PROPUESTA DIDÁCTICA DE APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL DESDE UNA PERSPECTIVA VARIACIONAL

FABIAN ARLEY POSADA BALVIN

JHONY ALEXANDER VILLA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

MEDELLÍN

2006

PROPUESTA DIDÁCTICA DE APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL DESDE UNA PERSPECTIVA VARIACIONAL

FABIAN ARLEY POSADA BALVIN

JHONY ALEXANDER VILLA

TESIS

ASESOR: GILBERTO OBANDO ZAPATA

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MEDELLÍN

2006

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Medellín, Enero 31 de 2006

CONTENIDO

Resumen

En este reporte de investigación se presenta el diseño e implementación de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, tomando como referentes conceptuales la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los registros semióticos de representación. Dicha propuesta fue desarrollada con estudiantes de grado 10 del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM de la ciudad de Medellín.

En su desarrollo se muestra como el concepto de función lineal puede interpretarse como un modelo matemático que atrapa la variación y el cambio de magnitudes a través de los diferentes registros de representación propuestos: gráfico, tabular, simbólico y lenguaje natural. En particular, se entiende la modelación como un proceso que incluye la actividad cognitiva de conversión entre el lenguaje natural y el registro simbólico algebraico, registros principales, apoyada en el registro gráfico y tabular, entendidos como registros auxiliares.

De esta forma se observa la necesidad de abordar otros objetos propios del Álgebra tales como el concepto de ecuación, algunos elementos del cálculo, funciones cuadráticas y polinómicas en general, desde una perspectiva variacional.

INTRODUCCIÓN

La Educación Matemática se ha ido consolidando como disciplina científica en los últimos años, y se ha convertido en un sector muy productivo en el campo de la educación, debido a las múltiples investigaciones que se han desarrollado a nivel nacional e internacional. En nuestro país, cada vez más, se siente la necesidad de que esta disciplina se siga desarrollando debido a los nuevos requerimientos que se han venido proponiendo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una de las propuestas más relevantes en los últimos años se observa en los Lineamientos y Estándares Curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, en los cuales, se propone que la enseñanza de las matemáticas debe apuntar al desarrollo de cinco tipos de pensamiento, a saber: numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional. Este trabajo se enmarca precisamente en este último, pues pretende aportar elementos a la consolidación conceptual de lo que se llama “pensamiento variacional” y aplicar dicha teoría, en la construcción de uno de los conceptos matemáticos más importantes del álgebra y el análisis matemático, como lo es “el concepto de función lineal”. Además se ha tomado la modelación matemática como una herramienta didáctica para la construcción de este concepto, lo cual implica realizar un estudio minucioso de los llamados sistemas semióticos de representación asociados a dicho constructo.

Con dicha propuesta pretendemos mostrar cómo los registros de representación semióticos permiten el estudio, la sistematización, la objetivación y la comprensión del concepto de función, considerado como modelo matemático; dichos registros adquieren mayor importancia cuando se piensan desde el punto de vista variacional, como herramienta en el proceso de modelación. Esto muestra, de acuerdo con Duval (2004), que el uso de un solo registro de representación no permite la comprensión del objeto matemático (función), pues de las dos actividades cognitivas principales: tratamiento y conversión, la segunda es la que proporciona la toma de conciencia de las características del objeto, lo que implica mínimo dos registros diferentes de representación.

Para lograr este propósito se desarrolló una investigación que se reporta en el presente informe. El documento consta básicamente de cuatro capítulos claramente diferenciados, cada uno de los cuales se fue consolidando en el desarrollo de las indagaciones.

El primer capitulo, denominado “ASPECTOS GENERALES”, hace una presentación del problema de investigación y muestra como el concepto de función lineal ha sido objeto de estudio de muchas investigaciones en las últimas décadas, por sus valiosos aportes a la construcción de modelos de fenómenos de variación y cambio en las diferentes ciencias. De igual manera, muestra la pertinencia que tiene nuestro trabajo con miras a mejorar los resultados obtenidos por los estudiantes en diferentes pruebas externas como lo son las pruebas TIMSS y las pruebas SABER[1].

El segundo capitulo, “ELEMENTOS TEÓRICOS”, describe la ingeniería didáctica como la metodología de investigación adoptada; de la misma manera se presentan las posturas teóricas que la sustentan, a saber: un análisis histórico epistemológico que muestra la importancia que tuvo la noción de variación y cambio en la consolidación del concepto de función; la modelación como el proceso de investigación matemática y sus consecuentes valores didácticos en el desarrollo del pensamiento matemático; y la teoría de los registros de representación semiótica que hacen posible la construcción de los modelos matemáticos, y permite las actividades cognitivas de tratamiento y conversión para la objetivación y comunicación de los objetos matemáticos.

[1] Evaluación de la Educación Básica Colombiana.

En el capítulo número tres, “DISEÑO EXPERIMENTAL” se presentan los criterios de construcción y análisis de las situaciones diseñadas para la experiencia, tanto de diagnóstico como de intervención; además se presentan los análisis a priori de las mismas.

Finalmente, en el capitulo cuatro: “RESULTADOS Y CONCLUSIONES”, se describen los resultados obtenidos en la aplicación de las anteriores situaciones y se hacen sus respectivas interpretaciones con el fin de validar las hipótesis de trabajo y la pertinencia de la estrategia planteada en la solución del problema. Adicionalmente se elaboran las respectivas conclusiones y se sugieren algunas ideas para futuras investigaciones.

1. ASPECTOS GENERALES

1.1 JUSTIFICACIÓN

1.1.1 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

En este apartado nos dedicaremos a analizar algunas investigaciones que se han hecho con respecto al concepto de función, tanto a nivel internacional como nacional, con el fin de establecer un punto de partida la investigación.

- **Panorama internacional**

El concepto de función es uno de los referentes más importantes de las matemáticas, por ser una herramienta fundamental en la modelación de fenómenos de variación y cambio. Esto explica que en las últimas décadas se hayan realizado gran variedad de investigaciones a propósito de su compresión y desarrollo en el currículo escolar. Al respecto Ruiz H (1998, 59-76) realiza una clasificación de las principales investigaciones en torno a la noción de función y las presenta de la siguiente manera:

1. Investigaciones de epistemología genética sobre el desarrollo de estadios: en esta categoría se agrupan los trabajos de Piaget, Grize y Szeminska (1968), Vollrat (1986)
2. Investigaciones basadas en análisis históricos y epistemológicos: Sierpinska (1989, 1992), René de Cotret (1985, 1988).
3. Investigaciones basadas en la creación de modelos teóricos: en este grupo se pueden incluir los trabajos de Vinner y Tall (1981) y Vinner y Dreyfus (1989) sobre imagen y definición. De igual manera, a este grupo pertenecen los trabajos de Sfard (1989, 1991,1992), Dubinski y Harel (1992), entre otros, que muestran la dualidad entre la concepción operacional y la

estructural de los conceptos matemáticos. Por último, se incluyen los trabajos de Tall y Bakar (1992) sobre los llamados prototipos mentales.

4. Investigaciones sobre los diferentes componentes de una función:
    a. Aprendizaje de los conceptos previos: Maryanskii (1979).
    b. Determinación de estadios de aprendizaje de las diferentes componentes y representaciones: Thomas (1975), Markovits, Eylon y Brukheimer (1986).
    c. Aprendizaje de los diferentes componentes y representaciones: Dreyfus y Eisemberg (1982), Guzmán (1989).
    d. Interpretación de gráficas. Bell y Janvier (1981) y Javier (1987).

Adicional a la anterior clasificación descrita por Ruiz Higueras, se puede incluir una quinta categoría (Camargo, 2005) que no necesariamente es excluyente de las demás, y que intenta mostrar la importancia del proceso de modelación de los fenómenos de variación y cambio en la construcción del concepto de función.

Por las características de nuestro trabajo centraremos la atención en esta última categoría; obviamente sin excluir resultados de otras investigaciones no reseñadas por la autora, que pudieren aportar a nuestro estudio.

Los aportes de Anna Sierpinska (1992)

Esta investigadora utiliza el concepto de obstáculo epistemológico, que introdujeron Bachelard y Brousseau[2], para establecer algunas características que deben tenerse en cuenta en la didáctica de algunos conceptos matemáticos.

[2] La noción de obstáculo epistemológico o cognitivo fue introducida por Bachelard (1984/1962) en su obra *la formation du sprit scientifique,* en ella nos dice: *cuando buscamos las condiciones psicológicas de los procesos de las ciencias llegamos pronto a la convicción de que es en términos de obstáculo como es preciso exponer el problema del conocimiento científico…* se conoce contra un conocimiento anterior , destruyendo conocimientos mal hechos, superándolos Bachelard, 1983 p 15 citado por Ruiz 1988 p 27.

Uno de los aportes más importantes radica en sus argumentos históricos para justificar que los estudiantes en el aula de clase deberían interesarse más por la variación y la búsqueda de relaciones, que por el trabajo con definiciones y ejemplos prototipo. Afirma que la enseñanza de las funciones deben aparecer primero como modelo de relaciones, como herramienta para la descripción y la predicción, análogo a como se presentó en la historia. Por la misma vía, esta investigadora describe 19 actos de comprensión asociados a la noción de función, los cuales se mencionan a continuación, que hemos clasificado, además, de acuerdo con sus características, bajo las denominaciones enumeradas con romanos:

I. Actos de comprensión relacionados con la percepción de la variación.

1. La identificación de cambios en el mundo circundante como un problema práctico de resolver.
2. La identificación de regularidades en las relaciones entre cambios es un medio de tratar los cambios.
3. La identificación de los sujetos de cambio en el estudio de los cambios.

II. Actos de comprensión asociados al reconocimiento e interpretación de algunos elementos de la función.

4. La discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, y otro en términos de variables y constantes.
5. Discriminación entre las variables dependiente e independiente.
6. Generalización y síntesis de la noción de número.
7. Discriminación entre número y cantidad.
8. Generalización del concepto de variable.

III. Actos de comprensión asociados a las características del concepto como tal y a su relación con otros conceptos.

9. Síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función; en particular la toma de conciencia del posible uso de funciones en la modelación de relaciones entre magnitudes físicas y otras.
10. Discriminación entre una función y las herramientas analíticas que algunas veces se utilizan para describir su ley.
11. Discriminación entre definición matemática y descripciones del objeto.
12. Síntesis del concepto general de función como objeto.
13. Discriminación entre los conceptos de función y relación.
14. Discriminación entre los conceptos de función y sucesión.
15. Discriminación entre las nociones relacionales y causales.

IV. Actos de compresión que hacen referencia a los sistemas de representación de las funciones:

16. Discriminación entre coordenadas de un punto en una curva y los segmentos lineales como *cumpliendo una función para la curva*
17. Discriminación entre las diferentes formas de representación de una función y las funciones mismas.
18. Síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y las funciones mismas.

V. Un último acto de comprensión asociado al papel, uso y valor cultural de las funciones:

19. Síntesis de los papeles de la noción de función y causa en la historia de la ciencia: toma de conciencia del hecho que las investigaciones funcionales y causales son ambas expresiones del esfuerzo humano para comprender y explicar los cambios en el mundo.

La investigadora presenta adicionalmente algunos obstáculos epistemológicos que se presentan en la adquisición de la noción de función; en particular se resaltan aquellos que tienen que ver con la naturaleza variacional de la función:

1. Las matemáticas no se dedican a problemas prácticos.
2. Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones no numéricas no son un objeto adecuado de estudio en matemáticas.
3. Observar los cambios como un fenómeno, tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian, ignorando qué cambia.

Aportes de René Cotret y Anna Sfard.

En este mismo sentido, Ruiz Higueras afirma que René de Cotret (1985, 1989) se basó en la evolución histórica del concepto de función para proponer un trabajo en el cual la idea de variable dependiente sería la base del concepto de función. Afirma también que para comenzar la enseñanza de este concepto es muy importante conservar la noción de dependencia entre cantidades, la cual a su vez requiere de la idea de variación. De este modo, dicha dependencia permitirá a los estudiantes acceder a un primer concepto de función, estrechamente ligado a fenómenos reales conocidos.

Sfard (1991) presenta un trabajo titulado "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on proceses and objects as different sides of the same coin"; en el cual realiza un análisis de diferentes definiciones de algunos conceptos matemáticos, entre ellos el concepto de función, para mostrar que es posible tener dos tipos de interpretaciones de los mismos, a saber, una interpretación operacional y una estructural: la primera está vinculada con una interpretación del concepto matemático como un proceso, y la segunda lo concibe como un objeto. Afirma que aunque estas dos interpretaciones parecen ser ostensiblemente incompatibles, son de hecho complementarias (una “cosa” es proceso y objeto a la vez).

Sfard realiza un rastreo histórico que, empalmado con la teoría de esquema cognitivo, le permite argumentar la idea de que la concepción operacional es, para la mayoría de las personas, el primer paso en la adquisición de un concepto matemático.

Para la autora ver un concepto matemático como un **objeto** significa ser capaz de referirse a él como si fuera una cosa real (una estructura estática que existe en alguna parte en el espacio o el tiempo). También significa ser capaz de reconocer la idea “de un vistazo” y manipularla como una totalidad, sin necesidad de entrar en detalles. En contraste con ello, interpretar un concepto como **proceso** implica considerarlo no como una entidad actual, sino como una entidad potencial que llega a existir bajo el cumplimiento de una secuencia de acciones. De esta forma, mientras la interpretación estructural es estática, instantánea e integrada, la concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada.

Al respecto, en nuestra investigación se considera que la noción de función, vista como herramienta fundamental para modelar fenómenos de variación y cambio, está inscrita en una interpretación operacional de este concepto.

En sus investigaciones Sfard introduce el término “reificación” como un movimiento ontológico: una habilidad repentina para ver algo familiar en una luz totalmente nueva. Así, la reificación es un salto de un proceso que se solidifica en un objeto, en una estructura estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser unificadas semánticamente por este constructo puramente imaginario y abstracto. En síntesis, la reificación se da en la transición de la concepción de un proceso a un objeto matemático.

Los reseñados son algunos de los trabajos más conocidos en el ámbito de la investigación sobre el concepto de función; en ellos se observa una preocupación por hacer énfasis en la importancia de los procesos de variación en la consolidación de dicho concepto.

- **Panorama Nacional**

En Colombia también es posible identificar algunos estudios dedicados al desarrollo del concepto de función y su relación con el pensamiento variacional. Entre los trabajos que mayor nivel de divulgación han tenido se puede resaltar: la implementación de las calculadoras gráficas en la enseñanza de los conceptos de precálculo, aspectos relacionados con la función cuadrática en la formación de docentes y otros tipos de producción de los investigadores de "Una Empresa Docente"[3] de la Universidad de los Andes. Por otro lado las reflexiones en torno al concepto de función lineal y algunos conceptos de precálculo de algunos investigadores de la Universidad Pedagógica Nacional.

Estudios de "Una Empresa Docente"

Entre sus trabajos de investigación relacionados con el concepto de función se pueden rescatar: "Hacia la reconstrucción del conocimiento matemático y didáctico de los profesores de básica secundaria y media en torno al pensamiento variacional" y "El análisis del contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos: el caso de la función cuadrática"[4], desarrollados en el año 1998. Este último proyecto surgió de varias experiencias que los investigadores Gómez y Carulla tuvieron en programas de formación

[3] "Una empresa docente" era una dependencia de la Universidad de los Andes dedicada a la investigación en educación matemática, en la que participaron investigadores como: Pedro Gómez, Edgar Guacaneme, Luis Andrade, entre otros estudiosos de este campo.
[4] Información extraída el 5 febrero, 2005 de : http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/Default.html

permanente de profesores de matemáticas. En estos programas se utilizaron los mapas conceptuales, los sistemas de representación y el análisis didáctico como herramientas didácticas, cuya utilización por parte de los profesores tuvo como propósito hacerlos más conscientes de la complejidad del contenido matemático a enseñar, de la complejidad del proceso de aprendizaje de ese contenido matemático y de la complejidad del proceso de enseñanza.

Uno de los aportes más representativos de este trabajo fue la diferenciación entre los términos "función cuadrática" y "cuestión cuadrática". El primero impone la visión funcional del objeto en cuestión, mientras que el segundo permite ampliar el objeto de estudio a aquello en lo que se involucra el proceso de "elevar al cuadrado". Desde esta perspectiva, la cuestión cuadrática aparece en múltiples ocasiones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. No obstante, este objeto matemático asume una presencia clara cuando se trata la ecuación cuadrática y la problemática de su resolución. Allí aparece uno de los temas clásicos de las matemáticas de la secundaria: la fórmula cuadrática.

Este trabajo contó adicionalmente con un análisis de los sistemas de representación considerados relevantes para la descripción de la función cuadrática, a saber: simbólico, gráfico, geométrico, numérico y verbal. En el sistema de representación simbólico se encontraron cuatro formas simbólicas (estándar, canónica, multiplicativa y de foco); cada una de estas formas involucra, según los investigadores, una serie de parámetros que determinan características particulares de la función. Los parámetros se encuentran relacionados entre sí. La cuestión cuadrática, y en particular los conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación cuadrática, aparecen en una de las formas simbólicas. Todas las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en el sistema de representación simbólico.

Una de las principales conclusiones del trabajo es que existe una relación entre la manera como se sugiere que se debe enseñar el tema en los libros de texto y los documentos oficiales, por un lado, y las concepciones de los profesores sobre el tema, por el otro; concluyeron, aunque con poca información para sustentarlo, que es de esperarse que las concepciones de los estudiantes sigan una línea similar a la descrita con los profesores. En caso de que esta afirmación fuera válida, se puede inferir que los estudiantes están construyendo un conocimiento parcial de la función cuadrática.

De igual manera, Carulla y Gomez pudieron concluir que la enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares se lleva a cabo desde una visión principalmente simbólica y procedimental, que gira alrededor de las técnicas para la resolución de la ecuación cuadrática; que contempla esencialmente la forma estándar; que utiliza el sistema de representación numérico como puente entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico; que identifica algunos de los elementos de la gráfica, pero no estudia la parábola como construcción geométrica; que se restringe a unos pocos fenómenos que pueden ser modelados con la ecuación cuadrática; y que, por las razones anteriores, no establece conexiones entre los diferentes sistemas de representación.

Trabajos sobre el concepto de Función y el Pensamiento Variacional de la Universidad Pedagógica Nacional

Se pueden identificar dos trabajos asociados al concepto de función:

El primero de ellos es la investigación “Elementos para construir una didáctica de la función” de García G; Serrano C; y Espitia L. (1997). Este proyecto intentó dar respuesta a dos problemas que caracterizan la educación matemática: la teoría y la práctica. Adicionalmente se formuló una teoría de la didáctica de los conceptos de función lineal y cuadrática. A nivel teórico, esta investigación recoge los conceptos de transposición didáctica de Chevallard y, a nivel práctico, diseñó unidades didácticas que acogieron, en primera instancia, la hipótesis del aprendizaje constructivista, desde el cual se reconoce que el estudiante posee conocimientos previos, y en segunda instancia, presupuestos de una teoría de aprendizaje coherente para la organización de redes conceptuales que orientan la enseñanza.

El segundo trabajo, titulado: "Una Didáctica del pensamiento variacional", se encuentra en Camargo y Guzmán (2005). En éste se asume el concepto de pendiente como un elemento principal en la comprensión del concepto de función lineal debido a su estrecha relación con algunos elementos del cálculo como son la razón de cambio y la derivada. Además, incluye un estudio de los principales libros de texto que se usan actualmente en el País, detectando en ellos un vacío en lo que respecta a la conceptualización de la pendiente como razón de cambio y como base previa para el concepto de derivada. Dedicaron su trabajo a responder la pregunta ¿qué tipo de situaciones problemáticas permiten a los estudiantes de grado noveno comprender las relaciones entre la pendiente y la razón de cambio? Para responder esta pregunta diseñaron, experimentaron y validaron una propuesta didáctica para los estudiantes de grado noveno, que les permitiera identificar algunas vías de acceso a la comprensión de las relaciones entre los conceptos anteriormente mencionados.

Dicho trabajo permitió concluir a los autores que:

- Los análisis históricos epistemológicos de los conceptos matemáticos a enseñar son fundamentales para los educadores en matemáticas.
- La organización de la matemática no ha sido quizás la más acertada y posiblemente existan mejores formas de construir redes conceptuales que eviten la segmentación de temas del currículo.

- Es importante el desarrollo de propuestas curriculares en las cuales se vinculen los diferentes sistemas de representación, de tal manera que se propicie establecer relaciones entre los conceptos trabajados.

Su propuesta didáctica se valida en el sentido que los resultados son positivos, pues los estudiantes poseen, de una manera intuitiva, algunas nociones de variación como por ejemplo: cambio, rapidez de cambio, variación de la rapidez de cambio... lo cual les permite acceder a la identificación de características más globales de las funciones como son: máximos, mínimos, cambios bruscos. Resaltan también la necesidad de fortalecer algunas habilidades en los estudiantes para poder enfrentar las situaciones de la propuesta con mayor grado de satisfacción. Las habilidades a las que las autoras hacen referencia en este aspecto son:

> *(i) Una conceptualización mejor estructurada de la razón de cambio que permita verla como entidad conceptual completa, (ii) un acercamiento a la función desde una perspectiva de dependencia para que se supere la idea de ésta como un conjunto de pares ordenados independientes unos de otros, (iii) una noción estructurada de pendiente, por lo menos desde un perfil algebraico, operativo o geométrico y (iv) un manejo apropiado de la sintaxis correspondiente al álgebra de funciones.*

Con base en los estudios anteriores se puede inferir que la comprensión de la noción de función es un campo problemático que sugiere un trabajo donde se requiere de diversos factores, entre ellos: (i) un reconocimiento de los principales obstáculos epistemológicos a los cuales se ve enfrentado un estudiante cuando inicia sus estudios a cerca del concepto de función, (ii) tener presente la importancia que dicho concepto representa para la modelación de fenómenos de variación y el papel que desempeñaron estos fenómenos en la construcción y posterior formalización del concepto de función.

Todos estos factores deben ser tenidos en cuenta por los maestros e investigadores que pretenden buscar un camino en la construcción del concepto de función.

1.1.2 LOS RESULTADOS DE PRUEBAS EXTERNAS

En la actualidad la Educación Matemática en nuestro país cuenta con diversos aspectos para la reflexión en torno al currículo de esta área, la mayoría de ellos son producto de los resultados arrojados por las diferentes pruebas que se han venido implementando; entre ellas se rescatan: El Examen de Estado para el ingreso a la educación superior, las Pruebas Saber orientadas a los estudiantes de la básica, y las pruebas TIMSS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias).

Al hacer un análisis de los resultados obtenidos en estas pruebas se observa que algo está pasando entre el currículo propuesto y el logrado, pues tanto en las Pruebas Saber como en las Pruebas TIMSS, los resultados estuvieron muy por debajo del rendimiento promedio esperado. En las pruebas saber, por ejemplo, se detectó que en general los estudiantes no alcanzan los niveles superiores, el D (relaciones no directas en problemas no rutinarios simples) para básica primaria y los E, F (relaciones no directas en problemas no rutinarios complejos) para básica secundaria.

Esto quiere decir que los estudiantes colombianos presentan dificultades para resolver problemas no-rutinarios y/o complejos; problemas en los que no hay datos estructurados de tal manera que se puedan resolver directamente; se les dificulta descubrir relaciones no explícitas que les posibiliten establecer estrategias para la búsqueda de soluciones, y por ende, se les dificulta establecer relaciones formales indirectas en problemas matemáticos complejos.

- **Pruebas TIMSS[5]**

En las pruebas TIMSS se encontró que no existe un área, ni un tema considerado en las áreas temáticas, ni un tipo de desempeño, ni en un subtipo de desempeño, en cuyo contexto el rendimiento promedio de los estudiantes nacionales sea más alto que el rendimiento promedio correspondiente de los estudiantes internacionales, o siquiera cercano, pese a la similitud de los currículos propuestos.

En los resultados de las pruebas TIMSS se puede observar, que el rendimiento de los estudiantes de octavo grado es superior a los de séptimo, tanto a nivel nacional como a nivel internacional. Este desfase se mantiene a través de todas las áreas temáticas y los tipos de desempeño; sin embargo es en el área temática Álgebra es dónde se agudiza. Se observa además, que los rendimientos de las áreas temáticas que tienen que ver con la medición y la proporcionalidad son particularmente críticas, lo que implica unas áreas de mayor atención por parte de las autoridades en educación matemática del País.

El análisis de los resultados de desempeño muestra que dos de los procesos fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático, como son los de razonamiento matemático y comunicación, que aparecen básicamente en las preguntas de las áreas temáticas álgebra y medición respectivamente, se han caracterizado como particularmente críticos.

En Colombia tan solo el 3% del área temática Álgebra es apropiada para los estudiantes de séptimo y tan sólo el 10% para los estudiantes de octavo, muy por debajo de los resultados internacionales que son del 38% para séptimo y 69% para octavo. Esto muestra que más de la mitad de las preguntas que para los estudiantes colombianos de octavo son difíciles para los estudiantes

[5] Thrid International Mathematics and Science Study

internacionales son fáciles. A nivel del desempeño, el estudio muestra que los estudiantes colombianos tienen un rendimiento deficiente cuando requieren la identificación de patrones en arreglos numéricos, presentados en tablas, parejas ordenadas o situaciones problemas expresadas en forma verbal. Además resuelven problemas si el modelo de representación de éste sugiere la solución, pero su rendimiento es deficiente si la resolución del problema implica tanto la expresión de la información en un modelo algebraico, como un método de solución de éste. Esto quiere decir que tienen dificultad al pasar de una situación problema expresada en forma verbal o en tabla a otro modo de representación, algebraica por ejemplo, y se agudiza la situación cuando la solución no es directa o involucra varias operaciones o relaciones.

Por otro lado, en el área temática Medición se observa que, los estudiantes colombianos se desempeñan bien leyendo en una escala el resultado de una medición cuando la lectura es exacta y directa, pero el desempeño es precario cuando la lectura o la interpretación se hace menos directa y supone un proceso de estimación y redondeo. Además, no están familiarizados con estrategias básicas de descomposición de figuras en figuras más simples, para facilitar el cálculo de volúmenes, áreas o perímetros. Adicionalmente parece que hay confusiones entre estos conceptos, sobre todo entre área y perímetro, así como entre cuadrado y rectángulo.

Con respeto al área temática Proporcionalidad, las pruebas TIMSS muestran que una alta porción de los estudiantes responden deficientemente a la mayoría de las preguntas que involucran razonamiento con el concepto de proporcionalidad, y por lo tanto, el desempeño en cuanto a la resolución de problemas y el razonamiento matemático basados en el concepto de proporcionalidad es muy crítico.

En últimas, según las pruebas TIMSS, la educación matemática que los estudiantes de básica primaria y secundaria están recibiendo en Colombia, no les permite comprender, representar y relacionar la información ofrecida en las diferentes situaciones problema que se les presenta. Los conocimientos matemáticos que han logrado construir, y las destrezas de cálculo de las que hacen uso no son pertinentes para las estrategias de solución y estimación que deben utilizar en la complejidad de los problemas que tienen que abordar cotidianamente; en particular, cuando estos problemas involucran elementos conceptuales de álgebra, medida y proporcionalidad.

- **Pruebas Saber:**

Las Pruebas Saber, por tener un carácter local, permiten realizar comparaciones internas desde los niveles de logros cognitivos y procedimentales planteados y alcanzados, así como los factores asociados a dichos logros. Estas comparaciones son importantes, en la medida que apoyan las acciones futuras que se deben realizar en pro de disminuir la brecha observada entre el currículo propuesto; el currículo desarrollado y el currículo logrado. Por tal motivo, es indiscutible la importancia que tiene el análisis de sus resultados para este trabajo.

Para realizar dicho análisis, es menester caracterizar la prueba desde el marco teórico que la determina. Es decir, ¿Qué evalúan las Pruebas Saber? y ¿Cómo están diseñadas?, muy en particular, es interesante conocer qué dicen del pensamiento variacional. Centraremos nuestra atención analizando las pruebas en Ciencias Naturales 2003 y las de Matemáticas del 2002, debido a que en ellas podemos encontrar información relevante para esta investigación.

- **Análisis Pruebas Saber en Ciencias Naturales**[6]

Las pruebas de ciencias naturales realizadas en el año 2003 tuvieron como propósito fundamental evaluar las competencias que desarrollaron los estudiantes de los grados 5º y 9º durante su proceso de formación científica. Mediante esta prueba se determinó si los estudiantes se han apropiado, a partir de su experiencia cotidiana y de su experiencia en la escuela, de ciertas nociones, conceptos y procedimientos básicos de las ciencias. Para ello se incluyó una serie de situaciones problema de diferentes niveles de complejidad, ante las cuales se esperaba que los estudiantes realizaran interpretaciones gráficas, clasificaciones, secuenciaciones, valoración de evidencias, predicciones, planteamiento de hipótesis e identificación y relación de variables, integrando y vinculando las nociones y conceptos que han construido sobre las ciencias.

Dependiendo del tipo de situaciones que los estudiantes pudieron resolver se ubicaron en uno de los tres niveles de logro que se han definido para cada grado evaluado. Cada nivel estuvo conformado por un grupo de preguntas que se diferencian de las de otros niveles por las exigencias, en cuanto a competencias y conceptos que se requieren para contestarlas acertadamente. Así por ejemplo, mientras una pregunta del nivel más bajo puede requerir el establecimiento de una relación directa entre una estructura y su función; una de nivel más alto, puede exigir el establecimiento de múltiples relaciones entre diferentes estructuras y una misma función.

En el caso particular de este trabajo de investigación, se hace importante determinar las características de algunas preguntas en las cuales interviene el concepto de función a través de sus diferentes representaciones y las competencias de los estudiantes para interpretar y manipular variables.

---

[6] Información extraída el 13 de Febrero, 2005 de: http://200.14.205.40:8080/portalicfes/home_2/rec/arc_546.pdf

Para ello se centrará la atención en los tres niveles de competencia superiores que se establecieron para los estudiantes de grado 9°, que se clasifican como D, E y F, las cuales se caracterizan a continuación:

D: Las situaciones exigen realizar contrastes, clasificaciones, inferencias y relaciones lógicas a partir de interacciones y cambios que se presentan en los seres vivos y la materia.

E: Las situaciones exigen realizar predicciones, relaciones con más de una variable y descripciones de gráficas o esquemas a partir de procesos de los sistemas biológicos, físicos y químicos.

F: Contrastan predicciones, proponen conclusiones, discriminan y ponderan diferentes variables a partir de procesos de los sistemas biológicos, físicos y químicos.

Como se puede inferir, para que un estudiante llegue a ser clasificado en estos niveles de competencia no sólo requiere tener cierto grado de comprensión de los conceptos de las ciencias naturales, sino también, haber desarrollado cierto tipo de habilidades referentes al pensamiento variacional: en cuanto a la comprensión de la noción de variable y sus diversas representaciones, el establecimiento de regularidades y la formulación de hipótesis y conjeturas a través de gráficos cartesianos.

En la Tabla Nº 1 se muestra una clasificación de algunas de las preguntas incluidas en las pruebas de Ciencias Naturales, junto con las características del concepto de función y del pensamiento variacional que en ellas se requiere.

Grupo	Característica	Preguntas
1	Preguntas que hacen referencia a una interpretación "global" de los gráficos cartesianos	6, 9, 10, 11, 18
2	Preguntas que requieren de la identificación y manipulación de variables presentadas en forma verbal o pictórica	17, 19, 20, 23, 24
3	Preguntas que hacen referencia a la identificación de regularidades y propiedades mediante una tabla de valores	3, 11, 12, 22

TABLA 1: CLASIFICACIÓN DE PREGUNTAS DE LAS PRUEBAS SABER EN CIENCIAS NATURALES.

- **Pruebas Saber en Matemáticas 2002**

Características de la prueba:

La educación matemática en Colombia ha pasado por varias reformas, dependiendo del momento histórico y político que se esté atravesando. En la actualidad, se concibe a la matemática como una construcción social, donde sus conceptos están en permanente evolución, y su historia y epistemología son determinantes desde el punto de vista pedagógico. En este sentido, se ha cambiado de una educación matemática pensada únicamente para intentar dar acceso rápido a las matemáticas científicas, de investigación, paradigma de la verdad absoluta; a una educación matemática que, además de los anteriores valores, potencie la formación un ciudadano que participe de los procesos sociales, políticos y culturales.

Esta nueva mirada ha obligado a reestructurar la escuela y redimensiona la forma de hacer matemática en el aula. El profesor ha pasado de ser un transmisor de conocimientos a asumir un papel de orientador, facilitador, acompañante; y el estudiante ha pasado a ser productor y constructor de matemáticas, a partir del sentido y significado que le dé en las diversas situaciones que requieran su uso. En otras palabras, el estudiante ha pasado de ser un repetidor de fórmulas y definiciones, a desarrollar procesos cognitivos fundamentales en el que hacer matemático, tales como la construcción de objetos matemáticos, planteamiento y resolución de problemas, comunicación de ideas matemáticas y razonamientos coherentes.

En este nuevo orden se enmarca el término “competencia”: referido a lo que el estudiante es capaz de hacer con los objetos (matemáticos). Esta competencia está ligada al uso con significado y comprensión profunda de los conocimientos que se posee en la tarea de formular y solucionar problemas, y en el análisis e interpretación de situaciones variadas. En este orden, se puede decir que un estudiante es competente en matemáticas, en la medida que está en la capacidad de dar sentido al conocimiento matemático en contextos diferentes y con altos niveles de pertinencia y no simplemente si muestra destreza para operar y repetir procedimientos o usar mecánicamente símbolos del lenguaje matemático. Este saber-hacer implica que el estudiante ponga en juego tres aspectos que están integrados y que configuran la competencia como tal: *el conocimiento matemático, la comunicación y las situaciones problema*. Así, para poder dar cuenta de la competencia de un estudiante, es necesario, que al enfrentarse a una situación problema logre matematizarla, modelándola a partir de las diferentes relaciones que establezca entre los conceptos que le subyacen.

Por lo tanto, un desarrollo curricular consecuente con las anteriores ideas debe estar centrado en: el planteamiento y solución de problemas en diversos contextos cotidianos, de otras áreas y de la misma matemática; en el uso con significado del lenguaje matemático; en la modelación de situaciones; en la interpretación de diversas representaciones y en el desarrollo del pensamiento matemático. Estas pretensiones formativas del área de matemáticas toman forma en los lineamientos curriculares y estándares básicos de matemáticas. Por tal motivo, es sobre la base de los anteriores documentos que se presentan las pruebas saber, con el propósito de determinar los niveles de logros cognitivos de las competencias matemáticas de los estudiantes en la educación básica, y a través del enfoque de formulación y resolución de problemas matemáticos como estrategia de evaluación.

Estos niveles de logro tienen dos características: son jerárquicos e inclusivos; esto quiere decir que tienen un nivel creciente de complejidad, y además, alcanzar un nivel de logro implica haber superado los inmediatamente anteriores. Están divididos en tres niveles (B, C y D) para los grados 3º y 5º; y cuatro (C, D, E y F) para los grados 7º y 9º.

El pensamiento variacional en las pruebas SABER:

Desde el punto de vista del conocimiento matemático, se establecen cuatro tópicos a evaluar: Aritmética, Geometría y Medición, Estadística y Probabilidad, y Álgebra, que en términos de los Lineamientos Curriculares están determinados por: Pensamiento numérico y Sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, y Pensamiento variacional y Sistemas algebraicos y analíticos. Es importante destacar que el componente de Pensamiento métrico y sistemas de medidas se propone como eje trasversal de los demás pensamientos.

Es de gran interés para nosotros indagar por las preguntas y los resultados obtenidos en lo que respecta a Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; debido que es a partir de estos análisis de resultados que podemos evidenciar las debilidades que los estudiantes tienen con respecto al concepto de función.

El área temática álgebra, la más directamente relacionada con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, sólo aparece de forma explicita en el grado 9º, esto parece dar sentido a la marcada inclinación en el número de preguntas dirigidas a dicha área (de las 35 en total, 19[7] están dirigidas al álgebra). Sin embargo, es importante observar, que en los instrumentos aplicados en los otros grados, inclusive en las pruebas de ciencias naturales[8], como ya se mencionó, se encuentra una serie de preguntas[9] directamente relacionadas con algunas características del pensamiento variacional y que, aunque no requieran de las herramientas algebraicas para su solución, sí necesitan hacer uso de algunas de las raíces del pensamiento algebraico, como son los elementos propios del razonamiento proporcional, de las estructuras multiplicativas y aditivas y del análisis de variaciones y correlaciones. Estas preguntas están catalogadas por el ICFES[10] como pertenecientes a otra área temática.

Desde el punto de vista de los niveles de complejidad, las preguntas que consideramos tienen relación con el pensamiento variacional, están distribuidas de acuerdo con la siguiente tabla:

Grado / Nivel de complejidad	**Preguntas tercero**	**Preguntas Quinto**	**Pregunta Séptimo**	**Pregunta Noveno[11]**
B		20		
C	12,14	22, 23	6, 20, 21, 23, 26	7, 9, 12, 22, 31, 32
D	17, 18, 20	11, 14, 15, 18	3, 9	6, 10, 13, 14, 26, 33
E			8, 19	8, 15, 20, 24
F			27	11, 21, 25

TABLA 2: PREGUNTAS RELACIONADAS CON EL PENSAMIENTO VARIACIONAL SEGÚN EL GRADO Y EL NIVEL DE COMPLEJIDAD

[7] Las preguntas 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 31, 32, 33 (el documento original donde aparecen las preguntas, puede ser consultado en la página web oficial del ICFES http://www.icfes.gov.co)
[8] las preguntas 6, 9, 10, 17, 18, 19, 22, 26, 27.
[9] en 3º las preguntas 12, 14, 17, 18, 20, en 5º las preguntas 11, 14, 15, 18, 20, 22, 23, y en 7º las preguntas 3, 5, 6, 8, 9, 19, 20, 21, 23, 26, 27.
[10] Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior.
[11] Algunas de estas preguntas son catalogadas por el ICFES en el área temática diferentes al álgebra, pero nosotros, considerando el papel preponderante que juega el pensamiento variacional en su solución, las catalogamos en el área temática álgebra.

En la prueba de 3º se puede apreciar en preguntas como 12, 14 y 18, al igual que en las preguntas 20, 21 23 del grado quinto, que la respuesta depende del uso de nociones relativas a la covariación, en tanto que una cantidad de magnitud depende de otras y cuya dependencia requiere ser cuantificada. En las preguntas 17 y 20 del grado tercero y 11, 14, 15 y 18 del grado quinto, por ser de alto nivel requieren del uso de información implícita en su solución y aunque pretenden evaluar el conocimiento aritmético, tendrían la posibilidad de ser abordadas a través de nociones variacionales, pues básicamente son problemas de proporcionalidad directa o multiplicaciones, y por tanto, es importante explicitar la unidad de medida y los factores de conversión que permiten pasar de una magnitud a otra. Es decir, pueden ser pensadas desde el punto de vista funcional.

En el grado séptimo las preguntas 3, 6, 8, 9 y 27 son preguntas centradas en algún aspecto particular de la noción de porcentaje y de comparación por medio de ella. Esto a la luz de nuestro interés, permite afirmar que, aunque este concepto generalmente se hace pertenecer al campo de lo aritmético, las preguntas pueden pensarse desde un punto de vista variacional, puesto que este tipo de problema se redimensiona cuando se piensan a través del razonamiento proporcional y los porcentajes como un caso particular de este concepto genérico. Las preguntas 19, 20, 21 y 23 requieren, de manera más explicita el uso con sentido de algún registro de representación para determinar la variación y la correlación entre dos cantidades de magnitud, en particular, es importante observar que la pregunta 19 requiere de la lectura e interpretación de un registro gráfico para obtener información. La pregunta 26 indaga por el reconocimiento del significado de una letra como número generalizado, aspecto muy importante desde el punto de vista algebraico.

Como ya se mencionó, en grado noveno se logra apreciar la marcada inclinación que tiene el área temática álgebra en la prueba. En estas se indaga por la lectura e interpretación que los estudiantes hacen de la información presentada en diferentes registros de representación, en forma gráfica cartesiana, simbólica y tabular. Se indaga, además, por la conversión del lenguaje natural al registro simbólico. Hay preguntas dirigidas al reconocimiento de patrones de regularidad a través de relaciones funcionales y el tratamiento de información presentada en registro simbólico. Es muy importante observar que es la noción de variación la que prima en las situaciones presentadas, sólo las preguntas 7 y 22 se refieren a contextos puramente algorítmicos.

Las preguntas 8, 15, 20, 24, 11, 21, 25 que, aparecen clasificados en los niveles de logros E y F, es decir catalogadas como de mayor dificultad, demandan de análisis variacionales más finos que requieren de nociones de modelación y del uso de varios registros de representación.

La siguiente gráfica muestra que para los niveles de logro E y F del grado noveno los estudiantes del Departamento de Antioquia y en particular de Medellín, comparados con el resto del país, se encuentran muy por debajo de lo esperado (la tabla Nº 3 muestra los resultados esperados). Se puede observar que en el nivel C lo esperado es el 95% de aceptación y lo obtenido está por debajo del 80%. Lo esperado en el nivel D es el 75% y lo logrado está muy por debajo del 50%. En el nivel E y F es más dramática la situación, donde lo esperado es el 55% y 35% respectivamente y lo alcanzado no supera el 15%.

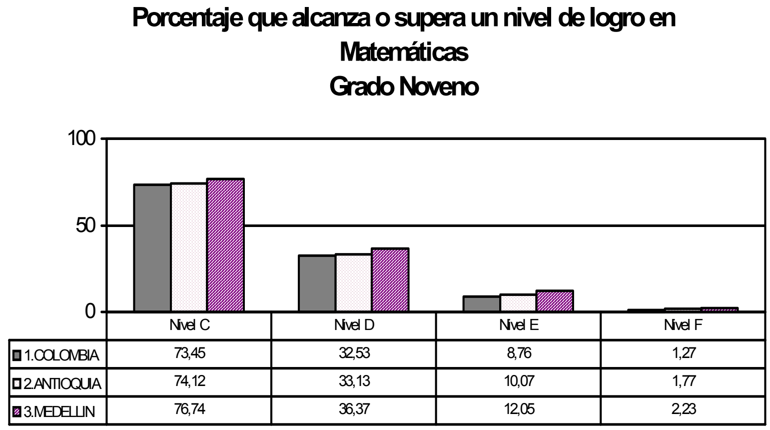


GRAFICO 1: QUE COMPARA EL PROMEDIO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN COLOMBIA, EL DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA Y MEDELLÍN PARA EL GRADO NOVENO

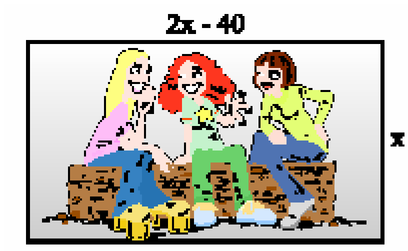
Grado	Nivel B	Nivel C	Nivel D	Nivel E	Nivel F
9°	-	95	75	55	35

TABLA 3: PORCENTAJES ESPERADOS DE ESTUDIANTES EN CADA NIVEL DE LOGRO DEL GRADO NOVENO EN MATEMÁTICAS

Estos bajos rendimientos pueden darse por variadas causas, particularmente se puede considerar: por un lado, que los estudiantes no tienen herramientas suficientes que les permita abordar los problemas desde un punto de vista variacional y/o algebraico, es decir, la permanencia en una forma de razonamiento puramente aritmético, lo que les hace considerar que todo problema, sea aritmético o no, tiene solución numérica y por tanto única; esto puede convertirse en obstáculo para pensar las soluciones generalizadas. Y por otro lado, por la poca costumbre que tienen de enfrentarse a situaciones de modelación matemática, asumiendo a ésta como proceso fundamental de pensamiento matemático.

Lo anterior se puede observar en preguntas como 20, 24 y 25 de la prueba realizada al grado noveno[12]:

"Luis pintó un mural que tiene 760 cm de perímetro; sus medidas se muestran en la siguiente figura."



20 - La expresión asociada al largo del mural: 2x - 40, se puede interpretar como:

A. el largo tiene 40 cm menos que el doble de su ancho
B. el largo excede en 40 cm al valor del ancho
C. el ancho al cuadrado, menos 40 cm, es igual al largo
D. 40 cm menos dos veces el ancho es el valor del largo

Responde las preguntas 24 y 25 teniendo en cuenta la siguiente información

Anualmente en Bellavista se realiza un torneo intercolegiado de baloncesto, en el cual cada equipo juega sólo una vez contra todos los demás. La puntuación se hará de la siguiente manera:

- Cada equipo recibe 2 puntos por el primer partido ganado.
- Después del primer partido cada vez que gane, duplica el puntaje que lleva acumulado.
- Si pierde o empata un partido no acumula puntos.

[12] Documento extraído el 7 de marzo, 2005 de http://www.icfes.gov.co. Igualmente todas las instituciones educativas que participaron de la prueba tienen el documento con las preguntas realizadas.

24 - Un equipo que ha ganado 5 partidos y ha perdido dos, tiene una puntuación de:

A. 5 puntos
B. 10 puntos
C. 16 puntos
D. 32 puntos

25 - Si en 1999, el equipo campeón ganó todos sus partidos y obtuvo un puntaje de 1.024 puntos, ¿cuántos partidos ganó?

El éxito en la pregunta 20 está determinado por la comprensión que se tenga de la letra ***x***, no como un número, sino como una variable que representa cualquier medida de una longitud, “ancho” en el caso particular, y que a su vez, determina la medida de la longitud largo (2x - 40), a través de una relación funcional. Adicionalmente requiere generar actividad cognitiva de conversión que le permita al estudiante interpretar una expresión presentada en registro simbólico en lenguaje natural, cosa que no siempre es posible ni mucho menos inmediato. En este sentido, la mayoría de los datos y las relaciones entre las variables son implícitas y por tanto requieren de un buen manejo conceptual del estudiante.

Con respecto a la pregunta 24, la principal dificultad radica en la determinación de las magnitudes cognitivamente pertinentes y la coordinación de dichas magnitudes para construir el modelo funcional que relacione las magnitudes “puntos acumulados” y “partidos ganados” y validar dicho modelo en la situación particular. Para responder bien la pregunta 25 es menester usar el modelo funcional como un objeto matemático y plantear una ecuación, que para el caso particular es exponencial de base dos; esto último le da un grado de mayor dificultad, pues en general las instituciones dicen no alcanzar a trabajar este tipo de funciones, por considerar más importantes las polinómicas de grado no mayor a dos. Se espera entonces, que en la pregunta 25, el porcentaje de estudiantes que respondan correctamente sea menor que en la 20 y la 24.

El nivel de dificultad de las preguntas analizadas se refleja en las respuestas de los estudiantes, las cuales se muestran en la siguiente tabla 4:

Pregunta 20	**Clave A**	
Antioquia	Medellín	Plantel (I.T.M)*
A. 23,86 % B. 26.96% C. 18,48% D. 30,15%	A. 21,41% B. 26,01% C. 19,36% D. 32,76%	A. 24,49% B. 10,2% C. 22,45% D. 38,78%
Pregunta 24	**Clave B**	
Departamento	Municipio	Plantel (I.T.M.)*
A. 20,78 % B. 27.04% C. 32,19% D. 18,48%	A. 20,94% B. 26,77% C. 32,82% D. 18,24%	A. 36,73% B. 18,37% C. 18,37% D. 18,37%
Pregunta 25	**Clave C**	
Departamento	Municipio	Plantel (I.T.M.)*
A. 42,99 % B. 35.87% C. 10,35% D. 9,29%	A. 46,70% B. 32,42% C. 9,69% D. 9,42%	A. 51,02% B. 24,49% C. 10,20% D. 8,16%

TABLA 4: RESULTADOS EN PRUEBAS SABER AÑO 2002

* Programa de Educación Formal para Adultos del I.T.M (Medellín); en esta institución se realizó el trabajo de campo.

Con los análisis anteriores se pretende mostrar que en las escuelas colombianas aún permanecen muchas dificultades dilucidadas en investigaciones, ya reseñadas en éste y en otros trabajos, propias del álgebra escolar. Además, es importante resaltar que los resultados obtenidos en las pruebas Saber 2002, muestran fehacientemente que la propuesta presentada en los lineamientos curriculares aun no ha trascendido los límites de lo teórico, ha llegado muy tímidamente a las escuelas y, por tanto, consecuentes con dicha situación, es muy difícil obtener los resultados esperados. Con respecto a lo algebraico, una propuesta de aproximación a sus elementos desde una perspectiva del pensamiento variacional, como la de los Lineamientos Curriculares, reforzada en los Estándares Básicos de Calidad (2003), plantea la necesidad de comenzar el estudio del álgebra desde los primeros años de escolaridad, y convalida la necesidad y pertinencia de experiencias de investigación como la asumida en el presente proyecto.

Es aquí donde se sitúa esta investigación; se enmarca en el desarrollo de una propuesta didáctica que dinamice las ideas del pensamiento variacional plasmado en los Lineamientos Curriculares colombianos de matemática, tomando como base los ejes conductores propuestos en los estándares curriculares del año 2003, tal como lo consideramos en la Tabla 5 de la sección 2.3. Puntualmente proponemos una aproximación didáctica al concepto de función lineal partiendo del concepto de razón de cambio y variación de magnitudes, que garantice los procesos fundamentales en matemáticas como son: formulación y resolución de problemas, comunicación, razonamiento, modelación, comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos[13].

[13] Estos son los procesos propuestos por los lineamientos curriculares de matemáticas MEN 1998.

1.2 PROBLEMA

Como ya se mencionó, en las escuelas colombianas permanecen dificultades propias del álgebra escolar; en particular conceptos como: variable, constante, parámetro, relación de igualdad en sus diferentes significados, traducción de un problema dado en lenguaje natural al lenguaje simbólico algebraico, ecuación, fórmula, función, entre otros propios del álgebra, no han tenido sentido apropiado ni como objeto matemático, ni como herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático, salvo únicamente con el objetivo de la solución de ecuaciones (generalmente algebraicas) y consecuentemente, desde esta perspectiva, lo fundamental en el álgebra escolar, ha sido el privilegio de técnicas algorítmicas para solucionarlas.

En el caso particular del concepto de función se ha hecho evidente que las actuales estrategias de su enseñanza son insuficientes para lograr que los estudiantes reconozcan, en este concepto, una herramienta fundamental en la modelación de fenómenos que implican variación y cambio de magnitudes. De igual manera no es claro cómo los conceptos de proporción y variación se convierten en una ruta para comprender dicho concepto.

Con base en lo anterior, este trabajo de investigación se enmarca en el desarrollo de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, desde la perspectiva del pensamiento variacional plasmado en los Lineamientos y estándares Curriculares de Matemática colombianos[14].

Por tanto el problema de investigación se plantea en los siguientes términos:

[14] Ver tabla 4 del apartado 2.3

Indagar por el papel del proceso de modelación matemática como herramienta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, a partir de la actividad cognitiva de conversión[15] de situaciones presentadas en el registro del lenguaje natural a un registro simbólico matemático.

La actividad cognitiva conversión está mediada por la noción de variación y, por tanto, el concepto de función se concibe como modelo matemático que atrapa la correlación entre dos cantidades de magnitud de la misma o de diferente naturaleza.

De esta manera, y sin desconocer la naturaleza de los conceptos matemáticos, su organización estructural y el lenguaje bajo el cual se comunica, se hará la interpretación del concepto de función lineal como un modelo matemático determinado por la noción de variación, permitiendo su estudio de forma alternativa a la presentación tradicional que tiene como noción de base una particular correspondencia entre los elementos de dos conjuntos

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar características didácticas y conceptuales de la función lineal, que permita a los estudiantes de la educación básica una aproximación a dicho concepto desde una perspectiva variacional, acorde con los Lineamientos y Estándares Curriculares de matemáticas

[15] Se entenderá la actividad cognitiva de conversión según lo establecido por Duval (1999) como el paso de una representación en un registro a otra representación del mismo objeto en otro registro

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Indagar el papel que tuvo la noción de proporción y variación de magnitudes, en la consolidación histórica y epistemológica del concepto de función.
- Delimitar las variables fundamentales bajo las cuales los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Calidad proponen desarrollar el concepto de función lineal en el currículo de matemáticas.
- Caracterizar la modelación como un proceso que permite la aproximación al concepto de función lineal, como modelo matemático de una determinada situación o conjunto de situaciones.
- Determinar las características de los sistemas de representación semiótica que intervienen en la construcción del concepto de función lineal.

1.4 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

- Una aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, permitirá a los estudiantes reconocer este concepto como una herramienta fundamental para modelar fenómenos de variación y cambio.

- Una aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional fomenta el desarrollo del pensamiento variacional propuesto en los Lineamientos y Estándares Curriculares.

- Si se asume como eje conceptual didáctico el concepto de razón de cambio a través de la variación de magnitudes, el desarrollo del pensamiento variacional será más significativo para el estudiante de la Educación Básica.

1.5 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cuál es el papel del concepto de proporción y de variación de magnitudes en la construcción del concepto de función lineal?

- ¿Es la modelación una vía adecuada para el desarrollo del pensamiento variacional?

- ¿Cuáles son los elementos didácticos que se deben tener en cuenta para el diseño de situaciones orientadas al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la educación básica?

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 LA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación introducida en la escuela francesa a principios de la década de los 80's. Artigue M. (1995) afirma que es un metodología particularmente apropiada para estudiar la complejidad del sistema curricular en el contexto del aula de clase. Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza, por ser un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, se basa en la concepción, la realización, la observación y el análisis de secuencias de enseñanza. Tales realizaciones se componen de una secuencia de enseñanza que diseña el profesor, en muchas ocasiones en colaboración con investigadores, en las cuales se presentan situaciones didácticas dentro de las cuales se lleva a cabo el aprendizaje de conceptos o el desarrollo de habilidades matemáticas.

Otra de las características propias de esta metodología, es la forma de su validación que es interna basada en una comparación entre los análisis a priori y los análisis a posteriori. En este aspecto Artigue (1995) afirma:

> *La ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación de estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basado en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (p 37).*

La ingeniería didáctica tiene importancia, adicionalmente, por la diversidad de objetivos que se puede abordar; Douady citada por Artigue M. (1995) distingue las investigaciones que abordan el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado, y en particular la elaboración de génesis artificiales para un concepto, de aquellas que no se ciñen a los contenidos; incluso también es aplicable en investigaciones que apuntan a dominios paramatematicos[16] o como la implementación de estrategias globales didácticas (por ejemplo la implementación de debates científicos en clase).

Este proceso experimental tiene cuatro fases, a saber: la fase 1, de análisis preliminar; la fase 2, de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; la Fase 3 de experimentación y, finalmente, la fase 4, de análisis a posteriori y evaluación. A continuación se dará una breve descripción de cada una de estas fases:

Fase 1: Análisis Preliminares

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción tiene sus cimientos en un marco teórico didáctico general, en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, y en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

[16] Término es utilizado por Chevallard, (1985) en el texto: La transposition didactique y citado por Farfán,R (1997). El término expresa que un dominio didáctico es aquel donde las nociones (como parámetro, ecuación, demostración)| guardan un estatus de herramienta en la enseñanza, al menos en un nivel determinado, o incluso trabajos que abordan el estudio y la aplicación de estrategias didácticas globales

- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Los diferentes análisis que componen la fase 1: el análisis epistemológico, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica; se hacen para determinar el punto de equilibrio actual del sistema didáctico, y determinar sus posibles cambios.

Fase 2: Concepción y Análisis a priori

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las “*variables de comando*” que él percibe como *pertinentes* con relación al problema estudiado. Estas variables pueden ser de carácter global (*macro-didácticas*) concernientes a la organización global de la ingeniería y de carácter particular (*micro-didácticas o locales*) concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia de situaciones. Para el caso de este trabajo se tomarán como variables macro-didácticas, en la construcción del concepto de función la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los sistemas semióticos de representación.

Según artigue (1995):

> *Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas [introducida por G. Brousseau] que sirven de referencia a*

la metodología de la ingeniería didáctica ha pretendido desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. (p. 44).

Fase 3: Experimentación

En esta Fase, se ejecutan las secuencias didácticas diseñadas y analizadas en las fases anteriores, y se realizan observaciones de todos los elementos que participan en las secuencias.

Fase 4: análisis a posteriori y validación

Ésta se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación; a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

En los siguientes apartados se inicia la construcción de los análisis preliminares según los requerimientos de la Ingeniería didáctica.

2.2 ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

El concepto de función es visto actualmente como uno de los referentes matemáticos de mayor importancia por sus múltiples aportes para modelar situaciones de las ciencias. Hogben (1970), Karlson (1961), Eves (1997), citados en Souza y Lanner 2003, afirman que, la esencia del pensamiento de hoy es el concepto de función, o sea, el movimiento del pensamiento de hoy, se materializa en el concepto de función. La función representa el propio movimiento de la vida. Representa mucho de la realidad objetiva, llegando muchas veces a confundirse con ella.

Al hacer una revisión de todos los procesos, que el concepto de función ha evocado, y de las aplicaciones y problemas que lo ayudaron a consolidarse hasta llegar al estado actual, se encuentra una estrecha relación entre este concepto y los fenómenos de variación y cambio, como si en todo el proceso histórico la "*función*" hubiera sido un "*modelo*" perfecto para representar y manejar lo referente a la variación. Aleksandrov et al (1981) afirma que:

> *El estado de reposo e inmovilidad es desconocido en la naturaleza. Todas las cosas de la naturaleza, desde las más pequeñas partículas hasta los cuerpos de mayor masa están en un estado de eterna creación y aniquilación, en un flujo perpetuo, en un movimiento y cambio incesantes. En último término toda ciencia natural estudia algún aspecto de este movimiento. El análisis [y el concepto de función como elemento de ella] es la rama de la matemática que proporciona métodos para la investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud, respecto de otras. (p. 92).*

Al hacer una aproximación histórica y epistemológica del papel que jugó la variación y el cambio en la construcción del concepto de función, no se puede desconocer el papel que ha jugado el concepto de variable en relación a la variación y el cambio, y, a su vez, con la función; ya que la variable es la esencia de la función. En el concepto de función, la variable asume su real sentido; la "variable realmente varía" (Lima, 1997; Souza e Diniz, 1997, citados por de Souza y Lanner, 2003).

LAS FUNCIONES EN LA ANTIGÜEDAD

Las "*funciones*" han sido utilizadas, desde tiempos muy remotos; pues desde los babilonios (5000 a. C hasta los primeros años del cristianismo) se encuentran registros en los cuales se evidencia que estudiaban algunos problemas que trataban con la variación continua, pero sólo desde un registro tabular. Según Boyer (1959) en algunos de los trabajos encontrados se observan relaciones entre la brillantez de algunos astros (por ejemplo la luna) para valores correspondientes de un argumento (tiempo) medido a intervalos iguales y calculaban de ahí el máximo de la función (intensidad).

En los griegos también es posible observar la presencia del concepto de función, por ejemplo fue Demócrito el primer matemático en calcular los volúmenes de la pirámide y el cono. Boyer (1959, 21) afirma que aunque no se conoce el método empleado para hacer estos cálculos es probable que la fórmula para el volumen de la pirámide la pudo haber conocido de los egipcios para luego generalizarla a todas las pirámides poligonales. El resultado para el cono podría ser entonces una inferencia natural del resultado de hacer crecer indefinidamente el número de lados de un polígono regular que forme la base de la pirámide.

Estos son sólo dos ejemplos que ilustran el tipo de problemas que eran capaces de resolver los matemáticos de la antigüedad, son problemas que tenían presente características de variación y que como tales requerían en cierto grado de un "***sentido variacional***"[17], pues de lo contrario hubiera sido imposible efectuar operaciones y predicciones con las tablas en el primer caso, y generalizaciones, en el segundo.

[17] se entenderá como sentido variacional a la comprensión global que tiene una persona sobre la variación y el cambio junto con la habilidad para establecer inferencias y regularidades acerca de las situaciones en las cuales interviene dicha variación.

En los trabajos de Aristóteles[18] (384 a.C.) es posible observar la preocupación por explicar los fenómeno de movimiento en la naturaleza. Es así como plantea que el movimiento natural de los cuerpos pesados es para abajo y de los cuerpos livianos hacia arriba, y que aquellos cuerpos que tuvieran un movimiento diferente tendrían un movimiento violento, contrario a la naturaleza del cuerpo. De igual manera es posible identificar en algunas de las leyes del movimiento expresiones que intentaban dar cuenta de la interdependencia de cantidades. Estas relaciones eran expresadas de forma retórica, así por ejemplo: "la velocidad es inversamente proporcional a la resistencia *R*, y directamente proporcional a la fuerza motriz *F*".

Es evidente que aunque muchos matemáticos de la época estudiaron algunos fenómenos naturales en los cuales intervenían los procesos de variación y de cambio, también es claro que estos procesos no lograron atrapar la atención de los mismos. En el caso de los griegos existía la incapacidad para responder de forma clara a la paradojas de Zenón, lo cual, les obligó a abstenerse de dar a los fenómenos de variabilidad una explicación cuantitativa y por lo tanto alcanzaron exiguos desarrollos conceptuales en torno al concepto de función y su relación con lo cambiante. Es quizás con base en estas limitaciones como algunos autores (Lacasta y Pascual, 1998, 20 y Azcarate y Deulofeu, 1996, 39) afirman que "cualquiera que hayan sido las causas y las circunstancias ideológicas o sociales, el pensamiento matemático de la antigüedad no ha creado una noción general de variable ni de función". Sin embargo, en este aspecto se insiste en la idea que en el pensamiento de los matemáticos antiguos estaba presente en cierto "sentido variacional" según lo observado en sus rasgos de comprensión de la variación.

Hacia la Edad Media se conocían algunas traducciones de los trabajos de Aristóteles y Arquímedes, quienes suscitaron los estudios sobre el movimiento y el cambio en general. En Oxford, en el Merton College, los filósofos escolásticos

[18] Extraído el 3 de mayo, 2004 de: http://www.francowo.org/fisuerj/fis10.htm#

consiguieron deducir una fórmula de velocidad de cambio que lleva el nombre de *regla de Merton.* La aparición de las ciencias experimentales junto con la inquietud del hombre por explicarse de qué manera suceden los cambios en los fenómenos físicos se convierten en los cimientos sobre los cuales se apoyarán los impulsos hacia el siglo XIV. Una muestra de ello puede materializarse en las escuelas de Oxford y Paris, los cuales sostienen que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales; estas escuelas dirigen su atención hacia el estudio de cualidades y formas de fenómenos muy diversos, entre ellos: el calor, la luz, la velocidad. Según Azcarate y Deulofeu (1996, 44) es precisamente en el transcurso de estos estudios y al margen del valor concreto de cada uno de ellos, donde empiezan a aparecer algunos conceptos fundamentales como cantidad variable entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntal, aceleración, todos ellos íntimamente ligados al concepto de función.

Es en estas escuelas donde se observa cierto cambio significativo en la concepción de la variación, pues el estudio de los estos fenómenos pasa de ser 'simples' **descripciones** co-relacionales a ser fenómenos ***cuantificables***, y así preparar el terreno para una nueva forma de representación en forma geométrica. Este hecho es observado en la calidad de los estudios de dichas escuelas pues... (Lacasta y Pascual, 1998)

> *El objeto de los métodos desarrollados en Oxford era expresar los grados en que una cualidad o forma aumentaba o disminuía numéricamente en relación a una escala fijada de antemano. Una forma era cualquier cantidad [magnitud] o cualidad variable en la naturaleza; por ejemplo, la luz, el calor, la velocidad, la distancia, la densidad... La intensidad o latitud de una forma era el valor numérico que había que asignarle; así, podía hablarse de la rapidez a la que la intensidad de la velocidad o del calor cambiaba en relación con otra "forma", denominada también extensión o longitud, por ejemplo el tiempo, la longitud o la cantidad de materia. Se decía que un cambio era uniforme cuando, como en el movimiento, se recorrían distancias iguales en intervalos de tiempo iguales, disforme cuando, como en*

movimiento acelerado, se reconocían distancias desiguales en intervalos de tiempo iguales. Se decía que un cambio era uniformemente disforme cuando la aceleración era constante, si no, era uniformemente disforme.

Esta concepción de la relación entre la intensidad o latitud y la extensión o de longitud fue la que dio origen en el siglo XIV a un nuevo método de expresar las relaciones funcionales, un método geométrico por medio de gráficas. (p.21 - 22).

En el siguiente gráfico (primera gráfica funcional que se conoce) se observan los cambios de la latitud (divisiones verticales) de los planetas respecto a la longitud (ejes horizontales).

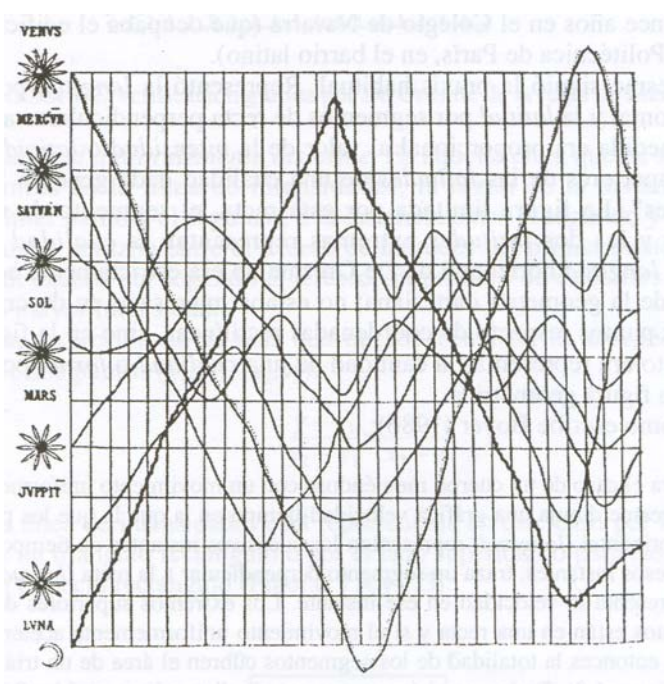


GRAFICO 2 PRIMERA GRÁFICA FUNCIONAL; SE CONSERVA EN LA BIBLIOTECA REAL DE MUNICH

Es **Oresme (1323 - 1382)** uno de los matemáticos de la época quien utiliza el método gráfico para representar las *latitudes* de las *formas*. Mediante su aproximación geométrica frente a los fenómenos cinemático-aritméticos, abre una nueva vía para el estudio de los fenómenos de variación y cambio.

El objetivo de Oresme era representar mediante una figura geométrica las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, estas intensidades estaban representadas por segmentos. Todo esto lo explica en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuun,* en donde llega a afirmar: “Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua”. De donde se puede inferir que Oresme interpretaba la noción de número como algo diferente a las magnitudes. (Ruiz, 1998, p 113).

Según Ruiz (1998, 114) Oresme, siguiendo la praxis habitual, representó la *extensio* (magnitud “independiente”, extensión) por una línea horizontal e hizo la altura de las perpendiculares proporcionales a las *intensio* (magnitud “dependiente”, intensidad). Su propósito era representar la cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica. Afirmó que las propiedades de la figura podrían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad.

Oresme clasifica los movimientos en uniformemente uniforme (el cual representa mediante un rectángulo), uniformemente disforme[19] (el cual representa mediante triángulos) y disformemente disformes (representado mediante un trapecio o una figura geométrica con un lado curvo).

Para el caso de un cuerpo con movimiento disforme, Oresme dibujaba una curva de velocidad – tiempo en las que los puntos de una recta horizontal representaban los sucesivos instantes de tiempos iguales que llamó longitudes, y para cada punto trazaba un segmento (al que llamó latitud) perpendicular a la recta horizontal, cuya longitud representaba la velocidad en ese instante. Con argumentos geométricos Oresme mostraba que, para un movimiento uniformemente disforme que parte de reposo, los extremos superiores de todos

[19] Ruiz Higueras utiliza el término desforme para referir al término de disforme establecido por Pascual y Lacasta.

esos segmentos están en una recta, y la totalidad de los segmentos velocidades cubren el área de un triangulo rectángulo. Así, caracteriza el movimiento donde la velocidad cambia en forma constante con respecto al tiempo de razón constante (Boyer, 1959,83). Las siguientes figuras ilustran las diferentes representaciones descritas anteriormente.

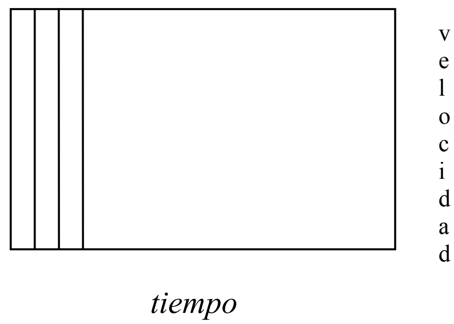


GRÁFICO 3: GRÁFICO DE UNA VARIACIÓN UNIFORMEMENTE UNIFORME

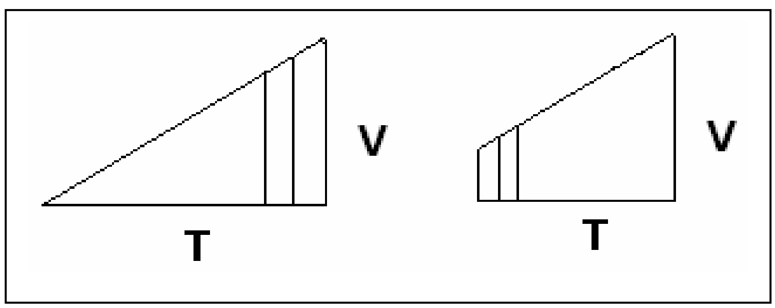


GRÁFICO 4 REPRESENTACIÓN DE UNA VARIACIÓN UNIFORMEMENTE DISFORME

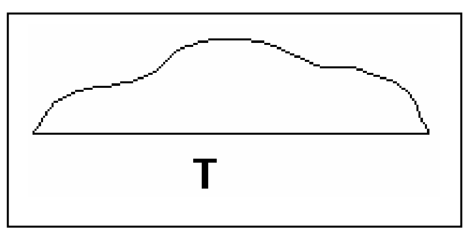


GRÁFICO 5: REPRESENTACIÓN DE UNA VARIACIÓN DISFORMEMENTE DISFORME

LOS APORTES DE LA EDAD MODERNA (S. XV AL XVIII) AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

En la Edad moderna los matemáticos hicieron aportes significativos al concepto de función; este periodo ha sido considerado por algunos autores, como el período más fecundo para la formación de dicho concepto. En este período se resaltan matemáticos como Galileo con su trabajo experimental, Newton y Leibnitz, con su desarrollo del cálculo infinitesimal, Viête y Descartes con la introducción del lenguaje simbólico y la geometría analítica. Cada uno, desde diferentes perspectivas, hace sus aportes para que surjan las primeras definiciones y el término de función.

Es en este período donde es posible observar con mayor claridad el papel que cumplió la variación y el cambio en la génesis y desarrollo conceptual del concepto de función.

En primer lugar cabe mencionar el trabajo de Galileo (1564 - 1642) quien centró su atención en los fenómenos sobre el movimiento, en su trabajo daba justificaciones experimentales a las leyes establecidas, las cuales, pueden ser consideras como verdaderas relaciones funcionales expresadas en palabras y en el lenguaje de las proporciones, esto es observable en su trabajo sobre el movimiento cuando afirma:

> *Los espacios descritos por un cuerpo celeste que cae desde el reposo con un movimiento uniforme acelerado están, unos con respecto a otros en la relación de los cuadrados de los intervalos de tiempo empleados en recorrer esas distancias (...) los tiempos de descensos a lo largo de planos inclinados de la misma altura pero de diferentes pendientes, están unos con respecto a otros en relación con las longitudes de los planos. (Lacasta y Pascual, 25).*

Hasta el momento todas las formas de representar las relaciones funcionales entre cantidades variables (¿magnitudes?) se reducían a las formas tabular, gráfica o verbal. Las representaciones simbólico-algebraicas sólo comienzan a tener sus raíces con los trabajos de Viète. En palabras de Lacasta y Pascual (1998):

> *Uno de los impulsos mas relevantes en el concepto de función corresponde al siglo XVII donde el crecimiento de los cálculos matemáticos, el desarrollo del álgebra simbólica y la extensión del*

> *concepto de número contribuyeron para que el concepto de función se considerada como relación entre conjuntos numéricos mas que como cantidades (p. 24).*

EL CONCEPTO DE ECUACIÓN E INCÓGNITA COMO EXPRESIÓN SIMBÓLICA. CREACIONES INDEPENDIENTES DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Las representaciones simbólicas de Viète sirvieron de inspiración para que Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) introdujeran la geometría analítica, de esta forma surge una nueva manera de observar el concepto de ***incógnita*** (independiente del concepto de variable) asociado, en esta oportunidad, a las ecuaciones indeterminadas $f(x, y) = 0$, las cuales, a su vez permiten describir los lugares geométricos que satisfacen determinadas condiciones. Este hecho es perfectamente observable en el método empleado por Descartes para resolver problemas; Campos (1994) describe este método así:

> *… quien quiera dar la solución a un problema, debe principiar por suponer que ya el problema está resuelto y dar nombre a todas aquellas líneas, conocidas o incógnitas que aparezcan útiles para la construcción, esto es para la solución del problema. Debe recorrer en seguida la cuestión, una y otra vez, tratando de establecer la dependencia de unas cantidades respecto de otras y expresar luego tal dependencia en ecuaciones. Debe haber tantas ecuaciones cuantas líneas incógnitas hayan resultado, sino la cuestión no está enteramente determinada. Se resuelve el sistema, es decir, se van comparando las ecuaciones hasta que una línea desconocida sea expresada mediante una conocida. Todas las cantidades incógnitas podrán expresarse en términos de una conocida. (p. 293).*

De esta forma, es posible afirmar que expresiones como $ax = by$ o $xy = b$ que actualmente conocemos como *funciones*, fueron introducidas por Descartes y Fermat como representaciones de familias de líneas rectas e hipérbolas respectivamente sin que esto signifique que se reconociera el carácter funcional de las mismas.

En los estudios de **Newton**, pese a su complejidad, pueden distinguirse un buen número de temas centrales: desarrollos en series, tratamiento algorítmico, la relación inversa entre diferenciación e integración, la concepción de la variable como expresión de un movimiento en el tiempo y la teoría de las razones primeras y últimas. Cabe señalar que en su interpretación geométrico-cinemática de los conceptos fundamentales del análisis matemático en las que, tomando el tiempo como argumento, analiza las variables dependientes como cantidades continuas que poseen una determinada velocidad de cambio.

Tanto para Newton como para Leibniz, la función no era un objeto de estudio, sino un instrumento implícito de *anticipación*; los problemas abordados eran las relaciones entre función, la derivada y la integral. Así pues, ambos necesitan conceptos ligados a la función pero no dependiesen de un valor determinado, sino que permitieran seguir el "movimiento" de la función, que dado un punto pudiera saberse lo que va a pasar con el próximo. Fue Leibniz el primero en utilizar el término función, según Lacasta y Pascual (1998, 31) esta palabra aparece por primera vez en su escrito titulado *Methodus tangetium inversa, seu de fonctionibus*. Y agrega*: "*Él otorga a la palabra *función* el sentido corriente de *función* de un órgano en un organismo, en una máquina". La representación de una función para Leibniz era geométrica.

Hacia el año 1698 Jean Bernouilli usa por primera vez el término función al comunicar a Leibniz la solución de un problema planteado por su hermano Jacques. De igual manera, define por primera vez este término en un artículo publicado sobre la solución de problemas de isoperímetros, decía:

Se llama función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier *manera de esta magnitud variable y de constantes*. (Lacasta y Pascual, 31)

Es posible observar en esta definición la función como relación de covariación entre magnitudes; la función como relación entre conjuntos numéricos es posterior. Es en éste matemático donde, según el desarrollo del cálculo infinitesimal, parecen encontrarse los primeros indicios de las funciones como expresiones analíticas. (Lacasta y Pascual, 32)

EULER Y SUS AVANCES EN LA DEFINICIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

El desarrollo ulterior del concepto de función es debido a Euler (1707 - 1783), discípulo de Bernouilli. En su *Introductio in analysis infinitorum* somete el concepto de *función* a un estudio tal como era, efectivamente, utilizado en análisis matemático. Según Dhombres et al (1987), Euler define las nociones iniciales así:

> *Una constante es una cantidad determinada [definida] que conserva siempre el mismo valor. Y con respecto a las variables agrega: Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o si se prefiere, una cantidad universal que contiene todos los valores determinados. Las cantidades variables comprenden todos los números de cualquier naturaleza (positivos y negativos, enteros y fraccionarios, racionales, trascendentes, irracionales, sin excluir el cero ni los números complejos). Se utilizan las letras z, y, x etc., para representar los valores de las variables. (p.194).*

Con respecto al concepto de función, Euler plantea una definición en la cual sustituye la palabra *cantidad,* que aparecía en la de su maestro Bernouilli, por expresión analítica: Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera, de esta cantidad y de números o cantidades constantes.

A pesar de existir las funciones en relación con sus representaciones simbólicas, permanecía la concepción de la función como herramienta que modela los fenómenos de variación; esto se infiere del hecho que Euler no considera las constantes como funciones de pleno derecho, puesto que "una función de una cantidad variable es ella misma una cantidad variable"

Euler incluso permitió una aproximación a una clasificación de las funciones ya que afirmaba que la principal diferencia de las funciones consistía en la combinación de las variables y de las cantidades constantes que las forman, de esta forma Dhombres y otros (1987, 195) afirma que las funciones dependen de las operaciones por las cuales las cantidades puede estar compuestas o combinadas entre ellas, esas operaciones son la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, la potenciación y la radicación y otras en relación con la solución de ecuaciones...

Las definiciones dadas por Bernouilli y Euler de una función como expresión analítica, cuya forma más general es una serie entera, fueron aceptadas por otros matemáticos de la época. Lagrange, refiriéndose a ellas en su *Teoría de las funciones analíticas,* llama función a toda expresión del cálculo. En el capítulo primero, respecto a la notación, escribe:

> *Designamos, en general, por la característica f o F, colocada delante de una variable, toda función de esta variable y que varía con ella siguiendo una ley dada. Así fx o Fx designarán una función de la variable x; pero cuando se quiera designar una función de una cantidad compuesta de esta variable, como, x^2, $a + bx$, etc., se encerrará esta cantidad entre dos paréntesis. Así fx designará una función de x, $f(x^2)$, $f(a + bx)$, etc. designarán funciones de x^2, $a + bx$, etc.*
>
> *Para señalar una función de dos variables independientes como x, y escribiremos $f(x,y)$ y así sucesivamente. (Lacasta y Pascual, 33).*

Como ya hemos dicho, Lagrange, Euler y los principales matemáticos del siglo XVIII consideraban, sin dudar, que toda función del análisis matemático podía ser representada por una serie entera.

Entre los matemáticos del siglo XVIII prevalecía la opinión de que cualquier problema de las ciencias naturales podía resolverse por medio de la geometría analítica y el cálculo diferencial con tal que solamente se pudiera encontrar una descripción correcta de él. (Aleksandrov et al, 1981) Esto quizás pueda interpretarse como "cualquier problema se puede resolver si se conoce una función que lo describa en cualquiera de sus representaciones."

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO CORRESPONDENCIA

Según Lacasta y Pascual (1998), Fourier a principios del siglo XIX, dedicado a estudiar los fenómenos del calor, comienza a desarrollar la teoría de las series trigonométricas, en 1822 aparece la versión definitiva de la teoría analítica del calor, en donde afirma que cualquier función arbitraria como la planteaba Euler podía ser representada por una serie trigonométrica.

Condorcet, en uno de sus textos sobre funciones analíticas aporta los primeros cimientos para una nueva definición de las funciones; afirma que:

> *Supongo que tengo un cierto numero de cantidades $x, y, z, ..., F$ y que para cada valor determinados $x, y, z,...$ etc., F tiene uno o varios valores correspondientes: yo digo que F es una función de $x, y, z...$ [y agrega] en fin yo sé que cuando x, y $z,$ estén determinadas, F lo estará también. Incluso, cuando no se conozca la manera de expresar F en $x, y, z,$ ni la forma de la ecuación entre F y x, y, z yo sabré que F es función de $x, y,$. (Lacasta y Pascual, 42).*

Y agrega de igual manera que Cauchy escribe sobre las funciones:

> *Cuando cantidades variables están de tal manera ligadas entre ellas que, estando dado el valor de una de ellas, se puede concluir el valor de las otras, se concibe de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una de ellas, que toma*

entonces el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que se llama funciones de esta variable. (__).

De igual manera dice que el término *cantidades variables* incluye números racionales, pero todavía no se había elaborado una construcción rigurosa de los números Reales.

Después de amplias discusiones sobre la continuidad de funciones, elaboradas por Euler, Fourier, Cauchy, Riemann y Weierstrass aparece el matemático francés René Baire quien introduce algunos refinamientos al concepto de función. Según Lascasta y pascual (1998) Baire en su artículo de 1899 “sobre las funciones de variables reales” escribe:

La palabra función, que ha servido primitivamente para designar las diferentes potencias de una misma cantidad, ha tomado una significación cada vez mas extensa hasta que Dirichlet ha dado a esta palabra el significado que se le atribuye hoy.

Hay función desde que se imagina una correspondencia entre números, que conviene considerar como los estados de magnitud de una misma variable y, con otros números, todos distintos, que conviene considerar como los estados de magnitud de una misma variable x. No nos ocupamos en esta definición de buscar por qué medios la correspondencia puede, efectivamente, establecerse; ni buscamos, incluso, si es posible establecerla. La noción de función, entendida de esta manera, está enteramente contenida en la noción de determinación. En este punto de vista a aquel que consiste en partir de ciertas funciones simples y en considerar expresiones compuestas de estas funciones simples, reservando la palabra función a la expresión así obtenida (Baire citado en Lacasta y Pascual, 49-50).

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA ACTUALIDAD

A partir de los trabajos de Dedekind y Cantor comienza a desarrollarse la topología. La noción de función no se limita al campo numérico, sino que se extiende a conjuntos cualesquiera.

Con base en la definición de Dirichlet citada anteriormente y la introducción de la teoría de conjuntos se constituye un nuevo nivel en el concepto de función que alcanza su máxima abstracción con el grupo Bourbaki, quienes con un lenguaje conjuntista proporcionaron la siguiente definición:

> *Sean E y F dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo $x \in E$, existe un único $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada.*
>
> *Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in E$ el elemento $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada; llamamos a y valor de la función para el elemento x, y decimos que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan las mismas funciones. (Lacasta y Pascual, 52)*

De igual manera se dio la definición mediante un subconjunto del producto cartesiano $E \times F$.

Se llama función a la terna $F = (G, X, Y)$ donde G, X, Y, son subconjuntos que verifican las siguientes condiciones:

i) $X \times Y \subset G$

ii) para todo $x \in X$ existe un solo $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función *f*.

> El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función f en x y se utiliza para designarlo $y = f(x)$.
> Es evidente entonces que la gráfica de G es el conjunto de pares de la forma $(x, f(x))$ donde $x \in X$ lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.
> A X se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada (Lacasta y Pascual, 52 - 53).

Como se puede observar, la definición actual de función aleja a este concepto de todas las características que estuvieron presentes en su génesis y evolución. Esta definición convierte a la función en un objeto matemático estático, aislado de los fenómenos de variación que estuvieron presente desde la antigüedad como simples descripciones co-relacionales descritas en representaciones retóricas y tabulares, pasando desde la comprensión de fenómenos cuantificables representadas geométricamente por Oresme hasta las definiciones proporcionadas por Bernouilli y Euler, representadas en forma retórica, gráfica y analítica (simbólica).

Tradicionalmente la mayoría de los textos universitarios y muchos de Educación Básica presentan a los estudiantes la definición de función como terna de conjuntos, omitiendo, en la mayoría de los casos, un tratamiento vía la variación y el cambio.

De esta manera el análisis epistemológico del concepto de función sugiere tener presente las nociones de variación y cambio en el diseño de situaciones para la construcción del concepto mencionado. Algunas de estas sugerencias fueron recogidas en los documentos base: Lineamientos Curriculares de matemáticas MEN 1998 y Estándares Básicos de calidad MEN 2003, para estructurar las ideas que dan sentido al pensamiento variacional como alternativa a lo que comúnmente se ha denominado álgebra escolar.

A continuación se presenta una interpretación de dichos documentos en lo que respecta al pensamiento variacional, y se proponen tres ejes conceptuales bajo los cuales se considera se pueden implementar intervenciones didácticas que posibiliten el desarrollo de dicho pensamiento en la educación básica. Se mostrará así el importante papel que juega la noción de variación en la construcción de sentido de los conceptos propios del álgebra y como, en estos primeros niveles de escolaridad, el concepto de función es fundamental para atrapar matemáticamente las relaciones de variación y cambio y, por tanto, permite verlo como modelo matemático de un conjunto de situaciones.

2.3 INTERPRETACIÓN DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE CALIDAD 2003

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, M.E.N. (1998), proponen el pensamiento variacional como uno de los elementos básicos para el desarrollo del pensamiento matemático. El Pensamiento Variacional, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación y cambio en diferentes contextos: en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas. Desde lo matemático hay una relación directa con los otros pensamientos, muy especialmente con el métrico, pues el pensamiento variacional se encarga, fundamentalmente, de la modelación matemática y esto requiere de la activación constante de procesos de medición, elaboración de registros y establecimiento de relaciones entre cantidades de magnitud.

Es así como la comprensión de las situaciones provenientes de la observación y sistematización de patrones y regularidades, tanto numéricas como geométricas, las variaciones proporcionales, las ciencias experimentales, la ingeniería y demás áreas del conocimiento que se basen en los principios del cálculo diferencial, adquieren más sentido cuando se estructuran desde el pensamiento variacional.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares MEN (1998)

> *(...) Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación (...).*
>
> *(...) En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.*

El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación - gráficas, tablas, expresiones verbales, expresiones simbólicas, fórmulas, ejemplos particulares y generales – para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga a manifestar actitudes de observación y registro por un lado, y de tratamiento, coordinación y conversión por el otro.

Vasco (2003,70) aproxima una definición del pensamiento variacional en los siguientes términos:

> *El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.*

Desde esta perspectiva, el carácter formal y estático que se le imprime a los elementos matemáticos del álgebra y el cálculo, se convierte en un punto de llegada mas que en uno de partida, a diferencia de lo que tradicionalmente se ha hecho. Es así como el desarrollo del pensamiento algebraico y del cálculo deja de ser exclusivo de los grados superiores (8º, 9º, 10º y 11º), de la educación básica y media. Se requiere entonces, intervenir el currículo a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado 1º al 11º, tal como se propone desde los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2003), mediante el diseño de situaciones que impliquen la observación, el estudio y sistematización de patrones y regularidades, al igual que el estudio de la dependencia en el cambio de una cantidad de magnitud cuando se controla el cambio de otra.

Adicionalmente, el estudio del álgebra escolar, al lado de los procesos de variación, permite construir desde temprana edad algunos elementos propios del algebra, tales como: el concepto de variable, la relación de igualdad en sus múltiples significados, el concepto de parámetro, el concepto de ecuación e inecuación, entre otros.

De esta manera se puede observar que el pensamiento variacional involucra otros tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico y estadístico. Esto, al menos por dos razones: de un lado, su estudio como parte de un proceso en busca de una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento implica identificar estructuras invariantes en medio de la variación y cambio; y de otro lado, todos ellos ofrecen herramientas para modelar situaciones a través de las funciones como resultado de la cuantificación de la variación. En este sentido los lineamientos curriculares MEN 1998 proponen que:

> *El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica (...).*

Por todo lo anterior, se requiere repensar y reinterpretar los referentes de lo que tradicionalmente ha sido llamado álgebra escolar y, por supuesto, la forma como han sido desarrollados en la escuela. Esta interpretación debe incluir un fino análisis del papel que históricamente han jugado los procesos de variación y cambio en relación con el papel que juegan los diferentes sistemas de representación. En este sentido, se considera que los estándares de matemáticas colombianos se pueden interpretar y desarrollar a lo largo de toda la educación básica y media, a través de tres eje conceptuales: Los procesos de variación y relaciones, la generalización y la modelación y el concepto de variable. En la tabla No 4 aparece la organización de los estándares básicos de calidad a partir de los ejes conceptuales propuestos.

Los procesos de variación y relaciones: En este eje se hace énfasis en los procesos que implican determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a la variación de otra u otras. En un sentido más estricto, la variación implica apreciar que dos o más cantidades de magnitud covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las cantidades de magnitud están correlacionadas.

La generalización y la modelación: A este eje pertenecen dos procesos fundamentales en la construcción y desarrollo de los conceptos matemáticos: la generalización y la modelación matemática. Por lo tanto, en él se hace énfasis, por un lado, en la actividad matemática que tiene por objetivo primordial alcanzar esquemas generales de pensamiento, es decir que se pueda, ante una determinada situación, reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través de clases generales de problemas. Y por otro lado, construir a través del proceso de modelación, determinados conceptos matemáticos, que, como en el caso de concepto de función, puede verse como un concepto matemático que modela un conjunto de fenómenos con características similares.

El concepto de variable: Este eje está determinado por los elementos que dan sentido al concepto matemático abstracto de variable, entendido éste como un elemento cualquiera representante de un determinado conjunto numérico.

Dado que nuestro interés está centrado en el concepto de función lineal, es de gran importancia observar el papel que este concepto juega en cada uno de los ejes conceptuales propuestos (ver tabla 5), por tanto es sobre estos elementos que se pondrá la mayor atención.

En primer lugar, es importante observar que a partir de esta interpretación de los estándares es posible tender una línea conductora que une el campo conceptual de las estructuras multiplicativas con el concepto de transformación lineal, a través del razonamiento proporcional; siempre y cuando las relaciones de proporcionalidad sean simples directas. Esto, como ya se mencionó, permite tejer relaciones con el pensamiento numérico e implica ver a la multiplicación como la puerta de entrada al pensamiento variacional, en particular, en lo que respecta a la construcción del concepto de función lineal. Consecuentemente, desde esta perspectiva, es posible dar comienzo a la construcción del concepto de función lineal como una correlación entre cambios, procesos, reglas y patrones que modelan la covariación entre dos cantidades de magnitud de igual o distinta naturaleza, cuando esta covariación es lineal.

En segundo lugar, se logra inferir el papel preponderante que los registros semióticos juegan en la construcción de modelos funcionales que atrapan la variación entre cantidades de magnitud. En el caso que nos interesa, la función lineal, esta idea permitirá estudiar las principales características que cada registro de representación ofrece al concepto y las dificultades presentadas cuando se desea pasar de un registro a otro. Esto es, proponer a la razón de cambio constante como principal elemento que permite identificar dicho concepto.

Y por último proponer al proceso de modelación matemática como una vía didácticamente pertinente, que permita concebir al concepto de función lineal como un modelo matemático que atrapa la variación entre dos cantidades de magnitud que se relacionan a través del cociente constante entre sus respectivas diferencias.

<table>
<tr><th></th><th>1° - 3°
(3)(2)(1,4)*</th><th>4° - 5°
(5)(1,2,3)(4)</th><th>6° - 7°
(2,4)(1,3)(5)</th><th>8° - 9°
(1,2,5)(7,8,9)(3,4,6)</th><th>10° - 11°
(3)(2)(1,4)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONCEPTO DE VARIABLE</td><td rowspan="3">Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas</td><td rowspan="3">Construir ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre datos numéricos.</td><td>Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).</td><td>Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.</td><td rowspan="3">Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Utilizar métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.</td><td>Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td>Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">PROCESOS DE VARIACIÓN Y RELACIÓN</td><td rowspan="2">Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráfica</td><td>Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos</td><td>Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).</td><td>Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.</td><td rowspan="2">Interpretar la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos.</td></tr>
<tr><td>Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.</td><td></td><td>Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones</td></tr>
</table>

				que genera.	
		Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	Analizar las propiedades de variación lineal e inversa en contextos aritméticos y geométricos.	Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.	
LA GENERALIZACIÓN Y LA MODELACIÓN	Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)	Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.	Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc) en relación con la situación que representan.	Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.	Utilizar las técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos.
	Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.			Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.	Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.
				Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	

TABLA 5: INTERPRETACIÓN DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE CALIDAD DE MATEMÁTICAS: ORGANIZACIÓN A PARTIR DE TRES EJES CONCEPTUALES.

Para dar continuidad a los análisis preliminares, según la Ingeniería Didáctica, se construye en los siguientes dos apartados algunos referentes conceptuales que tiene como objeto apoyar la ingeniera, estos referentes son: el proceso de modelación matemática y los registros de representación semiótica.

2.4 EL PROCESO DE MODELACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Hacer ciencia implica básicamente crear teorías organizadas. Estas deben explicar y predecir[20] las relaciones existentes entre los diferentes sistemas[21] y subsistemas que componen el *"mundo"*. Para la construcción de estas teorías llega a ser esencial la construcción de modelos, que permitan representar la conducta de los fenómenos, predecir su comportamiento y analizar a través de dichos modelos, los efectos de variadas situaciones que en ellos se producen y nos ayudan a entenderlos.

Crear modelos, desde el punto de vista científico, tiene como objeto fundamental comprender la forma cómo los diferentes subsistemas que componen ese gran sistema trabajan, las causas de sus cambios y la forma como se afectan unos a otros. El constructor de modelos, está interesado en crear teorías que le permitan observar, experimentar, simular, controlar y predecir los tipos de variaciones e interrelaciones que pueden ocurrir y cuando pueden ocurrir en un determinado fenómeno; en términos de Bunge citado por Bassanezi (2002,18) *"Toda teoría específica es en verdad un modelo de un fragmento de la realidad"*. Esta teoría le permite al modelador obtener información para, con ésta, lograr generalizar los procesos de comportamiento del mundo real, aproximándolo a la solución de los diferentes problemas, tanto locales como generales, que de allí surgen.

---

[20] Las habilidades de predecir y explicar están estrechamente relacionadas, aunque el predecir un comportamiento no necesariamente implica la comprensión del fenómeno y por ende explicarlo. El hacer múltiples predicciones no implica explicar satisfactoriamente todos los aspectos del fenómeno.

[21] Un sistema es un conjunto de objetos interactuando de forma regular e interdependiente.

Pero, ¿Qué es un modelo?

Modelo se deriva de la palabra “modus” que significa medida (Rutherford 1978, 1). Este término es usado ampliamente por filósofos y científicos para referirse a representaciones de cierto tipo de sistemas que atrapan sus relaciones estructurales y se presenta como un puente que conecta dicha representación con lo observado en el sistema.

Rutherford (1978) cita una serie de autores que se han aproximado al concepto de modelo desde diferentes teorías, entre ellos:

Taski afirma que una construcción en la cual toda afirmación válida de una teoría T se satisface, es llamada un modelo de T. En dicha construcción se diferencian: el prototipo, como el componente físico del sistema modelado; la teoría del modelo, como las hipótesis, los supuestos y afirmaciones que permiten crearlo; y el modelo en sí mismo, como los esquemas, ecuaciones y expresiones matemáticas, si el modelo es un modelo matemático.

Leatherdale y Hesse clasifican los modelos en dos tipos, uno formal y otro informal; el primero ($modelo_1$) definido como una copia imperfecta del sistema de donde se depuran las analogías positivas y se desechan las negativas. Y el segundo ($modelo_2$) igualmente es una copia, pero sin depurar. Por ejemplo las bolas de billar en movimiento, con sus colores y brillo son un $modelo_2$ de la teoría cinética, mientras que las mismas bolas pero sin importar su color brillo y demás propiedades no-moleculares obedecen perfectamente a las leyes de la mecánica y por tanto constituye un $modelo_1$ de ella.

Brodbeck, hace énfasis en los conceptos de isomorfismo y reciprocidad y define a un modelo como: “si las leyes de una teoría son isomorfas con las leyes de otra teoría entonces se dice que una es un modelo de la otra”.

Harré afirma que un conjunto de afirmaciones T es un modelo “sentential”[22] (teórico) de (o con respecto a) otro grupo de afirmaciones S si para cada afirmación t de T hay una correspondiente afirmación s de S, así que S es verdad toda vez que t sea aceptada y t es rechazada cada que s sea falsa. De esta forma si T y S son descripciones de dos sistemas M y N respectivamente y T es un modelo de S, entonces M es un modelo “iconic”[23] (prototipo) de N y continua, en matemática la palabra modelo es usado de ambas maneras (sentential e icnonic), la teoría del modelo es un modelo “sentential” al interior de la lógica matemática, pero frecuentemente concebimos el modelo como el grupo de objetos, reales o imaginarios, descritos matemáticamente. Dicho grupo de objetos es el modelo “iconic” mientras que las ecuaciones matemáticas son el modelo “sentential” que describe las relaciones y el comportamiento del grupo de objetos.

Las definiciones de Taski y Leatherdale están dirigidas a asumir al modelo como una especie de “objeto físico” que modela la teoría; mientras que las definiciones propuestas por Brodbeck y Harré van en una vía contraria, es decir, el modelo como una teoría que representa las relaciones estructurales que determinan ciertos sistemas generalmente provenientes de fenómenos físicos. La línea que se seguirá en nuestro trabajo esta más cercana a lo propuesto por los últimos; pues consideran que los modelos tienen un carácter teórico, tal y como lo propone Brodbeck con el modelo “sentential”.

¿Cómo obtener un modelo?

En general se asumirá al “mundo-real” como el sistema objeto de estudio, compuesto de subsistemas relacionados e interactuando de forma regular. El objetivo es obtener conclusiones de algún fenómeno bajo el procedimiento de

[22] En los diccionarios consultados no se encuentra la traducción al castellano de *sentential*.
[23] Se interpreta como prototipo, aunque tampoco se encontró la traducción en los diccionarios consultados.

observación de su comportamiento, el cual será estudiado para identificar los factores que allí parecen estar involucrados.

Como no es posible considerar y/o identificar todos los factores involucrados, se hacen las simplificaciones y supuestos que elimine algunos de éstos, para con ello construir un modelo que representa el fenómeno. Construido el modelo, se generan todos los análisis posibles para concluir acerca del modelo[24] y por último se interpreta el fenómeno. El siguiente esquema (gráfico 6) muestra el procedimiento.

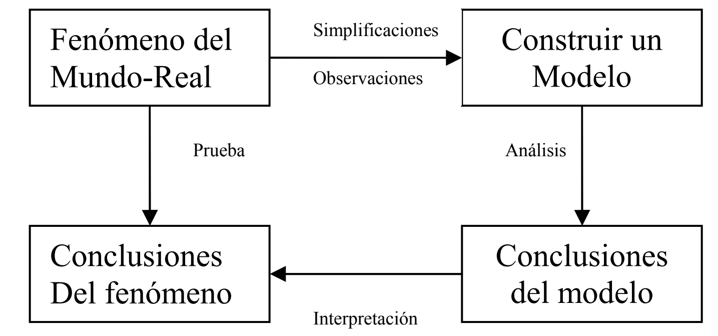


GRÁFICO 6 : ESQUEMA QUE ILUSTRA LOS MOMENTOS DEL PROCESO DE MODELACIÓN

Esto permite ver al proceso de modelación como un sistema cíclico. Dado algún sistema del mundo-real, obtenemos la suficiente cantidad de datos que nos permitan construir un modelo. Luego se analiza el modelo y se extraen las conclusiones pertinentes. Una vez se obtiene un conjunto pertinente de conclusiones se pasa a interpretarlo para predecir y/o elaborar las respectivas explicaciones. Y finalmente examinar las conclusiones en el sistema del mundo-real frente a nuevas observaciones y datos.

[24] Estas conclusiones pertenecen solo al modelo, no al fenómeno del mundo real que está siendo investigado. Puesto que hechas las simplificaciones este modelo contiene errores y limitaciones.

En resumen el proceso de modelar requiere:

1- Observar e identificar los factores involucrados en un fenómeno del mundo-real con posibilidad de hacerle simplificaciones.
2- Conjeturar tentativamente relaciones entre los factores.
3- Analizar para obtener conclusiones de los resultados obtenidos del modelo.
4- Interpretar el fenómeno a la luz del modelo.

2.4.1 EL PROCESO DE MODELACIÓN EN MATEMÁTICAS

Todo lo anterior se refiere a modelos generales, pero en esta investigación el interés está centrado en la caracterización de los modelos matemáticos, el estudio de sus propiedades y las bondades que ofrece para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este orden se definirá lo que es un modelo matemático, los pasos que se siguen para construirlo, la importancia que tiene en el desarrollo del pensamiento matemático y por último el papel que juega en el desarrollo del pensamiento variacional, propuesto por los lineamientos curriculares de Colombia, como iniciación al pensamiento algebraico.

Rutherford A. (1978, 5) define como modelo matemático de un sistema prototipo ***S*** (Físico, Biológico, Social, Químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas ***Σ***, que es formulado para expresar las leyes de ***S*** y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento.

Por otro lado, Giordano F. (1997, 34) define un modelo matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo-real”. Este puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales.

El concepto de modelo presentado en los apartados anteriores está ubicado en el contexto de la investigación en matemáticas. Sin embargo, sin dejar completamente de lado este contexto, por el interés educativo se adoptará la visión didáctica que ofrece Bassanezi (2002) y los elementos cognitivos que brida Lesh R et al. (2003).

Para Bassanezi la importancia de un modelo matemático radica en tener un lenguaje conciso que expresa nuestras ideas de manera clara y sin ambigüedades, además de proporcionar un arsenal enorme de resultados (teoremas) que propicien el uso de elementos computacionales para calcular sus soluciones numéricas. Por ello se llama simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representan de alguna forma un fenómeno o situación estudiada.

La construcción de un modelo matemático comienza por identificar el fenómeno particular que va a ser estudiado. Antes de construir el modelo se intenta seleccionar uno existente, previa identificación de los factores que intervienen en el sistema. O, por otro lado, puede replicarse el fenómeno experimentalmente o con la ayuda de alguna clase de simulación[25].

Bassanezi sostiene que la modelación matemática es un proceso dinámico en su obtención y validación, es una forma de abstracción y generalización con la finalidad de previsión de tendencias. La modelación consiste esencialmente en el arte de transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos cuyas soluciones deben ser interpretadas en el lenguaje usual. Por ello, la modelación es eficiente a partir del momento en que se hace conciente que estamos siempre trabajando con aproximación de la realidad; es decir, sobre un sistema, subsistemas de otro más grande, o una parte de él.

[25] La diferencia entre experimentación y simulación es si la observación del fenómeno se hace de forma directa (experimentación) o indirecta, es decir en laboratorios (simulación). Giordano (1997 p. 35)

En este orden de ideas, este autor propone la construcción de un modelo matemático a partir de cinco fases, las cuales gozan de cierto grado de jerarquía y por tanto se usarán con propósitos didácticos. Dichas fases son:

1. **La experimentación**: es una actividad esencialmente de laboratorio, donde se procesa la obtención de datos. Los métodos experimentales casi siempre son dictados por la propia naturaleza del experimento y/o objetivo de la investigación. La adopción de técnicas y métodos estadísticos en la investigación experimental puede dar mayor grado de confiabilidad a los datos obtenidos. Muchas veces nuevas técnicas de investigación empíricas ejercen presión sobre el foco de interés de la teoría y permiten una mejor selección de las variables esenciales involucradas en el fenómeno.

2. **Abstracción**: Es el procedimiento que debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos. En esta fase se busca establecer:

   a) **Selección de las variables**: se trata de identificar las diferentes variables que describen y controlan la evolución del sistema. Una de las exigencias fundamentales del proceso investigativo es que las variables con los cuales se trabaja sean claramente definidas.

   b) **Problematización o formulación a los problemas teóricos en un lenguaje propio del que se esté trabajando**: la adecuación de una investigación sistemática, empírica y crítica lleva a la formulación de problemas con enunciados que deben ser explicitados de forma clara, comprensible y operacional. De esta forma, un problema se constituye en una pregunta científica cuando explicita la relación entre las variables o los hechos involucrados en el fenómeno.

c) **Formulación de hipótesis**: las hipótesis dirigen la investigación y son comúnmente formulaciones generales que permiten al investigador deducir manifestaciones empíricas específicas. De una manera general las hipótesis se refieren a la frecuencia de la interrelación entre las variables observadas experimentalmente (hipótesis observacionales). También pueden ser enunciadas de forma universal cuando se busca generalizar los resultados investigados.

La generación de hipótesis se da de varios modos: observación de hechos, comparación con otros estudios, deducción lógica, experiencia personal o del modelador, observación de casos singulares de la propia teoría, analogía de sistemas[26], etc.

d) **Simplificación**: los fenómenos que se presentan para el estudio matemático son en general excesivamente complejos si los consideramos en todos sus detalles. Se requiere por tanto restringir y aislar el campo de estudio apropiadamente y de tal modo que el problema sea tratable y al mismo tiempo mantenga su relevancia.

3. **Resolución**: el modelo matemático es obtenido cuando se sustituye el lenguaje natural de las hipótesis por un lenguaje matemático coherente el cual atrapa matemáticamente (a través de funciones y/o ecuaciones) las relaciones que componen el sistema. La resolución de un modelo está siempre vinculado al grado de complejidad empleado en la abstracción.

4. **Validación:** es el proceso de aceptación o no del modelo propuesto. En esta etapa los modelos junto con las hipótesis que le son atribuidas deben

[26] La analogía entre sistemas es fundamental para la formulación y desarrollo de modelos. Dos sistemas son formalmente análogos cuando pueden ser representados por el mismo modelo matemático lo que implica una correspondencia entre las propiedades de los elementos de ambos sistemas.

ser analizadas en confrontación con los datos empíricos, comparando su solución y previsiones con los valores obtenidos en el sistema real. El grado de aproximación deseado de estas previsiones será el valor preponderante para su validación. Un modelo debe prever como mínimo los hechos que lo originaron. Un buen modelo es aquel que tiene capacidad de previsión de nuevos hechos o relaciones insospechadas.

5. **Modificación**: algunos factores ligados al problema puede generar un rechazo o aceptación de los modelos. Cuando los modelos son obtenidos considerando simplificaciones e idealizaciones de la realidad, sus soluciones no conducen a las previsiones correctas y definitivas. También una previsión puede estar errada o discordar de la intuición por causa de las siguientes razones:

    a) Alguna hipótesis usada puede ser falsa o no suficiente próxima a la realidad.
    b) Algunos datos experimentales o informaciones puede haber sido obtenidos de manera incorrecta.
    c) Las hipótesis y los datos son verdaderos pero insuficientes, y nuestra intuición de la realidad es inadecuada.
    d) Existen otras variables involucradas en la situación real que no fueron utilizadas en el modelo teórico.
    e) Se cometió algún error en el desarrollo matemático formal.
    f) Un penetrante principio nuevo fue descubierto.

Como se puede inferir, construir modelos matemáticos de determinadas situaciones no siempre es tarea fácil, y por tanto se requiere conjugar diferentes aspectos tanto teóricos como cognitivos que van más allá de la “aplicación” de una fórmula matemática. En este sentido, el interés no sólo debe estar en la simple construcción del modelo sino también, en la ganancia conceptual y educativa que adicionalmente permite este proceso, entre otros, hay dos elementos de gran importancia que es pertinente mencionar, a saber: a) adquirir progresos conceptuales en la comprensión de la matemática y de otras ciencias y b) generar una forma diferente de aproximación al mundo circundante a través de la matemática, es decir, “culturizar” por medio de la matemática y generar calidad de vida en los miembros de la sociedad.

2.4.2 LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Desde una perspectiva cognitiva, modelar implica suponer que el ser humano interpreta sus experiencias usando sistemas conceptuales internos o construidos, cuya función es seleccionar, filtrar, organizar y transformar la información obtenida o inferir patrones y regularidades que se encuentra, en ocasiones, más allá de lo visible. Por tal motivo al enfrentarse con situaciones complejas usa algún modo de representar y expresar sus ideas que va desde el lenguaje hablado, diagramas, metáforas, simulaciones hasta sofisticados sistemas simbólicos matemáticos.

Según Lesh R. (2003, 195) los modelos matemáticos son sistemas conceptuales que:

a) Se expresan para un propósito específico, y
b) Requieren algún sistema de representación para ser expresado y manipulado

Esto es, los modelos matemáticos sirven para comprender situaciones, hacer descripciones, explicaciones y sirven de organizadores o sistematizadotes de los fenómenos estudiados. Se centran en el estudio de patrones, regularidades y otras características de la estructura del sistema explorado, cuyo proceso involucra observar, manipular, experimentar y predecir sobre el sistema que está siendo modelado; y el proceso de desarrollo requiere ser examinado y revisado permanentemente, generando un ciclo llamado el ciclo de un modelo matemático, ver gráfico Nº 7[27]. Esto implica una manera sistemáticamente diferente de pensar acerca de la naturaleza de los objetos, relaciones, operaciones, patrones y regularidades matemáticas.

De esta forma lo didáctico y lo cognitivo se complementan, cuando por un lado el obtener un modelo implica construir un conjunto de funciones o ecuaciones fruto del proceso determinado anteriormente, pero por otro, este conjunto de funciones y/o ecuaciones constituyen sistemas conceptuales matemáticos que juega un doble papel en la comprensión de los objetos matemáticos: como conceptos propios de la matemática que pueden ser manipulados con las reglas propias del sistema de representación que lo determina, pero además está íntimamente relacionados con el fenómeno que organiza, describe y explica.

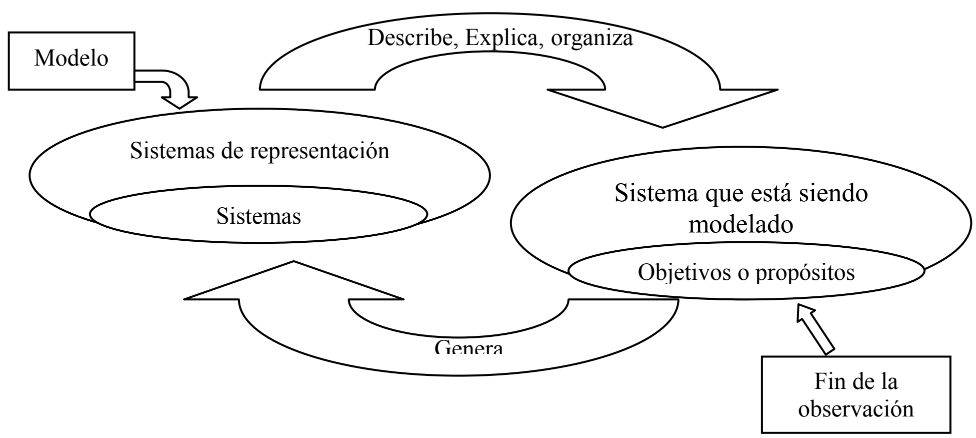


GRÁFICO 7: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PROCESO DE MODELACIÓN DESDE UN PUNTO DE VISTA CONGNITIVO

Puesto que los modelos son desarrollados para propósitos específicos en situaciones específicas, involucran formas situadas de aprender a resolver problemas. Además por requerir de la interacción social y con otras situaciones, se convierte en un excelente camino vía a la integración de áreas de conocimiento y desarrollo de proyectos colaborativos.

[27] Lesh R (2003)

Claramente se ve que la perspectiva de la modelación matemática se enfatiza en el desarrollo holístico del pensamiento matemático y en la naturaleza de los sistema conceptuales que están allí involucrados. En este sentido no es atrevido pensar que esta perspectiva tiene sus cimientos sobre la concepción del aprendizaje mediado de Vygotsky, las ideas del pragmatismo moderno, las teorías socio-constructivistas, las concepciones del aprendizaje situado, entre otras, y está íntimamente conectado con las ideas de la fenomenología freudenthaliana y de las situaciones problema, pues una tesis común de estos autores es que la labor fundamental del docente, en particular de las matemáticas, es la de crear ambientes de aprendizaje:

> *El principal reto del docente es encontrar la manera de poner al estudiante en situaciones en donde puedan expresar, cuestionar, y revisar sus propias formas de pensar. Lesh R (2003). [En otras palabras crear y verificar sus propias conclusiones].*

Plantear una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático, a partir de la construcción de modelos matemáticos, y las contribuciones que ofrece al proceso de enseñanza y aprendizaje, requiere aclarar lo que se entiende, desde esta perspectiva, sobre la naturaleza de la realidad, la naturaleza del conocimiento, la naturaleza y mecanismos de desarrollo del pensamiento matemático, el papel que juega en el contexto de la generalización, la naturaleza de la resolución de problemas y la naturaleza de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

En este sentido modelar parte de tres supuestos fundamentales, a saber: a) las personas interpretan sus experiencias usando modelos, b) estos modelos consisten en sistemas conceptuales que son expresados usando una variedad de sistemas de representación (material concreto, símbolos escritos, lenguaje hablado, etc.) que le permiten construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar el sistema de interés y c) los modelos desarrollados en y para la comprensión del mundo que lo rodea, son constantemente interpretados y reinterpretados. Lesh R. (2003).

Esto implica que el más mínimo análisis epistemológico de la realidad, es un modelo de la misma, expresado a través de un determinado sistema de representación. Las interpretaciones resultan de la interacción entre el modelo y el sistema por medio del cual es representado. Para interpretar sistemas complejos se requiere, generalmente, múltiples sistemas de representación los cuales ofrecen distintos niveles de comprensión. Mucho de lo que se comprende de un sistema complejo se deriva de los modelos desarrollados para explicarlos y de los sistemas de representación utilizados.

Al nivel del interés de esta investigación, cuando se habla de sistemas de representación se referirá a sistemas semióticos de representación[28]. La variedad de este tipo de sistemas tiene un estrecho vinculo con las funciones cognitivas que permiten el desarrollo del pensamiento humano. En este sentido Duval (1999, 14) afirma que si se llama *semiosis* a la aprehensión o producción de una representación semiótica y *noesis* a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia, entonces no hay noesis sin semiosis; es decir la semiosis es la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. Se puede constatar que el progreso en el conocimiento se acompaña siempre de la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos. En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

[28] Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráficas, figuras geométricas, etc.). Duval (1999:14)

Por lo tanto la interpretación de los modelos creados para el estudio de algún fenómeno, no se puede hacer sin el recurso de una pluralidad de sistemas semióticos; recurso que implica la coordinación de los mismos por parte del sujeto, traducida en dos actividades básicas, de tratamiento al interior de un mismo sistema semiótico de representación y/o de conversión entre diferentes sistemas.

Es así como desarrollar el pensamiento matemático a través de la construcción de modelos es algo más que la “artesanía” del mismo, va más allá de armar, ensamblar o juntar objetos, ideas o conceptos. Construir modelos matemáticos implica una forma más fina y detallada de comprender los sistemas conceptuales que son estudiados. Requiere saber clasificar y seleccionar los factores que intervienen en una determinada situación, revisar y refinar las ideas que pueden estar en conflicto con otras percepciones, filtrar y seleccionar las piezas que lo componen e implica una visión integral del saber específico y general.

De esta manera se rompe con la forma lineal que tiene la escuela de presentar los conceptos, desconociendo que el desarrollo conceptual, generalmente, involucra múltiples dimensiones o niveles, pertenece a contextos interactivos y generan procesos cíclicos y no esquemáticos. El proceso de modelación, como estrategia de aprendizaje tiene en cuenta que el desarrollo de un modelo matemático requiere de intervalos temporales para su consolidación, pero permite progresos conceptuales individuales y a la vez colectivos de las personas que aprenden. Además los modelos y las personas que los construyen, tiende a evolucionar a niveles cada vez más altos en su proceso de refinación, por ejemplo permite pasar de lo concreto a lo abstracto, de lo simple a lo complejo, de lo intuitivo a lo formal, de lo situado a lo descontextualizado, etc., generando espacios de interacción, discusión y confrontación.

Un valor educativo agregado de la construcción de modelos matemáticos proviene de la existencia de conflictos cognitivos generados desde la discordancia entre el fenómeno y el modelo construido para explicarlo, desde la falta de lógica al interior de un mismo modelo y entre diferencias significativas entre distintos modelos y submodelos del mismo fenómeno. Estos conflictos obligan a la reorganización y reestructuración de las ideas acorde con la nueva información. Tratar de resolver estos conflictos produce discusiones desde la normatividad social y de la estructura matemática que sirven para el desarrollo de ideas matemáticas cada vez mas consolidadas.

2.4.3 LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Con base en los argumentos anteriores se puede afirmar que es precisamente aquí donde emergen puntos muy fuertes de convergencia entre la propuesta de situaciones problemas, Obando y Múnera (2003) y la perspectiva de la modelación asumida en el presente trabajo; en el desarrollo del pensamiento matemático pues, tal y como lo expresan:

> *Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación.*

Y continúan:

> *La situación problema debe permitir al estudiante desplegar su actividad matemática a través del desarrollo explícito de una dialéctica entre la exploración y la sistematización. Esto implica que la situación problema debe tener, como parte de los elementos que la constituyen, dispositivos que permitan a los alumnos desarrollar, de manera autónoma, procesos de exploración, tales como la formulación de hipótesis, su validación, y si es del caso, su reformulación. Este trabajo permite la*

> *elaboración conceptual de los objetos matemáticos presentes en la situación (sistematización); esto es, las situaciones problema deben permitir un camino que recree la actividad científica del matemático, en el ejercicio de su autonomía intelectual (p.186).*

Aunque, como se ha dicho, el modelo tiene un alto nivel de particularización en el contexto y el fenómeno para el cual fue creado, también se reconoce que uno de sus objetivos es el de preservar los elementos generales de la situación de donde proviene y de algunas que le son similares. La tarea del modelador es crear sistemas generales que puedan ser usados mas allá del caso particular de origen, que sirvan de estructura para teorías, y que permitan ver invariantes en medio de las múltiples transformaciones e interacciones de los factores que intervienen en el fenómeno. En este sentido, es necesario aprender a distinguir cuándo un modelo permite resultados generales y cuando son modelos situados en contextos particulares.

En resumen, la perspectiva de modelación matemática, permite el desarrollo holístico de los sistemas conceptuales matemáticos a través de la clasificación, refinamiento, modificación, integración, extensión y construcción del conocimiento matemático, que incluye las dimensiones de lo situado y lo descontextualizado, lo específico y lo general, lo intuitivo y lo formal, lo estable y lo inestable, lo sintético y lo analítico; es por estas razones que se convierte en una herramienta poderosa de desarrollo del pensamiento matemático.

Además, por estar en concordancia con muchas de las teorías cognitivas, investigadas y desarrolladas, como es el constructivismo, el estructuralismo, el pragmatismo, o de corte didáctico como la situaciones didácticas, las situaciones problemas, la perspectiva del aprendizaje basado en la solución de problemas, la perspectiva fenomenológica Freudenthaliana, entre otras, se asume como eje central en nuestro trabajo, pertinente para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de matemática ajustada y contextualizada a los Lineamientos Curriculares de matemática en Colombia. O en palabras de Vasco C. (2003, 69):

> *(…) El paso de los sistemas concretos y familiares para los alumnos a los sistemas conceptuales y simbólicos que se proponía en la renovación curricular, se concreta ahora en el proceso de modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana.*

2.4.4 EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA, EL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Es importante observar que el proceso de modelación, sobre todo en su fase de formulación, permite tender una vía pertinente sobre la cual se pueda hacer emerger la necesidad del estudio y conceptualización del concepto de función y pueda presentarse como propuesta de aproximación al pensamiento algebraico en la educación básica. Esto, de acuerdo a lo sugerido por Janvier (1996), tiene sentido siempre y cuando se tenga en cuenta que:

a) Para reconocer la presencia de un modelo al final de una fase de formulación, las expresiones simbólicas derivadas de la situación deben contener, en el modo en que están construidas, los elementos a través de los cuales se hacen pertenecer a la familia de relaciones entre variables, esto implica el reconocimiento del concepto general matemático que cobija las relaciones entre la variables, por ejemplo modelos lineales, modelos cuadráticos, modelos exponenciales, etc., que en términos funcionales hablamos de función lineal, función cuadrática, función exponencial etc, pues, es el concepto de función, con toda su estructura matemática, el que soporta el modelo, esto quiere decir que un modelo lineal, lo es, porque se rige por las propiedades fundamentales de la función lineal con todo lo que esto implica teóricamente hablando.

b) considerar que cualquier aproximación al álgebra que se haga desde el proceso de modelado debe investigar los procesos mentales involucrados cuando se hace uso de magnitudes; es decir, no obviar el hecho de que en el proceso de modelación, el llamado modelo, puede tomar un doble status a saber "modelos abstractos" y "modelos concretos".[29] los cuales son diferentes en su forma, pero estructuralmente iguales, representantes de un mismo fenómeno. Esto unido al concepto de función genera una dualidad en la idea de variable, la cual puede ser un número que varía en relación con otros o una magnitud que varia en relación con otras.

En este sentido es importante tener en cuenta, que la perspectiva funcional de aproximación al álgebra escolar, pensando la noción de función como modelo matemático de un conjunto de situaciones con estructuras similares, no agota todas las posibilidades en torno a las características propias del concepto matemático de función y mucho menos de los demás conceptos propios del álgebra. Sin embargo, se considera pertinente para la educación matemática básica, por considerarse el concepto de función y el proceso de modelación fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional propuesto en los lineamientos curriculares y estándares básicos de calidad colombianos (ver tabla 4 de la sección 2.3).

Lo anterior puede sustentarse en el hecho de que dichos documentos plantean que uno de los propósitos de la matemática en la educación básica no es tanto el manejo de variados sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos; sino el desarrollo de cinco tipos de pensamientos matemáticos, entre éstos se encuentra el Pensamiento Variacional. Este, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación y cambio en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática: desde lo

---

[29] Modelo abstracto hace referencia a la estructura matemática que rige el fenómeno y Modelo concreto tiene que ver con las variadas configuraciones provenientes del dominio de las magnitudes que intervienen en el fenómeno.

geométrico, lo estadístico y muy especialmente en lo numérico y lo métrico. En particular la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente. En este sentido Vasco (2002, 68) afirma:

> *El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.*

Es así como la comprensión de los fenómenos de las ciencias experimentales, la ingeniería y demás espacios de conceptualización que se basen en los principios del cálculo diferencial, adquieren sentido cuando se estructuran desde el proceso de modelación atrapado en el concepto de función.

2.5 SEMIÓSIS Y LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Para estudiar la adquisición de un conocimiento matemático y los funcionamientos que permiten su tratamiento o su aprendizaje, es necesario tener presente la noción de representación. Esta noción ha sido discutida desde diferentes perspectivas, recurriendo en ocasiones al análisis antagónico entre representación consiente vs. representación no-conciente y de representación interna vs. representación externa.

De acuerdo con Duval (1999), las representaciones concientes se caracterizan por la mirada de alguna cosa que toma *ipso-facto* el status de objeto para el sujeto que efectúa esta mirada. El pasaje de lo no-conscientes a lo conscientes, corresponde a un proceso llamado objetivación, que a su vez corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba. Las representaciones concientes son, pues, aquellas que presentan un carácter intencional y cumplen la función de objetivación. Este carácter intencional es esencial desde el punto de vista cognitivo, pues permite tener en cuenta el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por los sujetos. La significación es la condición necesaria de la objetivación para el sujeto, es decir, de la posibilidad de tomar consciencia.

La oposición externo vs. interno se da entre lo que es directamente visible o perceptible en un individuo, un organismo o un sistema, con aquello que no lo es. Las representaciones externas, son por naturaleza, representaciones semióticas, cumplen una función comunicativa, pero también cumplen otras dos funciones cognitivas que son la de objetivación y la de tratamiento. Las representaciones externas son esenciales para la función de conversión. Las actividades de conversión están directamente ligadas a la utilización de un sistema semiótico. Por otra parte, las representaciones internas son las que pertenecen a un sujeto y que sólo son comunicadas a otro mediante la producción de una representación externa.

El cruce de estas cuatro representaciones dan lugar a tres grupos nuevos de representaciones: mentales, computacionales y semióticas.

De Las representaciones internas y conscientes provienen las representaciones mentales y son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible. Se incorporan en ellas los conceptos, las nociones, las ideas, las creencias, las fantasías, etc., es decir, todas las proyecciones más difusas y globales que un individuo refleja de los conocimientos

De las representaciones internas y no-consientes provienen las representaciones computacionales que son aquellas cuyos significantes no requieren de la mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie en otra serie. Estas representaciones expresan la información externa en un sistema de manera tal que la hace direccionable, recuperable y combinable en el interior del mismo sistema.

De las representaciones concientes y externas provienen las representaciones semióticas que son de diversa naturaleza como por ejemplo un gráfico, el lenguaje natural, los símbolos, etc. Estas representaciones se clasifican en dos grandes grupos según conserven o no algunas de las propiedades pertenecientes al objeto que representan: representaciones analógicas y representaciones no-analógicas. Unas conservan relaciones de vecindad (analógicas) como las imágenes y otras no conservan ninguna relación de vecindad con el objeto (no-analógicas) como las lenguas.

Generalmente se ha reducido el empleo de las representaciones semióticas a la función de expresión y se les subordina al funcionamiento de las representaciones mentales. En este sentido, se ha admitido que las representaciones semióticas son expresiones fiables de las representaciones mentales, planteándose la hipótesis de una correspondencia directa que va de lo mental a lo externo; es decir, las representaciones externas como una forma de comunicación de las ideas internamente producidas por un sujeto.

Sin embargo, se propone que la vía contraria, es decir, la que plantea que las representaciones semióticas son fundamentales para la producción y modificación de las representaciones mentales, también debe ser tenida en cuenta. Esta dualidad es importante en el sentido que las representaciones semióticas deben considerarse como herramientas para pensar y no únicamente como medio para comunicar las ideas que se producen. Esto, en términos de lo propuesto por Duval (1999), es: "no hay noesis sin semiosis" [30].

[30] Duval (1999, p 14) llama noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia. Y semiosis a la aprehensión o producción semiótica.

Desde el punto de vista de la construcción y aprendizaje de los conceptos matemáticos (en particular el de función lineal), no puede dejarse de lado esta situación, dado que la naturaleza abstracta de sus objetos hace que no sea posible acceder a éstos independientemente del recurso a un lenguaje, a unas figuras, a esquemas, a símbolos, en general a algún registro semiótico particular. Lo anterior sumado a que por un lado, las representaciones semióticas de los objetos matemáticos son no-analógicas, y por otro porque dependiendo del registro donde se produzca dicha representación puede pasar a ser puramente computacional.

Esta situación hace que en la mayoría de los casos, las personas confundan los objetos matemáticos con la representación que de ellos se hace, es decir, se termina estudiando la representación y no lo representado (objeto matemático). En realidad, según Duval (1999, 2004), sólo hay un medio para diferenciar un objeto de su representación: es necesario disponer de otra representación semiótica del objeto representado y reconocerla como una misma representación.

En este sentido, para el aprendizaje de los objetos matemáticos es indispensable apelar a la noción de múltiples registro de representación semiótica, que a su vez presupone la consideración de tres actividades cognitivas fundamentales. En primer lugar la construcción de una marca o conjunto de marcas perceptibles, *actividad llamada de formación* determinada por ciertas reglas de conformidad[31]. En segundo lugar, la transformación de las diferentes representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del registro semiótico, actividad *de tratamiento*. Y por último *la activad cognitiva de conversión*, que permite convertir las representaciones producidas de un registro semiótico de representación en otro. Esta actividad de conversión no es trivial ni cognitivamente neutra, pues

[31] Las reglas de conformidad son aquellas que definen un sistema de representación. Estas se refieren esencialmente a: 1) la determinación de unidades elementales. 2) las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior y 3) las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa. Duval (1999, p. 43).

plantea no sólo la pregunta general del papel de la semiosis en el funcionamiento del pensamiento, sino también las condiciones para diferenciar entre representante y representado cuando se refiere a un concepto matemático.

La actividad de formación en un registro de representación semiótica está definida como la recurrencia a unos signos que cumplen la función de actualizar o sustituir la visión de un objeto. Los actos más elementales de la formación son, según los registros, la designación nominal de los objetos, la reproducción de su contorno percibido o la codificación de relaciones. Las reglas de la actividad de formación son llamadas, reglas de conformidad, que permiten no sólo la comunicabilidad, sino también la utilización de los medios de tratamiento que ofrece el registro semiótico empleado. Estas reglas son las que definen un registro y, en consecuencia, los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles del mismo. Además permiten identificar un conjunto de elementos físicos o de trazos como una representación de algún objeto en un registro semiótico; es decir, permiten el reconocimiento de las representaciones como representación en un registro determinado, Duval (1999).

La actividad de tratamiento es la transformación de una *representación inicial* en otra *representación terminal* del mismo registro, es decir, es la transformación de una representación en otra al interior de un mismo registro semiótico de representación. Las reglas de la actividad de tratamiento son llamadas, reglas de expansión, reglas cuya aplicación produce una representación en el mismo registro que la representación de partida. Estas reglas pueden ser de cuatro tipos: reglas de derivación, de producción, de coherencia temática y las reglas de asociación de ideas, Duval (1999).

La actividad de conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, de la misma situación o de la misma información en otro registro. La actividad de conversión es una transformación, externa a un registro de partida, en otro registro de llegada. Generalmente a esta actividad se le ha llamado traducción, ilustración, transposición, interpretación, codificación, entre otras, Duval (1999).

La conversión requiere que se perciba la diferencia entre el contenido de una representación y lo que se está representando, sin ésta percepción es prácticamente imposible o incomprensible la actividad de conversión. A diferencia de las otras dos actividades en esta actividad se da el problema que con frecuencia no existen reglas claras para la conversión de un registro en otro; incluso, aunque puedan estar bien definidas las reglas de conversión, las dificultades y las ambigüedades no desaparecen por ello; pues, las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúe el cambio de registro, esto implica la unicidad en la aplicación de estas reglas.

Por tanto, la actividad conceptual no puede ser aislada de la actividad semiótica ya que ésta aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas. De esta forma, es necesaria la coordinación de múltiples registros de representación semiótica, lo que implica seleccionar las unidades significantes[32] de cada registro y ponerlos en correspondencia. El discernimiento de las unidades significantes de una representación y por tanto la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa, depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en el registro; es decir, es necesario poder explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, haciendo la previsión o la observación de las variaciones correspondientes de las

[32] Puede entenderse por unidad significante aquellos elementos que determinan el contenido en un registro de representación.

representaciones en otro registro. Y de esta manera determinar la congruencia o no entre los registros de representación analizados[33], Duval (1999; 2004).

2.5.1 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL Y SUS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Los registros semióticos de representación que se adoptaron en este trabajo para el estudio del concepto matemático de función lineal, serán: El registro de representación en lengua natural (castellano), el sistema de representación gráfica cartesiano ortogonal, el registro de representación tabular y el registro de representación simbólico.

De acuerdo con lo expuesto en secciones anteriores, la discriminación de las unidades significantes requiere de la identificación y el estudio del conjunto de invariantes entre dichos registros de representación. En nuestro caso, las unidades significantes serán determinadas a partir de la noción de variación y razón de cambio. Esto debido a que es la razón de cambio constante la que permite determinar el concepto de función lineal desde el punto de vista variacional.

Esta decisión, permitirá dar una mirada un tanto diferente al estudio del concepto de función lineal desde tres elementos:

- Unificar la noción de función lineal y afín.
- Concebir a la función lineal como un modelo matemático de un conjunto de situaciones con una misma característica (razón de cambio constante).
- Proponer una única unidad significante cognitivamente pertinente, que permita el estudio de las dificultades presentadas en la actividad cognitiva

[33] La congruencia en dos registros de representación se determina con base en tres criterios: posibilidad de correspondencia semántica de las unidades significantes, univocidad semántica Terminal y orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones. Duval (1999, p 52)

de conversión para los registros propuestos, en particular en el paso del registro en lengua natural al simbólico.

Esta propuesta toma cierta distancia respecto a lo mostrado en algunos estudios realizados por el mismo Duval (1996; 2004), en cuanto a que desde una perspectiva variacional se propone como característica principal del concepto de función lineal a la razón de cambio constante entre dos cantidades de magnitud, y por tanto es ésta la única unidad significante cognitivamente pertinente. Mientras que la aproximación de Duval al mismo concepto es desde una perspectiva de correspondencia punto a punto entre dos conjuntos y propone que las unidades significantes en los registros simbólico y gráfico están determinadas por los parámetros o coeficientes, y la pendiente y el intercepto con el eje ***y*** respectivamente.

De esta manera, aunque nuestro principal interés está puesto sobre la actividad de conversión del registro en lengua natural al registro simbólico; es decir, dada una situación en lenguaje natural como construir un modelo matemático (registro simbólico) de la misma situación, igualmente tendrán importancia los registros gráfico y tabular como registros que auxilian este tránsito.

En los textos revisados de Duval, esta tarea (conversión del lenguaje natural el simbólico) es tímidamente abordada en el caso genérico y prácticamente nula en el caso del concepto de función lineal; sin embargo, ofrece algunos elementos importantes en el análisis de los enunciados en lengua natural y el paso a lo simbólico, a saber: el fino análisis de las lenguas discursivas, los factores de congruencia y de no-congruencia entre estos registros, la discriminación de las unidades cognitivamente pertinentes para esta actividad de conversión y la necesidad de considerar conjuntos de enunciados para diversas situaciones que tienen un único modelo matemático (en nuestro caso función lineal), Duval (1999; 2004).

Con respecto a dichas ideas, se tendrá como punto de partida la variación intencional de una de las cantidades de magnitud que intervienen en la situación, a ésta la llamaremos cantidad de magnitud “control”, y a partir del tipo de variación que se perciba en la otra cantidad de magnitud, se estudiará la relación entre el cambio de la cantidad de magnitud “control” y el cambio en la otra.

Para el presente trabajo interesa estudiar aquellas funciones en las cuales la razón de cambio entre cantidades de magnitudes es constante; esto debido a que es fundamental en el desarrollo de los conceptos básicos del cálculo, y este a su vez es la herramienta que matematíza los fenómenos que implican variación y cambio. Por otro lado, desde un punto de vista epistemológico, es la razón de cambio, en particular las razones de cambio constantes, uno de los pilares en la consolidación del concepto de función, y finalmente, porque es la razón de cambio constante, la que nos permitirá aproximarnos a una interpretación alternativa de la función lineal, diferente a la conocida mirada desde la proporcionalidad directa entre dos cantidades de magnitudes.

Es así como se conoce en la mayoría de los libros de texto matemáticos, que las funciones lineales están asociadas a polinomios de primer grado. Sin embargo, en los último tiempos se ha estado haciendo cierta diferenciación entre las funciones polinómicas de grado uno $f(x) = ax$ y $g(x) = ax + b$, como funciones lineales y funciones afines respectivamente. Esta diferencia está determinada básicamente por el cumplimiento de las siguientes dos propiedades:

Aditividad: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Homogeneidad: $f(kx) = kf(x)$ para k constante Real

Para profundizar un poco en este debate se hizo la revisión de algunos textos de Álgebra Lineal (Takahashi 2002; Restrepo, et al, 1996; Florey 1979) y se encontró que las propiedades arriba mencionadas definen matemáticamente operadores o transformaciones lineales y no, necesariamente, funciones lineales. De esta manera es posible afirmar que las funciones de la forma $g(x) = ax + b$ son lineales y en particular cuando b es igual a cero es una transformación lineal.

Adicionalmente, en estos textos se encuentra cierta diferenciación del concepto de función y el de transformación, pues en sus definiciones se encuentra que una transformación lineal es un caso particular de las funciones; por ejemplo "...de una función que tenga estas propiedades [aditividad y homogeneidad] diremos que es una **transformación lineal.**" (Takahashi , 2002,5)

Sin embargo, si la atención es centrada no en las variables sino en los cambios de ellas obtenemos que todas las funciones de grado uno cumplen con la propiedad que $\Delta y = a\Delta x$, lo cual permitiría inferir un criterio de transformación lineal que se podría extender a todas las funciones de grado uno.

Con base en estos argumentos, se asumirá la siguiente proposición como una interpretación alternativa y conveniente desde el punto de vista de la función lineal.

“Interpretación del concepto de función lineal”: Se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante.

2.5.2 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL DESDE LA MODELACIÓN Y SUS REGISTROS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

Reiterando lo anterior, el proceso de modelación matemática de situaciones que implican la variación, se entenderá como un proceso que parte de un fenómeno expresado en lenguaje natural para llegar a la construcción de sofisticados sistemas simbólicos matemáticos; esto haciendo uso intermedio de diagramas, metáforas, simulaciones, en especial registros tabulares y gráficos; esto dado que es el registro simbólico el que permite referirse a los conceptos matemáticos con mayor grado de generalidad.

Por esta razón se crea la necesidad de hacer un análisis de cada uno de los cuatro registros de representación del concepto de función antes mencionados. Desde esta perspectiva, puede asumirse al lenguaje natural y el simbólico como los dos registros principales, dado que el primero se convierte, en general, en el punto de partida y el segundo lo concebimos como el modelo matemático del fenómeno. Los registros tabular y gráfico se tomarán como registros auxiliares en el reconocimiento de las relaciones funcionales entre las magnitudes que intervienen en la situación.

De esta manera, los registros auxiliares tendrán las siguientes funciones[34]:

- Aportarán información adicional en la comprensión del concepto (función lineal) a partir de su contenido[35], que en la presentación discursiva (registro principal) no es posible dilucidar.
- Ofrecerán posibilidades de tratamiento totalmente diferentes al del registro principal. En particular, permiten desarrollar secuencias de reglas operatorias o de procedimiento. Es decir, tratamientos tipo algorítmicos.
- Suplirán un desconocimiento eventual del registro principal.
- Separarán información pertinente o útil en relación con la tarea a realizar.
- Permitirán la organización en orden de necesidad o importancia de los diferentes registros elegidos para la tarea a realizar.
- Mostrarán posibles ejemplos que afirmen o rechacen algunos rasgos o propiedades del concepto en mención.

[34] Duval (2004; 58.)
[35] Entiéndase por contenido de un registro de representación, lo que en particular presenta del objeto.

ANÁLISIS DE LOS REGISTROS AUXILIARES

- **El sistema Gráfico cartesiano ortogonal**

Los objetos del registro de representación gráfico cartesiano ortogonal, son principalmente, los ejes ortogonales y los puntos definidos por las duplas si es bidimensional o tripletas si es tridimensional. La primera regla de conformidad, es la ubicación de puntos a partir de dos o tres ejes coordenados ortogonales graduados, determinados por una dupla o tripleta; las demás reglas, estarán determinadas por el tipo de relación entre los componentes de las duplas o tripletas. En el caso de este trabajo, interesa establecer las reglas para conformar el registro asociados a las funciones lineales y por tanto hablaremos de duplas, es decir en espacios bidimensionales.

Se identifican dos reglas de tratamiento: El cambio de unidad para la graduación de los ejes y cambio de escala (zoom). Esto porque son estas reglas de tratamiento las que permite observar dos representaciones diferentes de un mismo registro.

En este registro de representación, es posible identificar otro tipo reglas, las cuales producen nuevas representaciones a partir de una dada, aplicando sobre este una o varias operaciones tales como: traslaciones, rotaciones, dilataciones de los ejes y simetrías. Estas reglas no están claramente identificadas en los trabajos de Duval (1999), pero consideramos importante especificarlas dada la importancia a la conservación de algunos características en el mismo y otros registros.

Para determinar las unidades significantes de este registro de representación, cada una de las cantidades de magnitud presentadas en la situación, se identificará con alguno de los ejes coordenados graduados, y luego se analizarán los cambios o variaciones de dichas cantidades.

En este sentido, llamaremos incremento, cambio o variación de una cantidad de magnitud, a la longitud del segmento, resultado de la diferencia geométrica entre la longitud de dos segmentos formados por el punto origen y el punto que indica dos cantidades consecutivas de una misma magnitud. Este cambio se denotará por Δx si es el segmento diferencia en la coordenada X y Δy si el cambio es en el eje coordenado *Y*, ver gráfico 8.

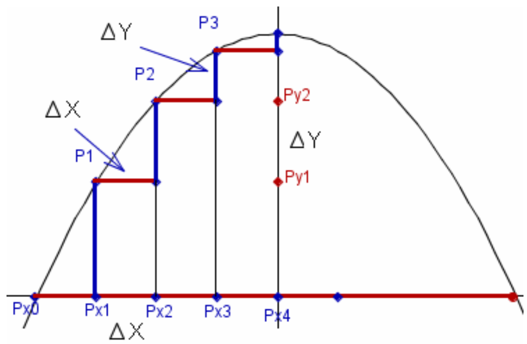


GRÁFICO 8 EL SEGMENTO DIFERENCIA EN X PX$_1$-PX$_2$ Y EN Y PY$_2$-PY$_1$

Aunque el segmento diferencia en la magnitud control se asumirá con la misma longitud pero de longitud arbitraria, es importante tener en cuenta los puntos que definen dicho segmento diferencia. Lo anterior debido a que, aunque las cantidades de magnitud control se hace cambiar de forma constante, no necesariamente ocurre lo mismo con la otra cantidad de magnitud (dependiente). Esto implica establecer una forma de comparación entre ambas diferencias; en particular, la comparación por cociente entre estos dos cambios determina y define un tipo de función que la gráfica representará. Consultarse el gráfico Nº 9.

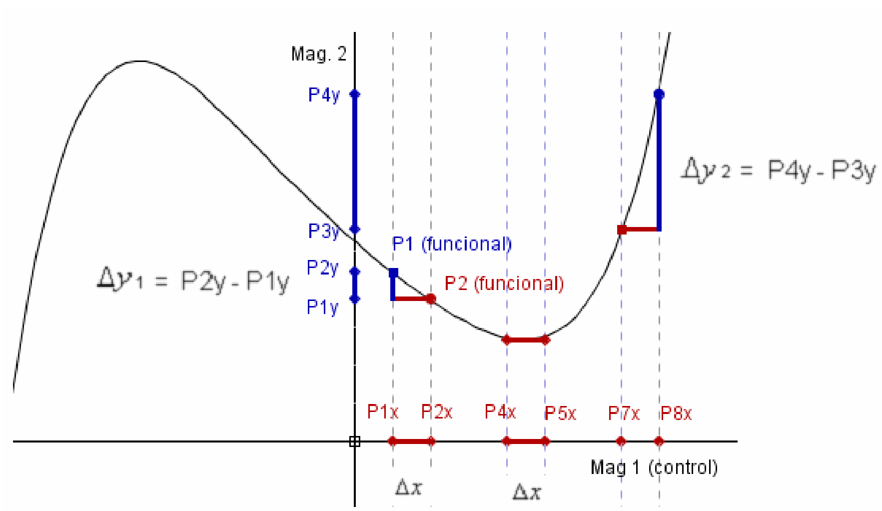


GRÁFICO 9

En el caso de que una representación en este registro sea una línea recta, se puede observar que independientemente de la longitud del segmento tomada para la cantidad de magnitud control y los puntos que lo definen, el cambio en la otra cantidad de magnitud será proporcional a éste, es decir el cociente entre ellos determina una constate. Dicha constante se visualiza en este registro, básicamente en uno de los siguientes aspectos: a) la congruencia entre los ángulos formados por la representación del registro dado y toda recta paralela al eje X, ó b) Por la semejanza presentada entre todos los triángulos rectángulos determinados por los segmentos diferencia correspondientes obtenidos. Lo anterior justifica el hecho que "toda recta en el sistema de representación cartesiano es la representación de una función lineal", ver Gráfico 10. El reciproco es igualmente válido y se puede justificar por medios geométricos. En conclusión en el registro gráfico se tiene que toda función lineal tiene como representación gráfica una línea recta y toda línea recta en el registro gráfico, esta asociado a una función lineal.

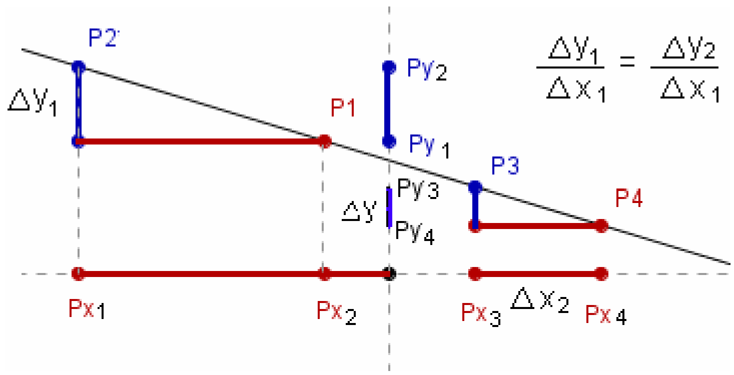


GRÁFICO 10: **INDEPENDIENTE DEL INCREMENTO EN Y LA RELACIÓN POR COCIENTE CON RESPECTO AL INCREMENTO EN X SE CONSERVA.**

Es importante aclarar, que los elementos del enunciado anterior dependen de la garantía que se tiene de que la representación observada corresponde a una línea recta. De lo contrario, sólo se puede establecer una aproximación de la linealidad de la función. Esto basado en algunas de las restricciones propias del sistema de representación, tales como: Por un lado, la imposibilidad de observar la representación en todo su dominio y, por otro lado, la posibilidad de que varias representaciones de funciones diferentes coincidan en un determinado intervalo.

- **El registro tabular.**

Los objetos del registro de representación tabular son: un arreglo rectangular (filas y columnas) y parejas o tripletas de números que las componen. La única regla de conformidad es la *correspondencia* entre los valores de una pareja ordenada, de acuerdo a la regularidad que se permiten inferir a partir de la observación de las parejas o tripletas numéricas, la determinación de la correspondencia se hace generalmente a través de un proceso inductivo. Al igual en el caso del registro gráfico, interesa establecer las reglas que conforman los arreglos que corresponden a funciones lineales y por tanto se hablará de duplas, es decir, un arreglo que en particular tiene dos columnas y un número no especifico de filas.

Es posible identificar, en este registro de representación, tres tipos de reglas de tratamiento, que permitan construir una nueva tabla de la misma representación, siempre y cuando se halla inferido la regularidad que expresan los valores consignados en la tabla; estas reglas son: reglas de interpolación, reglas de extrapolación y el cambio de un incremento (Δx) cuando se conforma una tabla de manera recurrente, esto es, $\left(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\right)$.

Para determinar las unidades significantes de este registro de representación, cada una de las cantidades de magnitud de la situación, se asociará a una de las columnas (o filas), y establecen una representación discreta de cada una de dichas cantidades. De esta manera, se centrará la atención en los siguientes elementos: La diferencia entre dos valores, consecutivos o no, de una columna, la diferencia de los valores correspondientes en la otra columna y la razón de cada una de estas diferencias.

El análisis del concepto de función, a partir del registro tabular, se hará de acuerdo a la variación de las razones de las diferencias entre las cantidades de magnitud.

Para este propósito es necesario tener en cuenta varios supuestos:

1. Por un conjunto de puntos (de un plano cartesiano) o de una tabla pasan infinitas funciones polinómicas. Lo que hace imposible determinar una única función para una tabla.

2. A pesar de existir infinitas funciones que satisfacen una misma tabla, si es posible reconocer a través de ella una función polinómica siempre y cuando se tenga la seguridad de que, efectivamente, es una función polinómica y que el número de parejas ordenas de la tabla exceda en la unidad al grado del polinomio que describe la función (Villa, 2001)

3. Las diferencias sucesivas se hacen constantes luego de iterar el proceso tantas veces como el grado del polinomio.

Aduciendo a la interpretación de la función lineal asumida en este trabajo, para identificar una representación del objeto función lineal en el registro tabular, es necesario observar que toda razón entre las diferencias correspondientes de dos valores de la tabla es una constante. Con base en el supuesto 2 inmediatamente anterior, es posible determinar si es una función lineal, calculando la razón de diferencia entre dos parejas de números.

Análisis de los registros de representación principales

- **El registro simbólico algebraico.**

En el registro simbólico los objetos son símbolos que generalmente pertenecen a nuestro alfabeto, en ocasiones al alfabeto griego, los números indu-arábigos, los símbolos de las operaciones y relaciones aritméticas, y los signos de agrupación. Las reglas de conformidad son las reglas de las operaciones (lógico-aritméticas), relaciones (de orden y de equivalencia) y los axiomas de la lógica; salvo algunas diferencias convencionales.

Las reglas de tratamiento son las propiedades de estructuras algebraicas, y todas aquellas que permiten comparar dos registros mediante la relación de igualdad como relación de equivalencia, tales como: propiedad uniforme de la igualdad, la factorización, algunos convencionalismos, entre otros.

En la determinación de las unidades significantes se le asociará un símbolo a cada cantidad de magnitud y se le llamará variable, de esta forma se hablará de los registros que contienen dos variables. Por lo general estas variables se asocian a los símbolos x y $f(x)$, donde x es la cantidad de magnitud “control” y $f(x)$ la cantidad de magnitud que se relaciona con x. El reconocimiento de las funciones a través de este registro, se hará mediante el análisis de las razones entre los cambios de una variable y los cambios que genera sobre la otra. En este registro se entenderá por cambio la diferencia entre dos valores de una misma variable y se denotará con el símbolo Δx que significa, $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta f(x)$ que significa $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ y como razón de cambio al cociente entre estas dos diferencias, es decir $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Para determinar una función lineal, a través de una representación en este registro, es necesario establecer si la razón es constante, esto es si para todo $x_1, x_2 \in \Re$, $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$, con m un valor constante perteneciente al conjunto de números reales.

Por otro lado, si una función es lineal, la razón de cambio constante determina una familia de funciones. Para identificar una representación en particular, de esta familia, se debe disponer de otras relaciones entre las variables, en particular la cantidad asociada a cuando x (variable independiente) es igual a cero.

De esta forma es posible demostrar que $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = m$ con m constate real, y las relaciones anteriores, se puede transformar, con las reglas de tratamiento de este registro, a una forma $f(x) = mx + b$

En los dos registros anteriores (el tabular y el gráfico) se mencionaron dos tipos de limitaciones que dependen de su naturaleza, a saber: el problema de lo discreto como la restricción en el registro tabular y de los rangos de visualización en el registro gráfico; esta limitaciones imposibilitan la determinación de una única función con las características mencionadas, a menos que se hagan determinados supuestos (ver análisis de los registros anteriores). En el caso del registro simbólico se permite recoger la generalidad a través del símbolo, en términos de ser un representante de cualquier (Russell B., 1977) elemento de un conjunto de cantidades de magnitud determinadas.

El lenguaje natural.

Los elementos de este registro son palabras formadas a través de las reglas de fonología y morfología, las reglas de conformidad son las reglas gramaticales de la lengua (sujeto, verbo y predicado), estas reglas estarían determinadas por los actos de habla locutivo (presentación del problema), ilocutivo (la intencionalidad del problema), y el perlocutivo (la consecuencia) [36]. La aplicación de las reglas gramaticales a través de la cohesión y la coherencia, constituyen el sentido de las oraciones y estas a su vez los enunciados.

Las reglas de la paráfrasis son las que constituyen las reglas de tratamiento, las cuales incluyen la sinonimia.

El lenguaje natural es uno de los registros que presenta mayor complejidad en su análisis. Esto debido fundamentalmente a dos ideas, por un lado a que es un registro completamente discursivo y por ende ofrece todas las funciones tanto discursivas como metadiscursivas[37], permitiendo una enorme divergencia en la forma de su empleo; pero por otro, porque es un registro multifuncional, es decir,

[36] Según Rincón C. (1999, p. 117) la teoría de los *actos de habla* fue formulada por el filósofo de Oxford J. L. Austin, en 1962, y desarrollada por el norteamericano J. Searle, en 1964, 1969 y 1975. Explica el uso lingüístico basada en la observación de que cuando producimos un enunciado se realizan simultáneamente tres actos : el acto *locutivo* —la expresión de una oración con un sentido—, el *acto ilocutivo* —la fuerza que le damos a esa expresión— y el acto *perlocutivo* —el efecto que se produce en la audiencia.

[37] Las metadiscursivas son de tratamiento y conversión, comunicación y objetivación y las discursivas son de designación, apofantica, expansión discursiva y reflexividad discursiva. Duval (1999).

no permite tratamientos únicamente por algoritmización, o lo que es lo mismo, tiene una gran variedad de posibles tratamientos. Por tal motivo, es el registro más usado para describir, inferir, razonar, calcular, deducir, argumentar, es decir, es utilizado en todos los dominios de la vida cultural y social.

Caracterizar entonces, este registro de representación, implica un conocimiento de sus funciones en cualquier producción intelectual y académica, de su papel en el desarrollo cognitivo de las personas y de la forma como se estructura tanto semántica como sintácticamente. Esto nos pone de cara a dos problemáticas: la primera es que para analizarlo se requiere hacer un estudio desde varias perspectivas en relación con su papel en la producción del conocimiento, pero este no es el interés del presente trabajo; y lo segundo es, si no se asume la vía anterior, entonces ¿Cómo determinar las unidades significantes de interés (cognitivamente pertinentes), en el caso de las situaciones matemáticas que involucran el concepto de función?

Para responder a la pregunta anterior asumimos que en la lengua natural las unidades significantes del concepto de función están en los enunciados constituidos por frases proposicionales, y éstas a su vez, determinadas fundamentalmente por la operación predicación[38] a través de los actos de habla antes mencionados.

Los objetos referenciales designados en dichas proposiciones son magnitudes fijadas por la situación. Por lo tanto, el primer paso, en la tarea de identificar algún criterio que permita clasificar los enunciados matemáticos dirigidos al concepto de función lineal en este registro, es identificar las magnitudes que están interviniendo. Esto implica, entre otras cosas, determinar si las magnitudes son continuas o discretas y las unidades de medida utilizadas.

[38] La operación predicación de la función apofántica, es la que vincula la expresión de una propiedad, de una relación o una acción con una expresión que designa algún objeto Duval (1999)

Una vez identificadas las magnitudes, el paso a seguir es reconocer y establecer las posibles relaciones entre las cantidades de magnitud. En particular nos interesa determinar la relación de cociente constante entre las diferencias de las cantidades de magnitud. Este reconocimiento no siempre es evidente, y por tanto es aquí donde el problema se transforma en un problema cognitivo, dado que es a través del desarrollo del pensamiento matemático en sus diferentes niveles procedimentales, como se adquiere la habilidad para reconocer el concepto de función en un enunciado determinado.

Aunque sea la función lineal, el modelo general de todas las situaciones cuya razón de cambio es constante, se considera importante caracterizar el tipo de enunciado que la representa, dados los diferentes niveles de dificultad que se observan en los estudiantes cuando abordan la actividad cognitiva de conversión; es decir, se requiere reconocer la razón de cambio en los enunciados que representan una relación lineal entre dos cantidades de magnitud. Este análisis se hará a través de cuatro grupos generales: dos de ellos frente al hecho que la razón de cambio se exprese o no de forma explícita en el enunciado y las otras dos, que estarán directamente relacionadas con las anteriores, desde el punto de vista del carácter continuo o discreto de las magnitudes que intervienen en la situación.

En cada uno de estos cuatro grupos se pueden establecer subcategorías de acuerdo a si en las magnitudes continuas interviene o no el tiempo. Esto dado que, según el análisis epistemológico, en las situaciones que permitieron la consolidación de concepto de función la magnitud tiempo jugó un papel fundamental.

Determinar en el enunciado si la razón de cambio es explícita o implícita es importante puesto que, en ambos casos, de acuerdo con nuestra interpretación en la función lineal, si dicha razón de cambio es constate, entonces se puede asociar a una función lineal. Ahora bien, lo explicito o implícito, de la razón de cambio, hace referencia a que en el enunciado se exprese de forma directa o por el contrario sea necesario realizar algunos procesos, cálculos o inferencias para calcularla.

Por otro lado, lo continuo y lo discreto en las magnitudes, es importante caracterizarlo, puesto que desde un punto de vista didáctico y cognitivo, cuando se trabaja sólo bajo situaciones donde interviene magnitudes discretas, se corre el riesgo de omitir la interpretación de la constante como una razón de cambio y limitarse sólo a un análisis adimensional, que aunque facilita el tratamiento aritmético de la situación, oculta su naturaleza variacional. Un caso particular de esto, ocurre con la interpretación de la multiplicación que en la escuela generalmente omite el análisis dimensional de las magnitudes y es susceptible de ser interpretada como una suma abreviada.

Con estas categorías se pueden establecer algunas interrelaciones, las cuales se observan en los siguientes ejemplos y se materializan en la tabla 6 que aparece a continuación.

E1: Supongamos que el metro de Medellín sale a las 5:00 a.m. de Niquía con destino a Itagüi, y que durante su recorrido mantiene una velocidad constante de 40 km/h. Queremos conocer la distancia a la que se encuentra el tren de Niquía en todo momento.

E2: Un grifo llena un tanque en 10 minutos determine la relación entre el tiempo y el volumen de agua que hay en el tanque, suponiendo que el grifo mantiene su caudal.

E3: Ana compró 10 huevos por $2000. Cómo podría Ana calcular la compra de cualquier cantidad de huevos.

E4: Por cada gaseosa se pagan $1000, ¿Cómo se calcularía el valor de cualquier cantidad de gaseosas?

E5: ¿Cómo varía el área de un triangulo cuando su altura cambia, suponiendo que mantiene la misma base?

E6 Se dispone de una botella en forma de cilindro circular recto de radio 50 cm y altura 65 cm, el cual disponemos para llenar con agua. Determine la relación que hay entre el volumen de agua y su nivel.

Magnitudes / Razón de Cambio	**DISCRETAS**	**CONTINUAS**	
		Tiempo	**No Tiempo**
Explícita	E4	E1	E5
Implícita	E3	E2	E6

TABLA 6: CLASIFICACIÓN DE ENUNCIADOS ASOCIADOS AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LIENAL EN EL LENGUAJE NATURAL.

Con esta clasificación no pretendemos agotar toda la riqueza y variedad semántica que tiene el lenguaje, sino al contrario abrir un panorama para el estudio de los enunciados que implican el concepto de función lineal desde un punto de vista variacional.

Como se mencionó en el apartado 2.3, el proceso de modelación matemática como herramienta hacia la construcción del concepto de función lineal está determinado por cinco grandes momentos: experimentación, abstracción, resolución, validación y modificación, todos ellos formando parte de un gran sistema conceptual expresado para un propósito específico y apoyado en los diferentes sistemas de representación arriba analizados. La actividad cognitiva de conversión del registro en lengua natural al registro simbólico conecta el primer y segundo momento de la modelación con el tercero, a través de la discriminación de las magnitudes cognitivamente pertinentes y el establecimiento de las posibles relaciones entre ellas, por ejemplo: diferencias, incrementos, razón de diferencias, cantidad de magnitud asociada al cero de la magnitud control y la cantidad de magnitud asociada al uno de la magnitud control. Una vez la situación esté expresada en el segundo registro, la actividad cognitiva de tratamiento, permite la resolución, validación y modificación. De igual forma estos momentos estarán apoyados por los registros auxiliares de representación.

Es así como el análisis de la actividad de conversión de los enunciados presentados en lengua natural al registro simbólico y su relación con la modelación, se hará a través de la clasificación presentada en la Tabla Nº 6 anterior y los resultados esperados y obtenidos con los estudiantes en la intervención.

3. DISEÑO EXPERIMENTAL

3.1 CARACTERÍSTICAS DEL ESTUDIO

El estudio se realizó con un grupo de 15 estudiantes matriculados en el grado 10° del programa de Media Técnica, modalidad en Artes, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, en el cual uno de los investigadores se desempeñaba como profesor titular.

El grupo inició labores académicas en la primera semana del mes de febrero de 2005, con un diseño curricular para el área de matemáticas compuesto de cuatro ejes temáticos. En el primero se desarrolla todo lo correspondiente a los elementos conceptuales y procedimentales de los sistemas numéricos (N, Z, Q, Q* y R) con sus operaciones y propiedades; el segundo consta de los elementos asociados al álgebra, el tercero está vinculado a la construcción de los conceptos básicos de la geometría plana y del espacio; y en el cuarto y último se desarrollan todos los conceptos relacionados con la trigonometría plana y la geometría analítica; en este último es donde se ubica el concepto de función lineal y cuadrática. Nuestro trabajo de investigación se ubicó en la transición del eje temático de la aritmética al álgebra.

La intervención se desarrolló en cinco sesiones de tres horas cada una, la primera sesión se destinó al desarrollo y socialización de la situación N° 1, las sesiones dos y tres se destinaron al desarrollo de la situación N° 2 y las dos últimas sesiones se destinaron al trabajo de la situación N° 3. Antes de iniciar el trabajo de intervención se realizó una prueba diagnóstica la cual evidenció la necesidad de realizar un trabajo previo en cuanto a la proporcionalidad directa, los talleres diseñados para dicho trabajo se muestran en el anexo Nº 1.

Los estudiantes, objeto del estudio, pertenecen a estratos medio y bajo del sector occidental de la ciudad de Medellín, y provienen de diferentes instituciones de Educación Básica de carácter oficial y privado de la ciudad, sus edades se encontraban entre los 15 y los 17 años. Con ellos se realizó un estudio previo de los conceptos trabajados durante su formación en Educación Básica (esta prueba constituye el diagnóstico presentado en la sección 3.2 de este capítulo) aque arrojó como resultados que los conceptos de función lineal, rectas, pendiente, y las representaciones algebraicas y cartesiana no eran desconocidas para ellos, pero si insuficientes para lograr el desarrollo conceptual propuesto en los lineamientos y estándares curriculares en lo que respecta al pensamiento variacional, de acuerdo con la interpretación de los ejes conceptuales que estructuran dicho pensamiento, y que fue presentada en el capítulo 2 de este documento.

A continuación se pasó a realizar la selección de las variables con las cuales se analizarían y diseñarían las situaciones, tanto del diagnóstico como de la intervención didáctica, de esta manera se consolida la fase Nº 2 de la ingeniería didáctica.

Análisis general de las posibles variables didácticas a tener en cuenta en las situaciones

Uno de los modelos matemáticos es el de función lineal, el cual permiten el estudio sistemático de la variación de magnitudes relacionadas a través de razones de diferencias constante.

Los términos razón constante, proporcionalidad directa y relaciones lineales adquieren un significado unificado con la noción de función lineal. Este concepto es un modelo que sintetiza diversas situaciones, expresiones y fenómenos; puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad y relaciones lineales. La función lineal, determinada por la razón de cambio constante en todo su dominio, representa una estructura más genérica de la proporcionalidad entre magnitudes, sirviendo para visualizar y sistematizar los diferentes estados de variación lineal entre dos cantidades de magnitud, es decir, la correlación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de diferencias es una constate.

Desde esta perspectiva, las situaciones de diagnóstico e intervención pretenden fundamentalmente dar cuenta de:

a) La modelación como proceso atrapado en el concepto de función.
b) La variación como elemento que da sentido al concepto de función.
c) La función como objeto matemático objetivado a través de diferentes sistemas de representación.

El proceso de modelación se plantea desde dos dimensiones: Por un lado como herramienta motivadora en la construcción del concepto de función lineal en cuanto que permite al estudiante y al profesor identificar conexiones con el ambiente que les rodea y darle sentido al concepto. Y por otro lado el proceso de modelación se asume con sentido de conceptualización matemática, en tanto que permite reconocer al concepto de función lineal como un elemento a través del cual se pueden agrupar una familia de relaciones entre variables (aquellas donde la razón de cambio es constante) de esta manera se logra ver como un concepto general matemático.

Por tanto, en cuanto a la modelación se pretende observar en los estudiantes los desempeños en cuanto a: ¿Cuáles fases de modelación utiliza el estudiante en su proceso de construcción del modelo? Y ¿Reconoce y abstrae el concepto de función lineal como objeto matemático; modelo de cierto tipo de fenómenos de variación proporcional y de relaciones lineales?

El concepto de variación se entiende como elemento dinamizador del concepto abstracto de variable. El razonamiento variacional tiene que ver con las actividades cognitivas que involucran el estudio y sistematización de variables coordinadas en contextos dinámicos. En este aspecto se desea observar, por un lado, la manera como el estudiante identifica y relaciona las magnitudes que intervienen en el fenómeno, y por otro, la forma como caracteriza el fenómeno dependiendo del tipo de variación que observa, además, si por medio de dicha caracterización, logra construir la función que modela el fenómeno; en nuestro caso funciones lineales.

Con respecto a las representaciones, se pretende observar los usos que hacen de los diferentes sistemas para dar cuenta de los elementos involucrados en las situaciones de variación asociadas al concepto de función lineal. Por ejemplo, es importante observar el uso que los estudiante hacen de los diferentes sistemas de representación en el proceso de modelación; además de los aportes y las limitaciones que ofrece cada sistema y las necesidades de realizar actividad cognitiva de tratamiento y conversión entre sistemas, según lo demande la situación. Todo lo anterior determinado por el hecho que la primera dificultad, y quizá una de las más fundamentales, está en la actividad de conversión de un enunciado dado en lengua natural a un registro simbólico; primer y segundo momento del proceso de modelación, según lo expuesto en el capitulo 2.

Categorías a priori para clasificación de los estudiantes

1- **Desde el proceso de modelación:**

Categoría 1-A: Plantea y justifica la construcción de un modelo matemático para la comprensión y apropiación de la situación.

Categoría 1-B: Reconoce la función como un modelo ajustado al fenómeno.

Categoría 1-C: Utiliza el modelo para hacer descripciones y predicciones sobre las consecuencias de la situación.

Categoría 1-D: Concibe a la función como modelo general de un conjunto de situaciones con características análogas.

2- Desde la percepción y cuantificación de la variación:

Categoría 2-A: Reconoce las magnitudes que intervienen en las situaciones pero no establece relaciones entre ellas.

Categoría 2-B: Describe el cambio de una cantidad de magnitud con los cambios de otra.

Categoría 2-C: Coordina la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Categoría 2-D: Coordina la *razón* de cambio de una cantidad de magnitud (dependiente) con respecto a los incrementos uniformes del cambio en otra cantidad de magnitud (independiente).

Categoría 2-E: Describe y coordina cuantitativamente la *razón* de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

3- Según el uso de los sistemas de representación.

Categoría 3-A: construye y/o utiliza los elementos de algún sistema semiótico de representación del concepto de función.

Categoría 3-B: realiza tratamientos dentro de un sistema de representación.

Categoría 3-C: realiza conversión de un sistema de representación a otro.

Categoría 3-D: manipula diferentes sistemas representación, en una relación recíproca entre ellos.

Categoría 3-E: posee estructuras matemáticas dentro del concepto en cuestión, permitiendo identificar aspectos incoherentes en las diferentes situaciones.

Es de anotar que las categorías del uso de los sistemas de representación no son inclusivas ni jerárquicas, contrario a las de la modelación y variación que son crecientes en nivel y la superación de una implica la superación de las anteriores.

3.2 PRUEBA DIAGNÓSTICA

Criterios de análisis

Con base en las categorías estudio descritas en el apartado anterior, en la clasificación de los enunciados verbales resumidos en la Tabla Nº 6 y las categorías antes descritas, se tomó la decisión de evaluar el nivel de conceptualización de los estudiantes con respecto al concepto objeto de nuestra investigación a través de los diferentes sistemas de representación. Para ello se diseñó una prueba con tres situaciones, dicha prueba con sus respectivos análisis y resultados se describen a continuación:

Situación Diagnóstica I

Nombre: SALARIO DE ANA

Propósito: La actividad tiene como propósito evaluar las habilidades de los estudiantes para reconocer en una situación algunos elementos de la variación, en particular la noción de dependencia entre las magnitudes salario y suscripciones (ambas magnitudes discretas).

Enunciado:

Ana trabaja como vendedora del periódico “El Colombiano”, sus ingresos dependen de un salario básico de $5.000 diarios, y se incrementa con base en las ventas que realice de este periódico.

a) Si por cada venta ella obtiene una comisión de $700. Responda:

    i. ¿Cuánto dinero devengaría en un día si Ana realizara, 5, 10 ó 16 ventas?
    ii. Con los datos anteriores llene la siguiente tabla.

Nro de suscripciones	Salario total devengado
5	
7	
	$11300
15	
	$19000
25	

    iii. Exprese la relación que existe entre el salario total devengado a diario y el número de suscripciones vendidas utilizando palabras luego símbolos y un gráfico cartesiano.

b) Con el cambio de administración de la empresa, se propone una nueva forma de pago. El salario básico diario sería disminuido en $2000, por el contrario la comisión por cada venta sería aumentada a $900. Analice las dos alternativas salariales y exprese cuáles son los posibles beneficios de dicho cambio en el sueldo. (exprese con argumentos simbólicos y gráficos).

ANÁLISIS A PRIORI

Está situación, presentada en lenguaje natural, inducirá al estudiante a que mediante el sistema de representación tabular, infiera una relación entre el cambio de las dos magnitudes y posibilite la objetivación.

En un segundo momento se propone que la relación entre las magnitudes sea expresada mediante otros sistemas de representación tales como el gráfico y el simbólico. De igual manera, la situación exige al estudiante tener cierto control sobre las variables (magnitudes), de tal forma, que a través de su análisis pueda anticipar conclusiones favorables o desfavorables para los empleados, con bases en las condiciones generales del problema.

Se espera que los estudiantes, una vez llenen la tabla, reconozcan la existencia de la covariación entre las magnitudes, aunque es posible que no logren expresar cuantitativamente dicha relación, esto a pesar de que detectaran los algoritmos con los que se hiciera su registro tabular.

La situación pretende colocar en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar conceptos matemáticos, lo cual se hace evidente en los diferentes usos del lenguaje y los diferentes sistemas de representación.

Inicialmente los estudiantes podrían entender la razón de cambio constante no como un cociente de diferencias, sino como el cociente aritmético entre los valores de la tabla. Esto permitirá proponer algunas ideas que ayuden a los estudiantes a identificar esta característica de la razón de cambio en el momento de la intervención.

RESULTADOS

En cuanto a la modelación y la variación

- Con respecto al inciso a de la situación diagnóstica I.

En esta parte de la situación la totalidad de los estudiantes alcanzaron a reconocer los procedimientos que debían realizarse con la cantidad de magnitud "periódicos vendidos" para calcular los valores correspondientes de la otra cantidad de magnitud "salario". Esto se pudo evidenciar mediante la construcción de la tabla.

Número de prendas elaboradas a diario	Salario total devengado (diario)
200	12,000
210	12,500
215	12.750
225	13,250
251	14 550
280	16,000
271	15 550
433	23,650

El procedimiento inverso que permite calcular el número de periódicos vendidos dependiendo del salario, sólo fue difícil de percibir para un estudiante. A pesar de ello en el momento de llenar la tabla para determinar el número de periódicos vendidos a partir del salario devengado, un gran número de estudiantes utilizaron otro procedimiento, asumiendo una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. De acuerdo con esto se puede afirmar que los estudiantes trascienden la categoría 2-A y 2-B para ubicarse en una categoría cercana a la 2-C. Esto quiere decir, que los estudiantes tienen cierta familiaridad con situaciones en las cuales hay que describir patrones de carácter aritmético; sin embargo, tienden a aplicar, sin justificar su proceder, criterios de proporcionalidad directa y reglas de tres simple, en situaciones donde no es admisible. Adicionalmente asociamos esta interpretación de los estudiantes con la teoría de la investigadora Sfard (1991), en cuanto a que se puede percibir en los estudiantes una aproximación a la compresión del concepto de función como un procedimiento.

La variación como razón de cambio no se hizo explicita en ningún momento de la situación, a pesar de ello se encontraron algunos intentos de representar, mediante letras, la relación entre las magnitud involucradas en la situación. Esto se puede interpretar como una necesidad de responder la pregunta y no como un intento espontáneo de capturar la variación mediante un modelo matemático. Por lo tanto, en este aspecto consideramos que en general los estudiantes no alcanzan a ubicarse en la categoría 1-A.

- Con respecto al inciso b.

En cuanto al control que debían hacer de la variable "número de suscripciones" para poder hacer un análisis de los beneficios de cada forma de salario, se encuentra en las elaboraciones de los estudiantes los siguientes grupos de resultados:

- **No responde:** en este espacio se agrupan los estudiantes que no realizan ningún tipo de registro que permitiera hacerse una idea de su razonamiento, y aunque tuvieron una comprensión general de los requerimientos de la solución, presentaron dificultad para establecer una estrategia de solución.
- **Percepción de una relación:** Este grupo recoge a los estudiantes que alcanzaron a percibir una relación (directa o de dependencia) entre las magnitudes del problema, sin embargo no llegan a coordinarlas ni a elaborar estrategias para manipularlas y obtener conclusiones; esto permite ubicar los

estudiantes de este grupo de respuestas en la categoría 2-A. Algunas de las afirmaciones que ilustran las producciones son: “*que a menudo que las suscripciones ballan (vayan) aumentando por igual/ también incrementan las ganancias*.”

- **Compensación:** Este grupo recoge aquellos estudiantes que lograron percibir cierto grado de comprensión de la variación en las cantidades y lograban sacar algunas conclusiones globales haciendo una comparación entre ellas (categorías 2-B). Algunas aserciones de los estudiantes que ilustran esta tipología son: “*En la primera iniciación* [refiriéndose a la primera forma de calcular el salario] *no es un buen salario pero ya teniendo un mayor número de suscripciones se obtiene un mejor aumento salarial*”; “*puede ser mejores los beneficios* [referido al segundo salario] *ya q’ el salario básico seria de $3000 pero si realiza las suscripciones necesarias al salario aumentaría %500 mas. Aunque al final no seria mucho ya q’ esos 2000 de más es como si recibiera los mismos $5000 de salario básico*”.

En la primera no es buen salario. pero ya teniendo
un mayor mímero de suscripciones se obtiene un
mejor aumento salarial

Puede ser mejores los beneficios ya q' el Salario
aumentaria %500 mas. Aunque al final no
seria mucho mas q' esos 2000 de mas es
como si resibiera los mismos $5000 de
salaiio básico

- **Instrumentos:** En este grupo se recoge las producciones de los estudiantes que identificaron en cierto grado una coordinación entre las variables y utilizaron el sistemas de representación tabular para manipular y validar sus conclusiones (categoría 2-C y 3-A).

La siguiente Tabla registra las frecuencias y los porcentajes de los estudiantes en cada una de las anteriores tipologías:

CARACTERÍSTICA	N	%
No responden	5	33,33%
Percepción de una relación	5	33,33%
Compensación:	2	13,33%
Instrumentos	3	20,00%
Total	15	100,00%

Como se puede observaren los anteriores resultados los estudiantes poseen un comprensión global de la situación y alcanzan a descubrir algunas relaciones de dependencias entre las magnitudes que intervienen; sin embargo, en este sentido, la tabla se convirtió en una herramienta para el reconocimiento de los procedimientos a efectuar para calcular los valores de las magnitudes.

En cuanto a los sistema de representación

- Con respecto al inciso a.

El uso del registro tabular no fue espontáneo, sólo estuvo restringido a la demanda del segundo punto de la situación. La totalidad de los estudiantes realizaron las operaciones aritméticas, para conseguir llenar la tabla; en la realización de estas operaciones aritméticas se observaron algunas limitaciones en cuanto al uso y significado del signo igual; por ejemplo, en un procedimiento en el cual se involucraban varias operaciones los estudiantes escribían: 15 x 700 = 10500 +

12000 = 22500, lo cual ofrece una visión restringida de la igualdad como relación de equivalencia.

- Con respecto a la parte iii del inciso a y al inciso b.

Los resultados en esta parte de la situación informan que un bajo porcentaje de los estudiantes describieron la relación entre las magnitudes en lenguaje natural, aunque con algunas imprecisiones de redacción. Adicionalmente algunos de estos estudiantes no alcanzaron a expresar la relación multiplicativa en las diferentes cantidades y sólo describían sus relaciones aditivas. Comparando esta información con los del inciso anterior se infiere que en los estudiantes no existe familiaridad con un trabajo que favorezca la actividad de conversión de la representación tabular al lenguaje natural, por lo tanto se posible ubicarlos en un nivel 3-A, es decir no alcanzan al nivel 3-C.

En cuanto a la utilización que hicieron de los gráficos cartesianos se puede afirmar que la interpretación y uso que tienen de los mismos es muy limitada. La siguiente clasificación muestra el nivel en el que se pueden agrupar las elaboraciones de los estudiantes.

No responde: en este espacio se ubican los estudiantes en cuyas respuestas no se evidencia ningún tipo de producción gráfica o aquellos en los cuales sus producciones no tenían algún nivel de aproximación al trabajo que se les pedía.

Gráficos sin reglas de conformación: Es este grupo se clasificaron aquellos estudiantes en cuyas producciones se observa cierta aproximación a los gráficos cartesianos, pero que no tienen en cuenta las reglas básicas para la ubicación de puntos, ni del significado que una representación en este sistema de semiótico de representación puede dar a entender. Estos estudiantes utilizan los gráficos como herramienta para ubicar datos del problema. En el Gráfico 11 se muestra el registro de un estudiante para describir la relación expresada entre las dos formas de calcular el salario de la parte b de esta situación. De igual manera en el Gráfico 12 se registran los datos iniciales para el salario, pero en este caso como una correspondencia entre el valor de la comisión y el salario básico diario. Por lo tanto se pueden ubicar en el nivel 3-A.

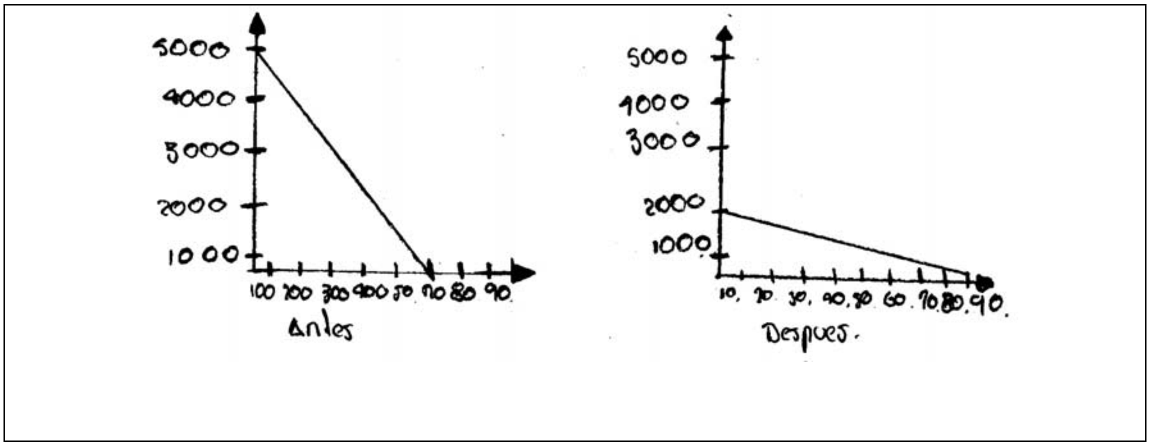


GRÁFICO 11: GRÁFICO ELABORADO POR UN ESTUDIANTE PARA EXPRESAR LA RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES DE LA SITUACIÓN: SALARIO DE ANA

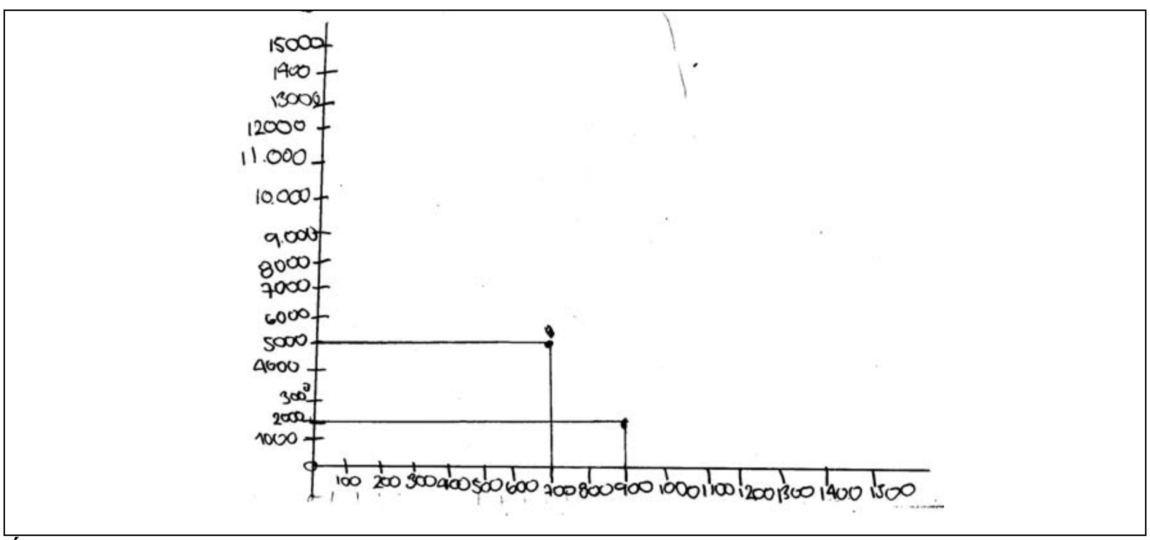


GRÁFICO 12: GRÁFICO ELABORADO POR UN ESTUDIANTE PARA EXPRESAR LA RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES DE LA SITUACIÓN: SALARIO DE ANA

Trascripción: En este tercer grupo se ubican los estudiantes en cuyas producciones se limitaron a transcribir los datos de valores de la tabla al gráfico cartesiano y en el caso de 2 estudiantes de ellos a trazar la línea que une los puntos. Con el ánimo de profundizar un poco más en sus razonamientos se les preguntó a estos estudiantes el porqué de la construcción de dichas líneas (continuas), a lo que informaron que así lo hacían en el grado anterior. Se les pidió que utilizaran dicha gráfica para realizar aproximaciones de otros valores, a lo cual no respondieron. Es de anotar que en los casos de los estudiantes de estas categorías, el gráfico cartesiano aparece como una representación de una tabla de valores más que como la relación de variación entre dos cantidades de magnitud. La siguiente tabla recoge las frecuencias y los porcentajes de estudiantes en cada una de estas tipologías.

TIPOLOGÍA	N	%
No responden	6	40,00%
Gráficos sin reglas de conformación.	4	26,67%
Trascripción	5	33,33%
Total	15	100,00%

Como se puede inferir del anterior análisis, los estudiantes adolecen de estrategias que les permita promover el reconocimiento global de las características de una gráfica cartesiana, de igual manera presentan dificultades para la construcción de representaciones simbólicas para relaciones funcionales. Con base en estas observaciones se puede afirmar que los estudiantes no se alcanzan a ubicar satisfactoriamente en la categoría 3A, salvo con una sutil habilidad para interpretar algunos datos presentados en un registro tabular.

En cuanto a los procesos de tratamiento y conversión de los sistemas de representación se puede observar que son procesos que parecen descuidados en la educación Básica en nuestras instituciones ya que en las producciones de los estudiantes no se encuentran evidencias de estrategias que favorezcan dichos procesos. De esta forma se concluye que los estudiantes no se pueden ubicar en las categorías 3B ni 3C.

Situación Diagnóstica II

Nombre: DE NIQUÍA A ITAGUI, PASANDO POR SAN ANTONIO

Propósito: reconocer la velocidad constante como razón de cambio entre dos cantidades de magnitud y usarla para identificar la función lineal como un modelo matemático que relaciona la distancia y el tiempo.

Enunciado:

Supongamos que el metro de Medellín sale a las 5:00 a.m. de Niquía con destino a Itagüí, y que durante su recorrido mantiene su velocidad constante. Queremos estudiar los tres siguientes casos:

Caso 1: Distancia a la que se encuentra el tren de Niquía en todo momento.
Caso 2: Distancia a la que se encuentra el tren de Itagüi en todo momento.
Caso 3: Distancia a la que se encuentra el tren de San Antonio en todo momento.

Momento 1

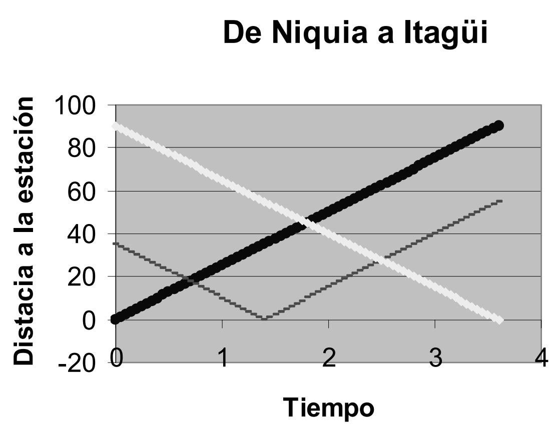
Describa una estrategia para calcular las distancias del tren a cada una de las estaciones anteriormente mencionadas.

Momento 2

Si la gráfica que aparece a continuación representa la situación anterior:

1. Elabora un argumento que permita identificar una gráfica con cada caso anterior.

2. A partir de la gráfica, a qué distancia de cada una de las tres estaciones, estará aproximadamente el tren cuando sean las 6:05 a.m. Estime además, la hora a la que llega a San Antonio, y la hora a la que llega a Itagüí.
3. ¿Qué puede significar los punto de corte entre gráficas?



ANÁLISIS APRIORI DE LA SITUACIÓN

La situación presenta la razón de cambio en forma explícita, las magnitudes que intervienen son continuas y una de ellas es el tiempo. Es muy importante anotar que en esta situación la razón de cambio es otra magnitud y que aunque se expresa como la relación entre dos magnitudes escalares, ella es de naturaleza vectorial.

En un primer momento de la situación los estudiantes pueden percibir la relación de crecimiento y decrecimiento en cada una de las magnitudes, sin embargo para garantizar la comprensión de la situación se hace necesario acompañar los razonamientos de los estudiantes con preguntas como: ¿Qué significa velocidad constante?, ¿Cómo observaría el movimiento del tren una persona que esté ubicada en la estación Niquía, San Antonio o Itagüí?

Al presentarse los tres casos en forma sincrónica y en el mismo plano, es posible que se presente una interpretación de que la situación trata de fenómenos diferentes y no del mismo analizado por distintos observadores. Esto quiere decir, que muy posiblemente, el estudiante interpretará la gráfica como de tres trenes moviéndose de forma simultánea, y no el movimiento de un tren, analizado al mismo tiempo por tres observadores, cada uno ubicado en una estación diferente.

En el momento 2 de la situación se observa que se tienen tres tipos de gráfica, las cuales corresponden a diferentes relaciones lineales: de valor inicial con pendiente negativa, proporcionalidad directa y función por partes (dos partes, una lineal con pendiente negativa y la otra con pendiente positiva). Cada una de estas formas dependen del observador que está analizando el fenómeno.

Para responder el ítem 2 del momento 2. se deben tener en cuenta los conceptos de cero absoluto, cero relativo y el de unidad de medida; puesto que, por un lado, en este caso el momento de inicio de la observación del fenómeno no implica necesariamente ausencia de la cantidad de magnitud (longitud y/o tiempo) y por otro lado, dependiendo de la unidad de tiempo y de longitud que se tome se tendrá una determinada respuesta, esto quiere decir que se pueden tener respuesta divergentes.

Resultados:

La situación se les entregó a los estudiantes para que la resolvieran por parejas. En el primer momento de la situación, la mayoría de ellos se limitaron a describir la situación en términos de que tan cerca o lejos se encuentra el tren de cada una de las estaciones. Algunas de sus respuestas apuntaban a la visualización de una relación de dependencia directa o inversa entre la distancia y el tiempo, por ejemplo: "*a medida que avanza* [el tren] *está más cerca* [de la estación San Antonio]*"* sin hacer referencia a término *"velocidad constante*", esto permite ubicar su razonamiento en el nivel 2-B. Antes de pasar al momento 2 se les pidió que representaran la relación entre dichas distancias y los tiempos transcurridos en un gráfico cartesiano. La mayoría de los estudiantes realizaron representaciones icónicas, es decir la gráfica representa un dibujo de la situación. Sin evidenciar ningún tipo de representación que representara el cambio o la velocidad del tren.

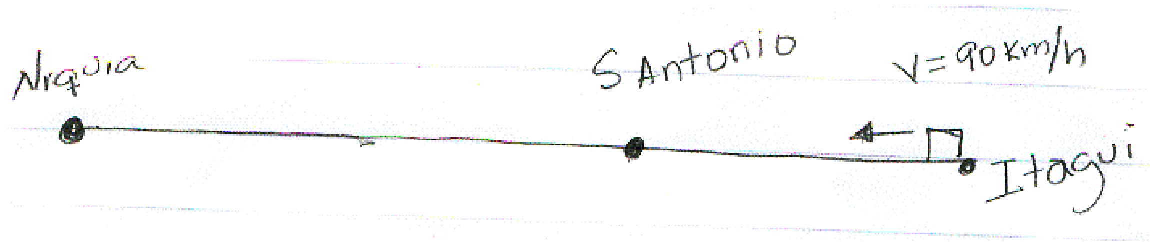


GRAFICO 13: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN ESTUDIANTE DE LA SITUACIÓN DIAGNÓSTICA II

En el momento dos se encontró que un alto porcentaje de los estudiantes no tenía una comprensión de los gráficos cartesianos, esta aserción se hace evidente en las respuestas de los estudiantes las cuales clasificamos en las siguientes tipologías:

No responden: en este tipo se ubican los estudiantes que no respondieron ninguna de las preguntas.

Dibujo: en este tipo se ubican los estudiantes que interpretaron los gráficos cartesianos como dibujo o un "mapa" del metro de la cuidad. Esto se observa en respuestas como " *esta raya* [línea del gráfico cartesiano] *representa la línea A del Metro esta la línea B y este el metro Cable...* " o "...estos puntos [señalando las intersecciones de las rectas] son las estaciones de donde se encuentran". En este aspecto se puede inferir que los estudiantes no alcanzan a ubicarse en el nivel 3-A puesto que ni siquiera alcanzan a reconocer los elementos del sistema gráfico cartesiano.

Dependencia: en esta tipología se ubican aquellos estudiantes que observaron alguna dependencia entre las magnitudes del problema pero asociaron cada una de las tres "rectas" del gráfico cartesiano a tres trenes diferentes en movimiento. Esto se videncia en respuestas como "*este punto quiere decir que se encuentran estos dos trenes*". Esto permite evidenciar que no hay una compresión del enunciado y por tanto no alcanzan a realizar actividad de conversión entre el registro gráfico cartesiano y el lenguaje natural.

Numérico: En esta tipología ubicamos a los estudiantes que asignaron valores numéricos a la velocidad del metro para realizar algunos datos tabulares.

La siguiente tabla muestra las frecuencias y los porcentajes en cada una de las anteriores tipologías.

TIPOLOGÍA	N	%
No responden	7	46,66%
Dibujos	4	26,66%
Dependencia	2	13,33%
Numérico	2	13,33%
Total	15	100%

Estos resultados permiten apreciar la dificultad que los estudiantes tienen para percibir la variación cuando las magnitudes que intervienen en la situación son continuas y escalares. Lo anterior sumado al hecho, que en este caso particular, la razón de cambio toma significado propio como una nueva magnitud, que además de ser continua, tiene naturaleza vectorial, y por tanto, acepta medidas negativas.

Lo anterior podría ser interpretado como una de las razones por las cuales es tan difícil, para los estudiantes, superar las categorías de la modelación; adicionado a la doble característica que cumple el concepto de función (objeto matemático y modelo matemático variacional), con las diferentes interpretaciones que le dan sentido.

Situación Diagnóstica III

Nombre: CELULARES

Propósito: Esta situación busca que el estudiante reconozca la razón de cambio constante y la use para determinar el crecimiento de una cantidad de magnitud que depende de otra para la toma de decisiones convenientes a partir del modelo que se construye con base en dicha razón.

Enunciado:

Una prestigiosa compañía de telefonía móvil tiene entre sus planes los siguientes:

PLAN BAJO
Cargo Básico: $35.000 + IVA
Minutos incluidos: 65
Minuto adicional: $800 + IVA

PLAN MEDIO
Cargo Básico: $70.000 + IVA
Minutos incluidos: 150
Minuto adicional: $700 + IVA

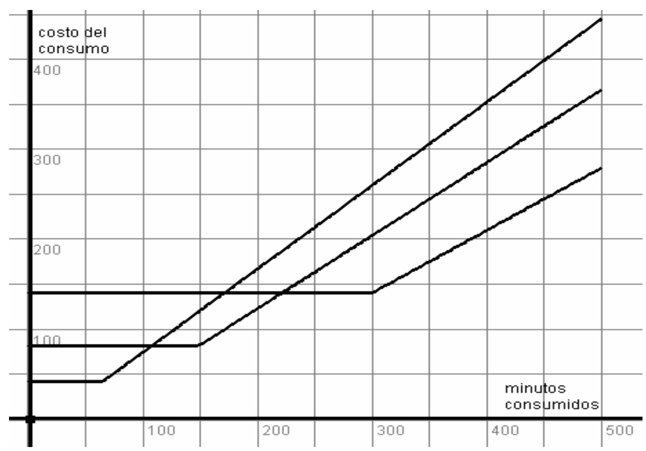
PLAN ALTO
Cargo Básico: $120.000 + IVA
Minutos incluidos: 300
Minuto adicional: $600 + IVA

Momento 1

Suponga que usted puede pagar cualquiera de los tres planes, pero quiere escoger el que, de acuerdo a su consumo mensual, le salga más favorable, ¿Cuál escogería? Suponga una tasa del 16% para el IVA.

Momento 2

La siguiente gráfica representa la misma situación expuesta en el momento 1. Responda la misma pregunta apoyado en lo que observa en dicha gráfica.



Análisis de la situación

Esta situación relaciona dos cantidades de magnitud bajo tres maneras diferentes de variación. Las cantidades de magnitud minutos consumidos y costo total del consumo están determinadas por el plan que las relaciona (bajo, medio, alto); esto significa que para construir el modelo matemático de la situación, es necesario reconocer simultáneamente estas tres maneras de variación de las dos cantidades de magnitud. Es muy importante resaltar, que incluso cada manera de variación (cada plan) está a su vez dividido en dos formas de variación, ambas variaciones constantes; una determinada por el cargo fijo para una cantidad específica de minutos incluidos (65, 150, 300 según el plan), de variación constate igual a cero, y la otra determinada por el valor del minuto adicional ($800, $700, $600 según el plan).

Esto obliga a que se reflexione en dos elementos conceptuales: por un lado, que las funciones que aquí aparecen son funciones por tramos, ambas partes funciones lineales; y por otro lado, la situación contiene un enunciado que se ubica en la tipología cuya razón de cambio es explícita; además, es una situación donde interviene la magnitud continua tiempo. Sin embargo, en el primer momento de la situación la continuidad del tiempo no implica ningún problema, pero en el se segundo momento este tiempo aunque sigue siendo continuo, la situación obliga a discretizarlo.

La pregunta que se hace es abierta en el sentido que no es de respuesta única, esto es, la decisión se puede tomar convenientemente, pero deben presentarse argumentos apoyados en la identificación de variables y las relaciones de dependencia entre las mismas

Un elemento adicional que tiene la situación, es el reconocimiento a que cada gasto implica el pago del impuesto al valor agregado (IVA), que aunque no cambia en nada la situación desde el punto de vista matemático, si la contextualiza un poco y que le imprime un grado mayor de dificultad.

Con el ánimo de ofrecerles a los estudiantes herramientas que les permitieran validar sus conjeturas, se crea el momento 2, con el que se pretende ayudar a la respuesta de la pregunta, basado en la lectura e interpretación del registro gráfico que la representa. De esta manera igualmente se intenta evaluar la visión que se tiene con respecto al registro gráfico, bajo la hipótesis que este registro es un poco más familiar en cuanto al reconocimiento de la razón de cambio como la pendiente de la recta.

Resultados:

La situación se les entregó a los estudiantes para que la resolvieran por parejas. En el primer momento de la situación, la mayoría de ellos se limitaron a contestar la pregunta únicamente desde los datos presentados. Se podría decir que su solución fue puramente aritmética, casi la totalidad del grupo se inclinó a escoger el plan alto, 7 parejas contra sólo una que se inclinó por el plan bajo. En el primer caso se argumenta la decisión, a partir del hecho que la cantidad de minutos fijos es mayor y el costo del minuto adicional es menor, casi sin compararlo con el comportamiento de los otros planes desde la razón de cambio, salvo los datos constates de la cantidad minutos fijos y el costo del adicional. Esto se evidencia en respuestas como la siguiente.

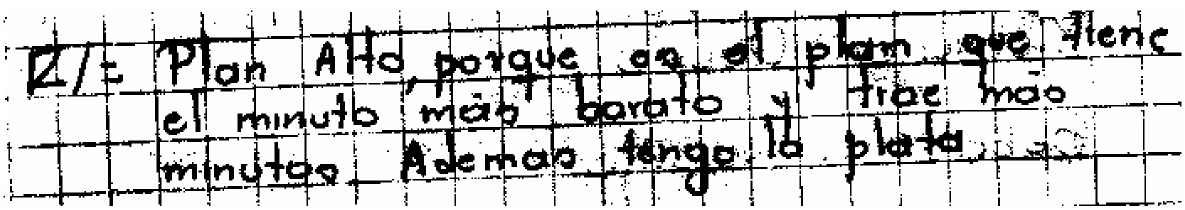
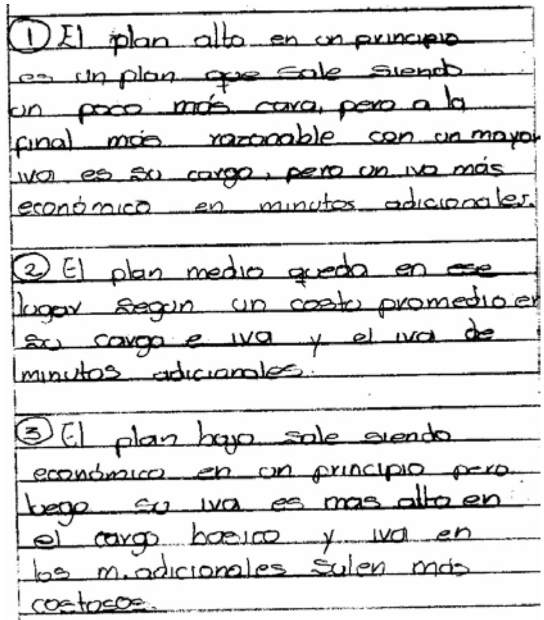

R/: Plan Alto, porque es el plan que tiene el minuto más barato y trae más minutos. Además tengo la plata.

GRÁFICO 14: RESPUESTA DE UNO DE LOS ESTUDIANTES EN LA SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN III

Sin embargo, una pareja de estudiantes, de los ocho que escogieron el plan alto, hizo el intento de comparar los diferentes planes desde los diferentes momentos que hace que un plan pueda tener mejores condiciones que otro. Se podría pensar que es un intento de analizar la situación desde el punto de vista de comparación entre las variaciones.



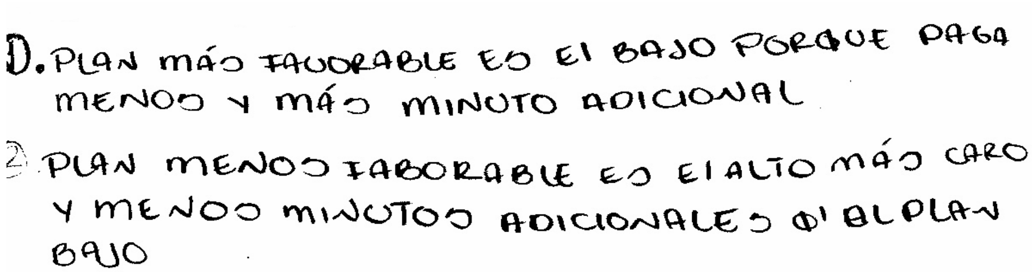
1) El plan alto en un principio es un plan que sale siendo un poco más cara, pero a la final más razonable con un mayor iva es su cargo, pero un iva más económico en minutos adicionales.

2) El plan medio queda en ese lugar segun un costo promedio en su cargo e iva y el iva de minutos adicionales.

3) El plan bajo sale siendo económico en un principio pero luego su iva es mas alto en el cargo basico y iva en los m. adicionales salen más costosos.

GRÁFICO 15: RESPUESTA DE UNO DE LOS ESTUDIANTES EN LA SITUACIÓN DE DIAGÓSTICO III

Con respecto al estudiante que escogió el plan bajo, se ve claramente en sus producciones que parece no haber entendido la situación, puesto que no se aprecia coherencia en su respuesta. Ver ilustración siguiente.



1. PLAN MÁS FAUORABLE ES El BAJO PORQUE PAGA MENOS Y MÁS MINUTO ADICIONAL

2. PLAN MENOS FABORABLE ES El ALTO MÁS CARO Y MENOS MINUTOS ADICIONALES Q' EL PLAN BAJO

GRÁFICO 16: RESPUESTA DE UNO DE LOESTUDIANTES EN LA SITUACIÓN DIAGÓSTICA III

En general, la situación no fue pensada desde un punto de vista variacional, salvo algunas tímidas aproximaciones a lo que pudiese suceder en determinados momentos para cada uno de los planes.

Se reconocieron las magnitudes involucradas en la situación y las relaciones de dependencia de una cantidad de magnitud con respecto a la otra, sin embargo no se hizo uso de ningún sistema de representación del concepto de función, para determinar dicha relación. Desde el punto de vista de la modelación, no aparece en ninguna de sus repuestas, alguna necesidad de usar un modelo matemático para tomar la decisión pedida.

En el segundo momento, se les entregó el registro gráfico que representa la situación, las respuestas no variaron mucho con respecto al momento anterior, incluso algunos estudiantes respondieron exactamente lo mismo. La siguiente respuesta es ofrecida por uno de los estudiantes.

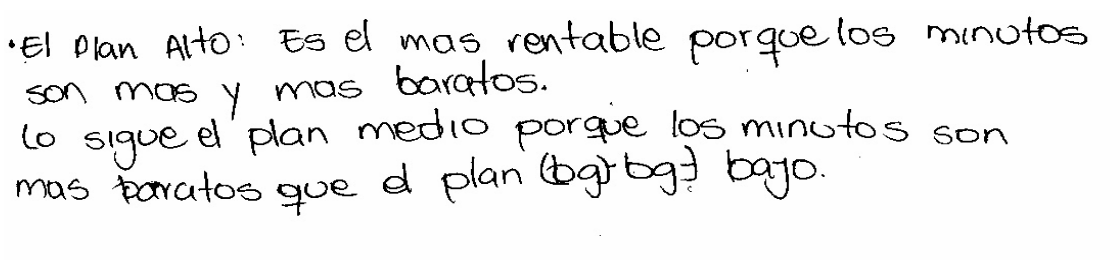

•El plan Alto: Es el mas rentable porque los minutos son mas y mas baratos.
Lo sigue el plan medio porque los minutos son mas baratos que el plan ~~bg~~ ~~bg~~ bajo.

GRAFICO 17: RESPUESTA DE UNO DE LOS ESTUDIANTES EN LA SITUACIÓN DIAGNÓSTICA III

Como se observa no hay variaciones significativas de una respuesta a la otra. Esto hace pensar que los gráficos cartesianos no tienen mucha relevancia en la producción de nuevas ideas.

Algo muy importante es que, aunque algunos estudiantes logran identificar cierta relación de dependencia entre las variables valor minuto y costo plan, se les dificulta comparar dichas relaciones funcionales de un plan a otro y con esta nueva información obtener las conclusiones pedidas en la situación.

A partir de las categorías de observación podríamos decir que con respecto al proceso de modelación y al reconocimiento de los sistemas de representación, en general, todos los estudiantes se ubican en un nivel anterior a la *categoría 1-A y 3-A, y prácticamente la totalidad del grupo podría ubicarse en la categoría 2-B.*

En general, en el desarrollo de esta situación se puede inferir que los estudiantes no alcanzan a tener una comprensión global del concepto de función como modelo de fenómenos de variación de acuerdo a las categorías propuestas. Esto se evidenció en el hecho que muy pocos alcanzaron a cuantificar la variación mediante algún modelo matemático, y aunque la mayoría lograban inferir cierta regularidad entre las cantidades de magnitud, no lograron construir un registro gráfico ni simbólico de la misma. Los pocos que construyeron alguna aproximación a estos registros lo hacían de una forma "mecánica" que no daba cuenta de la apropiación de las reglas de conformidad y conversión, por lo tanto sus producciones fueron mono-registro, confirmando la hipótesis que la actividad de conversión no es transparente y ni cognitivamente neutra.

Estos resultados sugieren la necesidad de diseñar situaciones que ofrezca, por un lado, herramientas para modelar situaciones de variación lineal entendida como la actividad de conversión del lenguaje natural al registro simbólico, y por otro, la construcción e interpretación de los gráficos cartesianos y del registro tabular.

En los resultados de la prueba diagnóstica se encontró la necesidad de presentar a los estudiantes una serie de actividades centradas en el razonamiento proporcional (ver anexo Nº 1), para alcanzar un desempeño satisfactorio en este aspecto. Dichas actividades contribuyeron a mejorar los resultados en la manipulación de magnitudes linealmente dependientes desde la razón de cambio constante, de acuerdo con nuestra segunda hipótesis de trabajo descrita en el Capitulo uno de este documento.

3.2 DISEÑO DE LAS SITUACIONES DE INTERVENCIÓN

Las siguientes tres situaciones fueron diseñadas para intervenir a los estudiantes con el propósito de superar las dificultades encontradas en la prueba diagnóstica.

Inmediatamente después del propósito y el enunciado de cada situación se hacen los respectivos análisis de caracterización a partir de las variables macro-didácticas. Adicionalmente se analiza el tipo de enunciado teniendo como base la clasificación de la Tabla 6 y anticipan las posibles dificultades a las que los estudiantes se pueden enfrentar.

Esta caracterización se hace en forma de listado con el objeto de puntualizar y focalizar los posteriores análisis de los resultados obtenidos.

Es importante anotar que estas situaciones están estrechamente relacionadas con las de diagnóstico en cuanto al tipo de contexto, la clase de enunciado, el tipo de pregunta y los tipos de magnitud que intervienen.

SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN I

Nombre: LA EMPRESA JAVO

Propósito: Mediante esta situación se pretende movilizar elementos básicos de relaciones funcionales entre magnitudes discretas, identificación del modelo funcional, su representación en tablas y los demás sistemas de representación, la identificación de la razón de cambio, y el control de variables en una situación problema.

Enunciado:

En la empresa de confecciones JAVO. Ltda. se tienen dos clases de empleados unos para las máquinas planas y fileteadoras, y otros de pulidores; a estos últimos se les paga sus servicios con un salario base de $10,000 a la semana, más una comisión de $ 70 por cada prenda pulida. A los empleados de las máquinas planas y fileteadoras se les paga el día según un salario mínimo establecido por la empresa, más una comisión por cada prenda extra elaborada.

a) Sabiendo que la producción mínima exigida por la empresa para los empleados de las máquinas es de 200 prendas diarias. Llene los espacios en blanco de la siguiente tabla:

Número de prendas elaboradas a diario	Salario total devengado (diario)
200	$12000
210	$12500
215	
	$13250
251	
	$16000
271	
	$23650

- ¿Cuáles cantidades permanecen fijas y cuales varían en las condiciones planteadas para estos empleados?

- Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un empleado utilizando cada uno de los siguiente paramentos: ***palabras, símbolos, un diagrama y un grafico en el plano cartesiano***

- ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

b) Con respecto a los pulidores responda:

- ¿Cuánto ganaría un pulidor a la semana si lograra pulir:
- 20 prendas, 50 prendas, 200 prendas, 750 prendas.
- Exprese la relación existente entre el salario semanal y el total de prendas pulidas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.
- Si un empleado ganara a la semana $38000, $24000 ¿qué puede decir usted del total de prendas pulidas por éste?

c) La empresa desea suprimir el salario base para los pulidores y en cambio piensa aumentar el valor de la comisión en $25 por prenda.

Analice esta nueva propuesta y diga si es conveniente para los empleados justificando el por qué de elección. Grafique esta situación en el plano cartesiano.

Componentes de la situación

- **Elementos procedimentales y conceptuales Matemáticos:**
  - Discriminación de magnitudes variables y constantes.
  - Identificar las magnitudes dependientes e independientes en una relación funcional.
  - La organización de la información en tablas que permitan reconocer y cuantificar el cambio.
  - La representación simbólica y cartesiana de las relaciones funcionales.

- **Elementos Didácticos:**
  - **Criterios de análisis en la Modelación.**
  - La identificación y selección de las magnitudes variables y constantes.
  - La formulación de hipótesis de trabajo

- Construcción de ecuaciones y herramientas simbólicas y gráficas para realizar procedimientos.
- El establecimiento de argumentos que permitan validar la obtención del modelo.
- La utilización del modelo para elaborar y probar conjeturas de la situación problema.

- **Criterios de análisis en el reconocimiento de la variación**
- La determinación de las cantidades variables.
- La identificación de las invariantes del problema
- El reconocimiento de las relaciones aditivas y multiplicativas entre las magnitudes que interviene en la situación.
- La descripción y coordinación del cambio de una cantidad de magnitud con los cambios en otra.
- El reconocimiento de la constante como razón de diferencias entre dos parejas cualquiera en una representación tabular.

- **Criterios de análisis en la manipulación de los sistemas de representación.**
- El uso de herramientas como la interpolación y extrapolación para determinar parejas de valores en una tabla.
- El reconocimiento de los elementos de cada sistema semiótico de representación en relación con el concepto de función.
- La conversión de un sistema de representación a otro.

Dificultades anticipadas:

- La identificación de un gráfico cartesiano como la transcripción punto a punto de las parejas de una tabla.

- La selección de escalas poco apropiadas para la representación de la relaciones entre magnitudes en el registro gráfico.
- La identificación de un gráfico cartesiano como la "unión" de puntos del plano.
- La identificación de las relaciones multiplicativas entre las magnitudes.
- La poca comprensión del concepto de variable.
- La concepción de que las relaciones entre variables no se pueden representar mediante símbolos.

Características del enunciado

En el enunciado de esta situación se pueden percibir dos momentos, una en donde la razón de cambio no es explícita, y se debe calcular siguiendo las orientaciones del enunciado y/o los datos de la tabla. Y un segundo momento donde la razón es explicita. Se debe tener en cuenta que en ambos momentos las magnitudes que intervienen en esta situación son discretas.

SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN II

Nombre: LA TARJETA DE TELÉFONO

Propósito: Determinar el papel que juega la relación por cociente entre las diferencias de dos cantidades de magnitud, en la dependencia entre ellas (costo de la llamada y resto de dinero en la tarjeta con respecto al tiempo de la llamada) y el que juega en el cambio de registro del lenguaje natural al simbólico.

Enunciado:

En el archivo "tarjeta de teléfono.xls" del software EXCEL, analice la situación que se presenta a continuación:

Una persona compra una tarjeta de teléfono celular prepago por un valor de ***B*** pesos. Cada minuto de llamada cuesta un valor ***V*** pesos.

Escriba los valores de ***B*** y ***V*** que desee y a partir de lo observado en la gráfica y la tabla, responda:

- ¿En qué momento se ha consumido la mitad del valor de la tarjeta?
- ¿Cómo saber que ya se consumió toda la tarjeta?
- ¿Qué expresión simbólica describe la relación entre el tiempo de llamada y el costo de la misma?
- ¿Qué expresión simbólica describe la relación entre el tiempo de llamada y la cantidad de dinero restante de la misma?

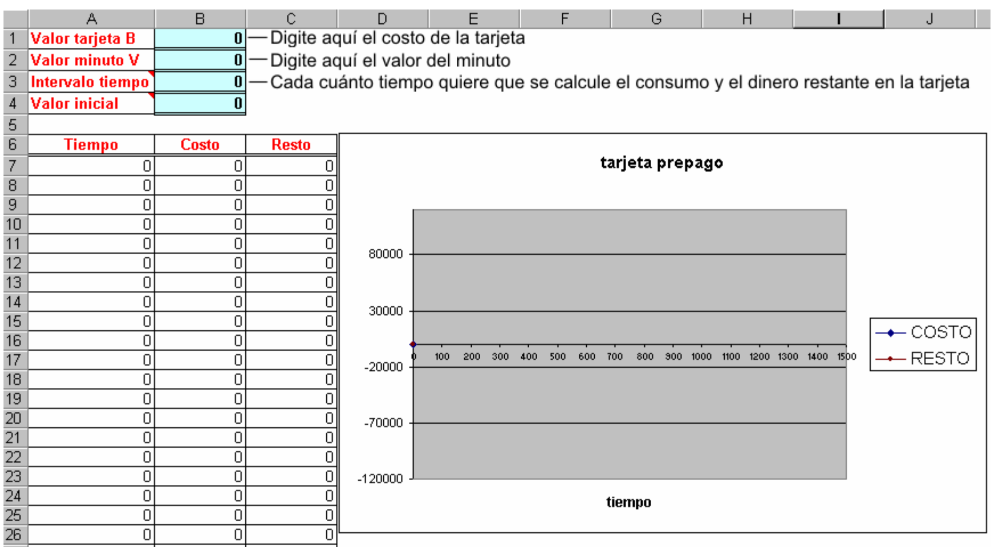


GRÁFICO 18: SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN II

Esta situación está diseñada para que los estudiantes, a través del cambio de los parámetros costo de la tarjeta, valor del minuto e intervalo de tiempo (incremento en t), movilicen saberes matemáticos como:

- Interpretación de los registros tabular y gráfico de un enunciado verbal.

- El reconocimiento de los valores B y V como parámetros que caracterizan la función $C(t) = V.t$ para la función costo de la llamada y $R(t) = B - V.t$ par la función dinero restante en la tarjeta.
- La identificación del parámetro "intervalo de tiempo", como un incremento "h" constante en t (tiempo de la llamada), que produce incrementos constantes ΔC y ΔR en C (función costo) y en R (función resto) respectivamente pero diferentes de "h".
- El reconocimiento de $\frac{\Delta C}{h}$ y $\frac{\Delta R}{h}$ como una nueva constante que identifica las funciones Costo de la llamada y Dinero restante como lineales. En el caso particular es muy importante reconocer a esta constante como $\frac{\Delta C}{h} = V$ y $\frac{\Delta R}{h} = -V$, es decir descubrir que dicha constante es el parámetro V (valor del minuto) o el opuesto de V respectivamente.
- La determinación de t, C y R como variables y su relación funcional lineal.
- La identificación de $\frac{\Delta C}{h} = V$ y $\frac{\Delta R}{h} = -V$ con la pendiente de las rectas dadas en la gráfica.

Componente didáctico:

- **Con respecto a la variación:**

- El reconocimiento de las magnitudes costo de la tarjeta, valor minuto, tiempo de la llamada y dinero restante en la tarjeta como variables de la situación.

- La diferenciación de los parámetros Costo de la tarjeta y valor minuto (B y V) con la variables tiempo de la llamada, el costo de la misma y el dinero restante en la tarjeta (t, C y R).

- Coordinar el establecimiento de los parámetros B y V para determinar la variación del costo de la llamada C y el dinero restante R con respecto al tiempo t que dura la llamada.

- La coordinación de la razón de cambio de la cantidad de magnitud Costo de la llamada C y dinero restante R (dependientes) con respecto a los incrementos uniformes del tiempo (independiente). En el contexto de la situación estos incrementos del tiempo indican cada cuanto se va calcular el consumo y la cantidad de dinero restante en la tarjeta.

- **Con respecto a los sistemas de representación:**

- Reconocer el registro tabular y el gráfico como representantes de las funciones Costo llamada y dinero restante.

- Realizar actividad cognitiva de tratamiento en el registro tabular para dar respuesta a las preguntas de la situación.

- Generar actividad cognitiva de conversión del lenguaje natural al registro simbólico para construir $\frac{\Delta C}{h} = V$ y $\frac{\Delta R}{h} = -V$ y finalmente $C(t) = V.t$ y $R(t) = B - V.t$.

- Realizar tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas dadas en la situación.

- Reconocer los cambios que la constante V y –V del registro simbólico, producen en el registro gráfico de mismo.

- **Con respecto a la modelación:**

- Reconocer en $C(t) = V.t$ y $R(t) = B - V.t$ un modelo matemático de la situación planteada.

- Utilizar el modelo matemático construido para realizar predicciones frente al costo de la llamada, el dinero restante y el tiempo de duración de las llamadas. Controlar los cambios de cada variable dependiendo del contexto.

De acuerdo al diagnóstico, podríamos decir que los estudiantes se enfrentarán a una serie de elementos nuevos, tanto desde el punto de vista matemático como didáctico, a saber: comprensión del concepto de parámetro, del concepto de incremento, de variación y fundamentalmente, el concepto de razón de cambio constante; desde el punto de vista didáctico el enfrentamiento con los momentos del proceso de modelación, y la actividad cognitiva de conversión entre sistemas de representación. La complejidad de estos elementos hace que no sea suficiente esta situación para lograr el macro propósito de la misma.

Dificultades previstas:

- El conocimiento del Software y sus características.

- En general a los estudiantes, ya se les ha enseñado los elementos que componen la función lineal, esto quiere decir que han escuchado hablar de lo es una función lineal, lo que significa la pendiente de la recta y el intercepto con el eje y. Pero todo lo anterior se ha hecho desde el punto de vista formal, donde este tipo de problemas se ven como aplicación de los conocimientos adquiridos. Consideramos que en este punto encontramos el primer obstáculo, pues no están acostumbrados a enfrentarse con el proceso de modelación desde el punto de vista didáctico, en particular con la primera y segunda fase de dicho proceso.

- La discriminación de las unidades significantes cognitivamente pertinentes para la conversión entre los registros de representación de la función lineal modelo matemático de la situación.

- La pendiente de una recta se les ha mostrado como una propiedad de la gráfica, como el grado de inclinación que tiene con respecto al eje x, en otras ocasiones se les ha hablado que este grado de inclinación se representa por la medida de este ángulo. Esta visión oculta completamente toda perspectiva variacional y por tanto dicha pendiente no es más que un número, estático y sin significado variacional para el contexto de la situación. En este sentido prevemos que será de mucha dificultad, entender el papel fundamental que juega el incremento del tiempo, las diferencias sucesivas de las cantidades de magnitud (costo total de la llamada y resto) y el cociente entre los anteriores, para construir el modelo funcional de la situación.

Características del enunciado

En este enunciado la razón de cambio está dada como un parámetro; sin embargo, las características que la identifican como razón es necesario esgrimirlas mediante un tratamiento tabular y/o gráfico.

Las magnitudes que intervienen son: costo de llamada, dinero restante en la tarjeta y el tiempo que dura la llamada, donde la primera y la segunda tienen un carácter discreto y la tercera continua, aunque como se dijo en el análisis, hay que discretizarla según el contexto del problema.

SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN III

Nombre: EL TANQUE CILÍNDRICO

Propósito: Construir la función lineal como el modelo matemático de un fenómeno, a través de la identificación de la razón de cambio constante.

Enunciado:

Se cuenta con un tanque cilíndrico de 100 litros de capacidad y altura 2 metros (Fig. 1) el cual se dispone para llenarlo de agua. En ésta experiencia puedes escoger la unidad con la que desees llenar la botella.

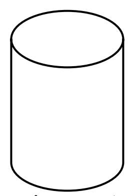


Figura 1

Momento 1

- En la experiencia ¿Cuáles cantidades permanecen constantes y cuales varían?
- Realiza un gráfico que permita describir la relación existente entre el volumen y el nivel de agua por cada unidad echada. Describa dicha relación en palabras y en símbolos.
- Si se cambia la unidad de volumen para el llenado, qué cambios se generaría en el nivel de agua, el volumen y en la relación existente entre el nivel de agua y el volumen (gráfica y símbolos).

Momento 2

¿En qué cambian las respuestas de las preguntas anteriores (Momento 1), si inicialmente el tanque tiene una cantidad determinada de agua a un nivel 50 cms?

En esta situación se pretende movilizar saberes matemáticos como:

- Asocia la *razón* de cambio instantánea de las magnitudes de la función lineal.

- Identificar las funciones $h(V) = k.V$ y $h(V) = kV + h_0$ como funciones variacionalmente equivalentes.

Componente didáctico:

- **Con respecto a la variación:**
- Discriminación de las magnitudes continuas como variables dependientes e independientes.
- La identificación de los incrementos en h (el nivel del agua) y V (volumen existente en el tanque) como herramientas que permiten cuantificar el cambio entre dos cantidades de magnitud continuas.
- La identificación de la razón de cambio como una magnitud constante en la situación.
- El uso de la razón constante *K,* para caracterizar las funciones lineales $h(V) = k.V$ y $h(V) = kV + h_0$
- La identificación a h_0 “unidad nivel de agua inicial”, como un parámetro constante que representa la invariante de estado inicial.

- **Con respecto a los sistemas de representación:**

- Generar actividad cognitiva de conversión del lenguaje natural al registro simbólico para construir $h(V) = k.V$ y $h(V) = kV + h_0$ (modelo matemático).
- Realizar tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas dadas en la situación.

Con respecto a la modelación:

- El reconocimiento de los registros simbólicos $h(V) = k.V$ y $h(V) = kV + h_0$ como modelo lineal matemático de la situación planteada.

Dificultades previstas:

- La comprensión del continuo matemático.
- En las situaciones anteriores sólo se ha trabajado la razón de cambio desde magnitudes discretas o continuas pero discretizadas, lo cual hace ver la razón de cambio como el promedio entre un estado inicial y un estado final. En esta situación por ser magnitudes continuas se requiere ver de forma instantánea la razón de cambio.

Características del enunciado:

En este enunciado la razón de cambio es implícita y se puede inferir desde el contexto del problema por la forma cilíndrica de la botella y la información de las medidas dadas en la situación o también por un proceso de experimentación y medición.

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES DE INTERVENCIÓN

En este apartado nos dedicaremos a describir y analizar los resultados obtenidos con la implementación de las tres actividades denominadas de intervención.

Con base en los resultados de la prueba diagnóstica, consideramos necesario comenzar la intervención con dos situaciones cuyo propósito fue, discutir e institucionalizar algunas ideas propias del razonamiento proporcional, dichas situaciones se muestran en el anexo 1.

Los instrumentos utilizados para recolectar la información fueron:

- Las producciones escritas de los estudiantes correspondientes a cada una de las situaciones entregadas.
- Las acciones y producciones verbales captadas mediante registros fílmicos, tomadas en momentos específicos del desarrollo de la situación.
- Las anotaciones de los investigadores con base en las observaciones durante la implementación de las situaciones.

Para dar cuenta de los resultados se tuvo en cuenta los criterios de análisis elaborados en las variables didácticas desde la modelación, la variación y los sistemas de representación presentados en el aparte anterior.

Descripción y análisis

Para el desarrollo de la primera situación, se les pidió a los estudiantes que se reunieran en parejas y se les entregó el material fotocopiado. Los estudiantes debían leer el enunciado, y responder las preguntas dadas en la misma. Para garantizar su comprensión se les hizo preguntas como: ¿Cuántos tipos de empleados tiene la empresa?, ¿Cómo se calcula el salario de los empleados de máquinas?, ¿Cómo se calcula el salario de los pulidores?, ¿Cuáles magnitudes son conocidas y cuáles desconocidas en cada uno de los momentos?

En esta primera parte, aunque los estudiantes tuvieron una comprensión general del enunciado, confundían los datos con los que se calculaba el salario de los empleados, es decir, cuando se les preguntaba a cómo se les paga cada prenda a los empleados de máquina generalmente respondían que a $70, para lo cual fue necesario leer repetidamente el enunciado, haciendo especial énfasis en la oración *“a estos últimos se les paga sus servicios con un salario base de $10000 a la semana más una comisión de $ 70 por cada prenda pulida”*.

De esta manera lograron identificar la información pertinente en cada caso, es decir, las magnitudes que interviene en la situación y algunas posibles relaciones entre ellas.

Para la segunda situación (tarjeta de teléfono) se llevó a los estudiantes a la sala de computadores, se distribuyeron por parejas en cada computador y se les entregó el archivo que contenía la situación. Es importante tener en cuenta que no fue necesario desarrollar ejercicios previos para el conocimiento del Software (Excel), puesto que la situación sólo dependía del cambio de los parámetros B, V y el intervalo de tiempo; además ellos ya tiene conocimientos de su uso. Igual que en la situación anterior, para confirmar si los estudiantes habían identificado las magnitudes tiempo de la llamada (variable independiente), costo de la llamada y dinero restante (variables dependientes), se les hizo la pregunta: “*Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación?*”. A lo cual ellos respondieron, el tiempo y el costo de la llamada, dejando de lado la magnitud resto, por lo que se les preguntó: ¿Qué información suministra la columna que dice resto? Y ellos contestaron, “representa lo que queda en la tarjeta”.

La tercera situación (“el tanque”) se les entregó y se inició su desarrollo con un diálogo para determinar las magnitudes que intervienen en la misma. En dicho diálogo se mencionaron las magnitudes tiempo, volumen del tanque, radio del tanque, área de la base. Seguidamente se les pidió que asociaran cada variable según fueran constantes o variables, a lo cual respondieron en su gran mayoría correctamente que las variables son altura, volumen y tiempo y que las fijas (constantes) eran el volumen del tanque, el radio del cilindro y área de la base. De esta manera se aclaró que cuando se hablaba del volumen y la altura eran los del agua y de su nivel.

Con esta primera parte de las tres situaciones se logró que los estudiantes reconocieran y discriminaran las magnitudes que están interviniendo y las cognitivamente pertinentes para el proceso de modelación. Además se logró el establecimiento de algunas relaciones de dependencia e independencia entre ellas.

Se observó un nivel de progreso en el reconocimiento de las magnitudes, esto se refleja con las preguntas de la situación, pues como se observa en la primera se hace referencia a cantidades fijas y variables; en la segunda se pregunta por el mismo concepto pero desde el término magnitud, en este caso, los estudiantes solicitaron hacer explícito dicho término (magnitud), para lo cual los investigadores respondieron que el concepto de magnitud está asociado a cualidades o atributos susceptibles de ser medidos. Esto permitió que en la tercera situación detectaran mas rápidamente las magnitudes que intervienen, sin que se presentara ninguna dificultad.

En un segundo momento del proceso, se les pidió a los estudiantes establecer las posibles relaciones entre las magnitudes reconocidas. Para la primera situación el reconocimiento de estas relaciones están materializadas por las características aditivas y multiplicativas visualizadas en el llenado de la tabla, la cual, exige a su vez el reconocimiento de la razón en las diferencias de las magnitudes respectivas.

Una vez llenada la tabla se les preguntó a los estudiantes la justificación de la forma como lo hicieron, respondiendo a preguntas como: ¿Cuánto cuesta cada prenda extra? A lo que ellos respondieron que cincuenta pesos y esto porque "*si por 200 prendas se gana $12000 y por 210 se gana 12500 quiere decir que por 10 extras se gana 500 pesos extras, o sea, 50 pesos por una prenda extra*". De esta forma se materializa la diferencia entre las magnitudes como estrategia de solución.

Esto permite observar que los estudiantes hacían operaciones para determinar la razón de diferencia constante y cuantifica la variación entre las magnitudes y con ello llenar la tabla. Todo esto lo hacían de una manera intuitiva, ya que al preguntarles por los procedimientos realizados para encontrar dicho valor, la mayoría de los estudiantes respondían "*una división*" pero no hacía referencia a las diferencias entre las cantidades de magnitud consecutivas dadas en la tabla.

En la situación número dos se presenta un comportamiento similar, pero en este caso el diseño de la misma induce al estudiante a que tome conciencia, que dicho cociente, se hace entre las diferencias de los valores de la tabla. Esto se evidencia en el segundo momento de esta situación, cuando se les pide que, en otra hoja del mismo archivo de Excel, copien los elementos que se tienen en el primero y calculen en una columna adicional las diferencias sucesivas de los valores correspondientes al costo de la llamada y luego, en otra columna, el cociente entre estas diferencias y el intervalo del tiempo (parámetro inicial), para encontrar el mismo valor del costo minuto (constante). Ver gráfico siguiente.

Valor tarjeta B	10000
Valor minuto V	30
Intervalo tiempo	5
Valor inicial	0

Tiempo	Costo	Resto	Dif costo	Dif resto	cociente costo	cociente resto
0	0	10000	150	-150	30	-30
5	150	9850	150	-150	30	-30
10	300	9700	150	-150	30	-30
15	450	9550	150	-150	30	-30
20	600	9400	150	-150	30	-30
25	750	9250	150	-150	30	-30
30	900	9100	150	-150	30	-30
35	1050	8950	150	-150	30	-30
40	1200	8800	150	-150	30	-30

GRÁFICO 19: ARCHIVO DE CÁLCULO DE DIFERENCIAS SUCESIVAS Y RAZÓN DE CAMBIO

En esta parte de la situación no hubo mayor dificultad para que los estudiantes realizaran los procedimientos y tomaran conciencia de la constante como un cociente entre las diferencias de las cantidades de magnitud. Solo a un par de estudiantes se les dificultó la construcción de las fórmulas en Excel, ante esto uno de los investigadores intervino para orientarles el proceso y permitirles construir las mismas conclusiones.

Dado que la primera situación de intervención (la empresa Javo) tiene una estructura similar a la presentada en la situación número uno del diagnóstico (salario de Ana), era de esperarse que los resultados, en cuanto a la construcción del modelo y uso de los sistemas de representación, fueran significativamente análogos a los de dicha prueba.

Por esta razón, una vez hechos los análisis de los resultados del diagnóstico, se prepararon algunas preguntas para orientar el posible trabajo con los estudiantes hacia la construcción del modelo matemático. Esto con el ánimo de construir las bases para ubicarlos en una categoría próxima a la 1-A.

En efecto las producciones iniciales en cuanto a los registros simbólicos, pueden categorizarse en dos grupos: el primero de ellos está determinado por aquellos estudiantes que se limitaron a hacer un tratamiento aritmético pero no utilizaron ningún tipo de registro simbólico. Es decir, aquellos estudiantes que aunque reconocen las variables y coordinan de alguna manera el cambio entre ellas, no alcanzan a realizar algún tipo de registro simbólico y tampoco gráfico y que a lo sumo se usa para inferir alguna regularidad entre las magnitudes; esto es equivalente a afirmar que se ubican en las categorías 2-B y 3-A. En el segundo grupo se ubican los estudiantes que usaron letras para representar las cantidades y las operaciones que intervienen en la situación. Estos símbolos dan cuenta de un uso de las letras más como representantes de números que como representante de variables; y las expresiones simbólicas construidas más que representar relaciones funcionales muestra una traducción de operaciones aritméticas. Con esto se puede afirmar que los estudiantes aunque construyeron un modelo simbólico (Categoría 3-A), no tuvieron un desarrollo en la comprensión de dicho modelo desde un punto de vista variacional, de aquí se pude inferir que un progreso en la macro-variable 3 “sistemas de representación” no implica un avance en la macro-variable 2 “la variación”.

Presentamos a continuación dos ejemplos que muestran estas dos tipología de las respuestas de los estudiantes. De uno de ellos mostraremos su producción escrita y del otro se transcribe el diálogo entre el estudiante y el investigador en su intento por ampliar conceptualmente y aproximarse a la elaboración del modelo.

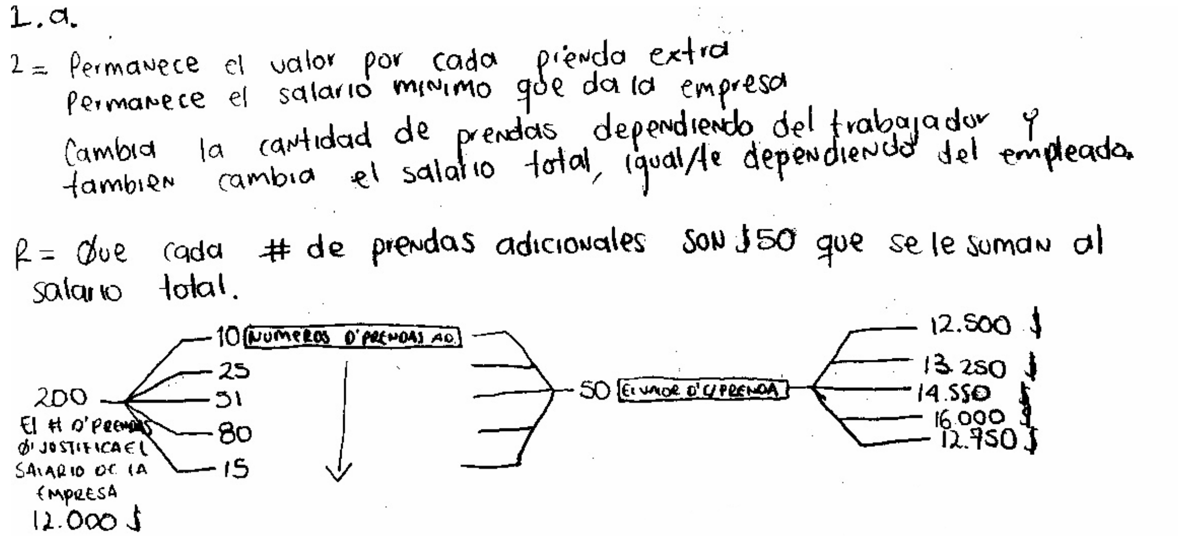


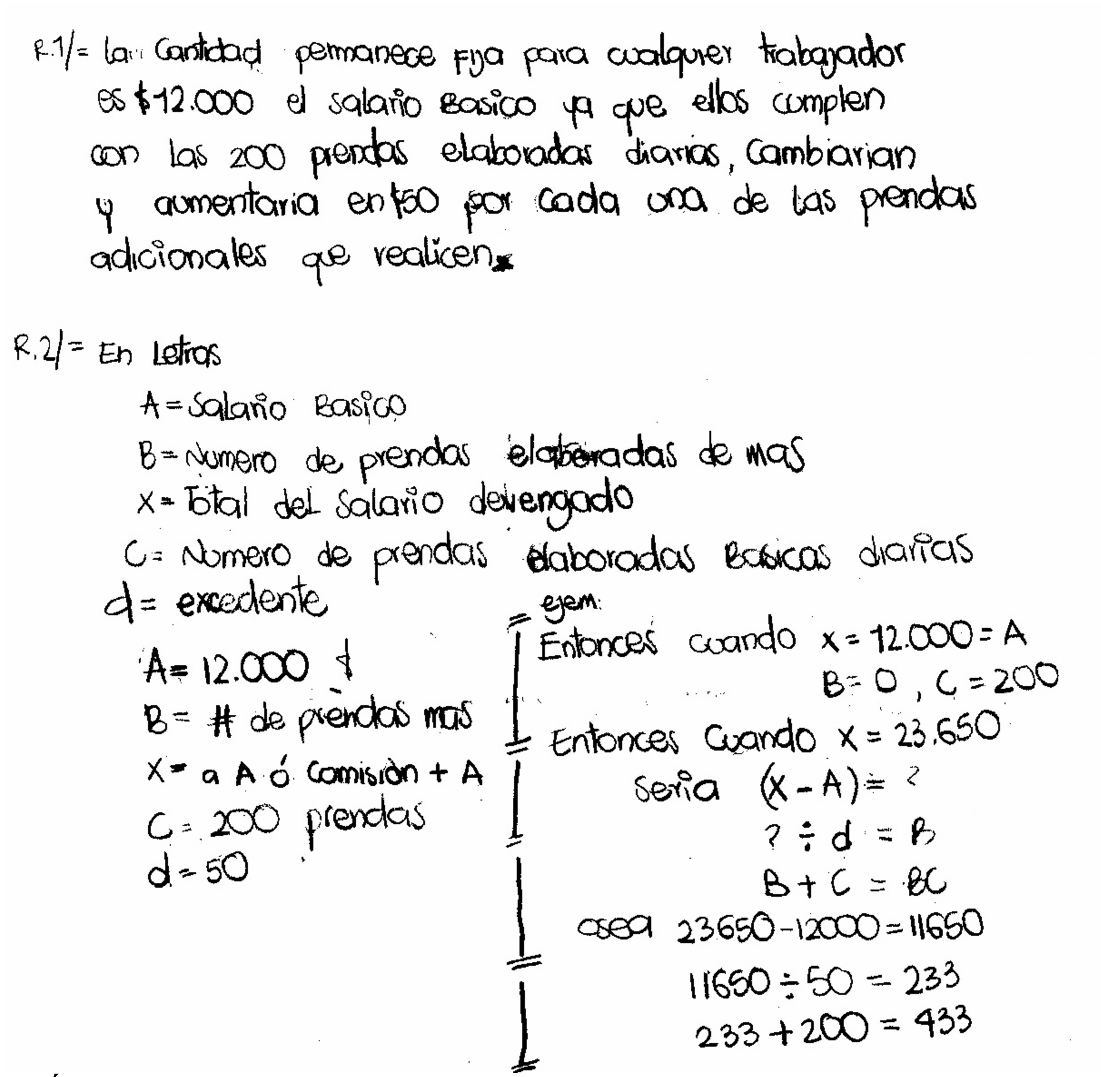
GRÁFICO 20: PRODUCCIÓN DE UNO DE LOS ESTUDIANTES EN LA SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN I

La siguiente explicación corresponde a la producción escrita de un estudiante de acuerdo a la grafica 13.

Estudiante: "***A*** sería el salario básico, donde ***A*** es 12000, ***B*** es el número de prendas de más, o sea ***B*** es el número de prendas más, ***x*** es el total del salario devengado, o sea que sería, ***A*** si sería las 200 prendas o comisión más ***A***. ***C*** es el número de prendas elaboradas básicas diarias, o sea las 200 que tiene que hacer obligatoriamente. Y ***D*** excedentes, o sea las 50, o sea por cada una es 50. Entonces, por ejemplo: entonces cuando ***x*** es igual a 12000, ***x*** es igual a ***A***, y ***B*** es igual a cero porque no hay número de prendas de más, y ***C*** es igual a 200. Pero cuando ***x*** es igual 23650, sería ***X*** menos ***A*** igual a uummm, eso me da un valor cierto que sería lo de más. A eso le divido a ***D*** que sería un excedente, o sea le divido es a cincuenta, eso me da ***B*** y ***B*** mas ***C***, o sea mas las 200 que ya tenía, eso me da ***BC***.

Investigador: ¿Qué es ***BC***?

Estudiante: El total de todas las prendas que hizo.



R.1/= la Cantidad permanece Fija para cualquier trabajador es $12.000 el salario Basico ya que ellos cumplen con las 200 prendas elaboradas diarias, Cambiarian y aumentaria en $50 por cada una de las prendas adicionales que realicen.

R.2/= En Letras

A = Salario Basico

B = Numero de prendas elaboradas de mas

X = Total del Salario devengado

C = Numero de prendas elaboradas Basicas diarias

d = excedente

A = 12.000 $

B = # de prendas mas

X = a A ó Comisión + A

C = 200 prendas

d = 50

ejem:

Entonces cuando X = 12.000 = A

B = 0 , C = 200

Entonces Cuando X = 23.650

Seria (X − A) = ?

? ÷ d = B

B + C = BC

osea 23650 − 12000 = 11650

11650 ÷ 50 = 233

233 + 200 = 433

GRÁFICO 21: PRODUCCIÓN ESCRITA DE UN ESTUDIANTE EN LA SOLUCIÓN DE LASITUACIÓN DE INTERVENCIÓN I

En la segunda situación la razón de cambio constate jugó un papel fundamental para la construcción del modelo matemático. Una vez los estudiante contestaron las dos primeras preguntas desde el análisis e interpretación del registro tabular y gráfico, la tarea consistió en construir la representación simbólica funcional (modelo matemático) de la situación.

En esta tarea, la interpretación del parámetro “intervalo de tiempo” como incremento Δt constante, el parámetro valor inicial y la actividad antes mencionada de calcular las sucesivas diferencias en las magnitudes costo y resto, y el cociente entre estos con el parámetro “intervalo de tiempo”, fueron la clave para su construcción.

Se inició esta parte del trabajo induciendo a los estudiantes para que reconocieran las características de la construcción de la tabla. Para lo cual se les pidió que cambiaran los parámetros “valor inicial” e “intervalo de tiempo” y que describieran los cambios que estos generan en la tabla.

En el siguiente diálogo se muestra la intervención que se hizo en este caso, apoyados en el registro de los estudiantes según la figura que a continuación se muestra:

Valor tarjeta B	10000
Valor minuto V	30
Intervalo tiempo	5
Valor inicial	7

Tiempo	Costo	Resto
7	210	9790
12	360	9640
17	510	9490
22	660	9340
27	810	9190
32	960	9040
37	1110	8890
42	1260	8740
47	1410	8590
52	1560	8440
57	1710	8290

Valor tarjeta B	10000
Valor minuto V	30
Intervalo tiempo	8
Valor inicial	7

Tiempo	Costo	Resto
7	210	9790
15	450	9550
23	690	9310
31	930	9070
39	1170	8830
47	1410	8590
55	1650	8350
63	1890	8110
71	2130	7870
79	2370	7630
87	2610	7390

GRÁFICO 14

Investigador : ¿Cómo cambian los valores de la tabla?

Estudiante : "En esta columna [señalando la columna tiempo], los valores aumentan de cinco en cinco y luego de ocho en ocho".

Esta fue de un estudiante que cambió el parámetro intervalo de cinco a ocho sin hacer referencia al parámetro valor inicial, para lo cual se le preguntó:

Investigador : "¿Aumenta de cinco en cinco o de ocho en ocho a partir de dónde?" estudiante: de este valor.

Investigador : ¿y cuál es ese valor?

Estudiante : Este. [señalando con el dedo la casilla donde aparece el valor del parámetro "valor inicial"]

Investigador : ¿Y qué pasa con esta columna?, [señalando la columna "costo"]

Estudiante : También cambia

Investigador : ¿Y como cambia?

Estudiante : Aumenta

Investigador : ¿Y cómo aumenta?

Estudiante : de 240 en 240 [haciendo referencia a cuando el intervalo de tiempo era de 8]

Investigador : ¿Y pasa lo mismo cuando el intervalo de tiempo es de cinco en cinco?

Estudiante : [Hizo cuentas con la calculadora] no, es de 250 en 250

Preguntas similares se realizaron para la columna "resto".

El reconocimiento del costo del valor minuto como razón de cambio constante se orientó mediante la inserción de una variable micro-didáctica que consistió en entregarles una hoja de papel que contenía tres tablas análogas a las de la situación anterior pero omitiendo los parámetros con los cuales fueron construidas y se les pidió que en cada caso descubrieran el valor de la tarjeta y el valor del minuto. Un ejemplo de estas tablas son las siguientes:

Tiempo	Costo	Resto
0	0	20000
10	2000	18000
20	4000	16000
30	6000	14000
40	8000	12000
50	10000	10000
60	12000	8000
70	14000	6000
80	16000	4000
90	18000	2000
100	20000	0
110	22000	-2000
120	24000	-4000

Tiempo	Costo	Resto
10	4000	16000
15	6000	14000
20	8000	12000
25	10000	10000
30	12000	8000
35	14000	6000
40	16000	4000
45	18000	2000
50	20000	0
55	22000	-2000
60	24000	-4000
65	26000	-6000
70	28000	-8000

Tiempo	Costo	Resto
9	1350	8650
14	2100	7900
19	2850	7150
24	3600	6400
29	4350	5650
34	5100	4900
39	5850	4150
44	6600	3400
49	7350	2650
54	8100	1900
59	8850	1150
64	9600	400
69	10350	-350

GRÁFICO 22: GRÁFICO QUE MUESTRA EL ARCHIVO PRESENTADO COMPLEMENTO A LA SITUACIÓN DE INTERVENCIÓN II

Once de los quince estudiantes respondieron satisfactoriamente a esta actividad, encontrando las razones de cambio como el cociente de los incrementos de los valores de la tabla. Por ejemplo un estudiante al describir los procedimientos utilizados para calcular la razón de cambio en la primera tabla dice: "*tomamos cada costo y lo dividimos por el tiempo y eso da el valor del minuto*". Se le preguntó luego, ¿Y cómo encontrar ese mismo valor desde la columna resto? Respondieron "*igual*"; ¿igual cómo?; "*pues se divide cada resto por cada tiempo*". Se les pidió que realizaran dicha operación y apreciaron que no era así. Se les preguntó entonces, ¿porqué no da?; después de un momento de silencio respondieron, "*hay que restar*", ¿hay que restar qué?, preguntó el investigador. El estudiante respondió, "*el costo* [costo de la llamada] *del valor de la tarjeta*".

El investigador, retomando la pregunta inicial, dice ¿pero cómo se encuentra el valor del minuto?, a lo que el estudiante respondió: "se divide 2000 entre 10, ¿Y de dónde salen estos valores 2000 y 10?, se responde: son los valores en los cuales cambia la tabla. ¿Pero cómo se obtienen?, ellos dicen "*sumando*", -sumando qué?- respondieron, "*cualquier valor del tiempo se le suma 10 y cualquier valor del otro se le resta 2000*". y si sólo se tienes dos valores consecutivos de la tabla , por ejemplo -16000 y 14000-, ¿cómo lo encontrarías?, el estudiante se queda pensando un momento y responde, "*pues resto 14000 a 16000*".

Con el ánimo de representar la variación mediante un sistema simbólico que permita una aproximación a la categoría 3-A, se introduce la notación t_0, t_1, t_2... y así sucesivamente como símbolos que representan los valores de la columna tiempo, y Δt para el incremento de tiempo. De esta forma se construyó con ellos la expresión $t_1 = t_0 + \Delta t$ y se les explica que t_1 es el valor que se encuentra en la fila 2 de la columna tiempo y t_0 indica el valor que se encuentra en la fila 1 de la misma columna, por tanto se les mostró, que la expresión anterior ($t_1 = t_0 + \Delta t$) significa que el segundo término de esta columna se puede hallar a partir de conocer el valor inicial y el incremento de tiempo. Y este a su vez es el tiempo a partir de donde se comienza a contar el tiempo (parámetro valor inicial). Igualmente sucede con el tercer elemento, es decir, t_2, pues $t_2 = t_1 + \Delta t$, y si en esta última expresión se reemplaza lo que equivale t_1, se obtiene que $t_2 = t_0 + \Delta t + \Delta t$ o lo que es lo mismo t_2 a partir de t_0 es $t_2 = t_0 + 2\Delta t$, es decir, el valor de t_2 a partir del parámetro "valor inicial".

De igual manera se hizo con la columna "costo" y "resto", introduciendo la notación C_0, C_1 , C_2 y así sucesivamente para la columna Costo y R_0, R_1, R_2 y así sucesivamente para la columna resto. De esta forma se construyó el valor $C_1 = C_0 + \Delta C$ y $R_1 = R_0 + \Delta R$ para los segundos valores de la columna costo y resto respectivamente. Esto quiere decir que una vez descubierta la diferencia constante entre los valores consecutivos de las columnas en cuestión se puede hallar, a partir de conocer el primer valor cualquier otro de la misma columna, pues, $C_2 = C_0 + 2\Delta C$, $C_3 = C_0 + 3\Delta C$ y así sucesivamente para la columna "Costo" y $R_2 = R_0 + 2\Delta R$, $R_3 = R_0 + 3\Delta R$ y así sucesivamente para la columna "Resto".

Para confirmar esto se les entregó el archivo 2, igualmente del software Excel, en donde se construyeron las constantes y el proceso descrito del párrafo anterior. En el siguiente gráfico se muestran las producciones tabular (Excel) y escrito, resultado de este trabajo de intervención.

Valor tarjeta B	10000
Valor minuto V	30
Intervalo tiempo	5
Valor inicial	0

Tiempo	Costo	Resto	Dif costo	Dif resto	cociente costo	cociente resto
0	0	10000	150	-150	30	-30
5	150	9850	150	-150	30	-30
10	300	9700	150	-150	30	-30
15	450	9550	150	-150	30	-30
20	600	9400	150	-150	30	-30
25	750	9250	150	-150	30	-30
30	900	9100	150	-150	30	-30
35	1050	8950	150	-150	30	-30
40	1200	8800	150	-150	30	-30
45	1350	8650	150	-150	30	-30
50	1500	8500	150	-150	30	-30
55	1650	8350	150	-150	30	-30
60	1800	8200	150	-150	30	-30
65	1950	8050	150	-150	30	-30
70	2100	7900	150	-150	30	-30
75	2250	7750	150	-150	30	-30

GRÁFICO 23

En el caso particular de la situación, se concluyó con los estudiantes que $t_n = t_0 + n.\Delta t$, vía la generalización. Esto quiere decir que cualquier valor de la columna tiempo t_n se obtiene sumando el primer elemento y n veces el intervalo.

Igualmente concluyó que $C_n = C_0 + n\Delta C$ para la columna "costo" y $R_n = R_0 + n\Delta R$ para la columna "resto".

Finalmente se indujo a los estudiantes para que relacionaran de forma simbólica cualquier valor del "costo llamada" y del dinero restante en la tarjeta "resto" dependiendo del tiempo *t* de duración de la misma. Esto con la idea de construir una sola expresión simbólica funcional $C(t) = C_0 + V.t$ y $R(t) = B - V.t$ para el costo y el resto respectivamente.

Para esta tarea se les pidió que observaran, que por cada valor t_0, t_1, t_2... había valores C_0, C_1 , C_2... y R_0, R_1, R_2.... respectivamente. Esto quiere decir que simbólicamente, a partir de las conclusiones anteriores se tiene que:

Tiempo	**Costo**	**Resto**
t_0	C_0	R_0
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$C_1 = C_0 + \Delta C$	$R_1 = R_0 + \Delta R$
$t_2 = t_0 + 2\Delta t$	$C_2 = C_0 + 2\Delta C$, ,	$R_2 = R_0 + 2\Delta R$
$t_3 = t_0 + 3\Delta t$	$C_3 = C_0 + 3\Delta C$	$R_3 = R_0 + 3\Delta R$
. . .	. . .	. . .
$t_n = t_0 + n.\Delta t$	$C_n = C_0 + n\Delta C$	$R_n = R_0 + n\Delta R$

De los resultados de la tabla anterior se puede afirmar, que si se conocen los primeros valores de cada columna y la diferencia constante, se puede conocer cualquier otro valor de la misma columna, a través del proceso de generalización; en otros términos conociendo el estado inicial de la magnitud tiempo y el cambio que se aplica a esta, se puede determinar su estado final. De igual manera se hizo un trabajo con la magnitud resto.

Una vez se discutió y objetivó el proceso anterior, se les pidió a los estudiantes que volvieran al archivo 2 de Excel, para analizar el significado de las últimas dos columnas y la conexión que hay entre los resultados de la tabla anterior y los valores constantes que aparecen en estas columnas.

Para esto los investigadores propusieron a los estudiantes que asignaran un valor fijo a los parámetros “costo de la tarjeta”, “valor del minuto” y “valor inicial”, y que dieran diferentes valores al parámetro “intervalo de tiempo”. Se les preguntó: ¿Cuando se escriben diferentes valores para el parámetro “intervalo de tiempo”, cuáles valores cambian y cuáles permanecen fijos?

Los estudiantes “jugaron” un momento con el archivo y concluyeron que:

- Independiente del valor que se escriba para este parámetro, las únicas columnas que no cambian son las “cociente costo” y “cociente resto”. Y aunque las columnas “diferencia costo” y “diferencia resto” siempre tienen un mismo valor en todo la columna, este valor cambia cuando se cambia el parámetro “intervalo de tiempo”.
- Si se digita un valor de cero en la celda que indica el parámetro “intervalo de tiempo”, el computador muestra en las columnas “cociente costo” y “cociente resto” la expresión #¡DIV/0!. Esto, explicaron los investigadores, significa la indeterminación matemática de la división por cero, pero por otro lado desde la situación, significa que no tiene sentido calcular el costo de la llamada y el dinero restante en la tarjeta cada cero minutos.
- Las columnas “cociente costo” y “cociente resto” siempre da como resultado el mismo valor del parámetro “valor minuto” y el opuesto

aditivo del mismo. Esto a partir de la notación simbólica convenida es $\frac{\Delta C}{\Delta t} = V$ y $\frac{\Delta R}{\Delta t} = -V$

Con base en los anteriores resultados y la tabla donde aparece la notación simbólica convencional, los estudiantes construyeron los siguientes resultados:

- ¿Cómo escribir simbólicamente cualquier tiempo, cualquier costo y cualquier resto a partir de sus diferencias constantes y de conocer el valor inicial de cada cantidad de magnitud? Para dicha se cantidad escribió la variación de una magnitud como el estado final menos el estado inicial, esto es :

Tiempo	Costo	Resto
$t_n - t_0 = n\Delta t$	$C_n - C_0 = n\Delta C$	$R_n - R_0 = n\Delta R$

A partir de estos resultados se utilizaron las herramientas algebraicas que poseían los estudiantes para determinar la ecuación. Esto se realizó de la siguiente manera: $\frac{C_n - C_0}{t_n - t_0} = \frac{n\Delta C}{n\Delta t} = V$ y $\frac{R_n - R_0}{t_n - t_0} = \frac{n\Delta R}{n\Delta t} = -V$ de esta manera se construyó que $C_n - C_0 = V(t_n - t_0)$ y $R_n - R_0 = -V(t_n - t_0)$ y concluir que $C = V(t - t_0) + C_0$ y $R = -V(t - t_0) + R_0$. De esta manera se acompaño el proceso de los estudiantes en la construcción del modelo matemático y ubicándose así en la categoría 1-B

Para el caso particular de la situación, cada estudiante escribió los valores que había fijado en los parámetros “valor minuto” y “valor inicial” (V, y t_0) y los valores obtenidos en la primera fila de las columnas costo y resto (C_0 y R_0 respectivamente). En este momento se hizo énfasis en la importancia que tiene conocer el valor inicial de la magnitud control y su correspondiente valor en la otra magnitud, además de la transformación que sufre la anterior expresión si a $t_0 = 0$ le corresponde C_0, $R_0 = 0$ que indica una relación de proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes. Vale la pena aclarar que el paso al modelo matemático por la vía de la generalización no fue inmediato y requirió de un trabajo, el cual estuvo basado en las reflexiones propuestas por Mason et al (1999) y Lee L, (1996). Sin embargo, esto no se ampliará en el presente trabajo.

En el primer momento de la situación de intervención número tres (El tanque cilíndrico), la totalidad de los estudiantes identificaron las magnitudes que involucra la situación, esto es, las unidades cognitivamente pertinentes para la actividad de conversión. Algunas de las magnitudes constantes que enunciaron fueron: el radio del cilindro, el área de la base. Las magnitudes variables que mas mencionaron fueron: el tiempo, la altura del nivel del agua, la cantidad de agua; es decir, trasciende la categoría 2-A.

Con respecto a la selección de la unidad de llenado, tres de los estudiantes afirmaron que dependiendo de la selección de ésta, era la altura y el volumen de agua. Esto nos llevó a observar que sus razonamientos se estaban basando en la percepción primaria que permite concluir la premisa: “a unidad de llenado mas grande mayor será la medida para el nivel de agua y viceversa”.

Esto quiere decir que las “imágenes” que se asociaban al nivel de agua logrado, dependían únicamente de la unidad de llenado y aunque esto en cierta medida es verdad, no permite descubrir el invariante fundamental (razón de cambio) que explica el porque de la observación anterior, pero además posibilita la construcción del modelo matemático (función lineal). Ante este hecho se les formularon a los estudiantes preguntas como: “Supongamos que se tiene una unidad de medida cuya capacidad es la mitad de la unidad anterior, ¿cuál será la altura del nivel del agua cuando se han echado dos de estas unidades?” La misma pregunta se les formuló en términos de diferentes unidades.

Las respuestas ofrecidas por los estudiantes permitieron observar que alcanzaron a percibir, que la relación por cociente entre la altura y el volumen del nivel de agua no depende de la unidad seleccionada.

si se echa la mitad del agua se llena entonces hasta la mitad de la altura y si se echa una unidad que es la cuarta parte de la anterior entoces la altura también será la cuarta parte.

$$\left(\frac{\frac{h}{4}}{\frac{V}{4}} = \frac{4h}{4V} = \frac{h}{V}\right) =$$

$$\frac{\frac{h}{2}}{\frac{V}{2}} = \frac{2h}{2V} = \frac{h}{V}$$

GRÁFICO 24

Cuando se les pidió que expresaran la relación entre la altura y el nivel del agua, trece de los quince estudiantes casi de manera instantánea respondieron con la expresión $V = \pi r^2 h$ o con expresiones como "el volumen es el área de la base por la altura" ante este hecho se les pidió que expresaran el sentido que tenia para ellos dicha ecuación, es decir, que expresaran por ejemplo ¿qué permite calcular? ¿Cuáles son las variables que en ella interviene? ¿Cuándo se utiliza esa ecuación? etc. De esta manera se indujo a tomar conciencia, que para la relación que se les pidió debía asociar las magnitudes altura o nivel de agua y volumen de agua existente.

En este estado, los estudiantes empezaron a platear y registrar en una tabla aserciones como: "a medida que el volumen aumenta, la altura del nivel del agua también aumenta", "si tengo determinada cantidad de agua con cierta altura, entonces cuando tenga el doble de dicha cantidad tendremos el doble de la altura”. De esta manera, se posicionaron en un nivel superior a la categoría 2-C. El trabajo continuó con las preguntas ¿cuál será la altura de un litro de agua en este tanque? ¿cómo registrar esta información? Ante dichas preguntas, la mayoría de los estudiantes comenzaron a realizar algunos cálculos y a construir una tabla. Algunas de las producciones de los estudiantes se muestran en la siguiente gráfica.

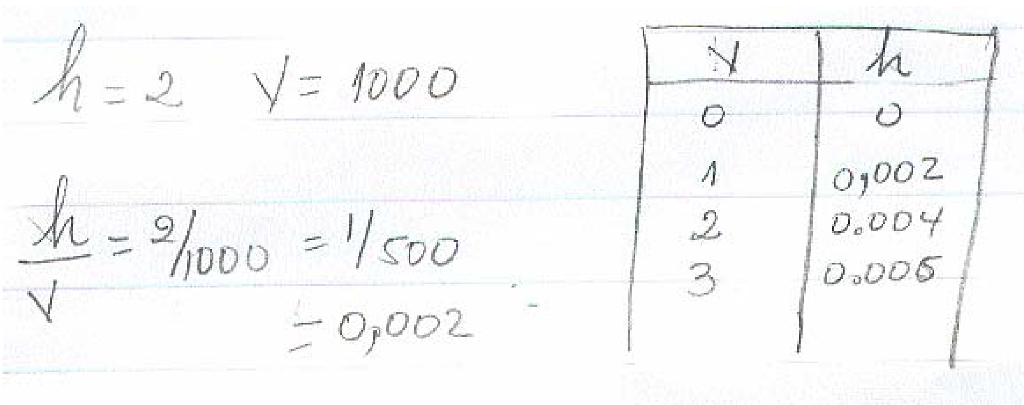


GRÁFICO 25: **PRODUCCIÓN DE UN ESTUDIANTE EN LA SOLUCIÓN DE SITUACIÓN DE INTEVERSIÓN III**

Con base en sus tablas se les preguntó: ¿Cómo cambia la altura cuando cambia el volumen de agua existente en el tanque? En esta pregunta los estudiantes comenzaron a construir expresiones como se muestra en la siguiente gráfica 26:

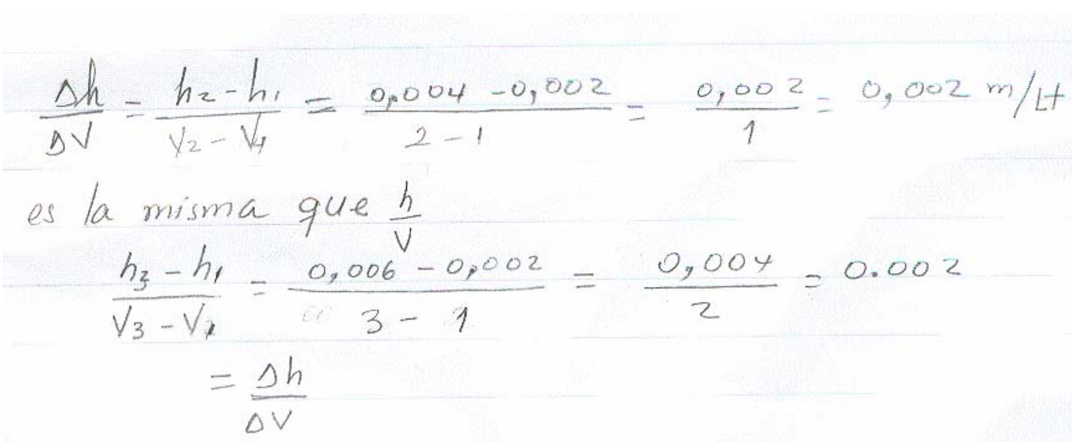


GRÁFICO 26

Cinco estudiantes avanzaron de manera espontánea hasta construir la expresión simbólica $h = \frac{1}{500}v$ como modelo de dicha relación. Lo cual los posiciona en la categoría 1-B.

En la pregunta ¿qué cambios se genera en la relación anterior si el agua ingresa al tanque de manera continua? Los estudiantes manifestaron poca comprensión de la pregunta, este hecho se hizo evidente cuando realizaron cuestionamientos como: ¿cómo así que continua? Ante esta pregunta uno de los investigadores agregó que continua, en el contexto del problema, se puede imaginar como tener una llave o grifo que todo el tiempo está vertiendo agua al tanque, es decir, que el tanque no se está llenando con recipientes o unidades.

Sin embargo, algunos estudiantes respondieron con cierta timidez "*no hay ninguna diferencia"* pero no establecieron argumentos para justificar dicha aserción. No se quiso profundizar mas en esta parte del trabajo ya que nos vimos enfrentados ante el obstáculo de la comprensión del "continuo matemático", lo cual, a pesar de ser muy importante, escapa a nuestro campo de acción.

En el segundo momento de esta situación los estudiantes manifestaron de manera casi inmediata que no había diferencia en la situación excepto en que en este caso ya no comenzaba desde cero sino desde 50. Para profundizar un poco más en sus razonamientos se les pidió que propusieran un argumento para justificar dicha afirmación. Algunos de estos argumentos son:

- Como es el mismo tanque, la razón de cambio debe ser la misma; o sea sigue aumentando 1/500 de metro cada litro.
- Otros estudiantes construyeron algunas tablas similares a la siguiente:

v	a
0	50
1	50.002
2	50,004
3	50,006
4	50,008

Y expresaban: ***v*** el volumen que entra en el tanque y ***a*** es la altura a la que queda el nivel del agua total.

Como es posible observar en la implementación de esta actividad y con base en las producciones de los estudiantes se puede inferir que se generó un avance significativo en la comprensión de la razón de cambio en algunos problemas de variación lineal, así mismo se dotó a los estudiantes de herramientas para reconocer, calcular y representar razones de cambio constantes como elemento fundamental que determina las funciones lineales en problemas de variación y con la cual es posible construir la expresión simbólica $f(x) = ax + b$ como modelo matemático. Sin embargo, no se alcanzó a terminar el efecto de esta propuesta para permitir a los estudiantes una manipulación y uso con un sentido de control de la situación a partir del modelo según las categorías 1-C y 1-D.

4.2. CONCLUSIONES

Nuestra interpretación de los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas, nos ha permitido pensar en una vía diferente para su desarrollo, en particular, de los aspectos relacionados con los elementos propios pensamiento variacional, teniendo como base el concepto de función. Este último, proponemos consolidarlo a través de tres elementos didácticos fundamentales, a saber: la noción de variación base para la construcción del concepto matemático de variable, el proceso de modelación matemática como estrategia didáctica para la construcción matemática de relaciones y variaciones, y los sistemas semióticos de representación como elementos que auxilian este proceso de modelación y permiten objetivar los conceptos matemáticos.

En este sentido, encontramos que el análisis histórico–epistemológico permitió confirmar la idea de que estos análisis son fundamentales en la enseñanza de un concepto matemático, en tanto que se constituyen, en una base importante para la construcción de vías de acceso a la conceptualización por parte de los estudiantes, sin llegar al extremo de que se debe hacer exactamente el mismo recorrido histórico para llegar a la consolidación del concepto matemático.

En el caso particular del concepto de función, se encontró que éste ha evolucionado históricamente hasta alcanzar diferentes niveles según se analice en cuanto a sus representaciones y como modelo de situaciones de variación. Este recorrido es, según nuestra interpretación el siguiente:

1. La **identificación de regularidades** en la observación de situaciones sujetas al cambio: en donde se registra una primera aproximación al concepto de función. En estas situaciones se pudo determinar la presencia de “sentido variacional” que sirvió como herramienta para descubrir y comprender algunas regularidades propias de dichas situaciones.
2. La presencia de las **razones y las proporciones**, las cuales fueron elementos básicos en el análisis cuantitativo de las relaciones presentes en determinadas situaciones de variación, especialmente aquellas relacionadas con la Geometría y la Astronomía.
3. **Descripción gráfica:** en la cual se introducen representaciones gráficas, como las de Oresme, en la búsqueda de formas diferentes de representar las relaciones de variación entre magnitudes.
4. **Expresiones analíticas:** estas representaciones fueron posibles gracias a la introducción del lenguaje algebraico. Tal avance posibilitó representar,

mediante ecuaciones, situaciones tanto matemáticas (del cálculo diferencial y la geometría) como extramatemáticas (problemas de Mecánica, Física y Autonomía).

5. Como **un proceso o aplicación**, en la cual se presentan situaciones donde el valor de una magnitud depende de otra.
6. Como **objeto abstracto:** esta forma de entender la función como una terna de la forma $f = (F, X, Y)$ se proporción a partir de los avances de la teoría de conjuntos y la despojó de cualquier interpretación fenomenológica.

Como puede observarse en este análisis, las situaciones de variación cambio estuvieron presentes en cincos de los seis niveles de desarrollo epistemológico del concepto de función. Ello sugiere que la presencia de este tipo de situaciones es necesaria en la construcción de dicho concepto y por tanto sugiere ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes reconocer, en el concepto de función, un modelo matemático que describe, sistematiza y organiza situaciones en contextos particulares donde intervienen fenómenos de variación y cambio.

Para el caso de los fenómenos que implican variaciones cuya razón de cambio es constante, se puede reconocer que es la función lineal el modelo matemático de los mismos. Por tanto, dicha constante es el eje central en la identificación del concepto como un modelo matemático.

En este sentido, concluimos que para que la escuela pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función lineal con sus estudiantes, desde una perspectiva variacional, requiere tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
- La identificación de la razón de cambio constante.

- El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
- La compresión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.
- La identificación de la proporcionalidad simple directa como un caso particular de función lineal importante en la modelación de variados fenómenos.
- La identificación de las características que identifican una función lineal desde los diferentes registros de representaciones.

Con respecto a la modelación matemática como herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos, consideramos, que de acuerdo a los autores consultados, su implementación involucra los siguientes argumentos favorables para el desarrollo del pensamiento matemático:

Argumento formativo: al desarrollar sobre la base de la solución de problemas como un proceso constructivo, desarrolla actitudes y valores positivos en los estudiantes.

Argumento de la competencia crítica: centró la formación de los estudiantes para la vida ciudadana, en la cual las matemáticas son herramientas que le permite posicionar ante las demandas de la sociedad.

Argumento de la utilidad: permitió a los estudiantes ver la matemática como una herramienta útil en la solución de problemas de diversa naturaleza.

Argumento intrínseco: la modelación y la resolución de problemas son elementos intrínsecos a la actividad matemática.

Argumento de aprendizaje: la aplicación de los conceptos matemáticos garantizó la comprensión de los mismos en tanto que permitía desarrollar y comprender argumentos matemáticos y valorar la propia matemática

Argumento epistemológico: Partir de la “realidad” para llegar, de manera natural a través de un enfoque cognitivo con fundamentación cultural, a la acción pedagógica, actuó de esta forma como una metodología alternativa mas adecuada a las diversas realidades socioculturales.

Sin embargo, se debe destacar que la complejidad del proceso de modelación matemática tanto en su fase de formulación como de validación, obliga a tener en cuenta aspectos tales como:

- Los errores y aciertos en la experimentación y toma de datos.
- La determinación de los tipos de magnitud involucradas en la situación y el papel de las mismas al interior del modelo.
- La observación y cuantificación de las relaciones entre las magnitudes involucradas en la situación.
- La simplificación respecto a factores externos a la situación que la afectan.
- El doble estatus que el objeto matemático juega cuando es tratado como modelo: por un lado propio de las ciencias matemáticas y por otro representante de un fenómeno de variación.
- La generalidad de los resultados matemáticos frente a la particularidad de las situaciones.
- El papel que juegan los sistemas de representación semiótica en la construcción de modelos matemáticos.
- La validez de los resultados obtenidos.

Teniendo en cuenta los anteriores elementos y la poca familiaridad que se tiene en la escuela con respecto al proceso de modelación matemática, se considera que la aproximación al álgebra escolar desde este enfoque, requiere de largos periodos de tiempo y por tanto debe ser una tarea emprendida desde los primeros años de escolaridad.

En este sentido, nuestra propuesta se centro principalmente, en la segunda fase del proceso de modelación (abstracción-formulación), dado que es en esta fase donde se considera está el principal problema a abordar, esto es, sin desconocer la importancia de las demás fases, es en la formulación donde se debe tener el mayor cuidado por las implicaciones tanto didácticas como matemáticas que tiene.

Fue así que para abordar el problema del reconocimiento del concepto de función lineal como modelo matemático se plantearon tres aspectos claves, a saber:

1. La interpretación desde una perspectiva variacional del concepto de función lineal.
2. La determinación de la fase de formulación del proceso de modelación matemática como la actividad cognitiva de conversión que va del registro en lenguaje natural al registro simbólico algebraico.
3. Asumir a los registros gráfico y tabular como auxiliares en la formulación del modelo matemático.

Los aspectos anteriores conjugados a través del elemento: razón de cambio constante entre dos cantidades de magnitud, es decir, $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = m \ con \ m \in \Re$, donde x representa una cantidad de magnitud y $f(x)$ otra que depende de x, permitió ver al concepto de función lineal como modelo matemático de un determinado conjunto de situaciones con dicha constante como elemento común.

Esto, atendiendo a algunas de las problemáticas planteadas por Janvier (1996) en cuanto al cuidado que en la fase de formulación de un modelo matemático se debe tener con respecto a los procesos cognitivos implicados en la comprensión del número[39] y a la dificultad de ver a la función lineal como representante de un conjunto determinado de situaciones, consideramos que era requisito indispensable caracterizar el tipo de enunciados bajos los cuales se puede presentar una relación entre magnitudes cuya razón de cambio es constante. Esta clasificación se realizó de acuerdo a dos criterios: a) que la constante esté implícita o explicita dentro de la situación y b) que la constante esté o no determinada por magnitudes discretas o continuas, en esta última teniendo en cuenta si se está involucrado o no la magnitud tiempo.

De esta manera la razón de cambio constante sirvió:

En primer lugar como elemento fundamental en la interpretación del concepto de función desde el punto de vista variacional. En segundo lugar, elemento que permite reconocer el concepto de función lineal como modelo matemático. Y por último única unidad significante cognitivamente pertinente en la actividad de conversión entre los diferentes registros de representación, en particular en el paso de una situación presentada en el registro del lenguaje natural al registro simbólico algebraico, es decir, fase de formulación del proceso de modelación matemática.

Por último, desde el punto de vista pedagógico, el proceso de modelación apoyó dos grandes actividades implícitas:

- Actividad motivadora: se observó en los estudiantes que este proceso les permitió interesarse más por la necesidad de identificar regularidades. Además les permitió comprender los objetos matemáticos como herramientas que pueden describir fenómenos y no solamente como un

[39] Janvier (1996) plantea que en estos casos el número puede jugar un doble papel: puede entenderse como objeto puramente matemático y/o como la medida de una magnitud.

lenguaje abstracto determinado por unas reglas sintácticas para su manipulación algorítmica.

- Actividad cognitiva: les permitió abordar los problemas de una manera más organizada, coherente y con sentido tanto matemático como contextual. Esto posibilitó que los estudiantes reconocieran en el concepto de función lineal un modelo que describe situaciones en contextos particulares, pero además generalizables a situaciones donde intervienen razones de cambio constantes entre diferentes cantidades de magnitud.

Para la fase de validación y modificación del modelo matemático se requería poner en juego la capacidad de los estudiantes para proponer argumentos que las justificaran; desafortunadamente los estudiantes que participaron en el estudio, presentaban un desarrollo muy exiguo de dichas competencias, lo cual sugiere ampliar nuestra propuesta para potenciar el desarrollo de las competencias argumentativa y propositiva.

En cuanto al sistema de representación gráfico no se logró avanzar en su compresión, dado que los estudiantes tenían un conocimiento muy limitado de este registro como representante de una relación entre variación de magnitudes. Su interpretación iba desde una mirada meramente icónica hasta una visión muy puntual de la relación, es decir, no había una interpretación por intervalos o global de la gráfica, lo cual no permitía reconocer las características variacionales que en este registro se pueden observar. Esto sugiere futuras investigaciones que realicen un reconocimiento de la variación a través del registro gráfico y su conversión a los demás registros.

En síntesis, una buena comprensión del concepto de función implica pensarlo como un modelo matemático de relaciones variacionales, apoyado en los diferentes sistemas semióticos de representación, y por tanto en esto radica la importancia del trabajo aquí presentado.

4.3 RECOMENDACIONES

De acuerdo con las características del pensamiento variacional es posible generar nuevas líneas de trabajo en campos como:

- La actividad de conversión entre el sistema de representación gráfico y los demás sistemas para el concepto de función.

- La noción de variación y el proceso de modelación para construir otras clases de funciones (cuadráticas, cúbicas, exponenciales, trigonométricas, entre otras).

- El diseño de propuestas didácticas para la interpretación de los conceptos del análisis y el cálculo a partir de la noción de variación.

- El camino desde el pensamiento multiplicativo desarrollado en la básica primaria hasta el concepto de función lineal, atravesando por el desarrollo del pensamiento proporcional.

- Es importante explorar la idea de que la función lineal desde un punto de vista variacional no requiere de la diferenciación entre lineales y afines como objetos matemáticos diferentes; ya que estas son variacionalmente equivalentes.

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M. & otros (1981). *La matemática: su contenido, métodos y significados*. Madrid: Alianza Editorial.

Azcarate, C., y Deulofeu,J. (1996). *Funciones y sus gráficas*. Madrid: Síntesis.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Traducción en español en Gomez P. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamerica.

Bassanezi, R., (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Boyer, C. (1959) the History of the calculus and its conceptual developement. New York Driver publications.

Camargo, L. y Guzmán, A. (2005). *Una Didáctica del pensamiento variacional.* Bogotá: Magisterio

Campos, A. (1994). *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*.. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia

Colombia, Ministerio de Educación Nacional (1997).*Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias, análisis y resultados de las pruebas de matemáticas* -TIMSS – Colombia. Bogotá: Díaz, C., Gaviria, J., Torres, L., Guacaneme, E..

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Serie Memorias, Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Bogotá: Vasco, C.

Dhombres, J., Dahan, D., Bcouche, R,. Houzel, C., & Guillermot, M. (1987) *Mathématique au fil des âges*. Paris: Gauthier-Villards.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Traducción Myriam Vega Restrepo.

Duval, R. (2004) *los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Farfán, R. (1997). Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el Cambio. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Florey, F. (1980). *Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones.* Madrid: Dossat

García G; Serrano C; y Espitia L. (1997). El concepto de función en los textos escolares. Conciencias-Universidad pedagógica

Giordano F., Weir M., Fox W. (1997) *A first Course in Mathematical Modeling*. Second Edition. Brooks/Cole Publishing Company.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en Educación Matemática* (I). México.

Instituto colombiano para el fomento de la educación Superior (2003) Matemáticas escolares: aportes para orientar procesos de innovación. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Instituto colombiano para el fomento de la educación Superior (2003). *Evaluar para transformar aporte de las pruebas saber al trabajo en el aula, una mirada a los fundamentos e instrumentos de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Janvier, C (1996) Modeling and the initiation into algebra, En N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lacasta, E. y Pascual, J (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Sìntesis.

Lee, L.. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities, En N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R.& Lehrer R. (2003). *Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers*. En: Mathematical thinking and learning. (5),Nº 2,3 109-129

Mason, J., Grahan, A., Pimm, D., Goward, N. (1999). *Rutas/raíces hacia el álgebra.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Bogotá

Ministerio de Educación Nacional (2003) Estándares curriculares de matemáticas. Bogotá.

Obando, G. y Múnera, J.. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía*. Medellín: (XV), 35, 185-199.

Polya G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Restrepo, P., Franco, R.& Muñoz, L. (1996). Álgebra lineal con aplicaciones. Medellín: Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

Rincón C. (1999) programa bajo palabra Universidad de Antioquia Medellín

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico, Jaen: Universidad de Jaen.

Russell B. (1977). *Los principios de la matemática*, Madrid: Espasa Calpe S.A.

Rutherford, A. (1978) *Mathematical Modelling Techniques*. New York: Dover Publications, INC.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on proceses and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics* 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1992). Un undertanding the notion of funtion. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), the concept of funtion . Aspectsof epistemology and pedagogy (P 25-58). USA: Mathematical Association of American.

Sousa, M. Y Lanner, A. (2003). O lógico-histórico enquanto perspectiva didática da álgebra e sua relação com a formação de professores do ensino fundamental. En: *Educação Matemática Desafios & Perspectivas*. Memórias de la XI Conferência Interamerica de Educação Matemática.Brasil.

Takahashi, A.(2002). *Álgebra Lineal.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia

Vasco, C (2003). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En: Tecnologias compuacionales en el curriculo de matematicas. MEN. Bogotá.

Villa, A. (2001). Identificar funciones polinómicas: Una tarea no siempre realizable, *Ema* (6) 3, *297-302.*

anexos

ANEXO 1: SITUACIONES DE NIVELACIÓN EN PENSAMIENTO PROPORCIONAL

1. La bandera de Colombia

Número de participantes: 1

Para el día de la Independencia la institución requiere la construcción de banderas de Colombia. El coordinador del evento adquirió algunas resmas de papel tamaño carta en cada un de los tres colores necesarios. Con el ánimo de que las banderas queden iguales se establece que deben tener las mismas dimensiones de una hoja tamaño carta. La actividad consiste en seleccionar el tamaño de cada una de las franjas que componen la bandera Colombia, y realizarla.

Actividad N° 1

Describa el proceso a seguir para la construcción de la bandera:

_ _

_ _

_ _

_ _

_ _

Actiad N°2

Reflexiones a cerca de las siguiente situaciones:

- Se dispone de 4 hojas de color amarillo, con las cuáles se desea hacer 8 banderas de Colombia, ¿Cuántas hojas de color azul, y cuántas hojas de color rojo se necesitan?

- Si se tienen 15 hojas de color azul, ¿Cuántas hojas de los demás colores serían necesarios para construir el máximo número de banderas posibles? ¿Cuántas banderas sería posible construir?
- Si se desea construir banderas para cada uno de los estudiantes del grupo, cuántas hojas de papel de cada color son necesarios.

Actividad N°3

Analice cada una de las siguientes situaciones:

- De una hoja de color rojo se utiliza la tercera parte para realizar una bandera de Colombia, ¿Qué cantidad de la hoja de color amarillo, y qué cantidad de la hoja de color azul se necesita? ¿Qué tan grande es esta nueva bandera con respecto a la anterior?
- De una hoja de papel de color amarillo se cortan tres franjas para hacer tres banderas de Colombia. ¿Qué cantidad de papel de color azul y qué cantidad de papel de color rojo se necesita? ¿Qué tan grande es esta nueva bandera con respecto a la anterior?
- Si la franja de color azul se reemplaza por otra idéntica, pero de color amarillo, ¿Qué cantidad de la franja de color rojo se necesitaría?

2. Agua con sabor a…

En la escuela de Juan están preparando jugos de distintos sabores para una fiesta. Para la naranjada se requiere el jugo de 20 naranjas, 10 tazas de agua y 2 tazas de azúcar. Con esta fórmula se obtienen 30 vasos de naranjada.

- Con la información anterior llene la siguiente tabla

Vasos de naranjada	Cantidad de Naranjas	Tazas de azúcar	Tazas de agua
4			
	25		
30			
40			

Paula y sus compañeros preparan jugo de tamarindo para los raspados de la kermés. En una botella pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de pulpa de tamarindo. En otra botella pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de la misma pulpa. En otra botella pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas del concentrado de tamarindo. Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la segunda botella. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la tercera botella. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Se tienen 56 limones para hacer dos ollas de agua fresca. A una le caben 4 litros de agua, a la otra le caben 3.

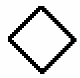
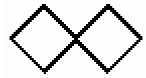
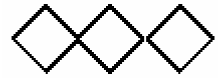
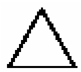
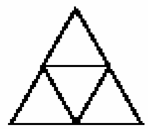
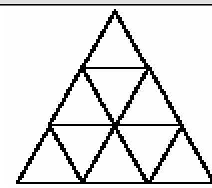
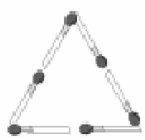
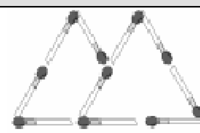
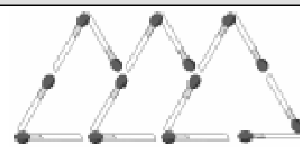
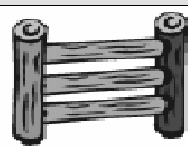
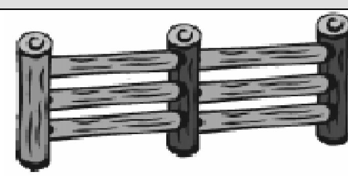
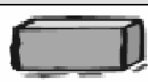
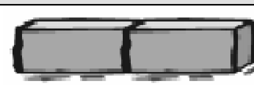
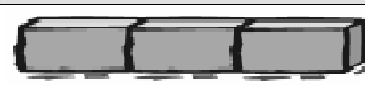
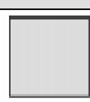
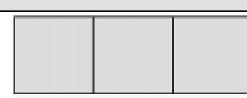
- ¿Cuántos limones deberán ponerse en cada olla para que toda el agua tenga el mismo sabor?

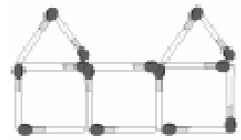
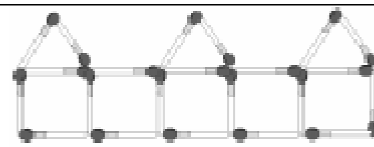
3. Siguiendo patrones

Número de participantes: 2

Qué hacer:

Observa las siguientes figuras y analiza cómo van cambiando.

Posición de la figura / Patrón #	1	2	3	4	5
1				…	…
2				…	…
3				…	
4					
5					
6					

7					

- Elabora una tabla donde recojan la información de los cambios de cada patrón.

Posición de la figura / Patrón #	1	2	3	4	5	6	7
1	1rombo	2rombos	3rombos				
2	1triángulo	4triángulos					
3	6 fósforos	10 fósforos	14 fósforos				
4		5 postes		13 postes			
5		14 líneas en los bloques	19 líneas en los bloques		29 líneas en los bloques		
6			10 líneas en los				

			cuadrados				
7						46 fósforos	

- Describe en palabras la regularidad que tiene cada uno de los patrones.

- Escribe en tu cuaderno, de la forma más concreta posible, cómo hallar la figura de la posición 4, 6, 9, 15, 20, 50 y 100 de cada patrón.

- Discute con tu compañero una forma general para encontrar la figura correspondiente a cualquier posición de cada patrón. Explícale a otro equipo la forma general que encontraron de tal manera que, a partir de tu explicación ellos reconstruyan el patrón sin que tu le ayudes.

Desarrolla un método para encontrar en cada patrón las siguientes propiedades:

Para el patrón 1:

- El perímetro para cualquier figura.

Para el patrón 2:

- El perímetro para cualquier figura.

Para el patrón 3:

- ¿Cómo obtienes el número de fósforos a partir del número de triángulos?.

Para el patrón 4:

- ¿Cómo obtienes el número de travesaños a partir del número de postes.?
- ¿Cómo obtienes el número total de palos a partir del número total de postes?

En cada caso explica y justifica el método desarrollado usando palabras, diagramas o expresiones con letras.