DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MÉTRICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

JESÚS MARÍA GUTIÉRREZ MESA

MARÍA DENIS VANEGAS VASCO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

MEDELLÍN
2005

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MÉTRICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

JESÚS MARÍA GUTIÉRREZ MESA
MARÍA DENIS VANEGAS VASCO

TESIS

ASESOR: GILBERTO OBANDO ZAPATA

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2005

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Medellín, Febrero 21 de 2005

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Tesis

Entre presidente y jurados del Trabajo de Investigación **"DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MÉTRICO EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA"**, presentado por los estudiantes **María Denis Vanegas Vasco** y **Jesús María Gutiérrez Mesa**, como requisito para optar al título de de la Maestría en Educación con énfasis en **Docencia de las Matemáticas**, hemos acordado calificar este, después de su presentación y sustentación como:

Aprobado: Si
No aprobado:

A los Trabajos de investigación que merecieren ser destacados, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Sobresaliente: Si
Meritorio:

Medellín, 29 de julio de 2005

Gilberto Obando Zapata
Presidente

Guillermo Silva Restrepo
Jurado

Diego Garzón Castro
Jurado

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS. **p**

LISTA DE TEXTOS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FOTOGRAFÍAS

RESUMEN

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MÉTRICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

La investigación surge de las necesidades observadas en el contexto del desarrollo del pensamiento métrico en la básica secundaria, y está basada en la metodología de investigación cualitativa con estudios exploratorios, descriptivos y explicativos. Exploratorio, en cuanto se refiere a la reflexión y exploración de las relaciones entre las matemáticas y la realidad; descriptivo y explicativo, puesto que la investigación busca analizar los procesos utilizados por estudiantes y docentes para aprender y enseñar los conceptos relativos a algunas magnitudes, y, con base en ello, diseñar estrategias que permitan establecer relaciones entre los conceptos implicados en el desarrollo del pensamiento métrico.

Como base metodológica específica para el desarrollo de este trabajo se adopta la ingeniería didáctica, por su función en el campo investigativo de la educación matemática. Esta metodología da cuenta de las realizaciones didácticas, y de las formas de validación de los estudiantes.

La propuesta se desarrolla con un grupo de estudiantes del grado noveno (9º1) de la Institución Educativa La Paz del municipio de Envigado, durante el año lectivo 2004. El propósito de la investigación es identificar algunos elementos teóricos y metodológicos, que permiten generar procesos de enseñanza y aprendizaje, coherentes con los Lineamientos Curriculares y los Estándares de Matemáticas referentes a las magnitudes y sus medidas.

INTRODUCCIÓN

La medida de las magnitudes, en el contexto escolar, requiere de la reflexión sobre la relación entre las matemáticas y la realidad; la cual no parece ser tenida en cuenta por muchos docentes de matemáticas, pues generalmente los estudiantes se ven sometidos a procesos de medición con instrumentos refinados y complejos; más aún se ven en tareas de conversión de unidades, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sin percatarse de la necesidad de medir.

La presente investigación pretende identificar los elementos teóricos y metodológicos de carácter didáctico, en relación con la medida de magnitudes, que contribuyen al desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje coherentes con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de matemáticas vigentes en el país.

Inicialmente se presenta una mirada a la historia de las matemáticas, para identificar allí las construcciones que el hombre elaboró de conceptos matemáticos, como el de las magnitudes y sus mediciones, con el fin de analizar obstáculos epistemológicos que potenciaron la construcción de otros conceptos matemáticos, o impidieron su desarrollo.

Una contribución importante de los griegos al desarrollo del conocimiento matemático, la constituyó su teoría de las magnitudes continuas. Esto les permitió profundizar en muchos otros temas de las matemáticas y de las ciencias; a la vez que superar ciertos problemas originados, de un lado, por el descubrimiento de los inconmensurables; a causa de la imposibilidad para hallar razones de números enteros de medidas del mismo tipo, como es el caso del lado del cuadrado y la diagonal del mismo. Además, por la imposibilidad para aceptar el infinito actual. Y por la dificultad para reconocer el continuo numérico.

Luego de estos reconocimientos histórico-epistemológicos, se incursiona en el contexto matemático. Para ello, se definen tres conceptos fundamentales que apoyan el desarrollo teórico y metodológico de la investigación: magnitud, cantidad de magnitud y medida.

En el diseño metodológico se adopta la ingeniería didáctica como metodología para esta investigación; por su doble función: como resultado de investigaciones basadas en metodologías externas a la clase y como metodología de una investigación específica.

La ingeniería didáctica está basada en:

- Un esquema de realizaciones didácticas en clase, apoyado en las situaciones didácticas.
- Un registro en el cual se ubica y las formas de validación a las que está asociada.

En la propuesta emanada de la indagación se sugieren situaciones didácticas que dan cuenta de los procesos de medición de longitudes y áreas, del reconocimiento de unidades y patrones de medida, y del cálculo y la estimación de cantidades de magnitud.

1. JUSTIFICACIÓN

A pesar de las propuestas del MEN en relación con el desarrollo del pensamiento métrico, en numerosas instituciones no se enseñan los temas relativos a las magnitudes y su medición, y cuando se hace, no se tienen en cuenta los elementos de carácter didáctico recomendados en los lineamientos.

La medida de las magnitudes, en el contexto escolar, requiere de una reflexión sobre las relaciones entre las matemáticas y la realidad; la cual no parece ser tenida en cuenta por muchos docentes de matemáticas; pues, generalmente, los estudiantes se ven sometidos a procesos de medición con instrumentos refinados y complejos, e incluso se enfrentan a tareas de conversión de unidades, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sus medidas, y sin darse cuenta de la necesidad misma de medir. Frecuentemente inician los temas de las magnitudes directamente con el manejo de patrones estandarizados de medida, múltiplos y submúltiplos, y éstos en contextos aritméticos, aplicando tablas y factores de conversión, reduciendo la conceptualización de las magnitudes y sus medidas al proceso de agregar y quitar ceros; es decir, que no se establecen nexos entre el tratamiento físico de las magnitudes y el tratamiento matemático.

De otro lado, en los textos escolares, por lo general, aparecen unidades temáticas que se refieren a las magnitudes: “Áreas de las figuras planas”; “Sistema métrico decimal”; “Unidades de superficie”; “Unidades de volumen”; “Otras magnitudes”, en las cuales, si bien se tratan las magnitudes, se hace de forma aislada y algorítmica. Tanto el texto, como los estudiantes y los docentes se ubican en un contexto de solución de ejercicios y de algunos problemas que involucran magnitudes; pero éstos no son considerados en contextos de medición como tal en el proceso de su solución.

Para ilustrar el panorama descrito anteriormente, respecto del desarrollo del pensamiento métrico en el ámbito escolar, es necesario dar una mirada al panorama general del currículo desde: los resultados de los estudiantes, lo que está propuesto en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas, y lo que se hace en el aula de clase. Para ello se hace, en primer lugar, una revisión de los resultados o desempeños de los estudiantes en pruebas de carácter nacional o internacional; a continuación se analizan los lineamientos de carácter curricular para el pensamiento métrico y, por último, se revisan los textos y actividades propias de los estudiantes.

Para el estudio de estos análisis preliminares se trata de identificar los conflictos del sistema educativo bajo la mirada de lo que se concibe para la didáctica de las matemáticas como los tres actores fundamentales: Los docentes, los saberes y los alumnos con las relaciones de doble sentido que entre ellos se establece, mediados por lo que se denomina el “contrato didáctico”, y en lo específico para la presente investigación (como es el caso) del “pensamiento métrico”.

Para esta aproximación se hace un análisis del currículo de matemáticas como el soporte que puede dar cuenta de estos tres actores, sus roles y el tipo de relaciones que entre ellos se establece.

Currículo: Según el Art. 76 ley 115 /94: es el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional.

Dentro de esta concepción general se identifican otras tres subcategorías que corresponden a lo que las pruebas TIMSS, (1997, p. 2) denominó: currículo propuesto, currículo desarrollado y currículo alcanzado.

Currículo propuesto: corresponde al currículo oficial, plasmado en los documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional: Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Matemáticas que orientan los procesos curriculares de la educación matemática en el país.

Currículo desarrollado: corresponde al trabajo en el aula de clase y que tiene que ver con las actividades propuestas por los profesores, el ambiente del desarrollo de las actividades y las evidencias de los alumnos en sus apuntes de clase.

Currículo logrado: Estudio de pruebas externas y que miden el rendimiento de los alumnos como son las pruebas TIMSS y SABER.

El pensamiento métrico:

El pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado para la comprensión de situaciones en contextos. Éste también está relacionado con la medida de las cantidades de magnitud, su estimación y aproximación, al igual que con la capacidad de usar instrumentos de medida.

En Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y en Los Estándares Básicos de Matemáticas, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, se refieren a la construcción de los conceptos y procesos de conservación de las magnitudes; la selección de unidades de medida, patrones e instrumentos; la asignación numérica; la estimación y el papel del trasfondo social de la medición. Todo lo anterior hace que el concepto potente para el desarrollo del pensamiento métrico sea el de Magnitud.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, organizan el currículo bajo tres aspectos: Procesos generales, conocimientos básicos y el contexto. Los procesos generales tienen que ver con el aprendizaje, es decir, el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos se relacionan con los conceptos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con los sistemas propios de las matemáticas; el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. El contexto hace alusión a los ambientes que rodean al estudiante y que contribuyen al sentido de las matemáticas que aprende, acá cobran especial importancia las situaciones problemáticas que surgen de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

Según las consideraciones planteadas por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares y en los Lineamientos curriculares de Matemáticas, el pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su capacidad para abstraerlas de los fenómenos, para medirlas, para compararlas entre si, operar con sus medidas y aplicarlas en diferentes contextos; utilizando como herramienta básica los sistemas de medidas y haciendo énfasis en los siguientes aspectos:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medida.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

1.1 ¿CÓMO HA SIDO EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN LOS ASPECTOS RELACIONADOS CON LAS MAGNITUDES Y SUS MEDIDAS?

Para caracterizar lo que los expertos denominan el currículo alcanzado con respecto al pensamiento métrico, se da una mirada a los desempeños o resultados de los estudiantes en pruebas de carácter internacional, como son las pruebas TIMSS, y, en el ámbito nacional, a los resultados en las pruebas SABER.

1.1.1 Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias: TIMSS

El Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS, fue un proyecto de investigación y evaluación curricular en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias naturales, en la educación básica en diferentes países. En dicho estudio se analizaron tres perspectivas del currículo: el propuesto, el desarrollado y el logrado. Además se pretendía identificar características de la educación en Matemáticas y en Ciencias y los factores asociados de éxito o de fracaso[1] (MEN, 1997).

Este análisis es de gran ayuda, porque permite identificar tendencias de los estudiantes colombianos en Matemáticas, específicamente, en lo relativo a los conceptos sobre las magnitudes y sus medidas. Allí los conocimientos evaluados tuvieron que ver con el reconocimiento y uso de magnitudes y unidades estándar, de longitud, peso, capacidad, tiempo, amplitud de ángulos y equivalencia entre ellas; las medidas de perímetro y área; los procesos de estimación y el cálculo del error. El análisis se hizo sobre los siguientes aspectos:

- Uso del conocimiento
- Uso de procedimientos de rutina
- Investigación y solución de problemas
- Razonamiento matemático
- Comunicación

[1] Este es el último estudio internacional relativo a la enseñanza de las matemáticas, y continúa vigente para los intereses de esta investigación.

El análisis de los resultados del TIMSS refleja cómo la medición es una de las áreas de mayor dificultad, o la menos conocida de las demás áreas temáticas; como afirma MEN (1997): la “medición, es una de las áreas particularmente críticas para los estudiantes colombianos de 7º y 8º” (p 121). Además, el número de preguntas que responde bien los estudiantes internacionales excede significativamente al de las que responden bien los estudiantes colombianos. “Mientras que los estudiantes colombianos se revelan preparados para resolver bien sólo un 15% o 20% de las preguntas del área; los estudiantes internacionales se revelan preparados para resolver bien el 52% de ellas”(p.121). A continuación se presentan los resultados del rendimiento promedio por temas evaluados y el rendimiento promedio por tipos de desempeño evaluados:

- **Rendimiento promedio por temas evaluados**

CODIGO	TEMA	NACIONAL		INTERNACIONAL	
		Séptimo	Octavo	Séptimo.	Octavo
	GLOBAL	26.8	30.3	49.8	55.6
1.2	Medición	23.4	26.7	47.1	52.5
1.2.1	Unidades	36.1	39.3	58.1	62.6
1.2.2	Perímetro, área y volumen	7.3	11.2	30.9	38.1
1.2.3	Estimación y error	26.9	29.3	54.7	58.5

Tabla No1: Resultados de las pruebas TIMSS[2]

[2] Tomado de MEN (1997) Análisis y Resultados de las Pruebas de Matemáticas para Colombia, P.P. 120.

El ítem 1.2.1 evalúa los conceptos de medida y unidades estándar: la comparación de objetos, el uso de unidades estándar, el sistema inglés y el métrico, el uso apropiado de instrumentos, la precisión y la confiabilidad, medidas comunes de longitud, área, volumen, capacidad, tiempo, año calendario, moneda, temperatura, masa, ángulos; cocientes y productos de unidades; análisis dimensional.

El ítem 1.2.2 evalúa los conceptos de perímetro, área y volumen, y el uso de fórmulas para determinar áreas, perímetros y volúmenes.

El ítem 1.2.3 evalúa lo relativo a estimaciones y errores: estimación en la medición, errores en la medición, precisión y confiabilidad de las mediciones.

- **Rendimiento promedio por tipos de desempeño evaluados.**

CÓDIGO	DESEMPEÑO	NACIONAL		INTERNACIONAL	
		Séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	GLOBAL	26.8	30.3	49.8	55.6
2.2	Medición	23.4	26.7	47.1	52.5
2.1	Uso de conocimientos	42.1	44.2	64.5	67.9
2.2	Uso de procedimientos de rutina	25.5	28.4	51.	55.5
2.3	Solución de problemas	12.8	17.8	37.0	44.0
2.5	Comunicación	4.5	5.6	25.1	32.4

Tabla No 2: Resultados de las pruebas TIMSS[3]

[3]Ibidem.

En cuanto al uso de conocimientos, se estudiaron formas de representar reconocimiento de equivalencias, recuerdo de objetos matemáticos y sus propiedades; con relación al uso de procedimientos de rutina, se analizó el uso de equipos (instrumentos de medición y calculadoras), los procesos de calcular, graficar, transformar, y medir; en el aspecto de solución de problemas, se consideró el planteamiento, la clarificación y solución de problemas, las diferentes estrategias de solución, los procesos de predicción y verificación de resultados; para el caso de la comunicación, se tuvo en cuenta el uso de vocabulario y la notación, las representaciones relacionadas y los procesos de describir, discutir y criticar la información recibida y procesada.

Con base en los resultados presentados en las anteriores tablas, de los resultados de las pruebas TIMSS, se puede concluir que: “La mayoría de las preguntas de medición son muy difíciles para los estudiantes colombianos. Más del 75% de ellos se revela no preparado para resolver el 52% de las preguntas del área. Para los estudiantes internacionales esta situación sólo se presenta en un porcentaje muy pequeño” (p.121).

1.1.2 Pruebas SABER

Desde el año 1991 el ICFES inició una etapa de trabajo en el campo evaluativo de la educación básica, uno de cuyos resultados fue la aplicación de las ya conocidas pruebas SABER; su propósito ha sido, y sigue siendo, el de obtener, procesar, interpretar y divulgar información confiable, y permitir análisis pertinentes sobre la educación en el país, de tal manera que se han constituido en una base sólida para la toma de decisiones en las diferentes instancias del servicio educativo.

Las pruebas SABER, aplicadas a un grupo representativo de estudiantes de todo el país en los años 1991, 1992, 1997 y 1998, permitieron recopilar información sobre los logros de los estudiantes de los grados 3º, 5º, 7º, y 9º de la educación básica en el área de matemáticas, en relación con el "uso que los estudiantes hacen de la matemática para comprender, aplicar, utilizar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos".

En el marco del Proyecto *"Mejoramiento de la Calidad de la Educación Básica de Antioquia"*, el ICFES, por requerimiento de la Secretaría de Educación y Cultura de Antioquia, ha desarrollado pruebas de logro (instrumentos y marcos teóricos) en matemáticas, para diagnosticar y hacer seguimiento del estado de la educación básica en matemáticas en el departamento. En el desarrollo de este proyecto se han realizado aplicaciones en los grados 3°, 5°, 7° y 9°. La primera aplicación se llevó a cabo en noviembre de 1998, en los grados 7° y 9°, con una cobertura de 23 municipios. La segunda aplicación se realizó en octubre de 1999, en los grados 3° y 5°, con una cobertura de 52 municipios. Finalmente, en noviembre del 2000, se realizo la tercera aplicación en los grados 3°, 5°, 7° y 9°, con una cobertura de 63 municipios. Con estas aplicaciones quedó así, definido lo que en el proyecto se conoce como la *línea de base.*

A partir de la formulación y resolución de problemas, las pruebas hicieron una aproximación al estado del pensamiento matemático de los estudiantes, y por ende, al establecimiento del estado de la calidad de la educación matemática. Uno de los indicadores utilizados para tal fin, son las competencias en matemáticas, vistas como manifestación del saber/hacer del estudiante en el contexto matemático. Este saber/hacer implica que el estudiante ponga en juego tres aspectos que están integrados y que configuran la competencia como tal; éstos se refieren *al conocimiento matemático, a la comunicación y a las situaciones problema*.

A continuación se hace una breve descripción de los aspectos antes mencionados. (Ver, ICFES-MEN, 2001).

El conocimiento matemático*:* Para establecer desde dónde y cómo se ve el conocimiento matemático escolar, se partió de una concepción en la cual se reconocen dos aspectos: el conceptual y el procedimental. *El conocimiento conceptual* se refiere a una serie de informaciones conectadas entre sí mediante múltiples relaciones, que constituyen lo que se denomina estructura conceptual. *El conocimiento procedimental* se refiere a la forma de actuación o de ejecución de tareas matemáticas que van más allá de la ejecución mecánica de algoritmos.

La comunicación: Se refiere a la posibilidad del estudiante para leer y escribir matemática; implica que pueda interpretar, traducir y simbolizar desde y hacia un lenguaje matemático.

Al enfrentarse a una ***situación problema***, el estudiante debe matematizarla, modelándola a partir de las diferentes relaciones que establezca entre los conceptos que le subyacen.

Bajo el contexto de la solución de problemas se evaluaron: para los grados 3º y 5º aspectos relacionados con aritmética, probabilidad y estadística, y geometría y medición. Para los grados 7º y 9º se evaluó aritmética, probabilidad y estadística, álgebra y geometría, y medición.

Para los grados 3º, 5º y 7º, en lo relacionado con geometría y medición: se enfatizó en el uso de la medida y en el reconocimiento de formas geométricas básicas, caracterizadas a través de sus elementos y propiedades. Así, se evaluaron aspectos como: reconocimiento de figuras geométricas, nociones de perímetro y área en figuras planas, seguimiento de patrones, mediciones con unidad patrón (convencional y no convencional). También se exploraron las propiedades y características de cuerpos, superficies y líneas; así como algunos movimientos en el plano. En el caso de la medición, se enfatizó en el uso de diversas magnitudes en la solución de situaciones. También aspectos como: noción de perímetro y de área por recubrimiento, identificación de figuras geométricas a través de sus propiedades, rectas, posiciones relativas (perpendicularidad, paralelismo), propiedades de las figuras, transformaciones (rotaciones y traslaciones).

Las nociones tratadas en los grados anteriores se van formalizando cada vez más, utilizando argumentos matemáticos para describir figuras geométricas, identificar y reconocer propiedades y relaciones. En el caso de la medición, se enfatizó en el uso de diferentes sistemas de medida, reconociendo sus unidades y patrones, en situaciones cotidianas y matemáticas; conceptualización de perímetro y de área, relaciones y propiedades geométricas, propiedades y clasificación de figuras planas y sólidos, movimientos en el plano.

Para el grado noveno, se enfatizó en el uso de teoremas, relaciones y propiedades, como insumos necesarios para la resolución de diferentes situaciones. Se evaluaron aspectos como: conceptualización de diversas magnitudes (longitud, superficie, capacidad, peso, amplitud angular), relaciones y propiedades de objetos geométricos, conceptualización de la longitud de la circunferencia y el área del círculo, movimientos en el plano, utilización de patrones de medida.

Para el departamento de Antioquia, y entre ellos, destacando de nuestra parte, los municipios de Medellín y Envigado, el ICFES[4] (2003c) señaló los siguientes aspectos como prioritarios y que requieren un trabajo especial para su mejoramiento en cada unos de los grados evaluados:

Tabla E.57.

Grupos de preguntas que requieren trabajo prioritario para el mejoramiento en los municipios de Antioquia. Matemáticas – grado 3

Municipio	Aritmética	Geometría y medición	Estadística y probabilidad
ENVIGADO	ℓ	ℓ	
MEDELLIN		ℓ	

Tabla E.58.

Grupos de preguntas que requieren trabajo prioritario para el mejoramiento en los municipios de Antioquia. Matemáticas - grado 5

Municipio	Aritmética	Álgebra	Geometría y medición	Estadística y probabilidad
ENVIGADO	ℓ			
MEDELLIN	ℓ			

Tabla E.59.

Grupos de preguntas que requieren trabajo prioritario para el mejoramiento en los municipios de Antioquia. Matemáticas – grado 7

Municipio	Aritmética	Geometría y medición	Estadística y probabilidad
ENVIGADO			ℓ
MEDELLIN			

Tabla E 60

Grupos de preguntas que requieren trabajo prioritario para el mejoramiento en los municipios de Antioquia. Matemático - grado 9

Municipio	Aritmética	Álgebra	Geometría y medición	Estadística y probabilidad
ENVIGADO		ℓ	ℓ	
MEDELLIN			ℓ	

Tabla 3: Resultados de las Pruebas Saber en el departamento de Antioquia 2002.

Con respecto a los 124 municipios que presentaron las pruebas se señala lo siguiente: Para el grado quinto, 27 municipios requieren desarrollar un mayor

[4] Como entidad encargada de elaborar y analizar las pruebas SABER

trabajo que permita la exploración de características de cuerpos, superficies y líneas, movimientos en el plano, ***uso de diversas magnitudes, nociones de área y perímetro***, entre otros. Para el grado séptimo, 41 municipios requieren desarrollar trabajos que enfaticen en el reconocimiento de atributos de figuras geométricas, el ***uso de diferentes sistemas de medida*** y movimientos en el plano. Para el grado noveno, 42 municipios necesitan enfatizar su trabajo en el ***análisis de teoremas, conceptualizaciones de diversas magnitudes (longitud, superficie, capacidad, peso…)*** y en relaciones y propiedades de objetos geométricos. Es importante señalar que los estudiantes de grado noveno se desenvuelven mejor en situaciones en donde intervienen nociones de estadística y probabilidad, pero presentan dificultades en aquellas en donde se requiere el uso de diversos conceptos geométricos y de medición (ICFES-MEN, 2001).

Los resultados de las pruebas aplicadas en el año 2002 reflejan concepciones y aplicaciones erróneas en los aspectos relativos a las magnitudes y a su tratamiento métrico. Se puede observar que los estudiantes, presentaban dificultades en la interpretación de escalas y tomaban decisiones ante una pregunta con base en una primera percepción de las figuras, centrándose en el conteo de las marcas sobre una línea numerada.

Los resultados nacionales en ***Matemáticas*** en los grados tercero, quinto, séptimo y noveno de las pruebas del 2002-2003, (publicados en el 2003), en cuanto al porcentaje acumulado de estudiantes en Niveles de logro, se presentan en la siguiente tabla:

Grado	Nivel B	Nivel C	Nivel D	Nivel E	Nivel F
Tercero	79,30	41,42	19,57		
Quinto	89,76	55,28	23,55		
Séptimo		68,84	28,89	7,8	1,98
Noveno		73,45	32,53	8,76	1,27

Tabla 4[5]: Resultados de la Institución Educativa La Paz

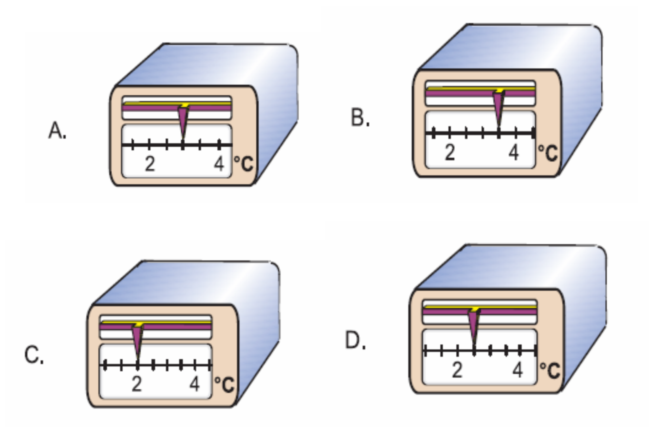
Los niveles en cada prueba son jerárquicos; es decir que van creciendo en su grado de complejidad. Así, el nivel B es de menor complejidad que los niveles C, D, E, F. Además los niveles son inclusivos; es decir, si un estudiante alcanza un nivel particular es porque ha superado los niveles anteriores. Para que los estudiantes se ubiquen en un nivel de logro determinado, se exige que respondan correctamente por lo menos el 60% de las preguntas de ese nivel, y que superen todos los niveles de logro anteriores.

Los resultados de las pruebas, a nivel nacional, arrojaron, como se observó, situaciones críticas para los niveles E y F; es decir, los de mayor complejidad. Se esperaba que el estudiante tomara decisiones y, utilizando los conocimientos adquiridos, resolviera correctamente los problemas planteados.

Se ilustra con un ejemplo tomado de MEN-ICFES (2003a), en la pregunta 12, nivel c, grado tercero, prueba de matemáticas:

[5] Informe final, Institución Educativa La Paz. Julio 2003.

Un tendero necesita poner su nevera a una temperatura de 3ºC para conservar sus jugos. La nevera que registra esta temperatura en ºC es:



La opción A fue seleccionada por aproximadamente el 44%, la B por el 17%, la C por el 24% y la D por el 14%; es decir, cerca del 56% seleccionó la opción equivocada. Esto puede obedecer a varias razones: por una parte, podría ser una manifestación sobre dificultades con la interpretación de escalas o de una decisión tomada sólo con base en una primera percepción de las figuras, centrada en el conteo de las marcas sobre la línea numerada (opción B y D); o, posiblemente, frente a la no presencia del símbolo numérico 3, optó por una de los símbolos presentes en las figuras dadas, inmediatamente anterior a 3 y que aparece señalado (opción C). Por otra parte, permite cuestionarse sobre la responsabilidad de la escuela en la formación de ciudadanos capaces de interpretar información y utilizar instrumentos de medida de uso frecuente en el contexto social (p. 41).

En cuanto a los resultados obtenidos, en la Institución Educativa La Paz, en lo referente a las pruebas SABER, en el tópico relacionado con geometría y medición, su resultado fue calificado como ***significativamente bajo (SB)***. Esto se puede observar en la tabla 4, que muestra el desempeño relativo por grupos de preguntas o tópicos:

Grado	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4	
Séptimo	Aritmética	A	**Geometría y Medición**	***B***	Estadística y probabilidad	A	....	
Noveno	Aritmética	A	Álgebra	B	**Geometría y medición**	***SB***	Estadística y probabilidad	SA

Tabla 5[6]: Resultados de las Pruebas Saber en la Institución Educativa La Paz

Nota: A: Alto --- SA: Significativamente alto --- B: Bajo --- SB: Significativamente bajo.

Tanto en los resultados de las pruebas TIMSS como en los de las pruebas SABER, se puede identificar que uno de los ejes que han sido problemáticos en la educación básica colombiana lo constituyen los conceptos relacionados con las magnitudes y sus medidas y, por tanto, merece una mirada a todos los procesos que involucra y a la forma como son presentados en la escuela.

1.2 ¿QUÉ PROPONE EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL EN CUANTO A LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MAGNITUDES Y SUS MEDIDAS?

1.2.1 Desde los Lineamientos Curriculares

El texto de Los Lineamientos curriculares (MEN, 1998), del área de Matemáticas, es una propuesta del Ministerio de Educación Nacional que señala algunos criterios para orientar el currículo y sugiere los enfoques que debería tener la enseñanza de las matemáticas en el país, con el fin de que se estudie la fundamentación pedagógica de dicha área y se intercambien experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales.

[6] Resultados de las Pruebas Saber en la Institución Educativa La Paz del municipio de Envigado.

Los Lineamientos organizan el currículo del quehacer matemático en tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y contextos. Los procesos generales tienen que ver con el aprendizaje; es decir, el razonamiento, el planteamiento y la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos se relacionan con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, y con los sistemas propios de las matemáticas: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Los contextos hacen alusión a los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende, a través de las situaciones problemáticas, de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

Según las consideraciones planteadas por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos (2003) y en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), el pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes; a su capacidad para abstraerlas de los fenómenos, para medirlas, para compararlas entre si, operar con sus medidas y aplicarlas en diferentes contextos, utilizando como herramienta básica los sistemas de medidas, y haciendo énfasis en los siguientes aspectos:

- **La construcción de los conceptos de cada magnitud**

Las cualidades de los objetos y fenómenos susceptibles de ser medidas no están puestas en ellos; existe un trabajo humano previo y se requiere de una actividad creadora del cerebro para abstraerlas. Los niños requieren tiempo para construir los conceptos relativos a las magnitudes, porque inicialmente perciben la magnitud concreta como por ejemplo ancho, espesor y largo; para construir el concepto de la magnitud abstracta: longitud.

Estos procesos de abstracción son importantes para la construcción de las diferentes magnitudes en toda la educación básica, y se logran a través de diversas situaciones de cuantificación y comparación.

- **La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes**

Para consolidar los conceptos de longitud, área, tiempo, peso, volumen, etc., es necesaria la percepción de lo que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio. En el proceso de adquisición de los procesos de conservación de magnitudes, es necesario tener cuidado con las actividades motoras que pueden distraer al niño del concepto y de su estructura subyacente. La conservación de longitudes aparece entre los seis y los ocho años de edad. Para las demás magnitudes, va apareciendo gradualmente con el concepto mismo de cada una.

- **La estimación de magnitudes y el proceso de capturar lo continuo con lo discreto**

Estos procesos están relacionados con los procesos de la medición, tanto el recuento para las variables discretas, como el proceso de medida donde las propias unidades sean indistinguibles unas de otras.

La estimación es el proceso de llegar a establecer una cantidad de magnitud sin la mediación directa de un instrumento de medida. En algunos casos con el objeto presente y el instrumento presente, en otros casos con alguno o los dos ausentes. La estimación se relaciona con la capacidad que tenga una persona para expresar una cantidad de magnitud sin ver el objeto y/o sin comparar directamente las unidades con el objeto a "medir". Así se permite visualizar el carácter aproximativo de la medida y su naturaleza continua.

- **La apreciación del rango de las magnitudes**

Aquí se contemplan tareas como la capacidad de analizar situaciones, determinar la(s) magnitud(es) que intervienen y determinar el tipo de unidades más apropiadas para realizar la medición de las mismas. Antes de seleccionar una unidad o un patrón de medida, es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta; lo cual depende de la familiaridad que se tenga con las unidades de medida y con las magnitudes.

Se habla de rango en un sentido más amplio que el de orden de magnitud; en el primer caso se hace referencia a las unidades apropiadas para medir ciertas magnitudes, y en el segundo caso se puede estar hablando del mismo rango pero de distinto orden, por ejemplo, la longitud de dos carreteras, rango en el que son útiles los kilómetros, pero en distinto orden de magnitud, la una en el orden de las centenas y la otra en el orden de los miles de kilómetros.

- **El trasfondo social de la medición**

Se refiere a la interacción social y la referencia a un trasfondo significativo e importante que debe estar presente para el estudiante en el momento de la construcción de los conceptos y los procesos de la medición. Se constituye, por lo tanto, en un aspecto de mucha importancia para los procesos de estimación y apreciación del rango de las magnitudes, como también de la asignación numérica, la cual puede darse en unas etapas según el nivel de observación que se tenga y lo que se conozca de la magnitud dada.

El proceso de asignación numérica depende de la selección de las unidades, del proceso de medición y de todo el trasfondo social en el que ocurre el proceso.

1.2.2 Desde los Estándares Básicos en Matemáticas

En los dos últimos años en el país se ha venido discutiendo los "estándares para el área de matemáticas", pretendiendo con ello unificar criterios entorno a los conceptos, procesos y contextos que deben orientar cada uno de los ejes temáticos que conforman el currículo del área de matemáticas, según el MEN (2003).

> *Son criterios claros y públicos que permiten conocer qué es lo que deben aprender los estudiantes. Son el punto de*

> *referencia de lo que un alumno puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel. Son guía referencial para que todos los colegios…ofrezcan la misma calidad de educación a todos los estudiantes colombianos (p.5).*

Los estándares están definidos sobre la base de tres ejes, el conceptual, el procedimental[7] y el contextual. El eje conceptual de los estándares está constituido por lo que los Lineamientos Curriculares denominan los conocimientos básicos; El eje procedimental lo constituyen los procesos básicos de la matemática escolar, como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la comparación y ejercitación de procedimientos, MEN (1998, p.74). En cuanto a lo contextual, se parte de los contextos individuales de quien aprende los conceptos y del contexto propio del saber específico al cual pertenecen.

En cuanto al pensamiento métrico, dos ejes conceptuales articulan toda la propuesta del MEN (2003): Las magnitudes y los sistemas de medición, que permiten en primer lugar orientar el desarrollo del pensamiento métrico y, en segundo lugar, transversalizar todos los demás pensamientos.

Con respecto a lo primero, para las magnitudes y sus medidas se propone para los primeros grados de la educación básica estándares como:

> *Reconocer y diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos…comparar y ordenar objetos…reconocer*

[7] *El conocimiento procedimental* se refiere a la forma de actuación o de ejecución de tareas matemáticas que van más allá de la ejecución mecánica de algoritmos. Tomado del análisis pruebas saber ICFES 2001.

el uso de las magnitudes y de las dimensiones de las unidades.

Para los procesos de medición se plantea estándares como:

Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados… seleccionar unidades para la medición… utilizar técnicas y herramientas para la medición… relacionar unidades para la medición de diferentes magnitudes.

De otro lado, identifica unos procesos asociados al cálculo con unidades de medida, a la estimación de medidas y a la resolución de problemas asociados con la medición de áreas, perímetros y volúmenes, entre otros, usando unidades convencionales o estandarizadas. Además de la selección de unidades apropiadas y la utilización de instrumentos de medida en situaciones problemáticas.

Con respecto al segundo eje (Transversalizar los demás pensamientos), la lectura de los estándares (en forma horizontal), permite reconocer algunos nexos entre estándares de los diferentes pensamientos en el mismo grado. Por ejemplo, al plantear otros ejes temáticos aparecen estándares asociados a situaciones de medición o al uso de magnitudes:

En el pensamiento numérico:

“Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes”.

“Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida”.

En el pensamiento variacional:

“Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias”.

1.3 TRATAMIENTO DE LAS MAGNITUDES Y SUS MEDIDAS EN EL AULA DE CLASE

1.3.1 Análisis de textos escolares

En buena medida, los textos escolares se constituyen en reflejo para identificar los conceptos que se ponen en juego en el aula de clase, y la forma como lo hacen los docentes. Esto se debe a que la mayoría de ellos confían demasiado en los textos, escriben poco sobre sus experiencias y/o desconocen los lineamientos conceptuales y didácticos del área. Es así como estas fuentes pueden llegar a indicar las formas de enseñanza y los procesos que los docentes utilizan para desarrollar los temas de una determinada asignatura. De ahí que en este diagnóstico sean adoptados como un referente valioso.

Los textos que se analizan a continuación, son de las editoriales con más presencia en las instituciones educativas del sector oficial[8], entre ellas la Institución Educativa La Paz del municipio de Envigado.

- Colección SUPERMAT, Editorial Voluntad, 2000, grado 7 y grado 8.
- Colección ALFA, Grupo Editorial Norma, Serie Matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional, grado 7 y grado 8.

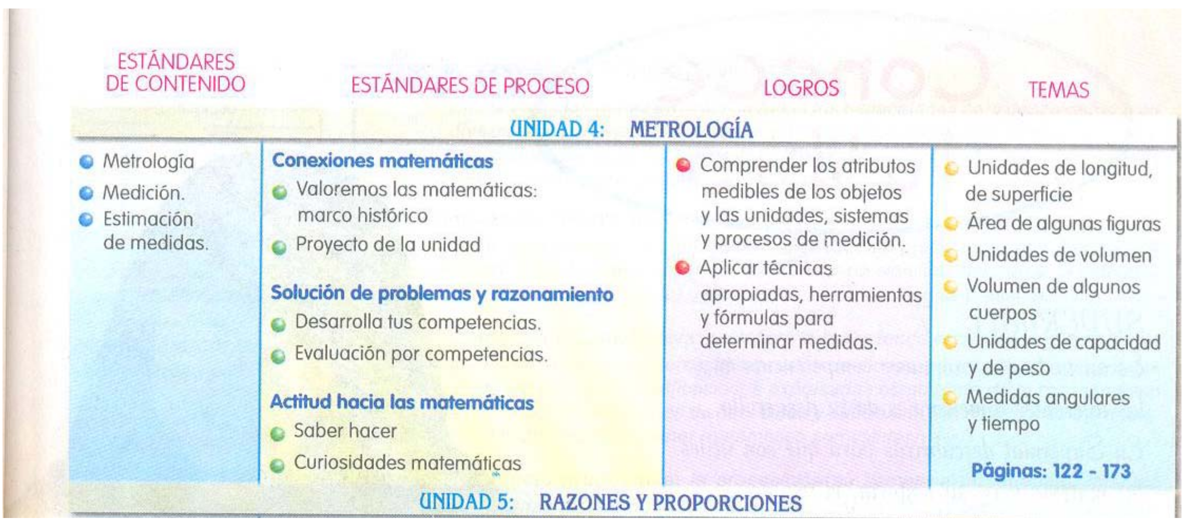
Para una interpretación de la forma como se reconstruyen los conceptos de la medida de las magnitudes en los textos guía, se parte de la revisión de su estructura general; se identifican cuáles son los ejes temáticos que se abordan en este campo; se revisa cómo se relacionan estos ejes con la

[8] Se escogieron los textos de estas editoriales, porque son los de mayor presencia en las instituciones educativas, con el propósito de identificar mediante ellos la estructura del currículo que se desarrolla en la escuela, y con el espíritu investigativo de aportar al desarrollo de las matemáticas escolares.

estructura propia de las matemáticas y cómo se adecuan didácticamente en consonancia con los lineamientos curriculares y los estándares.

- **Textos SUPERMAT :**

En primer lugar se analizan los textos de la colección SUPERMAT, de la Editorial Voluntad, para los grados séptimo y octavo, en los cuales se observa la siguiente estructura: En forma general para cada unidad aparece un cuadro que contiene "estándares de contenido", "estándares de proceso", "logros" y "temas", como se observa en el siguiente ejemplo:



ESTÁNDARES DE CONTENIDO	ESTÁNDARES DE PROCESO	LOGROS	TEMAS
UNIDAD 4: METROLOGÍA			
Metrología Medición. Estimación de medidas.	**Conexiones matemáticas** Valoremos las matemáticas: marco histórico Proyecto de la unidad **Solución de problemas y razonamiento** Desarrolla tus competencias. Evaluación por competencias. **Actitud hacia las matemáticas** Saber hacer Curiosidades matemáticas	Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición. Aplicar técnicas apropiadas, herramientas y fórmulas para determinar medidas.	Unidades de longitud, de superficie Área de algunas figuras Unidades de volumen Volumen de algunos cuerpos Unidades de capacidad y de peso Medidas angulares y tiempo **Páginas: 122 - 173**
UNIDAD 5: RAZONES Y PROPORCIONES			

Gráfico1: Estructura unidad metrología texto Supermat.

Puede observarse la utilización de términos propios de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas; pero éstos no corresponden con las conceptualizaciones oficiales, como se verá más adelante.

La unidad que denominan METROLOGÍA, para el grado séptimo, se desarrolla presentando un diagrama de flujo donde se muestran los conceptos fundamentales de la unidad, incluyendo, además de la longitud y la superficie, los conceptos relacionados con volumen, capacidad, peso, tiempo y ángulos:

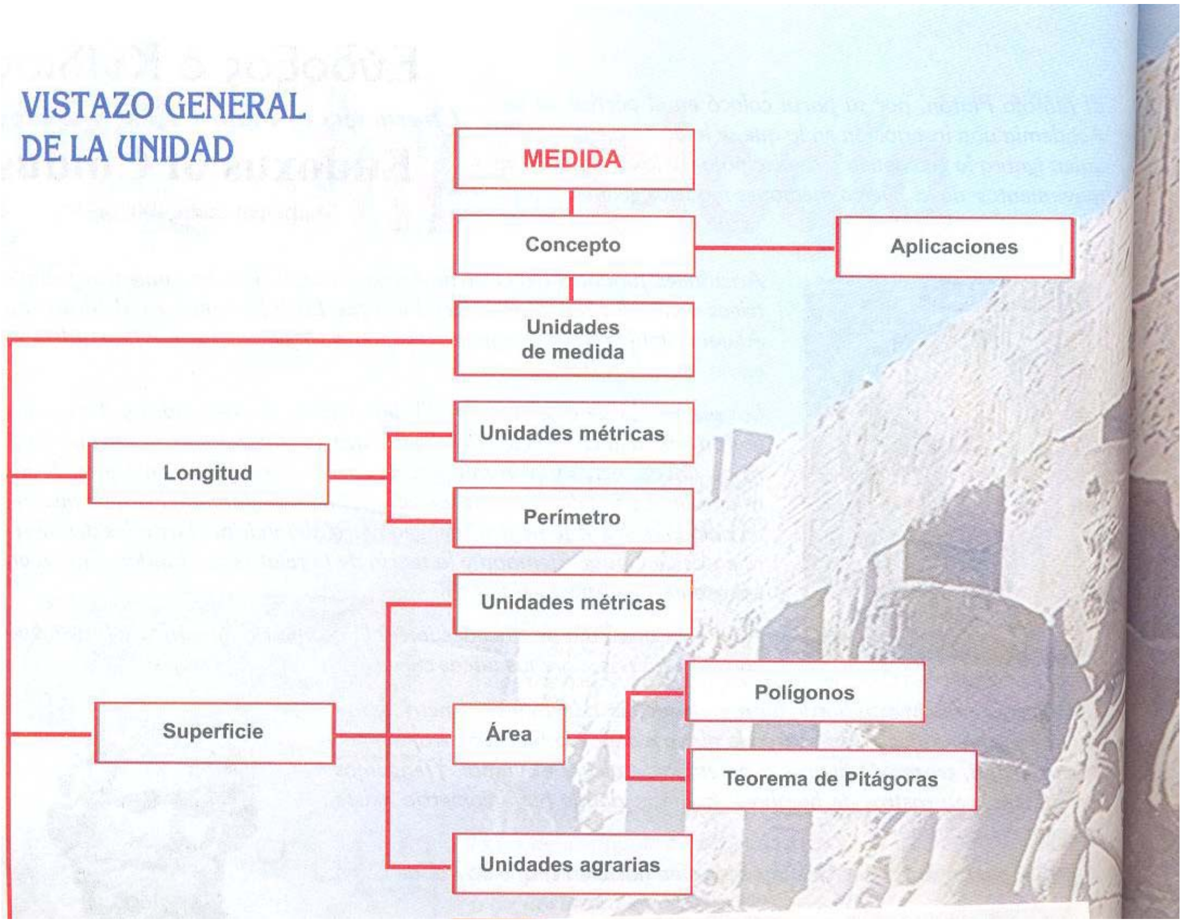


Gráfico2: Contenidos de la unidad de metrología texto Supermat.

A continuación se hace el desarrollo de cada uno de los conceptos, iniciando con una actividad de medida; pero utilizando directamente las unidades del sistema métrico decimal y la conversión de sus unidades de una manera aritmética. Ello se evidencia en la pregunta de la primera actividad: ¿cuántos mm hay en 10 cm?

El siguiente gráfico no hace claridad respecto a conceptos tan trascendentales como unidad de medida, patrón de medida y medición: allí da la impresión de que los conceptos de unidad de medida y patrón de medida se equivalen.

El metro

Medir es comparar con un patrón preestablecido. La medición es el complemento de una buena observación, ya que suministra datos cuantitativos acerca de un objeto o de un fenómeno.

En el Sistema Internacional (SI) de medidas, las unidades de longitud mayores que el metro son sus múltiplos y las unidades menores que él, son sus submúltiplos; veamos:

UNIDADES	NOMBRE	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA EN METROS
Múltiplos	Kilómetro	km	1 km = 1 000 m = 10^3 m
	Hectómetro	hm	1hm = 100 m = 10^2 m
	Decámetro	dam	dam = 10m = 10^1 m
UNIDAD BÁSICA	metro	m	1 m = 10^0 m
Submúltiplo	Decímetro	dm	1dm = 0,1 m = 10^{-1} m
	Centímetro	cm	1cm = 0,01 m = 10^{-2} m
	Milímetro	mm	1mm = 0,001 m = 10^{-3} m

Gráfico 3: Unidades de medida y concepto de medida texto Supermat.

Aunque define la actividad de medir como "comparar con un patrón preestablecido", las actividades que propone a continuación no lo reflejan al introducir una tabla en la que no se evidencia el patrón preestablecido ni permite la actividad de medir en términos de comparar:

Además de la situación descrita anteriormente, el esquema introduce al estudiante en la conversión aritmética de las unidades, dejando de lado el problema de la medición e introduciendo fórmulas que mecanizan el proceso y esconden el problema del tratamiento de las unidades de medida y sus relaciones de equivalencia.

Conversión de unidades de longitud

Para convertir una unidad de longitud en otra, se multiplica por 1, expresado como el cociente de las mismas longitudes pero con diferentes unidades. Lo importante radica en poder cancelar las unidades dejando sólo la del numerador.

Ejemplo	Solución
Convertir 5 km a m	Como 1 km equivale a 1 000 m entonces: $5\ \text{km} \times \frac{1\ 000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 5\ 000\ \text{m}$, la expresión $\frac{100\ m}{1\ \text{km}}$ se llama factor de conversión.
Ejemplo	**Solución**
Convertir 16 dam a dm	$16\ \text{dam} \times \frac{100\ \text{m}}{1\ \text{dam}} = 1\ 600\ \text{m}$
Ejemplo	**Solución**
Convertir 10 m a km	Se multiplica 10 m por el factor de conversión $\frac{1\ \text{km}}{1\ 000\ m}$: $10\ \text{m} \times \frac{1\ \text{km}}{1\ 000\ \text{m}} = \frac{1\ \text{km}}{10^2} = 0{,}01\ \text{km}$

Gráfico 4: Conversión de unidades de longitud texto Supermat.

Para el grado octavo, la colección SUPERMAT, la parte que se refiere al pensamiento métrico está inmersa en la unidad de “Áreas y aplicaciones”, y para su tratamiento sigue la misma línea del texto para grado séptimo: una presentación general de la unidad con los siguientes ejes conceptuales: área de triángulos, Teorema de Pitágoras, área de paralelogramos y trapecios, área de polígonos regulares, circunferencia y círculo.

Para el desarrollo de estos conceptos se induce al estudiante al tratamiento de las fórmulas respectivas para hallar el área de las figuras enunciadas anteriormente como se muestra en el siguiente ejercicio:

Ejemplo	Solución
La base de un paralelogramo mide el triple de su altura. Si la altura mide 8 dm, calcular el área del paralelogramo.	De acuerdo con el enunciado tenemos que h = 8 dm y $b = 3 \times h$, es decir $b = 3 \times$ 8 dm = 24 dm, por lo tanto Área ($\boxed{\quad}$) = 24 dm $\times$ 8 dm = 192 dm^2.

Gráfico 5: ejercicio de uso de la fórmula texto Supermat.

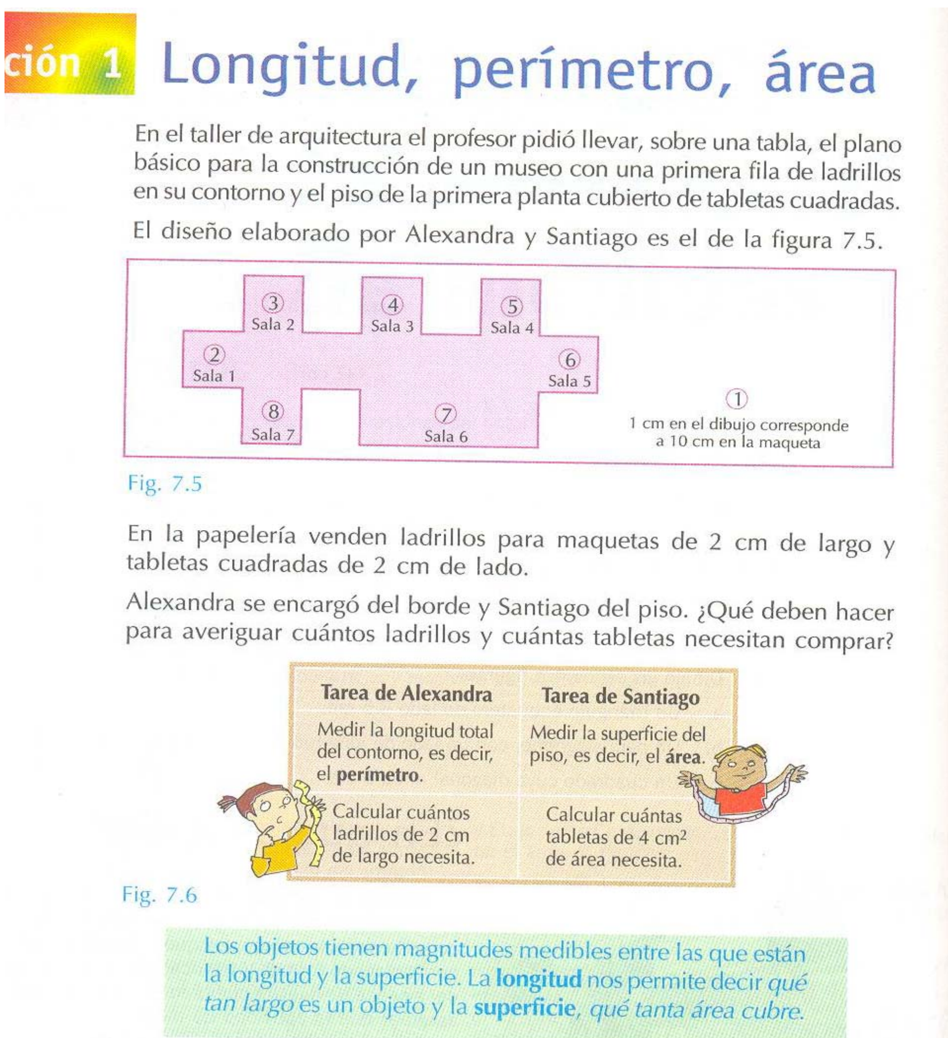
Como se observa en el ejercicio, su tratamiento es netamente algorítmico y reduce el problema de medir áreas al hecho de reconocer la base y la altura, y sustituir sus valores en la fórmula que permite hallar su resultado. No se evidencia el uso de las unidades de medida de superficie; tampoco se proponen actividades de medición como tal, y no se hace referencia a un sistema de unidades para medir superficies.

•**Textos ALFA :**

El texto de la colección ALFA 7, de Editorial Norma, titula la unidad de medición "SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS"; con ello, de entrada, se aleja de la idea de pensamiento métrico, al llamar la atención del estudiante sobre el reconocimiento del sistema internacional de medidas y no sobre el problema de la medición y sus unidades.

No hace una presentación de la estructura de los conceptos que hacen parte del pensamiento métrico, y a pesar de ser un texto del año 1999, en él no se encuentran referencias conceptuales a los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional en matemáticas de 1998. Es importante señalar que se inicia con una situación que induce a la medición (gráfico 6) y al uso de unidades; sin embargo, en la página siguiente del texto (gráfico 7), se pierde el sentido de la actividad, al no explorarse más acerca de la medición y se inicia en el tratamiento aritmético de la conversión de unidades, presentadas en forma de escala, reduciendo el problema de la medición y el tratamiento de las unidades de medida a la multiplicación o división por potencias de diez, ya sea que se trate de convertir unidades de orden mayor a menor o viceversa:

Situación:



ción 1 Longitud, perímetro, área

En el taller de arquitectura el profesor pidió llevar, sobre una tabla, el plano básico para la construcción de un museo con una primera fila de ladrillos en su contorno y el piso de la primera planta cubierto de tabletas cuadradas.

El diseño elaborado por Alexandra y Santiago es el de la figura 7.5.

Fig. 7.5

En la papelería venden ladrillos para maquetas de 2 cm de largo y tabletas cuadradas de 2 cm de lado.

Alexandra se encargó del borde y Santiago del piso. ¿Qué deben hacer para averiguar cuántos ladrillos y cuántas tabletas necesitan comprar?

Tarea de Alexandra	Tarea de Santiago
Medir la longitud total del contorno, es decir, el **perímetro**.	Medir la superficie del piso, es decir, el **área**.
Calcular cuántos ladrillos de 2 cm de largo necesita.	Calcular cuántas tabletas de 4 cm^2 de área necesita.

Fig. 7.6

Los objetos tienen magnitudes medibles entre las que están la longitud y la superficie. La **longitud** nos permite decir *qué tan largo* es un objeto y la **superficie**, *qué tanta área cubre.*

Gráfico 6: Situación de medición texto Alfa.

Proceso utilizado por el texto para la conversión de unidades y desarrollo de la situación anterior:

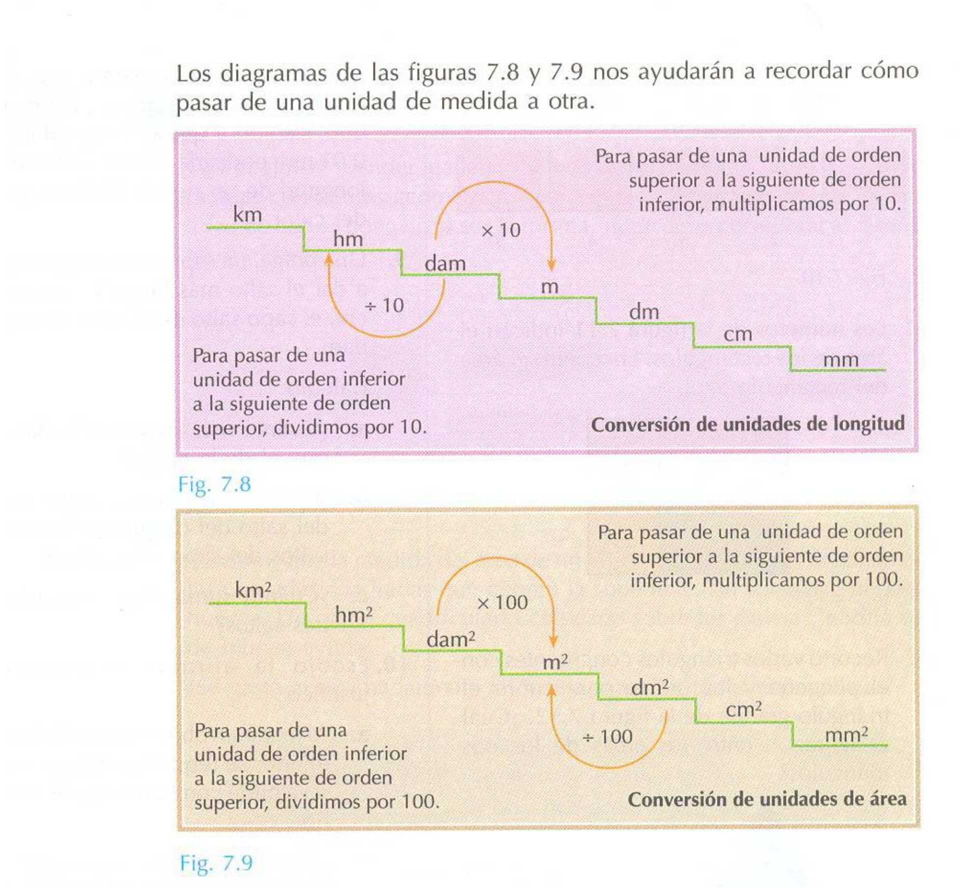


Gráfico 7: Conversión de unidades texto Alfa.

En la siguiente presentación se confunden las unidades con los patrones de medida; centímetro lineal y centímetro cuadrado con sus representaciones. Lo más conveniente para esta presentación (gráfico 8) hubiese sido enunciar que el segmento de la figura, representa un centímetro de longitud y el cuadrado representa un centímetro cuadrado, en vez de “podemos apreciar un centímetro lineal y centímetro cuadrado”; y además se debió acompañar de otras figuras que tuviesen igual área o longitud, o como afirma el MEN (1998)

> *“No puede saltarse de inmediato de un objeto o fenómeno que posea, o mejor, al que se le pueda atribuir esa instancia de la magnitud, a lo que es la unidad misma. Aun el lenguaje nos ayuda a percibir que no es lo mismo un cuadrado de un centímetro de lado, que un centímetro cuadrado como unidad de área. Hay una diferencia importante entre la unidad y el patrón de medida. Los libros que dicen que un centímetro cuadrado es un cuadrito de un centímetro de lado, estarían excluyendo que un disco también pueda tener un centímetro cuadrado de área” (p. 67).*

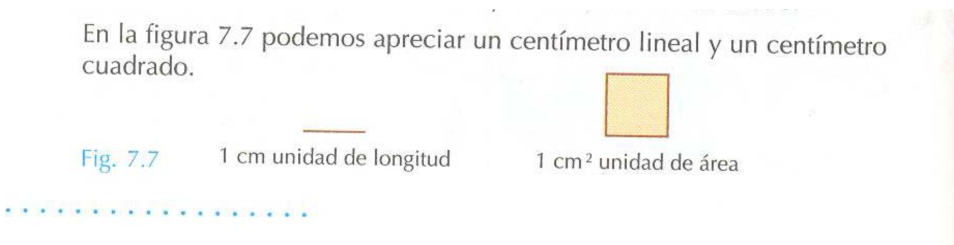

En la figura 7.7 podemos apreciar un centímetro lineal y un centímetro cuadrado.

Fig. 7.7 1 cm unidad de longitud 1 cm^2 unidad de área

Gráfico 8: Representación del centímetro lineal y el centímetro cuadrado texto Alfa.

El texto de la colección ALFA para grado octavo, en lo referente al pensamiento métrico, no tiene una asignación temática específica y sólo presenta una unidad referida a la geometría y al cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos y figuras: (gráfico 9)

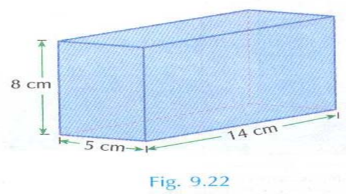
Ejemplo 1

¿Cuánto papel decorado se requiere para forrar la caja de la figura 9.22?

Observemos que la caja tiene forma de prisma rectangular recto y que sus bases son rectángulos. Calculemos el área lateral:

$A_L = p \cdot a$

$A_L = 2 \cdot (5\ cm + 14\ cm) \cdot 8\ cm$



$A_L = 38 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}$

$A_L = 304 \text{ cm}^2$

Ahora para hallar el área total, tenemos:

$A_T = A_L + 2B$

$A_T = 304 \text{ cm}^2 + 2\ (5 \text{ cm} \times 14 \text{ cm})$

$A_T = 304 \text{ cm}^2 + 140 \text{ cm}^2$

$A_T = 444 \text{ cm}^2$

Necesitaremos 444 cm^2 de papel decorado para forrar la caja.

Gráfico 9: Ejemplo de cálculo de áreas y volúmenes texto Alfa.

Para el grado noveno en ambas colecciones no aparece una unidad para el ***pensamiento métrico*** en forma específica, y ***éste*** tampoco se evidencia en el tratamiento escaso que se le da en la unidad de geometría a las áreas y volúmenes.

A manera de conclusión:

Desde la mirada a los textos como uno de los referentes del currículo desarrollado en el aula de clase y a manera de crítica con respecto a los conceptos fundamentales del pensamiento métrico se destaca lo siguiente:

- Concepto de las magnitudes tratadas: no hay un tratamiento previo de la cualidad como tal que permita percibirla; esto es, aislarla y distinguirla de las demás cualidades propias del objeto. situación que desde la perspectiva del adulto, para el niño es obvia y no parece esencial.
- Uso de las unidades: éstas tienen un papel poco significativo en los procesos desarrollados, y sólo parecen servir para hacer los cálculos de conversión, en los cuales se hace énfasis, olvidando el papel de la unidad como un tercer agente, intermediario, que permite comparar y cuantificar las magnitudes; olvidando que la unidad de medida y su representación, patrón, son cosas diferentes; y olvidando facilitar diferentes tipos de unidades

estándar y no estándar, que permiten iniciar al alumno en los conceptos de sistema de unidades y en las actividades de aritmetización.

- Actividades de medida: están ausentes, al no plantearse actividades que permitan comparar magnitudes; quizás como consecuencia del poco uso que se hace de las unidades de medida. Bajo esta perspectiva se priva a los alumnos de la actividad de medir, al dárseles en los ejercicios y problemas las medidas con su asignación numérica, lo cual los aleja de otras posibilidades relacionadas con el uso de instrumentos de medida.

- La estimación: no se hacen actividades relacionadas con ella, lo cual priva en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la posibilidad de percibir hasta qué punto los alumnos han avanzado en la comprensión de las magnitudes y sus medidas; dado que ella implica un dominio a un nivel más abstracto de los conceptos “unidad de medida” y “asignación numérica”.

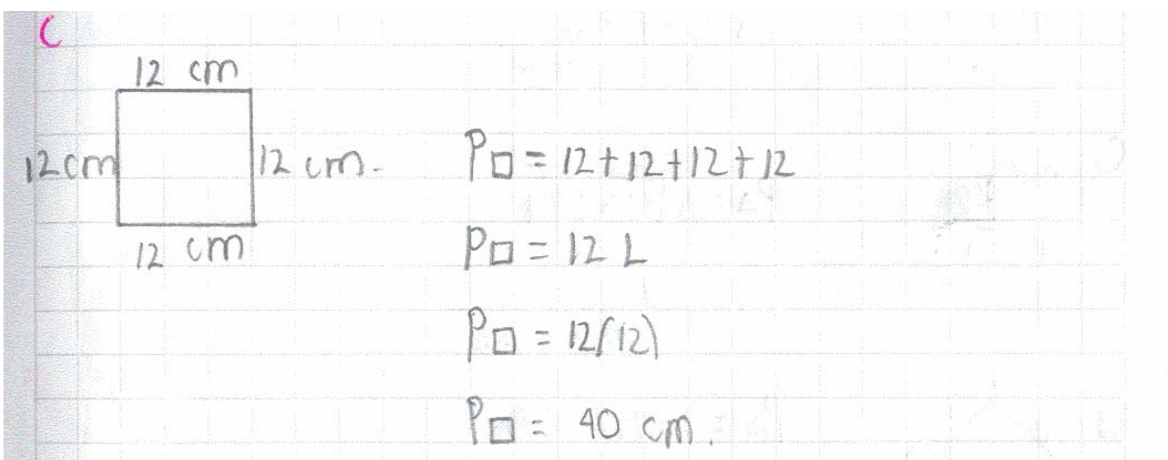
- Por último, como afirman Olmo Romero, Moreno Carretero y Gil Cuadra (1993), con respecto a la enseñanza del área y del volumen:

> *Deben realizarse un estudio integral de la cualidad y de su medida, que permita aislarla, comparar objetos respecto de ella, plantear la necesidad de una unidad de medida, conocer y usar las diferentes unidades, estimar la medida del volumen de un objeto, y finalmente, aplicar todos éstos conocimientos a situaciones problemáticas de la vida cotidiana. Ha sido frecuente encontrar textos en los que tras una muy breve introducción sobre la cualidad han estudiado las unidades de medida, olvidándose de los demás aspectos, lo que en nuestra opinión es un tratamiento empobrecido e incompleto que sólo puede conducir a un aprendizaje memorístico y nada útil. (p. 113).*

1.3.2 ¿Cómo se abordan las magnitudes y sus medidas en el aula de clase?

A continuación se presentan algunos ejemplos del tratamiento que los alumnos dan al problema de las magnitudes en el aula de clase, en donde se refleja la propuesta de los textos analizados anteriormente y el uso que de ellos hace el profesor como orientador del proceso. Allí se evidencia un trabajo sobre la aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas y el cálculo de su perímetro, alejado de contextos problemáticos y situaciones que involucren actividades de medición, o el uso de unidades para medir. En las evidencias analizadas no se encontró tratamiento para magnitudes como el peso y el tiempo, y muy escaso tratamiento para los volúmenes.

Los siguientes textos (texto 1 y texto2) corresponden a notas de clase de alumnos del grado sexto del año lectivo 2003, en La Institución Educativa La Paz del municipio de Envigado.

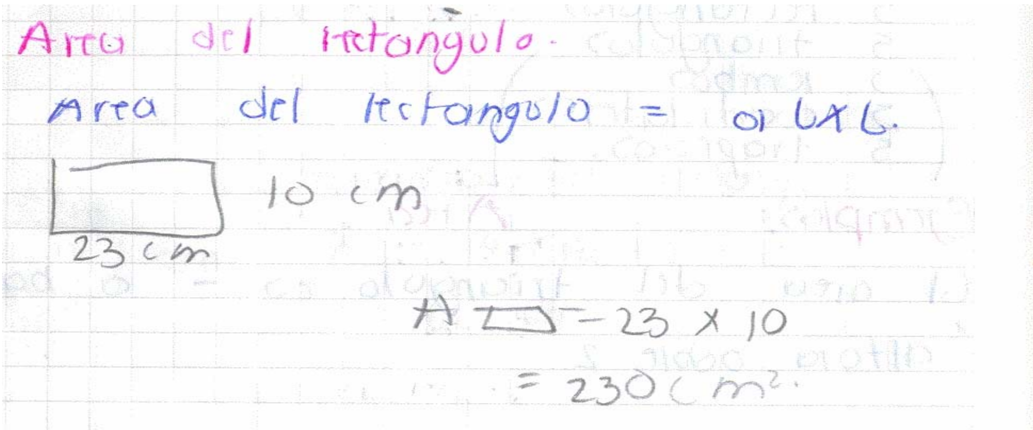


Texto 1: Cálculo de área y perímetro notas de clase.

Aunque allí no aparece la consigna de la actividad a realizar, se supone que el alumno debe calcular el perímetro de la figura dada. En el cálculo del perímetro de la figura, éste se entiende como la suma de la medida de los lados, consigna de la cual se parte, y que permite expresar el perímetro del cuadrado como 12 + 12 +12 +12, sin hacer referencia a unidad de medida alguna; la cual, según la presentación de la figura, se evidencia que es el centímetro. Dado que el alumno está pensando quizás en términos del resultado pedido, no reconoce en el dato suministrado al lado del cuadrado la expresión de una medida; ni comprende que el resultado buscado es también una medida. De allí que para su desarrollo haga equivaler expresiones como 12+12+12+12 = 12 L, en la cual se entiende que la L corresponde a la unidad de medida en la que se expresa el perímetro pedido, pero a su vez infiere que L = 12, de lo cual obtiene 12 (12) y que por último resuelve inesperadamente como 40cm; al parecer por la observación de algún ejercicio resuelto por su profesor y sin analizar la diferencia de los datos y de la pregunta.

De todo este proceso se infiere que el alumno no tiene claridad de los conceptos asociados al perímetro de la figura: medida de los lados de la figura, la unidad en que se expresa dicha medida, la suma de medidas y sus unidades. De allí que los resultados de la actividad que aparecen al frente de la figura no dan cuenta ni del resultado esperado ni de una interpretación adecuada de los conceptos que se quiere presentar.

La siguiente actividad (texto 2) evidencia el tratamiento vía aritmética del área de figuras planas (rectángulo), en donde se le da al alumno una fórmula para que sustituya los valores y encuentre el área de la figura, simplemente efectuando las operaciones indicadas, que resultan como consecuencia de ello. Allí se admiten errores en el tratamiento de las unidades que aparecen en la solución: en la primera operación de multiplicar la base por la altura no se involucran las unidades; y, sin embargo, en el resultado se admiten las unidades cuadradas.



Texto2: Cálculo del área de un rectángulo notas de clase.

Puede evidenciarse así, el tratamiento aritmético que en la escuela se da a las magnitudes, sin tenerse en cuenta el planteamiento y la resolución de problemas, y mucho menos, procesos que reflejen la comprensión de las magnitudes y la medición, los procesos de conservación, de estimación; todos ellos tendientes al desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes. Se puede decir que el alumno se ve obligado a trabajar con símbolos que no tienen para él un significado, y que, por tanto, le queda como recurso aplicar normas o fórmulas que permitan alguna manipulación tendiente a una respuesta para satisfacer un pedido.

1.4 CONCLUSIÓN DE LA PRIMERA PARTE

Frente a los análisis anteriores pueden identificarse rupturas entre lo propuesto, lo desarrollado y el resultado en los temas relacionados con el pensamiento métrico:

Lo propuesto	***Lo desarrollado***	***El resultado***
La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes	No evidencia procesos tendientes a la comprensión de las magnitudes como tal; sino unos procesos numéricos mecánicos que no conducen al desarrollo del pensamiento métrico.	Baja conceptualización de diversas magnitudes (longitud, superficie, capacidad, peso…)
La apreciación del rango de las magnitudes.	Centrado en procesos relacionados con la aplicación de fórmulas.	Baja comprensión de la información contenida en tablas y escalas de medición
La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.	No se hace uso de las unidades en los procesos de cálculo con medidas; sólo se utilizan para la conversión de unidades de medida en el Sistema Métrico Decimal, el cual se asume como único.	El desempeño es significativamente bajo. Se tiende a confundir las unidades y los patrones.
La diferencia entre la unidad y el patrón de medida.	Se tiende a confundir la unidad y el patrón de medida. Es decir, no se asume la unidad como ese agente intermediario que permite cuantificar y comparar las magnitudes; ni el patrón como la representación de una de esas unidades, aceptada por una comunidad.	
La asignación numérica.	Se hace énfasis en la medida entera y en las relaciones enteras entre ellas. No se involucran procesos de medición que conlleven a fortalecer la asignación numérica adecuada.	Baja comprensión de diferentes sistemas de medida.
El papel del trasfondo social de	Procesos descontextualizados sin relación a situaciones	Poca transferencia de los conceptos aprendidos en el

la medición.	reales.	aula de clase a los contextos de la vida diaria del alumno.
Identificar relaciones entre diferentes unidades para medir magnitudes.	Aplicación de técnicas aritméticas para conversión de unidades.	Baja comprensión de los conceptos relaciones con las medidas, las unidades y los patrones de medida.
Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	No se evidencian actividades que desarrollen habilidades en el uso de instrumentos y aplicación de técnicas de medición.	Dificultad para resolver problemas relacionados con procesos de medición.

Tabla 6: Conclusiones primera parte.

Después de analizar los elementos que intervienen en el currículo propuesto para el desarrollo del pensamiento métrico, y las diferencias de éste con lo que realmente se está haciendo al respecto en las instituciones educativas y con los resultados alcanzados; se plantea un problema de investigación en este campo educativo de la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes y los sistemas de medición.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El desarrollo del pensamiento métrico en la educación básica exige de la comprensión de conceptos asociados a él, como la magnitud, la unidad de medida y los sistemas de medición; además del desarrollo de ciertas habilidades relacionadas con la capacidad para estimar, medir, calcular y solucionar problemas. Estos elementos, tanto conceptuales como del desarrollo de habilidades involucradas en el pensamiento métrico, son tenidas en cuenta en los programas oficiales. Sin embargo, los resultados en desempeños evaluados, en este campo, en los estudiantes de la educación básica, revelan una baja comprensión de dichos conceptos, y bajos niveles de competencia en las habilidades relacionadas con él. De allí que se haga necesario desarrollar una investigación tendiente a fundamentar las problemáticas descritas y a establecer estrategias para intervenirlas.
El interrogante se formula en los siguientes términos:

¿Qué elementos teóricos y metodológicos de carácter matemático y didáctico, en relación con el desarrollo del pensamiento métrico, contribuyen a la concepción de procesos de enseñanza y de aprendizaje coherentes con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de matemáticas vigentes en el país?

2.1 OBJETIVOS

2.1.1 Objetivo General

Identificar los elementos teóricos y metodológicos de carácter matemático y didáctico referentes a las magnitudes y sus medidas, que permitan generar procesos de enseñanza y aprendizaje coherentes con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos, en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa la Paz del municipio de Envigado.

2.1.2 Objetivos Específicos

- Identificar las rupturas epistemológicas que se generaron alrededor de la construcción de los conceptos relativos a la medida de las magnitudes y los contextos en los cuales se consolidaron éstos dentro de la estructura matemática.

- Reconocer la estructura curricular en la enseñanza de las magnitudes, y lo relativo a la medición, para aportar una forma menos aritmética de acercamiento a dichos conceptos.

- Identificar procesos de carácter didáctico y metodológico para la estimación y la medida de las magnitudes.

- Identificar y analizar la incidencia de la aplicación de técnicas no aritméticas en el desarrollo del pensamiento métrico.

2.2 HIPÓTESIS

H1 En la educación básica se deben propiciar diferentes técnicas no aritméticas (métricas), que partan de la medida de las magnitudes; las cuales facilitan la comprensión de los conceptos relativos a las magnitudes y a sus mediciones.

H2 Las situaciones de medición que involucran diferentes unidades de medida facilitan la comprensión de las magnitudes, sus mediciones y los sistemas de medidas.

H3 Desarrollar procesos de estimación con los estudiantes utilizando diferentes unidades facilita la comprensión de la unidad como tal y de la medida.

3. REFERENTE TEÓRICO

Los elementos teóricos que se han tomado como apoyo para el trabajo, se presentan bajo los tres aspectos siguientes: referente histórico-epistemológico; teoría de las magnitudes y sus medidas; y referente didáctico. Este último referente se integra en el capítulo de la experimentación, porque allí resulta más ilustrativo.

3.1 REFERENTE HISTORICO – EPISTEMOLOGICO

Se hace necesario dar una mirada a la historia de las matemáticas para identificar allí las concepciones y contextos que permitieron la construcción de conceptos matemáticos, o por el contrario impidieron su desarrollo, convirtiéndose en obstáculos epistemológicos. Según Brousseau (1993):

> *Un obstáculo epistemológico está constituido por aquellos conocimientos que deben su solidez al hecho de funcionar bien bajo ciertos dominios de la actividad, pero que se muestran insuficientes y conducen a contradicciones cuando se los aplica con otros contextos.*

De allí que se haga importante en el contexto del aprendizaje de los conceptos matemáticos, identificar conocimientos que funcionan bajo ciertas condiciones, y que parecieran suficientes para explicar los fenómenos a ellos asociados, pero que cuando son transferidos a otros contextos no funcionan o conducen a contradicciones y que no obedecen sólo a la complejidad del concepto, como agrega al respecto Bachellar (1993):

> *No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar*

a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (p15).

Bajo esta perspectiva, se hace una mirada al desarrollo histórico del concepto de magnitud y de sus medidas, para identificar rupturas, avances y retrocesos; no sólo con respecto al concepto de magnitud, sino con relación a otros conceptos como los de espacio y número. Para ello, se centra la mirada en dos momentos de la historia: el primer momento lo ocupa la historia de la antigua Grecia, Babilonia y Egipto. El segundo momento, y en relación con las medidas, lo constituye el período comprendido entre 1790 – y 1840 en Francia, en donde se impone el sistema métrico decimal.

Se tomará, en primer lugar, como eje central, el desarrollo de la matemática griega; porque, además de recoger los elementos de la matemática babilónica y egipcia, aportó significativamente a la construcción de la teoría moderna de las matemáticas a partir del siglo XV.

Los griegos (siglos VII a III a.c.), fueron conocedores de las matemáticas egipcias y babilónicas, por sus prácticas comerciales y por el uso dado en las construcciones; pero llevados quizás por la idea de considerar que el conocimiento práctico no tenía el carácter científico, no dejaron grandes evidencias escritas de éste. Sin embargo, su mayor contribución está en la construcción teórica de muy buena parte de las matemáticas. Uno de estos ejemplos está en la teoría de las magnitudes, que les permitió profundizar en muchos otros temas de las matemáticas y de las ciencias; a la vez que superar serios problemas originados quizás por el descubrimiento de los inconmensurables, de un lado; además de la imposibilidad para aceptar el infinito actual. Tal vez como consecuencia de la dicotomía continuo-discreto, que estuvo presente a lo largo de la historia de las matemáticas, y sólo fue superada hacia finales del siglo XV con los trabajos de Simón Stevin.

Una de las preocupaciones del pensamiento griego de la época fue tratar de encontrar los universales o fundamentos constitutivos de todas las cosas, su naturaleza última ($\alpha\rho\gamma\eta$), y en esta búsqueda varias escuelas sentaron su posición. Una de las escuelas que más influyó en el desarrollo del pensamiento matemático griego fue la escuela pitagórica (500 a. c.), cuyo lema era: “todo es número”. Afirma De la Torre (2003) que los números, para los pitagóricos, son los componentes últimos de todas las cosas materiales y la naturaleza misma:

> *En la concepción pitagórica, la línea se compone de un número entero de unidades. Muy pronto, sin embargo, descubrieron que no importa cuán pequeña sea escogida una unidad para medir el lado de un cuadrado, la diagonal no puede expresarse como un agregado de las mismas unidades que componen el lado.*
>
> *Quedaba claro que es imposible encontrar un segmento tan pequeño que podamos tomarlo como unidad, de modo que el lado del cuadrado y la diagonal del mismo puedan expresarse ambos como múltiplos finitos de aquella. Este descubrimiento puso en entredicho la identificación establecida por los pitagóricos entre el reino de lo discreto, que es el número y el reino de la magnitud continua, que es la geometría (p.28).*

Sin embargo el intento por unificar el reino de las magnitudes continuas y el reino de los números discretos permaneció a lo largo de la historia griega en la escuela del atomismo matemático creada por Leucipo y Demócrito “como una secuela de su doctrina materialista del atomismo físico” (De la Torre.

2003. P.28), según la cual todas las cosas están constituidas por partículas invisibles e indivisibles que por un continuo movimiento de agregados y disgregados dan origen a todas las cosas.

Boyer (1949), al referirse al concepto de número en los pitagóricos afirma que:

> *Por el término número los Pitagóricos no entendieron la abstracción a la cual nosotros damos este nombre; con él designaron una progresión de múltiples que comienza con la unidad y una regresión que termina en ella. Los enteros positivos fueron para ellos los números fundamentalmente (p.20).*

O como afirma Heath (1991, p.70)"un número -para los pitagóricos- es una progresión de multitudes comenzando en una unidad y una regresión que terminaba en esta". Es decir, que un número era discreto, y la unidad que lo constituía era indivisible y constituía la esencia del universo. La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos griegos a pensar un continuo físico, sugerido por las magnitudes geométricas; siendo Eudoxo quien introduce la idea de magnitud continua; no se trataba de un número, sino de entidades geométricas (longitud, área, volumen, etc.), las cuales eran continuas, contrariamente a los números, que eran discretos.

Otro de los aportes de los griegos, fue la definición nueva y universalmente aceptada de la igualdad de dos razones, dada por Eudoxo. Gracias al uso previo que habían dado los griegos al concepto de proporción, se consolidará en un extenso proceso la teoría de las magnitudes. Ellos tenían la idea de que cuatro cantidades están en proporción $c:d = a:b$ si las dos razones $a:b$ y $c:d$ tienen la misma resta mutuamente; es decir, la menor en cada una de las razones cabe en la mayor el mismo número entero de veces. El resto en cada caso cabe en la menor el mismo número entero de veces y el nuevo resto cabe en el anterior, el mismo número entero de veces y así sucesivamente (sustracciones sucesivas). Esta definición se hace casi imposible de utilizar, ya que implica, en la mayoría de las veces, procesos indefinidos; sin embargo el sentido de razón presentado en el libro V de los Elementos de Euclídes, calificado por Boyer (1994, p.127) como "un éxito brillante", clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; un segmento, por ejemplo no puede compararse en términos de razón con un área, y un área no puede compararse con un volumen. La proposición 4 del libro V, tomada de Heath (1993) dice:

> *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (p.142).*

Este tratamiento teórico de las magnitudes y de sus medidas permitió un refinamiento de la teoría de las proporciones, en primer lugar, y de las razones, en segundo lugar. Además permitió superar la crisis generada por el descubrimiento de los irracionales, dejando las bases para la teoría moderna de los números reales, como afirma De la Torre (1993):

> *La noción de cortadura de Dedekind tiene su fuente en la definición del libro V de los elementos. En caso de que existan enteros m y n para los cuales se tengan igualdades $mc = nd$ y $ma = nb$, entonces $c : d = a : b$, razón que es expresable de manera precisa mediante el número racional $\frac{m}{n}$. En esta situación las magnitudes a y b son conmensurables, así como las magnitudes c y d. Puede*

> *suceder sin embargo que no existen enteros m y n que satisfagan la igualdad. En tal caso, las magnitudes a y b son inconmensurables y su razón no es expresable con tal precisión mediante ningún número racional (p. 61).*

Dice el profesor Alberto Campos (1994), al exponer la *teoría de los reales* según Bourbaki (1969, p. 375) que:

> *Se puede identificar el conjunto de las razones de enteros con una parte del conjunto de las razones de magnitudes, es a saber, con el conjunto de las razones racionales (razones de magnitudes conmensurables); sin embargo, por el hecho de que estas razones, en tanto que operadores sobre los naturales, son (en general) definidos solamente sobre una parte del conjunto de los naturales, era necesario desarrollar la teoría separadamente (libro VII de Euclides).*
>
> *El dominio de operadores construido de esta manera era entonces para los matemáticos griegos el equivalente de lo que es para nosotros el conjunto de los números reales; por otra parte, es claro que con la adición de magnitudes y la multiplicación de razones de magnitudes, poseían el equivalente de lo que es para nosotros el cuerpo de los números reales, aunque de una forma mucho menos manejable (p, 127).*

La dificultad para entender lo continuo (magnitud) – discreto (número), se mantuvo hasta finales del siglo XV, cuando los trabajos de Simon Stevin, (1548 – 1620) acerca del concepto de número, facilitan algunas aclaraciones sobre las contrariedades surgidas con los griegos por conceptos como número, unidad aritmética y unidad geométrica.

Según Kline (1992, p.191), Stevin parte de dos definiciones: “La aritmética es la ciencia de los números” y “número es todo aquello con lo que se revela la cantidad de una cosa: la unidad es un número”. Y luego argumenta que la parte es del mismo material del todo, la unidad es una parte de una multitud de unidades, consecuentemente, la parte es del mismo material que la multitud de unidades, pero el material de una multitud de unidades es número; por lo tanto el material de la unidad y la misma unidad es número. La premisa decisiva es aquella en la cual el material de una multitud de unidades es número. Stevin acepta la definición clásica de número como una "multitud consistente de unidades", pero él entiende esta determinación conceptual por sí misma como el "material" de la cosa a ser definida, en el mismo sentido en el que se habla del material (materia) del agua o del pan.

Otro gran momento para el proceso de consolidación, no de las magnitudes y sus medidas en el contexto de la matemática como tal, sino del establecimiento de las magnitudes y sus medidas desde el contexto social; pero que encierra parte de la problemática de entender la medida y su relación con el número, se enmarca en el período comprendido entre los años de 1790 y 1840 en Francia. En este período, los feudos tienen el derecho de imponer su propia medida, bajo unas reglas poco claras y un tanto arbitrarias; se tenía, así, dos medidas: una para comprar y otra para vender, una para cobrar la renta y otra para pagarla, dice Kula (1980):

> *El parlamento de París en 1710, decide que la renta de las tierras debe seguir siendo pagada en la medida por la que fue creada, y por tal motivo debe haber dos medidas, una para el deudor y otra para el acreedor (p.303).*

Páginas atrás lo describe con más detalle:

> *De los albores de la revolución francesa nos llega una descripción del despavorido Young. A. (Voyages en France, en 1787)…la interminable complicación de las medidas francesas sobrepasa cualquier imaginación. Se diferencian no sólo de provincia en provincia, sino de cantón en cantón y así de ciudad en ciudad: estas diferencias, que llevan a la*

> *desesperación, se manifiestan tanto en la nomenclatura como en los tamaños; tanto en la superficie como en el volumen. A ello se añade la general ignorancia de los campesinos”… (p 89).*

Con el clamor de la revolución francesa de 1789, se escuchan voces que piden “que no haya más que una sola ley, una sola medida y una sola pesa”, las cuales sólo encontraron eco en el decreto imperial de 1812 que impuso como obligatorio para toda Francia el sistema métrico decimal, que nadie se atrevía a cuestionar; pues era el fruto de la labor de los academicistas, pero que nadie entendía; aumentando el caos ya descrito, pues las antiguas medidas eran mantenidas como recurso ante la incomprensión de las nuevas.

Agrega Kula (1980):

> *... por tanto, se trató de ilustrar a los ciudadanos pobres por todos los medios posibles. En los lugares más populosos de París el metro estaba expuesto públicamente a fin de solucionar las discrepancias. Las escuelas debían enseñar el sistema métrico (nota de Carcasota, del 11 de sept. De 1792). Se fomentaba la redacción de manuales sobre el tema que eran luego revisados. En París y en otras ciudades se organizaban cursos públicos de enseñanza del sistema métrico*
>
> *Sin embargo, al parecer no eran grandes los resultados de tal enseñanza, ya que ésta no era fácil. La mayor dificultad estribaba en el sistema decimal y en la nomenclatura.*
>
> *Tal vez nos extrañe en primer término la dificultad presentada por el sistema decimal; sin embargo, no debiera ser así. Ese sistema tantas veces elogiado y glorificado, inclusive por los creadores de la reforma, no es tan sencillo en su manejo como nos podría parecer; y principalmente para la gente que, aunque sabe a la perfección dividir por dos y el resultado nuevamente por dos o multiplicar por dos y*

> *nuevamente por dos, se halla en la imposibilidad de aprender las fracciones decimales y el manejo de la coma (P.409).*
>
> *La nomenclatura no sólo era difícil para la población por romper con las viejas tradiciones o por ser muy nueva. Era engorrosa por estar compuesta de elementos ajenos al idioma francés y susceptible de provocar equívocos. La pequeña diferencia fonética entre deci y deca significaba diferencias de magnitudes nada pequeñas. Los prefijos centi, hecto, Kilo, se enredaban en las mentes humanas. Los creadores del sistema estaban inmensamente orgullosos de estas denominaciones (comisión de medidas y pesas creada en 1794.), llamadas metódicas. El método no se identificaba con la sencillez. Los sistemas tradicionales de medición solían ser funcionales. Significaban una cierta realidad social, relacionada con el hombre, con su trabajo y con los frutos de ese trabajo. (p. 410).*

Dos momentos diferentes y bajo dos conceptos diferentes con relación a las magnitudes y sus medidas dan cuenta de la dificultad natural del proceso para articular el reino de las magnitudes y sus medidas con lo numérico; es decir, el proceso de "capturar lo continuo con lo discreto" (MEN, 1998).

3.2 TEORÍA DE LAS MAGNITUDES Y SUS MEDIDAS

Antes de plantear una estrategia metodológica que favorezca el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes de la básica, es necesario revisar algunos elementos conceptuales para reconocer, no sólo la estructura matemática sino también los aspectos cognitivos que están involucrados en su comprensión y desarrollo. Se revisan por lo tanto, los conceptos de magnitud, medida y sistemas de unidades de medidas.

3.2.1 Magnitud

Regularmente designamos como una magnitud a una cualidad o atributo de una serie de objetos que puede variar en forma cuantitativa y continua o en forma cuantitativa y discreta; en el primer caso, como más adelante se detallará, se habla de magnitudes continuas como son la longitud, el peso, el tiempo, etc. En el segundo caso, se habla de magnitudes discretas como son las colecciones de objetos o personas.

Algebraicamente se define la magnitud como un *semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades de magnitud.*

Así, que dado un conjunto M, no vacío, se constituye en una magnitud, si en él puede definirse una relación de equivalencia (=) y una operación (+), con las siguientes condiciones:

Para la relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $\forall a \in M \to a = a$
- Es simétrica: $\forall a, b, \in M \to a = b \Rightarrow b = a$
- Es transitiva: $\forall a, b, c \in M \to a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Para la operación interna (+): se definen las operaciones con respecto a la relación de equivalencia:

- Clausurativa : $\forall a, b, \in M \Rightarrow a + b \in M$
- Uniforme: $\forall a, b, \in M \wedge \forall c, d \in M \to (a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow (a + c = b + d)$

Nota: Esta propiedad da cuenta de la compatibilidad de la suma con respecto a la relación de equivalencia.
Propiedades de la operación:

- Asociativa: $\forall a,b,c \in M \rightarrow \left(a+b\right)+c = a+(b+c)$
- Conmutativa: $\forall a,b,\in M \rightarrow a+b = b+a$

- Modulativa: $\exists 0 \in M \,/\, \forall a \in M \rightarrow a+0 = 0+a = a$

Si en el conjunto M se ha definido la relación de equivalencia y la operación (+) con las condiciones para cada una, decimos, que “los elementos de M definen una magnitud” (Luengo, 1990, p.48) entendiendo ésta, por la cualidad común que hace que los elementos $a,b,c,$ de M sean igualables. Téngase en cuenta que los elementos de M no son los objetos en sí, sino clases de equivalencia de M. Quedando definida la magnitud (M,+) como un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

3.2.2 Cantidad de magnitud

Con el término “cantidad de magnitud” nos referimos a aquello que tienen en común los elementos iguales entre sí. Todos los objetos que tienen la misma cantidad de magnitud forman una clase de equivalencia.

Las cantidades de magnitud se pueden comparar entre sí, significa que en los elementos de M puede definirse una relación de orden; esto es, dados los elementos de M, al compararlos bajo la relación $\leq$, puede suceder que, sean iguales, mayores o menores, así $\forall a,b,\in M \rightarrow a \leq b \vee b < a$, y con las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $\forall a, \in M \to a \leq a$
- Antisimétrica: $\forall a, b \in M \to (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow (a = b)$
- Transitiva: $\forall a, b, c \in M \to (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$

Quedan definidas las magnitudes desde el punto de vista algebraico como "un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado".

También podemos definir una operación externa de "producto de cantidad de magnitud por un número real positivo" (.), así:
Sea $r, s \in R^{+}, \forall e \in M \to \exists a \in M / r \cdot e = a$

Esta operación externa cumple:

$\forall r, s \in R^{+}$, $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$ Es distributiva la suma de reales con respecto al producto por la cantidad de magnitud.
$\forall r, s \in R^{+}$, $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$ También es distributivo el producto de real por la suma de cantidades de magnitud.
$\forall r, s \in R^{+}$, $r \cdot (s \cdot a) = (r \cdot s) \cdot a$, es decir, asociativa.

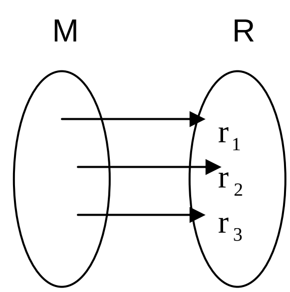
Ahora, como $a \leq b$ y $r \cdot a \leq r \cdot b$ muestra la compatibilidad del producto con el orden (<); de lo cual se desprende que el conjunto (M , + , <) con la operación producto de cantidad de magnitud por un número r es un semimódulo ordenado sobre el semianillo (R^{+}, +, .).

3.2.3 La medida de las magnitudes y la función medida.

Con los conceptos anteriores y dado que $r, s \in R^{+}, \forall e \in M \rightarrow \exists a \in M / r \cdot e = a$ se puede definir la "unidad de medida e" como ese elemento que pertenece a M, tal que multiplicado por el $r \in R^{+}$ adecuado, puede expresar cualquier cantidad de magnitud, o de otra forma, "cualquier cantidad de magnitud puede ser expresada como el producto de un $r \in R^{+}$ por una cantidad fija llamada unidad de medida " (Luengo,1990, p.58).

Algebraicamente se dice que si dada una cantidad de magnitud "$a \in M$" cualquiera y definida una unidad "$e \in M$"; "r" es la medida de "a" con respecto a la unidad e y escribimos $m_e(a) = r$.

La medida también se puede definir como una función de (M,+, <) en (R,+, *) tal que si "a, b, c … son los elementos de M y r_1, r_2, r_3... los elementos de R^{+}, y dado un e apropiado que pertenezca también a M (y que puede ser igual a a, b, c), podemos asignar a cualquier elemento de M un $r \in R$, que definimos como la medida de a, b, c con respecto a e, $m_e(a)$



Esta función medida así definida asocia a cada elemento de M un único real "r" y cada "r" $\in$ R es la medida de un único ", a, b, c"… $\in$ M.

Además la función $m_e(c)$ cumple:

1. $m_e(a) \geq 0, \forall a \in M$
2. $m_e(e) = 1$
3. $m_e(a+b) = m_e(a) +$ $m_e(b)$

O sea que la medida de la suma de cantidades de magnitud con respecto a la unidad "e" es igual a la suma de la medida de cada una de las cantidades de magnitud con respecto a la unidad "e".

4. Si multiplicamos una cantidad de medida "c" por un número "r" la medida queda multiplicada por ese número: $m_e(r \cdot c) = r \cdot m_e(c)$.

5. La función $m_e..a,b,c$ es compatible con la relación de orden ($\leq$).

Algunas consecuencias de estas propiedades de la función medida son:

- La posibilidad de determinar en las medidas múltiplos o divisores de ellas (propiedad 2).
- Ordenar cantidades de magnitud, ordenando los números que representan sus medidas (propiedad 3).
- Como (M,+, $\leq$) es isomorfo con (R, +,*), entonces podemos averiguar la suma de dos cantidades de magnitud sólo sumando los números.

Con estas consecuencias podemos, entonces, identificar nuevas propiedades en M:

- La divisibilidad: para cada "a" que pertenece a M, existe un b que pertenece a M, tal que es posible hallar un "n" que pertenece a N tal que

$a = n \cdot b$, que puede expresarse como $b + b + b...$ con n sumandos. Luego, $a/n = b$, y a al ser dividido por n es igual a b. Por tanto, M admite la multiplicación y división no sólo por n, sino también por números racionales.

- Postulado de Arquímedes: para toda a, b, que pertenece a M, existe un n, número natural, tal que $n \cdot a < b$: $\forall a, b \in M, \exists n \in N / n \cdot a < b$

3.2.4 Tipos de magnitudes

Si bien las magnitudes han sido definidas desde su estructura algebraica, éstas tienen un carácter mucho más intuitivo en las matemáticas escolares; ya que es a partir de la manipulación de objetos como se pueden determinar aquellas cualidades o atributos medibles. Es por ello que la tipología de las magnitudes, sus medidas, unidades de medida y sus sistemas de medición, para este caso, se hace atendiendo más a ese carácter intuitivo, y desde el punto de vista físico, más que desde el punto de vista algebraico.

- **Magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas:**

Magnitudes fundamentales son aquellas que se definen por sí mismas en el proceso de medición; usando sus respectivas unidades de medida son también llamadas indefinidas o primarias. Se han definido en el Sistema Internacional (SI) cinco magnitudes fundamentales con su respectiva unidad básica de medida y su respectivo símbolo:

Magnitudes fundamentales (S.I. Sistema Internacional, tabla7)

MAGNITUD	NOMBRE DE LA UNIDA BASICA	SIMBOLO
Longitud.	**Metro**	**M**
Masa.	**Kilogramo**	**Kg**
Tiempo.	**Segundo**	**S**
Intensidad de corriente eléctrica	**Amperio**	**A**
Temperatura termodinámica	**Kelvin**	**K**
Cantidad de sustancia.	**Mol**	**Mol**
Intensidad luminosa	**Candela**	**Cd**

Tabla 7: Magnitudes fundamentales del S.I.

Las magnitudes que se definen a partir de otras (fundamentales), o que no son medibles directamente, se les denominan **derivadas**, como es el caso de la velocidad, que se define a partir de la longitud o distancia y el tiempo. En el sistema internacional se definen otras magnitudes denominadas complementarias, como son: el ángulo plano cuya unidad es el radián (rad.) y el ángulo sólido cuya unidad básica es el estereorradián (sr.).

- **Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales: "**Toda magnitud definida en un conjunto M se llama escalar si los elementos del conjunto pueden ordenarse linealmente" (Luengo, 29, p, 53), o como ya se dijo que una magnitud que tenga estructura de semimódulo ordenado, con un orden compatible con su ley de composición, sobre el semianillo, (R, +.), se denomina magnitud escalar. Si el semianillo es el de los números reales positivos, diremos que la **magnitud es escalar continua**; si el semianillo es el de los números naturales, diremos que es una **magnitud escalar discreta**. En forma intuitiva se denominan magnitudes escalares, aquellas cuyas cantidades de magnitud quedan completamente expresadas con un número y una unidad.

Al definir la operación "diferencia de magnitudes" $\forall a,b \in M, \exists d \in M / d = b - a \Leftrightarrow d + a = b$, se hace necesario distinguir las **magnitudes escalares absolutas** de las **magnitudes escalares relativas**. Esto es: si la operación diferencia sólo es posible cuando b>a decimos que d es una magnitud absoluta; pero si admitimos siempre la posibilidad de la diferencia, decimos que "d" es una magnitud relativa. En este caso se pueden identificar la cantidades opuestas, cuya suma es el elemento neutro.

Las magnitudes vectoriales son aquellas que además de ser definidas como una magnitud en los términos anteriormente descritos, requieren, además del número y su unidad, su dirección y sentido.

- **Magnitudes extensivas e intensivas**: el carácter de magnitud extensiva o intensiva depende de si sus cantidades de magnitud se pueden sumar o no "con sentido"; es decir, dada una cantidad de magnitud ésta se puede agregar a otra cantidad de magnitud del mismo tipo obteniendo otra cantidad de magnitud del mismo tipo equivalente a la suma de las dos primeras. O de otra forma, dada una cantidad de magnitud "c" ésta se puede descomponer en la suma de otras cantidades de magnitud del mismo tipo. De lo anterior se desprende que debemos identificar en principio dos clases de magnitudes: las intensivas que son aquellas magnitudes en las que no se puede definir la suma con el sentido usual, por ejemplo, si tomamos un vaso de agua a 30ºC y otro vaso de agua a 40ºC, al juntarlos no obtendremos dos vasos de agua a 70º. Esto indica que la suma de temperaturas no se puede hacer con sentido; sin embargo la temperatura es una magnitud. Y las "magnitudes extensivas en las que sí es posible definir con sentido la suma" (Luengo, 1990, p. 52). Así dada una longitud "a" y otra "b" podré agregarlas y obtener una longitud "c".

Piaget define las magnitudes extensivas e intensivas en un contexto de relación parte – todo...Intensivo, donde sólo las partes pueden ser comparadas al todo que las engloba, lo extensivo, donde las partes pueden compararse directamente entre sí. (Piaget, 1971, p. 61).

3.2.5 Unidades y Patrones de medida

Si a una clase de equivalencia cualquiera, "e", de M, se le asigna el real "1" mediante la función medida $M \longrightarrow R$, definida anteriormente, ésta puede tomarse como unidad de medida (e), y cualquier elemento representativo de la clase se puede constituir en el patrón de medida.

Se pueden identificar unidades de medida convencionales y estandarizadas; las primeras hacen referencia a si éstas son aceptadas y reconocidas como tal por un grupo social o comunidad, y, a su vez, son no convencionales las que no son reconocidas y aceptadas. Las unidades estandarizadas son aquellas que son elaboradas de acuerdo con un modelo o patrón.

La medición estandarizada se desarrolló con fines prácticos, debido a las necesidades cotidianas del hombre en la construcción y el comercio, básicamente. En los primeros tiempos el cuerpo humano fue la medida lineal más utilizada, aunque fue posterior a la idea de medir longitudes según la duración de un día de viaje. Para las mediciones de la antigüedad todo el cuerpo servía como referencia directa: la longitud de un pie, el ancho de un dedo o de la mano, la longitud del antebrazo; esta última fue la más utilizada por los egipcios y los babilonios y correspondía a la longitud del antebrazo de un hombre desde el codo hasta la punta del dedo índice extendido. “Este tipo de concepción aceptada por la cual cuantificamos cualquier cosa física, se denomina **unidad**”. (Hecht, 1999, p. 24).

Al darse cuenta los hombres de que los antebrazos eran diferentes, se dieron a la tarea de desarrollar unidades físicas invariables que sirvieran como referencia primaria o **patrón**; así que se creó el codo de granito negro como patrón para que se compararan y calibraran todas las varas de codo (en Egipto).

Sin embargo, los griegos y los romanos utilizaban más el pie; aunque su longitud también fuera muy variable. Un **passu** equivalía a cinco pies romanos y una **milla británica** a mil passus. Una **yarda** o **doble codo** se consideraba como la distancia desde la nariz hasta la punta del dedo índice extendido.

Una **pértica** se formaba colocando dieciséis pies izquierdos uno tras otro; y la pulgada resultó de la división del pie en doce partes iguales, cada una de las cuales era una **pulgada**. Esto debido a la gran utilización que los romanos hacían del número doce, por su facilidad para dividirlo en dos, tres, cuatro, seis.

En el Siglo XVI, cuando Europa Medieval cae en un letargo intelectual, se regresa a las medidas primitivas del cuerpo, y en 1790 la Asamblea Nacional en Francia, plantea la necesidad de un sistema estandarizado de unidades; así que la academia de ciencias adoptó un método decimal para los pesos , cuyas cantidades eran subdivididas en 1000, 100 o 10 partes iguales. Después de varios meses el estudio de la academia dio una nueva unidad de longitud, “el metre (o metro)”, que inicialmente era la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. La primera **Conferencia General de Pesas y Medidas** (París 1889) igualó dicha longitud a la distancia entre dos trazos marcados sobre un prototipo de platino iridiado, que se conserva en Sérves. De 1960 a 1983, (17ª CGPM) se definió el metro a partir de una de las radiaciones emitidas por una lámpara de descarga llena del Isótopo 86 del kriptón. En 1983, se modificó la definición oficial del metro, gracias a la invención del láser y tomando como base la velocidad de la luz: el metro se define como la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío, durante 1/299.792.458 segundos. (Incertidumbre 1 nanómetro).

Similarmente el concepto de peso, se intuyó desde que los humanos de la prehistoria luchaban para levantar y arrastrar sus cargas cotidianas. Y este concepto estaba asociado al concepto de volumen. La unidad babilónica de capacidad, o medida de líquidos era el **Ka,** el volumen de un cubo de un palmo de altura, cuando se llenaba de agua se convertía en una unidad de peso, la gran **mina,** sesenta siclos equivalían a una mina, 60 minas a un talento (palabras familiares en un sentido bíblico, Génesis 23,16). El sistema romano de pesas y medidas invadió a Europa, y su **libra** aún sobrevive con su abreviatura **lb**.

El gramo (originalmente unidad de peso) se especificaba como “el peso absoluto de un volumen de agua pura igual a un cubo de un centímetro del lado”. Gracias a la explicación de Newton sobre la diferencia entre peso y masa, el peso dejó de considerarse fundamental y en 1889, por acuerdo internacional, se redefinió el Kilogramo (1000 gramos) como la unidad de masa.

3.2.6 Sistemas de unidades de medida

Dice Gettys, (1991, p,5): “un sistema de unidades incluye: (i) los patrones de medida, (ii) un método para formar unidades mayores y menores y (iii) las definiciones de las magnitudes derivadas.

Dado un conjunto de unidades de medida de una magnitud, estandarizadas o no, y si entre ellas se guarda una relación constante, entonces, constituyen un sistema de unidades de medida para esa magnitud. Si $e_1, e_2, e_3 \dots\ e_n$ son unidades de medida y si entre ellas existe una relación α constante (½ o ser el doble de(o cualquier otra)), entonces se constituyen en un sistema que, además, de posibilitar el cambio de unidades permite dar la medida de la cantidad de magnitud con mayor exactitud. Es decir, que si se tiene varias unidades de medida que guardan una relación α constante, y si se conoce la medida con una de ellas no es necesario efectuar nuevamente la medición con otra unidad; pues basta comparar sus valores numéricos para determinarla.

Este hecho es importante para el cambio de unidades o conversiones entre ellas:

$e_2 = \alpha e_1$ Entonces $\frac{e_2}{e_1} = \alpha$, también, $r_2 = \alpha\ r_1$, (siendo r_1 y r_2 los números que se asignan como sus medidas respectivamente), por tanto:

$$\frac{r_2}{r_1} = \alpha$$

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

Así, cualquier unidad puede ser expresada en términos de la otra.

Si se considera el sistema métrico decimal, como sistema estandarizado para las cantidades de longitud, tenemos que sus unidades, entre otras, son el milímetro (mm), el centímetro (cm), el decímetro (dm) y el metro (m), y que entre ellas guardan una relación constante de 1/10.

3.2.7 Instrumentos de medida

En los procesos de medición intervienen muchos factores que afectan el resultado de la medición, además de los factores humanos o que dependen de quien realiza medición. De otra parte están los factores asociados a los instrumentos de medida. Un instrumento de medida es un objeto que comparte con los objetos a medir la misma magnitud, y en el cual se ha determinado:

- **Una escala** constituida por una serie de marcas que indican en forma sucesiva y continua cómo puede trasladarse o superponerse la unidad elegida en el instrumento de medida. De allí que la separación entre dos marcas continuas coinciden con la unidad elegida para la medición y se constituyen en la “constante del instrumento”. Para facilitar las mediciones, algunas marcas son identificadas con números, sobre todo las que indican algún número entero que facilita el conteo sobre la escala (0, 5, 10…). En un mismo instrumento pueden aparecer dos o más escalas superpuestas. Es el caso de las cintas métricas, en donde aparecen varias unidades del sistema métrico: milímetro, centímetros, decímetros y metros puestas sobre una misma escala. También se habla en este caso de la calibración del instrumento.

- **Un rango de la escala** (x_m) que corresponde a la diferencia entre el valor máximo medible en la escala (x_{max}) y el valor mínimo medible en la escala (x_{min}): $x_m = x_{max} - x_{min}$.

Otras características asociadas a los instrumentos de medida son: la sensibilidad, la precisión y la fidelidad. Un instrumento de medida es más sensible en tanto más pequeña sea la constante del instrumento, cosa que se obtiene calibrándolo en unidades de medida muy pequeñas.

Otro factor determinante en la medición es el error instrumental, que depende del fabricante del instrumento de medida, y que tiene que ver con la separación entre el valor medido de una cantidad con el instrumento dado y el valor obtenido con un etalón, Δx , (etalón tomado del francés = patrón). Un patrón es un instrumento que da los verdaderos valores de la cantidad medida, y por ello se usa para calibrar otros instrumentos. El error instrumental se obtiene multiplicando Δx por 100 y dividiéndolo por el rango de la escala del instrumento; ello nos da k, que es el porcentaje o clase de exactitud del instrumento.

Otro error en el proceso de la medición es el error de lectura, además de los factores asociados a quien realiza la medición y de las condiciones del objeto a medir. Éste depende de la calibración del instrumento, la cual está asociada a las marcas más pequeñas en la escala de lectura. La lectura y expresión de una medida dependen de dichas marcas. La siguiente situación ilustra lo expuesto:

Una cinta métrica que esté calibrada en decímetros, sólo permitirá expresar una medida en décimas de metro o decímetros, y no en centímetros o centésimas de metro, y se expresará teniendo en cuenta la división más próxima al extremo del objeto a medir. A continuación se indica, más o menos, la una unidad de medida: $m = x \cdot u \pm u$

El error absoluto de una medición se obtiene sumando el error instrumental y el error de lectura.

Un instrumento es muy preciso si diferentes observadores leen el mismo valor de una cantidad, lo cual se logra disminuyendo el paralelaje. Un instrumento es fiel si sus características no cambian apreciablemente con el tiempo.

3.2.8 Tipos de medición

Se dice que una medición es directa, si el instrumento de medida se aplica directamente a la magnitud a medir; e indirecta, si recurrimos a procedimientos en los cuales no se hace uso de instrumentos de medición, sino de conceptos teóricos producto de la medición, como es el caso de fórmulas para calcular medidas. De ambas mediciones pueden surgir medidas enteras y racionales:

- **Medida entera**: Si tenemos que medir una longitud, representada en un segmento AB, por ejemplo; y si tomamos para su medida la unidad e, y verificamos que la medida de $AB = ne$, entonces decimos que $n \in N$, es la medida de AB con respecto a e. Para ello, se supone que al replicar la unidad sobre la longitud al cabo de n veces, el extremo B de la longitud coincide con el extremo de la unidad e.

- **Medida racional**: Como en el caso anterior, si se tiene que al cabo de n veces e sucede que: $ne < AB < (n+1)e$, decimos que la medida es racional. Dado el caso que $ne < AB < (n+1)e$, entonces se debe tener que existe un punto C entre AB, tal que $CB < e$, $AC + CB = AB$. Si se quiere tener una medida exacta o más cercana de AB, es necesario dividir a e en d partes iguales, tal que $e = de_1$; y así la medida de CB con la nueva unidad e_1 puede ser $n_1e_1 < CB < (n_1+1)e_1$ con $0 < n_1 < d$. Ahora, si la medida de CB es $n_1e_1 = CB$, entonces la medida de AB será el número racional $AB = (n + n_1 / d)e$ con la unidad e. Cuando existe este racional que permite expresar la medida de , decimos que AB es conmensurable con la unidad e. Pero si $n_1e_1 < CB < (n_1+1)e_1$ es necesario extender la posibilidad de subdividir en partes cada vez más pequeñas las subdivisiones de e, presentándose que la medida de un segmento AB con respecto a e es la sucesión: $n + (n_1 / d) + (n_2 / d^2) + ... + (n_x / d^x)$. En caso de que la sucesión sea infinita, se dice que el límite de ella, si lo hay, es la medida de AB con respecto a e; en caso de que la sucesión sea infinita y no exista el límite, se dice que AB es inconmensurable con la unidad e, como ocurre con respecto al lado del cuadrado y su diagonal.

Este tratamiento matemático de las magnitudes y de los conceptos y procesos ligados a ellas, nos permite, en primer lugar identificar unos ejes o puntos de referencia que estructuran el pensamiento métrico, y, en segundo lugar, identificar líneas que permiten estructurar las situaciones didácticas y su posterior análisis. Con respecto a lo primero, se constituyen en ejes articuladores del pensamiento métrico conceptos como: la unidad y el patrón de medida, la medida, el sistema de medida y la magnitud, como tal. Además de procesos relacionados con él como: medición, aproximación y cálculo con unidades de medida.

En cuanto a lo segundo, estos referentes conceptuales, se constituyen en los ejes sobre los cuales se plantearán las situaciones didácticas y sobre los cuales se harán sus respectivos análisis. De allí que éstas deben estar sobre contextos de medida donde se ponen en juego la identificación y el reconocimiento de las unidades y los patrones de medida, y el reconocimiento de las magnitudes objeto de la medición; además de permitir el desarrollo de habilidades relacionadas con los procesos de medición, tales como el uso de instrumentos de medida, la asignación numérica, la estimación de medidas y el cálculo con las unidades.

4. METODOLOGÍA PROPUESTA

Toda práctica investigativa debe soportar una buena sistematización de accionas innovadoras, y establecer unas categorías de análisis; por lo tanto, se acepta la ingeniería didáctica como metodología para esta investigación por su doble función; como afirma Artigue y Douady (1995), “ella llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica”.

4.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA

La ingeniería didáctica como metodología de investigación está basada en:

- Un esquema de las realizaciones didácticas en clase; es decir, sobre la concepción, la realización, la observación y el análisis de secuencias de enseñanza.

- El registro en el cual se ubica y las formas de validación a las que está asociada: el registro, por medio de los estudios de caso; y la validación interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Las fases de la ingeniería didáctica son cuatro: la primera fase corresponde al Análisis Preliminar; la segunda está orientada al reconocimiento de la Concepción y al Análisis a priori de las Situaciones Didácticas de la Ingeniería; la tercera se dedica a la Experimentación; y la cuarta al Análisis a posteriori y a la validación.

A continuación se hace una breve descripción de dichas fases, para el caso particular de esta investigación:

- En **la fase 1 de análisis preliminares**, se hace un primer análisis epistemológico de los conceptos relativos a las magnitudes y a la medida, y de su influencia en el desarrollo de otros conceptos matemáticos.

Un segundo análisis en esta fase está orientado a describir unos procesos de enseñanza tradicional de las magnitudes y las medidas; estableciendo la diferencia entre el currículo propuesto desde el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas, el currículo desarrollado por los maestros al interior de sus instituciones y de sus clases mismas y el currículo logrado por los estudiantes, en lo relativo al pensamiento métrico y los sistemas de medidas. Para este caso se revisaron los resultados en evaluaciones escolares como las Pruebas TIMSS y pruebas SABER, en las cuales se evidencian las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y sus obstáculos en el desarrollo del pensamiento métrico y en su relación con otros conceptos.

- En **la fase 2, la concepción y análisis a priori**, se definen las variables de comando pertinentes con relación al problema estudiado, y se distinguen dos tipos de éstas: macro-didácticas y micro-didácticas. Las primeras conciernen a la organización global de la ingeniería y las segundas se relacionan con la organización local de la ingeniería; es decir, con la organización de una secuencia o de una fase.

Para este caso, la **concepción y el análisis a priori**, están orientados y relacionados con el desarrollo de conceptos relativos a las magnitudes y las medidas, según las hipótesis planteadas anteriormente.

Se plantean variables generales que den cuenta del tratamiento curricular de las magnitudes, que es la hipótesis fundamental de la investigación. Se deben propiciar diferentes técnicas no aritméticas (métricas), que partan de la medida de las magnitudes, las cuales facilitan la comprensión de los conceptos relativos a las magnitudes y a sus mediciones. Para lo cual se identifican tres variables asociadas a procesos: medir, estimar y calcular. En los procesos de medir se identifican otras variables como uso de unidades de medida y uso de instrumentos de medida. En lo relacionado con el proceso de estimar, se tendrá situaciones en las que el objeto está presente o no y con la unidad de medida presente. Los procesos de calcular tendrán que ver con el operar con las unidades, la conversión de unidades y la asignación numérica de una medida.

- Medir
  - Uso de unidades
  - Uso de instrumentos de medida
- Estimar
  - Estimar una medida
    - Unidad: Presente / ausente
    - Objeto de estimación: presente/ausente
  - Establecer un orden de una media
- Calcular
  - Operar con las unidades
  - Asignación numérica

- Las dos últimas fases, **de experimentación, y de análisis a posteriori y validación**, se refieren al desarrollo práctico de la investigación: diseño y aplicación de situaciones didácticas, recolección, análisis e interpretación de datos. Cabe agregar, que en el análisis y la interpretación de la información recogida, en ocasiones, se deben utilizar otras metodologías externas.

La confrontación de los dos análisis, el a priori y el a posteriori, permite la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

En este orden metodológico de la Ingeniería didáctica, hasta el momento se ha avanzado en la fase de análisis preliminar: revisión de contexto, antecedentes y referentes teóricos; desde la base de estos reconocimientos y fundamentos, se procede al desarrollo de las fases de experimentación, análisis a posteriori y validación.

5. EXPERIMENTACIÓN

REFERENTE DIDÁCTICO

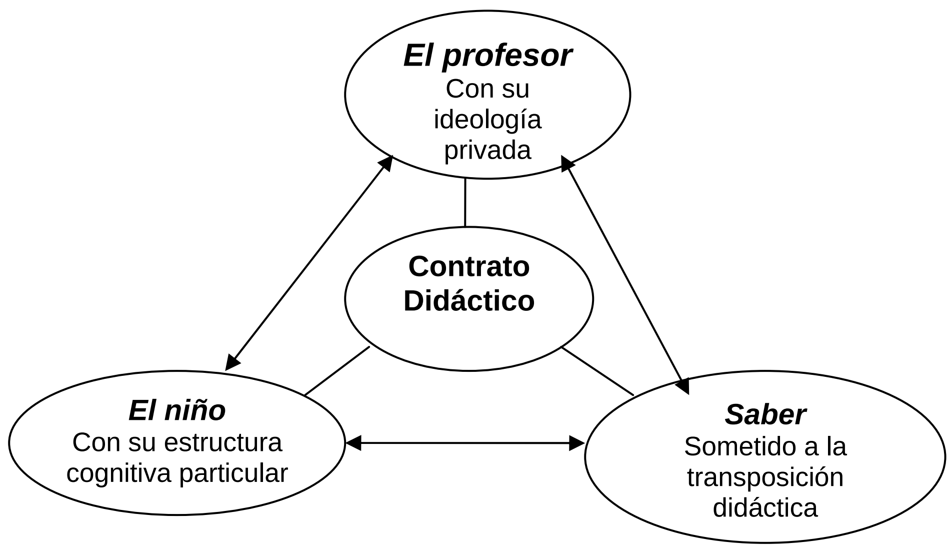
LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Los avances tecnológicos y el contexto social de los años sesenta condujeron a una serie de interrogantes acerca de la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas. Lo cual provocó grandes reformas educativas y, con ellas, como señala Joshua J. y Dupín J (1993 a), una doble ilusión entorno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

De un lado, los que creyeron que para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, sólo bastaba mostrar a los estudiantes su espléndida estructura con una "elegante simplicidad" (ilusión lírica). De otro lado, los que creyeron que "así como la planta crece sola si se ubica en un buen ambiente", el movimiento espontáneo de la evolución cognitiva del alumno lo llevaría directamente al conocimiento científico (ilusión romántica). Tendencias que aún persisten, a pesar de las críticas que a ellas se han hecho, dados los continuos fracasos frente a los objetivos propuestos por los gobiernos, en relación con esta área del conocimiento en la escuela.

Con el fin de alcanzar las metas que se formulen en este campo, se ha hecho necesario reorientar los enfoques de la didáctica; entendiendo ésta, según Joshua J., Dupin J., (1993 b), como la "ciencia que estudia, para un campo en particular, los fenómenos de enseñanza, las condiciones de transmisión de la cultura propia de una institución y las condiciones de adquisición de conocimientos por parte de un aprendiz”.

Este autor identifica una estructura para la didáctica de las matemáticas constituida por el docente, los alumnos, los saberes que se ponen en juego y las relaciones entre ellos, destacando que dichas relaciones son cambiantes, móviles según las “porciones de la sociedad donde nacen y se arraigan”:



El esquema representa los elementos de la didáctica, según el autor: el alumno que relaciona el saber con su propia estructura de conocimientos, el maestro que relaciona su propia historia con la forma de aprendizaje de sus alumnos, con la enseñanza y con el saber mismo y el saber que permite establecer lazos culturales y sociales con el exterior de la clase.

En este mismo sentido, Brousseau (1988) se refiere a la “didáctica de las matemáticas” como una disciplina que estudia las actividades didácticas; es decir:

> *Las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tengan de específico en relación con las matemáticas (p.1).*

Al respecto señala Brousseau (1988), que los conceptos matemáticos en su enseñanza han tenido una presentación axiomática y adaptada que:

> *Elimina completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su empleo para plantear nuevos problemas…el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o inadecuados, y las innumerables discusiones que han ocasionado (p.1).*

Esta presentación, para facilitar la enseñanza aísla nociones y propiedades del tejido de actividades en el cual tuvieron su origen, su sentido, motivación y empleo; las transpone al contexto escolar, proponiendo roles y reglas en las relaciones entre el maestro, los alumnos y los saberes.

La reflexión didáctica acerca de la presentación de los conceptos matemáticos en el ámbito escolar ha originado una tendencia en la enseñanza a partir de las "situaciones didácticas" que según Brousseau, citado por Galves (1985), se define como:

> *Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (p. 12).*

En nuestro medio se ha ido perfilando el término "situación problema "como un espacio en el que los alumnos pueden explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos (Men, 1998, p, 41), y también, como afirma Miguel de Guzmán (1993):

> *La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces (p. 111).*

El profesor Orlando Mesa Betancur (1998, p.18) desde hace varios años ha venido estudiando el diseño de situaciones problema como un contexto válido para el aprendizaje de las matemáticas, y tomando como uno de sus ejes fundamentales las actividades de matematización; aclarando de antemano que “no es lo mismo explicar matemáticas que matematizar”. Expone que las actividades de matematización se mueven en un contexto netamente constructivista y que tienen que ver con el razonamiento hipotético deductivo y con la capacidad para razonar a partir de supuestos, y agrega:

> *Específicamente, debe existir situaciones problema que motiven y desencadenen razonamientos de tipo matemático como la intuición de una ley (conjetura), su verificación y su demostración (p. 19).*

En otro aparte de su texto, al exponer los criterios para el diseño de las situaciones problema señala:

> *La interacción entre el estudiante, el objeto a conocer y el docente debe ser fuertemente participativa. El estudiante ,deseando conocer por él mismo, anticipando las respuestas, aplicando esquemas de solución, verificando procesos, confrontando resultados, buscando alternativas, planteando otros interrogantes. El docente, integrando significativamente*

> *el objeto de estudio, según los significados posibles para el alumno, respetando estados lingüísticos, culturales y cognitivos de sus estudiantes, acompañando oportunamente las respuestas y las inquietudes. Sobre todo, planteando nuevas preguntas que le permitan al estudiante descubrir contradicciones en sus respuestas o abrirse a otros interrogantes (p. 20).*

En este mismo sentido, Obando y Múnera (2003), definen la situación problema como:

> *Un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismo, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la auto evaluación, la heteroevaluación". (p, 185)*

Y definen para ésta, unos elementos fundamentales para su análisis:

- ***Una red conceptual***, entendida ésta como una especie de malla, en donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar:

> *La red conceptual se constituye en el elemento básico de la situación problema, en tanto que ésta permite tomar decisiones sobre los medios y mediadores, y del tipo de actividad que se debe proponer al estudiante, de tal forma que se logre concordancia entre las relaciones estructurales lógico-matemáticas que se establecen en la situación y los aspectos conceptuales de la red que se espera aprendan los alumnos (p. 189).*

- ***Un motivo, medios y mediadores***: La situación problema genera un ambiente de tiempo y espacio propio sobre la base del conocimiento de los alumnos. En esta re-elaboración didáctica juega un papel fundamental los medios y los mediadores al igual que el motivo dentro del cual se desarrolla la situación problema.

Tradicionalmente los conceptos matemáticos se han presentado en forma abstracta, formalizada, descontextualizada y despersonalizada, escondiendo con ello el origen o la génesis de dichos conceptos, desconociendo que éstos para que "ingresen a la escuela deben sufrir una re-elaboración didáctica, que los recontextualiza, los repersonaliza y los retemporaliza." (Obando y Múnera, 2003, p.191) lo cual se hace necesario toda vez que el aprendizaje es el resultado de la actividad matemática del alumno, mediada por las situaciones problema a través de las cuales toman sentido y significado los conceptos matemáticos.

El motivo es la excusa, evento, o suceso que puede ser aprovechado para generar una situación de aprendizaje en el aula de clase.

Los medios son los soportes materiales sobre los cuales se desenvuelve la situación problema. Pueden ser materiales manipulables por los alumnos. Un medio se convierte en un mediador en la medida que éste permite movilizar el pensamiento hacia la construcción de los conceptos matemáticos. Esto depende de la capacidad que se tenga para analizar los "elementos estructurales de la red conceptual. Un medio se hace un mediador en tanto que éste permita el desarrollo de la actividad matemática del alumno" (Obando y Múnera, 2003, p.193).

- ***Las tareas de la situación*** deben cristalizar los análisis realizados por el maestro en su diseño sobre la red conceptual previamente pensada y deben ser asumidas por el alumno en lo que Brousseau llamó devolución de la situación.

Se entiende, en términos de la situación de Brousseau, que se da la "devolución" de la situación cuando el alumno hace suyo el problema planteado, y ésta apropiación de la situación se debe evidenciar cuando el alumno elige o ensaya métodos que modifican sus propios conocimientos y concepciones, sin recibir por parte del profesor la orientación acerca de la solución del problema. El alumno puede dar una aparente devolución del problema cuando bajo la orientación del profesor da una respuesta correcta y quizás sugerida por el profesor.

Brousseau (1993), al hablar de la devolución de una situación, señala una situación paradójica para el profesor: "todo lo que pretende hacer para que el alumno produzca los comportamientos que espera, tiende a privar a este de las condiciones necesarias para la comprensión y el aprendizaje de la noción buscada, si el maestro dice lo que el alumno quiere éste no puede ya obtenerlo" (p20)

- ***La validación*** es un momento que debe permitir al alumno no sólo determinar los aciertos de sus acciones, sino también desarrollar los cambios necesarios en su estrategia, replanteando y reformulando sus hipótesis, e introducir los cambios que considere necesarios. Las situaciones deben incorporar mecanismos que permitan al alumno autónomamente confrontar sus resultados individuales con los obtenidos por sus compañeros y éstos con los resultados esperados.

Señala Brousseau, que las situaciones de validación pueden ayudar al profesor a hacer vivir en su clase una pequeña pero verdadera sociedad matemática.

- ***La evaluación*** debe respetar los ritmos de aprendizaje y debe canalizar los errores presentes en las respuestas, como agentes mediadores para provocar cambios conceptuales en los alumnos. Dentro de este proceso de aprendizaje mediado por las situaciones, cobran sentido los criterios de evaluación de los Lineamientos Curriculares (1998, p. 107): "Se debe evaluar continuamente al estudiante en comportamientos que muestren su trabajo cotidiano… su inventiva, o tendencia a buscar nuevos métodos o respuestas para las situaciones. Lo anterior incluye elementos tan variados como:

    - Las concepciones de los alumnos sobre los conceptos.
    - Los cambios que se presentan en las concepciones mediante la participación activa de los estudiantes durante la construcción de los conocimientos.
    - El estado de conceptualización alcanzado frente a los saberes formales.
    - La comprensión de los conocimientos básicos en un momento dado.
    - Las estrategias y procedimientos utilizados.
    - La participación individual en tareas colectivas., entre otras…"

- ***La institucionalización***, según Obando y Múnera (2003), permite al profesor organizar, sistematizar y dar cuerpo a la estructura de los objetos matemáticos puestos en la situación problema: "en este

> momento el profesor organiza, sistematiza, da cuerpo y estructura a los objetos matemáticos que se quería fueran objeto de aprendizaje" (p, 197).

La metodología de esta investigación, como se expuso anteriormente, tiene como soporte didáctico la teoría de las ***Situaciones Didácticas***. En este sentido, se diseñan, como experimentación, situaciones que le permiten al estudiante poner en marcha los saberes y los conocimientos matemáticos, como medios efectivos de convencer y de convencerse; utilizando elementos de carácter semántico y de carácter sintáctico relativos a las magnitudes y a sus procesos de medición.

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI

La fase de experimentación se llevó a cabo con 35 alumnos del grupo 9-1 de la Institución Educativa La Paz, la cual está ubicada en el municipio de Envigado, en la Calle 46 Sur No 42 – 16. Está integrada, hace aproximadamente dos años, por cinco secciones: Jhon F Kennedy, El Trianón, Leticia Arango, La Paz; las cuales conforman la primaria; y La Paz, sección bachillerato con la básica secundaria. La institución cuenta con 3000 estudiantes aproximadamente, 100 docentes, su rectora Luz Ivonne Yépez Flores.

El grado 9 -1 está ubicado en la jornada de la tarde y le corresponde Matemáticas, en el horario 2 hora los Lunes, 1 hora los Martes, 1 hora los Miércoles, 1 hora los Jueves y 1 hora los Viernes, de las cuales se utilizaron básicamente las horas de los Martes y los Jueves para el desarrollo de las situaciones, con la profesora del área y además encargada de coordinar este grupo: Profesora María Denis Vanegas Vasco. Además, para el desarrollo de las situaciones participó el Profesor Jesús María Gutiérrez Mesa, y se contó con la colaboración de profesores externos a la investigación especialmente para la observación y registro de los procesos de los estudiantes.

La experimentación de la investigación se llevó a cabo durante un período de 16 semanas con una intensidad de dos horas semanales, para un total de 32 horas de desarrollo de actividades, entre el 13 de julio y el 29 de octubre de 2004, según lo muestra la tabla 8:

ESQUEMA GENERAL DE LA EXPERIMENTACIÓN

PLANEACIÓN		**DESARROLLO**		**INSTRUMENTOS**
Actividades	Tiempo	Actividades	Tiempo	
Diseño de cinco situaciones didácticas	Mes de Junio de 2004			Guías de trabajo para los estudiantes.
Análisis a priori de las situaciones	Mes de Julio de 2004			Diarios pedagógicos de los profesores investigadores.
		Situación 1 momento 1	Julio 13 de 2004	Textos de los estudiantes. Diarios pedagógicos los profesores investigadores.
		Situación 1 momento 2	Julio 27 de 2004	Textos de los estudiantes. Diarios pedagógicos los profesores investigadores
		Situación 2 momento 1	Agosto 2 de 2004	Textos de los estudiantes. Diarios pedagógicos los profesores investigadores

	Situación 2 momento 2	Agosto 5 y 10 de 2004	Textos de los estudiantes. Registros de profesores externos. Diarios pedagógicos de los profesores investigadores.
	Situación 2 momento 3	Agosto 12 de 2004	Textos de los estudiantes. Diarios pedagógicos de los profesores investigadores.
	Situación 3	Agosto 26 de 2004	Textos de los estudiantes. Registro de profesores externos. Diarios pedagógicos de los profesores investigadores.
	Situación 4 momento 1	Septiembre 7 y 9 de 2004	Textos de los estudiantes. Registro de profesores externos. Diarios pedagógicos de los profesores investigadores.
	Situación 4 momento 2	Septiembre 16 de 2004	Textos de los estudiantes.

				Registro de profesores externos. Diarios pedagógicos de los profesores investigadores
		Situación 5	Septiembre 26 de 2004	Textos de los estudiantes. Registro de profesores externos. Diarios pedagógicos de los profesores investigadores
Análisis a posteriori de las situaciones	Mes de Octubre de 2004			Diarios de los profesores investigadores.

Tabla 8: Esquema general de la experimentación

Se desarrollaron cinco situaciones relacionadas con actividades de medir, en las cuales se pusieron en juego conceptos tales como: uso de unidades de medida, medición, cálculo con medidas, equivalencias entre unidades de medida del sistema métrico decimal y el sistema inglés, aproximación y estimación, entre otros.

Instrumentos para recoger la información:

- Producciones escritas de los alumnos correspondientes a los materiales de trabajo en donde los alumnos no sólo consignaron sus respuestas, sino que también se les pidió ampliar sus respuestas explicando sus procedimientos.

- Registro de la profesora en donde se recogieron las preguntas que los alumnos formularon frente a determinadas situaciones y las respuestas dadas a las inquietudes tanto en los momentos de acción y comunicación de las situaciones.

- Registros correspondientes a los momentos de institucionalización en donde los alumnos expresaron sus construcciones textuales.

6.1 SITUACIÓN UNO

Esta situación se desarrolla en dos momentos.

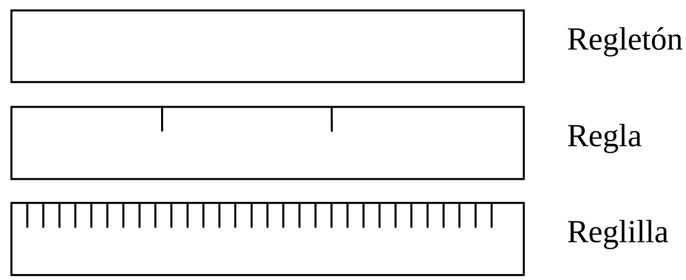
6.1.1 Momento uno

6.1.1.1 Preliminares

Propósitos:

- Reconocer y utilizar unidades de medida de longitud.
- Asignar correctamente un número a una medida dada.
- Utilizar una unidad y un instrumento de medida no convencionales.

Materiales: Hojas de trabajo individual con la instrucciones de trabajo, marcadores o lápices (ver anexo 1, hojas del alumno) y tres cintas de papel: la primera cuyo nombre es regletón y de la cual se indica que α es su unidad, la segunda cinta denominada regla y cuya unidad es β y una tercera cinta de la cual se dice que λ es su unidad; como indica la siguiente gráfica.



Descripción:

Este momento se desarrolla en tres actividades:

Actividad uno

A cada estudiante se le entrega una cinta o tirilla de papel sin marcas que denoten subdivisiones; ello con el ánimo de hacer coincidir la unidad de medida, el instrumento con que se mide y el patrón de medida; y se le pide que mida con ella el largo de su cuaderno o del libro. Se llama “regletón” a esta primera regla y **alfa** (α) a la unidad.

Actividad dos

Luego se hace una discusión sobre los valores obtenidos; los estudiantes deben justificar sus respuestas y procedimientos.

Se entrega una segunda cinta al estudiante para que mida nuevamente el largo del cuaderno (el mismo que midieron en la actividad anterior). La segunda cinta está dividida en tres partes iguales. Se llama “regla” a la segunda cinta y **Beta** (β) a cada unidad en que está dividida. También se socializan los resultados obtenidos.

Se entrega una tercera cinta graduada y se repite el proceso. Se llama "reglilla" a la nueva regla y **lambda** (λ) a las unidades en las que está dividida.

Actividad tres

Por último se pide llenar la tabla siguiente (ver anexo 1) expresando en cada casilla los resultados de medir las unidades de cada una de las cintas, con las otras dos.

Medir / Con	α	β	λ
α			
β			
λ			

Tabla 9: Situación uno, medida de unas unidades con otras

Análisis a priori

En la actividad uno, se espera que el estudiante mida el largo de su cuaderno, con el regletón, y, dado que la longitud objeto de la medición es más pequeña que la unidad de medida, que exprese la medida con un número racional y en términos de α. Por ejemplo: "el cuaderno mide una tercera parte de α", "más o menos medio α". El expresar la medida del cuaderno como "medio regletón", o algo así, daría cuenta de una confusión entre la unidad y el instrumento con que se mide.

En la discusión deberá surgir la necesidad de utilizar otros instrumentos con otras unidades para hacer la medida correspondiente. En la socialización debe replantearse la necesidad de medir utilizando otras unidades que permitan mayor precisión; así, se les entregará "reglilla", y obtendrán resultados como: 25 λ, o 30 λ; algunos inclusive podrán pensar en utilizar las dos últimas unidades, así: 2β y 8 λ.

Para la actividad tres, se pone en juego la correspondencia única entre el conjunto de los números reales y el conjunto de las magnitudes mediante la función medida, cuando al tomar α como unidad de medida, se le hace corresponder el número real 1; pero cuando se toma a β como unidad de medida, el real 1 le corresponde a β, y a α en términos de la relación con β le corresponde otro número real. Se espera, por tanto, que el alumno haga una asignación numérica en los siguientes términos:

Medir / Con	α	β	λ
α	1	1/3	1/18
β	3	1	1/6
λ	18	6	1

Tabla 10: Situación uno respuestas esperadas.

La tabla da cuenta de que el alumno reconoce las unidades de medida y los instrumentos con que se mide; además de una correcta asignación numérica en los dos sentidos de la actividad: uno, cuando la unidad es más pequeña que el objeto a medir y su medida es entera; y otro, cuando la unidad es más grande que el objeto a medir y, por tanto, su medida se expresa con un número racional.

6.1.1.2 Análisis a posteriori

Actividad uno: Se realizó el 13 de Julio de 2004 a las 5 PM, quinta hora de clase para los estudiantes, después de un corto descanso. Participaron los 35 estudiantes del grupo.

Al entregar los materiales a los estudiantes, se les pide que lean la situación y empiecen a desarrollarla individualmente, sin preocuparse por la calificación de su trabajo, se les motiva así para que lo hagan con todo el interés.

El desarrollo de la situación en general se llevó a cabo en un ambiente tranquilo, de trabajo e interés por parte de los estudiantes, quienes "se apropiaron" del trabajo de medir con las cintas entregadas. Además no se presentaron interrupciones externas ni de disciplina.

Para las primeras preguntas y expresiones relacionadas con la medida en términos de "alfa", los estudiantes no conciben medidas por fuera de las unidades ya conocidas como los centímetros; además, no reconocían el instrumento entregado (regletón), por su falta de divisiones, y por lo tanto , hicieron preguntas como las que se enuncian a continuación:

- ¿"Cuánto mide alfa?"
- "Cuánto mide regletón?"
- ¿Le puedo colocar un valor a alfa?
- ¿Si el cuaderno mide 22cm, puedo decir que mide 22 alfas?
- ¿Le pongo números a las unidades para que quede mejor organizado?

En esta pregunta (pregunta 1, anexo 1), de acuerdo con las respuestas dadas por los estudiantes se identifican tres categorías:

Categoría 1 (C_1): Alumnos que reconocen a α como la unidad de medida y al regletón como el instrumento de medida y expresan respuestas cercanas a:

> ***"Tomé el regletón y con él medí mi cuaderno y este mide mas o menos un α "***
>
> En esta categoría se ubicaron 23 estudiantes.
>
> Dentro de este grupo se pueden identificar dos tipos de respuestas que se agrupan en dos subcategorías: **C_{11}** y **C_{12}**

Categoría uno-uno (C_{11}): Alumnos que al medir el largo del cuaderno con el regletón expresan directamente su medida en términos de la unidad alfa y que dan, por tanto, respuestas muy cercanas a:

> ***El cuaderno a lo largo mide menos de la mitad del alfa, o sea menos de la mitad de la unidad.***
>
> ***(E_{21}.)***
>
> ***Pienso que mi cuaderno mide ½ de alfa, no puedo precisar el resultado, pero es lo más acertado.***
>
> ***(E_{27})***

En esta subcategoría se ubicaron 11 estudiantes.

Categoría uno-dos (C_{12}): Alumnos que recurren a marcas o subdivisiones de alfa y dobleces para obtener el resultado de la medición y explican:

> ***El regletón le marqué el largo del cuaderno, vi que no era ½ , entonces, como me sobraba un pedacito, este lo subdividí en 10 unidades iguales las que resté de ½ . Mide 1/3 de alfa.***
>
> ***(E_{13})***

Primero doblé el papel en pedazos, luego los conté y me dieron 16 luego medí el cuaderno y me dio 8 cuadritos, o sea el cuaderno mide ½ de alfa. ***(E_{26})***

En esta subcategoría se ubicaron 12 estudiantes.

Categoría 2 (C_2): Alumnos que confunden el instrumento con la unidad de medida, de tal manera que al medir el ancho o el largo del cuaderno su resultado es expresado con números como:

> ***"La carpeta mide con el regletón mas o menos 1/8 es como a lo que más llega"***
>
> ***(E_{34})***
>
> ***"yo creo que el cuaderno mide la mitad de lo que mide el regletón"***
>
> ***(E_{33})***
>
> ***"Yo dividí el regletón en 32 unidades iguales. La medida del cuaderno solo se gasta 15 unidades por lo tanto la medida es 15/1"***
>
> ***(E_7)***

En esta categoría se ubicaron 5 estudiantes.

Categoría 3 (C_3): Alumnos que para dar su respuesta requieren el uso de otras unidades de medida, como los "dedos", "las argollas del cuaderno", "centímetros imaginarios", para medir a alfa, y poder asignar un valor numérico a la medición efectuada con este instrumento (regletón). Es el caso siguiente, de un estudiante quien anota:

> ***Yo cogí el regletón y lo puse de punta a punta del cuaderno. Como el cuaderno es argollado, cada argollita es un espacio y como hay entre todas la misma medida, me queda más fácil. Y por último calculé que la medida es por cerca de 16.***
>
> ***(E_{28})***

En esta categoría se ubicaron 7 estudiantes.
En la tabla 11 se presenta la clasificación de cada uno de los estudiantes y en cada una de las categorías:

SISTEMATIZACIÓN DE RESULTADOS

N	NOMBRE	CATEGORÍA				
		C_3	C_2	C_1		
				C_{11}	C_{12}	
1	E_1	X				
2	E_2			X		
3	E_3				x	
4	E_4				x	
5	E_5	X				
6	E_6				x	
7	E_7		x			
8	E_8		x			
9	E_9			X		
10	E_{10}			X		
11	E_{11}				x	
12	E_{12}			X		
13	E_{13}				x	
14	E_{14}				x	
15	E_{15}				x	
16	E_{16}	X				
17	E_{17}			X		
18	E_{18}				x	
19	E_{19}			X		
20	E_{20}	X				
21	E_{21}			X		
22	E_{22}	X				
23	E_{23}				x	
24	E_{24}	X				
25	E_{25}			X		
26	E_{26}				x	
27	E_{27}			X		
28	E_{28}	X				
29	E_{29}				x	
30	E_{30}			X		
31	E_{31}			X		
32	E_{32}				x	
33	E_{33}		x			
34	E_{34}		x			
35	E_{35}		x			
		7	5	11	12	35

Tabla 11: Situación 1.Actividad uno distribución por grupos de respuesta

Actividad dos

Se les entrega a los estudiantes el segundo instrumento de medida (regla), cinta dividida en tres partes iguales (beta), para que midieran la misma longitud y la expresaran en unidades “beta”. Parecen entender más el proceso de medir utilizando este nuevo instrumento, pero manifiestan que les hace falta dividir aún más las unidades.

Se observan más cómodos y tranquilos cuando se les entrega la tercera cinta, la cual estaba dividida en 18 partes iguales (lambda), pues ven mayor precisión en la medida, aunque valdría la pena preguntarse, si era porque se les parecía más a los centímetros. Expresan su dificultad para medir con regletón, argumentando:

> “***que no tenía un punto fijo, ni marcas para medir el cuaderno. Con alfa no da la medida exacta del cuaderno”.***

Algunos estudiantes comentan:

> “***que este método de medir con regletón, regla y reglilla, era mejor que medir siempre con los centímetros, pues estos eran menores.”***

Para estas preguntas (preguntas 2 y 3, anexo 1), se pidió repetir la operación de medir el largo y el ancho del cuaderno utilizando la regla cuyas unidades son “beta” y la reglilla cuyas unidades son “lambda” y cuyos instrumentos de medida son mayores que ellas y con marcas que evidencian la unidad replicada varias veces sobre la escala del instrumento. Este último hecho hizo más comprensible la medición misma, situación que se evidencia en las siguientes expresiones:

> ***"Me pareció más fácil medir con la reglilla porque se sabe cuantos cajoncitos mide el cuaderno"***
>
> ***(E_{10})***

> ***"Me pareció más fácil con la reglilla porque estaba dividida en más partecitas"***
>
> ***(E_6)***

Sin embargo, para la asignación numérica de la medida se repite el proceso seguido en la pregunta uno, categoría uno- dos (**C_{12}**), en donde la unidad de medida (alfa) era más grande que el objeto a medir, los alumnos para medir el último tramo del cuaderno que resulta más pequeño que la unidad proceden a "dividir" la unidad, llámese beta o lambda ($\beta\ \lambda$), en otras unidades más pequeñas dadas por dobleces o marcas, para expresar el resultado de sus mediciones:

> ***"La regla está dividida en tres betas, el cuaderno ocupa una beta y un poquito, entonces esa beta la divido en partes iguales y de hacer esta medida del cuaderno es 8/6 de beta".***
>
> ***(E_{11}).***

> ***"Yo medí el cuaderno y me dio un beta y 1/3"***
> ***"El cuaderno mide ocho lambdas y 1/3 de reglilla"***
>
> ***(E_6)***

> ***"Dividí un beta en pedazos el cual me dio 14, luego medí el cuaderno y me dieron una beta y un pedazo; utilizando los dobleces supe que me dieron seis cuadritos, o sea, largo del cuaderno es un beta y 6/14".***
>
> ***(E_{26}).***

Ante los resultados presentados, del primer momento de la situación 1, puede decirse que 12 estudiantes, que corresponden con las categorías **c_2** y

c_3, no reconocen las unidades, sólo reconocen las marcas sobre los instrumentos y confunden la unidad de medida con el instrumento de medida; es decir, que no reconocen las unidades de longitud, como longitudes, por eso no entendían la diferencia entre “regletón” y la unidad “alfa”, ya que éstos coincidían. Ello representó grandes dificultades, no sólo para estos doce estudiantes, sino también para los otros, quienes fueron entendiéndolo durante el proceso de medición, en las actividades dos y tres.

Tal situación se explica porque los estudiantes comúnmente tienden a confundir las marcas sobre un instrumento con las unidades de medida, más no la separación entre ellas. Además tienden a reconocer como unidades de medida únicamente las del sistema métrico decimal.

Lo anterior revela la poca familiarización del estudiante con las actividades de medida y el uso de unidades de medida no convencionales.

Actividad tres

A continuación se pide a los estudiantes que llenen una tabla (pregunta 4, anexo 1), consignando los resultados de medir unas unidades con otras: alfa con beta; beta con lambda y lambda con lambda, utilizando los mismos instrumentos: regletón, regla y reglilla.

Se mostraron muy inseguros y les costó bastante dificultad entender la construcción de la tabla y, más aún, la forma de llenarla, pues aunque el trabajo previo había favorecido el reconocimiento de dichas unidades, no se manejaban lo suficiente, ni éstas ni los instrumentos que las contenían. Además, se observaron dificultades al medir una unidad menor con una unidad mayor, tanto antes de la pregunta “mágica”: qué parte es de....”, como ante la pregunta misma. Los estudiantes hacen preguntas que evidencian dificultades en la utilización de números racionales y su relación con la medida de las magnitudes. Se pueden evidenciar tres tipos de repuestas:

Categoría 1 (C_1): Alumnos que hacen una asignación numérica correcta. Se ubicaron en esta categoría 13 estudiantes.

Medir / Con	α	β	λ
α	1	1/3	1/18
β	3	1	1/6
λ	18	6	1

Tabla 12: Resultados categoría uno, situación uno

Categoría 2 (C_2): Alumnos que hacen una buena asignación numérica cuando se trata de medir las unidades más grandes con unidades más pequeñas o iguales a ellas. En esta categoría se ubicaron 14 estudiantes.

Medir / Con	α	β	λ
α	1	5/15	2/15
β	3	1	2/14
λ	18	6	1

Tabla 13: Resultados categoría dos, situación uno

Categoría 3 (C_3): Alumnos que no hacen una asignación numérica correcta al medir las unidades. En esta categoría se ubicaron 5 estudiantes.

Medir / Con	α	β	λ
α	1	1/3	1/18
β	1/3	3	3/18
λ	8	18/3	18

Tabla 14: Resultados categoría tres, situación uno

Categoría 4 (C_4): Situación presentada por dos alumnas en donde las respuestas tienen un carácter especial, las expresan con sus propias palabras y no se arriesgan a dar un resultado numérico.

Medir / Con	α	β	λ
α	1	Una parte del rectángulo	Una parte del rectángulo
β	3	1	1/6
λ	18	6	1

Tabla 15: Resultados categoría cuatro, situación uno

La tabla 16 presenta la distribución de las respuestas de cada uno de los alumnos de acuerdo con las categorías anteriores:

SISTEMATIZACIÓN DE RESULTADOS

N	NOMBRE	C_1	C_2	C_3	C_4
1	E_1				x
2	E_2			x	
3	E_3		X		
4	E_4			x	
5	E_5				x
6	E_6		X		
7	E_7	X			
8	E_8			x	
9	E_9	X			
10	E_{10}		x		
11	E_{11}	X			
12	E_{12}			x	
13	E_{13}		x		
14	E_{14}		x		
15	E_{15}		x		
16	E_{16}		x		
17	E_{17}	X			
18	E_{18}	X			
19	E_{19}			x	
20	E_{20}	X			
21	E_{21}		x		
22	E_{22}	X			
23	E_{23}		x		
24	E_{24}	X			
25	E_{25}		x		
26	E_{26}				
27	E_{27}	X			
28	E_{28}	X			
29	E_{29}	X			
30	E_{30}	X			
31	E_{31}		x		
32	E_{32}		x		
33	E_{33}	X			
34	E_{34}		x		
35	E_{35}		x		
	Total E.	13	14	5	2

Tabla 16: Situación 1.Actividad tres distribución por grupos de respuesta

Estos resultados evidencian la forma de concebir las medidas de las magnitudes en contextos separados de los números racionales; no se hace una asignación numérica adecuada a las medidas y no se miden correctamente unas unidades con otras, Catorce estudiantes se clasifican en la categoría 2, y 7 estudiantes se clasifican en las categorías 3 y 4.

Además, se observa que seis estudiantes (E_7, E_{20} , E_{22} , E_{24} , E_{28} , E_{33}) evolucionan en los procesos de medición, porque hacen una asignación numérica correcta en la medición de unas unidades con otras. Es decir, que se observan avances en el reconocimiento y uso de unidades de longitud, en este caso no convencionales.

Los dos estudiantes clasificados en la categoría 4 (casos especiales), presentan aún muchas dificultades, para el reconocimiento de unidades, el uso de instrumentos y la asignación numérica. Además no identifican la magnitud que están midiendo, al expresar la longitud en términos de un rectángulo. Puede pensarse en una ausencia de situaciones de medición en los grados anteriores, y como se describió en los preliminares del trabajo, no se abordan métricamente las magnitudes.

6.1.2 Situación uno: momento dos

Se realizó el 27 de Julio, entre las 5 y las 6:30 PM, en una ambiente de motivación porque ya conocían las condiciones dadas en el momento uno y con muchas expectativas ante las dudas pendientes y las nuevas situaciones.

6.1.2.1 Preliminares

Materiales: Hojas de trabajo individual con la instrucciones correspondientes, (anexo 1) y tres cintas de papel: la primera cuyo nombre es regletón y de la cual se indica que α es su unidad, la segunda cinta denominada regla y cuya unidad es β y una tercera cinta de la cual se dice que λ es su unidad.

Descripción: Dado que en la situación anterior se enfrentaron al hecho de medir objetos en donde la unidad casi siempre resultaba más grande que la longitud a medir, se buscó una situación en donde los objetos de la medida fuesen más grandes que las unidades (α , β y λ).

Se les pide medir con el ***regletón, la regla y la reglilla*** (cintas de papel) objetos como el largo del tablero, el ancho del tablero, el ancho de una ventana, ancho y largo de un escritorio.

Dada la dificultad que se encontró para reconocer a α como unidad de medida en los contextos anteriores, en donde alfa es una unidad mayor que los objetos propuestos para la medición, fue necesario introducir una variante de la situación en la cual, los objetos a medir sean más grandes que la unidad, alfa, de medida.

Se espera que las nuevas mediciones, en términos de alfa, beta y lambda, permitan obtener resultados en términos de las unidades puestas en juego, como:

Largo de… n α mas n_1/m α .

Ancho de… $n_2 \beta$ mas $n_3/m_1 \beta$.

Largo de… $n\alpha$ mas $m\beta$ mas $k\lambda$

Ello daría cuenta de una buena asignación numérica de la medida, en términos de cada una de las unidades y, por ende, de su reconocimiento como unidad de medida.

6.1.2.2 Análisis a posteriori

El desarrollo de la actividad fue de mucha participación por los 34 estudiantes asistentes. En algunos momentos compartieron sus experiencias en voz alta sin preocuparse de la disciplina, llamando la atención de otros grupos y otros docentes, pero todo como parte de su trabajo y por lo tanto no se les llamó la atención.

Dadas las dificultades para reconocer a α, β, y λ como unidades de medida, se procede a hacerlas coincidir con los mismos instrumentos de medida; de allí que se corten tirillas de tamaño α, β, y λ, sin divisiones, separadamente, y cuya actividad de medición se aplicará sobre objetos más grandes que la unidad de medida. Se sugiere medir: el ancho del tablero, el largo del tablero, el ancho de una ventana del aula de clase, y el largo o ancho de una mesa del aula.

La reacción de los estudiantes fue mejor que la anterior, en cuanto se dispusieron a medir con mayor seguridad, y ahora reconocían que era más fácil medir con la cinta más grande (regletón); pues ya conocían su equivalencia con las otras, es decir, sabían que el regletón equivale a 18 lambdas o a 3 betas. Claro que la medida de longitudes mayores que la unidad causó dificultades: los estudiantes no reconocen bien los números racionales y les cuesta operar con ellos. Se hacía necesario hacerles la pregunta: "¿qué parte crees que es?"

Los resultados fueron los siguientes:

34 alumnos, al colocar sucesivamente la unidad sobre los objetos a medir (longitudes) y al no coincidir el último tramo con la unidad, y al ser éste más pequeño que la unidad, retomaron la idea de "dividir la unidad en medios, tercios y cuartos". De allí que sus respuestas fueron:

"ancho mesa 1 alfa y 1/18 alfa".
"largo mesa 2 alfa y 5/18 alfa."
"ancho ventana 2 alfa y 1/3 alfa".
"largo ventana 5 alfa y 3/18 alfa".
"ancho ventana 7 betas".
"largo ventana 16 betas y 2/18 betas".

Sólo un alumno dio la siguiente respuesta:

Nombre	α	β	λ	
Ventana	5	1	2	Ancho
Cuadro	2		4	Ancho
Tablero	11	1		Ancho
Cuadro	2	1	5	Ancho

Tabla 17: Situación 1. Momento dos resultado ***(E_{29})***

Para este momento de la situación, ya los estudiantes, reconocen las unidades de medida, y se logra diferenciar los instrumentos dados y las unidades en que están divididos. Se utilizan, además, variados procedimientos para dividir la unidad y expresar la medida en términos de ella; por lo tanto, se asume como respuestas acertadas, entre otras: "es como un medio de alfa”, “no mide un alfa“; “mide mas o menos una unidad alfa”.

En cuanto a la utilización de las tres unidades dadas para expresar la medida de una misma longitud, se mostraron seguros porque las más pequeñas les ayudaban a expresar con mayor exactitud sus medidas y eso les gustaba. Las concepciones de los estudiantes ante el primer momento de la situación cambiaron, ahora utilizaban la medición para reconocer que en los instrumentos se replicaba la misma unidad varias veces para ahorrar tiempo, para evitar errores y para obtener una mejor precisión al medir. Un estudiante logra expresar las medidas de las longitudes propuestas utilizando para cada una todas las unidades (hace algunas aproximaciones muy acertadas).

6.2 SITUACIÓN DOS

6.2.1 Momento uno

Se realizó el lunes 2 de agosto, con la participación de 33 estudiantes, a la tercera y cuarta hora de clase.

6.2.1.1 Preliminares.

Propósitos:

- Reconocer algunas de las unidades del sistema métrico decimal, para medir la magnitud longitud y su relación de equivalencia en contextos de medida.
- Usar instrumentos de medida.

Materiales:

Hoja de papel con tabla para registrar los datos.

Cinta métrica graduada en decímetros, centímetros y milímetros.

Descripción:

Cada estudiante recibió una hoja con la tabla que aparece a continuación y una cinta métrica (ver anexo 2), con la tarea de consignar el valor de la media de unas unidades cuando son medidas con otras.

Unidades del sistema métrico decimal.

Medir / Con	Milímetro mm	Centímetro Cm	Decímetro Dm	Metro m	Decámetro Dm
Milímetro (mm)					
Centímetro (cm)					
Decímetro (dm)					
Metro (m)					

Tabla 18: Situación 2.

Se buscaba continuar con el reconocimiento de unidades y establecer equivalencias, entre las unidades del sistema métrico decimal.

Se dispuso de cintas métricas (calibradas en centímetros, y en milímetros), así:

0 ------ 50 (cm)

50-------150 (cm)

0 ------- 150 (cm)

Se dejó que los estudiantes seleccionaran libremente la cinta para medir diferentes longitudes. Ellos, (la mayoría) eligen la última cinta por creer que ese es realmente el metro. Luego se les pidió que llenaran la siguiente tabla, midiendo unas unidades con otras, en donde se ponían en juego algunas de las unidades del sistema métrico decimal: milímetro (mm), centímetro (cm), decímetro (dm), metro (m), decámetro (Dm).

6.2.1.2 Análisis a posteriori

Los estudiantes no estaban muy disponibles para la actividad debido al descanso del fin de semana, pero muy pronto se animaron a leer y analizar la tabla presentada. Muchos no querían empezar hasta recibir la cinta métrica, es decir que no se animaron a hacerlo por la vía aritmética.

.

La actividad de llenar la tabla mediante la comparación entre sí de las unidades del sistema métrico permite reconocer las unidades de longitud del sistema métrico decimal y establecer relaciones entre ellas. En este caso, los estudiantes empezaron a medir el centímetro con el milímetro, el metro con el centímetro y con el milímetro; y para el decámetro, un estudiante lo representó con cinta de papel; al revisar, se observó que había medido los 10 metros con una cinta métrica completa, es decir de 150cm, su decámetro medía, entonces, 15 metros. Al discutirlo con él, fueron necesarias muchas preguntas, y hubo que incluir muchas actividades para que comprendiera las relaciones de las medidas del metro con otras unidades. Ejemplo de dichas actividades son: mida longitudes que tengan un metro, mida longitudes que tengan 100 centímetros, recorte una cinta que tenga 1000 milímetros de longitud.

Los resultados fueron los siguientes:

Categoría 1 (C_1): Alumnos que completaron correctamente la tabla y que muestran un reconocimiento de las unidades del sistema métrico decimal y un uso adecuado de los instrumentos de medida.

Para este momento del proceso, 25 estudiantes midieron correctamente longitudes mayores con unidades menores, y longitudes menores con unidades mayores (ver tabla 19); lo que representa un avance con respecto a la primera actividad, en donde este segundo caso resultó muy difícil de entender en la primera situación; asunto preocupante, ya que es muy significativo para entender los sistemas de unidades y su conversión.

Medir / Con	Milímetro Mm	Centímetro Cm	Decímetro Dm	Metro m	Decámetro Dm
Milímetro (mm)	1	10	100	1000	10000
Centímetro (cm)	1/10	1	10	100	1000
Decímetro (dm)	1/100	1/10	1	10	100
Metro (m)	1/1000	1/100	1/10	1	10

Tabla 19: Situación 2. Resultados categoría uno

Categoría 2 (C_2): En esta categoría se ubican los estudiantes que invirtieron el proceso de medir las unidades como estaba propuesto. En este caso los dos estudiantes (ver tabla 20) que respondieron de esta forma al interrogárseles acerca de su respuesta, manifestaron una confusión en el hecho de identificar en el contexto del problema, cual es la unidad que hace el papel de unidad de medida. Cuando se dice medir un metro con un centímetro, se entiende que la unidad de medida como referencia para expresar el resultado es el centímetro, y que es diferente del caso de medir un centímetro teniendo como unidad de medida el metro. Para el primer caso, se trata de un número entero en el segundo una fracción. Dadas las respuestas en la tabla siguiente, puede entenderse como una confusión al interpretar la pregunta del problema, pero dado el diálogo con los alumnos, se puso en evidencia una confusión en las relaciones de las unidades en el sistema métrico. Así: 1m = 100 cm; 1 cm = 100 m; 1 cm = 10 mm y 1mm = 10 cm

Medir **Con**	**Milímetro** **mm**	**Centímetro** **Cm**	**Decímetro** **Dm**	**Metro** **m**	**Decámetro** **Dm**
Milímetro (mm)	1	1/10	1/100	1/1000	1/10000
Centímetro (cm)	10	1	1/10	1/100	1/1000
Decímetro (dm)	100	10	1	1/10	1/100
Metro (m)	1000	100	10	1	1/10

Tabla 20: Situación 2. Resultados categoría dos.

Categoría 3 (C_3): Hubo 5 Alumnos que no completaron la tabla, o no hicieron diferencia en medir con unidades mayores a las menores o a las menores con mayores. (Ver tabla 20). Ello pone en evidencia la dificultad que presentan algunos alumnos para entender las relaciones entre las unidades del sistema métrico decimal, en términos de sus equivalencias. Los Lineamientos Curriculares hablan del reconocimiento del tamaño de las unidades. Los estudiantes no caen en cuenta de este hecho y, por lo tanto, resulta igual medir una unidad mayor con una menor, con el hecho de medir una menor con una unidad mayor. Sin embargo, sí reconocen las unidades con las cuales hacen la medición, al hacer una asignación correcta en la diagonal para cada uno de los casos en los cuales se van cambiando las unidades.

Medir / **Con**	**Milímetro Mm**	**Centímetro Cm**	**Decí-metro dm**	**Metro m**	**Decá-metro Dm**
Milímetro (mm)	1	10	100	1000	10000
Centímetro (cm)	10	1	10	100	1000
Decímetro (dm)	100	10	1	10	100
Metro (m)	1/1000	100	10	1	10

Tabla 21: Situación 2. Resultados categoría tres.

La tabla que se muestra a continuación (tabla 22), presenta los resultados de cada alumno con respecto a las categorías descritas anteriormente

SISTEMATIZACIÓN DE RESULTADOS

N	NOMBRE	C_1	C_2	C_3
1	E_1	X		
2	E_2			x
3	E_3			
4	E_4	X		
5	E_5	X		
6	E_6	X		
7	E_7	X		
8	E_8	X		
9	E_9	X		
10	E_{10}	X		
11	E_{11}	X		
12	E_{12}	X		
13	E_{13}	X		
14	E_{14}	X		
15	E_{15}	X		
16	E_{16}	X		
17	E_{17}	X		
18	E_{18}	X		
19	E_{19}			x
20	E_{20}	X		
21	E_{21}	X		
22	E_{22}			x
23	E_{23}	X		
24	E_{24}			x
25	E_{25}			
26	E_{26}	X		
27	E_{27}		x	
28	E_{28}			x
29	E_{29}			x
30	E_{30}		x	
31	E_{31}	X		
32	E_{32}	X		
33	E_{33}	X		
34	E_{34}	X		
35	E_{35}	X		
	Total E.	25	2	6

Tabla 22 situación **2.**momento 1.
Distribución por grupos de respuesta

Al finalizar la actividad y según los resultados presentados, 25 estudiantes ya expresaban en diferentes unidades la longitud del **metro**, sin recurrir a estrategias de multiplicar y dividir, como tradicionalmente se hace en la escuela, como se pudo evidenciar en el análisis de los textos. Sino en la relación de medida como lo propone el ejercicio y que revela para el momento del proceso un avance en el reconocimiento de las unidades, el uso de instrumentos, la asignación numérica, además de una aproximación a los conceptos de sistema de unidades y sus equivalencias (Ver tabla 21).

6.2.2 Momento dos. Equivalencia entre unidades del sistema métrico decimal y otros sistemas.

Se realizó los días 5 y 10 de Agosto de 2004, contando con la presencia de dos profesores externos de matemáticas quienes anotaron las observaciones y escucharon las discusiones de los estudiantes para llenar la tabla, su posición era de escucha aunque en algunos casos les hacían preguntas a los estudiantes para orientar sus dudas.

6.2.2.1 Preliminares:

Propósito: Establecer equivalencias entre unidades del sistema métrico decimal y otras unidades, conocidas por los estudiantes mediante procesos de medición y cálculo.

Materiales:

Cintas métricas graduadas en decímetros, centímetros y milímetros.

Cintas de papel, sin divisiones, y equivalentes a, cada una: una pulgada, un pie, una vara, una yarda.

Tabla para consignar datos (Ver anexo 3).

Descripción:

Dadas las dificultades relacionadas con el uso, reconocimiento y equivalencias con unidades de medida que aún presentan siete estudiantes, reveladas en la situación anterior, se propone la situación siguiente casi en los mismos términos, y en relación con unidades del sistema métrico y unidades del sistema inglés.

Se les entregó el material a los alumnos y, por equipos, se organizaron para que en un trabajo participativo consignaran los datos en las tablas entregadas, después de medir unas unidades con otras.

Esta actividad permite ampliar el trabajo realizado con las situaciones uno y dos en el momento uno: el alumno, mediante un proceso de medición, avanza en la interiorización del concepto de unidad de medida y de su relación con otras unidades. Al igual, que amplía la idea de la situación uno, pregunta cuatro, que tiene que ver con la asignación numérica de la medida, cuando un elemento del conjunto de las magnitudes es tomado como unidad patrón de medida; caso en el cual le corresponde el real 1, y dada la relación constante entre las unidades, se puede expresar unas en términos las otras, como lo muestra la tabla siguiente (tabla 23).

Medir / Con	mm	Cm	Dm	m	Pie	pulgada	vara	yarda	Dm
mm	1	10	100	1000	304	25	800	914	10000
cm	0.1	1	10	100	30.4	2.5	80	91.4	1000
dm	0.01	0.1	1	10	3.04	0.25	8	9.14	100
m	0.001	0.01	0.1	1	0.304	0.025	0.80	0.914	10
pie	0.00328	0.0328	0.328	3.289	1	0.0835	2.631	3.006	32.89
pulgada	0.0393	0.393	3.937	39.37	11.96	1	31.49	35.98	393.7
vara	0.00125	0.0125	0.125	1.25	0.38	0.03175	1	1.1425	12.5
Yarda	0.00109	0.0109	0.1094	1.094	0.3326	0.02778	0.875	1	10.94
Dm	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.0304	0.00254	0.08	0.0914	1

Tabla 23. Situación **2.**momento 2. Resultados esperados

6.2.2.2 Análisis a posteriori

Inicialmente se hace un diálogo con los estudiantes sobre las unidades más conocidas de longitud, masa y tiempo. Surge una conversación sobre el origen de algunas unidades y medidas e instrumentos de medición de estas magnitudes, tendiendo presente una lectura previa tomada del texto Física en Perspectiva (1999). Se propone a los estudiantes que midan unas unidades con otras, tanto del mismo sistema como de otros sistemas; por ejemplo, el sistema inglés. Los estudiantes tienen disponibles las cintas métricas, cintas de papel del tamaño de una pulgada y de un pie; además, tienen la posibilidad de medir longitudes mayores con la cinta.

El trabajo fue propuesto por equipos: a cada uno se le entregaron los materiales mencionados, incluyendo un pliego de papel periódico para que construyeran la tabla, como se puede apreciar en la fotografía 1.

Fotografía 1. Estudiantes realizando las actividades del momento dos.

Los estudiantes se dispusieron para el trabajo y se repartieron las funciones: unos medían, otros utilizaban la calculadora para hacer las asignaciones numéricas correspondientes con las unidades. La actividad se prolongó durante tres sesiones; porque los estudiantes se dedicaron a medir en cada uno de los casos. Además se presentaron dos interrupciones con actividades programadas por la institución (sin previo aviso): Una reunión de todos los estudiantes en el patio para darles unas informaciones generales, y una reunión de profesores para programar las actividades del mes de agosto.

Fotografía 2. Estudiantes realizando las actividades del momento dos.

Durante el trabajo se hicieron preguntas, y se generaron expresiones como las siguientes:

- ¿Cómo puedo medir una pulgada con un metro?
- ¿Qué debemos hacer para expresar un metro en pulgadas?
- Las pulgadas y los pies no dan exactos.
- La vara y la yarda no se pueden medir fácilmente.

Fue significativa la discusión entre dos estudiantes, en la cual uno trataba de convencer al otro sobre la equivalencia entre pulgadas y metros, es decir:

> ***"Un metro medido con pulgadas es 40, porque es mayor, la pulgada cabe 40 veces en el metro, mientras que la pulgada medida con el metro es 1/40 veces el metro, porque es más pequeña, es una parte del metro".***

(**E** $_{27}$ y **E** $_{30}$)

Para esta situación todos los equipos presentaron los siguientes resultados, posiblemente por las interrupciones presentadas tuvieron tiempo de comparar sus resultados y cada equipo no estaba muy convencido de su propio trabajo.

INSTITUCION EDUCATIVA LA PAZ

Mide las siguientes unidades de medida y completa la siguiente tabla.

Medir / con	mm	cm	dm	m	pie	pulgada	vara	yarda	Dm
mm	1	10	100	1000	305	25	800	900	10.000
cm	1/10	1	10	100	30,5	2,5	80	90	1000
dm	1/100	1/10	1	10	3,5	0,25	8	9	100
m	1/1000	1/100	1/10	1	9/10	39,37	0,80	0,90	10
pie	1/300	1/30	1/3	3,2766	1	12	2/3	3	327
pulgada	1/25	1/2,5	1/25	0,0255	11	1	29,2	33,5	4000
vara	1/800	1/80	1/8		0,2/3	1/29,2	1	1/8	125
Yarda	1/900	1/90	1/9	0,9144	1/3	1/33,5	1,9	1	111
Dm	1/10.000	1/1000	1/100	1/10	1/327	1/4000	1/125	1/111	1

Tabla 24: Resultados situación dos

En este momento se trataba de que los estudiantes compararan unidades del sistema internacional de unidades, con unidades del sistema inglés; se presentaron dificultades en la asignación numérica, especialmente en lo relacionado con la expresión de unidades menores en términos de las mayores; también hay errores en la medida de pulgadas con metros, pulgadas con pies, y para algunos casos la asignación numérica no corresponde con la esperada. Además, los estudiantes se confundieron al momento de expresar los resultados obtenidos de las medidas, porque no establecen relaciones entre las diferentes expresiones de los números racionales. Todo ello hizo necesario un proceso de comunicación y socialización de los distintos casos. Para este momento se buscó que los estudiantes comprendieran sus errores y se dieran explicaciones entre ellos mismos, y aclararan con el profesor las dudas antes mencionadas. El trabajo les pareció interesante y pertinente, porque estaba relacionado con situaciones cotidianas de sus experiencias, y con definiciones y explicaciones de otros campos de conocimiento.

6.2.3 Momento tres: Estimación de una longitud

Se realizó el 12 de Agosto en la quinta hora de clase con la participación de los 35 estudiantes, quienes estaban esperando con agrado la clase, pues ya se acostumbraban a esta metodología y se expresaban con frases como estas: “así si entendemos matemáticas”; “ahora que nos traerá la profe”...

6.2.3.1 Preliminares

Propósito:

Identificar en los alumnos sus competencias en actividades de estimación, y revisar los avances entorno a la comprensión de las unidades en actividades de medición y estimación.

Materiales:

Cintas de papel.

Hoja de trabajo con preguntas relacionadas con actividades de medición, (ver anexo 4A y 4B)

Descripción: Este momento se desarrolló entorno a dos actividades: primero, estimar una longitud teniendo presentes el objeto y la unidad en que se expresa la medida objeto de estimación. Una segunda actividad tuvo que ver con estimar una longitud, teniendo la unidad presente y el objeto ausente.

El alumno debía construir tres instrumentos de medida: a, b, c, que correspondieran a un metro sin divisiones, (a); un metro con divisiones que corresponden cada una a un decímetro, (b) y un metro con divisiones que corresponden cada una a un centímetro (c).

Actividad uno: Estimación con unidad y objetos presentes:

Después de elaborar los instrumentos de medida, anteriormente descritos, se les pidió completar la siguiente tabla, con la consigna: utilizando los instrumentos de medida que acabas de construir, pero sin hacer la medición directa, completa los datos pedidos:

Cuánto crees que mide, con	**c en centímetros**	**b en decímetros**	**a en metros**
El ancho de la puerta del aula de clase.			
El alto de la puerta del aula de clase.			
El largo del tablero del aula de clase.			
El largo de tu cuaderno			

Tabla 25: Estimación con unidad y objetos presentes

Actividad dos: Estimación con la unidad presente y el objeto ausente (Ver anexo 2c).

En forma similar a la anterior, se les pidió llenar la tabla siguiente:

Cuánto crees que mide, con	**c** **en centímetros**	**B** **en decímetros**	**a** **en metros**
El largo de una cama.			
El ancho (frente) de una nevera.			
El ancho (frente) de una estufa.			
El ancho (frente) de una lavadora.			

Tabla 26: Estimación con unidad presente y objetos ausentes.

La estimación es una actividad mental que se entiende como la capacidad de un individuo para calcular una medida de una magnitud sin replicar o superponer la unidad de medida sobre el objeto de la medición. Como afirma Del Olmo Romero (1993) "estimar es el proceso de obtener una medida o medir sin la ayuda de instrumentos, es decir, consiste en realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos. Una estimación es el resultado de estimar; es la medida realizada a ojo de una determinada cualidad medible de un objeto" (p. 88).Tal proceso requiere cierta habilidad mental que tiene que ver con la capacidad para determinar el tamaño y rango de las unidades y la percepción de las magnitudes objeto de la medida.

La medida objeto de la estimación no es tan aproximada como la medida misma, y se considera aceptable cuando se establece dentro de unos rangos que se consideran permitidos, teniendo en cuenta la unidad en que se expresa, el orden y la escala de las unidades de la medida: una diferencia de

3 milímetros en la apreciación de una media de el espesor de una hoja de cuaderno no sería aceptable, en tanto, que una diferencia de cinco milímetros al estimar el largo de una hoja de cuaderno puede tomarse como una buena estimación de dicha medida. Otros factores que pueden indicar cierta capacidad para estimar correctamente tienen que ver con esa "capacidad para guardar las relaciones y proporciones" de las medidas cuando éstas están asociadas a familias de objetos en donde, por la experiencia con ellos, sin necesidad de recurrir a una medida directa, se percibe cuál es más largo que otro. También tiene incidencia en la estimación de una medida el hecho de si se conoce la unidad de medida en que ésta ha de expresarse, y si el objeto está presente o ausente. Habrá mayor probabilidad de éxito en el primer caso que en el segundo.

Para esta actividad se consideraron adecuadas las recomendaciones en Del Olmo Romero (1993, p.88):

- Los adultos, en general, y los maestros en particular, no tenemos desarrollada esta habilidad.
- No se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo.
- No se tiene en cuenta el tiempo preciso para desarrollarlas.
- Es difícil poner a prueba estas habilidades.

Con el ánimo de poder identificar algunos tipos de respuestas, proponemos las siguientes tablas con unos rangos dentro de los cuales consideramos unas estimaciones pertinentes, que indican que los estudiantes ya han avanzado en lo relacionado con el pensamiento métrico y en lo que específicamente los lineamientos curriculares llaman "pensar las unidades".

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
El ancho de la puerta del aula	900----------1100	90----------110	9-------------11	1
Alto de la puerta del aula	1900--------2000	190----------200	19-----------20	2
Largo del tablero del aula	4000--------4500	400----------450	40-----------45	4
Largo del cuaderno	200--------250	20----------25	2----------3	0

Tabla 27: Estimaciones que se consideraron aceptables para actividad uno

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
Largo de una cama	1800----2150	180-----215	18------22	1,80-----2,15
Ancho(frente) de una nevera	500-------800	50-------80	5-------8	0.55-----0.8
Ancho(frente) de una estufa	500------700	50------70	5--------7	0.5-----0.7
Ancho (frente) de una lavadora	500-------800	50-------80	5-------8	0.55-----0.8

Tabla 28: Estimaciones que se consideraron aceptables para actividad dos.

6.2.3.2 Análisis a posteriori:

Ante esta situación, los estudiantes evocaron las medidas tomadas en la actividad anterior y utilizaron los brazos y los pies para simular longitudes. Se notaban temerosos a equivocarse en las respuestas. Aunque ya tenían cierta claridad en las equivalencias entre las unidades propuestas: milímetros, centímetros, decímetros y metros, al no poder superponer el instrumento sobre la longitud a medir, confundieron unas unidades con otras y, más aún, la relación entre ellas.

Los resultados variaron en cuanto a la dispersión de los datos arrojados: para lo cual se identificaron las siguientes categorías, teniendo como referencia los valores propuestos anteriormente:

Para la actividad uno, en donde se trataba de estimar una medida teniendo presente el objeto a estimar y la unidad de medida se dieron las siguientes respuestas:

Categoría 1 (C_1): Alumnos (33) que se movieron dentro de los rangos considerados como aceptables y que por tanto dan buena cuenta de los avances en lo relacionado con el desarrollo del pensamiento métrico como se muestra en la tabla 29.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
El ancho de la puerta del aula	930	93	9,3	0
Alto de la puerta del aula	2000	200	20	2
Largo del tablero del aula	5000	500	50	5
Largo del cuaderno	250	25	2,5	0

Tabla 29: Resultados categoría uno de E_5

Dos alumnos presentaron casos atípicos en esta situación, tablas 29 y 30.

Caso 1: en sus respuestas, aparecen, en la columna cinco, las medidas estimadas en metros; allí el alumno no es consciente del hecho que bajo sus respuestas resulta más grande el largo de su cuaderno, que el ancho de la puerta del aula.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
El ancho de la puerta del aula	540	54	5.4	0.54
Alto de la puerta del aula	720	72	7.2	0.72
Largo del tablero del aula	5100	510	51.0	0.51
Largo del cuaderno	80	8	8	0.8

Tabla 30: Caso uno. E_6

Caso 2: igual que en el caso anterior no sólo resulta un poco paradójico que el largo de su cuaderno mida más que el ancho de la puerta, sino que además estima sus medidas alrededor de 16 y 17 metros.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
El ancho de la puerta del aula	1600	74	0.74	16
Alto de la puerta del aula	1.600	1.80	01.80	16
Largo del tablero del aula	4.800	510	51.	40
Largo del cuaderno	150	15	0.15	17

Tabla 31: Caso dos .E28

Como se observa en la tabla 32, (actividad 1), 33 estudiantes lograron hacer estimaciones que se consideran aceptables, en forma versátil: con unidades pequeñas, como el milímetro; y con unidades mayores como el metro. Destacándose así el avance en la construcción de los conceptos relativos a las medidas de la longitud y la utilización de relaciones entre unidades.

SISTEMATIZACIÓN DE RESULTADOS

N	NOMBRE	C_1	C_2
1	E_1	x	
2	E_2	x	
3	E_3	x	
4	E_4		x
5	E_5	x	
6	E_6	x	
7	E_7	x	
8	E_8	x	
9	E_9	x	
10	E_{10}	x	
11	E_{11}	x	
12	E_{12}	x	
13	E_{13}	x	
14	E_{14}	x	
15	E_{15}	x	
16	E_{16}	x	
17	E_{17}	x	
18	E_{18}	x	
19	E_{19}	x	
20	E_{20}	x	
21	E_{21}	x	
22	E_{22}	x	
23	E_{23}	x	
24	E_{24}	x	
25	E_{25}	x	
26	E_{26}	x	
27	E_{27}	x	
28	E_{28}		x
29	E_{29}	x	
30	E_{30}	x	
31	E_{31}	x	
32	E_{32}	x	
33	E_{33}	x	
34	E_{34}	x	
35	E_{35}	x	
	Total E.	33	2

Tabla 32: Situación 2, momento 2. Actividad 1.
Distribución por grupos de respuesta

Actividad dos:

En este caso se trataba de estimar una medida teniendo la unidad presente y la medida (objeto) a estimar ausente, los resultados son los siguientes:

Categoría 1 (C_1): Alumnos que dieron respuestas dentro de los rangos propuestos como aceptables: un estudiante.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
Largo de una cama	1800	180	18	1.80
Ancho(frente) de una nevera	500	50	5	½
Ancho(frente) de una estufa	700	70	7	0.7
Ancho (frente) de una lavadora	700	70	7	0.7

Tabla 33: Resultados categoría uno de E_{22}

Categoría 2 (C_2): estudiantes que estuvieron muy cerca de los rangos esperados: 23 estudiantes.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
Largo de una cama	2000----2100	200----210	20------21	2.0-----2.15
Ancho(frente) de una nevera	800-----1000	80------100	8-------10	0.8-----1
Ancho(frente) de una estufa	700-----1000	70-----100	7------10	0.7-----1
Ancho (frente) de una lavadora	800----1000	80------100	8------10	0.8-----1

Tabla 34: Resultados categoría dos.

De los 23 estudiantes con este tipo de respuesta, seis alumnos estimaron el largo de la cama en 1.20 metros; sin embargo, en las otras estimaciones de la tarea estuvieron dentro de este rango aceptable. (Ver tabla 37, alumnos marcados con *).

Categoría Tres uno (C_{31}): Alumnos cuyas respuestas estuvieron muy por encima en la mayoría de los casos para los rangos esperados: seis alumnos.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
Largo de una cama	2200	220	22	2.20
Ancho(frente) de una nevera	1300	130	13	1.30
Ancho(frente) de una estufa	1100	110	11	1.10
Ancho (frente) de una lavadora	900	90	9	0.9

Tabla 35: Resultados categoría tres uno (E_{30})

Categoría tres dos (C_{32}): Alumnos que estuvieron muy por encima o muy por debajo de los rangos esperados: tres alumnos.

Longitud a estimar	En milímetros	En centímetros	En decímetros	En metros
Largo de una cama	21.00---4600	210---460	2.1---46	0.21---0.46
Ancho(frente) de una nevera	1000----600	100----60	10---6.0	0.10---0.60
Ancho(frente) de una estufa	2000----500	200-----50	20----50	0.20---0.45
Ancho (frente) de una lavadora	1600---520	160---52	16----5.2	0.16---0.52

Tabla 36: Resultados categoría tres dos.

Hubo 9 alumnos que, al comparar las respuestas en las dos situaciones de estimación, presentaron resultados en donde aparece más ancho el frente de una nevera que el ancho de la puerta del aula de clase. (Ver tabla 37, caso especial)

SISTEMATIZACIÓN DE RESULTADOS

N	NOMBRE	Caso ESPE.	C_1	C_2	C_3	
					C_{31}	C_{32}
1	E_1			X*		
2	E_2			X		
3	E_3	X		X		
4	E_4					x
5	E_5			X		
6	E_6			X*		
7	E_7			X*		
8	E_8			X		
9	E_9			X		
10	E_{10}			X		
11	E_{11}			X		
12	E_{12}			X		
13	E_{13}			X		
14	E_{14}					
15	E_{15}	X				x
16	E_{16}			X		
17	E_{17}			X		
18	E_{18}				x	
19	E_{19}			X		
20	E_{20}			X		
21	E_{21}					x
22	E_{22}		X			
23	E_{23}			X		
24	E_{24}			X		
25	E_{25}	X			x	
26	E_{26}			X*		
27	E_{27}	X			x	
28	E_{28}	X			x	
29	E_{29}	X		X*		
30	E_{30}	X			x	
31	E_{31}	X			x	
32	E_{32}			X*		
33	E_{33}					
34	E_{34}	X		X*		
35	E_{35}			X		
	Total E.	9	1	23	6	3

Tabla 37: Situación 2, momento 2. Actividad 2.
Distribución por grupos de respuesta

Para este caso, se trataba de estimar la medida de las longitudes, ahora con objetos y unidades ausentes (ver tabla 37). Los estudiantes se notaron más desconcertados, y siguieron tomando como referencia las unidades conocidas; nuevamente abrían sus brazos como calculando mentalmente. Otros dieron pasos y contaron baldosas del salón, recordando los espacios de sus casas, en los cuales estaban los objetos mencionados.

Se observan avances en el momento de expresar unas unidades con otras, gracias al ejercicio previo de estimación con diferentes unidades. El largo de la cama lo estiman en metros y las demás longitudes las estiman en centímetros; se reconoce así el manejo del rango de las magnitudes, como lo muestran los resultados (tabla 37): un solo estudiante hace la estimación dentro de los rangos esperados, 23 estudiantes están muy cerca del rango esperado y sólo 9 estudiantes están muy por encima o muy por debajo de los rangos esperados.

6.3 SITUACIÓN TRES

Se realizó el 26 de Agosto en las dos primeras horas de clase que se dieron de 2 a 4 PM, debido a una reunión de profesores.

Al recibir la hoja de trabajo, los estudiantes reaccionaron muy positivamente, inicialmente no hicieron preguntas sino que se dedicaron a su actividad con una excelente concentración.

6.3.1 Preliminares

Propósitos:

- Usar unidades de medida no convencionales en contextos propios de medida.
- Expresar correctamente las medidas de las longitudes entre los puntos PZ, siguiendo las trayectorias indicadas, en términos de ***a, b, c,*** como unidades.
- Hacer conversiones entre unidades de medida.

Descripción:

Se entregó a los estudiantes, en forma individual una hoja (ver anexo 5) de un barrio. En este se indican varios caminos y se pide a los estudiantes que, en un primer momento, describan 6 caminos o rutas para ir del punto P al punto Z, indicando los puntos, ejemplo: R1 = P – R – F – M – Z. Además que indiquen cuál creen que es el camino más corto.

En una segunda actividad, se presentó la situación:

Se quiere contratar una firma de ingenieros para construir una alcantarilla de un metro de diámetro, en tubos de cemento, en un barrio entre los puntos P y Z, siguiendo la trayectoria marcada en el centro de las calles, como aparece en el plano. Se contratará la obra que resulte más económica y con las especificaciones dadas.

¿Cuál es el menor costo de la obra, si se sabe que el costo de la alcantarilla es dos millones por tramo de tamaño **b** instalado?

Estudios preliminares dicen que:

- En el mercado se consiguen tubos de largo **a**, **b**, **c,** como aparece en la parte inferior del plano.
- Los tubos no se pueden cortar, debido a su diámetro y al material con que están hechos.
- Cada empate entre dos tubos, aumenta el costo en pesos un millón, porque requiere de obras secundarias.

Se trata de medir una distancia dada dividida en tramos rectos, que resultan conmensurables con unas, no todas, las unidades dadas para ello, (ver anexo3). Se plantea una situación que obliga al uso de las unidades puestas, y luego, dadas las condiciones del problema planteado, se deben realizar conversiones entre ellas para hallar la solución correcta.

Al determinar la longitud PZ, dadas las unidades ***a, b y c*** en los términos de la pregunta realizada, que es determinar la longitud entre los puntos PZ siguiendo las posibles trayectorias, se espera que el alumno replique la unidad ***a*** y la traslade sucesivamente a partir de uno de los extremos hasta alcanzar el otro extremo, y en una actividad de conteo determine el número de veces que ***a*** cabe en PZ $m_a(PZ)$ = k veces ***a***. Allí todos los segmentos de las diferentes rutas, que forman a PZ, contienen exactamente a la unidad ***a.***

En un segundo momento, al medir PZ con la unidad ***b,*** $m_b(PZ)$, el estudiante tratará de reproducir la experiencia obtenida con la unidad ***a***; pero dado que hay tramos no conmensurables con ***b***, se verá forzado a replantear su estrategia y buscar alguna relación de ***b*** con la unidad ***a***, como alternativa de solución. Las unidades puestas guardan una relación de ½, esto es, ***a*** = ½ ***b*** o ***b*** = 2 ***a***. Ello implica replantear la medida inicial de k ***. a*** en términos de la nueva unidad***, b***. $m_a(PZ)$ = k . ***a*** = k . ½ ***b =*** $m_b(PZ)$. De la misma forma al hallar $m_c(PZ)$, ello dado que el problema restringe la situación a usar el menor número posible de empates, tendrá que buscar la relación entre las unidades ***a, b*** con respecto a ***c*** y determinar que ***b*** = 2 ***a*** y que ***c*** = 2 ***b*** o que ***a*** = ½ ***b*** y que ***b*** = ½ ***c*** y que por tanto ***a/b*** = ***b/c*** = ½.

Así mismo si se piensa en la relación de las unidades ***a, b, c ,*** tendremos un sistema de unidades no convencionales y un sistema de unidades cuyo rango de los múltiplos y submúltiplos dependen de las potencias de dos; así, si tomamos ***b*** como unidad, ***b*** es de rango 0, ***b*** = 2^0 = 1, y ***a*** es un submúltiplo de ***b, a= ½ b*** o **2^{-1} b** , ***c*** sería un múltiplo de ***b*** y dada su relación ***b/c = ½*** , entonces, ***2b = c*** , que equivale a tener ***2. 1 = 2 o 2^1***, por tanto ***c*** sería de rango 1.

Unidad a	Unidad patrón b	Unidad c
½ b	1	2 b
2^{-1}	2^0	2^1

Tabla 38: Relación entre las unidades a,b,c.

Lógicamente que en una segunda etapa se podrá poner en juego las unidades de los sistemas convencionales, y permitir que el educando las identifique, las relacione, y descubra cómo éstas conforman un sistema. Este es el caso del sistema métrico decimal, en el cual las unidades se relacionan manteniendo una relación constante de 10:

1metro (m) = 10 decímetro (dm)
1 decímetro (dm) = 10 centímetros (cm)
1 centímetro (cm) = 10 milímetros (mm)

Se considera importante poner en juego unidades no convencionales, ya que se trata de estudiantes de 8º y 9º grado, y la mecanización del sistema métrico decimal que éstos han tenido en años anteriores, no les permite ver otra cosa distinta a lo que ya se han "acostumbrado a hacer": multiplicar y dividir por 10, y no lograran ver la relación de unidades ni comprender el problema de la medida. Una vez validado este proceso, se puede poner otra vez en contexto de aprendizaje el sistema decimal de unidades.

6.3.2 Análisis a posteriori.

La actividad generó mucho interés, desde el principio hasta el final; como no se alcanzó a terminar en la primera clase, los estudiantes reclamaron tiempo adicional para terminarla. Se notaron muy concentrados y utilizaron diferentes procedimientos para resolverla: recortaron pedazos de papel cuadriculado para medir, midieron las unidades a, b, c con centímetros, otros trataron de estimar en un primer momento cuál era el camino más corto.

Les motivó mucho, lo del costo relacionado con la medida de las longitudes. Se observó más facilidad y espontaneidad al momento de iniciar la actividad.

Es importante resaltar que ya se interesaron más por la lectura de la situación y trataron de entenderla individualmente; es decir, que se observa progreso con relación a las primeras actividades, en las cuales preguntaban más antes de leer y tratar de comprender la situación.

Para los resultados de esta situación se tienen en cuenta tres casos importantes:

1. Reconocimiento de las unidades y uso de instrumentos de medida.

2. Proceso de medición.
3. Conversión de unidades y cálculo con unidades de medida.

Caso 1: En lo relacionado con el reconocimiento de las unidades de medida y uso de instrumentos de medida se puede identificar dos grupos o tipos de respuesta:

Categoría uno- uno (C_{11}): Alumnos que reconocieron a “a”, “b”,”c” como unidades de medida apropiadas para la solución del ejercicio (ningún alumno recurrió a otro tipo de unidades para expresar su medida, lo que sí ocurrió en otro tipo de situaciones, como en el uso de las reglas en la situación uno), y además, replicaron la unidad de medida en instrumentos como tiras de papel o carnés, para ser trasladados sucesivamente sobre la longitud a medir. 15 alumnos emplearon este sistema:

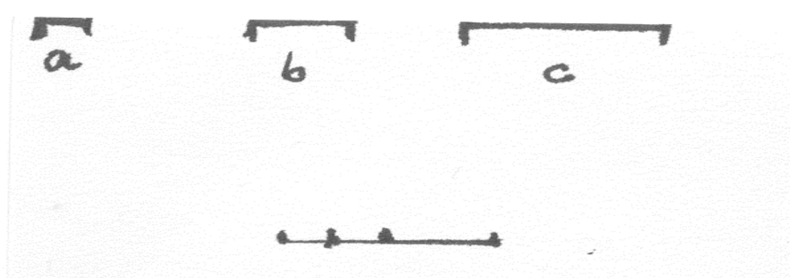


Gráfico 10: Replicación de la unidad por los alumnos.

Categoría uno–dos (C_{12}) Alumnos que reconocen las unidades de medida puestas para el problema, establecen una equivalencia de éstas con las unidades del sistema métrico decimal y utilizan la regla como instrumento de medida. Total alumnos ubicados en esta categoría: 19.

EXPLICACION:

HICE TODAS LAS RUTAS POSIBLES EN EL MAPA.
LUEGO MIRE LA QUE CREI MAS CORTA Y CON UNA REGLA
MEDI LOS TAMAÑOS DE LOS TUBOS Y LOS UBIQUE SOBRE
LA RUTA COMO LO CREI POSIBLE Y QUE ME SALIERA MAS
BARATO AL FINAL SOBRE LA RUTA P-D-L-T-Z ME
DIO UN TOTAL DE a=5, b=3 C=9, COMO b CUESTA
2 MILLONES CADA UNO. SUPUSE QUE a QUE MIDE LA MITAD
DE b CUESTA 1 MILLON Y C QUE MIDE EL DOBLE DE b
CUESTA 4 MILLONES, CADA EMPATE CUESTA 1 MILLON Y ME DIO
UN TOTAL DE 16 EMPATE YA CON TODOS LOS PRECIOS
SUME Y ME DIO UN TOTAL DE 63 MILLONES

Texto 3: Ejemplo categoría uno –dos. ***(E_8)***

Caso 2. En el proceso de medida, para identificar la ruta más corta, se pueden identificar los siguientes grupos de respuestas:

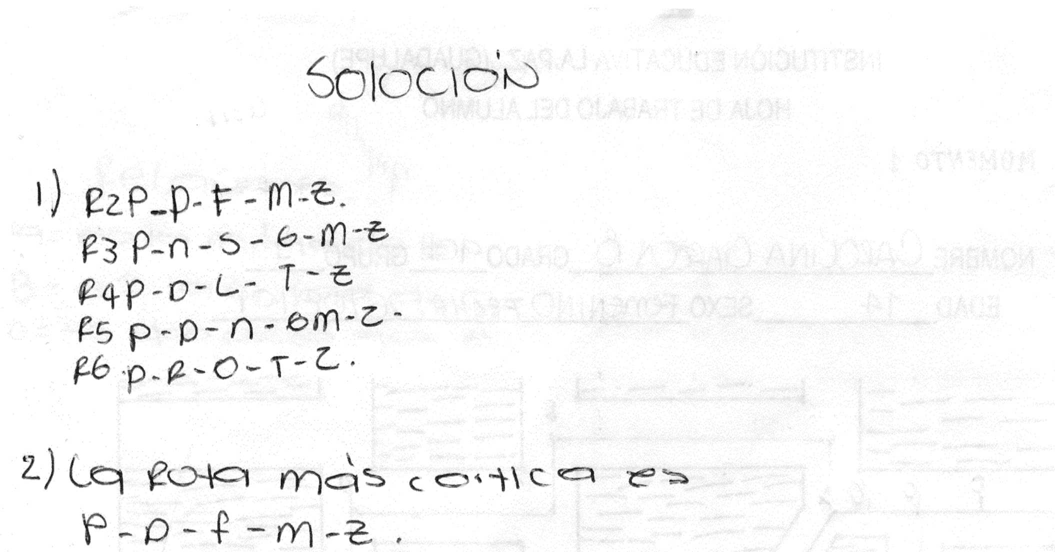
Categoría uno (C_1): Alumnos que identificaron a P-D-L-M-Z o P-D-L-T-Z como las rutas más cortas para unir los puntos P-Z. Lógicamente que fue el resultado de medir varias de ellas. Alumnos ubicados acá: 22.

> ***…al final sobre la ruta P-D-L-T-T-Z me dio un total de a=5, b=3, y c=9, como la b cuesta dos millones cada uno, supuse...***
>
> ***(E_8)***

Acá se debe entender que el proceso de medición de la ruta escogida es:

Medida de la ruta P-D-L-T-Z es: 5 a + 3 b + 9c.

Categoría dos (C_2): alumnos que hicieron el proceso de medición correctamente; pero que al comparar y escoger la ruta más corta, señalaron otras diferentes. Acá se ubican 13 alumnos.


Solocion

1) R2 P-D-F-M-Z.
R3 P-n-S-G-M-Z
R4 P-D-L-T-Z
R5 P-D-n-OM-Z.
R6 P-R-O-T-Z.

2) La Rota más cortica es P-D-f-M-Z.

Texto 4: Ejemplo categoría dos. ***(E_7)***

Caso 3. Con relación a la actividad de encontrar el menor valor de la obra, bajo las condiciones del problema, lo cual implicaba hacer las conversiones para obtener la medida en términos de b, se establecen las siguientes categorías de respuestas:

Categoría uno (C_1). Alumnos que expresaron la medida en las unidades dadas y que a partir de sus equivalencias y las conversiones debidas obtuvieron una medida del tramo más corto de PZ = 23.5 b. 22 alumnos.

Como los casos de:

SOLUCIÓN

① R2 = P - N - S - G - M - Z (b - c - c - b - a - a - b - b - c - c - c - b - a - b - c - a - c - a -
c - a - c - b)

R3 = P - D - F - Z (c - b - b - a - c - a - b - c - b - a - c - a - c - a - b - c - b - c - c)

R4 = P - R - O - T - Z (c - b - b - a - b - c - c - b - b - c - b - a - c - b - c - c - b - a - c - c)

R5 = P - D - L - T - Z (c - b - b - a - c - a - b - c - a - c - b - a - c - c - b - a - c - c)

R6 = P - N - G - M - Z (c - b - c - b - a - a - b - c - b - a - c - b - a - c - c - b - c - b - c - a - c -

R7 = P - D - G - M - Z = (c - b - a - c - a - b - c - b - a - c - a - c a - c - a - c - b)

② la Ruta 5 es la mas corta. a - c - a - c - a - b - c)

PRECIO EMPATES.

R2 = 6a, 7b, 9c = 26 b (52 millones) + 14 millones = 66 millones

R3 = 5a, 6b, 8c = 26,5 b (53 millones) + 11 millones = 64 "

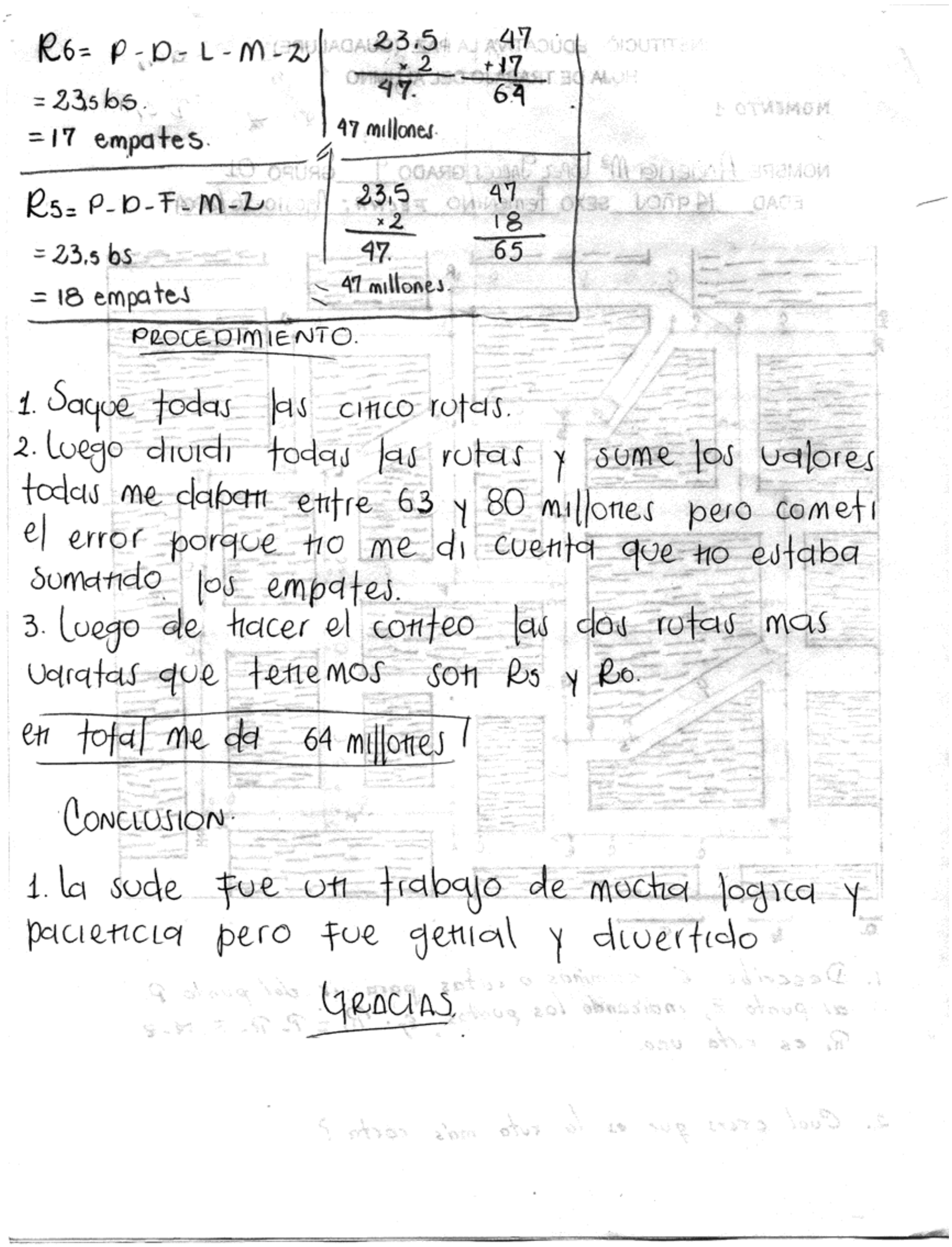
R4 = 3a, 8b, 9c = 27,5 b (55 millones) + 11 millones = 66 "

R5 = 5a, 5b, 8c = 23,5 b (47 millones) + 10 millones = 57 "

R6 = 7a, 8b, 11c = 33,5 b (67 millones) + 17 millones = 84 "

R7 = 7a, 5b, 8c = 24,5 b (49 millones) + 13 millones = 62 "

Texto 5: Ejemplo categoría uno. ***(E_{27})***



$R_6 = P - D - L - M - Z$

$= 23.5$ bs.

$= 17$ empates.

$23.5 \times 2 = 47$ | $47 + 17 = 64$

47 millones.

$R_5 = P - D - F - M - Z$

$= 23.5$ bs

$= 18$ empates

$23.5 \times 2 = 47$ | $47 + 18 = 65$

47 millones.

PROCEDIMIENTO.

1. Saque todas las cinco rutas.
2. Luego dividi todas las rutas y sume los valores todas me daban entre 63 y 80 millones pero cometi el error porque no me di cuenta que no estaba sumando los empates.
3. Luego de hacer el conteo las dos rutas mas varatas que tenemos son R_5 y R_6.

en total me da 64 millones!

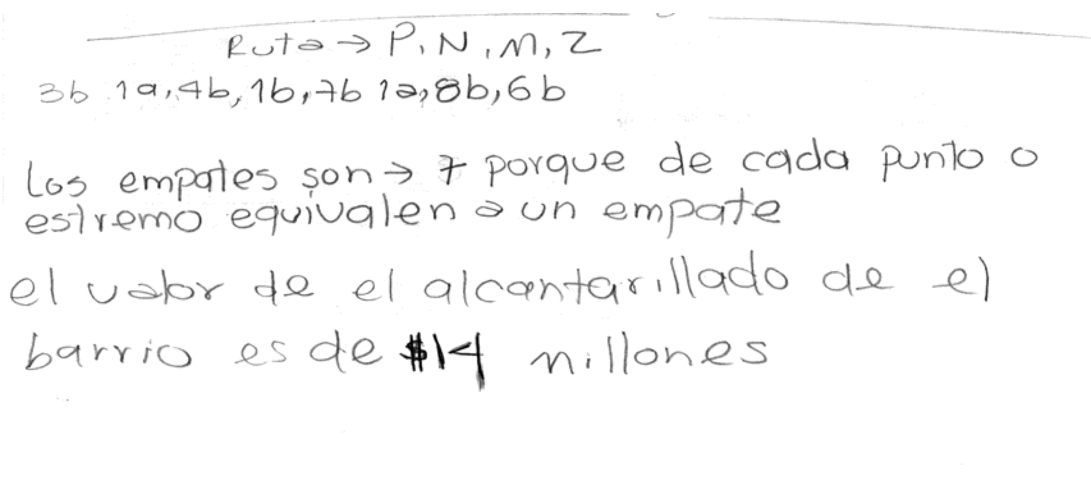
CONCLUSION.

1. la sude fue un trabajo de mucha logica y paciencia pero fue genial y divertido

GRACIAS.

Texto 6: Ejemplo categoría uno. ***(E₅)***

Categoría tres (C_3): Alumnos que no hicieron buen uso de las unidades y de sus equivalencias para hacer las respectivas conversiones y que al realizar los cálculos obtuvieron resultados alejados de los esperados: total 9 alumnos.


Ruta → P, N, M, Z
3b 1a, 4b, 1b, 7b 1a, 8b, 6b
Los empates son → 7 porque de cada punto o
estremo equivalen a un empate
el uabor de el alcantarillado de el
barrio es de $14 nillones

Texto 7: Ejemplo categoría tres. ***(E_{17})***

La tabla siguiente tabla (39) muestra los resultados por alumno y en las categorías descritas anteriormente.

SISTEMATIZACIÓN DE RESULTADOS

N	NOMBRE	caso a			caso b			caso c		
		C_{11}	C_{12}	C	C_1	C_2	C_3	C_1	C_3	
1	E_1		x			X				0
2	E_2		x		x			x		
3	E_3		x			X			X	
4	E_4		x			X			X	
5	E_5	X			x			x		
6	E_6		x		x			x		
7	E_7	X				X		x		
8	E_8	X			x			x		
9	E_9		x		x			x		
10	E_{10}	X			x			x		
11	E_{11}		x		x			x		
12	E_{12}	X			x			x		
13	E_{13}	X			x			x		
14	E_{14}		0			X				0
15	E_{15}	X			x			x		
16	E_{16}	X			x			x		
17	E_{17}	X				X			X	
18	E_{18}		x		x				X	
19	E_{19}		x			X			X	
20	E_{20}		x		x					0
21	E_{21}		x			X				0
22	E_{22}		x		x			x		
23	E_{23}		x		x			x		
24	E_{24}		x			X			X	
25	E_{25}	X			x			x		
26	E_{26}	X			x			x		
27	E_{27}		x		x			x		
28	E_{28}		x		x			x		
29	E_{29}	X			x			x		
30	E_{30}		x			X		x		
31	E_{31}		x		x			x		
32	E_{32}	X			x			x		
33	E_{33}	X				X			X	
34	E_{34}	X				X			X	
35	E_{35}		x			X			X	
	Total E.	13	21		22	13		22	9	4

Tabla 39: Situación 3. Distribución por grupos de respuesta

El hecho de que todos los estudiantes reconozcan a a,b,c como unidades de medida en esta situación particular, permite valorar el papel de la medición en el desarrollo del pensamiento métrico; se observa como las actividades previas, en las otras situaciones, favorecieron este logro. Además, la mayoría del grupo, 21 de los 35 estudiantes, establecieron equivalencias entre las unidades a, b y c; lo cual significa que se puso en juego la necesidad de medir unas unidades con otras, o de expresar (ya numéricamente) unas en términos de las otras; esto en un contexto particular, permitiendo: la interacción social y la referencia a un trasfondo social e importante para el alumno en la construcción de los procesos de medición.

De otro lado, los trece estudiantes (ver tabla 6) que hicieron el proceso de medición correctamente, pero se equivocaron en el momento de seleccionar la ruta más corta, manifestaron poner el énfasis en la medición, y no leen comprensivamente el problema planteado o hacen una estimación de la ruta más corta y no ensayan con las demás rutas.

En la socialización, se trató de analizar y corregir estos errores; pero buscando la generalización en los procesos de medidas, y los cálculos con medidas de longitud. Así mismo se propició extender estos conocimientos a otras magnitudes; de igual manera se revisaron los elementos conceptuales presentes en la situación.

6.4 SITUACIÓN 4: MEDIDAS DE SUPERFICIE

6.4.1 Momento 1. Medidas de superficie.

Se realizó los días 7 y 9 de septiembre, contando con la presencia de los dos profesores investigadores, cuyo papel era más de observadores que de orientadores de la actividad. En las socializaciones se hizo la mayor intervención.

6.4.1.1 Preliminares

Propósito: Identificar unidades de área y establecer relaciones entre ellas al medir áreas de superficies dadas.

Materiales: Hoja con ilustraciones, tijeras.

Descripción:

Se entrega al alumno una hoja (ver anexo 6) y se le pide medir la superficie, utilizando como unidad de medida la superficie S1.

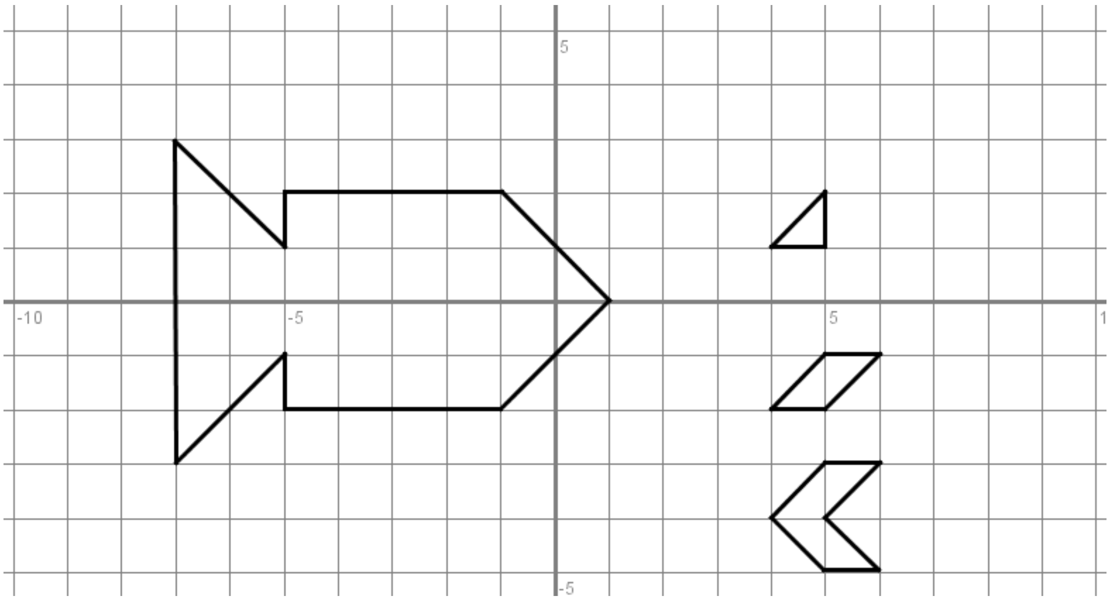


Gráfico 11: Superficie uno situación cuatro.

Se le pide además que mida esta otra superficie, utilizando como unidad de medida S2.

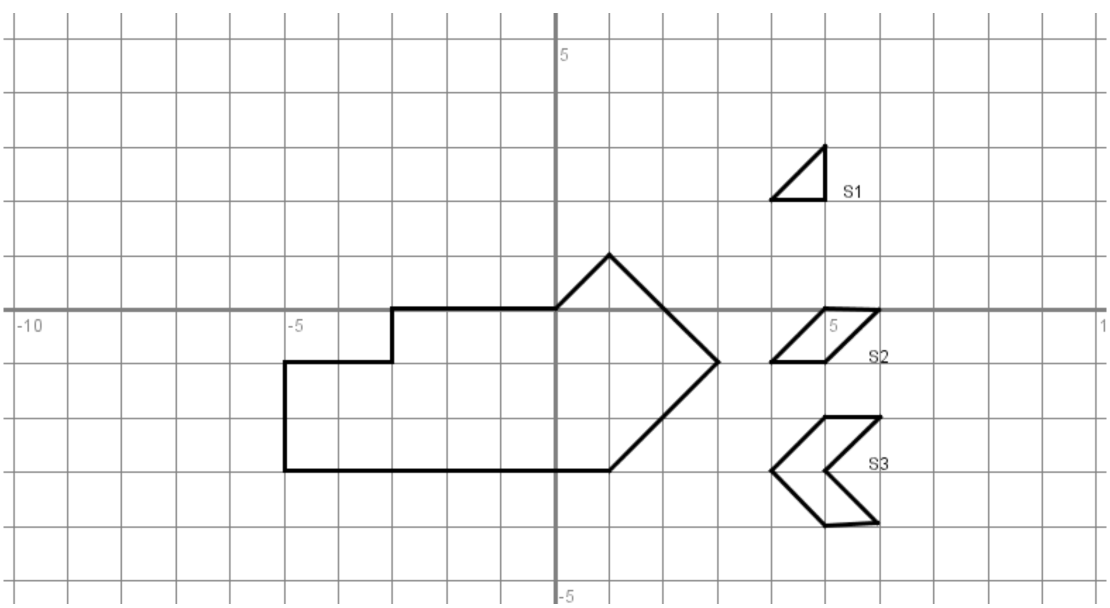


Gráfico 12: Superficie dos situación cuatro

Compara las unidades S1, S2 y S3. ¿Qué pasaría si se midiera la superficie del pez utilizando S2 como unidad de medida y si se utilizara S3?, ¿Qué pasaría si se midiera la segunda superficie con S1? (Ver anexo 5).

Análisis a priori

Se espera que el estudiante busque estrategias para iniciar la medida con S1 (**etapa de acción**), podrá hacerlo recortando el triángulo del papel y midiendo con él la superficie dada, o podrá utilizar algún tipo de rayado, como también utilizando regla, y tal vez pensando en alguna fórmula o algoritmo para las figuras que observe como polígonos conocidos.

Los estudiantes acudirán a sus compañeros y profesores para preguntarles si están haciendo lo correcto, a pedir sugerencias para resolver el problema: (**comunicación**).

Luego se anima a los estudiantes a que descubran la relación entre las unidades dadas S1, S2, S3, y a que entiendan así la construcción de un sistema de unidades de área: S1 = ½ de S2; S2 = ½ de S3; S3 = 2S2 = 4S1; S2 = 2S1.

De acuerdo con las relaciones establecidas anteriormente, se observará que la medida de la superficie del pez es: 56 **S1** = 28 **S2** =14 **S3**.

Se presentará una etapa de comparación y discusión sobre los resultados obtenidos, se podrán hacer confrontaciones con las dos gráficas presentadas para que se **validen** las diferentes respuestas y procedimientos obtenidos.

6.4.1.2 Análisis a posteriori:

El desarrollo de la actividad generó impacto en los estudiantes, porque ellos esperaban que se les preguntara por las fórmulas para calcular el área de diferentes figuras y se sorprendieron al ver las unidades utilizadas y las múltiples formas de resolver los problemas presentados. Manifestaron agrado e interés durante toda la actividad. No se presentaron interrupciones.

Para esta situación se estableció una categoría única, dado que todos los alumnos se movieron entorno a respuestas como las descritas en los análisis a priori. Es muy significativo ver como todos fueron muy amplios en la explicación dada a los procedimientos utilizados en la medición:

- Utilizaron las divisiones en cuadrados y establecieron las equivalencias con las figuras dadas. Luego expresaron los resultados en las unidades pedidas.
- Dividieron cada figura, según la unidad S3, luego según la unidad S2, y contaron respectivamente.
- Marcaron con colores según reconocían y contaban las unidades contenidas en las dos figuras.

Lo anterior se puede evidenciar en explicaciones como las siguientes:

SOLUCION

Procedimiento #1

1- Dividi el pez en cuadrados y luego esos cuadrados los dividi a la mitad lo que me daba la medida exacta de S_1 y me dio 56.

2- Luego me di cuenta de que dos unidades de S_1 daban la medida exacta de S_2 entonces, primero hice la operación en dividir 56 en 2 y me dio 28 luego verifique y lo confirme.

3- Ahora supose que S_3 era una tercera parte de 56 lo que equivalia a las dos medidas anteriores y medaba 14 S_3.

Procedimiento ⇒#2.

1- Dividi las dos figuras en la medida de S_3 y luego del conteo divide eso mismo en S_2 y conte y asi susesiva-mente hasta terminar y verifique losmismos valores.

Procedimiento #3

1- Marqué con un color cada medida en cada figura.

1Respuesta.

Compare las tres medidas y me di cuenta que S_1 son dos S_2 que S_2 son dos S_3 que S_3 son dos S_2 y cuatro S_1.

Texto 8: Ejemplo categoría única. ***(E$_5$)***

SOLUCION.

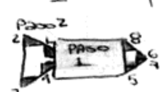
1) MEDIDA DE PEZ CON S1

1) Divido la figura del pez en tres partes, la mitad de esta figura es como base un cuadrado y la base de medida s1 es un triangulo (la mitad de un cuadrado). Por tanto cuento o enumero la cantidad de cuadrados y según la cantidad q' sean los multiplico por dos dandome así parte del area del pez.

[NOTA] = la medida de c/ cuadrado es de 1,5 cm^2

* como parte de la base cuadrada del pez dividiendola en cuadrados de 1,5 cm^2 da como total 16 cuadritos de este tamaño por tanto cabiendo 2 S1 por c/u de estos su total es asi segun el procedimiento: 16.2 = 32 S1.

2) Para tomar la cantidad de las otras dos partes de la fig. en S1 tomo las partes en donde se unen las dos vertices de c/lado del pez y segun esto se puede notar cuantos S1 hay dando parte del resultado, q' son 8 S1



3) Tomo el resto de los cuadros q' me sobraron (total de 8 cuadros de 1,5 cm^2) divididos en de a 2 S1 da asi: 8.2=16

TOTAL: 32 + 8 + 16 = 56 S1. S2 = 28 S3 = 14

(2) Divido la fig. en cuadritos de 1,5 cm^2 y me dan 82 cuadritos. y S2 son 4 cuadritos entonces.

$\frac{82}{4}$ = 20,5. S2. S1 = 41,0

(3) S1 es la mitad de S2 (1/2) (4)

Texto 9: Ejemplo categoría única. ***(E$_{14}$)***

Como se observa en los resultados anteriores, algunos estudiantes, utilizan relaciones numéricas para responder a las preguntas.

- el pez con S1, mide 56 S1; primero miré que un cuadrado equivale a 2S1, por lo tanto me bastó con medir de dos en dos, eceptuando algunos bordes, medieron 28S1 al terminar la mitad y lo multipliqué con 2, para evitarme perder tiempo.

- la segunda figura en S2 mide 20,5 S2. Miré que el paralelogramo equivale a un cuadrado, y conté los cuadrados que habían en la figura, hubieron 20 y me sobró medio, por lo tanto es 20,5 la respuesta.

NOTA: En las dos figuras utilicé color para no confundirme y no volver a contar los mismos.

- Nos daría con S2 la figura del pez, 28 S2, porque un paralelogramo equivale a un cuadrado, entonces dividí 56 entre 2. Con S3 daría 14 S3 porque éste equivale a dos paralelogramos. la Segunda superficie con S1 dá 41 S1 porque éste equivale a la mitad del paralelogramo.

S1 es la mitad de S2 y S2 es la mitad de S3.

$S_1 = \frac{1}{2} S_2$

$S_3 = 4 S_1$

$S_2 = \frac{1}{2} S_3$

$S_2 =$

Texto 10: Ejemplo categoría única. *(E_{27})*

SOLUCION

R\\1= MIDIENDO EL PEZ CON EL TRIANGULO S1
MEDIO 56=S1 PORQUE DIVIDI LA FIGURA EN TRIANGULITOS
LOS CONTE Y MEDIO 56

R\\2= MIDIENDO LA OTRA FIGURA CON S2 ME DIO
20½=S2 PORQUE DIVIDI LA FIGURA EN LA FIGURA S2
ME DIO 79 Y DE LA FIGURA S1 ME DIO 3
Y COMO LA FIGURA S1 ES EQUIVALENTE A ½ DE S2

R\\3= SI MIDIERAMOS EL PES CON S_2 DARIA LA MITAD
OSEA $28=S_2$ PORQUE S_1 ES LA MITAD DE S_2

R\\4= SI MIDIERAMOS EL PES CON S_3 DARIA LA MITAD
DE S_2 ASE $14=S_3$ PORQUE S_2 ES LA MITAD DE S_3

R\\5= SI MIDIERAMOS LA SEGUNDA FIGURA CON S_1 DARIA EL DOBLE
QUE DIO CON S_2 OSEA $41=S_1$ PORQUE S_1 ES LA
MITAD DE S_2

S_1 ES LA MITAD DE S_2
S_1 ES EL LA CUARTA PARTE DE S_3
S_2 ES LA MITAD DE S_3

Texto 11: Ejemplo categoría única. ***(E**$_{32}$**)***

En este caso, se puede evidenciar como los estudiantes reconocen las relaciones entre las unidades de área, y las utilizan para resolver problemas. Utilizan técnicas de cortar y pegar para componer áreas, y explican coherentemente los procedimientos utilizados.

En cuanto a la medida de la superficie de las figuras presentadas a los estudiantes, se observa naturalidad en el manejo de las unidades: se reconocen éstas y se utilizan procedimientos métricos y numéricos para expresar las medidas pedidas; todos los estudiantes dieron respuestas muy cercanas a las esperadas: El pez mide 56 S1, el pez mide 28 S2, el pez mide 14 S3.

6.4.2 Momento dos. Medidas de superficie: apartamentos.

Se realizó el 16 de septiembre de 2004, aunque estaba programada para el 13 de septiembre, pero se canceló porque los estudiantes no asistieron al colegio, debido a una jornada pedagógica para todos los docentes de la institución.

6.4.2.1 Preliminares

Propósitos:

- Identificar unidades de medida y su escala, para estimar la medida de un perímetro dado y la superficie que encierra.
- Medir una superficie, dada una unidad de medida.
- Estimar una medida de una magnitud, dada una unidad de medida y una escala de medición.

Descripción: Para el desarrollo de esta situación, inicialmente, se entregará un plano de un apartamento (ver anexo 7), en donde el alumno se podrá familiarizar con la representación de las unidades puestas en escala, y su relación con las dimensiones reales.

La representación tiene una serie de información acerca de situaciones de medición, como el área total que allí está representada, que obliga a quien se enfrenta a la situación a identificar la unidad de medida real (m^2). También pone en juego las diferentes mediciones de los espacios que componen el total de la superficie; de éstas se pueden inferir las unidades de superficie y de longitud, y su representación a escala.

Una vez identificadas las unidades y las medidas, se establecen relaciones entre éstas y las dimensiones de otros objetos que allí aparecen como: ancho de una puerta, largo y ancho de una cama, largo y ancho de una nevera, estufa o lavadero; situaciones que no serían objeto de medición en la figura dada, sino de estimación de sus medidas.

Se orienta la actividad con preguntas como las siguientes:

> ¿Cuál es el largo y el ancho de cada una de las habitaciones?, ¿Cuál es su área?, ¿Cuál es el largo y el ancho de salón comedor? , ¿Cuál es su área?, ¿Cuál es el largo y el ancho de la cocina?, ¿Cuál es su área?,¿Cuál es el largo y el ancho del baño? ¿Cuál es su área?.

Se entrega un plano como el siguiente a cada alumno con las siguientes tareas: ¿Cuánto mide el área y el perímetro total del apartamento?, ¿Cuánto miden el área y los perímetros de : la cocina, los baños, cada una de las alcobas, el salón comedor y el patio?, ¿Cuánto miden las ventanas?

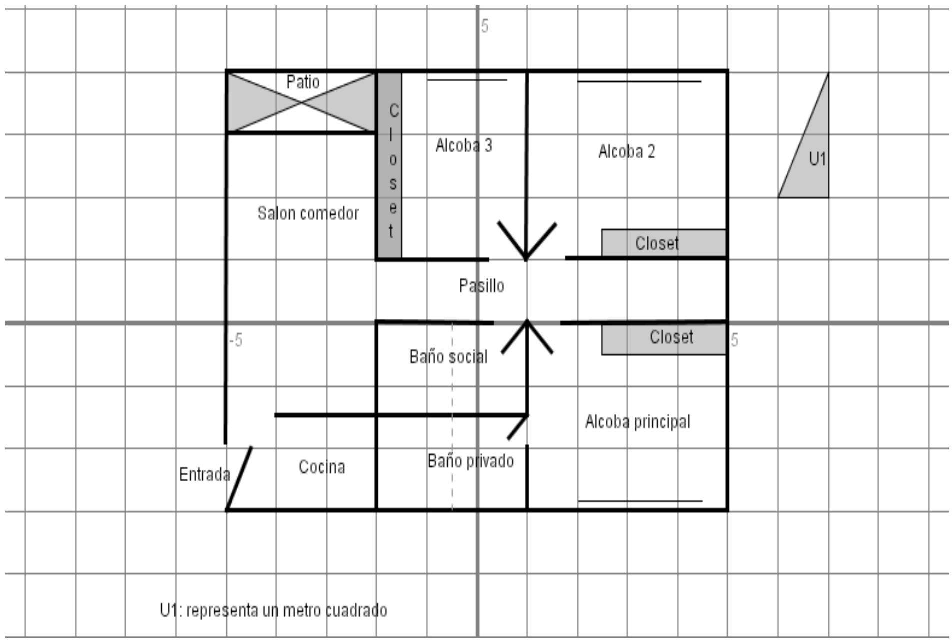


Gráfico 13: Superficie tres situación cuatro, momento dos.

Análisis a priori

Se espera que el alumno identifique, no sólo la unidad dada, como unidad de medida para la superficie representada; sino también que descubra que ella está puesta allí para representar el metro cuadrado como unidad patrón de medida; se adopta la forma de la unidad como un triángulo, para evitar que ésta siempre sea identificada con el cuadrado que mide igual área. Al realizar la medida de la superficie encerrada por el contorno exterior de la superficie representada, ésta será equivalente a 70 unidades cuadradas de las que allí se dan para la medición. Si se considera que cada U que allí aparece equivale a un $m^{2,}$ se tendrá entonces una superficie de $70m^2$. Ello da cuenta de la capacidad del alumno para identificar la unidad de medida y su representación. Al hacer preguntas como cuál es el área de los closets y cuál es el área disponible de las habitaciones, se debe hacer una división de la

unidad para que el estudiante asuma la divisibilidad de la unidad de medida como continua y objeto de infinitas divisiones; ya que allí no es posible replicar la unidad en forma entera, como se muestra en la figura anterior.
El área del closet principal será ½ U+ ½ U+ ¼ U, el closet de la alcoba dos será ½ U+½ U y el closet de la alcoba tres será ½ U+ ½ U+½ U; por lo que se tiene 7(½ U) + ¼ U. Lo que implica que si U = un metro cuadrado (1 $m^{2)}$, entonces su medida real será de 7/2 m^2 + ¼ m^2 = 3m^2 y ½ m^2+ ¼ m^2 = 3 m^2 y ¾ m^2.

Al estimar las longitudes del ancho de las ventanas, se debe descomponer la unidad cuadrada en sus componentes lineales; por tanto, se espera que el estudiante tome el lado de la unidad cuadrada como la unidad de longitud para los segmentos que representan el ancho de las ventanas. Lo cual implicará la relación de U = m; por lo que encontrará que cada una mide: 1m (ventanas de los baños), 1m + ½ m (ventana de alcoba tres), 2m + ½ m (ventanas de las otras dos alcobas, respectivamente).

En la siguiente actividad, el alumno se enfrenta a una situación en la que se ha conservado el área del apartamento; pero se ha reducido su representación, tanto de la superficie como de la unidad de medida, conservando desde luego sus proporciones. También se ha variado la disposición de los sitios del apartamento. El alumno tendrá que determinar si los dos apartamentos son equivalentes en sus superficies y en su distribución.

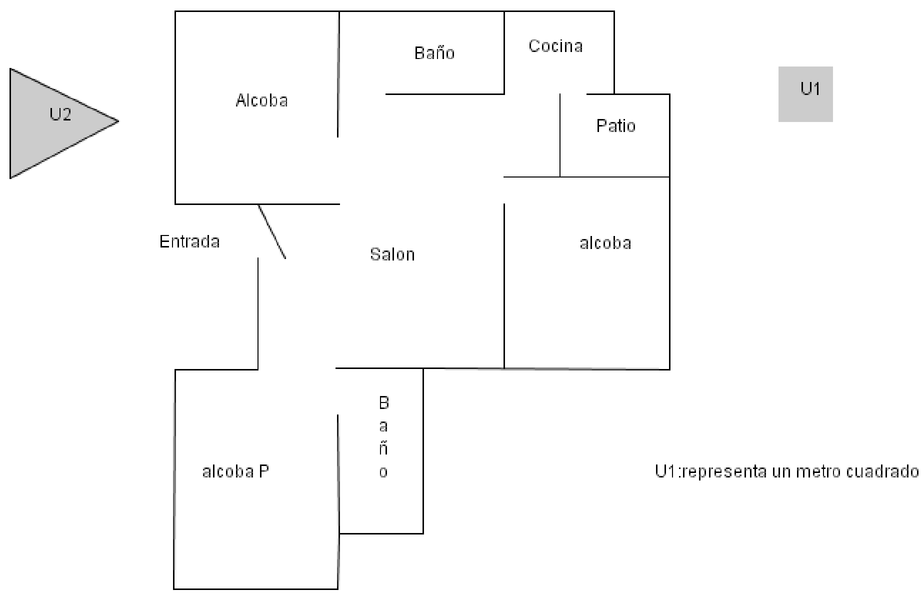


Gráfico 14: Superficie cuatro situación cuatro, momento dos.

Al medir nuevamente las superficies que conforman el plano, se espera que el alumno compruebe que, a pesar de las variaciones, las medidas en términos de la unidad dada se han conservado, y por tanto, si la unidad sigue siendo la representación de un m^2, entonces las dos superficies, en términos reales, tendrían la misma medida, es decir, serían equivalentes.

Tengamos presente que la equivalencia entre las medidas se puede verificar, al aplicar la unidad mediante una técnica de tapizado en la superficie a medir. Es importante permitir al estudiante que identifique aquellos aspectos que sufrieron cambio, como es el caso del perímetro, que puede ser medido en términos de la nueva unidad.

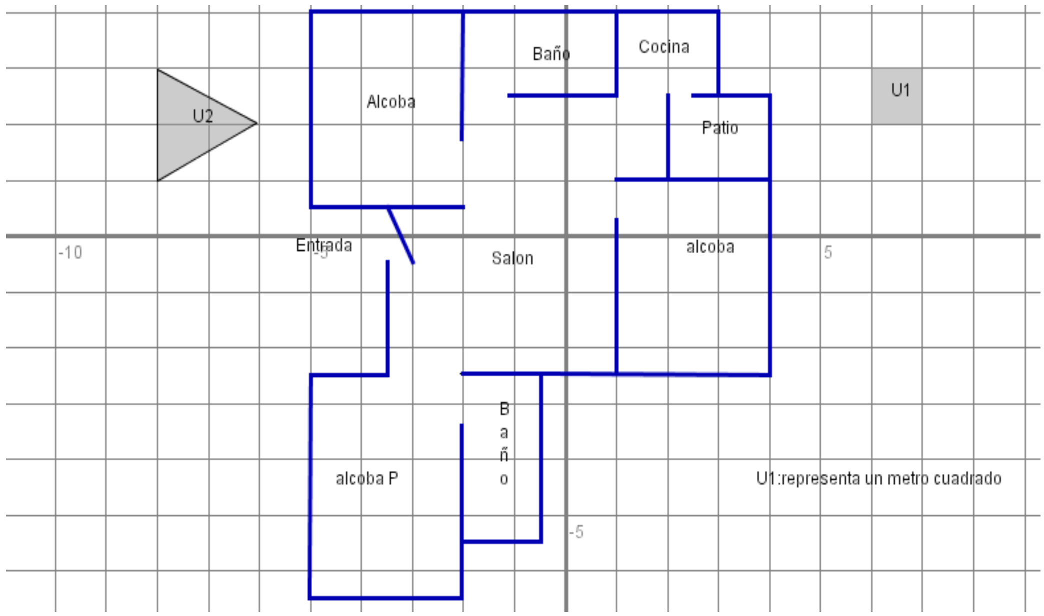


Gráfico 15: Superficie cinco situación cuatro, momento dos.

6.4.2.2 Análisis a posteriori:

En esta fase, en forma semejante a como se procedió a la anterior, los alumnos se agrupan en una categoría única; pues todos dieron respuestas muy acertadas, con las medidas esperadas (70 m^2) para el área total del apartamento, y explican ampliamente sus procesos; demostrando reconocimiento de unidades de área, estableciendo relaciones entre ellas, calculando y estimando las medidas solicitadas. Además, se observan avances en los procesos de reflexión frente a los resultados obtenidos. Muchos de los estudiantes se comunicaron para comparar sur respuestas y se replantearon algunas de ellas; ahora no sólo se preocupan por la asignación numérica, sino también por las unidades correspondientes. Lo anterior se puede evidenciar en los siguientes trabajos.

SOLUCION

R\\1= EL AREA TOTAL DEL APARTAMENTO ES 70^{U1} PORQ'
2 CUADROS EQUIVALEN A DOS U1 CONTE DE A DOS
CUADROS MEDIO 35 LOS MULTIPLIQUE POR DOS Y ME DIO 70

EL PERIMETRO TOTAL DE LA CASA ES 34^{P1} PORQ' CONTE CADA
CUADRO DEL REDEDOR DE LA CASA

EL AREA DE LA COCINA $4 Y \frac{1}{2}$ U1 PORQ' UN U1 EQUIVALE A UN
CUADRO Y HAY $4 \frac{1}{2}$ CUADROS
EL PERIMETRO DE LA COCINA ES 9 P1 PORQ' MEDI CADA BORDE
DE LOS CUADROS DE LA COCINA

EL AREA DE LOS BAÑOS ES LA MISMA OSEA $4 Y \frac{1}{2}$ U1
EL PERIMETRO DE LOS BAÑOS ES LA MISMA OSEA 9 PORQ'
MEDI 8 P1 Y $2 \frac{1}{2}$ P1 ESO EQUIVALE A 9 P1

EL AREA DE LA ALCOBA PRINCIPAL ES 12 U1 Y EL PERIMETRO ES 14 P1
EL AREA DE LA ALCOBA 2 ES 12 U1 Y 14 P1
EL AREA DE LA ALCOBA 3 ES 9 U1 Y EL PERIMETRO ES 12 P1
EL AREA DEL SALON ES $13 \frac{1}{2}$ U1 Y EL PERIMETRO ES 12 P1
EL AREA DEL PATIO ES 3 U1 Y EL PERIMETRO 8 P1
EL PERIMETRO DE LA VENTANA 1 ES $2 Y \frac{1}{2}$ P1
EL " " " " 2 " $2 Y \frac{1}{2}$ P1
" " " " " 3 " $1 Y \frac{1}{2}$ P1

Texto 12: Ejemplo categoría única. ***(E_{32})***

Para poder ver las unidades cogí (4) cadritos chiquitos ⊞ y cada uno de esos lo conte abian 18 y los multiplique por 4 que valian cada uno ej= ⊞ = ⊠ entonces me dio 68 pero me falto los otro (cuatro) cuadritos de la entrada pero solo abia uno entero y el otro lo vali por, 75. entonces me dio 69,75.

Patio: tiene 3 unidades porque cada cuadro chiquito vale por 1 unidad. y 8 P.

Alcoba 3: tiene 9 unidades y 12 P.

CASA: 69,75 unidades y 35 P con 25.

Alcoba 2: 12 unidades y 14 P

Alcoba Principal: 16 U ~~[illegible]~~ y un medio → contandolo con el baño privado.

baño social: 4 U y un medio y de Perimetro 9.

salón comedor: tiene 13 unidades y de P tiene 11 y Medio

cocina: tiene 3/2 con 75 Unidad y de Perimetro tiene 6 con 25.

Texto 13: Ejemplo categoría única. *(E_{24})*

Solución.

1(a) El are del 1er apartamento son 70 m^2,
el perimetro son 34 m

(b) la cocina mide 4.5 m^2
El perimeto so 9 m

(c) Baños: A: 4,5 m^2
P: 9 m

(d) Alcoba (A) → A : 12 m^2
P: 14 m

Alcoba (B) → A: 12 m^2
P: 14 m

Alcoba (c) → A: 9 m^2
P: 12 m

(e) SALON COMEDOR → A: 9 m^2
P: 12 m

(f) PATIO : A : 3 m^2
P: 8 m

(G) VENTANAS: ~~A~~ C y B → 2.5 m Ancho.
A → 1.5 m Ancho.

Texto 14: Ejemplo categoría única. *(E_{14})*

El Primer Apartamento ← PERIMETROS.

- El perímetro del 1er Apartamento es de 34 P1 (m)
- la cocina; 9 P1 (m)
- El baño privado y el social; 9 P1 (m) y 9 P1 (m)
- la alcoba principal; 14 P1 (m); la alcoba 2; 14 P1 (m); 3; 12 P1 (m).
- El salón comedor: 15 P1 (m) y el patio; 8 P1 (m).

NOTA: para encontrar el perímetro de los baños conté el perímetro de los dos juntos y luego lo dividí por 2.

* Si son equivalentes, ya que este también mide 70 U1 (m^2) y mide 35 U2 (2 m^2).
* El perímetro del Apartamento es de 40,5 P1 (m). Lo hice contando raya por raya y teniendo en cuenta que 0,5 P1 (m) + 0,5 P1 (m) = 1 P1 (m)

- El área de la cocina es de 3 U1 (m^2) y el perímetro 7 P1 (m)
- El área del patio es de 3 U1 (m^2) y el perímetro es 7 P1 (m)
- " " " la alcoba es de 10,5 U1 (m^2) y el perímetro es 13 P1 (m)
- Baño = 4,5 U1 (m^2) y 9 P1 (m)
- Salón: 21 U1 (m^2) y 24 P1 (m)
- Alcoba = 10,5 U1 (m^2) y 13 P1 (m)
- Baño = 3,5 U1 (m^2) y 8 P1 (m)
- Alcoba P. = 12 U1 (m^2) y 14 P1 (m)

Texto 15: Ejemplo categoría única. ***(E_{27})***

Según los resultados obtenidos con el grupo, en esta situación, puede decirse que la construcción de los conceptos y procesos asociados a la medida de longitudes se hace similar a los procesos de reconocimiento y medida de superficies, especialmente en cuanto a la utilización de unidades no convencionales y unidades convencionales. Las amplias explicaciones dadas por los estudiantes permiten corroborar la afirmación anterior. Además se logró que se diera el paso de unas unidades a otras y se refinaran los procesos para medir áreas y perímetros, con unidades del sistema métrico decimal.

6.5 SITUACIÓN CINCO: RECORRIDO CICLÍSTICO

Se realizó el lunes 26 de septiembre de 2004, por tratarse de la última situación, se utilizaron las dos últimas horas de clase, contando con la presencia de los dos profesores investigadores. Los estudiantes estaban a la expectativa con motivación y empeño recibieron los materiales y las orientaciones.

6.5.1 Preliminares.

Propósitos:

- Construir y utilizar escalas de medición.
- Uso de instrumentos de medida.
- Aproximación y estimación de una medida.
- Cálculo con unidades de medida.

Materiales:

Mapa de la ciudad de Medellín. (Ver anexo 8).

Hoja de trabajo con las instrucciones para el alumno.

Regla y compás.

Descripción:

Se pide a los estudiantes que señalen un recorrido de una competencia ciclística de 175 Km, utilizando un mapa de la ciudad de Medellín (gráfico 16), para un circuito por las vías del centro y sus alrededores. Se sabe que entre las estaciones Alpujarra y Exposiciones, del Metro de Medellín, hay 287 metros, medidos desde el punto donde termina la plataforma Alpujarra y el punto donde inicia la plataforma Exposiciones.

Téngase en cuenta que:

- La competencia parte, en sentido norte – sur, del Centro comercial Camino Real en la Avenida Oriental; allí mismo es la llegada.
- Se debe respetar el sentido de las calles y carreras para la circulación de vehículos en situación normal.
- Las vueltas del recorrido deben ser las mismas, y no inferiores a 5.5 kilómetros, ni superiores de 6 km.

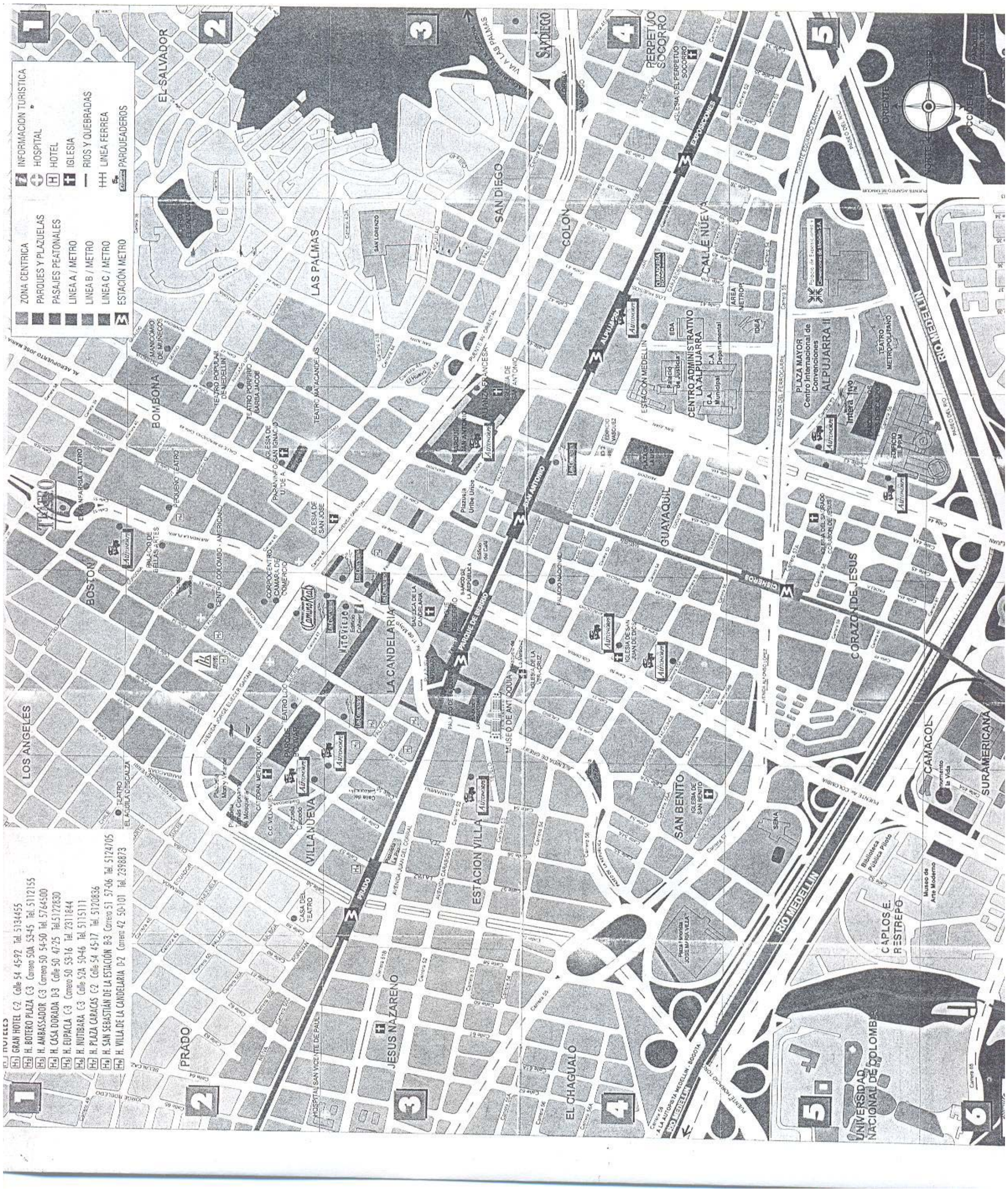


Gráfico 16: Mapa de la ciudad de Medellín[9],

[9] Obtenido Metro de Medellín Julio 2004.

Análisis a priori

En la etapa de acción, se espera que los estudiantes, después de interpretar lo que se les pide, midan la distancia (en la hoja), entre las dos estaciones determinadas. Además de conocer y explorar el mapa, midiendo y comparando. Allí el estudiante tendrá que identificar una escala a partir del hecho dado entre las distancias de las dos estaciones del metro, mencionadas en el problema. Esto es, que por 29 mm medidos sobre el mapa, se equivalen a 287 m reales, lo que lleva a plantear una correspondencia de 10 m reales por cada milímetro medido sobre el mapa, aproximadamente.

En esta situación cobra especial importancia la medida de tramos pequeños, en donde será muy relevante tomar el milímetro siguiente o el anterior en cada medición, lo que implica para el resultado que se tomen aproximadamente 10 metros en el recorrido.

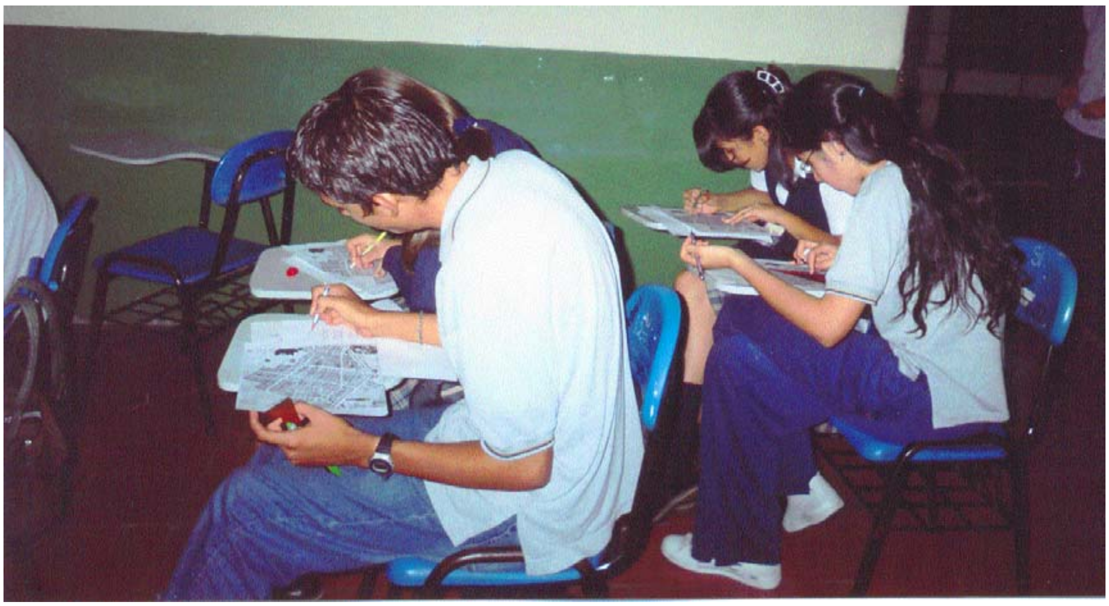
La capacidad del alumno para estimar se pondrá en juego al tener que buscar recorridos no inferiores a 5.5 km ni superiores de 6 km. Ello dará al juego un mecanismo de validación en medio de la diversidad de posibilidades que permite. Se espera vueltas muy cercanas a 5,8 Km y un número muy cercano a 30 vueltas.

6.5.2 Análisis a posteriori

Desde el punto de vista de las actitudes, es importante destacar la motivación del grupo frente a la situación planteada, como se evidencia en la fotografía 3.

Inicialmente los estudiantes preguntan por la “escala”, y la profesora les orienta que lean las instrucciones, midan es el croquis según las indicaciones y hagan la deducción de la escala.

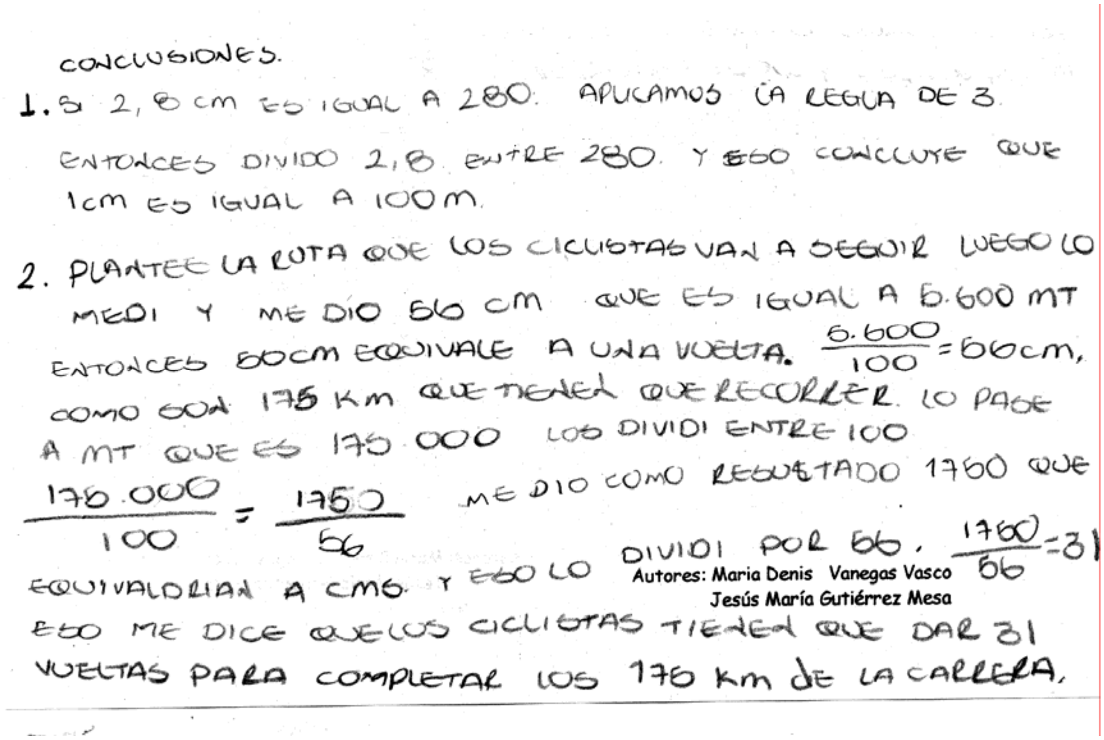
El ambiente de la situación es de participación y familiaridad con el problema.



Fotografía 3. Estudiantes realizando las actividades de la situación cinco.

Frente a los procedimientos utilizados se destacaron dos formas de solucionar el problema: (ambos se ubican en la categoría 1, porque desarrollan procesos según lo esperado)

Categoría uno - uno (C_{11}): Alumnos que toman el tramo indicado en el planteamiento, 287 metros entre las estaciones alpujarra y exposiciones, lo miden con la regla y construyen una escala sobre el mapa para realizar la tarea, toman cada centímetro medido con la regla equivalente a 100 metros para el recorrido.



CONCLUSIONES.

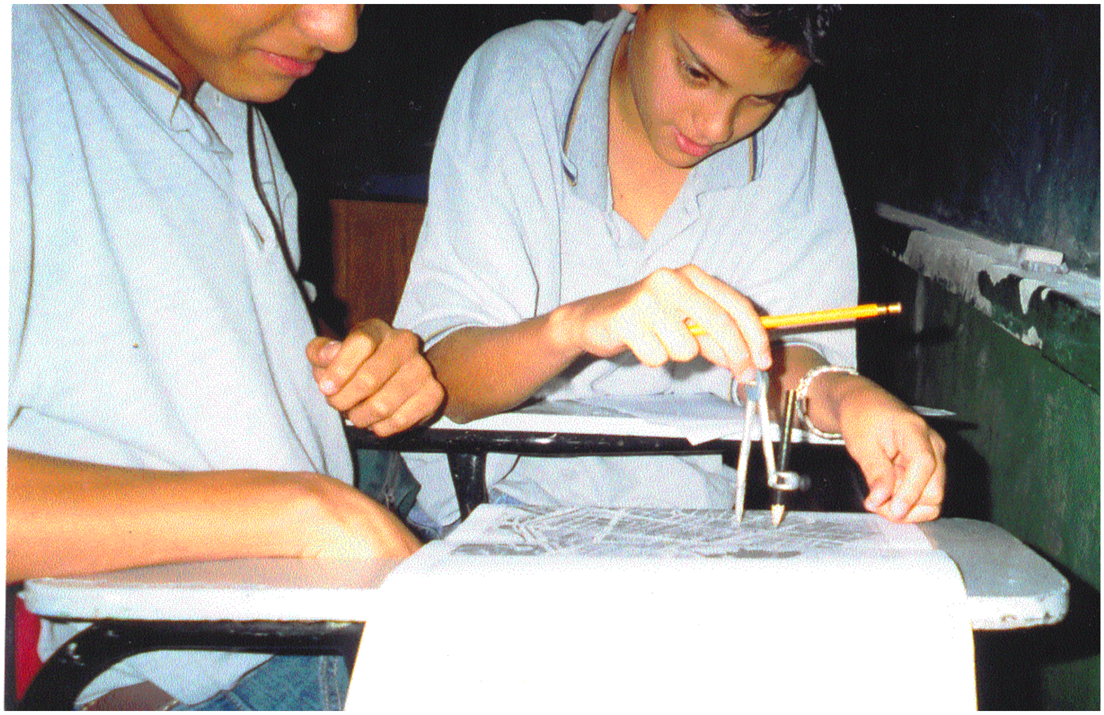
1. SI 2,8 CM ES IGUAL A 280. APLICAMOS LA REGLA DE 3
ENTONCES DIVIDO 2,8 ENTRE 280. Y ESO CONCLUYE QUE
1cm ES IGUAL A 100 m.

2. PLANTEE LA RUTA QUE LOS CICLISTAS VAN A SEGUIR LUEGO LO
MEDI Y ME DIO 56 cm QUE ES IGUAL A 5.600 MT
ENTONCES 56cm EQUIVALE A UNA VUELTA. $\frac{5.600}{100} = 56$cm,
COMO SON 175 Km QUE TIENEN QUE RECORRER. LO PASE
A MT QUE ES 175.000 LOS DIVIDI ENTRE 100
$\frac{175.000}{100} = \frac{1750}{56}$ ME DIO COMO RESULTADO 1750 QUE
EQUIVALDRIAN A CMS. Y ESO LO DIVIDI POR 56. $\frac{1750}{56} = 31$
ESO ME DICE QUE LOS CICLISTAS TIENEN QUE DAR 31
VUELTAS PARA COMPLETAR LOS 175 km DE LA CARRERA.

Autores: Maria Denis Vanegas Vasco
Jesús María Gutiérrez Mesa

Texto 16: Ejemplo categoría uno-uno. ***(E₈)***

Categoría uno - dos (C_{12}) Alumnos que toman el tramo entre las dos estaciones mencionadas y lo trasladan sucesivamente sobre la trayectoria escogida; para ello lo replican en un papel o utilizan un compás, (fotografía 4). Calculan que se necesitan de unos 20 tramos similares para obtener 5,6 Km y que se requiere de 31 o 32 vueltas para el circuito de 175 Km.



Fotografía 4. Estudiantes realizando las actividades de la situación cinco. Categoría uno-dos ***(E$_{32}$) y (E$_{16}$)***

PROCEDIMIENTO

PRIMERO MEDI LAS ESTACIONES Y ME DIERON 2.8CM
DESPUES BUSCAMOS UN NUMERO QUE NOS DIERA
EN NUMERO DE EMPATES Y FUE 20 DESPUES
MULTIPLICAMOS 20 X 2.8 ESTO MEDIO COMO RESULTADO
5.6 DESPUES BUSCAMOS EL NUMERO DE VUELTAS.
QUE HAY QUE DAR Y FUE 31.25 MULTIPLICAMOS
5.6 POR EN # DE VUELTAS Y ESODIO COMO RESULTADO
175 KM

PARA MEDIR LA CALLE CORTE UN PAPELITO QUE MEDIA 2.8 Y MEDI LAS
CALLES

Autores: Maria Denis Vanegas Vasco
Jesús María Gutiérrez Mesa

Texto 17: Ejemplo categoría uno-uno. ***(E$_{32}$)***

En términos del resultado final, todos los alumnos señalaron recorridos que inician en la Avenida Oriental, Camino Real, San Diego, Palacio de Exposiciones, Avenida del río, Plaza Minorista, los puentes de la Avenida Oriental; punto de llegada, la Avenida Oriental. Recorrido que efectivamente, como se señaló en los preliminares, cumple con las condiciones del problema, y para completar la solución del problema se requieren entre 31 y 32 vueltas, respuesta dada por todos los alumnos.

En esta situación se dieron procedimientos de medir, calcular y estimar, puesto que los estudiantes usaron adecuadamente las unidades de longitud del sistema métrico decimal, y buscaron instrumentos apropiados para medir (reglas graduadas y compás); identificaron el rango de la magnitud (longitud) y operaron con las medidas encontradas.

Los resultados de las dos categorías demuestran que los procesos relativos al pensamiento métrico, propuestos por los Lineamientos Curriculares, evolucionaron notoriamente a través de las situaciones anteriores, en la mayoría de los estudiantes.

7. CONCLUSIONES

7.1 LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

El currículo propuesto en Colombia, para el área de matemáticas, específicamente en lo relacionado con el desarrollo del pensamiento métrico, permite la creación de metodologías que dinamicen e integren los conceptos relativos a las magnitudes y a sus mediciones en contextos significativos para los estudiantes, muy coherentes con su realidad.

En cuanto a los objetivos propuestos en la investigación (sección 2.1), se fueron logrando a través del análisis teórico y didáctico, y más particularmente, durante el desarrollo de las situaciones, con sus respectivos resultados.

Con relación a los procesos desarrollados a través de las situaciones se pueden establecer las siguientes observaciones:

- Es connatural al proceso de medir establecer subdivisiones, que se constituyen en la unidad de medida apropiada, para hacer coincidir una subdivisión con el extremo o tope de la cantidad objeto de la medición; situación que también está asociada al hecho de elegir cual es el instrumento y unidad más apropiada para ciertos tipos de medición. En las situaciones de medida en las cuales la unidad de medida resulta mayor que el objeto a medir, se recurre a subdividir la unidad dada, buscando una expresión racional que dé cuenta de la medida, en términos de la unidad usada para la medición (ver situación 1, preguntas uno). Situación que se vuelve recurrente en los casos en los cuales la unidad resulta más pequeña que el objeto de la medición; pues por lo general siempre resulta un “último tramo” que es más pequeño que la unidad de medida (preguntas 2 y 3 de la situación uno).

- El hecho de poner unidades de medida de un mismo tipo y con una relación constante (situación uno, pregunta 4), en donde unas deben ser medidas con otras, pone en juego una situación de aprendizaje interesante; porque, no sólo se le permite al estudiante establecer relaciones de equivalencia entre las unidades, sino que también se le permite evidenciar aspectos importantes en el proceso de medición. Por ejemplo, al tomar un elemento de una magnitud (M), como unidad de medida y un objeto como instrumento, y hacer la asignación numérica correcta, mediante la función medida: el real uno para el primer elemento y para los demás elementos (unidades) los otros valores. Con relación a esta situación, 27 estudiantes presentaron respuestas correctas (ver tabla 16).

La situación uno permitió además evidenciar la dificultad para entender la medida de objetos cuando estos son más pequeños que la unidad, lo cual conduce a la expresión racional de la medida. Allí 21, de los 35 alumnos evaluados, tuvieron este tipo de dificultad (ver C_2, C_3 y C_4, tabla 16)

- Poner situaciones de medida en varios contextos: Medidas en donde la unidad de medida es mayor que el objeto a medir, medidas donde el instrumento y la unidad de medida coinciden, medidas en donde la unidad resulta más pequeña que el objeto a medir, (ver situación uno, momento uno); situaciones que involucren mediciones de unas unidades con otras (situación uno, pregunta4); permite una aproximación más rica en significado al sistema métrico decimal y favorece el desarrollo del pensamiento métrico. Estas situaciones dan cuenta de procesos metodológicos implicados en el proceso de medición de magnitudes como son la concepción y uso de unidades e instrumentos de medida, el reconocimiento de relaciones y equivalencias entre ellas (situación dos, momento uno); allí 25 de los estudiantes mostraron unos resultados bastante satisfactorios (ver tabla 22).

- Las técnicas de estimación, no sólo contribuyen al desarrollo del pensamiento métrico (Situación 2, momento 3), sino que, además, dan cuenta del grado de desarrollo del pensamiento métrico. Como afirma Castro,E.(2000)

> *"Estimación es la habilidad mental para hacer conjeturas en cálculo y medida con una formación previa,… pero esas conjeturas servirán para adquirir nueva formación que redundará en perfeccionamiento de las habilidades y procesos que se empleen en hacer conjeturas siguientes…la estimación es un proceso educable" (p.19).*

Bajo estas consideraciones, se puede afirmar que los alumnos han avanzado significativamente en los procesos relacionados con la medición, destacando que la estimación tiene un grado mayor de dificultad cuando la medida a estimar no está presente (ver tabla 37), que cuando la medida a estimar está presente (ver tabla 32): En la estimación con el objeto presente, hubo 33 alumnos que respondieron dentro de los rangos esperados (ver tabla 32); en tanto que en la actividad de estimar la medida con el objeto ausente, sólo un estudiante estuvo dentro de los rangos esperados (ver tabla 37), y 23 alumnos estuvieron próximos a los rangos esperados.

- Poner al alumno en situaciones de medida con diferentes tipos de unidades no convencionales (situación uno) y convencionales (situación 2) permitió, de un lado, un refinamiento en las técnicas de medición, una aproximación al concepto de unidad de medida y a sus instrumentos, y el establecimiento de la equivalencia entre unidades de sistemas diferentes; de otro lado, mediante técnicas de medición, se posibilitó un acercamiento al concepto de sistema de unidades, desde la perspectiva de identificar regularidades, en términos de la relación de unas unidades con otras. (ver situación 2, momento 4).

Particularmente se analizaron elementos de carácter didáctico y metodológico con relación a la enseñanza de las magnitudes y sus medidas; lo cual permitió diseñar estrategias coherentes con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas emanados del ministerio de Educación Nacional.

El desarrollo de actividades de medición en contextos propios de medida permitió a los alumnos mejorar en:

- El reconocimiento de las unidades de medida, su uso y su tamaño.
- El desarrollo de habilidades relacionadas con técnicas de medición.
- El uso y el reconocimiento de escalas de medidas.
- El reconocimiento y el uso de unidades de sistemas de medidas.
- El cálculo con las unidades de medida.
- La refinación en las técnicas de estimación de medidas.
- El uso de instrumentos de medida.
- La conversión de unidades, mediante la comparación de las unidades y el establecimiento de sus equivalencias.
- Solución de problemas relacionados con situaciones de medida

En general, la propuesta de esta investigación se planteó en torno a situaciones sobre contextos de medida donde se ponen en juego la identificación y el reconocimiento de las unidades y los patrones de medida, el reconocimiento de las magnitudes objeto de la medición; además de permitir el desarrollo de habilidades relacionadas con los procesos de medición, tales como el uso de instrumentos de medida, la asignación numérica, la estimación de medidas y el cálculo con las unidades.

La investigación llega hasta este punto, por considerar que tiene elementos de carácter teórico y metodológico para los docentes de matemáticas. Dichos elementos se constituyen en un posible aporte para favorecer el desarrollo del pensamiento métrico en la educación básica.

7.2 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

El trabajo hace parte de un amplio campo de posibles extensiones del pensamiento métrico, las cuales no podrían abordarse todas por límites de tiempo y estructura misma de la investigación. Por lo tanto, podría continuarse y profundizarse en muchos de sus aspectos.

Un desarrollo posterior de esta investigación podría ocuparse de otras magnitudes y de otros sistemas de medidas, utilizando la metodología propuesta, dado que se abordaron básicamente la longitud y el área; por lo tanto, puede pensarse en la medida del peso, del tiempo, del volumen, teniendo en cuenta situaciones de medida propiamente dichas, el reconocimiento de patrones e instrumentos de medida y la estimación de dichas magnitudes.

Otra línea, está relacionada con la posibilidad de que sea el pensamiento métrico el que se coloque como un eje articulador de los diferentes pensamientos propuestos en los lineamientos curriculares: pensamiento variacional, espacial y numérico; toda vez que las situaciones de medida retomen muchos de sus conceptos, en contextos reales que faciliten su comprensión.

La investigación abre paso al trabajo didáctico en relación con el campo de los números racionales dado que éstos pueden adquirir mayor significación en contextos asociados a procesos de medida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, y L. GOMEZ, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática,"una empresa docente*". México: Grupo editorial Iberoamericana, pp, 33-59.

ASOCOLME, (2002). Asociación Colombiana de Matemáticas Educativas, *Estándares Curriculares para Matemáticas*. Cuadernillos de Matemáticas Educativas, Nº 5, Bogotá: Gaia.

BACHELARD, G. (1993). *La formación del espíritu científico*, México: siglo XXI,

BOURBAKI, N. (1972). *Elementos de Historia de las Matemáticas*, versión española de Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial.

BOYER, C, (1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover Publications.

BOYER, C. (1994).*Historia de la Matemática*. (Tercera reimpresión),Madrid: Alianza Editorial.

BROUSSEAU, G. (1993). *Fundamentos y método de la didáctica de las matemáticas*, en: Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. Traducido de Fondements et méthodes de la didactique des mathematiques, Recherches en didactique des mathematiques. Pp 33-115.

BRUOSSEAU, G. (1988). *Los diferentes roles del maestro*, conferencia pronunciada en la UQM, 21 de enero, Canadá. Traducción del francés de María Emilia Quaranta. p.p. 65-94.

CAMPBELL, N. (1997). *Medición.* En: Sigma el mundo de las matemáticas. Tomo 5. pp. 186-201.

CAMPOS, A. (1994). *Introducción a la Lógica y la Geometría Griegas, Anteriores a Euclides.* Bogotá: U. Nacional de Colombia.

CASTRO, E. (2000). *Estimación Cálculo y Medida.* Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 9., Madrid: Síntesis.

CHAMORRO, C. (1991). *El Problema de la Medida*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 17., Madrid: Síntesis.

COLLETTE, J. P. (1986). *Historia de las Matemáticas*, I, Madrid: Siglo XXI.

COLOMBIA: Instituto colombiano para el fomento de la educación superior (ICFES), (2001). Informe de resultados de las pruebas de matemáticas aplicadas en los grados 3º,5º,7º y 9º en los municipios de Antioquia, 1998-2000. Informe preparado por Pedraza Patricia y Rodríguez Nidia. Bogotá.

COLOMBIA : Ministerio de educación nacional (MEN), (1997). *Análisis y Resultados de las Pruebas de Matemáticas*, *TIMSS*. Santa fe de Bogotá.

COLOMBIA. (MEN). (2003). *Estándares Básicos de Matemáticas.* Santa fe de Bogotá.

COLOMBIA. (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

COLOMBIA: (MEN-ICFES), (2003a). *Evaluar para transformar*, subtitulado, aportes de las pruebas SABER al trabajo en el aula. Bogotá.

COLOMBIA: (MEN-ICFES). (2003b). *Matemáticas escolares, Aportes para orientar procesos de innovación*. Bogotá.

COLOMBIA: (MEN-ICFES), (2003c) Y DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA: SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA. *Informe de resultados evaluación de la educación básica pruebas de lenguaje y matemáticas grados 3, 5, 7 y 9,* aplicadas en el año 2002. Bogotá.

COLOMBIA: (MEN-ICFES), (2002). *Cuadernillos de Resultados Pruebas Saber para Antioquia*. Bogotá.

CRUMP, T. (1993). *La Antropología de los Números*. Madrid: Alianza Universidad.

DANTZING, T. (1971). *El Número Lenguaje de la ciencia*. Buenos Aires: Habbs Suramérica S A.

DE GUZMAN, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas*, Madrid: Editorial Popular.

DE LA TORRE, A. (1993). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Medellín: Universidad de Antioquia.

DE LA TORRE, A. (2003). *La modelización del espacio y del tiempo*. Medellín: Universidad de Antioquia.

DELGADO, C. (2003). *El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos.* en: Matemática: enseñanza universitaria, revista de la Corporación Escuela Regional de Matemáticas,U. Del Valle. XI, Dic ,N º 1,2,.

FIOL, M. L. y JOSEPH M. (1990). *Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 20. Madrid: Síntesis.

GALVES, .G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano.* Cáp. II de su tesis de doctorado. México: Instituto Politécnico Nacional de. pp. 39-49.

GETTYS, W, E. (1991). *Física clásica y moderna*, México: McGRAW-Hill.

HEATH, T. L. (1993). *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover publications.

HEATH, T. L. (1991). *A hystory of greek mathematics*. I. Oxford: Oxford University Press.

HECHT, E. (1999). *Física en perspectiva*. México: Addison Wesley Longman.

HOFMAN, J. E. (1960). *Historia de la matemática*. México: Hispano Americana.

JOSHUA, S. y DUPIN, J., J., (1993 a). *Introduction à la didactique des sciences el des mathematiques*. Citado por Gloria Castrillón y Luis Carlos Arboleda, En Educación Matemática, pedagogía y didáctica. Cali: Universidad del Valle. (2000).

JOSHUA, S. y DUPIN, J., J., (1993 b). *Introduction à la didactique des sciences el des mathematiques*. París, PUF, pp. 1 - 10, texto traducido y adaptado del francés por Gloria Castrillón y Myriam Vega. Cali: Universidad del Valle. (1998)

KLEIN, J. (1992). *Mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover Publications.

KLINE, M. (1972). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*. Madrid: Alianza Editorial.

KULA, w. (1980). *Las medidas y los hombres.* Bogotá: Siglo XXI. p.p. 204-458).

LUENGO, G, R. GRUPO BETA, (1990). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza.* Matemática: cultura y aprendizaje, Nº 14, Madrid :Síntesis.

MESA BETANCUR, O. (1998). *Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas*. Medellín: Centro de Pedagogía Participativa.

MESERVE, B. E. (1983). *Fundamental Concepts of geometry*. New York: Dover Publication.

NEWMAN, J. R. (1994). en SIGMA; El Mundo de las Matemáticas. Barcelona: Grijalbo. 4.

OBANDO, G. y MUNERA, J. (2003). *Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*. En: Educación y Pedagogía, No 35, XV. Medellín: Universidad de Antioquia.

OLMO ROMERO, M., MORENO CARRETERO, M.; GIL CUADRA, F. (1993).*Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Matemática: cultura y aprendizaje, Nº 19, Madrid: Síntesis.

PIAGET, J. (1971). *Estudios de epistemología del espacio*. Buenos Aires: Atenea Editorial.

RAYMOND, L. W. (1997). *El método axiomático*. En, Sigma. El Mundo de las Matemáticas, Barcelona: Grijalbo. Tomo 5. p.p. 35-56.

RIBNIKOV, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Traducción de Concepción Valdés Castro. Moscú: Mir.

RUSSELL, B. (1997). *Los principios de la Matemáticas*. Traducción del inglés, Juan Carlos Grimberg. Santa fe de Bogotá: Espasa-Calpe, S.A Traducción de Concepción Valdés Castro.

ZULKARDI. ¿*How to design mathematics lesson on the Realistic Approach*? (RME). www.nctm.org/, Extraido en noviembre 2003.

GODINO Y BATANERO. (Extraído en marzo 2004). *Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros.* www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/. Cap, 1 y 2, Granada.

ANEXOS

ANEXO 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ

NOMBRE_____________________________GRADO______GRUPO______

EDAD_______________SEXO_______________________________________

1. Con la cinta que se te acaba de entregar, mide el largo de su cuaderno o del libro. Llamaremos “regletón” a esta primera regla y **alfa** (α) a la unidad.

2. Con la segunda cinta que se te entregó mide nuevamente el largo del cuaderno (el mismo que mediste en la actividad anterior). Llamaremos “regla” a la segunda cinta y **Beta** (β) a cada unidad en que está dividida.

3. Repite el proceso con la tercera cinta. Llamaremos “reglilla” a la nueva regla y **lamda** (λ) a las unidades en las que está dividida.

4. Llena la siguiente tabla, estableciendo las relaciones entre las tres unidades.

Expresa en cada casilla los resultados de medir las unidades de cada una de las cintas.

Medir / Con	α	β	λ
α			
β			
λ			

Hoja del alumno
Situación 1

ANEXO 2

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ

NOMBRE____________________________GRADO______GRUPO______

EDAD______________SEXO_____________________________________

Consignar el valor de la media de unas unidades cuando son medidas con otras.

Utilizando la cinta métrica que acabas de recibir llena el siguiente cuadro.

Unidades del sistema métrico decimal.

Medir / con	Milímetro mm	Centímetro Cm	Decímetro dm	Metro m	Decámetro Dm
Milímetro (mm)					
Centímetro (cm)					
Decímetro (dm)					
Metro (m)					

Hoja del alumno
Situación 2.momento 1

ANEXO 3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ.

NOMBRE____________________________GRADO______GRUPO______

EDAD______________SEXO_____________________________________

Mide las siguientes unidades de medida, con la unidad indicada para cada caso y completa la siguiente tabla. Usa la calculadora y realiza los cálculos con la ayuda de ésta cuando sea necesario.

Medir / con	mm	cm	dm	m	Pie	pulgada	vara	yarda	Dm
mm									
cm									
dm									
m									
pie									
pulgada									
vara									
Yarda									
Dm									

Hoja del alumno
Situación dos momento 4

ANEXO 4A

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ

NOMBRE____________________________GRADO______GRUPO______

EDAD______________SEXO_____________________________________

Construye los siguientes instrumentos para medir longitudes:

a) Una cinta ***a*** sin divisiones y de un metro de larga.
b) Una cinta ***b*** con diez divisiones iguales y de un metro de larga.
c) Una cinta ***c*** con cien divisiones y de un metro de larga.

Teniendo en cuenta los instrumentos de medida que acabas de realizar competa la tabla siguiente sin que hagas las mediciones respectivas. Debes permanecer en tu puesto.

Cuánto crees que mide, con	**C** **en** **centímetros**	**B** **en** **decímetros**	**a** **en metros**
El ancho de la puerta del aula de clase.			
El alto de la puerta del aula de clase.			
El largo del tablero del aula de clase.			
El largo de tu cuaderno			

Hoja del alumno.
Situación 2: momento 2

ANEXO 4B

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ

NOMBRE_____________________________GRADO______GRUPO______

EDAD______________SEXO_____________________________________

Completa la información de la siguiente tabla.

Cuánto crees que mide, con	**C en centímetros**	**B en decímetros**	**a en metros**
El largo de una cama.			
El ancho (frente) de una nevera.			
El ancho (frente) de una estufa.			
El ancho (frente) de una lavadora.			

Hoja del alumno

Situación 2.Momento 3

Nota:

Utiliza las cintas realizadas en la actividad, primera parte, para que verifiques los datos entregados en las tablas.

ANEXO 5

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ.

NOMBRE____________________________GRADO______GRUPO______

EDAD______________SEXO_____________________________________

1. Describe seis formas diferentes para ir del punto P al punto Z, indicando sólo los puntos a recorrer: ej. R_1: P-R-F-M-Z

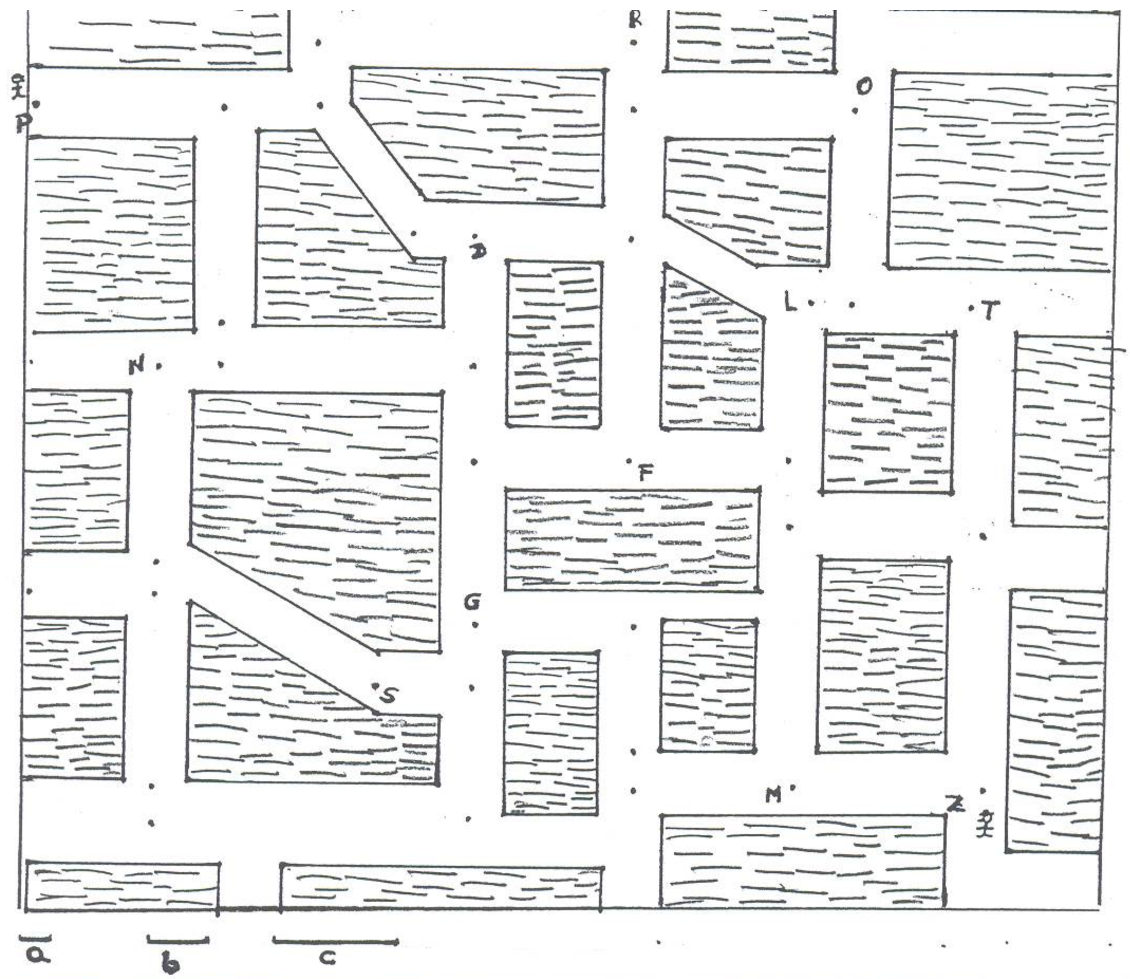
2. ¿Cual crees que es la ruta más corta?

3. Se quiere contratar una firma de ingenieros para construir una alcantarilla, de un metro de diámetro y en tubos de cemento, en un barrio entre los puntos P y Z, siguiendo la trayectoria marcada en el centro de las calles, como aparece en el plano. Se contratará la obra que resulte más económica y con las especificaciones dadas

Estudios preliminares dicen que:

- En el mercado se consiguen tubos de largo ***a, b, c***, como aparece en la parte superior del plano.
- Los tubos no se pueden cortar, debido a su diámetro y al material con que están hechos.
- Cada empate entre dos tubos aumentan el costo en pesos un millón porque requiere de obras secundarias.

¿Cuál es el menor costo de la obra si se sabe que el costo de la alcantarilla es dos millones por tramo de tamaño ***b*** instalado?



Hoja del alumno

Situación 3

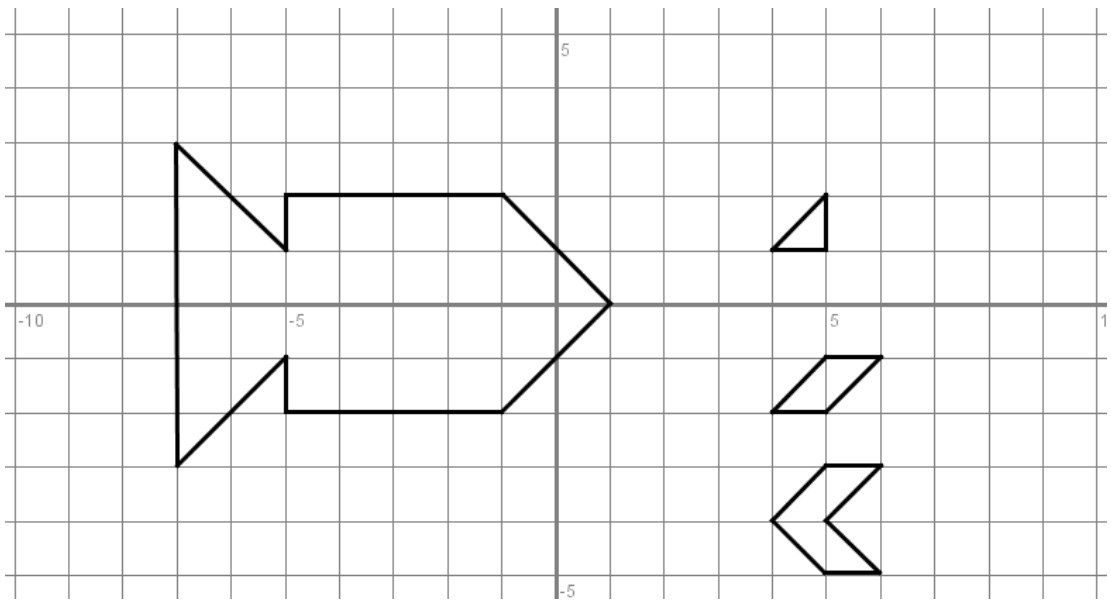
ANEXO 6

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ

NOMBRE___________________________GRADO______GRUPO______

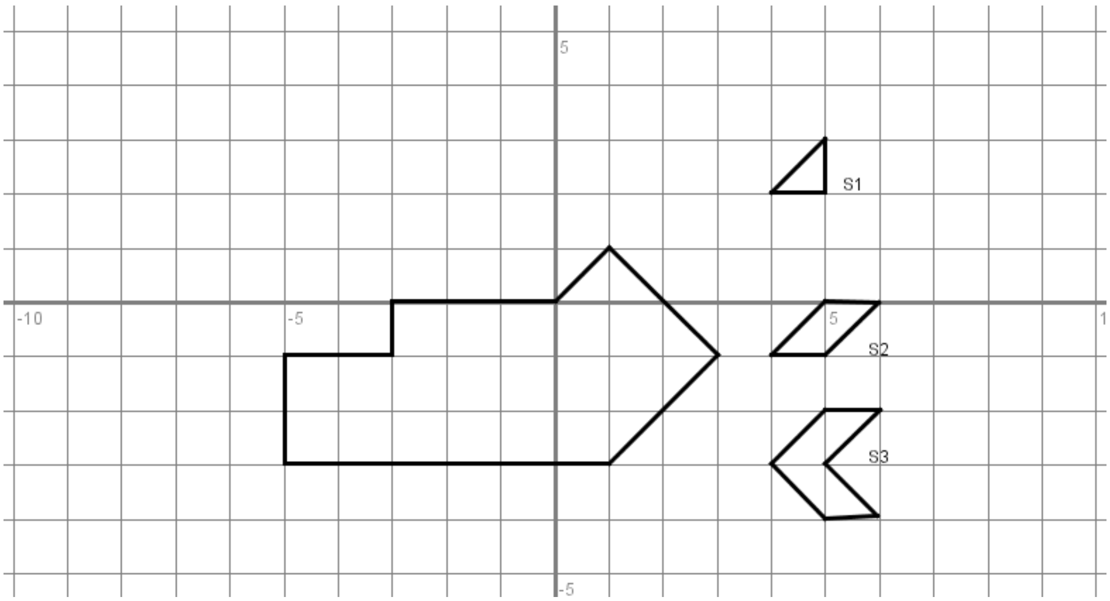
EDAD______________SEXO____________________________________

Mide la superficie utilizando como unidad de medida S1.



Mide esta otra superficie, utilizando como unidad de medida S2.

Hoja del alumno
Situación 4.Momento 1



Compara las unidades S1, S2 y S3. Qué pasaría si se midiera la superficie del pez utilizando S2 como unidad de medida y si se utilizara S3?, Qué pasaría si se midiera la segunda superficie con S1?

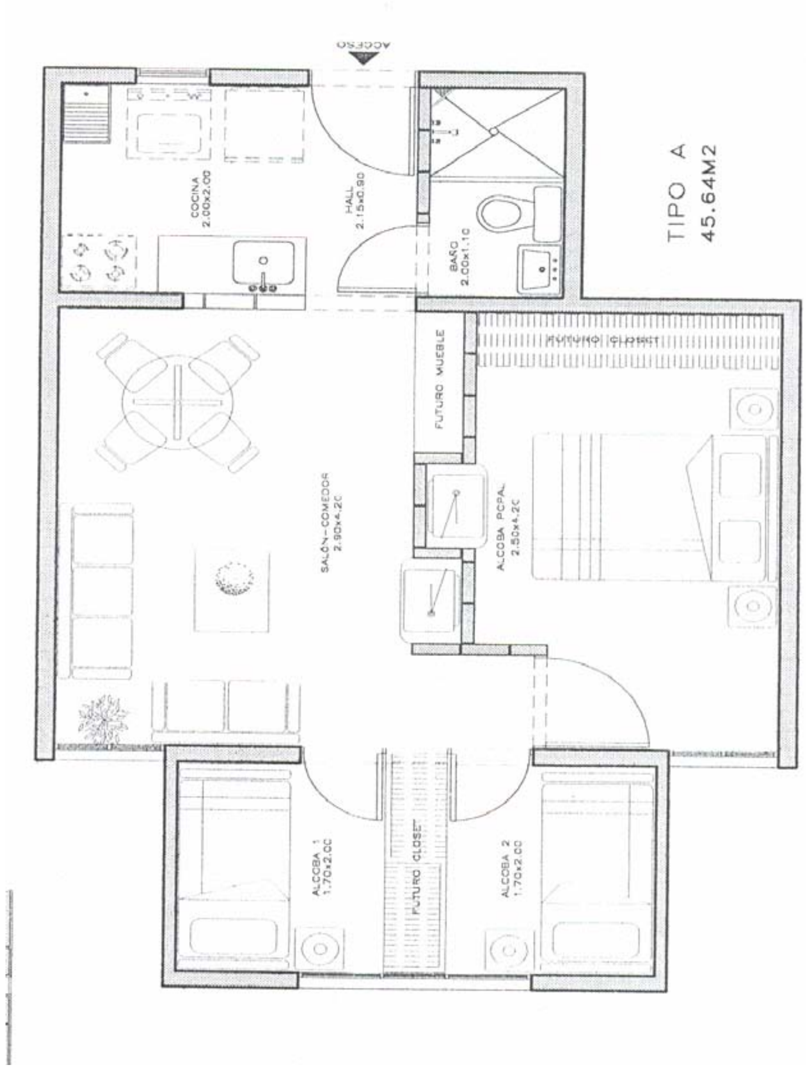
Hoja del alumno
Situación 4.Momento 1

ANEXO 7

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ.

NOMBRE___________________________GRADO______GRUPO______

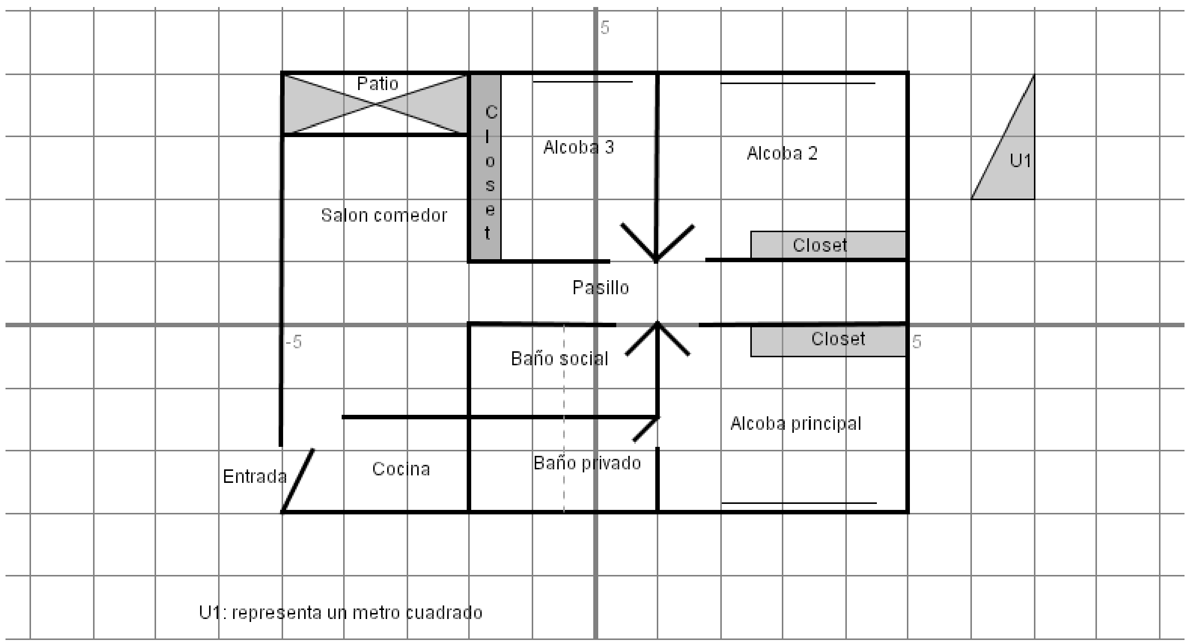
EDAD______________SEXO____________________________________



El anterior plano corresponde al plano de un apartamento de 45.64 m^2, utiliza la regla para medir sus dimensiones y verificarlas con las que allí aparecen en cada una de las secciones del apartamento: alcobas, cocina, sala…

Observa el siguiente plano y responde las siguientes preguntas:

¿Cuanto mide el área y el perímetro total del apartamento?, ¿Cuanto mide el áreas y los perímetros de: la cocina, los baños, cada una de las alcobas, el salón comedor y el patio?, ¿Cuánto miden las ventanas?

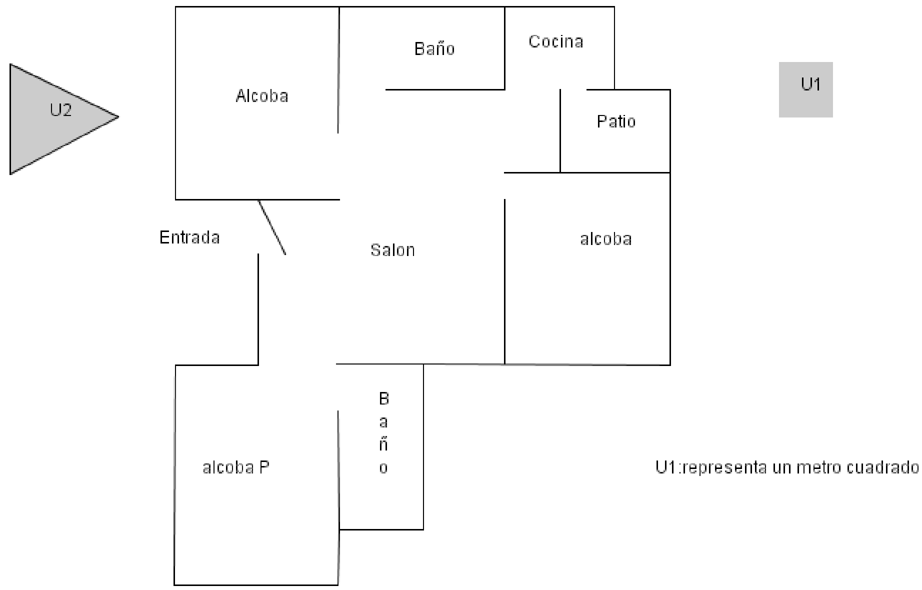


Mide y compara este otro apartamento con el anterior:

Determinar si los dos apartamentos son equivalentes en sus superficies.

Cuanto mide con U_2 y $U_{1,}$.

Hoja del alumno
Situación 4 momento 2



Hoja del alumno
Situación 4 momento dos

ANEXO 8

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PAZ

NOMBRE___________________________GRADO______GRUPO______

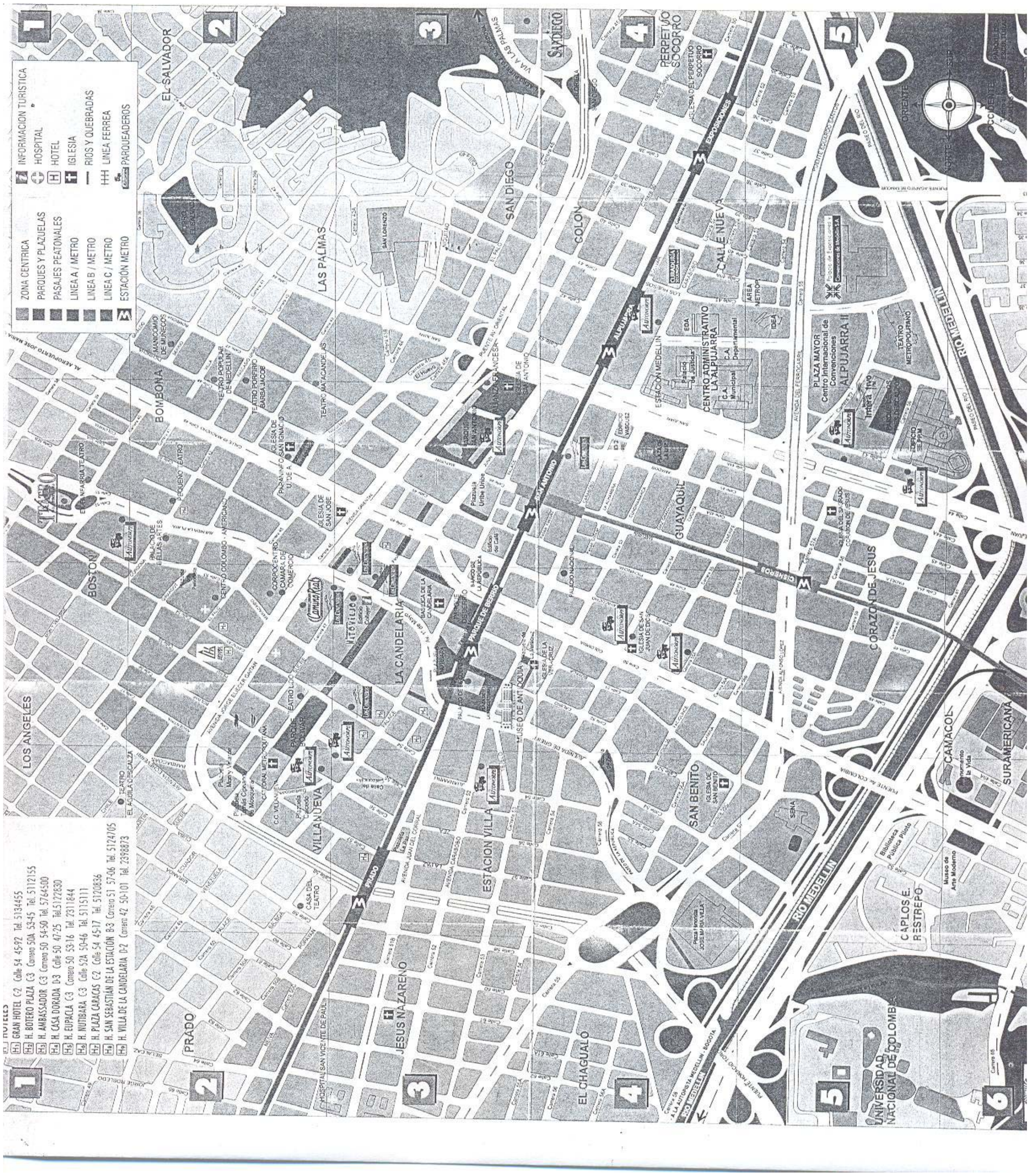
EDAD______________SEXO____________________________________

Señalar un recorrido de una competencia ciclística de 175 Km, utilizando el siguiente mapa de la ciudad de Medellín, para un circuito por las vías del centro y sus alrededores. Se sabe que entre las estaciones Alpujarra y Exposiciones, del Metro de Medellín, hay 287 metros, medidos desde el punto donde termina la plataforma Alpujarra al punto donde inicia la plataforma Exposiciones.

Téngase en cuenta que:

- La competencia parte, en sentido norte – sur, del Centro comercial Camino Real en la Avenida Oriental; allí mismo es la llegada.
- Se debe respetar el sentido de las calles y carreras para la circulación de vehículos en situación normal.
- Las vueltas del recorrido deben ser las mismas, y no inferiores a 5.5 kilómetros, ni superiores de 6 km.

Hoja del alumno
Situación 5.



Hoja del alumno
Situación 5.