desde el quinto rectángulo hasta el octavo sobrepasan el área de la suma de los dos anteriores y por ende la del segundo rectángulo; así mismo, la suma de las áreas de los rectángulos noveno a decimosexto sobrepasa el área de cada uno de los cuatro anteriores y así sucesivamente, para deducir que se construye un una escalera infinita creciente, tal como se había estudiado en preguntas previas, ésta no tiene área.

Pregunta 21

Esta pregunta requiere de mayor reflexión, pone en crisis el esquema mental construido por el estudiante, de modo él comprende que la escalera armónica se puede disponer como una escalera infinita creciente, podra deducir que no tiene área, o que ésta es infinita, así, si él está estableciendo la red de relaciones adecuada para el concepto, estará en condiciones de reflexionar y concluir que la existencia de la razón garantiza la existencia del área, sólo para escaleras infinitas decrecientes; esto implica que si la razón existe y es menor que 1, la escalera no podrá disponerse de manera creciente. Este tipo de pregunta muestra la limitación del método utilizado en el proceso de razonamiento para precisar el concepto objeto de estudio, por el hecho de que si una escalera no tiene razón, no necesariamente no tiene área.

Pregunta 22

La intención de esta pregunta es que el estudiante decida si la escalera armónica tiene área o no. Su razonamiento debe lograr romper con posibles ideas erradas que se hayan presentado durante el proceso de aprendizaje, permitiéndole hacer afirmaciones tales como:

- No todas las escaleras decrecientes infinitas tienen área.
- Existen condiciones tales como la razón de una escalera, que permite afirmar la existencia del área.
- Si una escalera se puede disponer de manera creciente, entonces la escalera tiene área infinita.

La idea es que el estudiante asocie el área de una escalera infinita decreciente con el hecho de tenga razón y que no pueda volverse creciente.

Pregunta 23 y 24

Estas preguntas, además de poner en crisis los esquemas cognitivos, también aseguran que si los estudiantes están comprendiendo el proceso, están en condiciones de reflexionar sobre lo tratado hasta el momento y explicitar sus razonamientos. Cuando los estudiantes razonan acerca de las condiciones que permiten determinar si una escalera tiene área, es decir, si la suma existe o no (convergencia), deben inferir implicaciones tales como:

- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón, tiene área.
- Si una escalera infinita decreciente no tiene área, entonces no tiene razón
- Si una escalera infinita decreciente es posible disponerla en forma de escalera infinita creciente, entonces no tiene razón

- Si una escalera infinita decreciente es posible disponerla en forma de escalera infinita creciente, entonces no tiene área

Pregunta 25

Esta pregunta comprueba que se hayan comprendido razonamientos previos, es también necesaria para avanzar en otras preguntas y fijar los conceptos trabajados. Previo a esta pregunta se hace un aporte de información acerca del proceso de división y sombreo, abordado en preguntas anteriores, ahora a cada área sombreada se le asigna una representación simbólica. El proceso de razonamiento a lograr consistirá en traducir el lenguaje oral de fracciones usado por los estudiantes a la representación de fracciones aritméticas; los estudiantes deben indicar cómo representar la suma de las sucesivas divisiones que se han realizado, hasta llegar a la tercera división, luego se sugiere continuar con el proceso de división y sombreo hasta la n-ésima partición y se indaga por la representación simbólica para ésta. El propósito de la pregunta es que los estudiantes razonen de acuerdo al aporte de información y logre encontrar el termino n-ésimo, el cual constituye el aspecto finito del proceso de división y sombreo, fundamental para los procesos de generalización.

Pregunta 26

Esta pregunta indaga por la suma de las n áreas sombreadas, también busca verificar que los estudiantes realizan una representación matemática adecuada para dicha suma, teniendo en cuenta las indicaciones dadas en el aporte de información.

Durante todo el proceso de razonamiento, los estudiantes han venido sumando regiones sombradas, surgidas de dividir sucesivamente a la mitad un rectángulo. El lenguaje utilizado para referirse a las áreas sombreadas le permitirá asignar a cada una de ellas una representación simbólica. Habiendo alcanzado un avanzado razonamiento, está en condiciones de hacer una asociación entre términos que representan la visualización y la expresión:

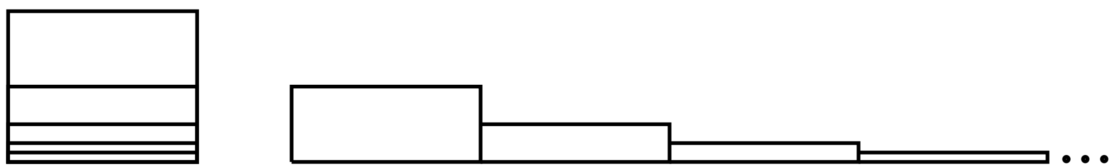
$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Pregunta 27

Esta pregunta no sólo permite fijar el proceso de la construcción del concepto, si no que también permite comprobar la validez de los razonamientos que se han venido desarrollando. Previo a esta pregunta se le presenta al estudiante un rectángulo que ha sido dividido y sombreado de manera indefinida, el podrá observar que el rectángulo ha quedado completamente sombreado, la pregunta indaga acerca de cuál es el área de dicha figura. Cuando los estudiantes relacionan los procesos de división indefinidos que se han venido realizando, con las sumas de las áreas obtenidas y a la vez con el área del rectángulo, la cual es finita, ellos logran reconocer que una suma indefinida puede tomar un valor finito, en este caso, el área del rectángulo.

Pregunta 28

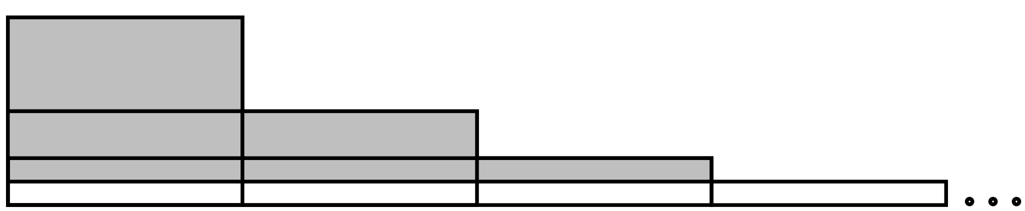
En esta pregunta, se muestra como un rectángulo dividido a la mitad sucesivamente, se puede disponer como una escalera infinita decreciente de razón un medio, obteniéndose una figura como la siguiente:



La pregunta motiva a razonar sobre el área del rectángulo inicial, la unidad, e indaga por la representación simbólica de la suma de las infinitas áreas que se genera al dividir sucesivamente el rectángulo; la pregunta pretende que el estudiante logre encontrar la relación entre la suma indefinida y el área finita del rectángulo, y con esto que logre razonar sobre el hecho de que una suma infinita, bajo ciertas condiciones, puede tener resultado finito.

Pregunta 29

Esta pregunta maneja información en forma explicita e implícita. Los estudiantes deben inferir este tipo de información, de acuerdo al nivel en el que están razonando. Previo a esta pregunta se hace un aporte de información acerca del problema de Oresme, se muestra una escalera infinita decreciente, cuyo rectángulo inicial tiene área 1 unidad cuadrada, el proceso indica otra forma de dividir y sombrear la misma escalera; el proceso de división y sombreo se realiza tres veces, donde se muestra que el área de cada escalón corresponde a un término aritmético de una suma. De esta manera, para la siguiente escalera:



El área sombreada será:

$$\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}$$

Para que el estudiante logre relacionar los procesos indicados con la pregunta debe establecer los vínculos necesarios entre las preguntas anteriores y la pregunta presentada. Esta pregunta induce al estudiante a razonar sobre la escalera de Oresme y reconocer una estructura semejante a las escaleras convergentes estudiadas.

La pregunta exige de los estudiantes un avanzado nivel de razonamiento, ya que el problema a resolver es otra manifestación geométrica del mismo hecho de dividir el área de un rectángulo sucesivamente a la mitad, cuya representación aritmética es equivalente a otra escalera que se visualiza posteriormente.

Pregunta 30

Esta pregunta indaga por la manera de representar simbólicamente la suma de la escalera de Oresme, con el fin de verificar que los estudiantes han alcanzado a razonar y comprender dicha representación.

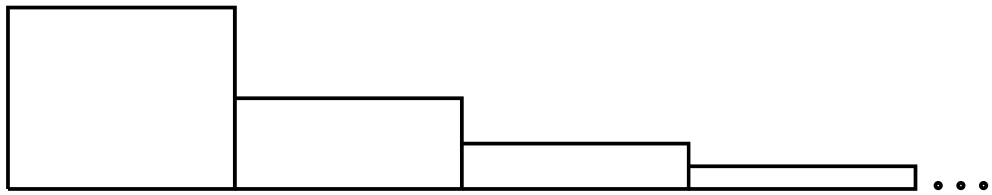
Pregunta 31

Esta pregunta contempla dos aspectos: el geométrico y la representación aritmética respectiva de la escalera de Oresme, sombreada de manera indefinida, hasta obtener de manera abstracta una escalera completamente sombreada. Esta pregunta pretende que el estudiante establezca la relación entre la suma de áreas sombreadas, su representación y su posible resultado, y busca que el estudiante vincule los conceptos abordados en preguntas anteriores con las características de la escalera de Oresme. Los procesos de razonamiento infinito se refuerzan aquí y se vinculan con una representación geométrica y simbólica, para la cual el resultado final corresponde a la suma de las áreas de la escalera. El estudiante debe comprender que para la escalera de Oresme el área sombreada debe ser:

$$\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Pregunta 32

Esta pregunta es coherente con otras que indagan acerca del problema de Oresme y en el fondo conduce a razonamientos similares pero de un nivel más avanzado. Esta pregunta indaga por el área de la escalera de Oresme, motiva al estudiante a razonar sobre cuál es la suma de infinitos términos, además exige comprender que implícitamente esta escalera tiene las mismas características de otras que se han estudiado con anterioridad. La escalera correspondiente a esta pregunta se dispone de la siguiente manera:



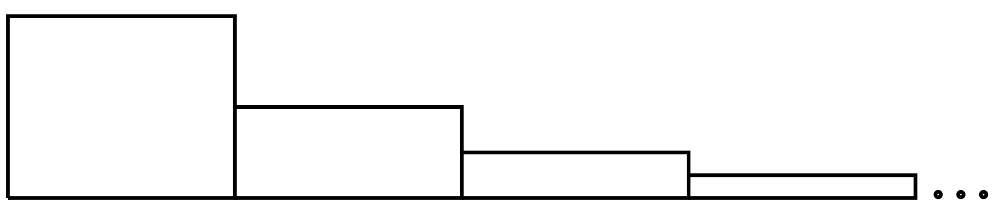
Así, si el estudiante se encuentra en el proceso de articular el aspecto geométrico con el aritmético que le permite inferir que el área de la anterior escalera es:

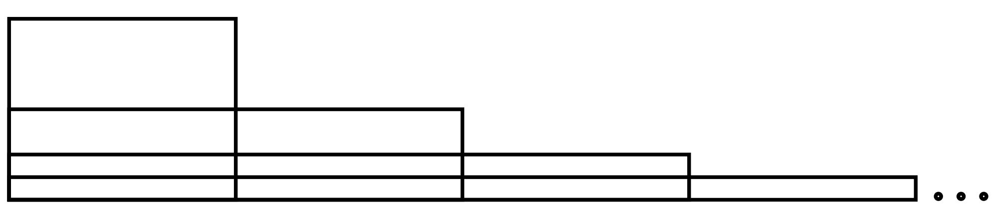
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$$

Pregunta 33

En este ítem se muestra la escalera de Oresme, con dos representaciones geométricas equivalentes, las cuales a su vez permiten una representación simbólica también equivalente; la pregunta indaga por dicha representación, la cual corresponde a la suma de las áreas de ambas escaleras, los estudiantes razonan para establecer una equivalencia de tipo geométrico entre la suma de los rectángulos de una escalera y la otra, y de esta manera reconocen que dicha equivalencia también se puede establecer entre las representaciones simbólicas.

Así, si las escaleras:





Son iguales, la sumas: $1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

Pregunta 34 y 35 Estas preguntas invitan a los estudiantes a explicitar sus ideas y razonamientos, el objetivo es evidenciar el alcance de la integración que deben haber logrado en su red de relaciones, esto se verifica cuando pueden inferir y verbalizar las condiciones bajo las cuales una escalera tiene un área finita e igualmente las condiciones que se deben presentar para que un área sea infinita. Estas preguntas posibilitan verificar los razonamientos hechos hasta ahora, es decir, cuando los estudiantes logran afirmar que si una escalera infinita decreciente tiene área entonces la suma de infinitos términos positivos es finita, así se pone en evidencia el progreso en su nivel de razonamiento.

3.9. Validación del módulo

Para el diseño del módulo, se propuso inicialmente un guión entrevista de carácter socrático el cual se fue refinando durante el trabajo de campo, ya que los estudiantes entrevistados permitieron confirmar algunas de las hipótesis que se tenían y desvirtuar otras que no correspondían a las pretenciones del estudio. Este guión entrevista también permitió consolidar los descriptores de cada fase y articularlos a las actividades, teniendo en cuenta la intención de lograr un nivel III de razonamiento.

A pesar de que el módulo ha sido validado mediante el trabajo de campo, se consideró importante elaborar un test derivado del módulo, para automatizar la prueba; el test está compuesto por las preguntas más significativas del módulo, el cual representa una herramienta que permite detectar si el estudiante logra las fases de orientación dirigida y de integración frente al concepto de convergencia de una suma infinita. El test tiene como finalidad mostrar la efectividad del módulo, evidenciando el progreso que tienen los estudiantes en su nivel de razonamiento, y las respuestas presentadas son las dadas por los estudiantes cuando se llevó a cabo la intervención y desarrollo del módulo.

El test consta de 35 preguntas, utiliza una escalera compuesta por rectángulos, como un mecanismo para sumar geométricamente las áreas de los rectángulos, estas sumas pueden ser finitas o infinitas, dependiendo de la forma en que la escalera sea construida, es decir, dependiendo de si es posible disponer los infinitos rectángulos de manera que se pueda construir o no una escalera infinita creciente. Aunque el tratamiento que se da a la suma de las áreas infinitas, a lo largo del test, no hace explícito el uso de series, cabe anotar que éste es el concepto que subyace en todo este proceso de razonamiento, cuyo aspecto geométrico es una escalera infinita decreciente, que consta de infinitos rectángulos y la suma del área de cada uno de ellos representa una suma infinita correspondiente a una serie de términos positivos.

El test propone preguntas y hace aportes de información para que el estudiante infiera bajo qué condiciones una suma puede ser finita, así mismo también muestra un contraejemplo con el que los estudiantes deducen la necesidad de la existencia de la razón, para definir la convergencia o no de una serie. Las preguntas teóricas incluidas en el test, muestran la posibilidad de que los estudiantes establezcan relaciones entre los conceptos que han construido y a su vez, no sea necesario recurrir a su representación visual - geométrica, ni a su aspecto aritmético.

Capítulo 4

Análisis de Resultados

En este capítulo se hace la descripción del trabajo de campo realizado y el análisis de los resultados obtenidos durante el proceso de investigación, haciendo énfasis en el alcance del estudio, en relación con el progreso que presentan los estudiantes en cada una de las fases de aprendizaje para lograr un avanzado nivel de razonamiento.

La presente investigación se encuentra enmarcada en un enfoque mixto, pues involucra "un proceso de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos". El uso de este enfoque favorece profundizar en la interpretación y análisis realizados en procesos investigativos, en la medida que permite cuantificar datos cualitativos.

En el presente estudio se aplicó un guión entrevista de carácter socrático, que se perfeccionó, hasta constituir un módulo de aprendizaje, dicha entrevista permitió determinar la evolución en los procesos de razonamiento de los estudiantes, gracias al refinamiento progresivo del lenguaje, a la forma de argumentar y explicar cómo comprendían el concepto objeto de estudio, se pudo determinar si hubo o no progreso en el nivel de razonamiento, es de anotar que lo anterior está en estrecha relación con el cumplimiento de los descriptores propuestos para cada fase, pues estos caracterizan el progreso en el razonamiento, como también lo hace el trabajo de los estudiantes con los mapas conceptuales. Todos los análisis de carácter cualitativo realizados, fueron materia prima para construir un tets que se aplicó a una amplia población y que además permitió corroborar mediante un análisis cuantitativo las conclusiones de tipo cualitativo que se habían logrado con el trabajo de campo. Es decir, se pretendió con el test corroborar ciertos logros importantes alcanzados durante la intervención.

4.1. Población y muestra

La investigación se llevó a cabo con estudiantes de los últimos niveles de Educación media de dos instituciones educativas: Presbítero Camilo Torres Restrepo, allí se desarrolló el trabajo de campo, con la participación de 35 estudiantes de grado once, donde se aplicó el guión entrevista que fundamentó el perfeccionamiento y diseño del módulo, y finalmente la elaboración del test derivado del módulo. El test se aplicó tanto a los estudiantes de la institución mencionada, como a 213 estudiantes de los grados 10º y 11º del Colegio Pedro Justo Berrio.

4.2. Aplicación del módulo de instrucción y trabajo de campo

El trabajo de campo se realizó en la institución educativa Presbítero Camilo Torres Restrepo; se desarrolló en tres etapas, la primera de ellas consistió en la aplicación del test denominado "Áreas de escaleras" (ver anexo), la aplicación de dicho test permitió detectar los diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes participantes en el estudio. Tanto los estudiantes que fueron clasificados en el nivel II de razonamiento como los demás, participaron del desarrollo de la investigación, para el cual se desarrollaron actividades en relación directa con el objeto de estudio y se brindó a los estudiantes la oportunidad de expresar inquietudes frente al concepto, socializar conclusiones y construir nuevos conocimientos, reflejando así su red de relaciones que permitiera avanzar en el estudio.

El siguiente cuadro muestra el nivel de razonameinto en el que se encontraba el grupo de estudiantes de la institución Presbítero Camilo Torres Restrepo al inicio del trabajo de campo cuando se les aplicá el test "Áreas de escaleras". De los 35 estudiantes que participaron en la investigación, solo 31 respondieron el cuestionario, los demás se encontraban ausentes. La siguiente tabla muestra la clasificación de los estudiantes donde cada conglomerado corresponde al nivel de razonamiento:

Número de casos en cada conglomerado

Niveles de razonamiento	I	11.000
	II	10.000
	III	10.000
Válidos		31.000
Perdidos		.000

De acuerdo con los resultados anteriores, se puede observar que el 68 % de la población están ubicados en los niveles I y II de razonamiento, mientras que el 32 % pertenecen al nivel III, se confirma una vez más las dificultad que presentan la mayoría de estudiantes para alcanzar un avanzado nivel de razonamiento, motivo por el cual se ha llevado a cabo este trabajo de investigación.

Con el análisis de los resultados obtenidos se dio inicio a la segunda etapa, y con esta al proceso de intervención; lo primero que se hizo fue un rastreo bibliográfico acerca de cuáles eran las herramientas metodológicas pertinentes para estudio, que estuvieran en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele, de esta búsqueda concluimos que los mapas conceptuales, gracias a sus características, presentan una estrecha relación con la teoría del modelo educativo, permitiendo materializar la red de relaciones construida por los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Los estudiantes recibieron una capacitación acerca de la construcción de mapas conceptuales, durante aproximadamente dos semanas, se enfatizó en el diseño de éstos en las áreas de matemáticas, lengua castellana e informática. El uso de los mapas conceptuales en el desarrollo del trabajo de investigación, permitió, no solo desarrollar conceptos de matemáticas, sino también involucrar las áreas mencionadas. Éstas áreas se vieron favorecidas ya que hubo un conocimeinto específico que las integró, enriqueciendo el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Los estudiantes iniciaron el proceso de aprendizaje, realizando y presentando esquemas que contenían temas de su interés y reflejaban su red de relaciones, luego los docentes presentaron modelos de mapas conceptuales para que los estudiantes identificaran su estructura y con base en ésta rediseñaran sus esquemas. Se realizaron diferentes tipos de actividades para mejorar el diseño de los mapas; entre las actividades realizadas se destacan como más significativas, aquellas en las que estudiantes y docentes construyen conjuntamente una lista de conceptos afines con la temática estudiada, luego determinan los conectores apropiados para relacionar dichos términos y finalmente de manera consensuada el grupo construye un mapa producto de la socialización.

En el área de informática, los estudiantes fueron capacitados acerca del uso del software c-maptools, muchos de los mapas realizados en las diferentes áreas fueron presentados utilizando esta herramienta.

La tercera etapa del trabajo de campo empezó con el diseño de un guión entrevista de carácter socrático, algunas de las preguntas del guión fueron inspiradas en el trabajo de Jurado y Londoño (2005); el módulo de instrucción presentado es el resultado de un proceso de recopilación de las experiencias surgidas del diálogo directo o entrevistas con los estudiantes, a medida que se avanzó en el proceso de intervención. Se tuvo especial atención a la socialización, dada la importancia de las respuestas de los estudiantes, gracias a sus aportes, participaciones, observaciones y preguntas, fue posible concebir el diseño del módulo de instrucción (módulo de aprendizaje).

Con los datos obtenidos en el trabajo de campo fue posible ir mejorando las experiencias de aprendizaje y, a su vez, el guión entrevista, cabe anotar que se hizo un considerable esfuerzo por establecer de manera precisa y coherente la estrecha relación existente entre el guión entrevista y el modelo teórico, para conseguir que las actividades estuvieran enmarcadas en cada una de las fases y sus descriptores, y a la vez garantizar que el paso por cada una de ellas favoreciera el progreso a un nuevo nivel de razonamiento. Gracias a todo el proceso de transformación y mejoramiento que sufrió el guión entrevista durante el lapso de tiempo destinado para el trabajo de campo, se logró la construcción y el refinamiento del módulo de instrucción propuesto para lograr los objetivos inicialmente planteados en el presente estudio.

A continuación se hace una descripción del desarrollo del trabajo de campo, destacando la participación de los estudiantes en el proceso de intervención y su desempeño en cada una de las fases de aprendizaje.

4.3. Fase de información

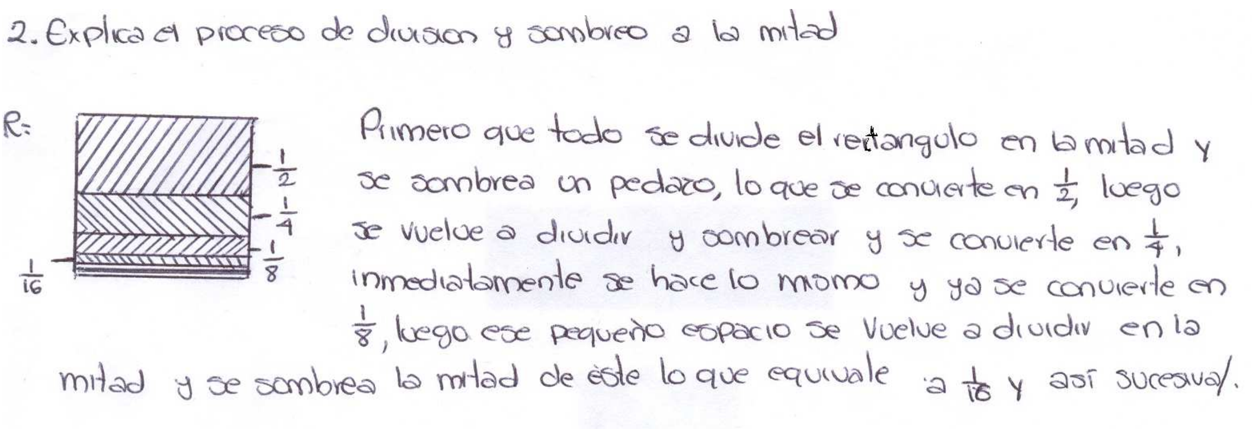
Las primeras actividades del módulo de instrucción estaban enmarcadas en una fase de información, la intención era afianzar conceptos básicos de geometría, importantes para la construcción del concepto objeto de estudio. Las actividades realizadas fueron desarrolladas satisfactoriamente, los estudiantes mostraron buen desempeño al momento de reconocer y construir figuras geométricas relacionadas con los cuadriláteros, así como también al clasificarlas de acuerdo con sus propiedades.

En esta fase se empezó a trabajar en un marco visual, ésta fue la forma de introducir el concepto. Se redujo al máximo la utilización de expresiones aritméticas para evitar problemas de comprensión derivados de la notación, el concepto de área fue abordado durante esta fase, así como también la definición de relaciones parte - todo, para encontrar razones entre áreas; una vez terminadas las actividades de la fase uno, retomamos las conclusiones principales de los estudiantes y sus razonamientos, para revisar los descriptores de fase propuestos, refinarlos y mejorarlos, según los objetivos definidos en la fase y sobretodo, acorde al objetivo del estudio .

4.4. Fase de orientación dirigida

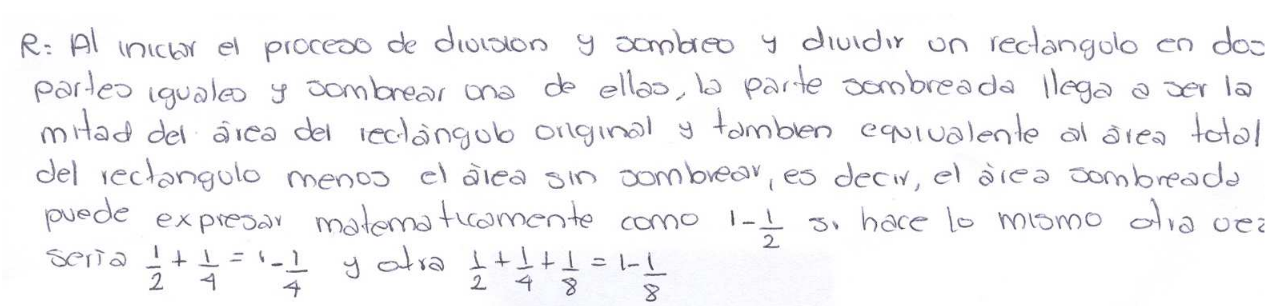
En la fase de orientación dirigida, los estudiantes empiezan a realizar procesos de razonamiento infinito, las actividades se proponen en un marco visual - geométrico, con el fin de inducir a los estudiantes a la construcción del concepto; en esta fase también empiezan a asociar sumas de áreas con representaciones aritméticas. Para los estudiantes la idea de infinito está relacionada con “no tener fin”, este concepto es poco utilizado por ellos, y por esto se sentían desconfiados con su uso. El carácter socrático del módulo, exige que, mediante las preguntas planteadas en las discusiones, los estudiantes logren confrontar sus ideas y tengan la posibilidad de pensar en otras opciones de respuesta, brindando situaciones para que ellos logren deducir la respuesta a partir de dicha confrontación.

Otras actividades propuestas para introducir el concepto de infinito, consistieron en realizar procesos de división y sombreo. Este mecanismo es utilizado para mostrar por inducción la forma de sumar áreas sombreadas. Una de las mayores dificultades radicó en que los estudiantes lograran comprender que es posible hacer divisiones sucesivas a un área cuando se hace un zoom a dicho sector, algunas de la conclusiones a las que llegaron los estudiantes, luego de las socializaciones fueron:


2. Explica el proceso de division y sombreo a la mitad

R: Primero que todo se divide el rectangulo en la mitad y se sombrea un pedazo, lo que se convierte en $\frac{1}{2}$, luego se vuelve a dividir y sombrear y se convierte en $\frac{1}{4}$, inmediatamente se hace lo mismo y ya se convierte en $\frac{1}{8}$, luego ese pequeño espacio se vuelve a dividir en la mitad y se sombrea la mitad de éste lo que equivale a $\frac{1}{16}$ y así sucesiva/.

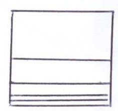
Con este tipo de deducciones y gracias a las preguntas que orientaron el trabajo, los estudiantes empiezan a proponer representaciones aritméticas de infinitos términos, sin lograr determinar su resultado, dada la poca asociación entre el aspecto geométrico y su representación aritmética, como lo muestra la respuesta que se presenta a continuación:


R: Al iniciar el proceso de division y sombreo y dividir un rectangulo en dos partes iguales y sombrear una de ellas, la parte sombreada llega a ser la mitad del área del rectángulo original y tambien equivalente al área total del rectangulo menos el área sin sombrear, es decir, el área sombreada puede expresar matematicamente como $1-\frac{1}{2}$ si hace lo mismo otra vez sería $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$ y otra $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$

Apoyados en la visualización, muchos de los estudiantes manifestaron que finalmente el resultado obtenido sería el rectángulo original, totalmente sombreado; otros se negaban a pensar que así fuera, pues no concebían el hecho de que la suma de infinitos términos pudiera ser finita. Gracias a las discusiones generadas en el grupo y a los razonamientos de tipo visual - geométrico, la mayoría de los estudiantes logran llegar a conclusiones como: "*en el rectángulo se ve que las infinitas áreas sombreadas forman el rectángulo inicial, por esto una suma infinita posiblemente sea finita*".

R: Al ir dividiendo y sombreando el rectangulo, cada vez se ve menos espacio y aunque nosotros no podemos ver el proceso se puede realizar infinitamente, ya que siempre quedará una fraccion sin sombrear a la cual se le puede continuar haciendo el proceso de division.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\cdots\frac{1}{2^\infty}$



Las representaciones aritméticas inferidas por los estudiantes ayudan, a encontrar expresiones equivalentes para la suma de áreas, a continuación se presetan algunos de los razonamientos presentados por ellos:

Fisicamente no me da para más particiones, pero analiticamente lo puedo seguir haciendo, como lo ven a continuación...

• analiticamente se obtiene lo siguiente...

$* \; 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\qquad * \; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$

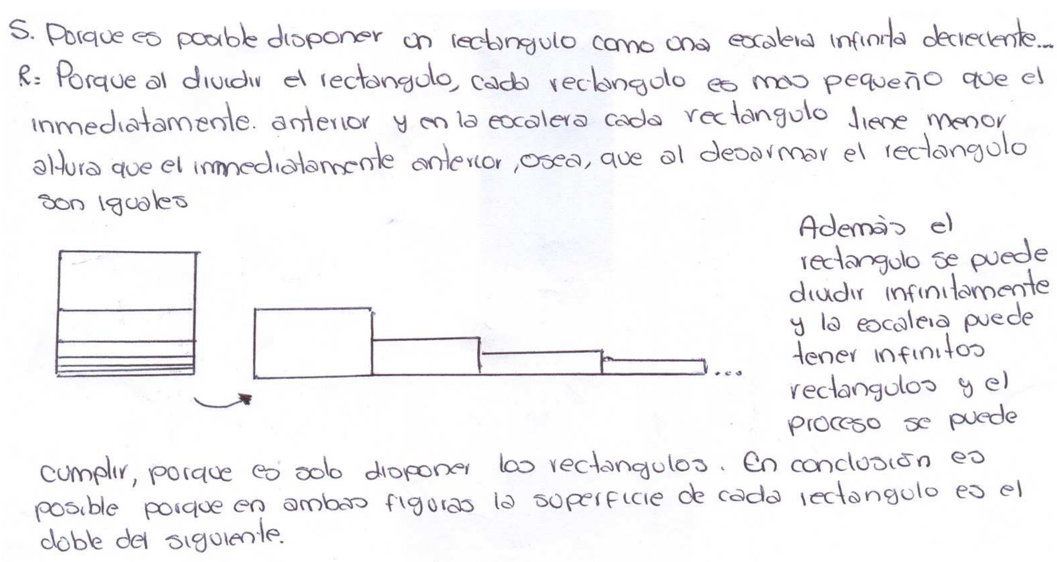
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1-\frac{1}{16}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=1-\frac{1}{32}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=1-\frac{1}{64}$

lo que me indica que puedo seguir sacando particiones infinitamente y la suma sera 1

En esta fase los estudiantes comprenden que es posible construir una escalera infinita decreciente a partir de un rectángulo divido a la mitad sucesivas veces. Esta relación permite que entiendan con claridad el concepto de infinito, pues según ellos, "*en la escalera es más sencillo ver infinitos rectángulos*". Entre las conclusiones obtenidas en esta fase, se destacan las siguientes; en primer lugar, los estudiantes razonan frente al concepto de razón aritmética entre áreas y lo relacionan con el hecho de que el cociente del área de un rectánculo y el inmediatamente anterior sea constante y en segundo lugar, comprenden la relación entre un rectángulo dividido a la mitad sucesivas veces con una escalera de razón un medio. A continuación se presenta la explicación dada por un estudiante acerca de la relación existente entre un rectángulo dividido infinitas veces y una escalera infinita decreciente:


S. Porque es posible disponer un rectangulo como una escalera infinita decreciente...
R: Porque al dividir el rectangulo, cada rectangulo es mas pequeño que el
inmediatamente anterior y en la escalera cada rectangulo tiene menor
altura que el inmediatamente anterior, osea, que al desarmar el rectangulo
son iguales

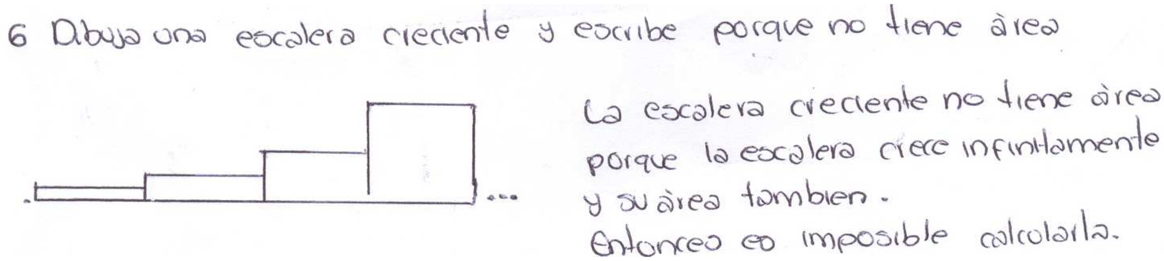
Además el
rectangulo se puede
dividir infinitamente
y la escalera puede
tener infinitos
rectangulos y el
proceso se puede
cumplir, porque es solo disponer los rectangulos. En conclusión es
posible porque en ambas figuras la superficie de cada rectangulo es el
doble del siguiente.

Podemos observar, que los estudiantes empiezan a hacer razonamientos infinitos a partir de procesos finitos.

4.5. Fase de explicitación

Las actividades de la fase 3, retoman como mecanismo de visualización las escaleras infinitas decrecientes, dado esto se observó en los estudiantes una evolución en sus razonamientos, comprenden que la suma de infinitas áreas puede ser finita y relacionan el área de una escalera infinita decreciente con el área del rectángulo que la origina.

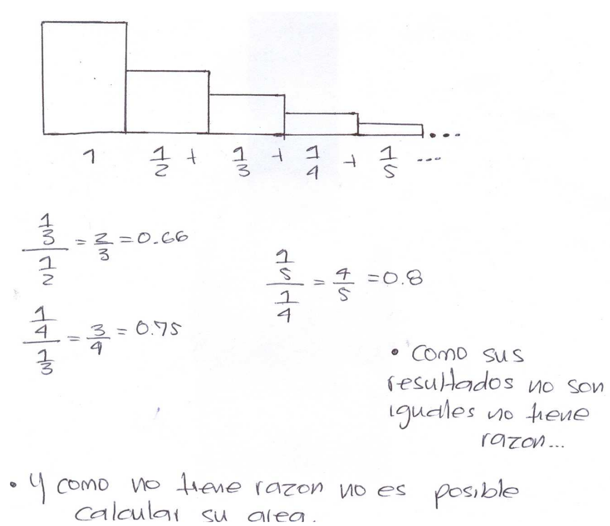
Para el acaso de una escalera infinita creciente, los estudiantes deducen de manera natural que el área no existe, ya que desde la visualización es claro que cada vez, el área de sus escalones se hace más grande y por lo tanto no es posible calcular la suma de esta escalera. La imagen a continuación, muestra los razonamientos de los estudiantes:



Podemos observar cómo los estudiantes empiezan a asociar las escaleras crecientes con escaleras que no tienen área.

En las discusiones, los estudiantes concluyen que, si la escalera presentada es creciente implica que no se pueda determinar el área, y esta idea permite comprender la divergencia de la escalera armónica, para la cual dispusieron los rectángulos de manera tal que lograron observar que se podía volver creciente. Pocos estudiantes relacionaron el hecho de que la escalera armónica pueda volverse creciente con el hecho de no tener razón, aunque la mayoría si estuvieron en condiciones de explicar porque ésta no existía.

Se presenta a continuación, uno de los procedimientos que realiza un estudiante para determinar la razón de una escalera:



De lo anterior se observa claridad frente a la forma de determinar la razón de una escalera y las relaciones que los estudiantes empiezan a establecer entre este concepto y la existencia del área.

El carácter socrático del módulo, implica tomar las respuestas como punto de partida para mostrar sus carencias, cuando las haya, e ir llevando al estudiante a un nivel superior, mediante la elección de experiencias que faciliten este hecho, es por esto que en esta fase los estudiantes reunidos en equipos, exponían las principales conclusiones construidas hasta el momento; es de destacar que muchos lograron inferir las condiciones necesarias para que una escalera infinita tenga área. En esta fase se observó que los estudiantes recurren cada vez menos a las representaciones visuales - geométricas.

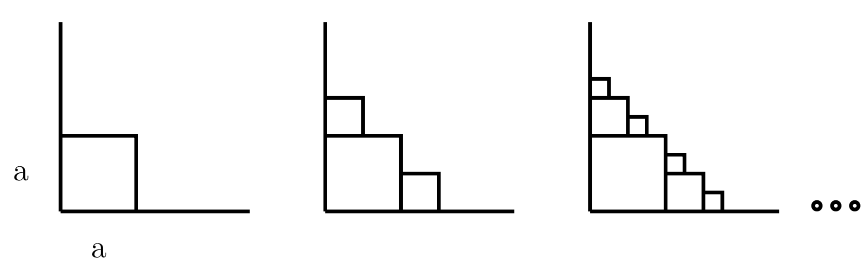
Durante el trabajo de campo se evidenció el mejoramiento del lenguaje de los estudiantes, éste es fundamental porque ayuda a detectar su nivel de razonamiento. Los mapas o esquemas construidos por los estudiantes al inicio del proceso no presentaban suficientes relaciones significativas, por lo tanto no mostraban tanta claridad frente al concepto, como si se observa en los mapas presentados para esta fase.

La realización de los mapas conceptuales, sumado al uso del lenguaje, que cada vez era más apropiado para el nivel que se quería lograr, evidenciaron el progreso de los estudiantes por cada una de las fases, y también, qué tan cerca está el estudiante de progresar a un nivel III de razonamiento.

4.6. Fase de orientación libre

Las actividades de la fase 4 recogen todos los conceptos vistos y los llevan a otros contextos; los estudiantes comprenden que la suma de las áreas de los rectángulos de la escalera infinita decreciente de razón un medio es uno, y utilizan este hecho para deducir la suma de la áreas de otras figuras.

Uno de los problemas abordados en esta fase es el de la "escalera con peldaños" de Orton (Tall, 1991, p. 165), dicha escalera se construye a partir de un cuadrado de la a, al lado derecho y en la parte superior se dispone 2 cuadrados de lado $\frac{a}{2}$, luego se disponen 4 cuadrados de lado $\frac{a}{4}$ y así sucesivamente, como se observa en la figura:



La construcción de dicha escalera le permitió a los estudiantes llegar a conclusiones como:

> *"Para la escalera de Orton, se deduce la siguiente suma de áreas* $a^2+2\frac{1}{2^2}a^2+4\frac{1}{2^4}a^2+8\frac{1}{2^8}a^2=2a^2$*, porque a es la base del cuadrado mayor y su área* a^2*, los cuadrados que se construyen luego son la mitad del primero, osea* $\frac{1}{2}a^2$ *o también, por separado, sería lo mismo que tener 2 veces un cuarto de* a^2*, y para los otros peldaños sería cuatro veces un octavo de* a^2*, y así sucesivamente; además sé que da* $2a^2$ *porque en conclusión voy a tener la suma de la mitad de* a^2*, con un cuarto de* a^2*, un octavo... y eso da* $1a^2$*, más el área del primero* a^2*, me dio* $2a^2$*."*

Otros estudiantes razonaron el anterior problema de la siguiente manera:

> *"Si continuamos dibujando todos los peldaños al final voy a tener un triángulo, para saber el área multiplico la base y la altura y divido por 2. Pero la base y la altura son iguales; la base es* a *más la mitad de* a*, más un cuarto de* a*, más un octavo de* a *y así, toda esa suma es* $a+a$*, osea* $2a$*. El área queda* $\frac{(2a)(2a)}{2}$*, osea* $2a^2$*".*

Las anteriores conclusiones las expusieron los estudiantes durante las socializaciones. Otros, solucionaron el problema de la siguiente manera:

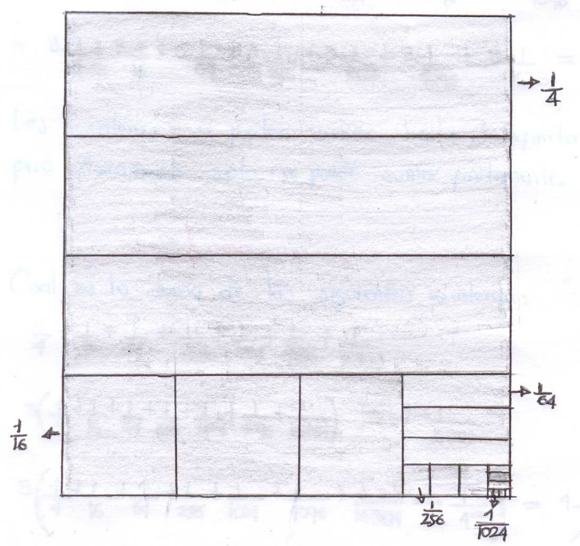
R/: Determinando la base del triangulo, sumando las expresiones.

• $a+\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}\ldots\frac{a}{2^n}=2a$

y seguimos, como el lado de la base es igual a la altura por lo cual el area del triangulo da como resultado...

$A_\Delta=\frac{b*h}{2}=\frac{2a*2a}{2}=\frac{4a^2}{2}=2a^2$

En esta fase se realizaron actividades para deducir la suma de $\frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{4^n}$, entre otras; las deducciones se hicieron por inducción, algunos no tuvieron que recurrir a la representación geométrica. A continuación se muestran las conclusiones de un estudiante, que empieza a vislumbrar el concepto de límite:



Escalera~...

* $3\cdot\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{4}$

* $3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16} = 1-\frac{1}{16}$ ✓

* $3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{64} = 1-\frac{1}{64}$ ✓

* $3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{256} = 1-\frac{1}{256}$ ✓

* $3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{256}+3\cdot\frac{1}{1024} = 1-\frac{1}{1024}$

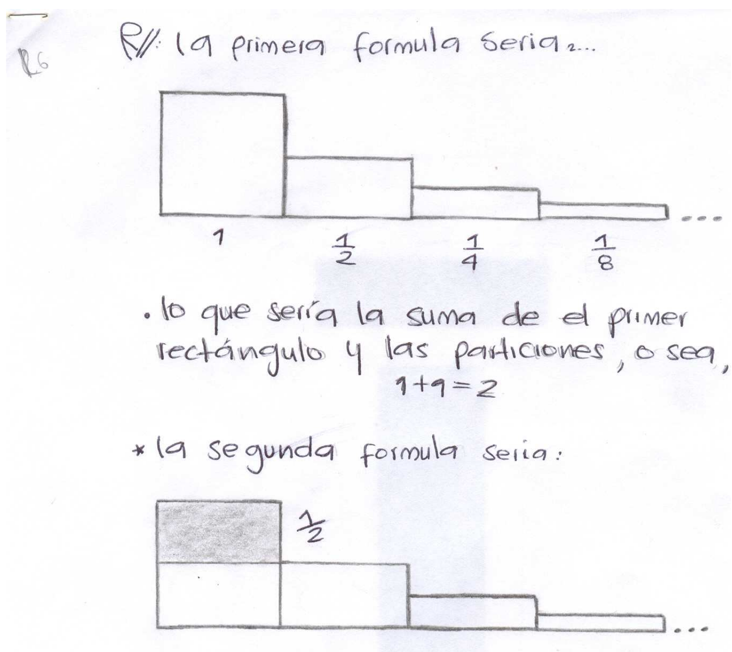
* $3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{256}+3\cdot\frac{1}{1024}+3\cdot\frac{1}{4096} = 1-\frac{1}{4096}$

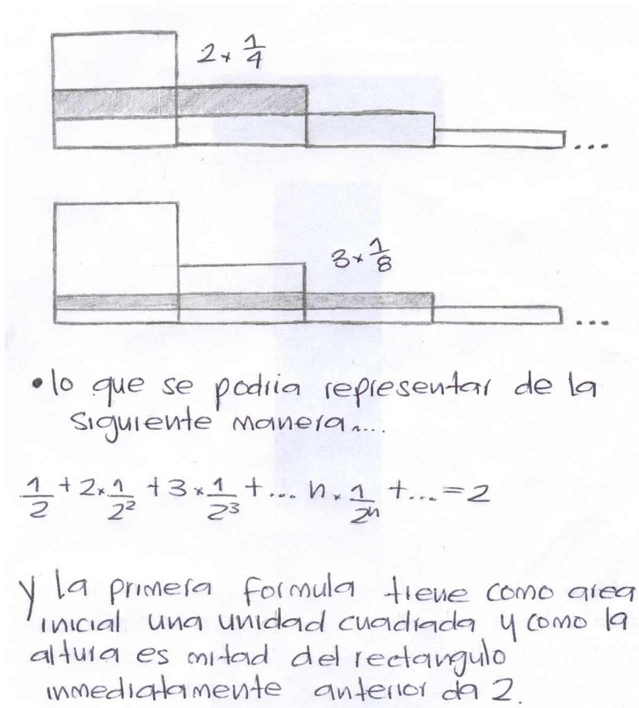
* $3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{256}+3\cdot\frac{1}{1024}+3\cdot\frac{1}{4096}+3\cdot\frac{1}{16384} = 1-\frac{1}{16384}$

Es importante observar que el estudiante tiene la concepción del límite cuando el denominador tiende a tomar un valor grande, su cociente será cero.

4.7. Fase de integración

En esta fase los estudiantes, en general, lograron construir los principales elementos que constituyen el concepto objeto de estudio; para esta fase se trabajó con la escalera de Oresme, la mayoría de los estudiantes comprendieron el problema de Oresme y sus razonamientos se apoyaron en las conclusiones de las fases anteriores. Los estudiantes abordaron dicho problema, de la siguiente manera:





Una vez finalizado el trabajo de campo y desarrollado el módulo en su totalidad, se determinó los estudiantes que lograron progresar al nivel tres de razonamiento. Presentaron un mapa conceptual que integraba todos los conceptos abordados y expusieron dicho mapa; la exposición debía dar cuenta de los descriptores de las fases 4 o 5, para poder determinar sí hubo o no progreso.

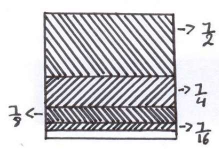
4.8. Resultados obtenidos por el estudiante que no fue clasificado en el nivel III de razonamiento

En el trabajo de campo, se observó que durante casi todo el proceso, uno de los estudiantes no logró comprender los razonamientos que hacían sus compañeros y una de las principales dificultades radicó en que no lograba llegar a hacer razonamientos infinitos a partir de procesos finitos. Algunas de las respuestas dadas por el estudiante durante el trabajo de campo se presentan a continuación, éstas muestran las dificultades para comprender algunos conceptos, por ejemplo, cuando se indaga acerca de cuántas formas es posible dividir una figura a la mitad, el estudiante, aún después de haber estado en las socializaciones de los compañeros, responde:

R/= El proceso fisicamente es posible pues siempre se va a tomar la mitad de la inmediatamente anterior hasta quedar sombreado totalmente.
Analiticamente para losiguiente se va creando un proceso analitico donde va a llegar a un fin y va ser un numero finito.

El proceso de razonamiento del estudiante se vio obstaculizado porque, aunque logró comprender los procesos de división y sombreo y reconocía relaciones parte - todo, no deducía la suma de áreas sombreadas en relación con el área original del rectángulo y las áreas sin sombrear.

R/= Se deduce asi:



$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$

Así mismo, cuando se le preguntó si es posible disponer un rectángulo dividido y sombreado indeterminadas veces como una escalera infinita decreciente, él respondió:

R/= El rectangulo se puede dividir de manera infinita. decreciente y la escalera es un rectangulo dividido en infinitas maneras transpuestas por el rectangulo anterior.

Acerca de la escalera armónica, el estudiante acepta que no tiene razón, sin embargo, no es claro cuando trata de explicar que dicha escalera no tiene área.

· Porque la escalera armonica no tiene area.

R/= Porque el area es infinita y no se puede calcular

- Cual es la razon de la escalera armonica.

R/= No tiene razon porque no es estable y no es posibl calcular.

En general, el estudiante presentó problemas para comprender el concepto objeto de estudio y estas fueron evidentes la mayor parte del trabajo de campo. Entre las principales causas que originan las dificultades mostradas, cabe anotar que el estudiante fue inconstante con su asistencia a la institución y respondió muy poco con las actividades propuestas.

4.9. Validación del módulo

Para validar el módulo de instrucción diseñado, se realizó un test (ver anexo) que contiene 35 preguntas derivadas del módulo; éstas, además de estar en correspondencia con los descriptores de las fases, eran las más significativas para la construcción del concepto objeto de estudio, las opciones de respuesta contenidas en el test fueron obtenidas en el trabajo de campo realizado con los estudiantes, durante el proceso de construcción del módulo.

La estructura del test conserva las características del módulo, en el cual se da importancia al carácter socrático de las preguntas, los conocimientos previos, los aportes de información, la movilización del pensamiento y la problematización de las ideas. (Ver Capítulo 3, sección 3.3, página 3.3).

Un primer borrador del test fue aplicado a 15 estudiantes de la Universidad de Antioquia, del programa de la Licenciatura en Matemáticas y Física y la Licenciatura Básica Secundaria con énfasis en Matemáticas, ubicados en el nivel II de razonamiento, éstos sin recibir instrucción lo respondieron y luego hicieron las observaciones que consideraron pertinentes, dichas observaciones permitieron mejorar el test y el módulo, dado que fueron la base para identificar fortalezas y dificultades del mismo.

El trabajo realizado permitió identificar y analizar las preguntas que presentaron mayor dificultad, en algunos casos fue necesario replantearlas, se prestó atención a respuestas que eran ambivalentes y esto generaba problemas en el desarrollo del test; el análisis de las respuestas también permitió determinar cual era la posición más conveniente para algunas preguntas y la necesidad de agregar o eliminar ciertos items, de modo que se favoreciera la construcción de la red de relaciones. El test fue sometido a diferentes pruebas antes de ser aplicado a la población en la que se validaría, con el fin de refinarlo y mejorarlo hasta obtener un instrumento que realmente validara de manera pertinente el módulo de instrucción, a pesar de que el test no podía contar con el empleo de mapas conceptuales.

4.10. Tratamiento estadístico

Para el presente estudio se considera pertinente realizar un análisis estadístico, que permita confirmar las conclusiones del trabajo de campo, y verificar el progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes, también poder medir la eficiencia del test, como una herramienta que permite masificar y automatizar el módulo.

Lo anterior requiere elegir instrumentos estadísticos que nos permitan, por un lado, comprobar uniformidad en grupos de respuestas (patrón ideal), de modo que estos estén en correspondencia con los descriptores de cada una de las fases de aprendizaje, permitiendo determinar si hay o no progreso en el nivel de razonamiento. Por otro lado, los instrumentos también deben permitir automatizar la clasificación de los estudiantes en cada una de las fases. Se emplea el algoritmo *k- medias* y un análisis de *cluster* que permita comprobar la robustez de los resultados obtenidos.

Para la realización del tratamiento estadístico, usamos el programa SPSS (versión 12.0), con el fin de generalizar los resultados obtenidos en la aplicación del test. El programa contiene entre sus análisis estadísticos la clasificación de conglomerados y el análisis discriminantes.

4.10.1. Análisis de Cluster

El análisis de cluster es un método estadístico multivariante que clasifica automáticamente datos, este tipo de análisis define una serie de técnicas algorítmicas, cuyo objeto es buscar grupos, de individuos o variables, que presenten similitudes y agruparlos en conglomerados. Dada una tabla de casos-variables, la técnica trata de situar los casos en grupos homogéneos para hacer una clasificación de ellos, de manera que los individuos considerados similares sean asignados a un mismo cluster, mientras que los individuos que no lo son, se localicen en cluster distintos.

Según Pérez (2001), "La creación de grupos basados en similaridad de casos exigen una definición de este concepto, o de su complementario distancia entre individuos, la variedad de formas de medir diferencias multivariables o distancias entre los casos proporciona diversas posibilidades de análisis".

Existen dos tipos de análisis de clusters: jerárquicos y no jerárquicos, en los primeros los clusters de niveles más bajos son contenidos en otros de niveles superiores, y en los segundos, se asignan los casos a grupos diferenciados, sin que unos dependan de otros; a su vez, los clusters no jerárquicos se clasifican en disjuntos, donde cada caso corresponde a uno y sólo un grupo, y los solapados, en el que un caso puede pertenecer a más de un grupo.

Una vez realizado el análisis de cluster, conviene aplicar técnicas estadísticas que permitan determinar la relevancia de los grupos creados, una de ellas es el análisis discriminante, que busca, de una parte, la separación o discriminación de grupos, y de otra, la predicción o asignación de un objeto a un grupo previamente definido; según Díaz (2002), "En el análisis discriminante se obtiene una función que separa entre varios grupos definidos a priori, esta función es una combinación, generalmente lineal, de las variables que minimiza los errores de clasificación". Tanto el análisis de cluster como el discriminante, se utilizan para clasificar individuos en categorías o grupos, sin embargo, se diferencian porque en el análisis discriminante es necesario especificar los grupos de manera objetiva, ajeno a la medida de las variables en los casos de la muestra, mientras que el análisis de cluster define grupos tan distintos como sea posible formando grupos homogéneos de conglomerados.

Al iniciar con el análisis de cluster es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La selección de las variables relevantes para identificar los grupos.
- La elección de la medida de proximidad entre los individuos y elección del criterio para agrupar individuos en conglomerados.

Para el presente estudio, la selección de las variables relevantes para identificar los grupos, requirió agrupar en bloques los descriptores que caracterizan el razonamiento de los estudiantes a medida que progresan en cada una de las fases. Se definieron cinco bloques, cada bloque contiene un conjunto de preguntas que buscan dar cuenta de los descriptores correspondientes a las fases. Los bloques están distribuidos de la siguiente manera:

Bloque 1

Preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, estas preguntas están estrechamente relacionadas con los descriptores definidos en la fase de información, indagan por los conocimientos previos de los estudiantes, sobre las propiedades de los cuadriláteros, el concepto de área, y el proceso de división y sombreo que permite identificar relaciones parte todo.

Bloque 2

Preguntas 8, 9, 12, 13, 18, 19, 25, 26, las preguntas de este bloque tienen como finalidad dar cuenta de los descriptores de la fase 2, de acuerdo con éstos los estudiantes realizan procesos de razonamiento finito e infinito, comprenden el concepto de razón, representan aritméticamente sumas infinitas, establecen la relación existente entre un rectángulo divido indefinidamente y una escalera infinita; este tipo de preguntas empiezan a familiarizar al estudiante de manera directa con el concepto objeto de estudio y le permiten empezar a establecer las condiciones necesarias para definir cuándo existe la suma de infinitos términos.

Bloque 3

Preguntas 10, 11, 14, 15, 22, 29, 30, 31, las preguntas de este bloque están en estrecha relación con los descriptores correspondientes a la fase de explicitación, un estudiante en esta fase se caracteriza porque identifica la estructura de las escaleras infinitas decrecientes y crecientes, reconoce si éstas tiene o no área, y de ahí deducen la suma de una escalera infinita, además comprende porque la escalera armónica no tiene área y relaciona este hecho con los conceptos abordados en las otras fases.

Bloque 4

Preguntas 16, 17, 20, 27, 28, 32, en este bloque están contenidos los descriptores que exigen mayor apropiación del concepto, dichos descriptores son de la fase 4 y permiten verificar la evolución en el razonamiento a través de las fases anteriores, este bloque de preguntas permiten verificar que los estudiantes determinan la suma de una escalera infinita, que relacionan dicha escalera con una suma aritmética, además dado que el bloque contiene preguntas de tipo teórico, es posible comprobar que el estudiante tiene claridad frente a los procesos de razonamiento abordados en fases anteriores y que esto le permite abordar problemas presentados en otros contextos.

Bloque 5

Preguntas 21, 23, 24, 33, 34, 35, en este bloque las preguntas están en correspondencia con los descriptores de la fase 5, un estudiante que responda este conjunto de preguntas está en condiciones de deducir el concepto de convergencia de una serie infinita, a partir de problemas relacionados con una componente visual geométrica, argumentando las condiciones necesarias para determinar la existencia de una suma infinita.

Una vez definido el conjunto de variables que permitieron determinar los clusters, se realizó la elección de la medida de proximidad entre los individuos y elección del criterio para agruparlos en conglomerados. Es evidente que a medida que se avanza en las fases, la exigencia de un mayor razonamiento para responder las preguntas va en aumento. Por lo tanto, fue necesario asignar a cada bloque un valor proporcional al grado de dificultad presentado en cada una de éstas. Es decir, el conjunto de preguntas del bloque 4 y 5, exigen de un mayor razonamiento para responder acertadamente, por ende el mayor porcentaje se establece aquí, dado que son las preguntas cuyos descriptores definen el progreso al nivel III de razonamiento. Los siguientes son los porcentajes asignados a cada bloque de preguntas:

Porcentajes asignados a los bloques de preguntas

Bloques de preguntas	B1	B2	B3	B4	B5
Porcentaje de Evaluación	10 %	13 %	17 %	27 %	33 %

4.10.2. Descripción del algoritmo de las K- medias

El análisis de cluster no jerárquico utilizado en el presente estudio, es el algoritmo de las K-medias. Éste es un método que asegura cada elemento al cluster que tenga el centroide más cercano, tiene como finalidad la determinación de la existencia de grupos o conglomerados.

De acuerdo con Lema Tapias (2003), el proceso comprende tres etapas:

i. Partición de los elementos en k *clusters*, esta partición también puede hacerse especificando k centroides iniciales conocidos como punto semilla.

ii. Repasar la lista de elementos, asignándolos al *cluster* cuyo centroide (media) este mas cercano, prefiriendo usualmente la distancia euclideana, de los datos estandarizados. Se recalcula es centroide tanto para los *clusters* que reciben como para los que donan el elemento.

iii. Se repite el paso 2 hasta que concluyan las reasignaciones.

El experto identifica cada conglomerado con cada una de fases de aprendizaje de van Hiele. La localización del centro, cuando se decide usar las medias actualizadas (la semilla) dadas por el experto, se actualiza cada vez que se añade un dato. Cuando se haya asignado todos los datos, el proceso se repite hasta que la solución converja.

Entonces, se clasifican todos los casos asignándoles el centro de conglomerado más próximo. El algoritmo comienza por los centros de los conglomerados que se especifiquen, es decir, le damos al algoritmo los centros iniciales de los conglomerados para que inicie su ejecución. Además le especificamos el número de conglomerados que se desean. Dado un proceso iterativo después de seleccionar los centros iniciales, se actualizan los centros de los conglomerados. Todos los casos se agrupan alrededor del conglomerado con el centro más próximo.

En este método se asume que entre individuos es posible establecer una distancia euclidiana. Específicamente el método de agrupamiento de K - medias hace una partición de un conjunto de n individuos en k grupos.

Formalmente en el algoritmo se realizan los siguientes procesos:

Se denota como $X_{i,j}$ al valor de *i-ésimo* individuo (con i desde 1 hasta n) sobre la *j-ésima* variable (con j desde 1 hasta p). La j - *ésima* variable en el l - *ésimo* grupo tiene una media denotada por $\overline{X}_{(l)j}, l = 1, \dots k$ y *n(l)* el número de individuos en el l - *ésimo* conglomerado. La distancia de un individuo a un conglomerado se determina por:

$$D_{(i,l)} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(X_{i,j} - \overline{X}_{(l)j})^2)}$$

También se define un componente de error de la partición y este está dado por:

$$\varepsilon\{p(n,k)\} = \sum_{i=1}^{n}[D(i,l(i))]^2$$

Donde *l(i)* es el grupo que contiene al *j-ésimo* individuo, *D(i,l(i))* es la distancia euclidiana entre el individuo i y el centroide del conglomerado que contiene al individuo.

El algoritmo *k - medias* define las particiones con el error (ε) más pequeño, ubicando individuos de un conglomerado u otro hasta que se estabiliza la reducción del error, es decir, reubica los individuos hasta que consigue grupos con la menor variabilidad posible.

Pérez L. (2001) afirma que:

> "el algoritmo de las K-medias, el más importante desde los puntos de vista conceptual y práctico, parte también de unas medias arbitrarias y, mediante pruebas sucesivas, contrasta el efecto que sobre la varianza residual tiene la asignación de cada uno de los casos a cada uno de los grupos. El valor mínimo de varianza determina una configuración de nuevos grupos con sus respectivas medias. Se asignan otra vez todos los casos a estos nuevos centroides en un proceso que se repite hasta que ninguna transferencia puede ya dismimuir la varianza residual; o se alcance otro criterio de parada: un número limitado de pasos de iteración o, simplemente, que la diferencia obtenida entre los centroides de dos pasos consecutivos sea menor que un valor prefijado. El procedimiento configura los grupos maximizando, a su vez, la distancia entre sus centros de gravedad. Como la varianza total es fija, minimizar la residual hace máxima la factorial o intergrupos. Y puesto que minimizar la varianza residual es equivalente a conseguir que sea mínima la suma distancias al cuadrado desde los casos a la media del cluster al que van a ser asignados, es esta distancia euclídea al cuadrado la utilizada por el método. Como se comprueban los casos secuencialmente para ver su

influencia individual, el cálculo puede verse afectado por el orden de los mismos en la tabla; pese a lo cual es el algoritmo que mejores resultados produce. Otras variantes propuestas a este método llevan a clasificaciones muy similares. Como cualquier otro método de clasificación no jerárquica, proporciona una solución final única para el número de clusters elegido, a la que se llegará con menor número de iteraciones cuanto más cerca estén las 'medias' de arranque de las que van a ser finalmente obtenidas. Los programas automáticos seleccionan generalmente estos primeros valores, tantos como grupos se pretenda formar, entre los puntos más separados de la nube".

4.10.3. Medida de la confiabilidad: Alfa Cronbach

Existen diferentes métodos para determinar la confiabilidad de un instrumento. Entre las medidas de consistencia interna encontramos el alfa de Cronbach, que asigna un coeficiente de 0 a una confiabilidad nula y 1 a una confiabilidad máxima. Este método permite comprobar si el instrumento que se está evaluando selecciona información incorrecta y por tanto nos llevaría a conclusiones equivocadas o, si por el contrario, se trata de un instrumento fiable que hace mediciones estables y consistentes. El método alfa es un coeficiente de correlación al cuadrado que mide la homogeneidad de las preguntas, promediando todas las correlaciones entre todos los ítems para ver que, efectivamente, se parecen. La interpretación consiste en que cuando el coeficiente se acerca a 1, la fiabilidad es mayor, se considera que a partir de 0,80 la fiabilidad es válida. El presente estudio utilizó el método Alfa de Cronbach, y se obtuvieron los siguientes resultados:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de elementos
.979	.980	35

4.10.4. Procedimiento de obtención y codificación de los datos

Como se había mencionado, el presente trabajo tomó dos muestras, llamaremos muestra I al grupo correspondiente a la institución Presbítero Camilo Torres Restrepo y muestra II a los grupos del colegio Pedro Justo Berrio.

Consideramos un patrón ideal de respuestas para cada una de las 35 preguntas del test, a continuación señalamos la mejor opción; esta opción sería también la escogida por aquellos estudiantes que manifiestan progreso en cada una de las fases frente al concepto objeto de estudio.

Patrón ideal de respuestas para el test

Número de Pregunta	Respuesta correcta
1	A
2	D
3	C
4	C
5	A
6	C
7	B
8	C
9	D
10	B
11	B
12	D
13	B
14	B
15	B
16	A
17	A
18	A
19	D
20	B
21	D
22	D
23	C
24	A
25	B
26	A
27	B

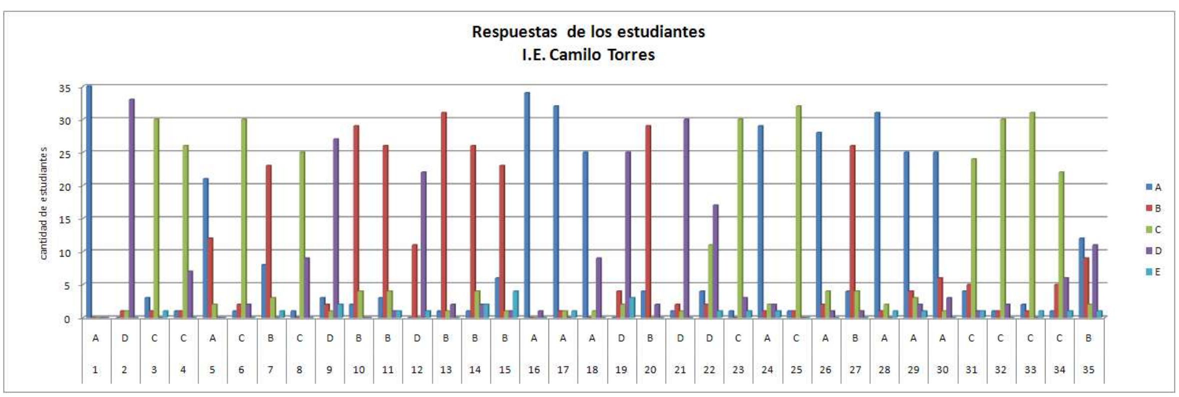
28	A
29	A
30	A
31	C
32	C
33	C
34	C
35	B

Para la codificación de los datos, fue necesario asignarle el valor de 0 a las preguntas que no coincidieron con el valor del patrón ideal presentado en la tabla y el valor de 1 a aquellas que coincidieron.

Las respuestas validas, son aquellas que sirven para el estudio estadístico, se consideran como no validas las respuestas en blanco o con dos opciones marcadas.

Las respuestas marcadas con "e", fueron analizadas una por una, para verificar la posibilidad de que éstas fueran asimilables a alguna de las alternativas respuestas, de ser así se le asignaba a la respuesta conveniente.

Una vez realizada la asignación anteriormente descrita, se observa que los estudiantes de la institución Camilo Torres Restrepo, obtienen los siguientes resultados:



Con los resultados obtenidos se procede a hacer la clasificación de los estudiantes en cada una de los cluster con la ayuda de paquete estadístico SPSS.

4.10.5. Clasificación de acuerdo a las fases de aprendizaje

Utilizamos el algoritmo de *k - medias*, por ser un uno de los métodos de agrupación alrededor de centros móviles, con el propósito de confirmar que en el conjunto de la muestra se pueden distinguir cinco grupos diferenciados, y que éstos están en correspondencia con cada una de las fases de aprendizaje.

Para la determinación de los centros iniciales, con los cuales comienza el algoritmo, es necesario adoptar un criterio de pre-clasificación acorde con la teoría de van Hiele y con los resultados experimentales obtenidos con el guión entrevista. Dicho criterio se denominará Criterio A y se presenta a continuación:

Criterio A: agrupación de individios en bloques de preguntas

Bloques de preguntas	B1	B2	B3	B4	B5
Porcentaje de Evaluación	10 %	13 %	17 %	27 %	33 %

Para determinar los centros iniciales se calcularon las medias de "aciertos" (coincidencias con el patrón ideal de respuestas), es decir, los porcentajes de aciertos en cada una de las preguntas y para cada uno de los cinco grupos asignadas a cada una de las fases, teniendo en cuenta los porcentajes asignados a cada bloque. La siguiente tabla muestra la asignación de los centros iniciales:

Centros iniciales: I.E. Camilo Torres Retrepo

Preguntas	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0.5	1
3	0	0	0	1	0.9
4	0	0	1	0.5	0.8
5	0	0	1	0	0.6
6	0	0	0	1	0.9
7	0	0	0	0.5	0.7
8	0	0	1	1	0.7
9	0	0	1	1	0.8
10	0	0	1	0.5	0.8
11	0	0	0	1	0.8
12	0	0	1	0.5	0.6
13	0	0	1	1	0.9
14	0	0	0	0.5	0.8
15	0	0	1	1	0.6
16	0	0	1	1	1
17	0	0	0	0.5	1
18	0	0	1	1	0.7
19	0	0	1	0	0.8

20	0	0	0	0.5	0.9
21	0	0	1	0	0.9
22	0	0	0	0.5	0.5
23	0	0	0	0.5	0.9
24	0	0	0	0.5	0.9
25	0	0	1	1	0.9
26	0	0	1	0.5	0.8
27	0	0	0	1	0.8
28	0	0	0	0.5	0.9
29	0	0	0	0.5	0.8
30	0	0	0	0.5	0.8
31	0	0	0	1	0.7
32	0	0	1	0.5	0.9
33	0	0	1	0	0.9
34	0	0	0	0	0.7
35	0	0	0	0	0.3

Con el criterio anteriormente definido y los centros iniciales calculados, se asigna a cada estudiante el cluster correspondiente, obteniendo los siguientes resultados:

Pertenencia a los conglomerados

Número de caso	Conglomerado	Distancia
1	5	2.259
2	5	1.881
3	5	1.779
4	5	2.768
5	4	2.000
6	5	2.445
7	5	2.116
8	5	1.978
9	5	2.259
10	5	2.145
11	5	2.922
12	5	2.160
13	5	2.508
14	5	1.848
15	5	2.131
16	5	1.881
17	5	2.217
18	5	2.723
19	5	2.245
20	4	2.000
21	5	1.593
22	5	2.160
23	5	2.313
24	5	2.101
25	5	2.711
26	5	1.898
27	5	2.025
28	5	2.101
29	5	2.367
30	5	2.116
31	5	2.688
32	5	2.174
33	5	2.495
34	3	.000
35	5	2.483

Se logran clasificar 34 (97 %) estudiantes de la institución educativa Presbítero Camilo Torres Restrepo:

De acuerdo a los resultados presentados podemos observar en esta tabla que el criterio

Número de casos en cada conglomerado

Fases de aprendizaje	1	.000
	2	.000
	3	1.000
	4	2.000
	5	32.000
Válidos		35.000
Perdidos		.000

Clasificación en Clusters
I. E. Camilo Torres Restrepo

de pre-clasificación dado por los expertos es coherente con la teoría de van Hiele.

Podemos observar que se generan 5 clusters, correspondientes a cada una de las fases, los estudiantes ubicados en los cluster 4 y 5, logran progresar en su nivel de razonamiento, mientras que los demás no lo hacen.

En correspondencia con las observaciones del trabajo de campo, se reafirma que sólo un estudiante no alcanza el nivel III de razonamiento, para el concepto objeto de estudio, quedando ubicado en el cluster 3, lo cual permite afirmar que razona en el nivel II, en el marco del modelo de van Hiele.

4.10.6. Masificación de la prueba

El test es el instrumento mediante el cual se hizo la recolección de los datos, el propósito del test es permitir hacer un pase masivo, de modo que los estudiantes que no habían recibido instrucción lograran progresar al nivel tres, desarrollando las actividades más significativas del módulo y construyendo una red de relaciones que se fortalecía a medida que éste era solucionado. Como ya se había mencionado, el test diseñado en el presente estudio, se aplicó a los estudiantes de la Institución Educativa Camilo Torres Restrepo y del Colegio Pedro Justo Berrio. A continuación se presenta un analisis de los resultados obtenidos de los 213 estudiantes pertenencientes al colegio mencionado.

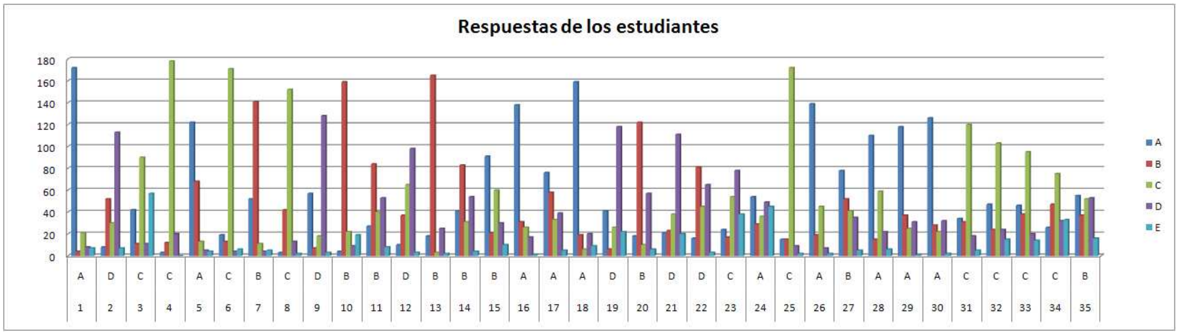


Gráfico de respuestas
Colegio Pedro Justo Berrio

Para este grupo, se definieron los siguientes centros iniciales:

Centros iniciales Pedro Justo Berrio

Cetros iniciales I.E. Pedro Justo Berrio

Preguntas	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase5
1	0.8	0.625	0.76	0.8525	0.8208
2	0.8	0.4375	0.36	0.4918	0.5943
3	0	0.3125	0.28	0.4918	0.4528
4	0.6	0.75	0.6	0.8525	0.9057
5	0	0.25	0.4	0.5902	0.6792
6	0.4	0.625	0.68	0.8852	0.8302
7	0.4	0.375	0.48	0.7377	0.717
8	0.4	0.5625	0.64	0.7377	0.7547
9	0.6	0.375	0.6	0.6557	0.6038
10	0.4	0.5	0.64	0.7869	0.8019
11	0.2	0.375	0.16	0.4426	0.434
12	0	0.4375	0.4	0.377	0.5472
13	0.6	0.4375	0.76	0.7541	0.8491
14	0.2	0.375	0.36	0.3443	0.434
15	0	0.1875	0.12	0.082	0.0943
16	0	0.3125	0.6	0.5082	0.8208
17	0.2	0.25	0.2	0.2459	0.4811
18	0	0.625	0.48	0.7705	0.8491
19	0.2	0.4375	0.48	0.4918	0.6415
20	0	0.25	0.4	0.5574	0.6981
21	0.2	0.125	0.36	0.5246	0.6321

22	0	0.25	0.28	0.1967	0.3962
23	0.2	0.1875	0.08	0.1475	0.3679
24	0	0.0625	0.2	0.1148	0.3868
25	0	0.5	0.64	0.8033	0.934
26	0.2	0.5	0.36	0.7213	0.7264
27	0.2	0.25	0.16	0.2623	0.2547
28	0.2	0.1875	0.24	0.5574	0.6226
29	0.2	0.25	0.32	0.541	0.6792
30	0.2	0.375	0.36	0.5738	0.7075
31	0.4	0.1875	0.36	0.5902	0.6604
32	0	0.25	0.28	0.4426	0.6132
33	0.4	0.125	0.36	0.3443	0.5755
34	0.2	0.25	0.2	0.1967	0.5
35	0	0.0625	0.2	0.1311	0.217

Con el número de aciertos por pregunta y la definición de los centros iniciales, el programa asigna la clasificación de los 213 estudiantes al cluster correspondiente. A continuación se hace la clasificación de los estudiantes en cinco conglomerados, ponemos éstos en correspondencia con cada una de las fases van Hiele.

Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	7.000
	2	20.000
	3	35.000
	4	62.000
	5	89.000
Válidos		213.000
Perdidos		.000

De lo anterior concluimos que de los 213 estudiantes, 151 se clasifican en los clusters 4 y 5, logrando progresar al nivel III de razonamiento; cabe anotar, que a pesar de que este grupo no participó del trabajo de campo, donde se estudio a fondo el concepto objeto de estudio y se fortaleció con el empleo de la herramienta mapas conceptuales, sin embargo un porcentaje significativo logra mejorar su nivel, pues se pretendió que el test conservara al máximo la estructura y el carácter del módulo.

4.10.7. Robustez del análisis

Consideraremos un nuevo criterio, denominado criterio B, éste es distinto del Criterio A, que corresponde a la opinión del experto, el nuevo criterio está acorde con los resultados experimentales obtenidos en el trabajo de campo y con la opinión del experto. El nuevo criterio se describe en la siguiente tabla:

Criterio B: agrupación de individios en bloques de preguntas

Bloques de preguntas	B1	B2	B3	B4	B5
Porcentaje de Evaluación	13 %	15 %	17 %	20 %	35 %

La introducción de un criterio B permite verificar si pequeñas modificaciones alteran significativamente los resultados obtenidos con el criterio A. El criterio B es más exigente que el A, asigna un porcentaje bastante alto al conjunto de preguntas del bloque 5, dándole mayor peso a éste; el nuevo criterio permite la clasificación de los estudiantes en las siguientes fases:

Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	6.000
	2	21.000
	3	30.000
	4	59.000
	5	97.000
Válidos		213.000
Perdidos		.000

Al comparar los cluster asignados con ambos criterios, se puede observar que no existen variaciones significativas entre los grupos formados. La siguiente tabla muestra los resultados de las dos clasificaciones finales:

Comparación de los cluster para los criterio A y B

Fases	Criterio A	Criterio B
1	7	6
2	20	21
3	35	30
4	62	59
5	89	97

Los resultados anteriores permiten encontrar coincidencias significativas; se puede observar que con el criterio A, el 71% de la población progresa a un nivel III de razonamiento y con el criterio B lo hace el 73%. En la fase 3, se ubica el 16% de los estudiantes con el criterio A, y el 14% con el criterio B. De igual manera, en ambos criterios se ubican el 9% de la población se ubica en la fase 2 y el 3% en la fase 1.

La estabilidad observada permite reafirmar que los descriptores propuestos son adecuados, que la asignación de los clusters están en correspondencia con las fases de aprendizaje y que el criterio con el que se realizó el análisis es correcto.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

El presente capítulo hace explícitas las principales conclusiones surgidas del desarrollo del trabajo de investigación. Analizaremos el alcance del estudio en cuanto a la consecución de los objetivos, los aportes a la educación matemática y su proyección hacia futuras investigaciones.

5.1. Consecución de los objetivos

El presente estudio propuso como objetivo general: *Favorecer el progreso de los estudiantes ubicados en el nivel II de razonamiento al nivel III, mediante la implementación de un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje), diseñado en el marco de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, frente al concepto de convergencia de una serie infinita vía áreas de figuras planas*, para la consecución de éste se llevaron a cabo las siguientes actividades:

El diseño de un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje) enmarcado en cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele; la elaboración del módulo inició con un guión entrevista, inspirado en el trabajo de Jurado y Londoño (2005). Gracias al trabajo de campo, este guión fue corregido, ampliado y mejorado. Además fue posible revisar y refinar los descriptores de fase inicialmente propuestos, de acuerdo a lo observado en el proceso de razonamiento manifestado por los estudiantes. La caracterización de cada uno de los descriptores, permitió evaluar el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento, cabe anotar que dichos descriptores no sólo respondían a las características propias de cada una de las fases, sino que también estaban en consonancia con el concepto objeto de estudio y con la herramienta utilizada para explicitar el progreso por las fases, es decir, los mapas conceptuales.

Otra de las actividades que se llevó a cabo para lograr el objetivo general, consistió en diseñar un test derivado del módulo de instrucción, que permitió hacer un pase masivo a una población amplia de estudiantes. El test conserva la estructura del módulo y logra que los estudiantes razonen desde procesos finitos hasta procesos infinitos, así la elección de las preguntas tuvo como propósito mejorar el razonamiento frente al concepto objeto de estudio, dichas preguntas inducen a los estudiantes hacia la construcción del concepto por medio de la determinación de condiciones necesarias para que la suma de infinitos términos exista.

En el transcurso de la investigación, para la consecución del objetivo general, fue necesaria la busqueda de una herramienta que permitiera reflejar los conocimientos y estructura mental que poseen los estudiantes en lo referente a un concepto. Además, que facilitara realizar modificaciones y complementos a la red de relaciones planteada en el modelo educativo. Dado lo anterior, encontramos que el mapa conceptual, es la herramienta que mejor refleja la estructura mental de los estudiantes, que en el marco del modelo educativo es fundamental para la evolución en el proceso de razonamiento respectivo de cada fase aprendizaje; la ampliación y perfeccionamiento de dicha estructura se ve favorecida dada la creación de una red de relaciones, que se materializa mediante un mapa conceptual, evidenciando el progreso en el nivel de razonamiento.

En otras palabras, el uso de los mapas conceptuales, es una herramienta que permite evidenciar un aumento progresivo en el lenguaje y el refinamiento del mismo, éste contribuye a la elaboración de redes de relaciones que se van consolidando a medida que los estudiantes vinculan nuevos conceptos o relaciones entre sí, lo cual favorece el progreso en las fases de aprendizaje para la consecución de un avanzado nivel de razonamiento. Además, los mapas permiten que los estudiantes sean concientes de su propio proceso de razonamiento y aprendizaje, lo cual al mismo tiempo logra establecer de manera clara y precisa sus carencias. Es por esto que los mapas conceptuales son considerados también, una herramienta de evaluación.

La implementación de herramientas virtuales como el Cmaptools, permiten dinamizar la utilización de los mapas conceptuales y facilitan a los estudiantes la construcción y modificación éstos. Además, la motivación que ellos muestran en el uso de estas herramientas se debe a la interacción en nuevos ambientes de aprendizajes, regulados a través de las tecnologías de información y comunicación (TIC). Esto está en correspondencia con las demandas de la educación actual, donde cada vez es mayor la necesidad utilizar espacios que favorezcan la creatividad, la socialización, la discusión y generación de nuevos conocimientos.

5.1.1. Tratamiento estadístico

El tratamiento estadístico permitió corroborar las observaciones y conclusiones que surgen del trabajo de campo; se destacan aspectos como:

- La pertinencia de los descriptores de fase propuestos.
- La utilidad de los mapas conceptuales como herramienta para los procesos de enseñanza y aprendizaje, e incluso como herramienta de evaluación.
- La efectividad del uso de un guión entrevista de carácter socrático, que motiva al análisis de los procesos de construcción del concepto objeto de estudio.
- La importancia del lenguaje en el modelo educativo de van Hiele, como elemento que favorece la conceptualización del objeto de estudio y amplía las posibilidades para llegar a la formalización.
- La asignación de clusters a cada grupo de preguntas, permitió determinar la coherencia de los descriptores propuestos con las características de cada fase de aprendizaje respectivo.
- La validez de la clasificación de los estudiantes en niveles de razonamiento realizada en el transcuro del trabajo de campo y confirmada mediante el tratamiento estadístico a una población más amplia de estudiantes.

La utilización de paquetes estadísticos, como el SPSS permitió cuantificar datos cualitativos, mediante el uso de herramientas adecuadas fue posible verificar, con los datos obtenidos en la aplicación del test, las conclusiones a las que se llegó en el trabajo de campo, en cuanto al progreso en el nivel de razonamiento de los 34 estudiantes y analiza las dificultades presentadas por 1 estudiante que no avanza a un nuevo nivel. Por otro lado, el test muestra efectividad, pues más del 70 % de los estudiantes que lo respondieron y que no habían participado en la intervención, logró una clasificación en las fases 4 y 5, con lo que podemos asegurar que progresan al nivel III de razonamiento.

Dado lo anterior, el tratamiento estadístico nos permite concluir además, que es posible diseñar un instrumento, como el test, que gracias a su estructura y carácter socrático consigue que una población significativa progrese en su nivel de razonamiento, aún sin haber participado de un proceso más integral de intervención.

5.2. Aportes a la educación matemática

El concepto de infinito generalmente representa una gran dificultad en la mente de los estudiantes, al momento de intentar comprender un objeto de estudio relacionado con él; pues la confrontación entre un proceso finito y uno infinito es una construcción que debe ser cuidadosa dado el aspecto paradójico que éste conlleva.

En general, los estudiantes no han abordado experiencias significativas que les permitan construir el concepto de infinito, su carácter abstracto dificulta su conceptualización y la concepción intuitiva de éste difiere de su definición formal matemática; es clara la dificultad que implica pretender mostrar la formalidad matemática de su significado, sin embargo los docentes no deben desconocer la necesidad e importancia de abordar la idea intuitiva de infinito en aras de la formalización debido a que está estrechamente relacionado con temas importantes del cálculo como límites, sucesiones, series, área bajo una curva, entre otros.

La necesidad de abordar conceptos con un alto nivel de abstracción exige recurrir a mecanismos adecuados que posibiliten su comprensión, más aún cuando se trata de temas poco relacionados con la cotidianidad de los estudiantes. La presente investigación profundiza en el concepto de "Convergencia de una serie infinita"; éste ha sido tratado mediante representaciones geométricas que permiten una mejor asimilación del mismo y a futuro su respectivo significado en el contexto formal.

Dado que los razonamientos de tipo infinito suponen obstáculos en la adquisición de conceptos asociados a éstos, en el presente estudio se destaca la pertinencia de recurrir a mecanismos visuales - geométricos que ayuden a los estudiantes a comprender el concepto de convergencia y los elementos relacionados con él.

Es por esto que el concepto objeto de estudio se presenta a través de escaleras infinitas decrecientes, donde el área de cada escalón se asocia a un término de la serie infinita y si ocurre que existe el área de la escalera, entonces la serie asociada a ésta será convergente. Esta manera de familiarizar a los estudiantes con el concepto de infinito, genera confianza en ellos al momento hacer sus razonamientos, dado que han tendido mayor contacto con representaciones visuales - geométricas que con elementos formales y simbólicos asociados al concepto de infinito.

Gracias al mecanismo utilizado y a los recursos de tipo visual (escaleras infinitas) se logra la comprensión del concepto objeto de estudio. Cabe anotar además, que en todo este proceso se encuentra inmersa la noción de límite, la cual no es tan evidente en la mente del estudiante cuando intenta determinar la existencia o no del área de una escalera infinita decreciente, mientras que para el área de una escalera infinita creciente la visualización permite afirmar sin ninguna duda de que el área no existe.

Dado lo anterior, destacamos que la visualización favorece la construcción del concepto. Partir del concepto imagen, permite un acercamiento a la definición y el establecimiento de relaciones entre sus propiedades y sus manifestaciones, para lograr así la comprensión formal del mismo.

Otro de los aportes a la educación matemática, es la creación de un módulo de aprendizaje destinado a contribuir en las prácticas docentes y al mejoramiento de los niveles de razonamiento de los estudiantes. Éste se constituye en sí mismo en una experiencia de aprendizaje que favorece las construcciones conceptuales, en el campo de la matemática; dado el carácter socrático de módulo, se destaca éste como una herramienta que estimula la creación de asociaciones significativas entre conceptos y conduce a la construcción de otros, de manera que el estudiante inicia su proceso de aprendizaje en un campo que le es familiar y le genera confianza para luego empezar con la construcción progresiva de nuevos conceptos.

La implementación de un guión entrevista permite que los estudiantes de manera conciente elaboren relaciones significativas entre conceptos, el carácter socrático del guión y las características de las preguntas propuestas, favorecen la generación de discusiones que ayudan a los estudiantes a llegar a conclusiones a partir de sus propios razonamientos y la generación de reinterpretaciones con respecto a lo que saben o comprenden, en el transcurso de las socializaciones.

Otro aspecto referido a la educación, es el uso de los mapas conceptuales como una herramienta que no sólo es coherente con el modelo de van Hiele y contribuye al aprendizaje y enseñanza de conceptos matemáticos, sino que también, permite dinamizar las actividades en diferentes áreas, constituyéndose en un elemento común de aprendizaje, además posibilita la integración de conocimientos en función de un objetivo: aprender mediante el establecimiento de relaciones significativas entre conceptos.

5.3. Investigaciones futuras

El presente estudio, deja abierta la posibilidad de realizar futuras investigaciones para lograr niveles de formalización en el marco de las fases, también abre paso a trabajos mediante el diseño de módulos de aprendizaje que estén en correspondencia con cada una de éstas, para promover un estudiante de un nivel de razonamiento a otro superior; utilizar la estructura del módulo de aprendizaje favorecerá la consolidación de otros estudios, en cuanto a conceptos del análisis matemático que posean una componente viaual geométrica.

También se puede afirmar una vez más, que la aplicación de entrevistas de carácter socrático son una estrategia metodológica que permiten la optimización de un guión entrevista, para lograr determinar el proceso de razonamiento de un estudiante y un punto de partida para la elaboración de un módulo de aprendizaje.

Es así como esta investigación constituye un punto de partida para nuevos estudios relacionados con el modelo educativo, siempre y cuando estén orientados a promover el paso a un nivel de formalización, para el concepto de convergencia de series infinitas, teniendo en cuenta que el proceso seguido para el diseño y elaboración del módulo de instrucción, permite comprender más de cerca los procesos mentales que el estudiante sigue para lograr un nivel avanzado de razonamiento y por lo tanto el paso por cada una de las fases de aprendizaje.

Este estudio muestra la importancia de implementar el test, derivado del módulo, en otras poblaciones de estudiantes que se encuentren en un nivel II de razonamiento, de tal manera que demuestre, una vez más, la efectividad del mismo y su posible consolidación como instrumento y experiencia de aprendizaje, dado la evolución en el razonamiento propio de las actividades propuestas en las fases de aprendizaje.

La utilización de herramientas virtuales en ambientes de aprendizaje regulados por las TIC, pueden constituirse como un medio que facilita el diseño de experiencias de enseñanza y aprendizaje en el marco del modelo educativo de van Hiele, pues ayuda a la construcción de representaciones visuales con un alto componente geométrico, gracias a que brindan la posibilidad de construir modelos interactivos que le permitan a los estudiantes progresar a un avanzado nivel de razonamiento. Pueden sugerirse en el contexto de la educación matemática herramientas virtuales como: el cmaptools, el derive, el geogebra, el cabri, entre otros que pueden ser construidos por los docentes investigadores.

Bibliografía

[1] Ausubel, David P. et al (1998). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*, volume 47. Trillas, segunda edition.

[2] Barrantes, H., Ruiz, A. (1998). *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*, volume 47. Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Bogotá.

[3] Bloom, B. et al. (1956). *Taxonomy of educational objectives: Handbook I, The cognitive domain [Taxonomía de los objetivos educativos: Tomo I, El dominio cognitivo]*. David McKay and Co., Nueva York.

[4] Campillo, P. (1999). *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

[5] Campillo Herrero, P. y Jaramillo López, C.M. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9(1):65 – 84.

[6] Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele*. Universidad de Madrid, Madrid, España.

[7] de la Torre Gómez, A. (2000). *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

[8] Diaz M, Luis G. (1991). *Estadistica multivariada: inferencia y métodos*. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

[9] Esteban Duarte, P. V. (2000). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia.

[10] Esteban Duarte P.V, et al. (2004). Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First International Conference on Concept Mapping*, 2(1):151–154.

[11] Fuys, D., Tischler, R. (1995). *The van Hiele Model of Thinking Geometry among Adolescents*. National Council of Teachers of Mathematics.

[12] Gutierrez, J. (1994). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: EL modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación Matemática*.

[13] Hoffer, A. (1893). *van Hiele - based research*. R. Lesh & M. Landau, eds., Acquisition of mathemaical concepts and processes., New York.

[14] Jaramillo, C. M. (2003). *La Noción de Convergencia de una Serie desde la Óptica de los niveles de van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

[15] Jaramillo, C. M., Esteban, P. V. (2005). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía*.

[16] Jaramillo, C.M. et al. (2007). Las fases de aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita. *Asociación colombiana de matemática educativa*, 1(1):28.

[17] Jurado, F., Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de Maestría, Medellín, Colombia.

[18] Llorens Fuster, J. L. (1994). Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

[19] Llorens Fuster, J.L. et al. (1999). Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de recta tangente a través del "haz de secantes". *Matemáticas y Educación*, 3(1 y 2):47 – 63.

[20] Llorens, J. L., Pérez Carreras, P. (1997). An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation. *Edu. Sci. Technol*, 28(5).

[21] López, A. (2007). *Las fases de van Hiele para el teorema de Pitágoras*. Tesis de Maestría, Medellín, Colombia.

[22] Maya, Arnobio et al (2004). *Mapas conceptuales: su elaboración y aplicación*. Magisterio, segunda edition.

[23] Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática*, 6(3).

[24] Ministerio De Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas.* Magisterio, Bogotá, Colombia.

[25] Ministerio de Educación Nacional (2003). *Ley General de Educación.* Editorial Unión.

[26] Moreira, M. (2000). *Aprendizaje Significativo: teoría y práctica.* Editorial Visor. Madrid - España.

[27] Navarro, M. y Pérez Carreras, P. (2006). Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 13:71–108.

[28] Navarro, M. A. (2002). *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica.* Universidad de Sevilla, Sevilla, España.

[29] Novak, J., Gowin, B. (1999). *Aprendiendo a Aprender.* Martínez Roca, España, 3ra edition.

[30] Ontoria, Antonio. (1992). *Mapas conceptuales: una técnica para aprender.* Narcea, Madrid, España, quinta edition.

[31] Perez, Cesar (1991). *Técnicas estadísticas con SPSS.* Prentice Mall, Madrid. España.

[32] Piaget, J. (1963). *Problems of the Social Psychology of Childhood, Traducido por Terrance Brown y Michael Gribetz.* Traité de sociologie, Universitaires de France, París.

[33] Pozo, J.I. y Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas como contenido procedimental de la educación obligatoria.* Santillana, Madrid.

[34] Schoenfeld, Alan H (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education*, volume 47. Notices American Mathematical Society.

[35] Stein, S., Barcellos, A (1996). *Cálculo y Geometría analítica.* McGraw-Hill, México, 5ta edition.

[36] Tall, David (1991). *Advanced mathematical thinking. Matemhatics Education Library: VII.* Kluwer Academica. Publishers.

[37] van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theody of mathematics education.* Academic Press.

[38] van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis Doctoral, Holanda.

[39] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.* Academic Press, New York.

[40] Vasco, E. D. y Bedoya, J. A. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del model de van Hiele.* Tesis de Maestría, Medellín, Colombia.

Anexos A

Módulo de Instrucción: Test

El presente test derivado de un módulo de instrucción, constituye una estrategia de aprendizaje, cuyo propósito es mejorar tu nivel de razonamiento en uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Te pedimos el favor que leas cuidadosamente cada pregunta y los **aportes de información**, dedicando el tiempo que estimes necesario para que respondas objetivamente.

Cada pregunta se compone de cinco opciones de respuesta (a, b, c, d y e). Responde en la hoja adjunta señalando con una **X** la opción que consideres correcta. No dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar.

Selecciona la opción e, cuando te parezca que las otras opciones de respuesta (a, b, c y d) no se ajustan a lo que crees que sería correcto o cuando no entiendas el enunciado de la pregunta. En este caso debes escribir la respuesta que consideres conveniente en el cuadernillo adicional.

MÓDULO DE INSTRUCCIÓN
TEST

1. Un rectángulo es un polígono que se caracteriza por:

    a. Ser un paralelogramo con sus cuatro ángulos rectos.
    b. Tener al menos dos ángulos rectos.
    c. Tener sus lados congruentes.
    d. La suma de sus ángulos interiores es de 180º.
    e. Ninguna de las anteriores.

2. Del área de un rectángulo, se puede afirmar que:

    a. Se mide en unidades cúbicas.
    b. Representa las dimensiones del rectángulo.
    c. Es la mitad de la base por la altura.
    d. Es la medida de la superficie rectangular.
    e. Ninguna de las anteriores.

3. Los rectángulos y los cuadrados se relacionan porque:

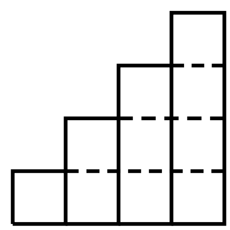
    a. Todos los rectángulos son cuadrados.
    b. Algunos cuadrados son rectángulos.
    c. Todos los cuadrados son rectángulos.
    d. No todos los cuadrados son rectángulos.
    e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información

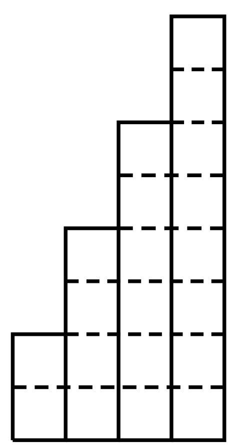
La noción de superficie hace referencia a la forma geométrica. Existen superficies rectangulares, triangulares, circulares, etc. Por otro lado, la noción de área hace referencia a la medida de una superficie (cantidad de superficie).

Se llamará escalera a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de modo tal, que cada rectángulo tenga igual base y esté contiguo al otro en forma horizontal.

Los siguientes rectángulos están dispuestos en forma de escalera que crece hacia la derecha, cada uno de ellos tiene la misma base, pero sus alturas difieren en una unidad.



4. Si se duplica la altura de cada rectángulo de la figura anterior, así:



¿Qué pasa con el área total de la nueva escalera?

a. No aumenta.
b. Se cuadruplica.
c. Se duplica.
d. No varía, aunque la altura cambia.
e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información

Razón: Es la comparación entre dos cantidades a y b mediante su cociente, el cual se representa como $\frac{a}{b}$, con a y $b \in Z$, con $b \neq 0$.

5. De acuerdo con la información anterior, podemos decir que la razón entre el área de la escalera inicial y el área de la escalera que resulta al duplicar la altura de los rectángulos, es de:

   a. Un medio.
   b. El doble.
   c. Un cuarto.
   d. El cuádruple.
   e. Ninguna de las anteriores.

6. Al triplicar la altura de cada rectángulo, ¿cuál es el área total de la nueva escalera con respecto al área de la escalera inicial?

   a. Un tercio.
   b. El cuádruple.
   c. El triple.
   d. La mitad.
   e. Ninguna de las anteriores.

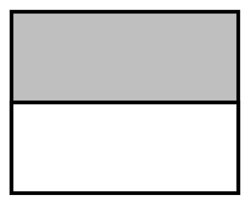
7. ¿Cuál es la razón entre el área de la escalera inicial y el área que resulta al triplicar la altura de los rectángulos?

   a. El triple.
   b. Un tercio.
   c. Un quíntuple.
   d. Uno quinto.
   e. Ninguna de las anteriores.

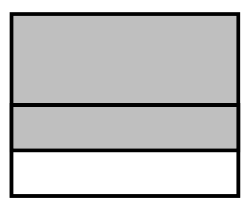
Aporte de información

Disponemos de una figura plana rectangular.

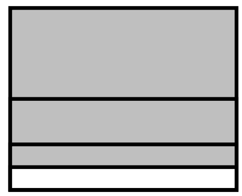
Iniciamos el proceso de dividir un rectángulo en dos partes iguales y sombreando la superficie superior, como lo muestra la siguiente figura:



Continuamos el proceso de división y sombreo, usando la superficie que ha quedado sin sombrear, dividiéndola en dos partes iguales y sombreando la parte superior de ésta, de la siguiente manera:



Ahora, continuamos el proceso de división en dos partes iguales de la superficie que ha quedado sin sombrear, sombreando la parte superior de ésta, como lo indica la figura:



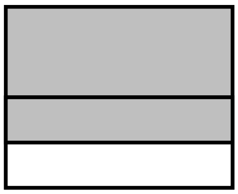
8. ¿Qué razón representa el rectángulo no sombreado de esta última figura, con respecto a la superficie total?

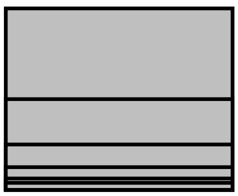
   a. Es la mitad.
   b. Es un cuarto.
   c. Es un octavo.
   d. Es un dieciseisavo.
   e. Ninguna de las anteriores.

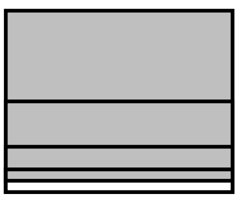
9. El proceso de división y sombreo, descrito anteriormente, ¿Se puede realizar de manera indefinida?

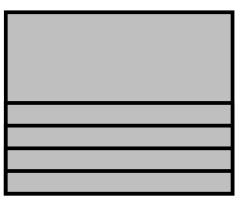
   a. No, porque la superficie es limitada.
   b. No, porque el rectángulo no puede quedar totalmente sombreado.
   c. No, porque el límite de las divisiones debe ser definido.
   d. Si, porque siempre quedará una fracción sin sombrear a la cual se le pueda continuar haciendo el proceso de división.
   e. Ninguna de las anteriores.

10. Si continuamos el proceso de división y sombreo infinitas veces, tal como se describió anteriormente, la figura resultante será:

    a. 

    b. 

    c. 

    d. 

    e. Ninguna de las anteriores.

11. Si sumamos las áreas de los rectángulos sombreados, obtenidas del proceso infinito de división y sombreo, ¿Cuál consideras que es el resultado?

    a. Un medio, más un cuarto, más un octavo, más un dieciseisavo, más un treintaidosavo.

    b. El área del rectángulo dado.

    c. Un número infinito de rectángulos sombreados.

    d. No es posible calcularlo.

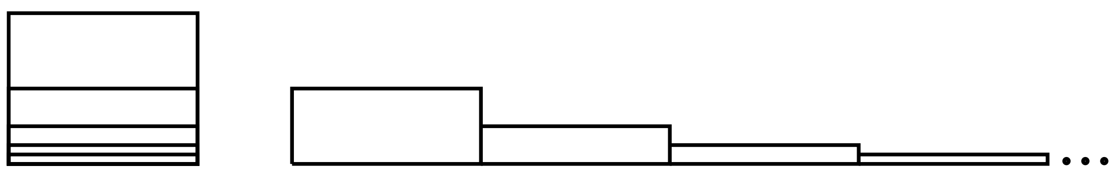
    e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información

Para una escalera, si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará **escalera creciente**, si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita creciente**. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará **escalera decreciente**, si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita decreciente**.

Así mismo, se llamará **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

12. Las siguientes figuras, corresponden a un rectángulo dividido infinitamente en varios rectángulos y a una escalera infinita decreciente. En ambas figuras, la altura de cada rectángulo tiene la mitad del inmediatamente anterior.



¿Es posible disponer el rectángulo de la izquierda como una escalera infinita decreciente, como lo indica la figura?

a. No es posible, porque la escalera es infinita.

b. Si es posible, porque las figuras son semejantes.

c. No es posible, porque el rectángulo tiene divisiones finitas.

d. Si es posible, porque en ambas figuras la superficie de cada rectángulo es el doble del siguiente.

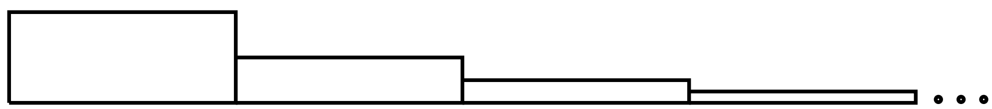
e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información

La razón de dos áreas es el cociente de sus valores en la misma unidad de medida. Diremos que una escalera tiene razón, si la razón entre las áreas de dos rectángulos adyacentes cualesquiera siempre es la misma (constante).

Por lo tanto, se denominará razón de una escalera al cociente entre el área de un rectángulo dado y el área del rectángulo inmediatamente anterior.

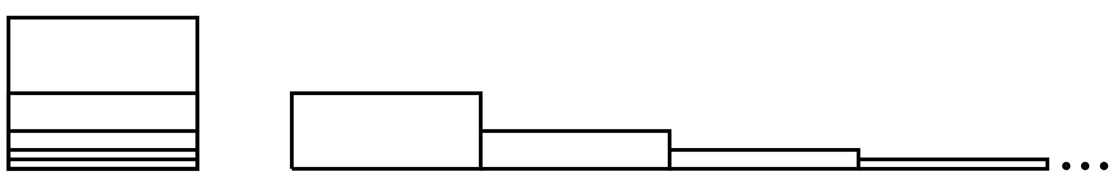
13. En la siguiente escalera infinita decreciente, la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior.



La razón de la escalera es:

a. 2
b. $\frac{1}{2}$
c. 1
d. $\frac{1}{2^n}$.
e. Ninguna de las anteriores.

14. Observa la figura:

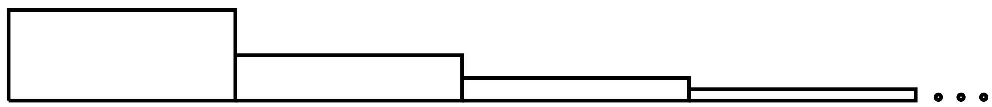


Si disponemos los rectángulos de la escalera infinita decreciente de razón un medio, uno sobre otro, ¿crees que es posible construir un rectángulo como el de la izquierda, tal como lo indica la figura?

a. No, porque la escalera es infinita.
b. Sí, porque la razón de la escalera es un medio.
c. No, porque el rectángulo no tiene infinitas divisiones
d. Si, porque la escalera tiene infinitos rectángulos.
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas y no pases la página hasta no haber contestado las preguntas.

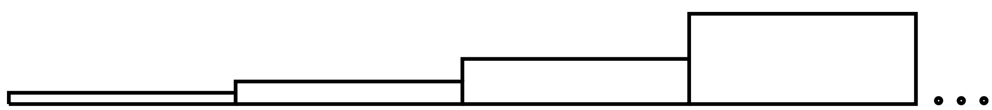
15. Observa la siguiente escalera decreciente de razón un medio:



Acerca del área de la escalera se puede decir que:

a. Es infinita, porque consta de infinitos rectángulos.
b. Es posible calcularla, porque su razón es menor que uno.
c. No es posible calcularla, porque si se unen los infinitos rectángulos el área será infinita.
d. No es posible calcularla, porque no se conocen las dimensiones de los rectángulos.
e. Ninguna de las anteriores.

16. La siguiente escalera creciente tiene la propiedad de que cada escalón duplica en altura al escalón inmediatamente anterior:



Consideras que el área de la escalera anterior es:

a. Infinita, porque la escalera crece infinitamente.
b. Finita, porque con esta escalera se construye un rectángulo.
c. Equivalente al área de un rectángulo.
d. No es posible calcularla.
e. Ninguna de las anteriores.

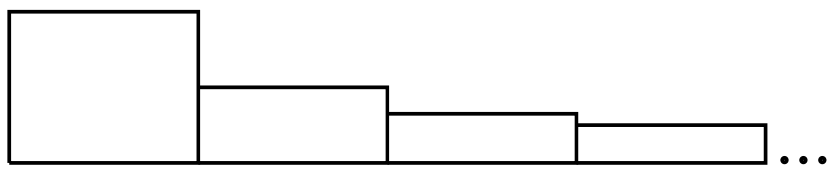
17. ¿Consideras que todas las escaleras infinitas crecientes tienen área?

a. No, porque la escalera crece infinitamente y su área también.
b. Sí, porque con estas escaleras se construyen rectángulos infinitos.
c. Sí, tienen área finita.
d. No es posible calcular el área de una escalera infinita.
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas y no pases la página hasta no haber contestado las preguntas.

Aporte de información

Llamaremos **escalera armónica** a la escalera infinita decreciente donde la altura del segundo rectángulo es la mitad de la altura del primero, la altura del tercero es un tercio de la altura del primero, la altura del cuarto es un cuarto de la altura del primero, y así sucesivamente:



18. Para la escalera armónica, la suma de las áreas de cada rectángulo es:

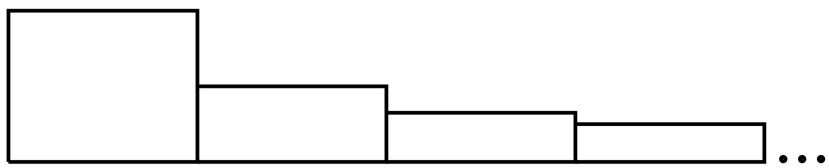
    a. Uno, más un medio, más un tercio, más un cuarto, ...
    b. Un medio, más un cuarto, más un octavo, ...
    c. Uno, más un tercio, más un quinto, ...
    d. Un medio, más un tercio, más un cuarto, ...
    e. Ninguna de las anteriores.

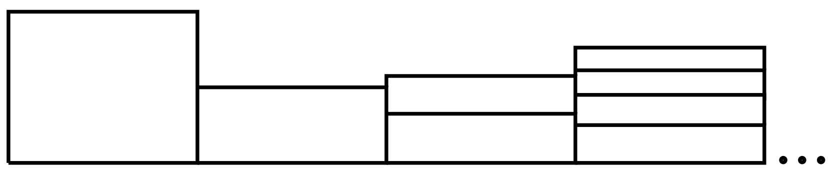
19. La razón de la escalera armónica es:

    a. $\frac{1}{2}$
    b. $\frac{1}{3}$
    c. $\frac{1}{4}$
    d. No tiene razón.
    e. Ninguna de las anteriores.

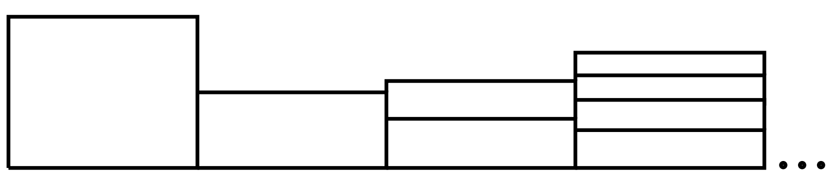
Aporte de información

A partir de la escalera armónica se forma otra escalera de manera tal que: después del segundo rectángulo, disponemos los dos siguientes uno sobre otro, luego los cuatro siguientes, luego los ocho siguientes y así sucesivamente, hasta obtener la siguiente figura:





Se obtiene entonces, que la suma de las áreas del tercer y cuarto rectángulos sobrepasa el área del segundo rectángulo; la suma de las áreas desde el quinto rectángulo hasta el octavo sobrepasan la suma de las áreas de los dos anteriores y por ende la del segundo rectángulo; así mismo, la suma de las áreas de los rectángulos noveno a decimosexto sobrepasa el área de cada uno de los cuatro anteriores y así sucesivamente, como se muestra en la siguiente figura:



20. Si el proceso antes descrito se continúa de manera indefinida, la nueva escalera construida es:

    a. Infinita decreciente.

    b. Infinita creciente.

    c. Finita.

    d. No es posible determinarlo.

    e. Ninguna de las anteriores.

21. Para una escalera infinita decreciente que no tiene razón, será posible afirmar que:

    a. Su área es finita.
    b. No se podrá construir una escalera infinita creciente.
    c. Su área es finita, porque aunque no tenga razón, si unimos los rectángulos, entonces obtenemos un rectángulo finito.
    d. Su área puede ser infinita porque aunque no tenga razón, se podrá construir una escalera creciente.
    e. Ninguna de las anteriores.

22. Consideras que es posible calcular el área de la escalera armónica:

    a. Sí, porque es una escalera infinita decreciente.
    b. No, porque está constituida por infinitos rectángulos.
    c. Sí, porque es posible construir un rectángulo de área finita a partir de la escalera armónica.
    d. No, porque se puede volver infinita creciente y por lo tanto su área es infinita.
    e. Ninguna de las anteriores.

23. Una escalera infinita decreciente tiene área si cumple:

    a. Que no tenga razón.
    b. Que se pueda disponer de manera creciente.
    c. Que no se pueda disponer de manera creciente.
    d. Que tenga razón y pueda disponerse de manera creciente.
    e. Ninguna de las anteriores.

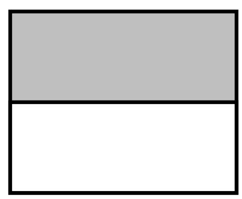
24. Una escalera infinita no tiene área si se cumple:

    a. Que sea decreciente y sea posible disponerla de manera creciente.
    b. Que sea decreciente.
    c. Que sea decreciente y tenga razón.
    d. Que no sea posible volverla creciente.
    e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de Información

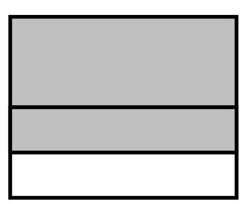
Dado el siguiente rectángulo, de área una unidad cuadrada:

Iniciamos el proceso dividiendo nuevamente un rectángulo en dos partes iguales y sombreando la superficie superior, como lo muestra la siguiente figura:

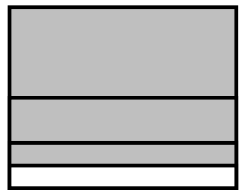


La región sombreada es la mitad del área del rectángulo original, y es también equivalente al área total del rectángulo menos el área sin sombrear, es decir, el área sombreada se puede expresar matemáticamente como: $1 - \frac{1}{2}$.

Para el siguiente rectángulo, la región sombreada es igual a la mitad del área del rectángulo original, más la mitad de la mitad que había quedado sin sombrear (es decir, un cuarto) por lo tanto, el área de la región sombreada se puede representar así: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.



Continuamos el proceso de división y sombreo, con la superficie que ha quedado sin sombrear, así:



Para la figura anterior el área sombreada se podrá representar como sigue:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

Podemos observar que la primera región sombreada se puede representar con la expresión $\frac{1}{2^1}$, la segunda región sombreada con $\frac{1}{2^2}$ y la tercera región sombreada con $\frac{1}{2^3}$.

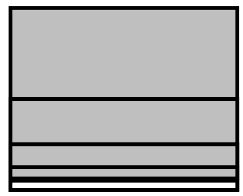
25. Teniendo en cuenta el proceso anterior, si dividimos n veces, ¿cómo se podría expresar la n-ésima región sombreada?

    a. $\frac{1}{2}+n$
    b. $n\frac{1}{2}$
    c. $\frac{1}{2^n}$
    d. $\frac{1}{2n}$
    e. Ninguna de las anteriores.

26. Si el proceso de división y sombreo descrito anteriormente se realiza n veces, la suma de las áreas así sombreadas se puede expresar como:

    a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$
    b. $1+\frac{1}{2^n}$
    c. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$
    d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$.
    e. Ninguna de las anteriores.

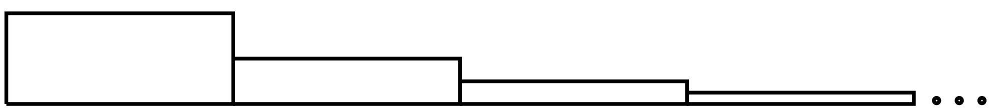
El siguiente rectángulo surge del proceso de dividir y sombrear un rectángulo a la mitad de manera indefinida.



27. De acuerdo con la figura anterior, se podría decir que el área total sombreada para un rectángulo dividido, tal como se describió anteriormente pero de manera infinita es:

    a. El área del rectángulo inicial menos el área sin sombrear.
    b. El área del rectángulo inicial.
    c. La suma de las áreas de infinitos rectángulos.
    d. No es posible calcularlo.
    e. Ninguna de las anteriores.

28. Si el anterior rectángulo dividido indefinidamente se dispone en forma de escalera infinita decreciente de razón un medio, entonces se obtendría una figura como la siguiente:

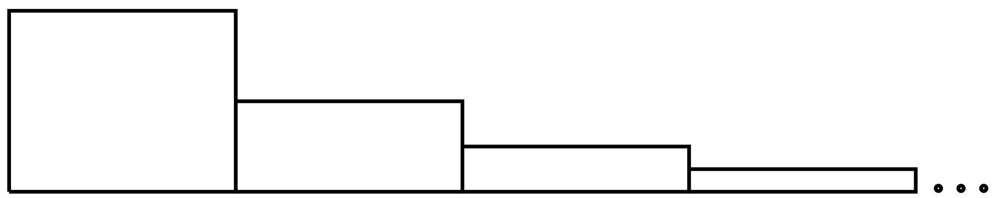


Si tomamos el área del rectángulo inicial como una unidad cuadrada, entonces la suma de los infinitos rectángulos de la escalera se puede representar así:

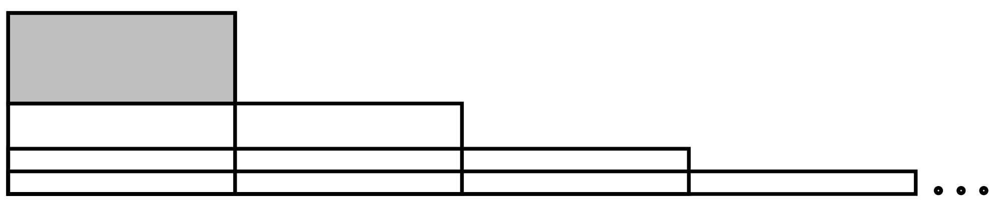
a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$
b. $1+\frac{1}{2^n}=1$
c. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$
d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}=1.$
e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información

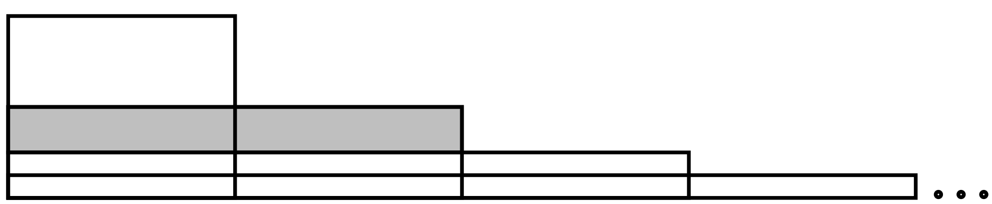
Observa la siguiente escalera, en la cual el escalón inicial tiene un área equivalente a una unidad cuadrada y cada escalón tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior.



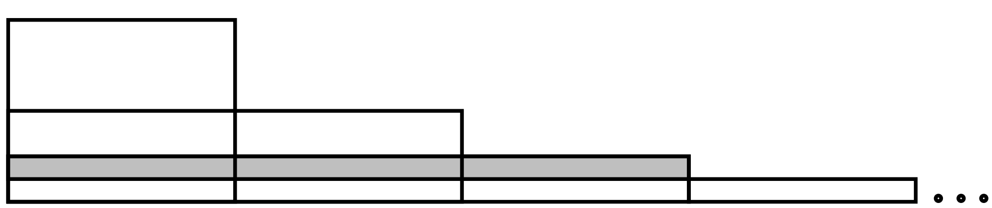
Observa otra forma de dividir esta escalera infinita decreciente, para la cual el área sombreada es un medio, que se escribe aritméticamente, $\frac{1}{2}$.



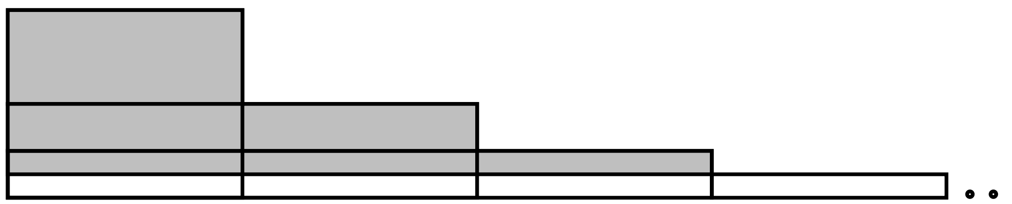
Para la siguiente figura, el área sombreada es dos veces un cuarto, es decir $2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2^2}$.



Así mismo para la siguiente figura, el área sombreada es tres veces un octavo, es decir $3\frac{1}{8} = 3\frac{1}{2^3}$.



La representación gráfica de la suma de las áreas sombreadas, de acuerdo a las anteriores figuras, es:



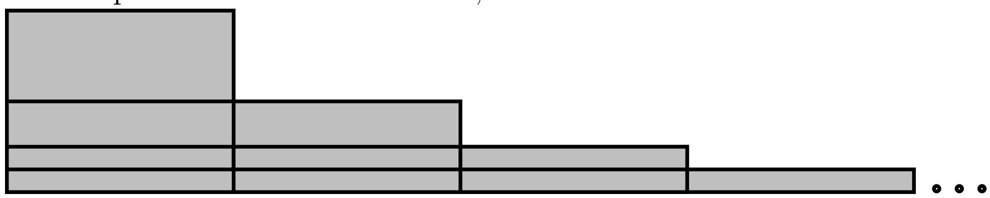
29. El área de la anterior escalera sombreada es:

    a. Un medio, más dos veces un cuarto, más tres veces un octavo.
    b. Un medio, más un cuarto, más un octavo.
    c. Uno, más dos veces un cuarto, más tres veces un octavo.
    d. Dos veces un medio, más dos veces un cuarto, más tres veces un octavo.
    e. Ninguna de las anteriores.

30. El área de la escalera sombreada anteriormente se puede escribir aritméticamente como:

    a. $\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}$
    b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
    c. $\frac{1}{2^0}+2\frac{1}{2^1}+3\frac{1}{2^2}$
    d. $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}$
    e. Ninguna de las anteriores.

31. Continuando el proceso de manera infinita, obtenemos una escalera sombreada así:



La suma de las áreas sombreadas se puede expresar como:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

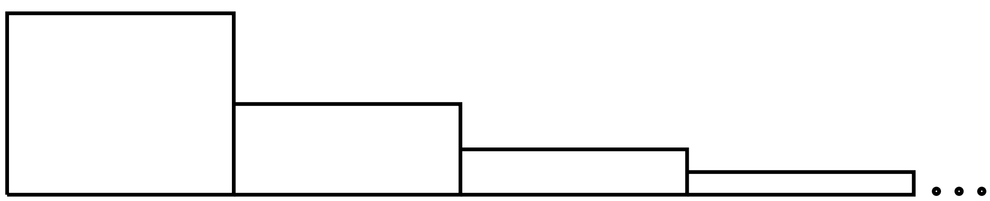
b. $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2^2}+4\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots$

c. $\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots$

d. No es posible calcularlo.

e. Ninguna de las anteriores.

32. Observa la siguiente escalera, cuyo escalón inicial tiene como área una unidad cuadrada, cada escalón tiene como base una unidad y su altura duplica la altura del escalón siguiente.



Para la anterior escalera, se puede considerar que su área es:

a. $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

b. $1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

c. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

d. $1+\frac{1}{2^n}=2$

e. Ninguna de las anteriores.

Una manera alternativa de representar la escalera anterior, consiste en hacer divisiones como lo indica la figura:

33. Las anteriores representaciones muestran que las áreas de ambas escaleras son iguales, por lo tanto una de las siguientes igualdades es verdadera:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

b. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

c. $1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+\ldots+n\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

d. $1+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+4\frac{3}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$

e. Ninguna de las anteriores.

34. ¿Cuál es la condición necesaria para que una escalera infinita tenga área?

a. Que no tenga razón.

b. Que se pueda disponer de manera creciente.

c. Que sea decreciente y que tenga razón.

d. Que la escalera sea infinitamente decreciente.

e. Ninguna de las anteriores.

35. Sí, una escalera infinita decreciente tiene área, se puede afirmar que:

a. La escalera tiene razón igual a 1.
b. La suma de infinitos términos positivos es finita.
c. Su área es igual a la suma de infinitos términos positivos o negativos.
d. Toda escalera infinita decreciente tiene razón.
e. Ninguna de las anteriores.

Anexos B

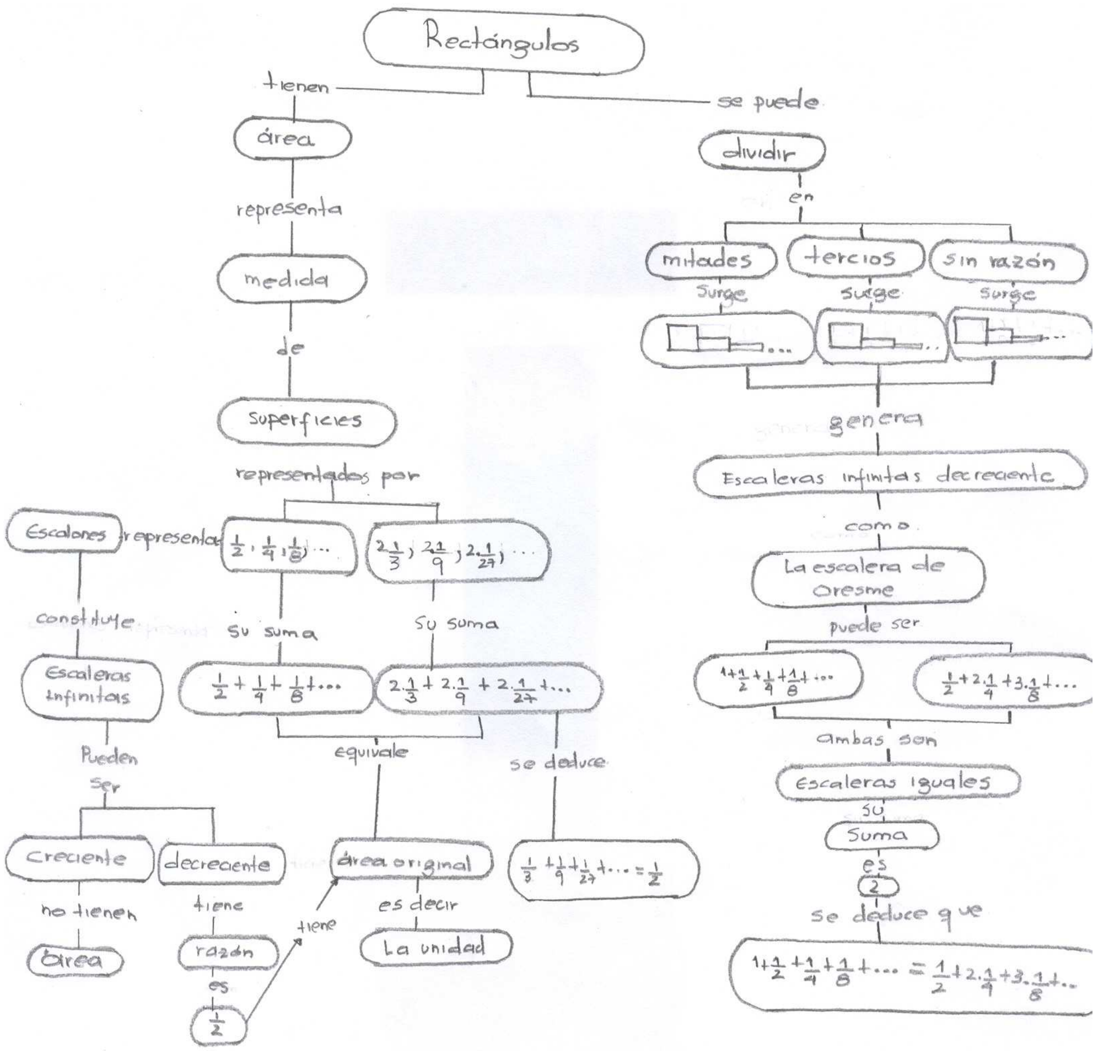
Mapas conceptuales de los estudiantes

A continuación se anexarán algunos mapas conceptuales elaborados por los estudiantes de la Institución Educativa Presbítero Camilo Torres Restrepo, durante el trabajo de campo.

Es necesario mencionar que los mapas fueron elaborados en diferentes fases de aprendizaje, mostrando la manera en la cual ellos refinaban su red de relaciones y avanzavan al nuevo nivel de razonamiento, en cuanto al concepto de convergencia de series infinitas.

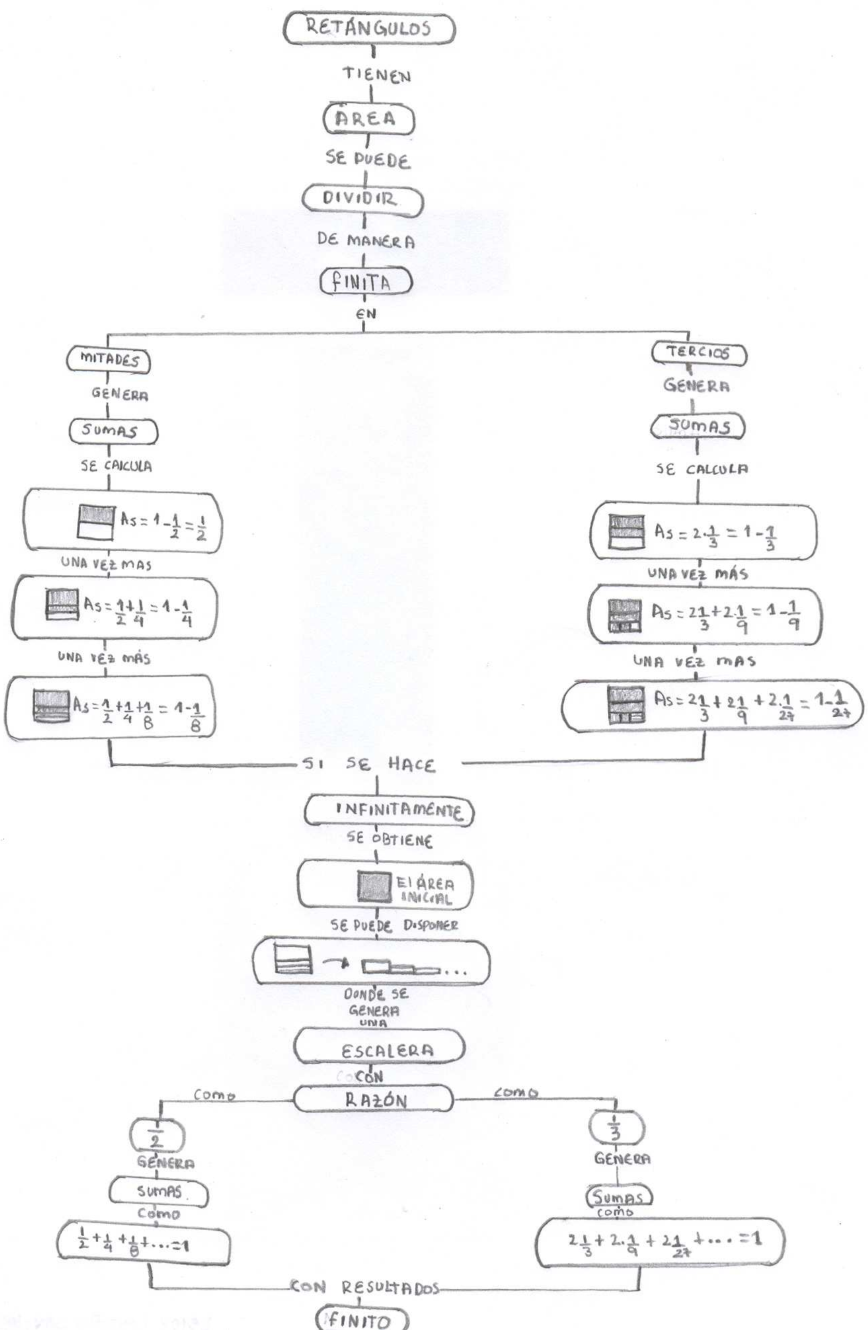
B.1. Mapa conceptual 1

El siguiente mapa muestra los razonamientos que un estudiante realiza en la fase de integración.



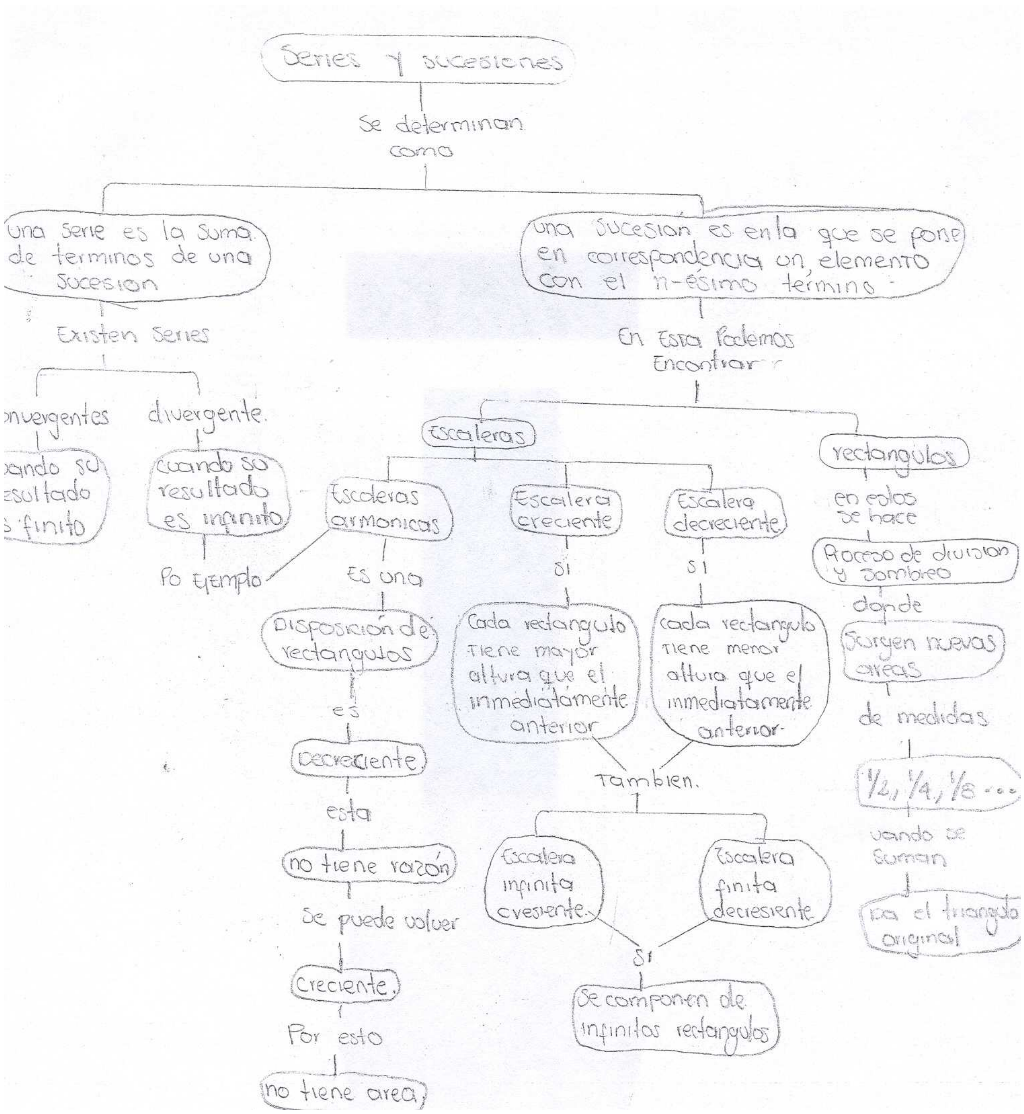
B.2. Mapa conceptual 2

El siguiente mapa muestra los razonamientos que un estudiante realiza en la fase de orientación libre.



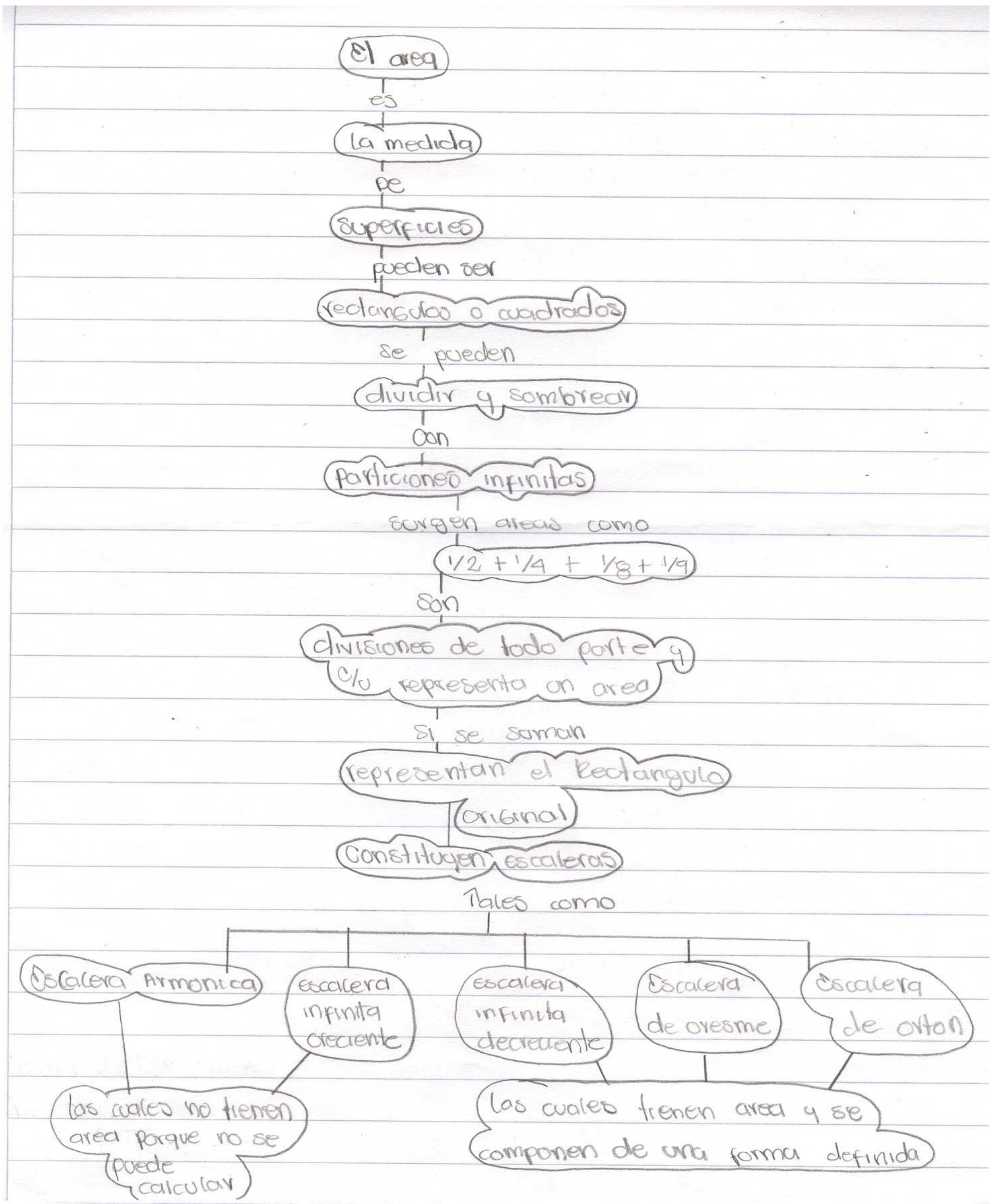
B.3. Mapa conceptual 3

El siguiente mapa muestra los razonamientos que un estudiante realiza en la fase de explicitación.



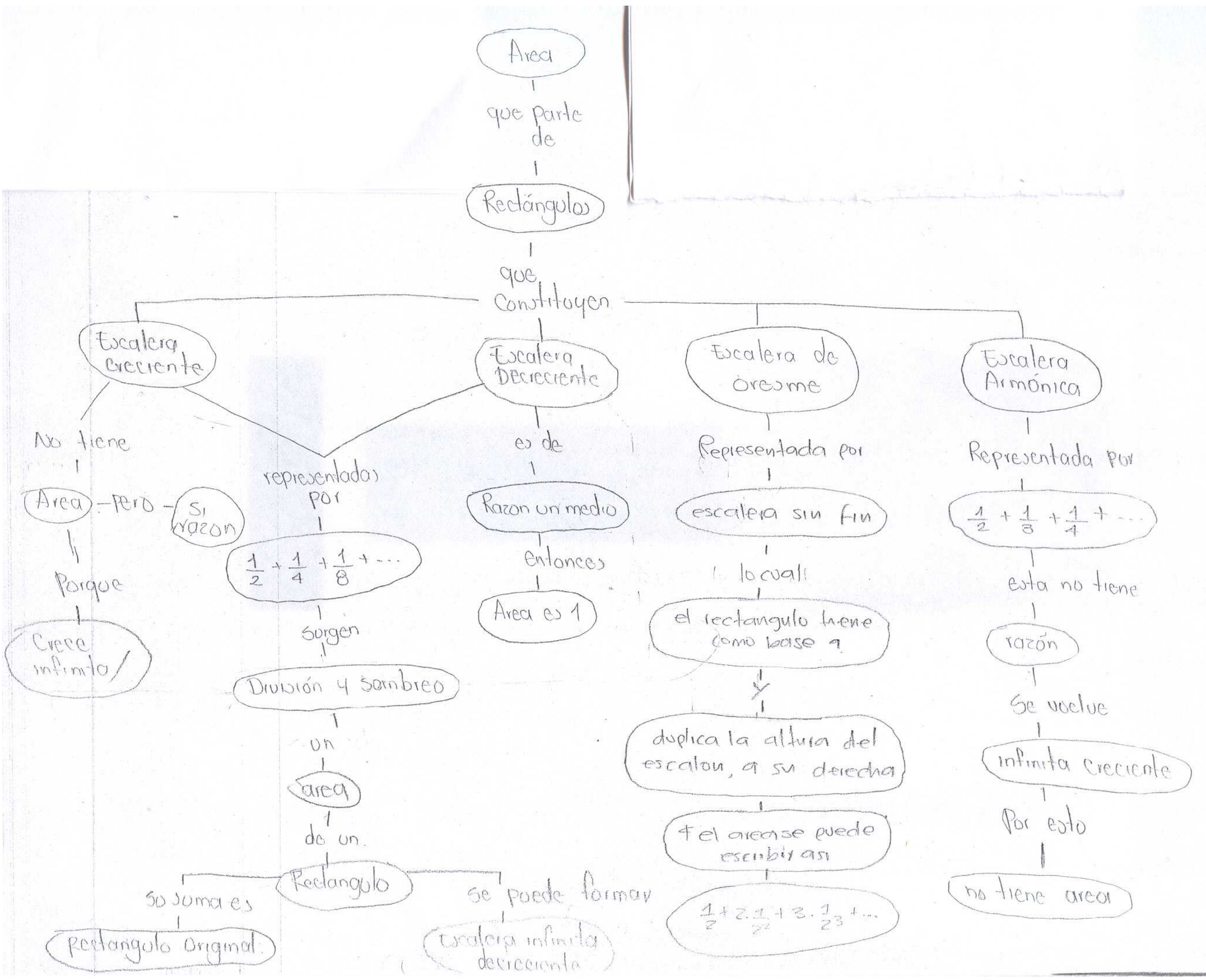
B.4. Mapa conceptual 4

El siguiente mapa muestra los razonamientos que un estudiante realiza en la fase de explicitación.



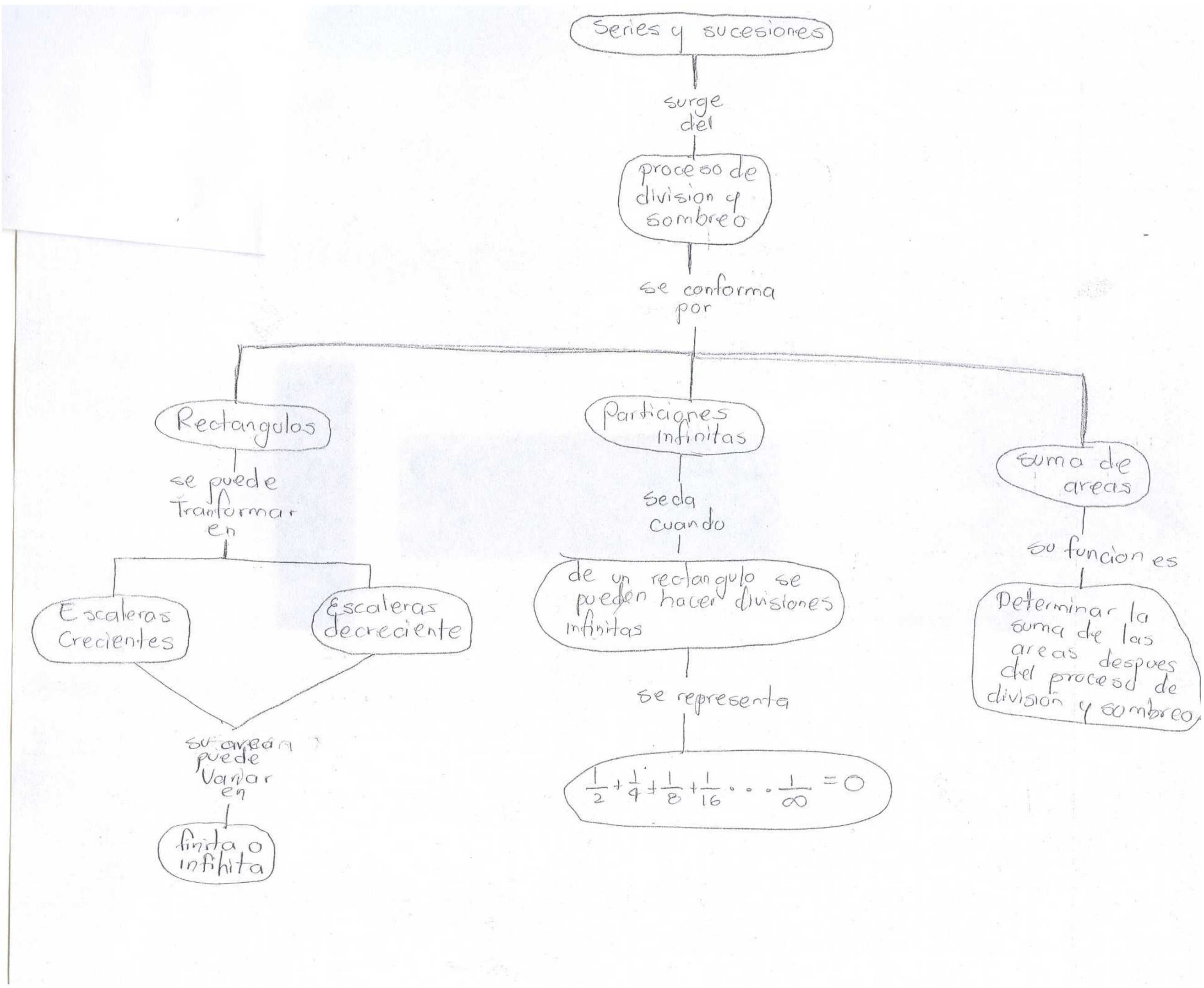
B.5. Mapa conceptual 5

El siguiente mapa muestra los razonamientos que un estudiante realiza en la fase de explicitación.



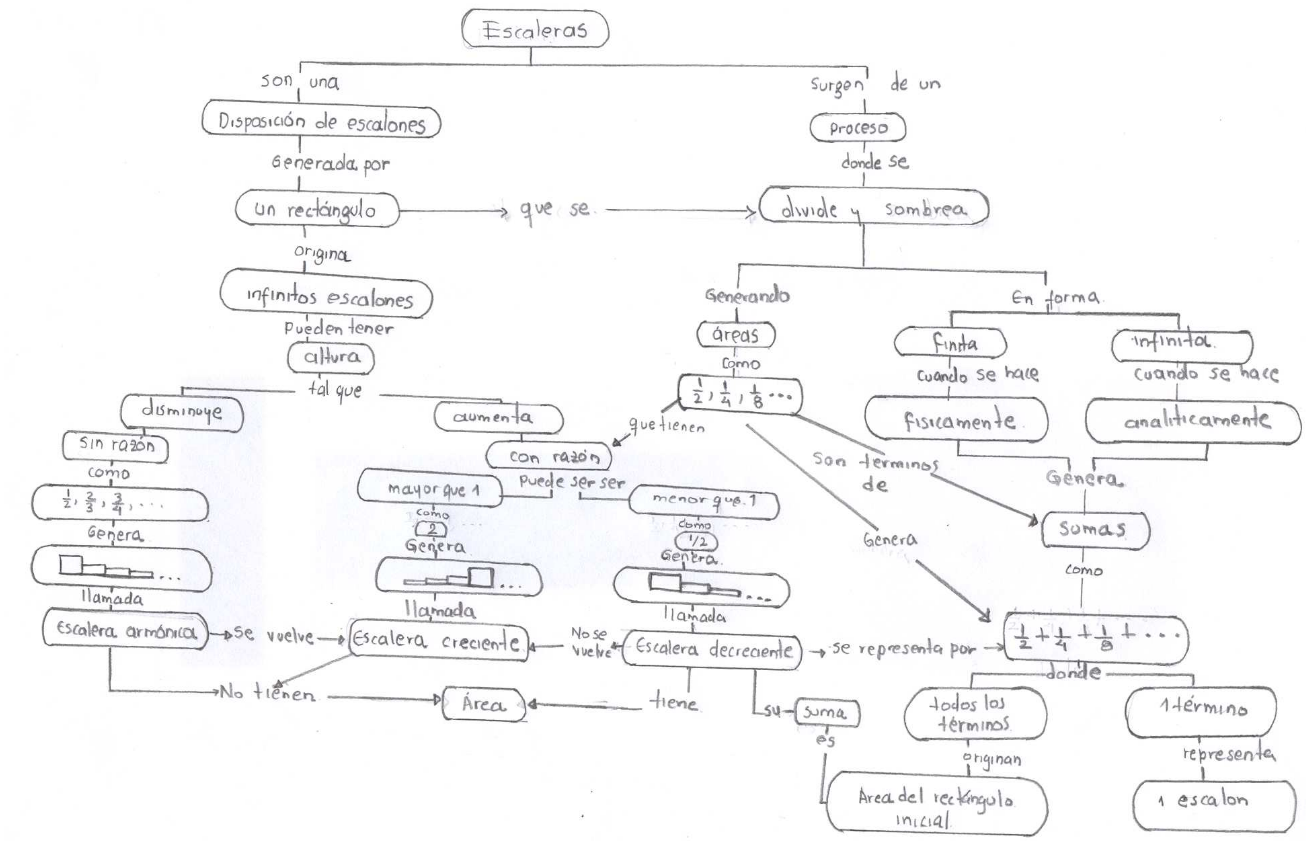
B.6. Mapa conceptual 6

El siguiente mapa muestra el razonamiento que realizó el estudiante que no alcanzó el nivel III.



B.7. Mapa conceptual 7

El siguiente mapa muestra los razonamientos que un estudiante realiza en la fase de integración.



Anexos C

Divulgación del trabajo de investigación

Durante el trabajo de investigación se realizaron diferentes ponencias en eventos regionales, nacionales e internacionales, que permitieron la socialización de los avances desarrollados. Dichos eventos permitieron la publicación de artículos y memorias, los cuales resaltamos a continuación.

C.1. Artículos

A continuación se describirán los artículos desarrollados durante el trabajo de investigación:

C.1.1. Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van hiele

Carlos Mario Jaramillo López, Universidad de Antioquia, Colombia
Edison Sucerquia Vega, Universidad de Antioquia, Colombia
Sandra Milena Zapata, Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen: En este escrito presentamos los avances de la investigación que estamos desarrollando en el marco de las Fases de Aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele, las cuales corresponden al aspecto prescriptivo del modelo, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, susceptibles de una componente visual geométrica. Específicamente se ha logrado diseñar un módulo de instrucción enmarcado

en estas fases, cuyo propósito es que los estudiantes ubicados en un nivel II de razonamiento frente al concepto de convergencia de una serie infinita, alcancen un nivel III de razonamiento.

El módulo de instrucción, se convierte en una propuesta metodológica de aprendizaje e intervención en el aula, que le facilitará al docente por un lado, mejorar su enseñanza y por otro, lograr que el estudiante avance en sus procesos de razonamiento. Además se diseñó una prueba de selección múltiple, la cual se aplicó a una población amplia de estudiantes, con el propósito de validar la efectividad del módulo desarrollado.

Estado: En proceso de publicación

Revista: Asociación latinoamericana de matemática educativa (ALME).

Lugar: Ciudad de México, México

Año: 2009

C.1.2. Las fases del aprendizaje de van hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita

Carlos Mario Jaramillo López, Universidad de Antioquia, Colombia
Edison Sucerquia Vega, Universidad de Antioquia, Colombia
Sandra Milena Zapata, Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen: El modelo de van Hiele, aunque en sus comienzos se implementó sólo en geometría, en la última década se ha presentado una extensión del modelo, obteniendo valiosos avances en lo referido a la enseñanza de las nociones del análisis matemático. Uno de los resultados se evidencia en la tesis de maestría "Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas." Dirigida por el Dr. Carlos Mario Jaramillo López, y desarrollada por los estudiantes: Flor María Jurado Hurtado y René Alejandro Londoño Cano, allí se señala la dificultad en el paso del nivel de razonamiento II al III, por eso la necesidad diseñar módulos de instrucción en el marco de las fases de aprendizaje del citado modelo, para favorecer el progreso en dichos niveles de razonamiento, permitiendo que el alumno construya redes de relaciones referidas al concepto de convergencia de series infinitas, a través de figuras de áreas planas.

Modalidad de participación: Comunicación Breve.

Estado: Publicado.

Revista: Asocolme.

Codigo ISBN: 958-97614-7-2

Lugar: Santiago de Cali, Colombia

C.2. Ponencias

A continuación se mencionarán las ponencias en las cuales fueron socializados los avances del trabajo de investigación, en algunos casos se desarrollaron talleres que permitieron refinar el módulo de aprendizaje.

1. "Las fases del aprendizaje de van hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita". Comunicación Breve. XIII Encuentro Escuela Regional de Matemáticas, organizado por la Universidad Tecnológica de Pereira, realizado en la ciudad de Pereira, Colombia. Septiembre de 2006.

2. "Mapas conceptúales como herramienta metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del análisis matemático". Taller. Foro Educativo Nacional 2006, organizado por el Ministerio de Educación Nacional, realizado en la ciudad de Mocoa, Colombia. Octubre de 2006.

3. "Las fases del aprendizaje de van hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita". Reporte de Investigación. VIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, organizado por la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) realizado en la ciudad de Cali, Colombia. Marzo de 2007.

4. "Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele". Conferencia. XVIII Encuentro de geometría y sus aplicaciones y VI Encuentro de aritmética, organizado por la Universidad Pedagógica Nacional y realizado en la ciudad de Bogota D.C. Colombia. Junio de 2007.

5. “Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele”. Comunicación Breve. XVI Congreso Nacional de Matemáticas, organizado por la Sociedad Colombiana de Matemáticas y realizado en la ciudad de Medellín, Colombia. Julio de 2007.

6. “Las fases de aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita”. Taller. Programa Formador de Formadores,organizado por la Universidad de Antioquia en el municipio de Santa Fé de Antioquia, Colombia. Agosto de 2007.

7. “Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele”. Conferencia. VII Encuentro de enseñanza de las Ciencias, organizado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia y realizado en la ciudad de Medellín, Colombia. Octubre de 2007.

8. “Las fases de aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita”. Cursillo. Primer Encuentro Iberoamericano y VI Encuentro Nacional de la Enseñanza del Cálculo, organizado por la Universidad Javeriana y realizado en la ciudad de Bogota D.C. Colombia. Diciembre de 2007.

9. “Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele”. Reporte de Investigación. XXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, organizado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) y realizado en la ciudad de México D.F. México. Julio de 2008.

10. “Los mapas conceptuales y las matemáticas”. Taller. VIII Encuentro de enseñanza de las ciencias, organizado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia y realizado en la ciudad de Medellín, Colombia. Septiembre de 2008.

Anexos D

Test: Áreas de Escaleras

A continuación se anexa el test "Áreas de escaleras" que se fue diseñado en la tesis de maestría "Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas", elaborada por René Alejandro Londoño y Flor María Jurado, el cual permite determinar el nivel de razonamiento en el cual se encuentra un estudiante.