CONCEPTUALIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO EN NIÑOS DE SEGUNDO Y TERCERO DE EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DEL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN

OLGA EMILIA BOTERO HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

MEDELLÍN

JULIO DE 2006

CONCEPTUALIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO EN NIÑOS DE SEGUNDO Y TERCERO DE EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DEL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN

OLGA EMILIA BOTERO HERNÁNDEZ

TESIS

ASESOR: GILBERTO OBANDO ZAPATA

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
JULIO DE 2006

NOTA DE APROBACIÓN:

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

El esfuerzo del Ministerio de Educación Nacional en pro de mejorar la calidad de la educación en Colombia conduce a que en cada institución sea necesario replantear los elementos que sustentan el quehacer matemático en la escuela. Estos nuevos planteamientos parten de aspectos teóricos y metodológicos orientados a lograr en la población estudiantil avances significativos en sus procesos de conceptualización sobre las matemáticas.

En general, el proceso de aprendizaje de la multiplicación se lleva a cabo en el grado segundo de educación básica, a partir de la enseñanza y aprendizaje de las tablas de multiplicar y de la correspondencia de ésta con la adición repetida de un mismo sumando. Sin embargo, los textos escolares, y los resultados de evaluaciones externas como las pruebas SABER, ponen de manifiesto que en dicha enseñanza no se tienen en cuenta los lineamientos aportados por la didáctica de las matemáticas y por el Ministerio de Educación en sus documentos rectores.

Esta tesis aporta elementos conceptuales y metodológicos para la conceptualización de las estructuras multiplicativas a partir de situaciones problema que permitan al estudiante interactuar con la variación simultánea de cantidades, tomando los conteos múltiples como puente que facilita el tránsito desde un pensamiento aditivo, hacia una multiplicativo.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años en Colombia el Ministerio de Educación Nacional, con base en los cambios que se han dado en las concepciones sobre las matemáticas y sobre los procesos de enseñanza – aprendizaje de las mismas, ha venido realizando esfuerzos significativos para cualificar la educación en el país. Prueba de ello es la publicación de documentos como los lineamientos curriculares de matemáticas y los estándares básicos de matemáticas, en los que se plantea la necesidad de una enseñanza matemática que favorezca procesos de interacción social tendientes a desarrollar en los alumnos habilidades para emplear la matemática con sentido en las diversas acciones de su vida diaria.

Específicamente en lo relacionado con el pensamiento numérico surge la necesidad de indagar por los procesos de conceptualización de las estructuras multiplicativas, debido a que son un eje fundamental para la adquisición de numerosos conceptos, tales como razón, proporcionalidad y función, conceptos estos que están presentes en numerosas situaciones de la vida cotidiana debido a que gran parte de la información que recibimos de los medios de comunicación viene presentada en términos de porcentajes, razones y proporciones, para lo cual es fundamental una adecuada y completa conceptualización de las estructuras multiplicativas. Es por esto que el aprendizaje de las estructuras multiplicativas constituye un campo interesante de investigación, pues si bien su conceptualización es de suma importancia para el desarrollo del pensamiento matemático, se hace necesario determinar cuáles son los procesos involucrados en su conceptualización y ofrecer estrategias de intervención adecuadas a dicho proceso debido a que aún en un elevado número de instituciones no se logra realizar las transformaciones curriculares y metodológicas suficientes que den cuenta de la apropiación de los planteamientos realizados por el Ministerio de Educación.

El presente trabajo es el resultado de la investigación sobre la conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercer grados de básica primaria, llevada a cabo desde febrero del año 2004 hasta noviembre de 2005, con estudiantes del grupo segundo B del Colegio Calasanz de Medellín, que luego pasaron al grado tercero B, cuyas edades oscilan entre los 8 y 9 años, quienes fueron involucrados en la realización de situaciones problema encaminadas a cualificar los procesos de construcción del pensamiento multiplicativo.

La investigación se centró, en particular, en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo, abordando de manera especial situaciones que permitieran interpretar y representar variaciones conjuntas de dos o más espacios de medida.

Lo anterior permitió formular la siguiente hipótesis de trabajo:

El estudio de la proporcionalidad puede ser una estrategia didáctica adecuada para acceder a la conceptualización de las estructuras multiplicativas.

Las anteriores consideraciones permiten formular el problema de investigación en los siguientes términos: "***¿Cuáles son los elementos teóricos y las condiciones didácticas apropiadas para favorecer en niños de 2º y 3º de básica primaria, los procesos de conceptualización de las estructuras multiplicativas a partir de situaciones de proporcionalidad?".***

Se toma el estudio de las situaciones de proporcionalidad directa como constructo base para la estructuración de la investigación por las siguientes razones:

a) Desde las situaciones de proporcionalidad se posibilita la construcción de comprensiones relativas a covariaciones simultáneas de magnitudes.

b) A partir de estas situaciones se lleva al alumno a reconocer la existencia de dos espacios de medida.

c) La capacidad que posea el alumno para comprender que cambios regulares en una magnitud, determinan cambios igualmente regulares en la otra, es fundamental para conceptualizar procesos de covariación.

La investigación se realizó con una metodología de investigación didáctica resultado de enfoques teóricos propios de la didáctica de las matemáticas, influenciados por los trabajos de investigadores franceses como Guy Brousseau, Gerard Vergnaud, Régine Douady y Michèle Artigue, entre otros. Las categorías de análisis didáctico, como la teoría de situaciones didácticas y campo conceptual, constituyeron, junto con elementos teóricos tomados de la psicología cognitiva, los ejes orientadores de la investigación.

1 JUSTIFICACIÓN

1.1 MARCO LEGAL

La educación matemática en Colombia ha estado directamente influenciada por las tendencias de la comunidad internacional. Desde los años 60 se introdujo la llamada *Matemática Moderna*, ante la necesidad del mundo occidental, en particular de los Estados Unidos, de preparar a sus científicos de forma que pudieran alcanzar y superar los logros soviéticos. Esta Matemática Moderna se fundamentó en la enseñanza de la teoría de conjuntos y de la lógica formal, hizo énfasis en el rigor y en las terminologías abstractas de las matemáticas y dejó de lado las actividades y los problemas prácticos. Para esto, en el país, se promulgaron los decretos 1710 de 1963 y 080 de 1974, los cuales planteaban los planes de primaria y secundaria diseñados a partir de objetivos generales y objetivos específicos, encaminados a la comprensión de las estructuras formales de las matemáticas según las tendencias de la época.

Hacia finales de los años 70 y en la década de los 80, surgió en el país una corriente que pretendía retomar, para la enseñanza de las matemáticas, las cuatro operaciones básicas, con enteros, fraccionarios y decimales, esto es, volver a lo básico, debido a que los niños a pesar de emplear lenguajes formales de la teoría de conjuntos, presentaban dificultades para realizar operaciones sencillas con los números. En este sentido, a partir del año 1975 se inició un plan para mejorar la educación en forma cualitativa, que incluía renovar los programas y capacitar a los maestros.

Durante el año 1978 se planteó la reestructuración del currículo en el área de matemáticas a partir del enfoque de *Sistemas,* el cual consistía en abordar cada una de las disciplinas que componen las matemáticas desde una perspectiva que las estudiara como entidades organizadas con sus elementos, operaciones y relaciones características y no como conjuntos. Además, este nuevo enfoque planteaba una clara distinción entre los sistemas concretos, los sistemas conceptuales y los sistemas simbólicos, y pretendía que se partiera de la exploración de los sistemas concretos para luego pasar a la construcción de los sistemas conceptuales y, por último, culminar con el desarrollo de las estructuras simbólicas correspondientes a cada eje temático trabajado.

En el año 1994 se promulgó la Ley General de Educación, llamada también Ley 115, en la cual se retoma el enfoque de sistemas planteado por la *Renovación Curricular.* Dicha ley, en su artículo 21, literal *e*, plantea: *Los cinco (5) primeros grados de la educación básica que constituyen el ciclo de primaria, tendrán como objetivos específicos los siguientes: … el desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos.* Y en el artículo 22, literal *c*: *Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de secundaria. Los cuatro (4) grados subsiguientes de la educación básica que constituyen el ciclo de secundaria, tendrán como objetivos específicos los siguientes: … El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana.*[1]

Dichos planteamientos pretendían superar las dificultades generadas por el enfoque de conjuntos y las que supondría retornar a la enseñanza únicamente de

[1] Ley General de Educación. Ministerio de Educación Nacional. 1994.

las cuatro operaciones básicas, seleccionando para esto los aspectos positivos de cada una de ellas.

Luego de la promulgación de esta Ley, el Ministerio de Educación Nacional planteó en el año 1998 los Lineamientos Curriculares, los cuales son criterios que orientan a los docentes e instituciones en aspectos relacionados con contenidos, metodologías y estrategias de enseñanza, encaminados a desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para interactuar con los retos de la sociedad actual, a partir de procesos de conceptualización y comprensión.

En general, los lineamientos curriculares introducen una visión amplia del sentido de las matemáticas en la escuela, y por ende, resignifican el valor del conocimiento matemático en la formación social del individuo. En particular, para el caso de lo relativo al aprendizaje de la multiplicación, se muestra como ésta es el resultado de un proceso complejo que tiene como punto de partida la adición, pero que no se agota allí.

1.2 PROPUESTA DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL EN CUANTO A LA ENSEÑANZA DEL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO.

1.2.1 Desde los lineamientos curriculares.

En el año 1998 el Ministerio de Educación Nacional publicó los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas, con el propósito de orientar, posibilitar y promover los procesos curriculares de las instituciones educativas. A través de estos lineamientos se plantea la necesidad de reconceptualizar la educación matemática partiendo de la conexión existente entre el conocimiento matemático y la vida social de los hombres, quienes utilizan dicho conocimiento para tomar decisiones que afectan la vida en comunidad.

Ante esta nueva visión del conocimiento matemático en la escuela, -como tarea social que representa experiencias concretas de personas que interactúan en contextos particulares- se destaca la importancia que tienen para la didáctica de las matemáticas aspectos como el saber matemático y los procesos de transposición didáctica, el trabajo del matemático, del maestro y del alumno.

Debido a que el matemático antes de exponer a la comunidad científica sus hallazgos debe suprimir los rastros del trabajo empírico e inductivo que ha realizado, de los problemas por los que cruzó y que lo llevaron a dichos descubrimientos; lo que en términos generales implica descontextualizar y despersonalizar el conocimiento matemático, entonces se hace necesario que la comunidad encargada de la didáctica y de los currículos realice a dichos conceptos el proceso inverso para poder ponerlos en el aula de clase. Esto es, se hace necesario que los conceptos matemáticos vivan una transposición didáctica que los deje aptos para los contextos escolares. En este proceso, es el maestro el responsable de recontextualizarlos y repersonalizarlos, poniendo así los conceptos en relación con situaciones específicas que permitan al estudiante interactuar con el saber objeto de estudio, con los compañeros y, a partir de allí, generar su propia actividad científica que lo lleve a la construcción de los conceptos propios del saber matemático.

Se plantean en los Lineamientos Curriculares los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto como elementos fundamentales para el diseño del currículo.

Los procesos generales de pensamiento inciden significativamente en el desarrollo de la capacidad de aprender a aprender por parte de los estudiantes y deben ser tenidos en cuenta en los programas curriculares, ya que se relacionan con el aprendizaje en general y se encuentran presentes en toda actividad matemática. Estos procesos corresponden al desarrollo de la capacidad para plantear y resolver problemas, para comunicarse, para modelar situaciones y para llevar a cabo procesos de razonamiento, entre otros.

Por su parte, los *conocimientos básicos* tienen que ver con los contenidos de los diferentes sistemas matemáticos y sus correspondientes pensamientos. Éstos, en su conjunto favorecen el conocimiento matemático en general y se relacionan directamente con la capacidad para razonar en cada uno de los ámbitos que constituyen las matemáticas. Los lineamientos curriculares, con relación a los conocimientos básicos plantean cinco ejes fundamentales para la construcción completa del pensamiento matemático: el primero de ellos es el pensamiento numérico, entendido como la capacidad para comprender el significado de los números, operar con ellos, realizar aproximaciones y estimaciones, y en general, emplearlos para realizar juicios matemáticos y tomar decisiones. Se contemplan además los pensamientos espacial[2], métrico[3], aleatorio[4] y variacional[5].

Por último el *contexto*, el cual se relaciona con los ambientes que dan sentido a las matemáticas que el alumno aprende y posibilitan la construcción de aprendizajes más eficaces y duraderos. Los contextos son en esencia conjuntos de situaciones que, en tanto plantean problemas a los estudiantes, les permiten diversos tipos de interacciones a través de las cuales emerge el conocimiento matemático como un proceso constructivo.

---

[2] Relacionado con los procesos cognitivos que se encargan de las construcciones y las representaciones mentales acerca de los objetos en el espacio y de las relaciones que se establecen entre ellos.

[3] El cual involucra la construcción de la magnitud y la comprensión de los procesos involucrados en la actividad de medir tales como el establecimiento de unidades patrón y la asignación numérica, partiendo siempre de la importancia del trasfondo social de los procesos de medición.

[4] El cual se refiere a la interpretación y análisis de datos estadísticos con el propósito de favorecer la toma de decisiones con responsabilidad.

[5] Relacionado con el análisis y la modelización matemática de situaciones de la vida práctica, de las ciencias y de las matemáticas mismas en las que la variación desempeñe un papel fundamental.

Para lograr contextos con las características propuestas, se proponen como herramienta didáctica las *situaciones problema*, las cuales son consideradas como un espacio de conceptualización y generalización y pueden interpretarse como:

> *(…) "un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos". (Obando y Múnera, 2003, Pág. 184)*

Tradicionalmente el aprendizaje de las matemáticas se plantea como el aprendizaje de conceptos, operaciones y propiedades que el alumno debe emplear para resolver problemas de aplicación propuestos al final de una unidad temática. Las situaciones problemas permiten que el estudiante construya los conceptos a través de la interacción con el contexto y los problemas que surgen en él, ofreciéndole así, por una parte, la posibilidad de recrear la actividad científica del matemático, y por otra, llevarlo a alcanzar esquemas generales del pensamiento.

> *"Así, para poder dar cuenta de la competencia de un estudiante se ve como necesario que al enfrentarse a una situación problema, logre matematizarla modelándola a partir de las diferentes relaciones que establezca entre los conceptos que le subyacen".(Pedraza y Rodríguez, 2001, Pág. 24).*

Estos elementos plantean de fondo la necesidad de desarrollar un currículo que conduzca a una sólida conceptualización y generalización de los conceptos matemáticos, y a desarrollar la capacidad para utilizarlos en diferentes contextos dentro y fuera de la escuela, atendiendo de forma especial al diseño de las situaciones que dotan de sentido la adquisición de dichos conceptos.

Pensamiento numérico

Específicamente se considera en los lineamientos curriculares el pensamiento numérico como

> "*Un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y las destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitudes, etc." (MEN, 1998, Pág. 43).*

Se plantean en los Lineamientos curriculares tres elementos que favorecen el desarrollo de dicho pensamiento numérico: en primera instancia se tiene la comprensión de los números y la numeración, que involucra la utilización de los números a partir de sus diversos significados: para contar, para medir, como cardinal, como secuencia verbal, como código, y para ordenar colecciones; todo lo anterior, unido a un empleo significativo del sistema de numeración decimal posicional. En segunda instancia se encuentra el cálculo con números y las aplicaciones de éstos para resolver problemas de la vida diaria empleando las herramientas de cálculo de forma eficaz y privilegiando el desarrollo del sentido de aproximación y estimación. Por último se encuentra la comprensión del concepto de cada una de las operaciones, que implica reconocer su significado, los modelos de uso más frecuente, sus propiedades matemáticas y las relaciones entre las diversas operaciones.

Con relación a la multiplicación se plantea que su conceptualización puede ser más compleja que la de la adición y la sustracción, puesto que en estas operaciones se establecen relaciones entre dos conjuntos similares, mientras que en la multiplicación y en la división las relaciones se establecen entre cada uno de los elementos de un conjunto con subconjuntos equivalentes de otro conjunto. Es por esto que las operaciones en cuestión no se conciben de forma exclusiva como una adición abreviada de sumandos iguales, ni como una repartición simple, sino que por el contrario, se plantean para ellas varios modelos en los cuales se destaca el carácter discreto de las magnitudes involucradas y la relación de covariación que se establece entre las variables.

Modelos para las operaciones correspondientes al pensamiento multiplicativo.

Para la multiplicación:

- **Factor multiplicante**: correspondiente a problemas de la forma *Juan tiene 2 canicas y Pedro tiene 3 veces más canicas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?* En estos problemas uno de los factores corresponde a un escalar que indica la cantidad de veces que una cantidad es mayor que otra. De esta forma, en el problema planteado, el 3 indica que la cantidad de canicas de Pedro corresponde a tres veces la cantidad de canicas de Juan, y por lo tanto, al variar el número de canicas de Juan, varía también la cantidad de canicas de Pedro.

- **Adición repetida**: correspondientes a problemas de la forma *cada día Pedro recibe 2 canicas, durante 3 días. ¿Cuántas canicas tiene al final de los 3 días?*. En esta clase de problemas existen dos magnitudes en las cuales a cada uno de los elementos de un primer conjunto, en este caso los 3 días, le corresponde un subconjunto de otro, como son las 2 canicas. La diferencia fundamental entre este tipo de situaciones y la anterior, es que ahora no se trata de la comparación de dos conjuntos, para determinar el tamaño relativo de uno con respecto al otro, sino de una acumulación sucesiva (sumas de sumandos iguales) de una cantidad como función del desarrollo de un proceso determinado.

- **Razón**: correspondientes a problemas de la forma *cada empaque trae 2 canicas. Si son 3 empaques, ¿cuántas canicas hay en total?.* En esta categoría se da una razón que permite relacionar de forma lineal las dos magnitudes de carácter discreto, que están presentes en el problema. En el ejemplo, de 1 a 2, quiere decir que las canicas están distribuidas a razón de 2 por cada empaque, por lo tanto se establece una relación de covariación entre las dos variables consideradas, las canicas y los empaques.

- **Producto cartesiano**: correspondientes a problemas de la forma *en una fábrica se producen canicas en 2 tamaños diferentes y de 3 colores diferentes. ¿Cuántas clases de canicas se pueden fabricar?*. En estos problemas se presentan dos magnitudes que al ser combinadas (multiplicativa) producen una magnitud diferente de las otras dos, pero compuesta por cada una de ellas. Así en la fábrica se producen canicas con características específicas que pueden ser clasificadas de acuerdo a dos categorías diferentes: el tamaño y el color.

Para la división:

- **Repartir**: problemas de la forma *Juan tiene 6 carritos y quiere guardarlos en 2 cajas. ¿Cuántos van en cada caja?.* En este tipo de problemas, se parte del conocimiento del tamaño total de la colección y la cantidad de grupos de igual tamaño que se debe formar con dicha colección, y por lo tanto, se busca determinar el tamaño de cada grupo. En este sentido, se trata de repartir una determinada colección en **N** grupos iguales.

- **Agrupamiento o sustracción repetida**: problemas de la forma *Juan tiene 6 carritos y quiere organizarlos de a 2 en cada estante. ¿Cuántos estantes ocupa la colección completa?*. En este caso, se plantea la cantidad de elementos que deben ir en cada grupo y se pregunta por el número de grupos resultantes, es decir, se pregunta por la cantidad de unidades (grupos) que se pueden formar con la cantidad total de carritos. Este tipo de situaciones implica extraer repetidamente una misma cantidad de una colección de tamaño **N.**

Como se verá más adelante, estos modelos que se presentan en los lineamientos curriculares se corresponden a las categorías multiplicativas planteadas por Vergnaud.

La construcción de estas cuatro operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) va de la mano del desarrollo de las estructuras aditivas y multiplicativas del pensamiento.

1.2.2 Desde los estándares curriculares.

Luego del planteamiento en 1998 de los lineamientos curriculares, y teniendo vigentes los indicadores de logros propuestos en la resolución 2343 de 1996, se genera la necesidad en el país de brindar nuevas orientaciones al trabajo concreto de educadores e instituciones en el campo de diseño curricular del área de matemáticas. Como respuesta a esta necesidad se publican los estándares básicos de matemáticas en año 2003, los cuales brindan elementos para el diseño de los Proyectos Educativos Institucionales y se constituyen como referentes para los procesos de evaluación nacionales, departamentales e institucionales.

En dicho documento se observa, con relación al pensamiento numérico y los sistemas numéricos, coherencia con lo planteado en los lineamientos sobre la necesidad de comprender los números y la numeración, comprender el concepto de las operaciones y los cálculos con números y aplicaciones de números. En este sentido, se apunta a la construcción de sentidos y significados relativos a cada uno de los sistemas numéricos, sus relaciones y sus operaciones.

Las directrices planteadas en los Lineamientos Curriculares se ven enriquecidas en los Estándares Básicos por el énfasis que se hace en el estudio de la multiplicación y la división desde una perspectiva en la que la multiplicación se concibe en relación directa con el aprendizaje de la proporcionalidad, y no como la abreviatura de una adición repetida de sumandos iguales.

Las estructuras multiplicativas hacen referencia al conjunto de situaciones que pueden ser resueltas empleando divisiones y/o multiplicaciones y es necesario abordarlas desde la perspectiva de la proporcionalidad. Así, no se considera la multiplicación como una relación exclusiva de tres términos, sino que se plantea de forma explícita la existencia del cuarto término, en tanto se involucran variaciones simultáneas y comparaciones múltiples. Estas variaciones múltiples, si se establecen a través de un modelo lineal entre dos variables, determinan una proporcionalidad simple directa. Por tanto es posible afirmar que el desarrollo de la multiplicación, y en general el de la aritmética, tienen en la proporcionalidad un punto central del proceso, y por esta vía, se constituye una puerta de entrada al pensamiento variacional.

El siguiente esquema[6] sintetiza las relaciones que se establecen al interior de las estructuras multiplicativas. Se observa en él como a partir del estudio de la variación directa pueden abordarse tanto la multiplicación y la división como la proporcionalidad directa, además de la diferenciación que se establece entre la división de carácter partitivo y la de carácter cuotitivo. A nivel del producto cartesiano se explicitan las diferentes operaciones que surgen según se trabaje con magnitudes extensivas o magnitudes intensivas.

[6] POSADA, Maria Eugenia y otros. (2005).Interpretación e implementación de los Estándares básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia. Medellín: Digital Express.

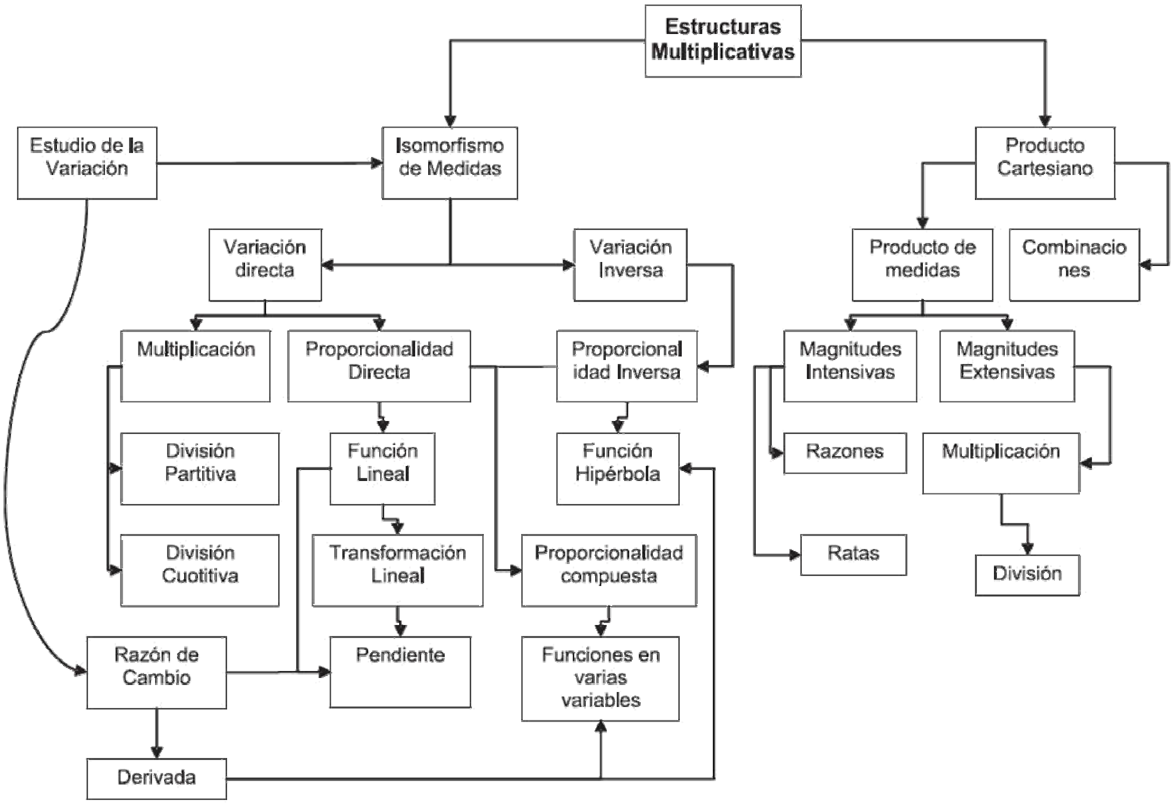


Ilustración 1: Esquema de las Estructuras Multiplicativas

Si bien estas estructuras multiplicativas se incluyen en el pensamiento numérico debido al carácter aritmético de la multiplicación y la división, es importante identificar su relación con el pensamiento variacional y el pensamiento métrico.

El pensamiento variacional analiza matemáticamente los procesos de variación y de cambio, lo cual permite afirmar que involucrar situaciones de cambio desde los primeros años de escolaridad abre un camino fructífero para el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático relacionados con el álgebra, las funciones y el cálculo.

El pensamiento métrico implica la capacidad de una persona para comprender las magnitudes en general y la forma de cuantificarlas a través de la medida, entendida esta como la asignación numérica que resulta de comparar o determinar el número de veces que otra magnitud del mismo género, tomada como unidad de medida, cabe en la magnitud a medir. Es por esto que el tratamiento que se realiza sobre las diferentes magnitudes y su variación en determinados contextos favorece el desarrollo del pensamiento métrico.

La estructura conceptual anteriormente descrita se evidencia en los estándares en enunciados como los siguientes:

Con relación al pensamiento numérico:

- Resolver y formular problemas en situaciones de variación proporcional.
- Describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes.
- Reconocer las relaciones y propiedades de los números (ser par, ser impar, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.).
- Usar diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Con relación al pensamiento métrico:

- Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas.

Y por último con respecto al pensamiento variacional:

- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráfica.

Como puede observarse, en los estándares presentados se hace referencia a las situaciones multiplicativas, específicamente en lo concerniente a situaciones de variación, de proporcionalidad y de cambio, teniendo en cuenta las relaciones entre los números y las razones que pueden establecerse entre ellos. Es así como el énfasis de lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional está en el tipo de situaciones que deben ser capaces los alumnos de formular y resolver, enfatizando en la necesidad de potencializar diversas estrategias de cálculo y el reconocimiento de las relaciones entre los números. En este sentido se dejan de lado contenidos que tradicionalmente se han establecido como prioridad, tales como el aprendizaje de los algoritmos y la resolución de problemas correspondientes a cada una de las operaciones de forma independiente. Se desprende de esto la necesidad de replantear la orientación en la enseñanza del pensamiento multiplicativo, teniendo en cuenta los diferentes modelos para cada una de las operaciones involucradas, tal como lo plantea Vergnaud[8] y que se observan en el esquema correspondiente a las estructuras multiplicativas presentado anteriormente.

1.3 DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN LOS ASPECTOS RELACIONADOS CON EL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO.

1.3.1 Pruebas TIMSS:

Un aspecto importante diagnóstico lo constituyen los resultados de las pruebas TIMSS. Las cuales corresponden al Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas, en el cual participaron 51 países, incluido Colombia, entre los años

[8] Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas.

1992 – 1996 y en el que se evaluó el currículo, desde lo propuesto[9], lo desarrollado[10] y lo logrado efectivamente[11], para los grados 7º y 8º.

Con relación al currículo logrado, se diseñó una prueba que comprendía tres tipos de preguntas para evaluar contenidos y habilidades matemáticas: preguntas cerradas con 4 ó 5 opciones de respuesta para elegir la correcta, preguntas abiertas de respuesta corta, en las que es suficiente con que el alumno escriba la respuesta y preguntas de respuesta extendida en las que el alumno tiene que explicar en detalle el proceso seguido para llegar a la respuesta. Los tiempos estimados de solución para cada clase de preguntas fue de 1, 2 y 5 minutos respectivamente.

Específicamente con relación a la proporcionalidad se plantearon 12 preguntas, 8 de opción múltiple, dos de respuesta abierta corta y dos de respuesta abierta larga, de las cuales cinco se referían a los conceptos de razón y proporción y 7 a la solución de problemas de proporción simple. Aunque estas preguntas pueden catalogarse como pertenecientes a las fracciones o al sentido numérico se agruparon separadamente ya que están enfocadas directamente al pensamiento proporcional. Se evalúa el concepto de proporcionalidad indagando acerca de los conceptos de razón y proporción, y la capacidad para resolver problemas en los que se pone en juego la proporcionalidad directa entre magnitudes o entre números, la solución de ecuaciones que involucran proporciones, la determinación de la cuarta proporcional y la conversión de unidades.

---

[9] Corresponde a los programas que de manera oficial reglamentan la normativa educativa y los desarrollos curriculares.

[10] Comprende lo que los profesores enseñan a los alumnos al desarrollar en el aula el currículo propuesto.

[11] Lo que aprenden realmente los alumnos.

A nivel de resultados se encontró que los estudiantes colombianos presentan niveles de desempeño significativamente bajos en esta área del conocimiento y que a su vez, a nivel general este tópico presenta el rendimiento más bajo en comparación con las demás áreas.

> "*Se refleja un nivel muy bajo en el aprendizaje de la proporcionalidad por parte de los estudiantes colombianos". (Díaz, 1997. Pág. 133)*[12]

> *"A nivel nacional más del 75% de los estudiantes responden de manera muy deficiente a la mayoría de las preguntas que involucran la proporcionalidad, mientras que sólo el 25% de las preguntas del área temática presenta niveles bajos de aprendizaje a nivel internacional"…*

En síntesis, la enseñanza de la proporcionalidad se centra en procesos algorítmicos (fundamentalmente la regla de tres) sin que sean explícitas las relaciones de la proporcionalidad con la covariación entre magnitudes, las representaciones en tablas, gráficas cartesianas y ecuaciones. Esto hace que no se logren niveles de significación en los alumnos en lo relativo a la solución de problemas y la aplicación de estos conceptos para el análisis de situaciones problémicas. Además hay que agregar que en nuestro currículo desarrollado, el trabajo sobre las estructuras multiplicativas, no entra a problematizar la multiplicación como relación cuaternaria, y por ende queda totalmente desligada de la proporcionalidad. Es así como el aprendizaje de lo multiplicativo debe estar unido al estudio de procesos de covariación entre magnitudes, y en relación con distintos tipos de representación, contextualizado a través de diversas situaciones problema.

[12] DÍAZ, C. y otros. (1997). Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias. Análisis y resultados prueba de matemáticas. Santafé de Bogotá: MEN

1.3.2 Pruebas SABER:

En el año 2002 la Secretaría de Educación de Antioquia, conforme al Proyecto para el Mejoramiento de la Calidad de la Educación Básica en el Departamento de Antioquia, realizó las pruebas SABER[13] en las áreas de matemáticas, lenguaje, ciencias naturales y ciencias sociales con carácter censal, orientadas a evaluar la totalidad de los estudiantes de los grados 3, 5, 7 y 9, en todas las instituciones educativas del Departamento.

Estas pruebas evaluaron el saber hacer en matemáticas a través de la formulación y resolución de problemas. Es decir, se evaluó la competencia matemática a través de la solución de problemas. En este sentido la prueba indaga por la utilización, la aplicación y la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos; la comprensión y la matematización de situaciones y las habilidades para leer, traducir y escribir matemáticas.

Específicamente en la prueba realizada de matemáticas para el grado 3º, se evaluaron los tópicos de:

- *Aritmética, los números y cómo se organizan*: enfatiza en el uso de los números naturales, su organización y nociones sobre la estructura aditiva, multiplicativa, valor posicional, relaciones de orden en números naturales y patrones numéricos.

[13] En el año 1998 se aplicaron las pruebas SABER en las áreas de matemáticas, lenguaje, ciencias naturales y ciencias sociales con carácter muestral a estudiantes de los grados 3, 5, 7 y 9 de algunas instituciones del Departamento. Las pruebas de matemáticas, centradas en los tópicos de aritmética, geometría, estadística y álgebra arrojaron en general, dificultades en la comprensión del sentido numérico en los naturales, a partir de las operaciones básicas correspondientes a la estructura aditiva y a la multiplicativa, y su caracterización en cuanto al valor posicional.

- *Geometría y medición, lo espacial y la geometría, las medidas*: reconocimiento de formas básicas y uso de la medida (unidad patrón convencional y no convencional)

- *Probabilidad y estadística, la organización y clasificación de datos*: reconocer datos en diferentes formas de representación, usuales en estadística.

La prueba contempló seis preguntas relacionadas con aritmética, correspondientes a tres niveles de dificultad denominados B, C y D, como se muestra en la tabla 1. El nivel B contempla problemas rutinarios en los que la información necesaria para resolverlos se encuentra disponible en el mismo orden en que debe ser utilizada, hacen referencia a situaciones de carácter concreto y para resolverlos sólo se necesita realizar una operación. El nivel C consiste en problemas no rutinarios simples, es decir, que toda la información pertinente para resolverlos se encuentra presente en el enunciado, pero es necesario organizarla para realizar la operación que lo resuelve. El nivel D consta de problemas en los que los datos necesarios para resolverlos no están explícitos en el enunciado y se hace necesario realizar otros pasos para poder hallarlos y resolverlos, además de estar planteados en situaciones hipotéticas donde la resolución de los mismos requiere combinar diversas estrategias.
Dos de las preguntas corresponden al nivel B, una al nivel C y tres al nivel D. (ANEXO 1).

Para cada uno de estos tópicos se plantean las tres clases de preguntas mencionadas previamente, encontrándose que el área de más bajo desempeño es la de geometría y medición, seguida de la aritmética, mientras la de mejor rendimiento es la de estadística.

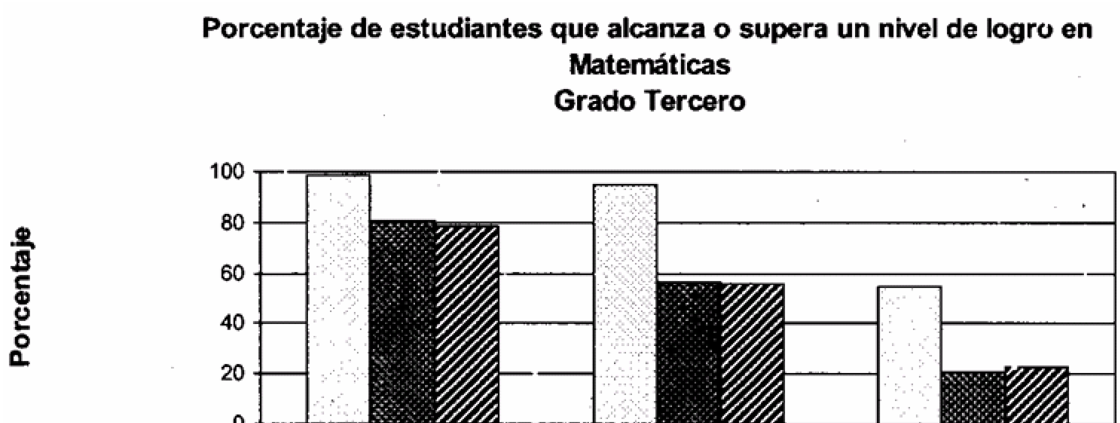
La tabla 1 presenta los conceptos aritméticos relacionados con cada una de las preguntas analizadas.

Tabla 1: Preguntas pruebas SABER

Pregunta	Nivel	Conceptos
9	B	– Conceptualización de los números naturales desde su estructura y sus procedimientos. – Estructura aditiva – Estructura multiplicativa
10	D	– Estructura aditiva – Valor posicional.
15	B	– Estructura multiplicativa (multiplicación)
16	D	– Estructura multiplicativa (división)
19	C	– Estructura multiplicativa (multiplicación)
20	D	– Estructura multiplicativa (multiplicación y división).

La pregunta número 15 aborda la multiplicación desde el modelo de razón, cuya estructura se puede caracterizar por: si se produce x cantidad diariamente, ¿cuánto se produce en y días?. En la número 16 el concepto de división está asociado a la realización de repartos (si en un estuche se empacan x cantidad de objetos, para empacar y, ¿el número de estuches requeridos es?). La preguntas 19 , si bien pretende analizar el empleo del sistema de numeración decimal, y los problemas de tipo aditivo, se relaciona también con situaciones que implican la realización de multiplicaciones asociadas a la acción "tantas veces" (el valor total de x cantidad de billetes o de monedas de determinado valor). De igual manera la pregunta 20 que se resuelve a partir de la información hallada en la número 19, aborda la división desde la noción de repartir (en este caso repartir la cantidad en 2 partes iguales -la mitad-).

Para la institución educativa Colegio Calasanz, en la cual se desarrolló la investigación, se encontró que los estudiantes del grado tercero obtuvieron en cada nivel un resultado superior al obtenido en ese mismo nivel por los estudiantes del municipio y del departamento, como se puede observar en la siguiente gráfica:



	Nivel B	Nivel C	Nivel D
Plantel	98.91	94.57	54.35
Municipio	80.65	56.43	20.69
Departamento	78.48	55.73	22.98

Gráfica 1 : Resultados Pruebas SABER Colegio Calasanz Medellín

En cuanto a los resultados de la institución de acuerdo a los niveles se puede ver que:

- En las preguntas del nivel B correspondientes a las preguntas número 9 y 15 la cantidad de estudiantes que respondieron acertadamente fue de 55 y 79 de un total de 98 estudiantes, lo que representa el 56% y el 81% respectivamente.

- En el nivel C al cual corresponde la pregunta número 19 el total de alumnos que acertaron fue de 45, representando un 46% de la población evaluada.

- Por último, en el nivel D, representado por las preguntas 10, 16 y 20 los aciertos fueron 44, 50 y 33, para unos porcentajes del 45%, 51% y 34%, respectivamente. Con relación a estas tres preguntas se observa de manera especial en la número 20 que 51 estudiantes no tuvieron en cuenta el valor de cada billete y por el contrario se guiaron por la palabra empleada para la pregunta “mitad”, sin tener en cuenta que según el valor varía la cantidad de billetes para alcanzar la mitad de la cantidad total.

De lo anterior se puede inferir que frente a problemas rutinarios y no rutinarios simples, en los cuales los datos presentados determinan por si mismos los procedimientos que deben emplearse para la resolución, los estudiantes presentan un nivel de logro alto.

Sin embargo frente a los problemas planteados para el nivel D que involucran la realización de divisiones únicamente o de multiplicaciones y divisiones de manera conjunta, se encontró que tan sólo la mitad de la población alcanzó este nivel de logro, pues si bien resuelven los problemas en los que se hace necesario emplear una multiplicación como es el caso de la pregunta 15, al enfrentarse a la realización de una división en la que se indaga por la cantidad de veces que la unidad está contenida en el total de jabones (tal como se plantea en la pregunta 16 o la realización de una multiplicación y división como en la pregunta 20) y en el enunciado no se determinan los pasos a seguir, no logran emplear una estrategia de carácter multiplicativo que resuelva el problema planteado.

Todo esto se constituye en indicador de que no hay una conceptualización apropiada de las estructuras multiplicativas como se encuentran planteadas en los Lineamientos curriculares, debido a que falta reconocer los modelos asociados a las operaciones de las estructuras multiplicativas como razón, repartir y sustracción repetida, siendo el más reconocido el de la multiplicación como adición repetida.

Se desprende entonces de este análisis la necesidad de ofrecer a los estudiantes del Colegio Calasanz la posibilidad de conceptualizar las estructuras multiplicativas desde la identificación de patrones, las relaciones entre los números naturales, y en especial, desde los diferentes modelos asociados a las estructuras multiplicativas.

Por lo tanto, a partir de los análisis realizados a los resultados, se plantea la necesidad de reconceptualizar la manera como se están abordando estos contenidos en la escuela, teniendo en cuenta los diversos aportes de las investigaciones acerca de la construcción del pensamiento matemático y los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.

1.4 METODOLOGÍAS EMPLEADAS PARA LA ENSEÑANZA DEL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO

1.4.1 Plan de Área Colegio Calasanz

En el plan anual de matemáticas para los grados segundo y tercero, se encuentran los siguientes objetivos generales:

- Comprender la multiplicación como adición repetida de sumandos iguales.
- Emplear correctamente el algoritmo de la multiplicación en la solución de problemas.
- Reconocer el signo “por” y asociarlo a la expresión “tantas veces”.
- Emplear las tablas de multiplicar para realizar multiplicaciones por una y dos cifras.
- Comprender la división asociada a la repartición de cantidades en partes iguales.
- Emplear el algoritmo de la división en la solución de problemas.
- Conocer y aplicar las propiedades de la multiplicación.

De acuerdo con los objetivos mencionados puede establecerse el siguiente esquema:

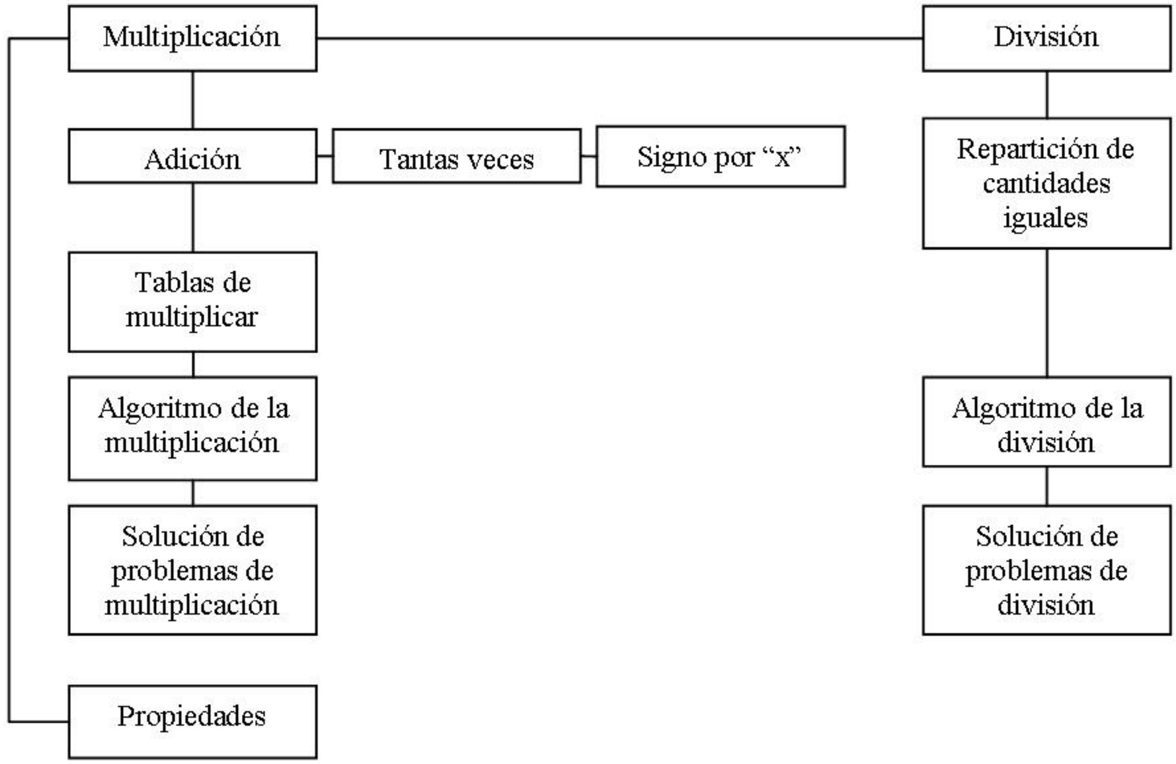


Ilustración 2: Plan anual de matemáticas para el grado 2º Colegio Calasanz Medellín

Como se puede observar a partir del esquema, no se evidencian los elementos fundamentales que aparecen en los Estándares Básicos y por el contrario se abordan únicamente la adición repetida y la repartición de cantidades como los modelos de aprendizaje de la multiplicación y de la división respectivamente. No se tiene en cuenta la relación existente entre la multiplicación y los conceptos de razón y proporción, al igual que no se incluye un enfoque a largo plazo en el que se dé importancia a la variación como eje fundamental para la construcción de las Estructuras Multiplicativas, por último, tampoco se establecen diferencias entre las clases de división, ni entre las diferentes magnitudes involucradas.

Para el logro de los objetivos presentados en el programa, se contemplan como estrategias metodológicas la realización de ejercicios, en los que se hace necesario adicionar de forma repetida una misma cantidad de elementos para ilustrar a los estudiantes que una adición de esta forma puede abreviarse utilizando el signo “por”, y pasar entonces, a la realización de problemas rutinarios que requieren la realización de una multiplicación para su solución.

Con relación a la división, esta se presenta al finalizar la unidad correspondiente a la multiplicación, informando a los estudiantes que es la operación inversa a la que acaban de estudiar y aplicándola en ejercicios de repartición, para enseñar luego el algoritmo, y a continuación, resolver problemas que implican una división.

1.4.2 Textos escolares

Los textos escolares son un importante instrumento utilizado por los docentes para favorecer en los alumnos la construcción de diferentes conceptos, debido a que en ellos se encuentran sugerencias metodológicas, situaciones de aprendizaje y ejercicios de afianzamiento. Es por esto que se considera importante el análisis de las propuestas metodológicas que aportan los textos, pues son un agente determinante en el quehacer docente a la hora de abordar los diferentes contenidos.

Se eligieron al azar 7 textos de matemáticas de grado segundo, en cada uno de ellos se analizó la concepción matemática de multiplicación que sustenta la propuesta, es decir, los conceptos matemáticos involucrados en el pensamiento multiplicativo que dan soporte a la presentación realizada y la metodología a través de la cual se pretende llevar a cabo la enseñanza de dicho concepto.

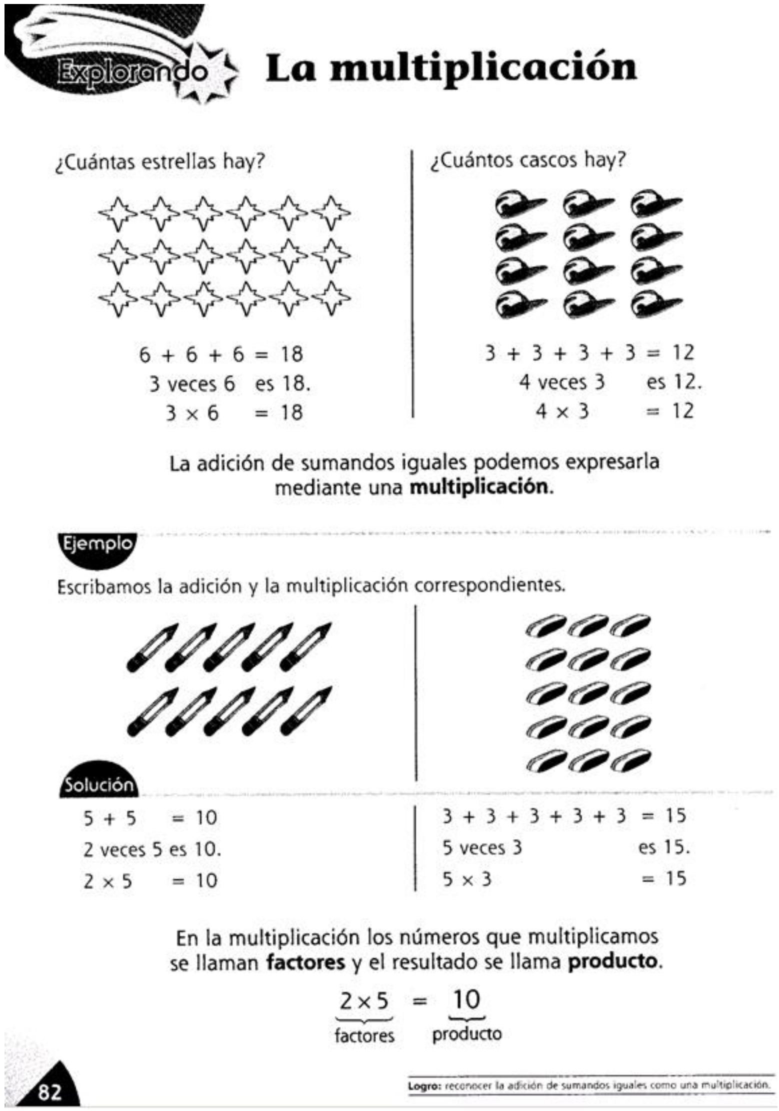
Los resultados fueron similares en los textos analizados, por tanto se presentan algunos apartes tomados de los textos Pirámide[14] y Rumbo Matemático[15] que se abordan en el grado segundo en el Colegio Calasanz.

---

[14] / TORRES, José … <et al.> (2000) Pirámide 2. Bogotá: Grupo Editorial norma Educativa, (Serie de matemáticas para la educación básica primaria). Pág 82

En el texto pirámide, la multiplicación se presenta a partir de la estrategia de sumas de sumandos iguales. Por ejemplo, en la página 82 (ver ilustración 6), se observa inicialmente un arreglo de tres filas de seis estrellas cada una, antes del cual se pregunta "¿cuántas estrellas hay?", a continuación se presenta la adición 6 + 6 + 6 = 18. En el renglón siguiente se presenta la abreviatura 3 veces 6 = 18 y en el último renglón aparece la multiplicación 3 x 6 = 18. De la misma forma se presenta un arreglo de cuatro filas de tres cascos cada una y se realiza el mismo tratamiento. Luego de estos dos ejemplos se enmarca en un recuadro sombreado la definición de multiplicación "*La adición de sumandos iguales podemos expresarla mediante una multiplicación.*" Se realizan dos ejemplos más a modo de ejercicios para resolver y se pasa inmediatamente a determinar los nombres correspondientes a cada término involucrado en una multiplicación, a saber, factores y producto.

[15] URIBE, Julio. (1998) Rumbo Matemático 2. Medellín: Susaeta Ediciones. Pág 62



Explorando **La multiplicación**

¿Cuántas estrellas hay?

6 + 6 + 6 = 18
3 veces 6 es 18.
3 × 6 = 18

¿Cuántos cascos hay?

3 + 3 + 3 + 3 = 12
4 veces 3 es 12.
4 × 3 = 12

La adición de sumandos iguales podemos expresarla mediante una **multiplicación**.

Ejemplo

Escribamos la adición y la multiplicación correspondientes.

Solución

5 + 5 = 10
2 veces 5 es 10.
2 × 5 = 10

3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15
5 veces 3 es 15.
5 × 3 = 15

En la multiplicación los números que multiplicamos se llaman **factores** y el resultado se llama **producto**.

$$\underbrace{2 \times 5}_{\text{factores}} = \underbrace{10}_{\text{producto}}$$

82

Logro: reconocer la adición de sumandos iguales como una multiplicación.

Ilustración 3: Texto Pirámide, página 82

La multiplicación en este texto se presenta asociada exclusivamente a la adición repetida de sumandos iguales, el cual es apenas uno de los modelos presentados en los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación, dejando de lado otros que se incluyen allí como factor multiplicante, razón y producto cartesiano, además no establecen ninguna relación con la división como operación inversa, que también posee modelos propios.

En cuanto a la metodología, se realiza una presentación ostensiva de la multiplicación, es decir, se presenta su significado y no se permite la aparición del mismo a partir de la necesidad de emplearlo para resolver una situación significativa para el estudiante. Podrían resaltarse las imágenes como ayuda visual para que el alumno determine la cantidad total de elementos mediante la actividad de contar o inclusive mediante el conteo de grupos de a seis elementos o de a cuatro, según el caso, pero con relación a esto último no se pide al estudiante resolver ningún problema que lo conduzca a la realización de dichos procedimeintos. Se resalta también la ausencia de procesos de comunicación o validación de los conceptos construidos por los estudiantes.

De forma similar a lo propuesto en el texto anteriormente analizado, en la página 62 del texto Rumbo Matemático 2º se observan inicialmente cuatro conjuntos de tres bolas cada uno, se pide al estudiante que las cuente y que escriba el número que corresponde al recuadro vacío, se escribe la adición correspondiente 3 + 3 + 3 + 3 =, presentando un recuadro vacío para escribir el resultado del conteo, es decir, 12; a continuación se escribe la abreviatura 4 veces 3 =, dejando de la misma forma el recuadro vacío para escribir el resultado y, por último, se presenta la multiplicación 4 x 3 = con el mismo recuadro en blanco; se indica que la “x” se lee “por”. A continuación se presentan cuatro ejercicios similares en los que se pide realizar el conteo de cada uno de los elementos de los diferentes conjuntos dibujados.

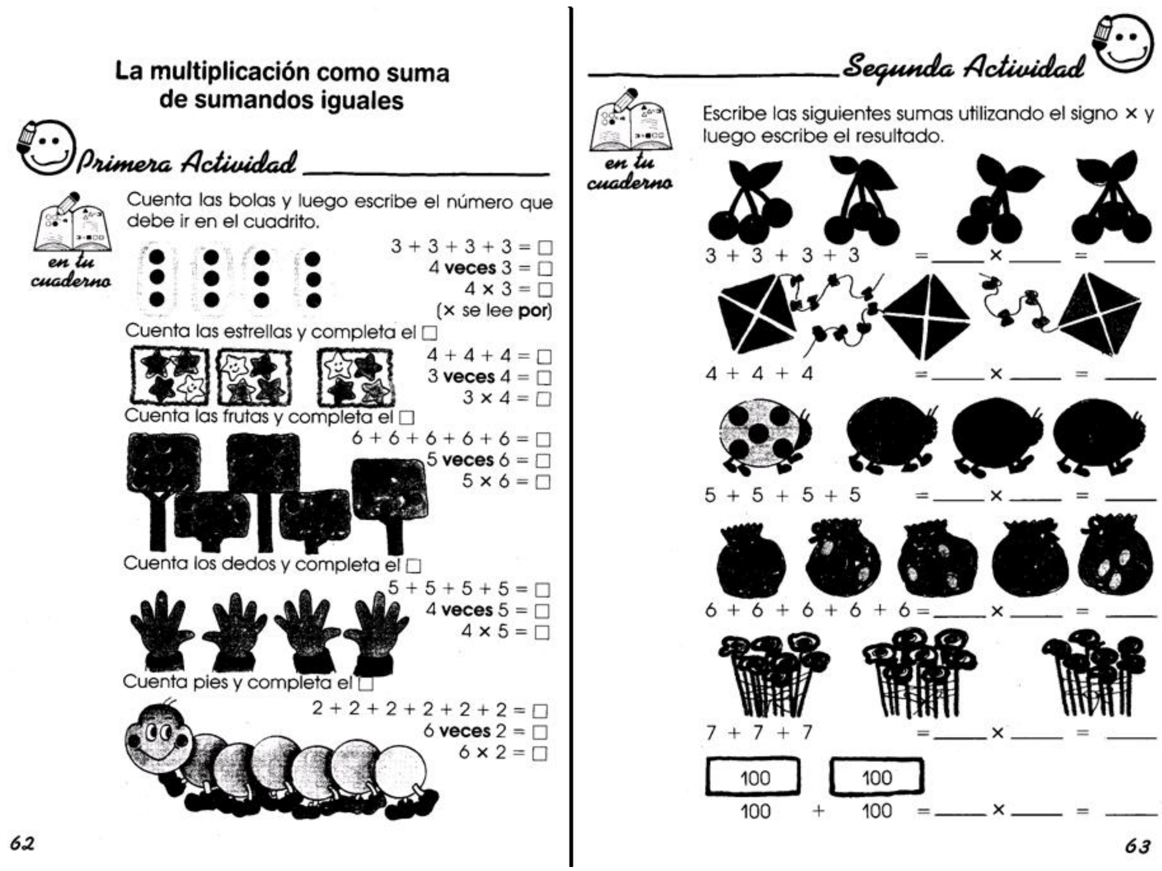


Ilustración 4: Páginas 62 y 63 del texto Rumbo Matemático 2

En estas páginas la multiplicación se presenta asociada a la adición repetida de sumandos iguales, representados de forma gráfica, y como procedimiento para encontrar el resultado se plantea el conteo de las unidades dibujadas, dejando de lado la posibilidad de calcular.

Es importante hacer referencia a la clasificación de los procesos por medio de los cuales se establece la relación entre cantidades, planteados por Brissiaud[16] quien afirma que luego de la adquisición de la noción de número por parte de los niños pequeños, asociada a la cantidad y al conteo, se da el proceso de relacionar dichas cantidades entre sí. Inicialmente este proceso lo realiza el niño a través de estrategias de conteos simples, en las que requiere registrar cada unidad

[16] BRISSIAUD, Remi. (1989) El aprendizaje del cálculo, más allá de Piaget y la Teoría de Conjuntos. Madrid: Gráficas Rógar.

individualmente. Luego de lo anterior esta estrategia evoluciona a procesos de cálculo en los cuales las relaciones se establecen directamente entre cantidades, bien sea de forma aditiva o sustractiva sin tener que recurrir a la representación total de las unidades en cuestión, ya que no se hace necesario contar cada una de ellas de forma individual.

Por lo tanto, en el texto que se viene analizando, para la construcción de un concepto complejo como puede ser la multiplicación, se emplea uno de los procedimientos más primitivos usado por los niños para acceder al sistema de numeración: el conteo. No se tiene en cuenta la evolución que ha debido darse en el pensamiento de los estudiantes desde el proceso inicial de los primeros conteos para acceder al concepto de número, hasta algunos años más tarde, cuando ya se encuentra en condiciones de establecer relaciones de cálculo entre diversas cantidades.

Esta evolución hace que la estrategia de contar las unidades simples que conforman cada colección, pierda validez pues en esta etapa las relaciones entre cantidades y más si corresponden a pequeñas colecciones, se establece mediante procesos de cálculo y no de conteo. Esto hace que el estudiante que ha presentado algún tipo de dificultad en dichas estrategias de cálculo, continúe anclado a procedimientos primitivos de conteo de unidades ahora que se enfrenta a operaciones en las que debe relacionar simultáneamente dos o más grupos de elementos.

Es de resaltar además, que para abordar las estructuras multiplicativas el conteo que debe realizarse corresponde a grupos de unidades, denominadas unidades compuestas; aspecto éste que no queda evidenciado pues el énfasis se hace en contar los elementos que conforman cada una de las unidades y no las totalidades de unidades que conforman dichos grupos.

En las páginas siguientes del mismo texto se observa la intención de mecanizar en el estudiante la relación entre determinada adición de sumandos iguales y la multiplicación correspondiente, dejando de lado los otros modelos asociados a la multiplicación que aparecen en los Lineamientos Curriculares y que se han mencionado ya en el apartado anterior, igualmente no se tiene en cuenta la relación entre la multiplicación y la división, esta parte se desarrolla en la unidad número 8 a partir de la repartición de cantidades en grupos iguales.

Como aspecto importante se resalta la posibilidad que tiene el estudiante de visualizar los grupos de elementos y la repetición de los mismos, pero no presenta ningún problema que deba ser resuelto y para lo cual el estudiante deba indagar, analizar, comunicar procedimientos o resultados y confrontarlos con otros.

Es de resaltar que mediante los ejercicios propuestos, los estudiantes no tienen la posibilidad de validar por ellos mismos sus procedimientos empleados ni los resultados obtenidos, pues la misma situación presentada no permite una validación adicional a la del maestro que señale si el número escrito en la casilla corresponde o no a la respuesta esperada.

Como puede observarse a partir de los textos analizados existe una brecha significativa entre éstos y los lineamientos planteados por el Ministerio de Educación, pues en dichos textos se plantea la multiplicación como una adición de sumandos iguales en la que no se tiene en cuenta el análisis a la variación de las magnitudes involucradas. Se deja de lado la posibilidad de conceptualizar la multiplicación a partir de modelos diferentes al de la adición repetida de sumandos iguales. Se desconoce la relación inversa que existe entre ésta y la división y por último, se pasa de forma inmediata al algoritmo de la operación, desconociendo que el concepto y el algoritmo constituyen dos elementos diferentes que se llevan a cabo durante el proceso de conceptualización de cada una de las operaciones.[17]

Otro aspecto importante que se resalta en los textos analizados es que la metodología empleada no favorece el desarrollo de otras habilidades de pensamiento diferentes a la observación, tales como la realización de análisis, inferencias, validaciones y argumentaciones. Esto se debe a que, en primera instancia, se pide al estudiante observar y cuando se trata de solucionar un ejercicio se busca que cuente y no hay forma de que él mismo verifique si lo ha hecho acertadamente o no, dejando esta labor a la intervención del profesor.

De todo lo analizado se concluye, por una parte, que la enseñanza que están recibiendo los estudiantes de primaria con relación al pensamiento multiplicativo no se encuentra en concordancia con los conceptos fundamentales planteados en los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas pues se aborda la multiplicación de forma exclusiva como una adición repetida del mismo sumando y se dejan de lado otros modelos que completan la conceptualización de dicha operación a partir de procesos de comparación multiplicativa y covariación. Estos son fundamentales para permitir el acceso a los conceptos de razón y proporción que a su vez son la base para el posterior aprendizaje de nociones fundamentales de álgebra, cálculo y geometría entre otras.

De otro lado se concluye también que las metodologías empleadas apuntan a aprendizajes memorísticos en los cuales prima la presentación que se hace a los estudiantes de los diferentes conceptos desde fuera, ya sea por parte del profesor o del texto guía, sin permitir que se enfrenten a la solución de problemas y a procesos de validación y argumentación promotores de construcción significativa de conceptos.

---

[17] De una parte el concepto de la operación y de otra parte las formas de llevarla a cabo, es decir los diferentes procedimientos para realizarla que no se deben confundir con la operación propiamente dicha.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

De todo lo planteado anteriormente se evidencia que es importante tener en cuenta otros modelos y otras metodologías de enseñanza para el pensamiento multiplicativo a los estudiantes, pues al analizar lo propuesto en los Lineamientos y en los Estándares curriculares se encuentra una brecha significativa entre lo planteado allí y lo que realmente sucede en la práctica pedagógica a nivel de pensamiento multiplicativo y la conceptualización de la variación como eje fundamental del mismo.

Por lo tanto es necesario generar diferentes formas de conceptualizar las estructuras multiplicativas que permitan desarrollarlas a partir de modelos que involucren la covariación y la proporcionalidad. Dicho de otro modo, surge la necesidad de comenzar la construcción de las estructuras multiplicativas en los niños teniendo en cuenta elementos como la covariación, las comparaciones multiplicativas, las razones y la proporcionalidad.

Surge entonces la necesidad de preguntarse acerca de los elementos teóricos y didácticos que, teniendo en cuenta el enfoque de los lineamientos curriculares y de los estándares para el área de matemáticas, permitan a los estudiantes que se encuentran en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo, construir las estructuras multiplicativas de manera significativa y conceptualmente interrelacionada con la proporcionalidad simple directa.

Se plantea por tanto el siguiente problema de investigación:

¿Cuáles son los elementos teóricos y las condiciones didácticas apropiadas para favorecer en niños de 2º y 3º de básica primaria, los procesos de conceptualización de las estructuras multiplicativas a partir de situaciones de proporcionalidad?

2.1 OBJETIVOS.

2.1.1 General.

Caracterizar las condiciones cognitivas, matemáticas y didácticas que favorezcan en los estudiantes de la educación básica la construcción de las estructuras multiplicativas.

2.1.2 Específicos.

- Establecer las relaciones matemáticas que hacen posible el vínculo entre el estudio de las estructuras multiplicativas y los problemas de proporcionalidad directa.

- Caracterizar el tipo de pensamiento matemático que presentan los niños de segundo y tercer grado de educación básica y el nivel de estructuración en el que se encuentran, en relación con el razonamiento multiplicativo.

- Determinar las características matemáticas y didácticas que deben incluirse en las situaciones de enseñanza para favorecer el desarrollo del pensamiento proporcional desde los primeros años de la educación básica.

2.2 HIPÓTESIS.

Ante este problema se plantea como hipótesis de trabajo que el estudio de la proporcionalidad puede ser una estrategia didáctica adecuada para acceder a la conceptualización de las estructuras multiplicativas. En este sentido, y como se ampliará más adelante, se toma como punto de partida la noción de multiplicación que plantea Vergnaud (1985), en la cual afirma que la relación multiplicativa no es ternaria, como se plantea comúnmente (a x b = c), sino cuaternaria ya que la multiplicación es tan sólo un caso particular de la proporcionalidad, cuando una de las cantidades corresponde al uno (1).

Igualmente una hipótesis en tal sentido necesita apoyarse en el planteamiento que hace Piaget acerca de la característica fundamental de la operación multiplicativa, en la cual el sujeto es capaz de operar de forma simultáneamente con dos o más clases.

3 REFERENTE TEÓRICO.

3.1 DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Actualmente, según Juan Díaz Godino[18], existen tres líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

La primera de ellas es la correspondiente a la teoría y filosofía de la Educación Matemática, a la cual pertenece el grupo TME (Theory of Mathematics Education), surgido hacia el año 1984 a partir del V Congreso Internacional de Educación Matemática y el grupo Internacional de Filosofía de la Educación Matemática. Esta línea propone que la Teoría de la Educación Matemática se ocupa de formular e identificar los problemas fundamentales en cuanto a metodología, enfoques y organización de la educación matemática, al igual que busca estudiar la interacción de dicha disciplina con los sistemas sociales en los cuales se desarrolla y con la interacción humana en general. De otro lado prestan atención a los alcances y a la reflexión en torno a la filosofía matemática, buscando explorar las diferentes perspectivas humanísticas de las matemáticas.

Otra línea de investigación la constituye el enfoque psicológico de la educación matemática que se encarga de estudiar las variables psicológicas y su interacción con los procesos de enseñanza y de aprendizaje realizados por maestros que buscan que los alumnos adquieran conocimientos matemáticos a través de interacciones con el medio y entre ellos mismos. Tiene en cuenta principalmente tres clases de interacción para explicar los procesos de instrucción: la interacción cognitiva, la interacción social y la interacción con el contexto.

[18] BATANERO, Carmen y GODINO, Juan. (2002) Matemática y su Didáctica para maestros, proyecto edumat-maestros, Granada.. En http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

En cuanto a la interacción cognitiva argumentan que lo fundamental es lograr que el alumno realice la asimilación de los contenidos matemáticos de la forma más conveniente posible, teniendo en cuenta para ello sus habilidades cognitivas, por lo que se hace importante identificar teorías del aprendizaje matemático que expliquen los procesos de construcción del conocimiento y los procesos de procesamiento de la información. La perspectiva de interacción social se basa en la importancia de los maestros o facilitadores de la instrucción, y por último, la perspectiva contextual defiende la importancia de la interacción entre los sujetos y las variables del contexto en el cual se produce el aprendizaje.

Otro enfoque para la investigación en Didáctica de la Matemática lo constituye el desarrollado por investigadores franceses quienes denominan su concepción como “fundamental” debido a que buscan desarrollar su propio marco teórico que aborde sus conceptos y métodos a la vez que considere de forma global las situaciones de enseñanza – aprendizaje, teniendo en cuenta las interacciones que se suscitan entre el profesor, los alumnos y el saber, a través del medio en el cual se desarrolla dicha interacción.

Para efectos del presente trabajo se tomará como base el planteamiento realizado por los investigadores de la escuela francesa en el área de la enseñanza matemática, quienes definen la didáctica de las matemáticas como la “disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone acciones fundadas para su transformación”. (Rico, Sierra y Castrol 2000; p 352) citados en Godino.

Según este enfoque la didáctica de las matemáticas es la encargada de estudiar las condiciones de transmisión y adquisición de los diferentes conceptos matemáticos, de controlar estas condiciones y de optimizar así los procesos de su adquisición en la escuela. Para esto la didáctica de las matemáticas, a partir del estudio de las relaciones que el alumno establece con los saberes que se le presentan, busca mejorar los métodos y contenidos de la enseñanza y proponer condiciones que aseguren a los alumnos la construcción de un saber dinámico (susceptible de evolución), y funcional (que permita resolver problemas y plantear verdaderos interrogantes).

Es así como el objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas es la situación didáctica, situación en la que se establecen las relaciones entre un saber susceptible de ser aprendido, un sujeto que aprende y uno que facilita dicho aprendizaje. Estas relaciones determinan las reglas que definen las obligaciones de cada una de las partes implicadas en el proceso, es decir, el contrato didáctico entendido como una negociación que establece las reglas, no enunciadas explícitamente, que regulan las interacciones entre los diferentes actores de la situación didáctica.

3.1.1 Situaciones Didácticas

Guy Brosseau plantea la teoría de las Situaciones Didácticas, que explica el aprendizaje de las matemáticas como fruto de un proceso de "adaptación al medio". Considera como objeto de investigación y de análisis las relaciones que se establecen al interior del espacio educativo, entre el maestro, el alumno y el saber. Estas relaciones se llevan a cabo a través del medio con el cual interactúa el alumno y que representa para él fuente de conflicto cognitivo y de contradicciones, debido a que le plantea un problema que debe resolver y frente al cual su estrategia inicial, o llamada también estrategia de base, resulta ineficaz. Llevándolo así a modificar sus actuaciones de modo que el saber que debe construir, resulte ser el procedimiento óptimo de resolución de la situación, dándose así la producción de conocimiento.

Durante el proceso de resolución de la situación se pueden presentar obstáculos considerados como conocimientos o procedimientos que han sido exitosos en una situación anterior, pero que no lo son para la situación actual. Por haber resultado adecuados previamente se presenta una resistencia a su desaparición y se expresan en la situación actual como “errores”. Se trata por tanto de diseñar la situación de tal forma que la aplicación de los conocimientos anteriores se vea claramente como ineficaz y por tanto el alumno sea llevado a movilizar otras estrategias de resolución, a través de las cuales se construya el conocimiento deseado.

Brosseau plantea la existencia de diversas clases de situaciones, según sea la actividad que el alumno despliega en su realización. Se clasifican en situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización.

Las situaciones de acción son aquellas en las que el alumno a través de los ensayos y errores organiza su estrategia para representarse la situación y tomar decisiones, partiendo de las retroacciones que el medio le proporciona y que lo llevan a adaptar su acción para aceptar o rechazar las hipótesis que se plantea.

En las situaciones de formulación el alumno se comunica con varias personas, intercambiando información acerca de sus hallazgos, de forma que el éxito o el fracaso obtenido en dicha comunicación lo lleva a replantearse sus estrategias y sus procedimientos.

Las situaciones de validación son las que permiten al alumno probar sus afirmaciones y justificar la validez de las estrategias empleadas, mediante la implementación de procesos de prueba validados por sus interlocutores.

Por último, las situaciones de institucionalización permiten al alumno reconocer la solución que ha encontrado a determinado problema como un saber matemático universal que puede ser empleado en otras situaciones.

Para cada una de las situaciones planteadas se definen las variables didácticas como los elementos de la situación que son controlados por el maestro, a fin de lograr que las estrategias empleadas por el alumno resulten ineficaces, y se vea en la necesidad de replantearse las hipótesis de trabajo y movilizar sus acciones hacia otras que le representen mayor éxito en la resolución de la situación, y por tanto logre así una evolución en sus concepciones matemáticas.

Es en términos del contrato didáctico que se presentan determinadas actuaciones por parte de los maestros o los alumnos y que se constituyen determinantes para la evolución misma de la situación. En la enseñanza tradicional este contrato presenta disfunciones debido a que ante el fracaso en la enseñanza, verificado a través de las respuestas de los alumnos, el maestro asume posturas y actitudes que pretenden "salvar" a toda costa el proceso, dejando de lado en ocasiones el significado del mismo, es por esto que en las situaciones didácticas se busca también regular las consignas bajo las cuales se dará la relación entre maestro y alumno, dejando a este último enfrentarse a la situación a partir de su interés personal en su resolución y no como respuesta exclusiva a la exigencia del maestro.

3.1.2 Ingeniería Didáctica

El carácter eminentemente social de la enseñanza hace que para el desarrollo de las investigaciones en didáctica en general, y de la investigación aplicada en particular, se necesite de metodologías específicas, que no sólo den cuenta de la naturaleza social de la enseñanza, sino también de la naturaleza del conocimiento que se desea enseñar, es decir, de la naturaleza del conocimiento matemático. La escuela francesa ha desarrollado una metodología de investigación que ha llamado Ingeniería Didáctica. Artigue (1988) y Farfán (1994) plantean que el término *Ingeniería Didáctica* surge como analogía al trabajo en ingeniería, el cual debe apoyarse en un saber científico, pero debe abordar problemas y tomar decisiones que dependen del proceso y que se escapan al control de la ciencia en si.

Michèle Artigue (1991), plantea que el termino ingeniería didáctica puede ser entendido por lo menos en dos acepciones: como metodología de investigación (proceso) y como producto de desarrollo para la enseñanza (producto), en tanto los límites entre la acción y la investigación, no son del todo claros, y que además este rótulo fue visto desde el comienzo como una manera de aproximarse a dos cuestiones cruciales de la didáctica de las matemáticas: las relaciones entre la investigación y la acción, y el papel de que habría que darle a las realizaciones didácticas en el contexto de una metodología de investigación didáctica.

Como metodología de investigación, la *ingeniería didáctica* ante una pregunta proveniente de la teoría que debe ser probada, genera el escenario experimental a través del cual se realiza la prueba. Además, se diferencia fundamentalmente de otras metodologías de investigación en el aula de clase por los siguientes tres aspectos:

> *La ingeniería didáctica, vista como metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar, por ser un esquema experimental basado sobre las realizaciones didácticas en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación, y análisis de secuencias de enseñanza. Se pueden distinguir dos niveles: el de la* microingeniería *y el de la* macroingeniería[19]....

[19] Una investigación en microingeniería se destaca por ser de un carácter local y estar centrada en el problema de la complejidad de los fenómenos que se dan al interior de la clase, mientras que una macroingeniería está centrada en los aspectos generales al interior del entorno escolar.

[en segundo lugar] la ingeniería didáctica se caracteriza, en contraste con otras investigaciones basadas sobre la experimentación en clase, por el registro de lo que en ella sucede y por los medios de validación que le son asociados... [esta] se sitúa en el contexto del estudio de caso, y su validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori [más adelante se hablará de estos dos términos].

[Un tercer lugar los objetivos]... Los objetivos de una investigación didáctica pueden ser diversos. Regine Douady... distingue, por ejemplo, las investigaciones que se centran en el estudio de procesos de aprendizaje de un concepto dado en particular sobre la elaboración de una génesis artificial del concepto, de aquellas que son transversales en el contenido, y que se apoyan en la base de la enseñanza de un dominio específico. (Artigue, 1988, p 285-286.)

La Ingeniería Didáctica pretende por tanto construir una génesis artificial del saber, a partir del control ejercido sobre aspectos como los errores y obstáculos en la construcción de un determinado saber matemático, las relaciones de ese concepto con otros previos o posteriores, la historia de dicho saber y las concepciones de los alumnos acerca del mismo.

El proceso de Ingeniería realizado en pequeña escala para dar cuenta de los fenómenos de clase (micro-ingeniería) consta de cuatro etapas: primera etapa que consta del análisis preliminar, la segunda etapa incluye la concepción y el análisis a priori de las situaciones didácticas, la tercera etapa se refiere a la experimentación y, por último, la cuarta etapa consiste en el análisis a posteriori y la evaluación.

La primera etapa, la de *los análisis preliminares* constituye el proceso de realizar análisis previos desde los diferentes elementos que intervienen tanto en el saber mismo que se quiere transmitir, como en la forma de hacerlo tradicionalmente. En el caso de la presente investigación estos análisis están encaminados a la enseñanza tradicional de las operaciones multiplicación y división y sus efectos, a las concepciones de los estudiantes con relación a las estructuras multiplicativas y a las características y evolución cognitiva de los estudiantes a los cuales se dirige este proceso de enseñanza. En este sentido se incluye el análisis de los resultados obtenidos en las pruebas SABER y TIMSS para Colombia, con relación al pensamiento numérico, especialmente lo concerniente a la multiplicación y la división. Al igual que los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares y los estándares de matemáticas.

La segunda etapa correspondiente al *análisis a priori* se refiere al proceso de establecer las variables de comando, es decir, las variables pertinentes al problema que se plantea, las cuales son de dos clases, las macro-didácticas o "selecciones principales" y las micro-didácticas o "selecciones locales" *(Artigue 1995)*. Para establecer las variables de comando se deben determinar con claridad los nuevos puntos de equilibrio del sistema, es decir, determinar los nuevos condicionantes del sistema didáctico al que se pretende llegar. En este sentido, se trata de un análisis sobre la base de los fundamentos cognitivos, matemáticos, epistemológicos y didácticos que se espera lograr una vez desarrollado el proceso de intervención. Así, una vez determinados estos nuevos determinantes, las variables de comando son aquellos elementos, estructuras, dentro de las situaciones, que al ser manipuladas permiten la génesis artificial de los conocimientos hacia el punto de equilibrio que se pretende alcanzar.

Con relación a la primera selección de variables, las que se constituyen en principales, corresponden a la organización global del proceso de ingeniería en tanto tienen que ver directamente con el contenido que se trabajará durante la investigación, y las locales se refieren a aquellas que se tendrán en cuenta en cada una de las fases de las situaciones y que se relacionan de manera más específica con la organización del medio y los mediadores que intervendrán en cada situación.

La experimentación consiste en la realización de las situaciones didácticas diseñadas y la recolección de información para el análisis a posteriori.

El análisis a posteriori implica la reunión de los datos obtenidos en todo el proceso, incluyendo la información a partir de las producciones de los estudiantes y las observaciones realizadas durante las secuencias de enseñanza, puede también complementarse a través de entrevistas personales o grupales realizadas en diferentes momentos del proceso. Este análisis tendrá en cuenta los elementos señalados como fundamentales, para luego pasar a la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori para validar así las hipótesis de trabajo planteadas.

Teniendo en cuenta estos elementos, la Ingeniería Didáctica, hace emerger un concepto a través de su génesis artificial mediante el control de las denominadas “Variables Didácticas”, que constituyen los elementos de la situación que pueden ser modificados por el maestro y que inciden directamente en la elección por parte del alumno de las posibles estrategias de solución.

3.2 LAS SITUACIONES PROBLEMA EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Brosseau propone que el aprendizaje es un proceso complejo sobre la base de la actividad del sujeto que aprende:

> *"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje."(p.59) (Brosseau, 1998, citado en Chamorro, 2003, página 47).*

Por lo tanto enseñar un determinado concepto matemático requiere hacer posible que los alumnos tengan la necesidad de desarrollarlo y utilizarlo para resolver una situación de creación matemática, es por esto que el maestro debe proponer situaciones que provoquen el surgimiento de verdaderos problemas matemáticos que conlleven a la aparición del concepto en cuestión. Así, si el estudiante hace suyo el problema, pone en funcionamiento una estrategia de base que al tornarse insuficiente, genera un desequilibrio. Al tratar de superar el desequilibrio, sobre la base de anticipaciones sobre la acción (emitir hipótesis, validación de las mismas, y reformulación si es del caso), elabora procedimientos y los automatiza ejerciendo de esta forma control sobre los resultados. De esta manera el conocimiento matemático es el resultado de un proceso de lo dota de sentido y significado.

Para esto se propone la realización de situaciones didácticas ya que mediante su implementación se posibilita la construcción de conocimiento matemático con sentido en el estudiante.

3.3 ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS

Gèrard Vergnaud al plantear la teoría de los Campos conceptuales toma como premisa que el conocimiento está organizado en *campos conceptuales* cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje.

> *“Campo conceptual es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición”. (Vergnaud, 1982, p.40).*

El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si quisiéramos que los alumnos dominen progresivamente el conocimiento matemático.

En particular sobre las estructuras multiplicativas propone:

> *“El campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. Varios tipos de conceptos matemáticos están involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en el pensamiento necesario para dominar tales situaciones. Entre tales conceptos están el de función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división” (Vergnaud, 1988, p.141; 1990, p. 146). Citado en (Moreira, 2002.).*

Para Vergnaud, la enseñanza de los conceptos no puede hacerse de una manera aislada, ni a partir de una sola situación problema, por el contrario, deben estar enmarcados dentro de un conjunto de situaciones que involucren diversos conceptos y teoremas. La enseñanza de los conceptos pertenecientes al campo conceptual de las estructuras multiplicativas involucra la realización de situaciones que ponen en juego no sólo la realización de multiplicaciones y divisiones, sino que favorecen el establecimiento de relaciones entre estas operaciones y otros conceptos asociados.

Tradicionalmente la multiplicación se presenta de forma exclusiva a partir de la adición abreviada de sumandos iguales y se deja de lado la posibilidad de analizar las diferentes relaciones que dan origen a dicha operación y a la división.

Por ejemplo, para un problema como "*una canica cuesta $20. ¿Cuál es el costo de 3 canicas?",* la representación más común es:

$$20 + 20 + 20 = 60$$

y se plantea al niño que dicha adición puede abreviarse mediante la expresión

3 veces 20 = 60,

o lo que es lo mismo

$$3 \times 20 = 60.$$

La interpretación anteriormente descrita no hace referencia alguna al planteamiento y la relación proporcional que implica todo problema de multiplicación:

Canica	Valor
1	$20
3	X

Esta distinción es clave en el trabajo de Vergnaud, pues desde su perspectiva, las situaciones de multiplicación expresan un problema de proporcionalidad directa, sólo que se trata de un caso simple en el cual se conoce el valor de la unidad.

Dado que esta relación con respecto al valor de la unidad no siempre es explícita en la situación, entonces en apariencia, el problema parece ser de tres términos.

Vergnaud distingue dos grandes categorías o formas de relaciones multiplicativas. La primera de ellas consiste en una relación entre cuatro cantidades; dos medidas de un tipo particular y las otras dos de otro tipo. Esta categoría se denomina isomorfismo de medidas, y las situaciones de este tipo se corresponden con aquellas en las que dos espacios de medida son puestos en correspondencia uno con otro a través de una regla de correspondencia que expresa una relación lineal. La segunda categoría se denomina producto de medidas y se refiere a la multiplicación de clases (para producir una combinación de las mismas) o la multiplicación de medidas (como en el caso del cálculo de áreas).

La multiplicación como isomorfismo de medida

Como se indicó antes, los problemas que corresponden a esta forma de relación, en tanto expresan correlaciones entre dos magnitudes, se pueden representar con una tabla de correspondencia entre dos cantidades. Esta representación permite dos tipos de análisis: uno escalar y otro funcional.

El análisis escalar, parte de analizar la variación en uno de los espacios de medida y determinar cómo dicha variación, al generar cambios simétricos en el otro espacio de medida, determina los valores posibles en este espacio. Se denomina también análisis vertical, pues como se ilustra a continuación, el cambio que se produce en la unidad para hacerse igual a X, es el mismo que se produce en f(1) para hacerse igual a f(x).

Análisis vertical:

$$\begin{array}{c|c} 1 & f(1) \\ \downarrow & \downarrow \\ x & f(x) \end{array}$$

Multiplicación: hallar f(x)

Para hacer cambiar del valor de la unidad, al valor de X, se debe multiplicar por X. Dado que un cambio en dicha magnitud, genera un cambio idéntico en la otra magnitud, entonces para obtener f(X) a partir de f(1), se debe realizar el mismo tipo de magnitud: esto es: $f(x) = x\, f(1)$.

El segundo análisis, el funcional, también llamado horizontal, permite relacionar las cuatro cantidades, pero ahora estableciendo la relación entre las parejas correspondientes de los dos espacios de medida y realizando un análisis dimensional de las cantidades involucradas. Así, dado que las parejas de valores correspondientes conservan una relación constante, a saber, que el cociente entre estas parejas de valores siempre tiene el mismo valor. Así, dado que 1 - f(1) y X - f(X) son parejas de valores correspondientes, entonces los cocientes $\frac{f(1)}{1}$ y $\frac{f(X)}{X}$ son iguales. Dado que el valor de dicho cociente es la constante de proporcionalidad, entonces se tiene que dicha constante es f(1). Por lo tanto, de la igualdad $\frac{f(1)}{1} = \frac{f(X)}{X}$ se puede concluir que $f(X) = X f(1)$. En este caso, la constante de proporcionalidad, es decir, f(1), tiene unidades, y el producto no es sólo con números, sino con las unidades de las magnitudes.

Dicho análisis horizontal se puede representar como sigue:

$$\begin{array}{c|c} 1 \longrightarrow & f(1) \\ & \\ x \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

División: Tipo 1: (Partitiva) hallar f(1)
Tipo 2: (Quotitiva) hallar x

Adicionalmente, a partir de la igualdad $\frac{f(1)}{1}=\frac{f(X)}{X}$, y dependiendo de cual de los términos es el desconocido (bien sea $f(X)$ o X), se establece la operación clásica de división. Si el valor desconocido es f(1) se trata entonces de hallar el valor correspondiente a la unidad[20], conociendo la cantidad total de partes (X) en que debe ser distribuida la cantidad f(X). Si el valor desconocido es X, se debe encontrar el valor que corresponde a la unidad[21], para lo cual se realiza la división de f(X) por f(1).

De esta clasificación de los problemas de proporción simple se desprenden aquellos en los cuales no se parte del valor de la unidad, sino de varias unidades. Son conocidos como problemas de "regla de tres", y al igual que en los casos anteriores, puede observarse en ellos una relación de proporcionalidad directa. Este tipo de situaciones puede representarse con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|c} x_1 & f(x_1) \\ \downarrow & \downarrow \\ X_2 & f(x_2) \end{array}$$

[20] El Doctor Carlos Eduardo Vasco ha denominado a este tipo de división "división entre".
[21] Esta división la denomina el Doctor Vasco como "división de a".

De forma similar a la anteriormente analizada, los análisis escalares o funcionales siguen siendo válidos. De hecho, el análisis funcional, es el que da origen a la llamada regla de tres, solo que cuando es vista desde una perspectiva del análisis de las variaciones entre magnitudes, esta tiene sentido y significado propio.

En síntesis, el **análisis vertical**, se ocupa de las variaciones que se presentan al interior de una misma categoría de medidas, y de las relaciones entre dichas variaciones. Por su parte el **análisis horizontal** realizado entre magnitudes diferentes se centra en la noción de operador – función que permite pasar de una categoría a otra, y por ende, permiten analizar las relaciones de covariación entre ambos espacios de medidas. Ambos tipos de análisis al partir del análisis de la variación entre magnitudes desde diferentes ópticas, permite establecer la noción de multiplicación, división y proporcionalidad directa, al igual que la noción de razón de cambio y la de razón – operador.

Es así como a partir del ejemplo de las canicas que cuestan $20 cada una y en el que se pide hallar el valor de 3 canicas, se observan claramente los dos análisis planteados:

Al interior de cada espacio de medida, así: 1 y 3 corresponden a cantidades de canicas y 20 y 60 corresponden a dinero.

Canica	Valor
1	20
x 3 $\downarrow$	$\downarrow$ X 3
3	60

Puede interpretarse como “tres canicas cuestan tres veces el valor de una canica”, lo cual permite plantear: *costo (3 canicas) = 3 x costo (1 canica).*

El segundo corresponde a un análisis entre los diferentes espacios de medida, así 1 corresponde a canicas y 20 corresponde a dinero, de la misma forma 3 y 60 también corresponden respectivamente a canicas y a dinero.

Canica		Valor
1	$\xrightarrow[\text{x } 20]{}$	20
	$\xrightarrow[\text{x } 20]{}$	
3		60

Puede interpretarse como “multiplicar el número de canicas por el precio de una canica”, lo cual permite plantear la relación funcional f(x) = ax y por tanto la multiplicación sería 20 x 3 = 60, donde la función es f(x) = 20x.

Según Vergnaud (1988), la mayoría de niños entre 8 y 9 años de edad eligen el primero de los análisis mencionados y se encuentran lejos del segundo, en tanto para ellos carece de sentido decir que 20 veces 3 canicas puede dar como resultado $60.

Como puede observarse al plantear estas dos clases de análisis se están generando en el niño las bases conceptuales que le permitirán alcanzar logros tanto a corto plazo como a largo plazo, a corto plazo conceptualizar la multiplicación y adquirir las destrezas necesarias para resolver problemas de las estructuras multiplicativas y, a largo plazo conceptualizar la proporcionalidad y consolidar su capacidad de razonamiento proporcional. Además teniendo en cuenta que cada uno de los análisis presentados y sus respectivas representaciones gráficas constituyen, según Schwartz (1988), las bases para el cálculo diferencial y para el cálculo integral, se estaría abordando un aprendizaje fundamental para todos los años de escolaridad incluyendo la introducción al cálculo.

La multiplicación como producto de medidas

La segunda forma de relación multiplicativa es el producto de medidas que consiste en

> *"Una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional". (Vergnaud, 1991. Pág. 211)*

Esta forma de multiplicación puede representarse de forma natural en el plano cartesiano. De forma similar al isomorfismo de medida, este tipo de producto genera la división cuando hay que encontrar una de las medidas elementales conociendo el producto y la otra medida.

Por último, plantea Vergnaud que pueden extraerse numerosas clases de problemas, según la forma de la relación multiplicativa; el carácter discreto o continuo de las cantidades que intervienen, las propiedades de los números utilizados, etcétera.

3.3.1 Análisis cognitivo de las Estructuras Multiplicativas

Jean Piaget es considerado pionero en el estudio y análisis de las etapas del desarrollo cognitivo y de las características del pensamiento en cada una de ellas.

Para la construcción de las estructuras propias del pensamiento aditivo plantea que lo fundamental consiste en establecer la relación entre un todo y sus partes. En las pruebas que realiza se indaga por el reconocimiento del todo formado por las partes, el todo como una entidad que no varía y cada una de las partes como constituyente de ese todo.

Existen tres etapas por las que atraviesan los niños en dicha construcción.

La primera etapa se caracteriza por la incapacidad del sujeto para reconocer que el todo permanece constante luego de las transformaciones realizadas.

En la segunda hay un reconocimiento intuitivo de que a pesar de las transformaciones realizadas el todo permanece invariante.

En la tercera se da una reversibilidad estructurada que permite pasar de las partes al todo y del todo a las partes, descomponiéndolo y recomponiéndolo.

En su trabajo, Piaget propone a los niños básicamente tres tipos de pruebas diferentes que permiten evidenciar el estado de desarrollo de su pensamiento lógico: en el primer tipo se trata de determinar si hay más elementos de la clase general o de una subclase de ésta; el segundo consiste en presentar dos cantidades diferentes de objetos y pedirle al niño que conforme dos grupos iguales con las cantidades presentadas; y en el tercero, se trata de darle una cantidad de objetos y pedirle que forme con sus elementos dos grupos iguales.

En la realización y análisis de estos tres tipos de pruebas se evidencian, para cada uno, las tres etapas de consolidación de las operaciones aditivas.

Tabla 2: Etapas de la construcción del pensamiento aditivo según Piaget[22].

	Prueba 1: Consiste en establecer las relaciones entre las partes y el todo, cambiando la composición de cada una de las partes.	**Prueba 2**: Consiste en igualar cantidades diferentes.	**Prueba 3**: Consiste en dividir una cantidad total en dos partes iguales.
Etapa 1	No se incluyen permanentemente 2 clases parciales en un todo invariante. No comprenden la igualdad de los conjuntos a comparar ni la permanencia de la totalidad luego de los cambios.	No comprende la compensación necesaria, saca algunas fichas de un montón y compara globalmente. Ignora que los dos grupos son un todo invariante. Cantidades rígidas y frágiles.	No concibe la igualdad del todo y de la suma de las partes, ni la equivalencia durable de las dos mitades una respecto de la otra. Se basan en la distribución espacial de los objetos.
Etapa 2	Compensa las cantidades lentamente. Se presenta una conservación intuitiva de las partes.	Toma conciencia del movimiento pendular, en un plano intuitivo, pero no tiene medios para verificar la igualdad ni prever adiciones. Realiza figuras para compararlas. Compara constantemente y percibe el traslado.	Se da por comparar figuras, pero mejor estructuradas que las de la etapa anterior.
Etapa 3	Comprende inmediatamente la identidad de las diferencias.	Manejo operatorio de los traslados y una reversibilidad bien regulada. Hay correspondencia y la utiliza como instrumento de igualación y puede	Realización completa de la composición aditiva por la igualdad durable de las dos partes consideradas como unidades y a la igualdad de su suma

[22] Sintetizada a partir de Piaget, J. (1975). Génesis del número en el niño. Argentina: Guadalupe.

		construir la equivalencia independientemente de la posición. Así se da la composición aditiva operatoria. Descompone previamente los elementos, por eso las igualdades son durables, porque la conservación resulta de una composición móvil y reversible.	y del todo inicial.

Estas etapas que tienen lugar durante la consolidación del pensamiento aditivo, son importantes pues constituyen el proceso para la consolidación operativa de la adición, proceso sin el cual no sería posible dar comienzo a la construcción y consolidación del pensamiento multiplicativo.

En cuanto a la construcción de las estructuras del pensamiento multiplicativo, Piaget afirma que la construcción de la operación de la multiplicación aritmética se da simultáneamente con la construcción de la multiplicación de clases. Por multiplicación de clases se entiende el proceso cognitivo mediante el cual un individuo puede operar de manera simultánea con dos o más clases. En este sentido, el planteamiento que realiza parte del establecimiento de las relaciones de equivalencia y correspondencia biunívoca y reflexiva entre colecciones.

> "*Psicológicamente la correspondencia que se establece entre varias colecciones y no sólo entre dos, llevará al sujeto a tomar conciencia de la multiplicación y a explicitarla como operación". (Piaget, 1975. Pág. 243)*

Por lo tanto, a partir de su trabajo, plantea tres etapas para llegar al establecimiento de la correspondencia entre varias colecciones.

La primera etapa se caracteriza porque el niño no efectúa multiplicaciones numéricas pues es incapaz de hacer composiciones multiplicativas.

La segunda etapa consiste en la realización de composiciones multiplicativas de la forma n + n, pero sin establecer la relación 2 a 1.

En la tercera se da la composición correcta de las relaciones de equivalencia y su generalización en la forma de operaciones multiplicativas, debido a la comprensión inmediata de las relaciones de correspondencia múltiple.

La tarea consiste en establecer dos correspondencias entre tres colecciones, así: 10 flores azules con 10 floreros, sacarlas y luego hacer corresponder otras 10 flores rosas con los mismos floreros, para sacarlas y realizar las siguientes preguntas a los niños:

1) *¿Las dos colecciones de flores poseen la misma cantidad?.*

   Esta pregunta indaga acerca de la correspondencia biunívoca y recíproca entre dos colecciones, es decir, por la composición de relaciones de equivalencia entre dichas colecciones, lo que significa que una de las dos colecciones se multiplica por 2.

2) *Teniendo esas dos colecciones de flores ¿cuántas le corresponden a cada florero?.*

   Se aborda en esta pregunta la composición de relaciones de equivalencia, en tanto se trata de atribuir a cada florero una pareja de elementos y no uno solo. Duplicación relación entre la equivalencia por correspondencia biunívoca y recíproca entre dos colecciones y la multiplicación aritmética.

3) *Si se sacan las flores de cada florero para organizarlas individualmente ¿cuántas resultan?.*

En esta última pregunta se indaga acerca de la capacidad de partir de la relación (X + Y) : F para determinar que a cada F le corresponden dos elementos.

Cuando se generaliza la composición de relaciones de equivalencia a 3, 4, 5 ó *n* relaciones aparece la operación multiplicativa.

Pueden observarse también tres etapas que se corresponden con las tres planteadas para la generalización de la correspondencia múltiple. Así

Tabla 3: Etapas de la construcción del pensamiento multiplicativo según Piaget[23].

	Pregunta 1: Consiste en establecer la correspondencia término a término de dos colecciones. "¿Hay lo mismo de flores azules y rosas?"	**Pregunta 2**: Consiste en hacer corresponder simultáneamente dos colecciones a una tercera. Teniendo las dos colecciones de flores, ¿cuántas le corresponden a cada florero?	**Pregunta 3**: Consiste en encontrar la cantidad total de elementos. Sacando las dos colecciones de flores de los floreros para organizarlas individualmente, ¿cuántas resultan?
Etapa 1	No logran coordinar las equivalencias ni las consideran durables.	Ausencia de correspondencia exacta y de composición de relaciones multiplicativas. No hacen una duplicación precisa.	No hay conciencia de la duplicación y aumenta de forma arbitraria las cantidades de flores.
Etapa 2	Correspondencia	Realizan la	Comienza

[23] Sintetizada a partir de Piaget, J. (1975). Génesis del número en el niño. Argentina: Guadalupe.

	término a término sin equivalencia durable.	duplicación pero por medio de ensayos. Composición progresiva. Comparan las dos colecciones perceptivamente, sin emplear como mediador la tercera colección.	estableciendo la relación 1 a 1, pero no logra tomar conciencia del valor exacto del aumento de la cantidad total de los elementos individuales. Establece la correspondencia múltiple descubierta empíricamente y de la forma n + n , sin generalizarla a 3, 4 ó más *n*.
Etapa 3	Se realiza la composición de forma inmediata y durable como una coordinación.	Resuelven el problema de la duplicación mediante una operación multiplicativa. Comprendiendo que si dos conjuntos corresponden respectivamente a un tercero, según una correspondencia 1 a 1, entonces los dos primeros reunidos, corresponderán al tercero según la relación 2 a 1.	Establece relaciones de correspondencia múltiple, generalizadas en la forma de operación multiplicativa a 3, 4 ó más *n.*

Como puede observarse la definición de la operación multiplicativa y las relaciones que involucra, no se produce de forma inmediata en determinado momento del proceso de aprendizaje, sino que surge como una continuación de la posibilidad de establecer relaciones aditivas entre diferentes cantidades, contemplando de forma simultánea la relación que existe entre diferentes colecciones equivalentes.

Piaget, citado por Luis Fiol y Joseph Fortuna, explicita así el proceso de construcción conceptual de las relaciones proporcionales:

"Ya que una proporción es una relación que se establece entre relaciones, el niño no puede construirla en el estadio de las operaciones concretas. Pero puede gradualmente:

a) Establecer compensaciones aditivas a + b = c + d.

b) Comparar por diferencia a – c = d – b.

c) Formular las correlaciones cualitativas, como por ejemplo: Lisboa es a Portugal como Roma es a Italia, o árbol es a bosque como abeja es a enjambre, o ladrido es a perro como maullido es a gato…

d) Comparar cualitativamente la relación entre variables, por ejemplo: a más… más, o a menos… menos… etc.

e) Concebir fracciones e incluso en algunos casos comprender la igualdad de dos fracciones "uno es a dos, como cincuenta es a cien".

f) Iniciar las compensaciones multiplicativas del tipo xy = zv. Esto le llevará más adelante a la idea de conservación de áreas de rectángulos, a la comprensión de la ley de la palanca, y del volumen de paralelepípedos.

La adquisición será más o menos tardía según los factores puestos en juego.

Hay que tener en cuenta que las compensaciones multiplicativas se relacionan directamente con la noción de proporción, puesto que si se tiene ab = a'b'; también se tiene por definición $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$*. Pero, y como afirman Inhelder y Piaget (1955), desde el punto de vista psicológico, comprender la proporción empieza siempre por el descubrimiento de una compensación, pero en cambio parece que comprender una compensación multiplicativa no tiene por qué pasar por la comprensión inicial de la proporción". (Fiol, 1990).*

3.3.2 Proporcionalidad simple directa

Esto implica que hay una línea de continuidad desde la multiplicación, entendida en el sentido clásico de suma de sumando iguales, hasta la proporcionalidad, la cual pasa por el desarrollo del pensamiento proporcional, que puede caracterizarse como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación y comparaciones múltiples, y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente distintos tipos de información (Lesh y otros 1988). El razonamiento proporcional esta estrictamente relacionado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de razonamiento cualitativo como cuantitativo.

Al implicar la covariación, el razonamiento proporcional está estrechamente relacionado con el pensamiento variacional. En sentido estricto, la covariación implica que dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las variables están correlacionadas[24].

Un caso particular de correlación, y de especial importancia, es aquel en que el modelo funcional relaciona las variables linealmente. Si el modelo es de dos variables se trata de una correlación lineal (el modelo funcional es una línea recta (**Y=mX+b**) si es de tres variables entonces se trata de una correlación bilineal[25] (función de la forma: **Z=XY**), si es de cuatro variables entonces puede presentarse

[24] En los análisis estadísticos que parten de tablas de datos que expresan la relación cuantitativa entre dos o más variables, primeramente se determina si existe covariación, generalmente a través de analizar la gráfica cartesiana de la nube de puntos que representan las relaciones entre los datos, y después, se realizan los respectivos análisis de regresión, que no son otra cosa que determinar si existe un modelo funcional que se ajuste a los datos experimentales. El factor de correlación determina el grado de ajuste del modelo funcional a los datos.

[25] Relación de una variable a dos variables, como por ejemplo, el caso de la función área, o el movimiento rectilíneo uniforme sin velocidad inicial.

una correlación trilineal[26] (función de la forma: **W=XYZ**), o incluso un modelo más complejo 2-2 lineal (función de la forma **WX=YZ)**[27], y así sucesivamente.

De las correlaciones de dos variables aquella en la que la correlación es positiva y perfecta (es decir, una línea recta **Y=mX** que pasa por el origen del sistema de coordenadas) es la que determina la proporcionalidad simple directa. Las correlaciones de más de dos variables determinan las proporcionalidades compuestas.

Una proporcionalidad simple directa se puede representar o modelar por una función tal que:

$$\begin{aligned} &A \xrightarrow{\ f\ } B \\ &x \longrightarrow f(x) = k \cdot x \end{aligned}$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad.

Esta función cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &f(x) + f(y) = f(x+y) \\ &f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

El estudio de los problemas de proporcionalidad simple directa a partir de la función o de las propiedades de la función, es generalmente pasado por alto en la escuela, y se simplifica su tratamiento a partir de uso de la regla de tres simple directa. En este tipo de problemas se trata averiguar un valor desconocido dados tres valores. El siguiente diagrama representa un modelo de una situación típica en las cual está subyacente la proporcionalidad simple directa:

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ a & \to & f(a) \\ b & \to & f(b) \end{array}$$

[26] Relación de una variable a tres, como por ejemplo, el caso de la función volumen.
[27] Relación de dos variables a dos, como por ejemplo en la ley de los gases ideales: PV=rNT, donde P es presión, V es volumen, N es el número de moléculas, T la temperatura, y r la constante universal de los gases.

En el caso que *a* = 1, entonces, se genera una multiplicación cuando se pide calcular el valor de *f(b)*[28]*,* una división cuotitiva si se pide calcular *b,* o una partitiva si se debe calcular *f(*1*).* Estos son los casos típicos escolares de la multiplicación y de la división, pero presentados, desde la perspectiva de la suma de sumandos iguales o las reparticiones, y sin una relación explícita con la proporcionalidad.

El caso general, es decir cuando *a* es un número cualquiera, sin importar cual sea el termino desconocido, su solución pasa bien por un análisis escalar (analizando las relaciones entre las cantidades del mismo espacio de medida) o por uno funcional (analizando las relaciones entre las cantidades correspondientes de un espacio de medida al otro)[29].

Un análisis escalar implica reconocer que si $b = \lambda \cdot a$ entonces $f(b) = \lambda \cdot f(a)$. En este caso λ es un número racional y no tiene unidades[30]. Por su parte, un análisis funcional implica el reconocer que si $a = \delta \cdot f(a)$ entonces $b = \delta \cdot f(b)$, o lo que es lo mismo, si $\delta \cdot a = f(a)$ entonces $\delta \cdot b = f(b)$[31]. En este caso δ es un número racional con unidades[32], y es el inverso multiplicativo de la constante de proporcionalidad, o la constante misma.

Aunque cada uno exige un tipo de análisis distinto de la situación, pues implican poner en relación magnitudes de dos espacios de medida distintos en el segundo caso, o del mismo espacio de medida en el primero, la elección de una relación u otra para la solución de la situación está determinada por factores tales como la naturaleza de las magnitudes implicadas (continuas o discretas), los números implicados (naturales, enteros, decimales, etc.) y por la naturaleza de los operadores (que tipo de número son tanto el operador funcional como el escalar).

[28] Este es el caso típico de la escuela, pero que es presentado a través de la noción de suma de sumandos iguales..
[29] Lo cual desde ningún punto de vista implica que primero halla que enseñar la función lineal a los alumnos para que puedan resolver problemas de proporcionalidad directa, sino por el contrario, desde aquí se puede construir una aproximación bastante interesante para su estudio.
[30] Se hace uso de la segunda propiedad antes descrita.
[31] Se hace uso de la definición de función dada antes.
[32] Un caso particular de este tipo de números se da en física o en química al trabajar con factores de conversión para la transformación de unidades.

Los procedimientos para resolver uno u otro tipo de problemas puede se muy variado dependiendo del grado de dificultad del problema (una discusión detallada de estos puede leerse en Vergnaud, 1988, 1991, 1993a, 1993b). Uno en particular muy importante se presenta cuando los alumnos emprenden una solución tipo aditiva (utilizando la primera propiedad descrita antes) en problemas en los que están dados $a, f(a),\ b$ y $f(b)$ y se debe averiguar $f(c)$, donde $c = a + b$ pues en este caso $f(c) = f(a) + f(b)$.

Es pertinente anotar que este tipo de problemas puede ser modelado a través de una tabla de correspondencia entre los dos espacios de medida, la cual, además de constituir una buena herramienta para comprender las relaciones de proporcionalidad que están involucradas, en tanto que permite ver la dependencia de las variaciones de los valores de un espacio de medida con respecto al otro espacio de medida, también permite realizar representaciones gráficas en el plano cartesiano. Esto aspectos permiten varias formas de aproximarse a la correlación entre los dos espacios de medida, y por ende a las propiedades del modelo matemático en juego.

Se desprende de lo mencionado previamente la necesidad de diseñar situaciones problema de variación proporcional que permitan a los niños la conceptualización de las estructuras multiplicativas, a partir del análisis de la variación entre las magnitudes involucradas en la situación, más que de adición repetida de una misma cantidad; de esta forma se favorece la realización de análisis dimensionales y de tablas de variación, que faciliten la comprensión y resolución de los problemas de multiplicación y división.

Otra ventaja que puede considerarse es la posibilidad de evitar el fraccionamiento en el aprendizaje de los conceptos correspondientes a las estructuras multiplicativas, ya que si desde el inicio se plantea la relación cuaternaria se logrará una conceptualización integrada de los conceptos propios de lo multiplicativo, y por ende conducente a menos errores, como la indiferenciación en los espacios de medida en los cuales se obtienen los resultados o la concepción de que siempre la multiplicación “agranda” las cantidades y la división las “empequeñece”.

3.4 OTROS AUTORES

Diversas investigaciones se han encargado de indagar por el camino más acertado para introducir y construir en los niños un pensamiento multiplicativo, a la vez que permitirles la comprensión de las operaciones multiplicación y división, desarrollando la capacidad de utilizarlas adecuadamente.

Se destacan, entre otras, la de Jaime Martínez Montero[33] quien enfatiza en la necesidad de construir los algoritmos correspondientes de formas más diversas y la de Carlos Maza Gómez que plantea como alternativa a los dos modelos tradicionales de introducción a la multiplicación, el de árboles.

La propuesta realizada por Jaime Martínez Montero afirma que la forma más natural de iniciar la multiplicación es a partir de la suma; como simplificación de ciertas adiciones, a partir de la posibilidad que tenga el niño de realizar descomposiciones y construir la ‘tabla pitagórica’. Para iniciar la comprensión de la multiplicación toma como referente la adición de determinado número una cantidad específica de veces, planteando al estudiante completar tablas como la siguiente (Montero, 2000, pág 72):

1 vez	2 veces	3 veces	4 veces	5 veces	6 veces	7 veces	8 veces	9 veces	10 veces
4	8								

[33] MARTÍNEZ, J. (2000). Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI. Barcelona: R.G.M.,

A partir de duplicaciones sucesivas de la cantidad inicial, es decir completar primero las casillas correspondientes al 4, al doble de 4, al doble de 8 y al doble de 16;

1 vez	2 veces	3 veces	4 veces	5 veces	6 veces	7 veces	8 veces	9 veces	10 veces
4	8 (doble de 4)		16 (doble de 2 veces el 4)				32 (doble de 4 veces el 4)		

para luego llenar las casillas que hacen falta a partir de la adición del resultado que aparece en la casilla anterior y el de una vez, así: para la casilla de 3 veces el 4 se emplea la de dos veces el 4 y la de una vez el 4 lo que da un resultado de 12; para la de 5 veces el 4, se emplea la de el doble de 2 veces el 4 más una vez el 4 y así con las restantes.

1 vez	2 veces	3 veces	4 veces	5 veces	6 veces	7 veces	8 veces	9 veces	10 veces
4	8	12 (el doble de 2 veces el 4 más una vez el 4)	16	20 (el doble de 2 veces el 4 más una vez el 4)	24 (el doble de 2 veces el 4 más dos veces el 4)		32	36 (el doble de 4 veces el 4 más una vez el 4)	

Con este mismo enfoque se completa la tabla pitagórica[34] y se lleva al estudiante a descubrir las relaciones existentes observando las diagonales y en general las regularidades que se presentan en la misma. Sin embargo no analiza de forma

[34] También conocida como “Tabla de doble entrada”, la cual se elabora disponiendo las tablas de veces obtenidas previamente para cada uno de los números hasta el 10, unas debajo de otras.

explícita los diferentes modelos que dan origen al concepto de la multiplicación, y en cuanto a la división sólo establece la diferencia entre reparto en partes iguales (cuando se distribuye material discreto) y división (cuando se subdividen materiales continuos).

Su énfasis está puesto sobre todo en la elaboración de los algoritmos para la multiplicación y la división, dejando de lado la conceptualización misma de ambas operaciones. Sin embargo se resalta la importancia que da a la construcción de dichos algoritmos desde las diferentes relaciones entre los números y las regularidades del sistema de numeración. Esto constituye un aspecto importante planteado en los Lineamientos Curriculares cuando se hace referencia allí a la necesidad de ponerse acorde a la época tecnológica en la que está inmersa la educación actualmente, lo que implica dedicar esfuerzo a establecer relaciones que permitan afianzar los procesos de estimación y de aproximación, brindando la posibilidad de dar sentido a las respuestas encontradas luego de la realizar ciertos cálculos.

Otra forma de introducir a los niños en las estructuras multiplicativas consiste en la planteada por Carlos Maza Gómez quien se basa en el planteamiento de los Campos Conceptuales realizado por Vergnaud para clasificar los problemas que dan origen a las estructuras multiplicativas en cuatro grandes grupos. Los de razón, los de comparación, los de combinación y los de conversión.

En los de razón se incluyen los que presentan dos espacios de medida y que constituyen un caso particular de la regla de tres donde uno de los elementos es la unidad; de allí, tal como se analizó antes, se desprende un problema de multiplicación (cuando se pide hallar el resultado de aplicar un operador escalar a uno de los elementos del otro espacio de medida), o surgen también dos problemas de división (según se pida hallar el valor de la unidad o la cantidad de veces que puede ser contenida dicha unidad en una cantidad total). Igualmente señala que los problemas de multiplicación pueden resolverse por adición reiterada de una misma cantidad un número determinado de veces, pero no enfatiza que deba enseñarse a los estudiantes a hacerlo de esta forma, sino que más bien la presenta como una de las posibles alternativas empleadas por los niños. Contrario a los análisis propuestos por Vergnaud, no hace explícita la relación variacional entre los dos espacios de medida, lo cual es sin duda alguna una debilidad de la propuesta, pues deja de lado un aspecto central en la conceptualización de la multiplicación: los tipos de relaciones matemáticas (las escalares y las funcionales) que surgen en el análisis de variación en una situación de proporcionalidad directa.

Con relación a los problemas de comparación los caracteriza como aquellos en los que sólo interviene un espacio de medida, al interior del cual se establece una comparación de carácter multiplicativo. Es así como en la expresión tener "cuatro veces más" el número 4 corresponde a la relación establecida entre una cantidad con respecto a otra que es cuatro veces mayor, pero sin pertenecer a un espacio de medida en particular. Los dos problemas de división asociados a esta clasificación están determinados, en primera instancia, por la necesidad de establecer la relación entre ambas cantidades, es decir, las veces que un número está contenido en el otro, y en segundo lugar, por la necesidad reencontrar la cantidad que se repite *n* veces para igualar a la otra cantidad dada.

Los problemas de producto de medidas son aquellos en los que existen tres espacios de medida claramente diferenciados, uno de ellos formado por el producto de los otros dos, donde la multiplicación no se puede interpretar como una suma reiterada, sino como la combinación simultánea de los dos espacios de medida iniciales (es el caso del área de un rectángulo como producto de las medidas de sus lados: el área no es el resultado de sumar n-veces la longitud de uno de los lados). Se asocia a esta clasificación un solo problema de división, el cual corresponde con establecer uno de los espacios iniciales, conociendo el tercer espacio de medida y uno de los iniciales.

Los problemas de conversión corresponden a aquellos en los que una de las cantidades indica la "intensidad" con la que una cantidad está contenida en otra, expresando ésta como una razón entre dos magnitudes. En este tipo de problemas, la razón expresa la cantidad de unidades de una de las magnitudes por cada unidad de la otra. Es el caso por ejemplo, en el que se establece el precio por unidad de un determinado artículo. El valor por unidad expresa cuantos pesos se debe pagar por cada unidad comprada, y por tanto, es una razón. Dicho de otra forma, la razón que expresa la relación entre las dos magnitudes es la constante de proporcionalidad que relaciona funcionalmente los dos espacios de medida involucrados en la situación. En ese caso, esta categoría de problemas sería una situación particular de la categoría uno analizada anteriormente.

Concluye, por último, que la multiplicación

> *"Es, ante todo, una operación aritmética tanto de naturaleza unitaria como binaria, que puede interpretarse como una suma reiterada (sin ser lo mismo) o como un producto cartesiano".(Maza, 1991).*

Este enfoque aporta un estudio sistemático de los diferentes tipos de problemas que se desprenden de los planteamientos de Vergnaud y que es necesario tener en cuenta para la conceptualización de las estructuras multiplicativas, pero deja de lado el estudio de la metodología con la que puede hacerse efectiva esta construcción en el aula de clase: el análisis de las variaciones en los espacios de medida.

En síntesis es importante indagar sobre algunos aspectos relevantes de la enseñanza de la proporcionalidad, puesto que si bien no se trata de llevar al alumno de grado segundo o tercero al estudio sistemático de los conceptos involucrados en la proporcionalidad, si se hace necesario conocer que en esta edad de operaciones concretas el estudiante puede realizar determinadas acciones que dan cuenta de la variación y las compensaciones multiplicativas.

4 METODOLOGÍA PROPUESTA.

4.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA.

4.1.1 Resultados y productos esperados

- Aportar conocimiento matemáticos, cognitivos y didácticos apropiados para orientar a los docentes de matemáticas de las instituciones educativas del país en la conceptualización del pensamiento numérico en general, y del multiplicativo en particular.

4.1.2 Impactos esperados

- A mediano plazo se esperan mejores resultados en la pruebas SABER, como consecuencia de mayores niveles de comprensión en el pensamiento numérico.

- A largo plazo se esperan mejores resultados en las pruebas ICFES, como consecuencia de mayores niveles de comprensión en el pensamiento numérico.

4.2 VARIABLES.

4.2.1 Macro – didácticas.

Las variables que harán evolucionar las estrategias de resolución en los alumnos y a través de las cuales será posible evidenciar el avance en sus saberes, son:

- *Campo numérico en el cual se realizarán las actividades*. Si bien ante un campo numérico reducido el niño posee determinadas destrezas para operar con pequeñas cantidades, al modificarle el tamaño de las cantidades, es decir, ampliar el campo numérico en el cual realizará las operaciones, se ve obligado a modificar sus estrategias iniciales de conteo de cada unidad y deberá realizar conteos de grupos de unidades.

- *Conocer o no el valor de la unidad*. Puesto que de esta forma se establecen problemas de división en los cuales se pone en juego la reversibilidad de su pensamiento y la comprensión de las relaciones que se establecen entre las diferentes variables de un problema.

- *Utilización de sucesiones numéricas.* Debido a que es posible que las conozca de forma memorística, sin establecer las relaciones de variación que se dan entre los números que las conforman.

4.2.2 Micro – didácticas.

Se contemplarán para cada una de las situaciones planteadas.

4.3 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.

Con relación al proceso de construcción del pensamiento multiplicativo se determinan en el presente trabajo cuatro categorías que permiten clasificar los procedimientos empleados por los estudiantes y que dan cuenta del estado de conceptualización en el que se encuentran.

En la primera categoría no se logra establecer apropiadamente la relación entre las variables involucradas en el problema. En la segunda es posible establecer y representar las dos variables involucradas en el problema y se emplean para su resolución argumentos aditivos. En la tercera se emplea la relación escalar que hay al interior de cada espacio de medida con predominio de una estrategia aditiva. Finalmente en la cuarta categoría se emplea la relación multiplicativa, partiendo bien sea de la relación escalar o de la relación funcional.

A partir del problema de las canicas, analizado previamente, se ejemplifican las respuestas correspondientes a cada categoría

Una canica cuesta $20. ¿Cuál es el costo de 3 canicas? ¿Y el costo de 6 canicas?

Para el análisis de dicho problema se puede construir la siguiente tabla que organice la información:

Canicas	Precio
1	20
3	
6	

PRIMERA CATEGORÍA.

En esta categoría se evidencia que el estudiante no identifica ni establece apropiadamente las relaciones que hay entre los dos espacios de medida y al interior de cada uno de ellos. Ejecuta procedimientos en los que realiza alguna de las operaciones básicas, casi siempre adición o multiplicación, pero sin comprender el sentido de su uso, pues elige, al parecer de manera arbitraria, dos o más cantidades que considera importantes pero sin justificar de forma alguna la relación entre ellas. En otras palabras, si bien se identifican los dos espacios de medida, no se logra establecer que están correlacionados entre si, y por tanto, las operaciones que se realizan expresan una elección al azar, más que un análisis del tipo de relaciones matemáticas entre ambos espacios de medida.

Un procedimiento que ejemplifique esta categoría sería la adición de 1 + 3 + 6 + 20 = 30. Debido a que se reconocen como valores importantes, pero no se identifican las relaciones existentes entre ellos.

SEGUNDA CATEGORÍA

En este caso se pone en evidencia la primacía de un pensamiento aditivo al realizar adiciones de una misma cantidad para completar los valores que faltan en el segundo espacio de medida. En una primera etapa de esta categoría el estudiante se apoya en la elaboración de dibujos que le permiten realizar conteos para determinar los valores que le son solicitados, y en una segunda etapa, encuentra las cantidades que faltan al realizar adiciones sucesivas de una determinada cantidad.

Para la primera etapa el procedimiento que la caracteriza puede ser:

● 20 ● 20 ● 20

Obteniendo un resultado de 60 pesos para las tres canicas, y de forma similar un resultado de 120 pesos para las seis canicas.

Con relación a la segunda etapa de esta categoría el procedimiento que la ejemplifica es:

20 + 20 + 20 = 60 y 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 120.

Es importante desatacar que en esta categoría se da un paso significativo al identificar la correlación entre los dos espacios de medida, aunque esta correlación se matematiza a través de una relación aditiva, y está unida a una representación gráfica. Esto es, se identifica que al repetir aditivamente una cantidad en uno de los espacios de medida, esta misma repetición se puede realizar siguiendo un patrón similar en el otro espacio de medida, y de esta manera hallar la cantidad desconocida en el problema.

TERCERA CATEGORÍA.

Los estudiantes se dan cuenta de que hay una variación simultánea de ambos espacios de medida y logran completar los valores que faltan en cada uno de ellos. En una primera etapa, realizando de forma sucesiva la adición de la cantidad adecuada en el segundo espacio de medida, y en la segunda etapa, completando éste por procedimientos multiplicativos. En ambos casos no se establecen todavía la relación que hay entre los dos espacios de medida, sino únicamente la que se presenta al interior de cada uno de ellos.

En esta categoría ya establece la relación entre ambos espacios de medida. En la primera etapa de forma aditiva así:

1 + 1 + 1 = 3, por lo tanto el valor pedido de las tres canicas puede encontrarse adicionando de forma repetida las casillas correspondientes a 20 + 20 + 20 = 60, de igual forma si 3 + 3 = 6, el valor de las seis canicas corresponde a la adición de 60 + 60 = 120.

En la segunda etapa establece dichas relaciones de forma multiplicativa así:

1 x 3 = 3, por lo tanto 20 x 3 = 60 y para las seis canicas puede proceder partiendo de 1 x 6 = 6 lo que permite realizar 20 x 6 = 120 o bien, 3 x 2 = 6 lo cual posibilita realizar 60 x 2 = 120.

La diferencia fundamental entre esta categoría y la anterior radica en que se hace explícita la relación entre ambos espacios de medida, sin que esta se de mediada por una representación gráfica, aunque en la primera etapa se sigue anclado a procedimientos de tipo aditivos, en la segunda etapa, esta relación (análisis escalar) se da en términos multiplicativos.

CUARTA CATEGORÍA

Esta última categoría implica el reconocimiento de la relación funcional entre ambos espacios de medida y la realización de los procedimientos multiplicativos más convenientes para completar los valores que hacen falta en cada uno de ellos.

Así logran realizar tanto el análisis vertical como el horizontal, a saber:

Canicas	Precio
1	20
3	
6	

El valor de seis canicas corresponde a seis veces el valor de una canica, si 6 x 1 = 6, entonces 6 x 20 = 120.

O el análisis horizontal:

Canicas	Precio
1	20
3	
6	

En donde la relación entre canicas y precio es la multiplicación por 20, así el precio de una canica es 1 x 20 = 20 y de la misma forma esta relación funcional se cumple para el precio de las otras cantidades de canicas: 3 x 20 = 60 y 6 x 20 = 120.

Es de anotar que la elección de la relación a utilizar en esta categoría depende del problema planteado, pues si bien en algunos se identifica más fácilmente la relación escalar, en otros es más evidente la relación funcional.

Para efectos del análisis y sistematización de los resultados obtenidos, se denominarán las anteriores categorías como sigue:

Categoría 1 (C1): No establecen las relaciones entre los espacios de medida.

Categoría 2 (C2): Establecen las relaciones entre los espacios de medida: y

Categoría 2a (C2a): Emplean dibujos para resolver los problemas.

Categoría 2b (C2b): Emplean adiciones sucesivas para resolver los problemas.

Categoría 3 (C3): Descubren la simultaneidad en la variación de ambos espacios de medida.

Categoría 3a (C3a): Emplean procedimientos aditivos para resolver los problemas.

Categoría 3b (C3b): Emplean procedimientos multiplicativos para resolver los problemas.

Categoría 4 (C4): Establecen la relación escalar y la relación funcional y emplean la más conveniente para resolver los problemas.

5 EXPERIMENTACIÓN.

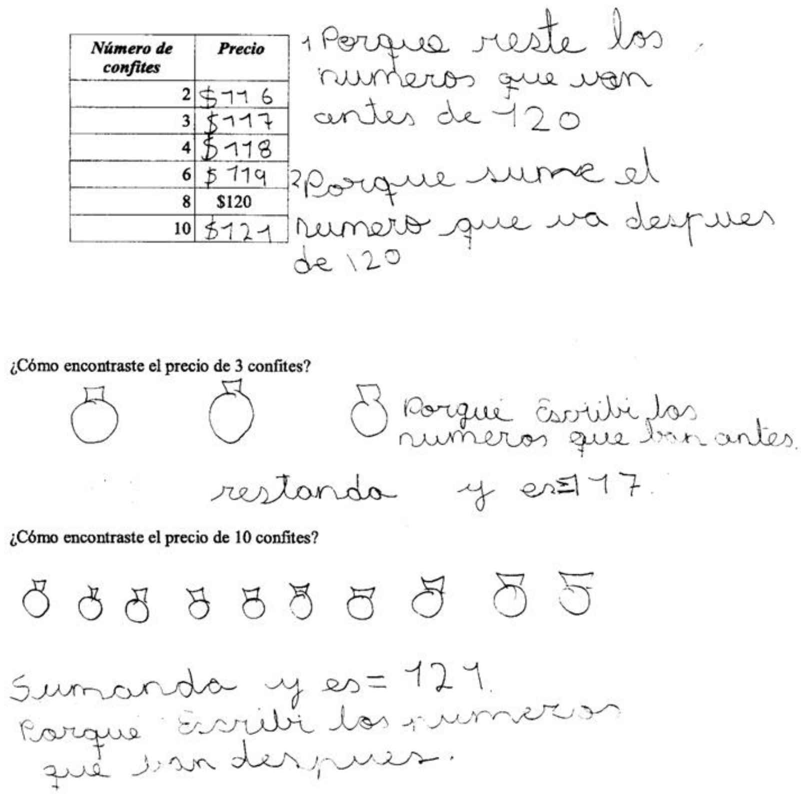
5.1 PRUEBA DE ENTRADA

Para determinar el estado de conceptualización de los estudiantes con relación a las Estructuras Multiplicativas se planteó una prueba inicial que contenía tres problemas de proporcionalidad. (ANEXO 2).

El primero de ellos consistía en completar una tabla a partir de una información inicial. "Andrés pagó $120 por 8 confites iguales. ¿Cuánto pagará por 3 confites?" y luego se pedía completar el valor para 2, 3, 4, 6, 8 y 10 confites iguales.

Este problema tiene cierto nivel de complejidad, pues su solución implica realizar varias divisiones y/o multiplicaciones según el caso, y sobre todo, implica hallar el costo de una unidad para desde allí completar los datos solicitados. En este sentido no se trata de un problema típico de multiplicación, y su solución implica establecer de forma clara la correlación entre los dos espacios de medida, y en cierta forma, el reconocimiento (así sea de forma intuitiva) de la constante de proporcionalidad – para el caso de soluciones multiplicativas –, o de las propiedades aditivas de las relaciones lineales – para el caso de soluciones de repeticiones aditivas –.

Para este problema se encontró que los estudiantes en la prueba no lograron determinar el valor de un confite y emplearon procedimientos del tipo restar una unidad al valor de los 8 confites para cada una de las cantidades que se pedía, así, para 6 confites hicieron 120 – 1 = 119, para 4 realizaron 119 – 1 = 118 y así sucesivamente, como puede observarse en la siguiente imagen.



Número de confites	Precio
2	$116
3	$117
4	$118
6	$119
8	$120
10	$121

1 Porque reste los numeros que van antes de 120

2 Porque sume el numero que va despues de 120

¿Cómo encontraste el precio de 3 confites?

Porqué Escribi los numeros que iban antes. restando y es=117.

¿Cómo encontraste el precio de 10 confites?

Sumando y es= 121.
Porque Escribi los numeros que iban despues.

Ilustración 5: Producción E7

Así como este procedimiento se presentaron otros en los que los estudiantes de forma intuitiva determinaban que la variación del precio de los confites debía ser mayor a una unidad, pero no lograban emplear estrategias de cálculo que les permitieran encontrar el valor de la variación en la columna de los precios, sino que realizaban una estimación de una cantidad entre 10 y 30 aproximadamente y esa cantidad la iban disminuyendo o aumentando según el número de confites al que le establecían el valor.

Las estrategias empleadas por cada uno de los estudiantes para el problema uno fueron de tres clases, los que no resolvieron el problema (P1.1: Problema 1, estrategia 1) que en total fueron 7 estudiantes, los que tuvieron en cuenta una variación de una unidad para cada confite (P1.2: Problema 1, estrategia 2) representados por 8 estudiantes y 11 estudiantes que de forma intuitiva establecieron un valor mayor para la variación, pero sin emplear una estrategia consistente para hallar el valor de un confite (P1.3: Problema 1, estrategia 3) .

De estas tres estrategias se deduce que los estudiantes no logran determinar el valor de la unidad a partir del número total de unidades y el valor correspondiente a dicha cantidad total, lo cual implica la realización de una división. Por otra parte con relación a la multiplicación no se establece dicha relación sino que realizan adiciones repetidas de determinada cantidad.

El segundo problema planteado fue “Mateo quiere tener 20 videojuegos y la mamá le propuso un trato. Cada vez que Mateo compre 2 videojuegos con sus ahorros, la mamá le va a regalar 3 videojuegos. ¿Cuántos videojuegos tendrá que comprar Mateo y cuántos tendrá que darle la mamá?”.

Al igual que en el problema anterior, este problema implica el uso de las operaciones división y multiplicación, pero sobre la base de que la cantidad de videos se agrupa en paquetes de cinco (dos que él compra, y tres que le regala la mamá). Por lo tanto, para completar los 20, debe repetir cuatro veces esta operación, lo que da 4 veces 2 (los videos que compra Mateo) y 4 veces 3 (los videos que le regala la mamá).

Para este problema se encontraron tres estrategias de resolución, los que inicialmente no comprendieron las relaciones entre las diferentes cantidades planteadas en el problemas y que realizaron una operación aditiva que no expresaba una relación coherente con la estructura de los datos del problema, como 10 + 10 = 20 para responder que Mateo compra 10 y la mamá le regala 10, o también los que realizaron 2 + 3 + 20 = 25 y respondieron que Mateo tiene 25 videojuegos. (P2.1: Problema 2, estrategia 1)

La segunda estrategia empleada fue mediante dibujos que representaran los videos comprados por la mamá y por Mateo hasta obtener 20 en total (ver ilustración 9), luego contar lo correspondiente a cada uno y dar la respuesta de que Mateo compra 8 y la mamá le regala 12. (P2.2: Problema 2, estrategia 2).

La tercera estrategia consistió en realizar dos adiciones simultáneamente, 2 + 2 + 2 + 2 = 8 y 3 + 3 + 3 + 3 = 12 (ver ilustración 10), para obtener la misma respuesta. (P2.3: Problema 2, estrategia 3). Estos estudiantes dan cuenta de que alcanzan a identificar la existencia de dos magnitudes que varían de forma simultánea, pero no encuentran el procedimiento óptimo para determinar la variación en cada uno de ellos.

Ilustración 6: Producción E6

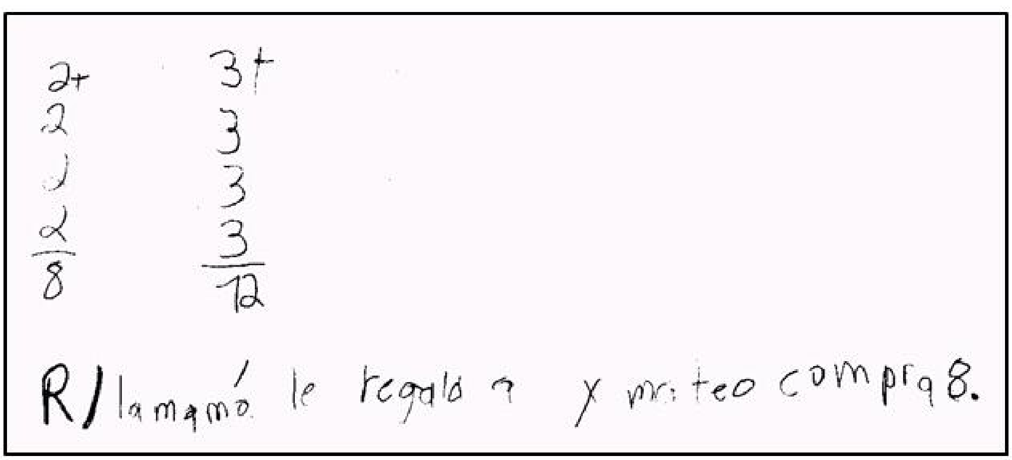


Ilustración 7: Producción E8

El tercer problema planteado fue: un panadero utilizó 10 bolsas de leche para hacer 20 panes iguales. ¿Cuántas bolsas de leche necesitará para hacer 18 panes iguales?, para este problema se encontraron las mismas estrategias empleadas en el problema de los videojuegos.

La siguiente tabla muestra la clasificación de los estudiantes según las estrategias empleadas en los problemas planteados. (*Entiéndase "P1" como el primer problema planteado y "P2" como el segundo problema y los números que aparecen luego del punto corresponden a cada una de las estrategias mencionadas en los párrafos precedentes)*.

Tabla 4: Procedimientos empleados para las dos preguntas de la prueba inicial

		P1.1	P1.2	P1.3	P2.1	P2.2	P2.3
1	E1			X		X	
2	E2		X		X		
3	E3		X			X	
4	E4			X			X
5	E5			X			X
6	E6		X		X		
7	E7	X			X		
8	E8			X	X		
9	E9			X			X
10	E10			X		X	
11	E11	X			X		
12	E12		X			X	
13	E13		X		X		
14	E14			X			X
15	E15			X		X	
16	E16		X			X	
17	E17	X			X		
18	E18	X				X	
19	E19	X				X	
20	E20	X			X		
21	E21		X		X		
22	E22			X			X
23	E23			X			X
24	E24		X			X	
25	E25			X			X
26	E26	X			X		
Total		7	8	11	10	9	7
Porcentaje		26.9%	30.8%	42.3%	38.5%	34.6%	26.9%

Como se puede observar, hay consistencia entre las estrategias empleadas por cada estudiante en las dos preguntas planteadas, lo cual permite concluir que efectivamente no presentan un pensamiento multiplicativo, sino que los más avanzados realizan aproximaciones de carácter aditivo, correspondientes a la segunda etapa plantada por Piaget para la construcción del pensamiento multiplicativo, la cual corresponde, como ya se mencionó, al establecimiento de relaciones de la forma $n + n$. Dicho de otra forma, el nivel de desarrollo conceptual matemático de los niños evaluados está unido a razonamientos de tipo aditivos, y los que logran identificar la existencia de dos espacios de medida, no logran correlacionar la variación entre ellos a partir de procesos multiplicativos, sino que dicha correlación se hace a través de procedimientos gráficos, que les permiten aplicar estrategias aditivas en su solución.

5.2 DISEÑO DE SITUACIONES PROBLEMA.

5.2.1 Situación uno: Juguemos bolos

Análisis preliminares

5.2.1.1 Objetivos

- Realización de conteos simples.
- Interacción Interrelacionar con dos espacios de medida a partir de donde se observan los cambios al interior de cada uno.

5.2.1.2 Variables

- Tamaño de los números: menores que 5 y mayores que 5. Se relaciona con dos rangos numéricos en los cuales puede darse la diferencia entre cálculo y conteo. Es decir, para los estudiantes se hace más sencillo el conteo repetido de cantidades “pequeñas”, o sea menores que cinco, pues pueden contarlas y operar mentalmente más fácilmente con ellas. Con cantidades mayores que cinco, se ven obligados a acudir a otras estrategias que pondrán en evidencia sus capacidades de cálculo para adicionar una cantidad a la anterior y obtener el valor siguiente.

- Problemas con una sola incógnita, con dos incógnitas y con más incógnitas. Esto implica la necesidad de tener en cuenta de forma simultánea dos variables o más y reconocer las relaciones existentes entre ellas.

5.2.1.3 Materiales

- 10 bolos de colores amarillo, verde, azul y rojo, una pelota de caucho y una hoja de registro.

5.2.1.4 Descripción

Actividad 1

- Cada jugador lanza la pelota, registra en su cuaderno el número de bolos de cada color que tumbó y levanta los bolos caídos.

- Cuando todos los jugadores hayan lanzado deben completar la tabla grupal para el primer turno y luego realizar el segundo turno donde todos los jugadores deben volver a lanzar y así hasta terminar los tres turnos de cada equipo.

- Ganará el equipo que más puntaje obtenga al final de los tres turnos, sabiendo que:
    - Bolos azules dan 2 puntos cada uno.
    - Bolos verdes dan 3 puntos cada uno.
    - Bolos amarillos dan 4 puntos cada uno.
    - Bolos rojos dan 5 puntos cada uno.

- Comparen los puntajes con los demás equipos. El equipo ganador fue: ______

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno					
Segundo turno					
Tercer turno					
				Puntaje total	

Actividad 2

- Se entrega a cada estudiante una ficha de trabajo individual con preguntas y problemas relacionados con el juego de los bolos cuando los valores de cada bolo son menores o iguales que 5. (Anexo 3)

Actividad 3

- Reúnete nuevamente con tus compañeros para jugar a los bolos.
- Observa los puntajes que ahora se obtienen con cada color.
  - Bolos azules dan 7 puntos cada uno.
  - Bolos verdes dan 8 puntos cada uno.
  - Bolos amarillos dan 9 puntos cada uno.
  - Bolos rojos dan 10 puntos cada uno.

5.2.1.5 Lo matemático

- Se presenta la relación multiplicativa correspondiente al *Isomorfismo de medidas*, según la cual se establece una correspondencia entre dos tipos de cantidades. Siendo posible realizar:

- Análisis funcionales: Para obtener el puntaje se multiplica el valor de cada bolo (según el color), por el total de bolos derribados de dicho color.

- Análisis escalares: Para obtener el puntaje total se repite el valor de cada bolo según el color, tantas veces como bolos se hallan tumbado.

- Se presentan dos espacios de medida diferentes: los bolos derribados y el puntaje obtenido, y su relación se puede expresar por medio de una tabla de doble entrada como la siguiente:

Bolos azules derribados	Puntaje obtenido
1	2
2	4
3	6

5.2.1.6 Análisis

En la Actividad 1 se esperaba que los alumnos pusieran en marcha tres estrategias de solución, como se describen a continuación.

- E1: Conteo uno a uno de las unidades implicadas en cada uno de los grupos de unidades compuestas (valor según el color de los bolos), empleando algún tipo de herramienta (dibujo, dedos, movimiento de los dedos, fichas) que les permitan tener presente la cantidad total de las unidades compuestas, a partir del conteo de las cada unidades simples.
- E2: Realizar conteos múltiples.

  - E2.1: Escritos. Donde cada vez que se toma una unidad compuesta, se escribe la cantidad total alcanzada en el segundo espacio de medida.
  - E2.2: Verbales. En los cuales se realiza el conteo y se retiene en la memoria la cantidad precedente para enunciar únicamente la siguiente.
- E3: Realizar multiplicaciones, empleando en el segundo espacio de medida, el mismo escalar que fue empleado en la transformación del primer espacio de medida (si se tumban N bolos de un color, entonces se multiplica N por el valor asignado a dicho color de bolos).

Para la primera parte de la actividad 2 se espera que el estudiante resuelva situaciones de respuesta única en las que sea necesario realizar los conteos múltiples según el valor de cada bolo para hallar el total de puntos obtenidos (en lo fundamental, análisis escalares), al igual que conociendo el total de puntos, averiguar la cantidad de bolos derribados (en este caso, situaciones de división). En la segunda parte de la misma actividad se espera que encuentre diferentes alternativas de solución para una misma situación, dependiendo de la combinación que él mismo realice de bolos derribados, puntaje total y valor de cada bolo.

Por último, para la actividad 3 se espera que el estudiante realice conteos con números mayores que 5, resolviendo situaciones en las que se obtengan respuestas únicas o para las que haya diferentes alternativas de solución.

5.2.1.7 Experimentación y análisis a posteriori.

La actividad se llevó a cabo en un ambiente adecuado y permitió establecer que los procedimientos empleados por los estudiantes corresponden a las dos primeras categorías del pensamiento multiplicativo, es decir, la totalidad de estudiantes no logra descubrir la simultaneidad de la variación en ambos espacios de medida. De éstos, 6 estudiantes, no consiguen establecer ninguna relación entre dichos espacios, y los 20 estudiantes restantes establecen la relación entre la cantidad de bolos derribados y el puntaje que da cada uno, pero con el recurso de gráficas o adiciones sucesivas para determinar el puntaje total obtenido para cada número de bolos derribados.

5.2.2 Situación dos: Juguemos parqués

Análisis preliminares

5.2.2.1 Objetivos

- Realizar conteos múltiples.
- Determinar cuántas veces está contenido el número 2 en otras cantidades.

5.2.2.2 Variables

- Tamaño de los números: 2 ó diferente de 2. El conteo de dos en dos es en exceso sencillo y puede decirse que los estudiantes lo han aprendido casi de forma cultural, ya que es común escuchar contar "de dos en dos", en tanto los conteos con cantidades diferentes implican en el estudiante generar procedimientos de cálculo diferentes para obtener tanto los resultados intermedios como los finales.

- Tamaño y naturaleza de las cantidades en las que está contenido el número dos; es decir, cuántas veces cabe el dos en la cantidad marcada por los dados, y si dicha cantidad es par o impar.. En particular el carácter de par o impar genera la necesidad de tomar decisiones acerca del residuo de la división según que ésta sea exacta o inexacta.

- Presentación de los datos de forma organizada o no, según la variación en los puntajes. Así: al sacar 2 en los dados, luego al sacar 3, luego 4, etc., al presentarlos de forma organizada los estudiantes inicialmente descubren que se trata de agregar “uno” al anterior, pero al presentar los datos de forma no secuencial, surge la necesidad de recurrir a otras estrategias para realizar los conteos.

- Problemas con una sola incógnita, con dos incógnitas y con más incógnitas. Como en la situación anterior, esta variable implica la necesidad de tener en cuenta de forma simultánea dos variables o más y reconocer las relaciones existentes entre ellas.

5.2.2.3 Materiales

- Tablero de parqués común, 4 fichas para cada uno de los 4 jugadores, dados, tabla de registro individual, guía de trabajo individual.

5.2.2.4 Descripción

Actividad 1

- Se entrega un juego de parqués completo a cada grupo de 4 estudiantes. Comienza el juego quien al lanzar un dado obtenga el mayor puntaje.
- Se establece que se jugará normalmente pero cada casilla tiene un valor de dos puntos. Es decir, si se saca 4 y 5, no se desplaza 9 casillas sino sólo 4 casillas (2, 2, 2, y sobra 1). El equipo decide qué hará con los puntos sobrantes.
- A medida que se desarrolla el juego cada uno va completando una tabla de registro individual como la siguiente:

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Actividad 2

- Se entrega a cada estudiante una tabla de registro incompleta para ser llenada por él. (Anexo 4)

Actividad 3

- Se plantea la misma tabla de registro incompleta para ser llenada, pero cambiando el valor de cada casilla por un número diferente de 2.

5.2.2.5 Lo matemático

- Se presenta la relación multiplicativa correspondiente al *Isomorfismo de medidas*, según la cual se establece una correspondencia entre dos tipos de cantidades o espacios de medida, a saber, las casillas avanzadas y los puntos obtenidos. La relación se ejemplifica a continuación para el caso en que cada casilla tiene un valor de 3.

Casillas avanzadas	Puntos obtenidos
1	3
2	6
3	9
4	12

Así es posible realizar:

- Análisis escalares: en tanto en cada espacio de medidas es posible pasar de una línea a otra mediante la aplicación de un operador escalar (n-veces el número de casillas avanzadas, n-veces el puntaje total obtenido). Según la tabla que sirve de ejemplo se tiene que 4 casillas avanzadas corresponden a cuatro veces una sola casilla, de igual forma 12 puntos obtenidos en los dados corresponden a 4 veces los 3 puntos correspondientes a una casilla.

– Análisis funcionales: Casillas avanzadas por cantidad de puntos obtenidos en el dado. Una casilla avanzada corresponde a 3 puntos obtenidos, así es posible establecer el puntaje necesario para cualquier número de casillas ya que consistiría en multiplicar el número de casillas por el puntaje de una casilla, es decir, por 3.

Saqué	2	3	4	5	6	7 …
Casillas recorridas	1	1	2	2	3	3 …
Puntos sobrantes	0	1	0	1	0	1 …

5.2.2.6 Análisis

En la *actividad 1* se esperaba que el estudiante realice conteos verbales de 2 en 2 y logre descomponer los puntajes obtenidos en los dados en grupos de a 2, teniendo presente que la unidad sobrante, cuando el número es impar, debe completarse posteriormente con otra unidad para avanzar una casilla. El asignarle a cada casilla un valor de 1 y recorrer tantas como indican los dados, daría cuenta de un pensamiento puramente aditivo en el que no es posible aún operar con grupos de unidades.

En la *actividad 2* se espera que el estudiante sea capaz de encontrar por una parte el puntaje obtenido conociendo los datos de las casillas recorridas y de los puntos sobrantes y, por otra parte, de encontrar las casillas recorridas y el puntaje sobrante teniendo el dato de los puntos obtenidos en los dados. En esta actividad será posible evidenciar el alcance y consolidación del pensamiento reversible en el estudiante, pues en esencia se trata de situaciones que implican la división. Sin embargo, para encontrar los valores faltantes en la tabla se pueden presentar estrategias como las que se muestran a continuación, algunas de las cuales recurren a correlacionar los espacios de medida a partir de repeticiones aditivas: (1) dibujar los puntos obtenidos en los dados y encerrarlos de dos en dos para descubrir las casillas avanzadas, (2) realizar el conteo (oral o escrito) de dos en dos hasta llegar a la cantidad de puntos representada en los dados, y llevar la cuenta de las veces que se ha iterado el dos, y por último, (3) anticipar el número de veces que estará contenido el 2 en la cantidad determinada por los dados, a partir de una división.

Para la *actividad 3* se espera que la mayoría de los estudiantes presenten dificultad para anticipar la cantidad de veces que estará contenido un número diferente de 2 en otra cantidad, debido a que ellos están más familiarizados con los conteos de 2 en 2 que con otros números, y es de esperar que requieran el uso de ayudas gráficas o táctiles para llevar la cuenta de las veces que está contenido dicho número en la cantidad de puntos determinados por los dados.

5.2.2.7 Experimentación y análisis a posteriori.

El desarrollo de la actividad tuvo lugar en un ambiente de disposición y entusiasmo por parte de los estudiantes.

En la tercera actividad, de acuerdo a las estrategias de solución empleadas por los estudiantes se observa que corresponden a la segunda de las categorías empleadas para analizar la adquisición del pensamiento multiplicativo, debido a que logran establecer la correspondencia entre las dos variables involucradas en la situación, empleando para su resolución procedimientos aditivos que comportan la realización de gráficos o de adiciones reiteradas.

Entre los procedimientos seguidos por los alumnos se encuentran aquellos que parten de la cantidad total de puntos, bien sea representándolos en los dedos o en los mismos puntos que aparecen dibujados en los dados, y a partir de ahí van agrupando de a 2 en 2, y cada vez que completan un grupo avanzan una casilla. De igual manera en voz alta realizan el conteo “1, 2” y avanzan una casilla, luego “3, 4” y avanzan otra hasta alcanzar en el conteo verbal la cantidad total de puntos obtenidos en los dados. Este tipo de procedimientos se enmarcan en estrategias de tipo aditivo, puesto que a medida que obtienen un grupo de dos puntos van adicionando la casilla que deben avanzar. No hay ningún tipo de anticipación en la acción. Expresiones como las siguientes expresan la forma de proceder de los estudiantes:

> *“Yo con mis dedos los pongo dos juntos y adelanto esa casilla y otra vez hasta que se me acaben” E12*

> *“Yo miro en los dados y señalo dos pepitas con el lápiz y muevo la ficha y otra vez señalo dos pepitas con el lápiz y muevo otra casilla y hasta que termino” E22*

> *“Sumando con los dedos” E34*

Otros procedimientos seguidos por los estudiantes son aquellos en los que realizan en voz alta el conteo 2, 4, 6, etc. marcando cada vez un dedo o una casilla hasta alcanzar en dicho conteo la cantidad de puntos indicada en los dados. Puede decirse que este procedimiento se encuentra en un estado intermedio entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo pues si bien ya realizan conteos de grupos, aún no logran emplear una división o multiplicación para encontrar la cantidad de casillas que deberán ser avanzadas. De todas formas la posibilidad de repetir controladamente una misma cantidad es indicador de un avance en la comprensión de relaciones del tipo multiplicativas. Ejemplos de estos procedimientos se ven en expresiones como las siguientes:

“Yo hago de dos en dos” E9

“Yo sumo de dos en dos” E32

“Como no es número par resto uno y me queda par y lo parto en dos y lo que me da es lo que avanzo” E30

5.2.3 Situación tres: Juguemos canicas

Análisis preliminares

5.2.3.1 Objetivos

- Realizar conteos múltiples a partir de relaciones de proporcionalidad directa.

5.2.3.2 Variables

- Tamaño de los números.

- Problemas con una sola incógnita, con dos incógnitas y con más incógnitas.

5.2.3.3 Materiales

- 21 canicas, un círculo dibujado en el suelo, un dado, hoja de registro y lápiz.

5.2.3.4 Descripción

Actividad 1

- Se entrega un juego de 21 canicas a cada equipo, 20 de ellas deben ser ubicadas dentro del círculo.
- Quien obtenga mayor puntaje con el dado inicia el juego.
- La canica restante se debe lanzar hacia el montón de las 20 canicas que están en el círculo con el propósito de desplazar la mayor cantidad de ellas fuera de éste.
- Cada vez que sean desplazadas fuera del círculo 2 canicas, el jugador obtiene 5 puntos.
- Debe anotarse cada jugada en la hoja de registro, incluyendo si queda alguna canica sobrante, para ser tenida en cuenta al final de los 5 turnos.
- A medida que se desarrolla el juego cada uno va completando una tabla de registro individual como la siguiente:

Tabla de registro personal

Desplacé					
Puntaje					
Sobraron					
				Puntaje total	

Actividad 2

Se entregará a cada estudiante varias tablas de registro incompletas para ser llenadas por él, en las que deberá por una parte averiguar el puntaje obtenido al desplazar determinada cantidad de canicas, y por otra parte, determinar cuántas canicas fueron desplazadas a partir del puntaje obtenido. (Anexo 5)

Actividad 3

Nuevamente se jugará a las canicas pero con una condición de proporcionalidad diferente, así: por cada tres canicas que se desplacen fuera del círculo, se obtienen 2 puntos.

Actividad 4

Se completarán otras tablas de registro con la nueva condición de proporcionalidad.

Actividad 5

Cada estudiante deberá encontrar determinada condición de proporcionalidad y establecer una nueva condición de proporcionalidad para llenar tablas de registro de acuerdo a ella.

5.2.3.5 Lo matemático

Se presenta la relación multiplicativa correspondiente al *Isomorfismo de medidas*, según la cual se establece una correspondencia entre dos tipos de cantidades. Siendo posible realizar análisis funcionales en tanto se puede hallar el puntaje total multiplicando la cantidad de grupos de dos canicas por 5 que corresponde al puntaje de cada uno los grupos.

También se pueden realizar análisis escalares, en tanto en cada categoría de medidas es posible pasar de una línea a otra mediante la aplicación de un operador según el número de veces que se repitan los grupos de dos o tres canicas, entonces se repite el valor de dichos grupos para obtener el puntaje total.

5.2.3.6 Análisis

En la *actividad* 1 se espera que el estudiante halle el cuarto término de una proporción, teniendo en cuenta la relación 2 es a 5 (esto es, por cada 2 canicas, se obtienen 5 puntos). Esto puede hacerlo mediante la sucesiva separación de grupos de 2 canicas cada uno, para luego contar el total de grupos y a cada uno asignarle el valor de 5 y entonces contar el 5 tantas veces como grupos tiene o hacer la multiplicación del 5 por la cantidad de grupos (análisis funcional).

En la *actividad 2* el estudiante deberá completar diferentes tablas de registro, en la primera debe hallar los puntajes correspondientes a dos cantidades diferentes de canicas, las cuales están en relación “el doble de”. En la segunda una de las cantidades no se puede hallar directamente con la relación “doble de”, sino que es necesario componer aditivamente las dos cantidades previas para hallar la tercera.

En las *Actividades 3 y 4* se plantea nuevamente el juego de las canicas, pero con una relación de proporcionalidad diferente a la anterior: 3 es a 2. Se espera que den cuenta del proceso empleado por ellos para hallar los puntajes cada vez que se desplazan canicas fuera del círculo.

En la *Actividad 5* el estudiante deberá descubrir la relación de proporcionalidad que se tuvo en cuenta para llenar una tabla determinada de registro. A la vez que deberá inventar él mismo una nueva relación de proporcionalidad.

5.2.3.7 Experimentación y análisis a posteriori.

El desarrollo de la actividad tuvo lugar en un ambiente de entusiasmo por parte de los estudiantes.

Por presentar un nivel mayor de dificultad se observó que muchos de los niños que se encuentran en un proceso intermedio entre lo aditivo y lo multiplicativo aún requieren, frente a situaciones más complejas, el uso de estrategias aditivas para su solución.

Las estrategias de solución empleadas por 24 estudiantes corresponden a la segunda categoría, observándose un avance en 2 de los estudiantes hacia la tercera categoría.

En primera instancia se encuentran 11 estudiantes que representan la cantidad total de canicas desplazadas fuera del círculo con las mismas canicas, con los dedos o dibujándolas todas, luego forman grupos de a dos y cada vez que tienen un grupo realizan el conteo 5, 10, 15 etc., hasta terminar. Estos estudiantes se ubican en el primer momento de la segunda categoría ya que identifican las variables involucradas en la situación y emplean estrategias aditivas para hallar el resultado de la variación en uno de los espacios de medida a partir de la variación del primero de los espacios.

“Sumo el 5 más según los grupos que hay de 2” E12

Ilustración 8: Producción de E12

“Con mis dedos de 2 en dos y cuento de a 5 así: ” E7

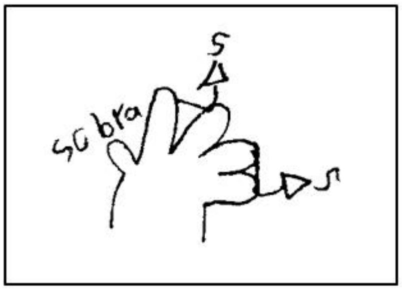


Ilustración 9: Producción de E7

De forma similar a los procedimientos mencionados en el párrafo precedente, 13 estudiantes realizan la misma acción de tomar de 2 en 2, pero al final, la cantidad de grupos obtenidos la multiplican por 5. Como puede observarse en la ilustración 13, este estudiante expresa que debe multiplicar por 5, pero obtiene esa conclusión a partir de realizar la gráfica donde escribe el “5” sobre cada grupo de 2 canicas, lo cual indica que luego de observar que el 5 aparece repetido 7 veces, asocia esta acción con la multiplicación.

“Junto de a dos canicas y multiplico por 5” E9

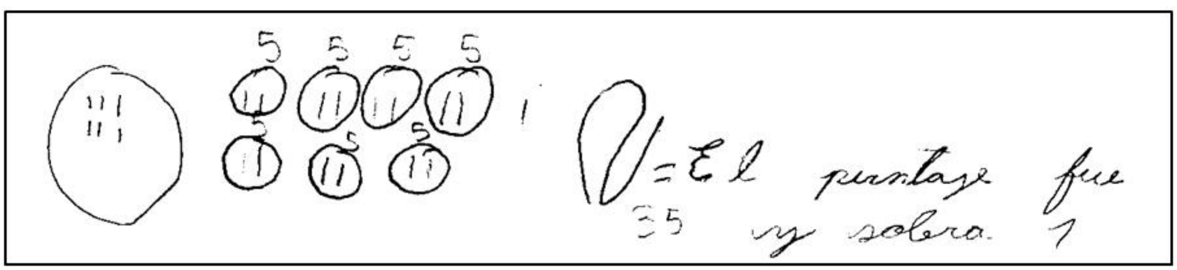


Ilustración 10: Producción de E9

Por último, se encuentran los dos estudiantes que dividen el número total de canicas entre 2 y luego multiplican por 5, evidenciando así el empleo de estrategias multiplicativas a partir del descubrimiento de la simultaneidad de la variación en ambos espacios de medida.

> *"Divido por 2 y multiplico por 5" E24*
> *"La mitad de las canicas la multiplico por 5" E25*

5.2.4 Situación cuatro: Jugando con arena

Análisis preliminares

5.2.4.1 Objetivos

– Realizar conteos simples.
– Coordinar relaciones de equivalencia.
– Establecer correspondencia entre varias colecciones.

5.2.4.2 Variables

– Relación entera o fraccionaria entre los vasos. Pues permite establecer relaciones de aproximación, o específicamente multiplicativas. Esto conlleva a un avance en la estrategia de base empleada por los estudiantes que es establecer relaciones enteras entre las diferentes cantidades.

5.2.4.3 Materiales

- Cuatro clases diferentes de vasos desechables para cada pareja de estudiantes, uno de media onza, uno de onza, uno de 3 onzas y uno de 7 onzas, marcados con las letras A, B, C y D, respectivamente.
- Arena y tabla de registro. (Anexo 6)

5.2.4.4 Descripción

Actividad 1

- Se entrega un juego de cuatro vasos a cada pareja de estudiantes y una tabla de registro en la que se pide establecer cuantas veces cabe determinado vaso en los otros tres. Para esto deben llenarlos con arena y pasar esa arena de un vaso a otro.
- A medida que se desarrolla la actividad cada pareja va completando una tabla de registro como la siguiente:

Cabe en	**VASO A**	**VASO B**	**VASO C**	**VASO D**
VASO A				
VASO B				
VASO C				
VASO D				

Actividad 2

- Se entrega a cada estudiante una hoja con preguntas para ser llenada por él.

5.2.4.5 Lo matemático

- Se presentan relaciones de equivalencia entre colecciones diferentes, así el vaso A cabe 2 veces en el vaso B y el vaso B cabe 3 veces en el vaso C, por lo tanto el vaso A cabe 6 veces en el vaso C.
- Aparecen relaciones fraccionarias en las que un vaso no está contenido en otro de forma exacta, como por ejemplo el vaso B cabe la mitad en el vaso A.

5.2.4.6 Análisis

En la *actividad 1* se esperaba que el estudiante realizara la manipulación de los vasos y la arena para establecer las equivalencias entre las respectivas capacidades de cada uno de ellos. Esta estrategia de trabajo deja abierta la posibilidad de que de forma espontánea los alumnos lleguen a una respuesta para los casos en los que el vaso que se empleaba para medir fuese mayor al vaso medido, ya que hasta el momento en el aula no se habían encontrado con expresiones como "la mitad" o "la tercera parte", etc.

En la *actividad 2* se esperaba que el estudiante fuera capaz de emplear las equivalencias descubiertas en la actividad 1, para establecer nuevas equivalencias que implicaran mayor cantidad de determinada clase de vasos. Esto daría cuenta del establecimiento de relaciones multiplicativas, como por ejemplo, anticipar el número de veces que estará contenido el 2 en una determinada cantidad.

5.2.4.7 Experimentación y análisis a posteriori.

El desarrollo de la actividad tuvo lugar en un espacio adecuado que generó disposición en los estudiantes.

En la actividad 1 se observó que los estudiantes, al tratar de establecer el número de veces que un vaso de mayor tamaño estaba contenido en uno de menor tamaño, respondieron de dos formas diferentes: algunos que estaba "0" (cero) veces y otros que "un poquito". Se presentó el caso de estudiantes que lograron establecer la relación para el vaso B en el vaso A diciendo *"pues si el vaso A está dos veces en el vaso B, pues el vaso A es la mitad del vaso B"*. Además, para relaciones más complejas se acercaban a preguntar sus nombres pues no conocían las palabras para expresarlas (“tercera” y “sexta”).

En la actividad 2 no se dio la posibilidad de utilizar los vasos para resolver las preguntas y esto generó en los estudiantes diversas estrategias, correspondientes a las cuatro categorías del proceso de conceptualización de la multiplicación.

La primera categoría de análisis se evidenció en los alumnos que repetían la indicación pero sin tener en cuenta la relación entre los vasos, así por ejemplo para la pregunta: *Para hacer una gelatina se emplean 2 vasos D. Si se quiere dar la receta de la gelatina pero diciendo la medida en vasos C. ¿Cuántos vasos C se necesitan?,* respondían que se necesitaban 2 vasos C.

Para la segunda categoría se encontró que la estrategia empleada por los estudiantes fue dibujar los vasos y realizar el conteo de los vasos resultantes (Ilustración 14). Corresponde esta estrategia a la categoría 2a, en la cual se identifica la variación entre ambos espacios de medida pero no de forma simultánea, y a través del apoyo gráfico dan cuenta de la misma.

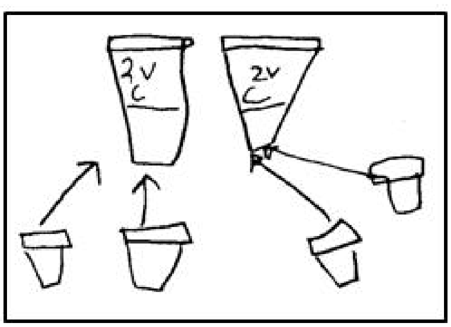


Ilustración 11: Producción de E5

La segunda estrategia corresponde a quienes establecían una relación aditiva (ilustración 12) y obtenían así la cantidad total de vasos C que debía reemplazarse por los dos vasos D. Se enmarca en la tercera categoría, ya que descubren la simultaneidad de la variación en ambos espacios de medida y emplean procedimientos aditivos para obtener el resultado.

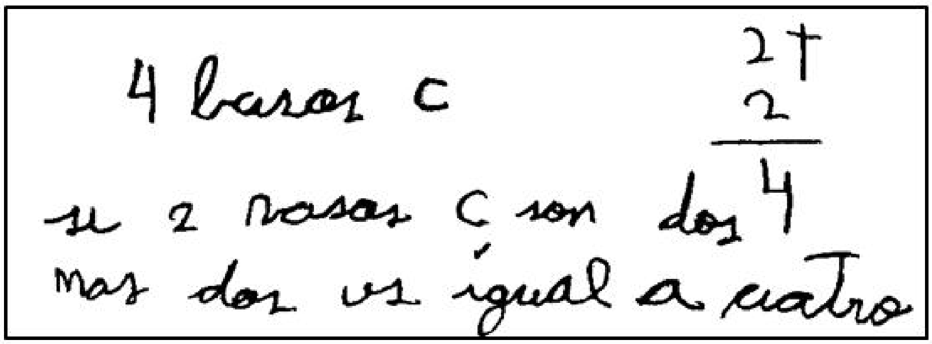


Ilustración 12: Producción de E3

La cuarta estrategia corresponde a los estudiantes que establecen la simultaneidad de la variación en ambos espacios de medida y emplean la relación multiplicativa, apoyándose en una tabla (Ilustración 16) para visualizar las relaciones y los procedimientos necesarios.

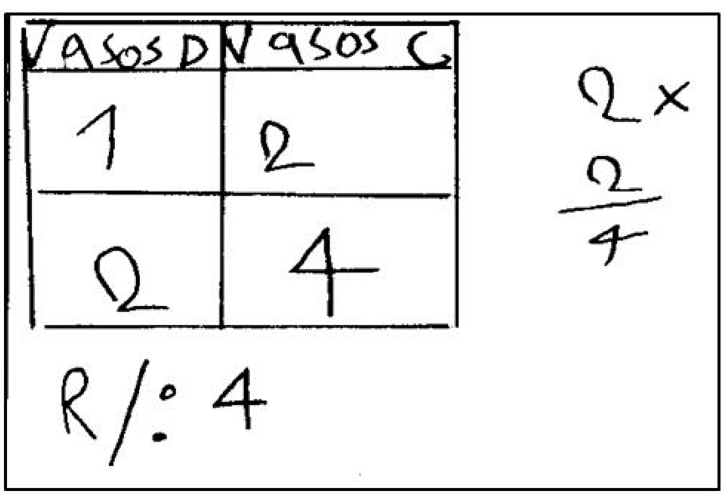


Ilustración 13: Producción de E25

Se observa a partir de las estrategias empleadas en esta situación por parte de los estudiantes, un avance en los procedimientos y en la conceptualización de la multiplicación, pues ya se evidencia un mejor control de las covariaciones en los espacios de medida a través de formas de representación que explicitan la variaciones y son un apoyo para los procedimientos utilizados.

5.3 PRUEBA FINAL

Para comparar el estado inicial de conceptualización de los estudiantes con relación a las Estructuras Multiplicativas con el estado final se vio conveniente plantear nuevamente la misma prueba que se había presentado al inicio, con el propósito de observar los cambios de estrategia frente a los mismos problemas, de modo que no hubiese otros elementos que se constituyeran en factores adicionales de variación en las estrategias. (ANEXO 1).

En esencia las estrategias encontradas fueron similares agregando para cada uno de los problemas una cuarta categoría en la cual los estudiantes lograron determinar la relación multiplicativa subyacente a cada uno de los problemas y emplearla de forma adecuada para resolverlos. Lo más significativo fue el avance individual de la mayoría de los estudiantes.

Para el problema uno se consideran cuatro tipos de respuesta, los que no resolvieron el problema (P1.1) que en total fueron 0 estudiantes, los que tuvieron en cuenta una variación de una unidad para cada confite (P1.2) representados por 2 estudiantes, 5 estudiantes que de forma intuitiva establecieron un valor aproximado entre 10, 15 ó 20 para la variación y que los fueron disminuyendo o aumentando para hallar los valores pedidos (P1.3), y por último la estrategia (P1.4) en la que dividieron los $120 entre 8 confites, hallando así el valor de uno y luego multiplicando este valor por cada uno de las cantidades pedidas (Ilustración 17).

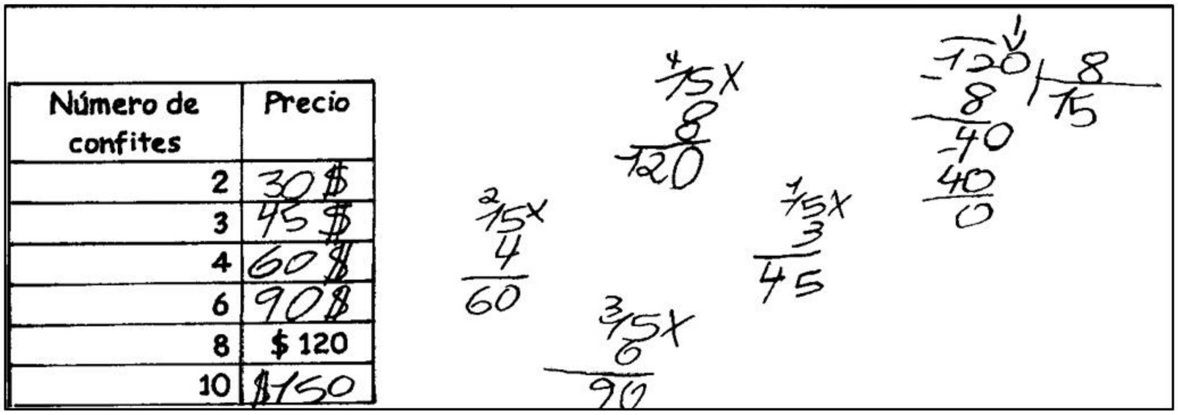


Ilustración 14: Producción de E4

Para el segundo problema se encontró que ningún estudiante empleó la estrategia 1 (P2.1), únicamente 1 estudiante empleó la estrategia 2 (P2.2) y 6 estudiantes emplearon la tercera estrategia (P2.3). Se destaca la aparición de la cuarta estrategia (P1.4), que consistió en realizar una tabla en la que se evidencia la relación entre la cantidad de videojuegos comprados por Mateo y la de la mamá Ilustración 18), esta tabla la emplearon 19 estudiantes.

Ilustración 15: Producción de E11

La tabla 5 presenta los resultados obtenidos en el problema uno y en el problema dos al inicio y al final del proceso.

Tabla 5: Tabla comparativa entre los resultados obtenidos para las dos preguntas en la prueba diagnóstica aplicada al inicio y al final del proceso

		INICIAL – Pregunta 1				INICIAL – Pregunta 2				FINAL – Pregunta 1				FINAL – Pregunta 2			
		P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P2.1	P2.2	P2.3	P1.4	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P2.1	P2.2	P1.3	P1.4
1	E1			X			X						X				X
2	E2		X			X						X				X	
3	E3		X				X						X				X
4	E4			X				X					X				X
5	E5			X				X				X				X	
6	E6		X			X							X				X
7	E7	X				X						X				X	
8	E8			X		X							X				X
9	E9			X				X					X				X
10	E10			X			X						X				X
11	E11	X				X							X				X
12	E12		X				X					X				X	
13	E13		X			X					X				X		
14	E14			X				X					X				X
15	E15			X			X						X				X
16	E16		X				X						X				X
17	E17	X				X					X					X	
18	E18	X					X						X				X
19	E19	X					X						X				X
20	E20	X				X							X				X
21	E21		X			X						X				X	
22	E22			X				X					X				X
23	E23			X				X					X				X
24	E24		X				X						X				X
25	E25			X				X					X				X
26	E26	X				X							X				X
Total		7	8	11	0	10	9	7	0	0	2	5	19	0	1	6	19
		27%	31%	42%	0%	38%	35%	27%	0%	0%	8%	19%	73%	0%	4%	23%	73%

6 ANÁLISIS GENERAL

Teniendo en cuenta que la primera categoría de análisis para las estrategias empleadas por los estudiantes (C1), corresponde a las estrategias que dan cuenta de que el estudiante no logra establecer apropiadamente la relación entre las variables del problema y por tanto no consigue resolverlo acertadamente, el paso a la segunda categoría (C2), en la cual ya se establece la relación entre las variables del problema, aunque aún de forma aditiva, si bien en una primera etapa con el apoyo de la representación gráfica (C2a) para establecer la relación, y en una segunda etapa a partir de realizar procedimientos aditivos (C2b); se identifica un avance en el nivel de comprensión de problemas de carácter multiplicativo. Debido a que aún no logran desarrollar tareas que impliquen el tratamiento simultáneo de dos variables, recurren en un primer momento al empleo de la representación gráfica puesto que de esa forma es posible realizar el conteo uno a uno de los elementos puestos en correspondencia, en un segundo momento centran la atención en la variación que se presenta en uno de los espacios de medida y mediante adiciones reiteradas encuentran el estado final de dicha variación.

El paso de esta segunda categoría a la tercera (C3) implica, desde el punto de vista cognitivo, la capacidad para reconocer la ocurrencia simultánea de procesos de variación asociados a determinados fenómenos y, desde el punto de vista matemático, la posibilidad de considerar en forma simultánea dos espacios de medida y reconocer que los cambios que se producen en uno de ellos, generan cambios equivalentes en el otro. Para la primera etapa de esta categoría (C3a) si bien se identifican claramente los dos espacios de medida en los cuales se presenta una variación simultánea, aún se requiere el empleo de estrategias aditivas para su resolución. En la segunda etapa (C3b), se emplea la multiplicación escalar para resolver las situaciones.

El avance hacia la cuarta categoría (C4) implica ya no sólo la posibilidad de identificar las variaciones simultáneas y establecer la relación entre ellas a partir de la multiplicación escalar, sino que además se logran identificar las relaciones funcionales entre los espacios de medida involucrados en la situación.

Las situaciones desarrolladas favorecieron el avance conceptual de los estudiantes debido a que tuvieron la oportunidad de analizar los espacios de medida presentes en los problemas de tipo multiplicativo y a su vez emplearon el conteo de unidades múltiples como estrategia que les permitió identificar la existencia de dos espacios de medida y comenzar, a partir del empleo de diferentes tipos de representación, a reconocer la variación simultánea y su relación en ambos espacios de medida, para luego emplear estrategias de carácter multiplicativo en las que llevaban el control de la cantidad que se repetía y de las veces que se hizo tal repetición.

La tabla 6, presenta las cuatro categorías de análisis para los diferentes estadios de conceptualización del pensamiento multiplicativo y clasifica los 26 estudiantes de acuerdo a dichas categorías, a partir de las estrategias empleadas por cada uno de ellos en la resolución de la prueba de entrada, de las situaciones correspondientes a los bolos, al parqués, a las canicas y a los vasos de arena y a la prueba final. Inicialmente las estrategias empleadas por 10 niños corresponden a la Categoría 1, de los cuales al final de las situaciones planteadas un estudiante avanzó a la categoría 2a, uno a la 2b, tres a la categoría 3a, tres a la 3b, y dos a la categoría 4.

De los nueve estudiantes que iniciaron el proceso en la categoría 2a, se observa que tres estudiantes avanzaron a la categoría 3a, dos a la 3b y cuatro a la 4.

Por último de los siete estudiantes que iniciaron en la categoría 2b, tres avanzaron a la categoría 3b y cuatro a la categoría $4..

Puede entonces concluirse que las situaciones presentadas, en las cuales se lleva a los niños a la realización de conteos múltiples y en las cuales se controlan determinadas variables, permitieron la movilización de las estructuras cognitivas de forma que se produjo un avance en la consolidación de las estructuras multiplicativas.

Tabla 6: Categorías de construcción del pensamiento multiplicativo

		Prueba inicial						Situación 1 Bolos						Situación 2 Parqués						Situación 3 Canicas						Situación 4 Arena						Prueba final					
		C1	C2a	C2b	C3a	C3b	C4	C1	C2a	C2b	C3a	C3b	C4	C1	C2a	C2b	C3a	C3b	C4	C1	C2a	C2b	C3a	C3b	C4	C1	C2a	C2b	C3a	C3b	C4	C1	C2a	C2b	C3a	C3b	C4
1	E1		X							X					X						X								X						X		
2	E2	X								X						X						X								X						X	
3	E3		X						X							X					X								X						X		
4	E4				X					X					X							X								X						X	
5	E5				X			X							X						X						X									X	
6	E6	X								X					X							X								X						X	
7	E7	X							X							X						X							X						X		
8	E8	X								X					X						X								X						X		
9	E9				X					X						X							X								X						X
10	E10		X					X							X						X									X						X	
11	E11	X							X						X						X									X							X
12	E12		X					X							X						X						X								X		
13	E13	X						X							X						X					X							X				
14	E14				X					X						X						X									X						X
15	E15		X							X						X						X								X							X
16	E16		X							X						X						X								X							X
17	E17	X						X							X						X					X								X			
18	E18		X						X							X						X								X							X
19	E19		X						X							X						X								X							X
20	E20	X							X						X						X									X							X
21	E21	X						X							X						X							X							X		
22	E22				X					X						X						X									X						X
23	E23				X					X						X						X									X						X
24	E24		X							X						X						X									X						X
25	E25				X					X						X							X								X					X	
26	E26	X							X						X							X								X						X	
Total		10	9	0	7	0	0	6	7	13	0	0	0	0	13	13	0	0	0	0	11	13	2	0	0	2	2	1	4	11	6	0	1	12	6	7	11
		38%	35%	0%	27%	0%	0%	23%	27%	50%	0%	0%	0%	0%	50%	50%	0%	0%	0%	0%	42%	50%	8%	0%	0%	8%	8%	4%	15%	42%	23%	0%	4%	4%	23%	27%	42%

7 CONCLUSIONES

7.1 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Tal como se mostró a lo largo de este trabajo, el aprendizaje propio de los conceptos multiplicativos tiene puntos de anclaje con lo aditivo, pero al tiempo implica rupturas con los procesos y procedimientos propios de este tipo de estructuras.

En primer lugar, las rupturas de lo aditivo a lo multiplicativo se tienen que interpretar tanto desde un punto de vista cognitivo como matemático.

Desde lo cognitivo, en relación con el desarrollo de un conjunto de procesos que permiten el tratamiento simultáneo de clases, su operatoria en forma combinatoria, lo cual implica una diferencia con el tratamiento aditivo de clases, en el cual el trabajo con la clases implica procesos de orden secuencial. En este sentido, desde el punto de vista cognitivo, lo multiplicativo se asocia a la capacidad del individuo para desarrollar tareas que implican el tratamiento simultáneo de varios criterios de clasificación, su posibilidad de combinarlos y determinar con claridad el sentido de la nueva clase obtenida, de hacerlos variar al tiempo y controlar el posible estado final con respecto a la variación simultánea, en síntesis, de controlar y anticipar estados posibles de un fenómeno a partir de hacer variar dos o más variables que controlan en fenómeno.

Desde lo matemático, la ruptura se da en términos de la consideración en forma simultánea de dos espacios de medida que covarían positivamente y de forma lineal, esto es, de dos espacios de medida cuya covariación se puede matematizar a través de una proporcionalidad directa. La ruptura con lo aditivo se muestra en tanto que las situaciones típicamente aditivas sólo consideran un único espacio de medida, al interior del cual se pueden presentar variaciones (que pueden ser matematizadas a través de una acumulación sucesiva de cambios), comparaciones (estableciendo diferencias entres dos cantidades de magnitud) o combinaciones (juntando dos cantidades de magnitud).

Sin embargo, a pesar de que el paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas implica cambios cualitativos significativos a nivel de pensamiento lógico y de los procesos matemáticos implicados, se pueden tejer líneas de continuidad del uno al otro. Estas líneas de continuidad se dan en tanto desde las repeticiones aditivas se favorecen formas de representar variaciones conjuntas de dos o más espacios de medida, fundamentalmente cuando esta variación conjunta es analizada desde una perspectiva de los operadores escalares.

En el marco anteriormente expuesto, esta tesis recupera una propuesta didáctica que parte de considerar lo multiplicativo no como una forma abreviada de sumar (cuando los sumandos son iguales), sino que se centra en el análisis de los espacios de medida que involucra todo problema multiplicativo, conceptualiza las covariaciones entre ambos espacios de medida, y a través de diferentes formas de representación, permite la construcción de lo multiplicativo como parte de una construcción conceptual más amplia: la proporcionalidad directa. Por supuesto, que la interpretación clásica de la multiplicación, “sumas abreviadas de sumandos iguales”, se toma como un punto de partida en el proceso, pero al servicio de los análisis relacionales orientados a la construcción de comprensiones relativas a las covariaciones conjuntas de magnitudes.

Así pues, el conjunto de situaciones propuestas para el trabajo con los alumnos tiene como punto de partida el conocimiento que estos tienen sobre los procesos aditivos, fundamentalmente los relativos a los conteos de unidades múltiples (conteos de dos en dos, de tres en tres, etc.), y desde allí se generan situaciones que sirven como punto de partida para el reconocimiento de un primer elemento relacional básico en toda situación multiplicativa: la existencia de dos espacios de medida. Para ello se favorecieron formas de representación, las icónicas (dibujos de las situaciones, de las repeticiones, de las cantidades que se cuentan), y en tablas de datos (que organizan de forma estructurada los resultados de los conteos). En este caso, las situaciones buscaban no tanto el reconocimiento de la relación matemática propia de la correlación de las dos magnitudes, sino más bien, el reconocimiento tanto de la existencia de dos magnitudes como de que cambios regulares en una, determinan cambios igualmente regulares en la otra.

Una vez logrado el reconocimiento de las magnitudes y de la existencia de una correspondencia entre las variaciones, se da el siguiente paso: matematizar la relación que une los dos espacios de medida involucrados en la situación. Se trata ahora de situaciones en la cuales se favorecen tanto los análisis escalares como los funcionales. Para ello las variables asociadas al tamaño de los números y el tipo de sistema numérico fue la clave para hacer evolucionar los procesos y procedimientos de los alumnos. En este caso, pasar de conteos sencillos (cantidades entre dos y cinco), a conteos complejos (cantidades mayores a cinco) hizo cambiar de estrategias basadas en conteos y representaciones icónicas a cálculos basados en representaciones que obligaban a llevar control de la cantidad que se repetía y las veces que se hizo tal repetición. De esta forma se dio un paso firme en la conceptualización de la multiplicación. De otra parte, el uso de números racionales en algunas de las situaciones hizo visualizar los análisis funcionales como otra forma de comprender situaciones multiplicativas, pues el análisis escalar descansaba sobre una cantidad no entera.

Otro aspecto fundamental del trabajo realizado es la simultaneidad con que se analizan tanto las situaciones que implican realizar multiplicaciones, como las que implican realizar divisiones. Esto permite ver el carácter inverso de una operación con respecto a la otra, al mismo que tiempo que refuerza los tratamientos de la situación vía los análisis funcionales o escalares.

Luego de los análisis realizados se evidencia como el desarrollo del trabajo permitió alcanzar los objetivos propuestos al inicio del mismo, en tanto fue posible caracterizar las condiciones cognitivas, matemáticas y didácticas que favorecen en los estudiantes de la educación básica la construcción de las estructuras multiplicativas. Se encontró que al familiarizar a los alumnos con la realización y el análisis de situaciones en las que se presenta covariación de dos magnitudes de forma simultánea y al favorecer la implementación de diferentes tipos de representación, tanto para las estrategias aditivas iniciales como para las multiplicativas, se logró un avance significativo en la conceptualización de las estructuras multiplicativas.

Se posibilitó además, validar la hipótesis planteada inicialmente, en tanto el estudio de la proporcionalidad si constituye una estrategia didáctica adecuada para acceder a la conceptualización de las estructuras multiplicativas, debido a la importancia de desarrollar procesos, desde el punto de vista cognitivo, que permitan el tratamiento simultáneo de clases y desde un punto de vista matemático, que favorezcan el análisis en forma simultánea de dos espacios de medida. Ambas acciones son fundamentales para la construcción de lo multiplicativo y se hacen evidentes al interior de situaciones de proporcionalidad directa.

7.2 LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

A partir del trabajo realizado se plantean tres posibles líneas de investigación y profundización:

En primera instancia sería interesante analizar los procesos propios de la construcción del concepto de proporcionalidad, con miras a establecer la continuidad entre el empleo de situaciones de proporcionalidad en el aprendizaje de la multiplicación y el desarrollo de habilidades correspondientes al razonamiento proporcional.

En segundo lugar se considera de interés analizar la incidencia que tendría en la conceptualización del pensamiento variacional y del razonamiento algebraico de los estudiantes el análisis escolar temprano de situaciones de proporcionalidad.

Y por último resulta interesante analizar situaciones de covariación simultanea al interior de los otros pensamientos matemáticos y su incidencia tanto en el aprendizaje mismo de las operaciones de las Estructuras Multiplicativas, como de los conceptos y procedimientos propios de cada uno de dichos pensamientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. y DOUADY, R. MORENO, L, GÓMEZ, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. México: una empresa docente y grupo editorial Iberoamérica.

ASCENCIO, J. SIMBAQUEBA, J. (2003). Dominios Matemáticos 2. Bogotá: Editorial Escuelas del Futuro.

BELTRÁN, L. SUÁREZ, A. (2001). Matemática con tecnología aplicada 2. Bogotá: Pearson Educación de Colombia.

BLANCO R. y MESSINA G. (2000). Estado del arte sobre las innovaciones educativas en América Latina. Santafé de Bogotá: Convenio Andrés Bello.

BRISSIAUD, Remi. (1989) El aprendizaje del cálculo, más allá de Piaget y la Teoría de Conjuntos. Madrid: Gráficas Rógar.

CHAMORRO, M. (2003). Didáctica de las Matemáticas para primaria. Madrid: Pearson Editores.

DÍAZ, C. y otros. (1997). Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias. Análisis y resultados prueba de matemáticas. Santafé de Bogotá: MEN

DÍAZ DE CORTÉS, Lyria. (2000). Yupana 2. Bogotá: Rei Andes Ltda.

FIOL, L. y FORTUNY, J. (1990). Proporcionalidad directa. La forma y el número. Madrid: Síntesis.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR (2002). Resultados Colegio Calasanz Medellín 2002. Bogotá: ICFES.

LLOREDA, F. y otros (2002). Evaluar para mejorar. A propósito de las evaluaciones de Estado y otras evaluaciones. Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio.

MARTÍNEZ, J. (2000). Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI. Barcelona: R.G.M.

MAZA, C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y división. Madrid: Síntesis.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santafé de Bogotá: Nomos.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2003). Estándares básicos de matemáticas. En www.mineducacion.gov.co

MONTERO, E. (2001). Supermat 2. Bogotá: Editorial Voluntad.

MOREIRA, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. En http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

OBANDO, G., MÚNERA, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Revista Pedagogía y educación. Medellín: Universidad de Antioquia.

PEDRAZA, P. RODRÍGUEZ, N. (2001). Informe de resultados de las pruebas de matemáticas aplicadas en los grados 3°, 5°, 7° y 9° en los municipios de Antioquia 1998 a 2000. Bogotá: ICFES.

PIAGET, J. (1975). Génesis del número en el niño. Argentina: Guadalupe.

POSADA, MARIA EUGENIA Y OTROS. (2005). Interpretación e implementación de los Estándares básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia. Medellín: Digital Express Ltda.

PUIG. L y CERDÁN, F. (1995) Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.

RAMÍREZ, C, GARZÓN, A., ROBINSON, J. (2003). Nuevo libro taller matemáticas 2. Bogotá: Editorial Escuelas del futuro.

TORRES, J. (2000). Pirámide 2. Bogotá: Grupo Editorial norma Educativa.

URIBE, Julio. (1998). Rumbo Matemático 2. Medellín: Susaeta Ediciones.

VERGNAUD, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas.

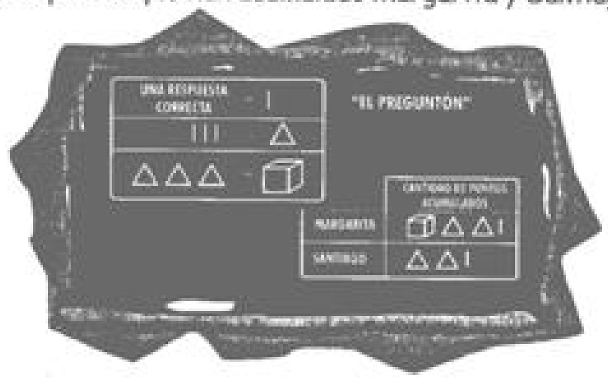
WWW. Icfecs.gov.co/cont/eebm/saber/docs/carti/mat/car_mat2.pdf

ANEXOS

ANEXO 1: PREGUNTAS DE MATEMÁTICAS PLANTEADAS EN LAS PRUEBAS SABER DE 2002.

RESPONDE LAS PREGUNTAS 9, 10 Y 11 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE SITUACIÓN

"El preguntón" es un juego en el cual el profesor le hace preguntas a los estudiantes. Por cada respuesta correcta se gana un punto. A continuación se muestra la forma de representar los puntos y la cantidad de puntos que han acumulado Margarita y Santiago.



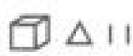
9.

¿Cuántos puntos ha acumulado Margarita?

A. 4
B. 10
C. 13
D. 16

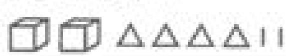
10.

El total de puntos acumulados entre Margarita y Santiago se puede representar de la siguiente manera

A. 

B. 

C. 

D. 

RESPONDE LAS PREGUNTAS 15 Y 16 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE SITUACIÓN

En una fábrica se producen 290 jabones cada día y se trabajan 5 días en la semana

15.

Al finalizar una semana, el número total de jabones que producirá la fábrica es

A. 1.045 jabones
B. 1.050 jabones
C. 1.450 jabones
D. 1.550 jabones

16.

Si se empaca la producción de un día en estuches de 4 jabones cada uno. El número de estuches que se utilizarán será

A. 70
B. 72
C. 74
D. 76

CONTESTA LAS PREGUNTAS 19 Y 20 TENIENDO EN CUENTA LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

A Saúl le han pagado una deuda con dinero en efectivo, de la siguiente forma:

5 billetes de $ 5.000
6 billetes de $ 2.000
2 monedas de $ 1.000
2 monedas de $ 500

19.

¿Cuánto dinero le pagaron a Saúl, en billetes?

A. $ 7.000

B. $ 8.500

C. $ 37.000

D. $ 40.000

20.

Saúl quiere ahorrar la mitad de su dinero, para ello él debe guardar

A. la mitad de billetes y la mitad de monedas
B. los billetes solamente
C. los billetes de $ 5.000 y las monedas de $ 500
D. 4 billetes de $ 5.000

ANEXO 2: PRUEBA INICIAL Y FINAL

Prueba aplicada al inicio y al final del proceso

COLEGIO CALASANZ
PADRES ESCOLAPIOS
MEDELLÍN

Matemáticas grado 3º - 2005
Taller

Nombre: ______________________________ Fecha: _______

Andrés pagó $120 por 8 confites iguales. ¿Cuánto pagará por tres confites? ________

Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema.

Número de confites	Precio
2	
3	
4	
6	
8	$ 120
10	

¿Cómo encontraste el precio de 3 confites?

¿Cómo encontraste el precio de 10 confites?

Mateo quiere tener 20 videojuegos y la mamá le propuso un trato.
Cada vez que Mateo compre dos videojuegos con sus ahorros, la mamá le va a regalar 3 videojuegos.
¿Cuántos videojuegos tendrá que comprar Mateo y cuántos tendrá que darle la mamá?

Un panadero utilizó 10 bolsas de leche para hacer 20 panes iguales.
¿Cuántas bolsas de leche necesitará para hacer 18 panes iguales?

Inventa un problema que se resuelva con la multiplicación 12 X 9
____
____
____
____

ANEXO 3: JUGUEMOS BOLOS

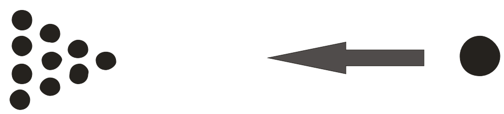
COLEGIO CALASANZ MEDELLÍN
PADRES ESCOLAPIOS
MATEMÁTICAS
GRADO 3º

JUGUEMOS BOLOS - 1

Equipo ______________ **Esta guía de trabajo pertenece a: __________________**

1. Reúnete con 5 compañeros o compañeras más para formar un equipo que competirá con los demás equipos del salón.

2.Organicen los bolos de la siguiente manera:



3.Cada jugador lanza la pelota, registra en su cuaderno el número de bolos de cada color que tumbó y levanta los bolos caídos.

4.Cuando todos los jugadores hayan lanzado deben completar la tabla grupal para el primer turno y luego realizar el segundo turno donde todos los jugadores deben volver a lanzar y así hasta terminar los tres turnos de cada equipo.

5.Ganará el equipo que más puntaje obtenga al final de los tres turnos.
- Bolos azules dan 2 puntos cada uno.
- Bolos verdes dan 3 puntos cada uno.
- Bolos amarillos dan 4 puntos cada uno.
- Bolos rojos dan 5 puntos cada uno.

Tabla de registro grupal

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno					
Segundo turno					
Tercer turno					
				Total	

Hoja de trabajo del alumno
Situación 1 – Actividad 1

JUGUEMOS BOLOS - 2

Equipo ______________________

Esta guía de trabajo pertenece a: ______________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1.En el equipo de Manuel obtuvieron 12 puntos. Si se sabe que solamente tumbaron bolos azules. ¿Cuántos bolos azules tumbaron? ___________________

2.Si Manuela quiere obtener 18 puntos derribando solamente bolos azules. ¿Cuántos debe tumbar? __________________

3.¿Cuál fue el puntaje de Catalina si tumbó 5 bolos verdes únicamente? ____________

4.¿Cuál fue el puntaje de Claudia si tumbó 4 bolos azules, 3 bolos rojos y 2 bolos verdes? _____________

5.En el equipo de Julián llenaron la siguiente tabla de registro grupal, pero por descuido faltaron algunos datos. Ayúdales a completarla.

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno		2		0	6
Segundo turno		5			19
Tercer turno					16
				Total	

6.Completa los puntajes totales del equipo de Andrea.

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno	4	4	0	4	
Segundo turno	3	5	2	0	
Tercer turno	0	3	4	2	
				Total	

7.Completa la siguiente tabla de registro del equipo de Rubén.

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno					12
Segundo turno					15
Tercer turno					11
				Total	38

8. ¿Qué puedes decir de los equipos de Julián, Andrea y Rubén?

Hoja de trabajo del alumno
Situación 1 – Actividad 2

JUGUEMOS BOLOS - 3

Equipo ______________________

Esta guía de trabajo pertenece a: _____________________________

1.Reúnete nuevamente con tus compañeros para jugar a los bolos.

2. Observa los puntajes que ahora se obtienen con cada color.
   - Bolos azules dan 7 puntos cada uno.
   - Bolos verdes dan 8 puntos cada uno.
   - Bolos amarillos dan 9 puntos cada uno.
   - Bolos rojos dan 10 puntos cada uno.

Tabla de registro grupal

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno					
Segundo turno					
Tercer turno					
				Puntaje total	

El equipo ganador fue: ___________________________

Hoja de trabajo del alumno
Situación 1 – Actividad 3

JUGUEMOS BOLOS - 4

Equipo ______________________

Esta guía de trabajo pertenece a: ______________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1. En el equipo de Tatiana obtuvieron 72 puntos. Si se sabe que sólo tumbaron bolos verdes. ¿Cuántos bolos tumbaron? _________

2. Rodrigo quiere obtener 90 puntos pero derribando solamente bolos rojos. ¿Cuántos debe tumbar? __________

3. ¿Cuál fue el puntaje de Adriana si derribó 6 bolos azules? ____

4. Ayuda al equipo de Isabel a llenar la tabla de registro grupal.

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno	0	2	5	0	
Segundo turno	9	0	0		74
Tercer turno	1		0	0	41
				Total	

5. Si el equipo de Andrea hubiera jugado con los puntos que ahora da cada bolo. ¿Cuál hubiera sido el puntaje total?. Completa la tabla.

	Bolos azules derribados	***Bolos verdes derribados***	***Bolos amarillos derribados***	***Bolos rojos derribados***	***Puntaje total***
Primer turno	4	4	0	4	
Segundo turno	3	5	2	0	
Tercer turno	0	3	4	2	
				Total	

Hoja de trabajo del alumno
Situación 1 – Actividad 4

ANEXO 4: JUGUEMOS PARQUÉS

COLEGIO CALASANZ
PADRES ESCOLAPIOS
® MEDELLÍN

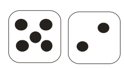
Matemáticas grado 3° - 2005

JUGUEMOS PARQUES - 1

Esta guía de trabajo pertenece a: __________________________

1. Reúnete con 3 compañeros o compañeras más para formar un equipo para jugar parqués.

2.Cada uno elige el color de sus fichas. Y se determina quién inicia el juego lanzando un dado.

3.Cada jugador debe lanzar los dados y avanzar las casillas indicadas, pero se debe tener en cuenta que cada casilla vale 2 puntos.
Por ejemplo: si un jugador saca  deberá avanzar 3 casillas porque 7 = 2 + 2 + 2 y el equipo deberá acordar qué se hará con los puntos sobrantes.

4.Cada vez que un jugador realice un lanzamiento deberá llenar la siguiente tabla de registro personal. Utiliza las que sean necesarias.

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Hoja de trabajo del alumno
Situación 2 – Actividad 1

JUGUEMOS PARQUES - 2

Esta guía de trabajo pertenece a: ____________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1.Matías estuvo jugando parqués con sus compañeros y elaboró la siguiente tabla para conocer las casillas que avanzaría según indicaran los dados en cada lanzamiento. Ayúdalo a completar la información que le hace falta.

Nombre: Matías Rodríguez

Saqué	2	3	4		6		8	9	
Casillas recorridas	1			2		3		4	5
Puntos sobrantes	0			1		1			0

2.La siguiente es la tabla de registro personal que elaboró Manuela Pérez. Como está incompleta, averigua cuántas casillas recorrió en total.

Nombre: Manuela Pérez

Saqué	7	12	4	9	2	5	3	10	8
Casillas recorridas									
Puntos sobrantes									

Total de casillas recorridas por Manuela Pérez durante el juego: ______________

Hoja de trabajo del alumno
Situación 2 – Actividad 2

JUGUEMOS PARQUES - 3

Esta guía de trabajo pertenece a: ___________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1. En el grupo de Catalina y Julián estuvieron jugando al parqués y ellos decidieron que cada casilla tiene un valor de 3 puntos. Ayúdale a Julián a completar la tabla de registro individual.

Nombre: Julián Pérez

Saqué	2	3	4	5	6		
Casillas recorridas	0	1				2	
Puntos sobrantes	2	0					2

2. Félix elaboró la siguiente tabla de registro individual. Descubre qué valor le dieron a cada casilla en ese grupo y completa los espacios que faltan

Nombre: Félix Bustamante

Saqué	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Casillas recorridas	0	0	0	1	1	1			
Puntos sobrantes	2	3	4	0	1	2			

JUGUEMOS PARQUES - 4

Esta guía de trabajo pertenece a: ______________________________

1. Reúnete nuevamente con 3 compañeros o compañeras para jugar parqués, pero ahora la condición es que cada casilla tiene un valor de 5 puntos.
2. **Observa** el ejemplo de los primeros lanzamientos de Roberto Jiménez

Nombre: Roberto Jiménez

Saqué	2	8	12	5	3				
Casillas recorridas	0	1	2	1	0				
Puntos sobrantes	2	3	2	0	3				

Explica con tus palabras la forma de completar la tabla cuando cada casilla vale 5 puntos. Y cómo se puede saber las casillas que al final se avanzan por los puntos sobrantes de cada lanzamiento.

____
____
____
____

3. Completa tu propia tabla de registro personal mientras juegas con tus compañeros/as. Utiliza las que sean necesarias.

Nombre: ____

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Saqué							
Casillas recorridas							
Puntos sobrantes							

Hoja de trabajo del alumno
Situación 2 – Actividad 4

JUGUEMOS CANICAS - 1

Equipo ____________________

Esta guía de trabajo pertenece a: __________________________

1. Reúnete con 5 compañeros o compañeras más para formar un equipo.

2. Cada equipo dispone de 20 canicas que debe poner sobre una hoja tamaño carta.

3. Cada jugador debe lanzar una canica hacia las que se encuentran sobre la hoja, buscando hacer que la mayor cantidad de canicas se desplacen fuera de ella.

4. Cada vez que desplace 2 canicas fuera de la hoja el jugador obtiene 5 puntos. Debe anotarse cada jugada en la hoja de registro, incluyendo si queda alguna canica sobrante, para ser tenida en cuenta al final de los 5 turnos.

Tabla de registro personal

Desplacé					
Puntaje					
Sobraron					
				Puntaje total	

Hoja de trabajo del alumno
Situación 3 – Actividad 1

JUGUEMOS CANICAS - 2

Equipo ______________________

Esta guía de trabajo pertenece a: ___________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1. Explica en tu cuaderno cómo haces para encontrar el puntaje cuando desplazas 6 canicas fuera de la hoja.

2. Si se sabe que cada vez que se desplazan 2 canicas, se obtienen 5 puntos, completa la siguiente tabla para conocer el puntaje de Mario al desplazar 8 canicas.

Canicas	***Puntaje***
2	5
4	
8	

3. Luisa completó la siguiente tabla para saber el puntaje obtenido al desplazar algunas canicas fuera de la hoja, pero algunos números se borraron. Ayúdala a completar los números que faltan.

Canicas	***Puntaje***
2	
	10
	15

4. La siguiente es la tabla de registro de Lucas. Él realizó los cálculos en el primer lanzamiento, pero luego sólo escribió el número de canicas desplazadas. Averigua el puntaje que obtuvo en cada lanzamiento y en total.

Desplacé	5	6	3	10	
Puntaje	10				
Sobraron	1	0	1	0	
				Puntaje total	

5. A Liliana también debes ayudarla a llenar la tabla de registro. Ella sólo escribió los puntajes y le faltó escribir las canicas desplazadas en cada lanzamiento.

Desplacé					
Puntaje	10	10	15	20	
Sobraron	0	1	0	1	
				Puntaje total	

Hoja de trabajo del alumno
Situación 3 – Actividad 2

JUGUEMOS CANICAS - 3

Equipo ____________________

Esta guía de trabajo pertenece a: ___________________________

1. Reúnete nuevamente con tus compañeros para jugar canicas.

2. Ahora la condición es que cada vez que se desplacen 3 canicas fuera de la hoja, se obtienen 2 puntos.

Tabla de registro personal

Desplacé					
Puntaje					
Sobraron					
				Puntaje total	

3. Describe el procedimiento empleado para conocer el puntaje cada vez que se desplazan las canicas.

____

____

____

____

JUGUEMOS CANICAS - 4

Equipo ____________________

Esta guía de trabajo pertenece a: ___________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1. Completa la siguiente tabla para conocer el puntaje obtenido al desplazar 9 canicas.

Canicas	*Puntaje*	*Sobran*
3	2	0
4	2	1
5	2	2
6	3	0
7	3	1
8	3	2
9		

2. Completa la siguiente tabla para conocer el puntaje obtenido al desplazar 18 canicas.

Canicas	*Puntaje*
3	2
6	4
12	
15	
18	

3. Una persona que tuvo en un lanzamiento un puntaje de 10, ¿cuántas canicas desplazó? ___________

4. Si quiero obtener un puntaje de 20, ¿cuántas canicas debo desplazar? _______________

5. Si se desplazan 16 canicas, ¿qué puntaje se obtiene? _________

JUGUEMOS CANICAS - 5

Equipo ____________________

Esta guía de trabajo pertenece a: ___________________________

PREGUNTAS DE TRABAJO INDIVIDUAL

1. Un grupo diferente de niños también jugó a las canicas pero con una condición diferente. Observa la siguiente tabla y averigua la condición para obtener los puntajes.

Canicas	***Puntaje***	***Sobran***
6	2	0
12	4	0
24	8	0

____

____

2. Completa las siguientes tablas teniendo en cuenta la condición que acabas de encontrar.

Canicas	***Puntaje***
3	
6	2
9	
12	

Canicas	***Puntaje***	***Sobran***
6	2	0
7	2	1
8	2	2
9	3	0
10		
11		
12		

3. Inventa una nueva condición para jugar canicas: ______________________
____

4. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta la condición que inventaste.

Canicas	***Puntaje***	***Sobran***
1		
2		
3		
4		
5		
10		
11		
12		

ANEXO 6: JUGUEMOS CON ARENA

COLEGIO CALASANZ
PADRES ESCOLAPIOS
MEDELLÍN

Matemáticas grado 3º - 2005

Nombres: _______________________ y ____________________________

A continuación se le hace entrega a cada pareja de 4 clases diferentes de vasos

Dibujar en el cuaderno los vasos que se les entregan.

1. Deberán llenar con arena los diferentes vasos y tratar de descubrir cuántos de cada uno se necesitan para llenar los demás.
2. ¿Cuál es el vaso más grande? __________
3. ¿Cuál es el vaso más pequeño? _________
4. ¿Cuántas veces se debe llenar el vaso A para completar el vaso B?___________

Vaso A cabe ______ veces en el vaso A
Vaso A cabe ______ veces en el vaso B
Vaso A cabe ______ veces en el vaso C
Vaso A cabe ______ veces en el vaso D

Vaso B cabe ______ veces en el vaso A
Vaso B cabe ______ veces en el vaso B
Vaso B cabe ______ veces en el vaso C
Vaso B cabe ______ veces en el vaso D

Vaso C cabe ______ veces en el vaso A
Vaso C cabe ______ veces en el vaso B
Vaso C cabe ______ veces en el vaso C
Vaso C cabe ______ veces en el vaso D

Vaso D cabe ______ veces en el vaso A
Vaso D cabe ______ veces en el vaso B
Vaso D cabe ______ veces en el vaso C
Vaso D cabe ______ veces en el vaso D

Después de realizar varios ensayos completar la siguiente tabla de registro:

	VASO A	**VASO B**	**VASO C**	**VASO D**
VASO A				
VASO B				
VASO C				
VASO D				

Hoja de trabajo del alumno
Situación 4 – Actividad 1

Nombre: ____

1. Para hacer una gelatina se emplean 2 vasos D. Si se quiere dar la receta de la gelatina pero diciendo la medida en vasos C. ¿Cuántos vasos C se necesitan?

2. En un juego de muñecas Catalina se gastó 12 vasos B para servir el jugo. ¿Cuántos vasos D utilizó? ¿Cuántos vasos A son?

3. La receta de un postre dice lo siguiente:
   a. 2 vasos D de harina
   b. 2 vasos C de azúcar
   c. 8 vasos B de jugo de limón
   d. 10 vasos A de agua.

   Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso B.
   a. ____
   b. ____
   c. ____
   d. ____

   Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso D.
   a. ____
   b. ____
   c. ____
   d. ____

Hoja de trabajo del alumno
Situación 4 – Actividad 2