



DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un ejercicio de transposición Didáctica en Torno al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado de Educación Básica

NORMA LORENA VÁSQUEZ LASPRILLA

ENERO 2010

Un ejercicio de transposición Didáctica en Torno Al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado De Educación Básica

NORMA LORENA VÁSQUEZ LASPRILLA

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación, con énfasis en
Docencia de las Matemáticas.

Asesor
Ph. D. CARLOS MARIO JARAMILLO L.
Profesor Departamento de Matemáticas

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
ENERO DE 2010



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Carlos Mario Jaramillo López (Presidente del jurado), Ana Celia Castiblanco Paiba y Orlando Monsalve Posada, en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación: "Un ejercicio de transposición Didáctica en Tomo al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado de Educación Básica" presentada por la estudiante **NORMA LORENA VÁSQUEZ LASPRILLA**, de la Cuarta Cohorte de la Maestría en Educación, línea Docencia de las Matemáticas, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO**, por unanimidad, luego el presidente dio a conocer el resultado.

Al trabajo de investigación que mereciere ser destacado, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

- X Meritorio:
- Sobresaliente:

Medellín, 22 de junio de 2010


CARLOS MARIO JARAMILLO L.
Presidente del Jurado


ANA CELIA CASTIBLANCO P.
Jurado


ORLANDO MONSALVE POSADA
Jurado

Agradecimientos

Son muchas las personas que debería nombrar en estas líneas, aquellas que no han bajado la guardia y siempre me han apoyado, tanto a lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación como a lo largo de mi vida.

A Dios, por regalarme el milagro de la vida y por estar siempre presente en ella

A mi madre y padre, por su amor y apoyo incondicional

A mis hijas Sofía y Daniela por ser la razón de mi vida y fuente de inspiración

A mi esposo Gilberto, quien ha sido mi pilar durante esta etapa de mi vida, por el amor y apoyo constante e incondicional

A la Universidad de Antioquia, por el impulso en mi formación profesional

A mi director de tesis y demás profesores por sus valiosos aportes y enseñanzas

A mis compañeros, por compartir mis angustias y aventuras en el desarrollo de esta investigación

A todos ustedes gracias.

Resumen

En el marco de la presente investigación se pretende realizar un análisis transpositivo en torno al concepto de número natural. Para ello se adelantan reflexiones y estudios acerca del saber didáctico que orientan el trabajo del docente de preescolar y primero grado de básica primaria, al igual que de los elementos que direccionan las propuestas plasmadas en los libros de texto que circulan en el medio, respecto al concepto de número natural. Como parte del trabajo realizado, y en el marco de los análisis propios de la transposición didáctica, se ha adelantado un análisis de los procesos transpositivos, desde el saber sabio (las diferentes formalizaciones del número natural, su proceso de constitución como objeto matemático) hasta el saber seleccionado para ser enseñado (las diferentes formas de presentación de los números naturales en el entorno escolar), el cual ha mostrado que en las instituciones escolares coexisten, al lado de enfoques fuertemente anclados a perspectivas psicológicas, propuestas que recuperan diferentes sentidos del concepto de número natural, lo cual muchas veces no es del todo consciente en las prácticas pedagógicas de los maestros. Con tales reflexiones, se espera producir una propuesta de actividades de aula que integre los principales elementos didácticos obtenidos a partir de la reflexión transpositiva del concepto de número natural. Con los resultados obtenidos se espera mostrar, la forma como el conocimiento relativo a los números naturales se modifica a través de diferentes instancias y momentos hasta que es efectivamente incorporado en los contextos escolares. Dichos análisis, permiten redimensionar el sentido de las prácticas pedagógicas de los maestros, el sentido de la actividad matemática de los alumnos, y por ende, de los procesos de aprendizaje de los mismos respecto al número natural.

Tabla de Contenido

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	IV
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	VII
ÍNDICE DE GRÁFICAS	VIII
0 INTRODUCCIÓN	1
PARTE I: PUNTOS DE PARTIDA Y REFERENTES TEÓRICOS.....	4
1 CONTEXTUALIZACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	5
1.1 LA EDUCACIÓN PREESCOLAR EN LA ÚLTIMA DÉCADA EN COLOMBIA.....	6
1.2 ¿POR QUÉ EL NÚMERO NATURAL COMO UN CONCEPTO CENTRAL EN LA PROPUESTA CURRICULAR DEL CICLO DE LA EDUCACIÓN PREESCOLAR?	8
1.3 EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR	10
1.4 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA	11
1.5 OBJETIVOS.....	13
1.5.1 <i>Objetivo general</i>	13
1.5.2 <i>Objetivos específicos</i>	13
1.6 ANTECEDENTES.....	14
2 CONSIDERACIONES TEÓRICAS.....	18
2.1 INTRODUCCIÓN.....	18
2.2 LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN	18
2.3 LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA	22
2.3.1 <i>Especificidad de las construcciones didácticas</i>	27
2.3.2 <i>La puesta en textos del saber</i>	28
2.3.3 <i>El tiempo didáctico y el tiempo de aprendizaje</i>	29
2.4 TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO.....	30
3 REFERENTES METODOLÓGICOS	34
3.1 ESTRUCTURA GENERAL DE ANÁLISIS.....	34
3.2 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	38
3.2.1 <i>Localización de los casos</i>	38
3.2.2 <i>Recolección de los datos</i>	40
3.3 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	42
3.4 VALIDEZ	43
PARTE II: TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN EL SENTIDO AMPLIO	45
4 ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DEL NÚMERO NATURAL: EL SABER DE REFERENCIA	46
4.1 BABILONIOS Y EGIPCOS	46
4.2 LOS GRIEGOS.....	49
4.3 LA EDAD MEDIA	52
4.4 ETAPA DE FUNDAMENTACIÓN.....	56
4.4.1 <i>Dedekind: una fundamentación desde la perspectiva ordinal del número</i>	57
4.4.2 <i>Peano: una fundamentación axiomática del número</i>	61

4.4.3	<i>Cantor: una fundamentación desde la perspectiva cardinal de número</i>	63
4.4.4	<i>Frege: una perspectiva conjuntista del número natural</i>	66
4.5	REFLEXIONES FINALES	68
5	PERSPECTIVAS COGNITIVAS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL: ¿CÓMO SE ESPERA QUE EL NIÑO APRENDA?	70
5.1	PERSPECTIVA PIAGETIANA.....	71
5.2	PERSPECTIVA ACERCA DEL CONTEO	75
5.3	VISIÓN INTEGRADORA.....	78
6	EL NÚMERO NATURAL EN EL SISTEMA ESCOLAR: LO QUE SE ESPERA ENSEÑAR	85
6.1	INTRODUCCIÓN.....	85
6.2	CURRÍCULO PROPUESTO	86
6.3	REGLAMANTACIÓN CURRICULAR	86
6.3.1	<i>Los años 1886 – 1950</i>	86
6.3.2	<i>Los años 1950 a 1968</i>	91
6.3.3	<i>Los años 1968 y 1994</i>	95
6.3.4	<i>Los años 1994 a 2006</i>	100
6.3.5	<i>Consideraciones finales</i>	109
6.4	UNA MIRADA A LOS LIBROS DE TEXTO.....	110
6.4.1	<i>Contextualización</i>	112
6.4.2	<i>Categorías de análisis</i>	124
6.4.3	<i>Caracterización de las propuestas de los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación básica y preescolar</i>	145
6.4.4	<i>A manera de cierre</i>	172
	PARTE III: TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN EL SENTIDO ESTRICTO	175
7	EL SABER DIDÁCTICO DE LOS DOCENTES AL RESPECTO DEL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL 176	
7.1	INTRODUCCIÓN.....	176
7.2	CARACTERIZACIÓN DEL SABER MATEMÁTICO Y COGNITIVO DEL DOCENTE CON RESPECTO AL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL	177
7.2.1	<i>Participantes</i>	178
7.2.2	<i>Estructura del instrumento y respuestas obtenidas</i>	178
7.3	OBSERVACIONES FINALES	190
8	ALTERNATIVA PARA EL TRABAJO DE AULA EN TORNO AL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL	193
8.1	ELEMENTOS TEÓRICOS DE REFERENCIA.....	193
8.2	PAQUETE DE ACTIVIDADES.....	195
9	CONCLUSIONES	203
10	BIBLIOGRAFÍA	208
11	ANEXOS	213

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1	6
Ilustración 2	23
Ilustración 3	38
Ilustración 4	62
Ilustración 5	115
Ilustración 6	125
Ilustración 7	126
Ilustración 8	128
Ilustración 9	129
Ilustración 10	129
Ilustración 11	130
Ilustración 12	131
Ilustración 13	132
Ilustración 14	134
Ilustración 15	135
Ilustración 16	135
Ilustración 17	137
Ilustración 18	138
Ilustración 19	138
Ilustración 20	140
Ilustración 21	140
Ilustración 22	141
Ilustración 23	142
Ilustración 24	143

Índice de Gráficas

Gráfica 1.....	148
Gráfica 2.....	150
Gráfica 3.....	153
Gráfica 4.....	155
Gráfica 5.....	156
Gráfica 6.....	157
Gráfica 7.....	161
Gráfica 8.....	163
Gráfica 9.....	164
Gráfica 10.....	167
Gráfica 11.....	169
Gráfica 12.....	171
Gráfica 13.....	180
Gráfica 14.....	182
Gráfica 15.....	186

0 Introducción

Los estudios en psicología cognitiva han permitido el avance y la ampliación de las perspectivas didácticas en torno a la conceptualización del número natural. Dichos avances hacen necesario revisar y replantear, tanto los ambientes escolares que se han generado para la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto, como el enfoque adoptado en la formación de docentes, para favorecer la comprensión de los fenómenos y los problemas asociados a la construcción y desarrollo del pensamiento numérico. En este sentido, surgen diferentes preguntas a la hora de enfrentar estos estudios: ¿Cuál es el papel y la función de los procesos de comunicación en la formación de saberes matemáticos, en particular, el concepto de número natural?, ¿Cómo integrar la representación simbólica como parte relevante del proceso de construcción de significado del número natural?, ¿Cuáles concepciones sobre número natural están orientando las prácticas pedagógicas y las propuestas de los libros de texto que circulan en el medio? ¿Cuáles son las conceptualizaciones que se logran formar los estudiantes, luego de haber sido escolarizados en los primeros grados, respecto del número natural?

En respuesta a dichas demandas, el presente trabajo de investigación desarrolla un análisis didáctico del concepto de número natural, desde la perspectiva de la transposición didáctica. Dicho ejercicio, se remite en primera instancia, a las reflexiones de orden histórico-epistemológico y cognitivo para, con base en ello, indagar las nociones y los conceptos que están presentes en las prácticas pedagógicas y en los procesos desarrollados por los estudiantes, al respecto del concepto en cuestión. A la luz de tales elementos, se caracterizaron y se contrastaron diferentes formas de aproximación ontológica y epistemológica del concepto de número natural, con los referentes curriculares dados desde el Ministerio de Educación Nacional, con las propuestas pedagógicas de los textos escolares, y con la gestión que el maestro hace de la actividad matemática del alumno respecto al número natural.

Se trató entonces de establecer qué relación y distancias se crean entre el saber sabio, el saber que ha sido designado para ser enseñado, y el saber que realmente se comunica en el aula de clase.

Así se propuso el siguiente problema de investigación:

¿Cómo se lleva a cabo el proceso de transposición didáctica del concepto de número natural, en el contexto de la educación preescolar y el primer grado de educación básica primaria en Colombia?

El cual se desarrolla a partir de las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo se construye el concepto de número natural a través del saber didáctico de los docentes?
- ¿Cómo está presente el concepto de número natural en las propuestas curriculares que orientan los procesos de enseñanza?
- ¿Qué tipo de construcciones formales se han elaborado a través de la historia acerca del concepto de número natural?
- ¿Cómo los referentes cognitivos dan cuenta del aprendizaje del concepto de número natural?

Para abordar este conjunto de interrogantes, en el marco de la teoría de la transposición didáctica, se llevaron a cabo diferentes análisis de nociones y conceptos que están presentes en la gestión que desarrolla el docente en el aula de clase, en contraste con diferentes formas de aproximación ontológica y epistemológica del concepto de número natural. De igual forma, se requirió cruzar tal análisis con los elementos que orientan el currículo colombiano en cuanto al pensamiento numérico, pensamiento en el cual se inscribe como objeto de enseñanza el número natural. Lo anterior se cristalizó en la elaboración de diferentes análisis. Uno a nivel histórico-epistemológico, de tal forma que se obtenga una visión sobre los condicionantes epistemológicos claves en el desarrollo histórico del concepto de número natural. Un

segundo análisis a nivel de los libros de texto que permite evidenciar los elementos rectores que están consultando los docentes para la formulación de sus actividades de clase. Un tercer análisis en la perspectiva didáctica y psicológica, que ofrezca elementos de reflexión relativos al trabajo de aula y en función de los procesos cognitivos que desarrolla el niño para la construcción del concepto de número natural. Un cuarto análisis se enfoca a la caracterización de las prácticas pedagógicas que emplean los docentes en la gestión de la actividad matemática en el aula.

El reconocimiento, la caracterización y la valoración de las relaciones que se pudieron establecer entre tales elementos del sistema didáctico, permitieron reconocer referentes didácticos básicos para orientar el quehacer docente y permear los diseños curriculares, de tal forma que se privilegien el diseño de situaciones a partir de variables centrales en relación con los diferentes procesos de construcción del número natural.

Así por ejemplo, desde las prácticas escolares, y en particular, desde las actividades propuestas en los libros escolares nacionales se aprecia cómo se aborda la construcción del concepto de número natural de manera superficial y se centra la atención en la enseñanza de los algoritmos de las operaciones básicas. Esto implica abordar la simbología, y de manera general, el sistema de numeración decimal, de manera precoz y adiestrar al niño, en el manejo de procedimientos (básicamente multiplicativos y de potenciación) que no tienen ningún referente para él. Es decir, se dejan de lado los contextos de significación del número natural y se abordan los procesos algorítmicos formales sin dar espacio para el fortalecimiento de los procesos de conteo, de comunicación de cantidades y de cálculos informales.

Igualmente se pudo contrastar estas apuestas de los textos con los planteamientos de los Lineamientos Curriculares de matemáticas. Estos plantean integrar un trabajo que le permita al niño y en general al ciudadano, comprender el número en sus diversos significados y representaciones para desarrollar habilidades numéricas que le permita emitir juicios matemáticos. Se requiere pues, de un sujeto capaz de analizar la información circundante de tal manera que escoja y realice los cálculos pertinentes para dar respuesta reflexiva acerca de un planteamiento particular.

Parte I: Puntos de Partida y Referentes Teóricos

1 Contextualización y justificación del problema

Como lo expresa Brousseau (1998) “hoy, la didáctica de las matemáticas designa el estudio científico de las condiciones específicas de la difusión de los conocimientos matemáticos entre los hombres o las instituciones humanas” (p. 2). De acuerdo con esta postura es pertinente analizar cuáles son esas condiciones particulares que se presentan en una institución, y cómo ellas permiten que un determinado conocimiento matemático se construya, se dote de sentido y circule en dicha comunidad, y de una comunidad a otra. En la comprensión de estos procesos la teoría de la Transposición Didáctica es una herramienta, conceptual y metodológica, que permite caracterizar la construcción, desarrollo y difusión del conocimiento matemático en el marco de institucionalidades específicas.

El proceso de transposición didáctica señalado arriba, demarca el carácter relativo y dependiente del saber matemático en los marcos institucionales. “La forma de existencia y de evolución de la actividad matemática en una institución concreta, depende principalmente, de las restricciones educativas relativas al proceso de transposición didáctica” (Bosch, et al., 2005, p. 1257). Dicha relatividad del saber matemático impone la necesidad de analizar, de manera integral, los fenómenos didácticos que influyen y dan sentido al proceso transpositivo del saber. Se requiere entonces, indagar acerca del papel que desempeña la noción matemática, objeto de estudio, en los diferentes contextos (matemáticos, cotidianos, de otras ciencias). Igualmente, es pertinente caracterizar las diferentes formas como se ha constituido como objeto matemático, el concepto estudiado. Este análisis del saber matemático involucra además, la pregunta acerca de para qué se enseña y cómo puede ser aprendido el concepto estudiado. El estudio de estas condiciones particulares, propias del proceso de transposición didáctica, permite dimensionar el tipo de restricciones y alcances de un proceso de aprendizaje de saberes matemáticos en un una determinada

institución (Bosch, Gascón, 2006). El esquema de la Ilustración 1 sintetiza las relaciones y los momentos del proceso de transposición didáctica.

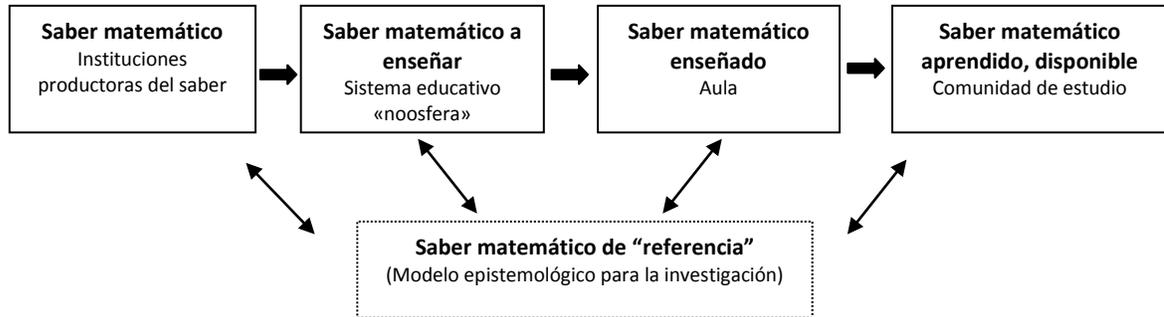


Ilustración 1
El proceso de la transposición didáctica
(Bosch, Chevallard, & Gascón, 2005, p. 1257, traducción de la autora)

1.1 La Educación Preescolar en la Última Década en Colombia

A partir de la formulación del Plan Decenal de Educación (Ministerio de Educación Nacional, 2006b), las políticas educativas colombianas han dado un giro importante en lo relativo a la atención a la primera infancia. Dichas propuestas se concretan en la formulación de la Política Educativa para la Primera Infancia (Congreso de Colombia, 2009).

El objetivo central de esta política educativa es brindar atención integral a los niños colombianos entre 0 y 5 años. Las áreas de atención integran la salud, la educación inicial y la nutrición. Se espera que brindando cuidado y seguimiento en la primera infancia, los niños aumenten la posibilidad de ingreso y permanencia en los ciclos de escolaridad formal, y en general, se desempeñen con mayor fluidez y éxito, tanto en su proceso educativo como en su vida laboral futura.

Un aspecto fundamental que orienta estos planes es reconocer que la atención a la primera infancia debe trascender los aspectos puramente asistenciales (brindar condiciones vitales básicas), para incluir reflexiones en torno a los procesos educativos y de formación

en esta franja de la población. Este aspecto además incluye los procesos de articulación y proyección de la educación inicial con la educación formal¹.

La intención de redimensionar el tipo de educación y atención que se brinda a la primera infancia, se plasma inicialmente, la Constitución Política de Colombia expresa que: “la educación será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y comprenderá como mínimo un año de preescolar” (Congreso de Colombia, 1991, artículo 67). Complementario a esto, y en aras de disponer de un referente conceptual que oriente la acción de las instituciones en la meta de lograr una mejor formación de los niños colombianos, el Ministerio de Educación Nacional, a través del decreto 2247 de 1997, formula los lineamientos curriculares del preescolar (Ministerio de Educación Nacional, 1997).

En el marco de referencia de los lineamientos curriculares de preescolar se asume que el niño es un sujeto activo e integral, y se constituye en el centro del proceso pedagógico. En esta perspectiva, el proceso de formación debe adoptar una visión amplia del ser, integrando todas sus dimensiones: ética, estética, corporal, cognitiva, comunicativa, socio-afectiva y espiritual (Ministerio de Educación Nacional, 1997). De ahí que la propuesta curricular no se plantee en términos de áreas de conocimiento, sino en función de núcleos temáticos globales, donde se potencie la interacción social, los procesos cognitivos y de comunicación, la convivencia, el uso de derechos y deberes, el reconocimiento de sí mismo, y en general, se propenda por el desarrollo humano. Tal estructura de trabajo, se organiza a partir del desarrollo de competencias (aprender a hacer), las interrelaciones (aprender a vivir juntos) y la autonomía (aprender a ser).

Para el logro de estas metas, el proceso pedagógico se enmarca en tres principios: *integralidad*, donde el niño se asume como un ser único y social; *participación*, que permite el intercambio de ideas mediante el trabajo en grupo; y la *lúdica*, donde se privilegia el juego como contexto y acción que permite que el niño despliegue su actividad creadora. Además, se toma como punto de partida la actividad que realiza el estudiante en función de

¹ En general, estos programas buscan cerrar las brechas de inequidad entre los sectores más favorecidos y los menos favorecidos de la población colombiana. Por ejemplo, mientras que el 100% de los niños de los estratos socioeconómicos altos asiste a la educación preescolar (tres grados), tan solo el 5% de los niños de los estratos bajos asiste a este fragmento educativo (un solo grado). Quizás a estas diferencias se deba que la mayor deserción (por grados), en el sistema educativo (oficial), se presente en el grado primero de la educación básica.

la realidad, dado que cualquier situación cotidiana puede ser fuente inagotable de preguntas. Esta forma de interacción con la realidad se convierte en insumos de conocimiento y aprendizaje.

Ahora bien, dado que los lineamientos para la educación preescolar se fundamentan en procesos de desarrollo humano integral, éstos, como propuesta curricular, no incluye áreas temáticas específicas para el desarrollo de los procesos educativos. Pese a ello, sí se resalta la dimensión cognitiva como uno de los ejes centrales para la formación del niño. Tal reconocimiento plantea un problema curricular en cuanto a ¿qué conceptos y nociones son pertinentes abordar en el proceso de enseñanza en el ciclo de educación preescolar?, ¿Qué orden, secuenciación, relaciones y tiempo se requiere para tal proceso de enseñanza?, ¿Qué tipo de habilidades y competencias, al trabajar dichos conceptos, se logran desarrollar en el niño? Los docentes, los escritores de libros de texto, las autoridades ministeriales, los investigadores en educación, en fin, la comunidad encargada del diseño y ejecución de un currículo para la educación preescolar, toman referencias desde diferentes fuentes documentales. Para el caso de la educación matemática, estas provienen fundamentalmente desde dos campos: las matemáticas como disciplina científica (con su historia, filosofía y epistemología), y desde la psicología, en particular, la psicología cognitiva. Esto ha llevado, bajo el influjo de los desarrollos de la psicología genética de Piaget, al desarrollo de propuestas curriculares que centran la formación del pensamiento matemático en lo numérico (fundamentalmente, el número natural) y en lo espacial (fundamentalmente, en lo relativo a la construcción del espacio). En virtud del objetivo del presente trabajo, a continuación se analizará con más detalle por qué el concepto de número natural se erige en la escuela elemental como un concepto estructurante de las propuestas curriculares.

1.2 ¿Por qué el Número Natural como un Concepto Central en la Propuesta Curricular del Ciclo de la Educación Preescolar?

Como se expresó antes, las teorías Piagetianas sobre la construcción del conocimiento han tenido una fuerte influencia en las decisiones de orden curricular, al menos en lo que respecta a la educación básica. Esta teoría plantea que uno de los ejes centrales para lograr el desarrollo del pensamiento infantil es el pensamiento lógico matemático, el cual permite

que el niño construya estructuras mentales (internas) a partir de la reflexión y la abstracción desde las acciones concretas. Al reflexionar sobre su propia acción el niño puede lograr identificar semejanzas y diferencias (invariantes o esquemas de acción), lo cual le permite generar clases y subclases, al igual que establecer relaciones de orden y equivalencia. Estos procesos de generar, ordenar e igualar clases constituyen la base para la construcción del concepto de número en la mente del niño, pero a su vez, en la perspectiva Piagetiana, son la base fundamental sobre la cual se desarrollan todos los procesos cognitivos del niño.

Por lo tanto, una propuesta curricular fundamentada en los planteamientos de Piaget, se orienta hacia el desarrollo del pensamiento lógico matemático y se dará a la tarea de diseñar y ejecutar actividades de aula que le permitan al niño realizar acciones mentales como, clasificar, seriar, establecer correspondencias y cuantificar conjuntos. Es decir, los procesos de enseñanza se centrarían en el establecimiento de relaciones lógicas que fundamentan el concepto de número como una estructura mental.

Sin embargo, los postulados de la psicología genética no son los únicos que soportan la importancia de la enseñanza del número en el preescolar y la educación básica. Esta importancia se reafirma desde las investigaciones centradas en perspectivas socio-antropológicas, las cuales analizan el contexto social y determinan qué nociones y concepto circulan y se emplean frecuentemente. Dentro de tales nociones, se destacan las matemáticas, dado que ellas brindan al estudiante, herramientas de pensamiento y conocimientos básicos, de tal forma que éste pueda resolver situaciones y problemas puntuales. Como lo argumenta Alan Bishop (1999), contar, localizar, medir,..., son habilidades básicas que todo ser humano debe desarrollar para poder resolver situaciones cotidianas y vivir en sociedad, pero además son la base para la construcción de cualquier conocimiento matemático formal.

Así, una propuesta curricular que adopta el marco de las habilidades básicas mencionadas en el párrafo anterior, estará basada en actividades de aula donde el estudiante deba contar, medir, localizar, etc., pero sobre la base de actividades con una alta significación en las prácticas socioculturales contextualmente situadas. En este marco, el número natural es objeto de enseñanza a partir de actividades donde el estudiante logre

reconocer los diferentes sentidos y significados que tiene en el marco de las prácticas culturales propias de su comunidad.

Finalmente, un currículum también se puede definir en función de qué enseñar en el preescolar, tomando como base lo esperado en los grados siguientes. Es decir, se puede fundamentar la propuesta curricular de acuerdo con las habilidades y competencias que se desea potenciar en el niño antes de iniciar el ciclo de la educación básica primaria. Dado que las matemáticas se reconocen como un área de formación en la educación básica primaria, es necesario, que en el nivel de preescolar, el estudiante haya desarrollado ciertas habilidades numéricas previas, de tal forma que al llegar al grado primero pueda abordar elementos más formales al respecto del concepto de número natural: la representación y comunicación de cantidades, el sistema de numeración decimal y los algoritmos; los sentidos que toman las operaciones básicas en este conjunto numérico.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, es posible reformular el conjunto de interrogantes curriculares del preescolar (sección anterior), ahora en función de un eje conceptual del currículo de matemáticas para este fragmento de la escolaridad, esto en tanto que, no sólo se trata de un eje básico para el desarrollo del pensamiento matemático, sino también, por los significados y relaciones que este concepto adopta en las diferentes situaciones cotidianas.

1.3 El Conocimiento Matemático Escolar

Una vez identificado el número natural como uno de los conceptos centrales, objeto de enseñanza en el ciclo de educación preescolar, cabe preguntarse acerca de:

- ¿Qué elementos, nociones y sentidos acerca del número natural se privilegian en los procesos de enseñanza?
- ¿Qué nociones y principios fundamentales se seleccionan para enseñar el número natural, cuál estructura y organización que se propone para ello?
- ¿Qué adaptaciones y/o transformaciones sufre el concepto de número natural cuando es seleccionado como objeto de enseñanza en contextos escolares?
- ¿Qué tipo de concepciones tienen los docentes sobre el número natural?

- ¿Qué tipo de propuestas de actividades de aula se plasman en los libros de texto, acerca del número natural?

La formulación de estos interrogantes evidencia la necesidad de analizar los elementos asociados al fenómeno de transposición didáctica del concepto de número natural. Esto implica, como lo señala Bosch, Chevallard y Gascón (2005), "... reconocer que el conocimiento y la actividad matemática que se desarrolla en la escuela no puede ser analizada sin tener presente el fenómeno de su reconstrucción en el marco de una institución educativa" (p. 1256). Tal proceso requiere, tanto analizar las fuentes de dónde surge el concepto de número natural, como caracterizar las diferentes estrategias que se han empleado para enseñarlo y aprenderlo en las instituciones educativas. Los resultados de estos análisis se convertirán en elementos explicativos y de validación para estudiar las construcciones institucionales que se hacen en torno a dicho concepto.

Así, desde la teoría antropológica de lo didáctico, los fenómenos didácticos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de conocimiento matemático no pueden ser aislados de los fenómenos de producción y uso de las matemáticas. Además, la actividad matemática escolar integra las prácticas matemáticas institucionalizadas (Bosch, et al., 2005).

1.4 Delimitación del Problema

En los apartados 1.1, 1.2 y 1.3, se presentan argumentos acerca de la problemática del diseño curricular en matemáticas, en particular, sobre el concepto de número natural en el nivel preescolar, y sobre las posibilidades de la transposición didáctica para brindar un marco comprensivo de los fenómenos subyacentes a tales problemáticas. Al respecto del diseño curricular, Chevallard, Bosch y Gascón, (1997) señalan que:

Desde el punto de vista de la enseñanza, y una vez seleccionados, los contenidos de la educación obligatoria, se tiende a considerar "el problema del currículo" únicamente como una cuestión de secuenciación y temporalización de los mismos, que desemboca en el problema de la metodología de la enseñanza (p. 122)

El punto de vista de la didáctica propone que el problema de la elaboración del currículo, que tradicionalmente había sido considerado como un problema esencialmente pedagógico, tiene un componente matemático esencial. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos,

tecnológicos y teóricos que componen cada obra con base en las cuestiones a las que ésta responde. Se trata en definitiva, de una verdadera reconstrucción creativa de las obras que forman el currículo (p. 127).

De acuerdo con estos planteamientos se tiene que el problema didáctico de la construcción de currículo no se limita a la escogencia de temas y la secuenciación de los mismos, integra también las reelaboraciones, resignificaciones y prácticas institucionales que se hacen en torno a las nociones que son seleccionadas para abordar en el proceso de enseñanza. Esta referencia del conocimiento matemático, a las construcciones institucionales, implica asumir la actividad matemática como una actividad entre las actividades humanas. Además, también implica reconocer y analizar las condiciones que hacen posible tal tipo de actividad en el contexto escolar institucional (Chevallard, 1999). Por tanto, la unidad de análisis del fenómeno didáctico en relación a la construcción curricular, no se limita a determinar cómo se enseña y cómo se aprende, sino que, debe estudiar el fenómeno de manera integral, teniendo en cuenta la forma de existencia y evolución de los conceptos en los diferentes marcos institucionales².

Ahora bien, si de un lado se reconoce la importancia de la Transposición Didáctica como una teoría que nos permite comprender las problemáticas relativas a los procesos de transformación y adaptación del saber implicados en los diseños curriculares, y de otro, también se reconoce que en la literatura se encuentran numerosos estudios sobre la transposición didáctica en diferentes áreas temáticas de las matemáticas escolares, es importante destacar que no se encuentran estudios de este tipo que se refirieran a los procesos transpositivos en torno al número natural en el ciclo de la educación inicial en Colombia. Esta ausencia muestra la importancia de una línea de trabajo al respecto de un concepto articulador del pensamiento matemático como lo es el número natural.

Teniendo en cuenta los referentes anteriores, se plantea el siguiente interrogante como una guía para el trabajo de investigación:

¿Cómo se lleva a cabo el proceso de transposición didáctica del concepto de número natural, en el contexto de la educación preescolar y el primer grado de educación básica primaria en Colombia?

² El término institución se refiere a una agrupación de individuos que comparten formas de hacer y de pensar. Además, asumen marcos teóricos y referentes comunes, es decir, poseen ideologías comunes.

Para abordar este interrogante, es pertinente analizar y orientar el trabajo de investigación sobre:

- ¿Cómo se construye el concepto de número natural a través del saber didáctico de los docentes?
- ¿Cómo está presente el concepto de número natural en las propuestas curriculares que orientan los procesos de enseñanza?
- ¿Qué tipo de construcciones formales se han elaborado a través de la historia acerca del concepto de número natural?
- ¿Cómo los referentes cognitivos dan cuenta del aprendizaje del concepto de número natural?

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Caracterizar los fenómenos transpositivos en torno al concepto de número natural, en el contexto de la educación preescolar y el primer grado de educación básica primaria.

1.5.2 Objetivos específicos

- Determinar las diferentes formas de constitución y la naturaleza del número natural a través de la historia de las matemáticas.
- Analizar la incidencia de los fenómenos transpositivos en las propuestas curriculares acerca del concepto de número natural.
- Caracterizar los modelos epistemológicos y cognitivos del número natural, presentes en los libros de texto de matemática de primer grado de básica, durante el siglo XX.

1.6 Antecedentes

Como antecedentes, en el marco de la transposición didáctica, se van a citar dos estudios, uno de los cuales se presenta como tesis de doctorado, y el otro, como un reporte de investigación. Ambos elaboran y reportan modelos didácticos que caracterizan las adaptaciones, las modificaciones, las reconstrucciones y el tipo de actividad asociada a cierto conocimiento matemático, para luego analizar, el tipo de restricciones didácticas que influyen en el proceso de aprendizaje de dicho saber.

El primer estudio, titulado, *La Transposición Didáctica del Álgebra en las Ingenierías. El Caso de los Sistemas de Ecuaciones Lineales*, elaborado por Silvia Elena Ibarra Olmos (Ibarra, 2008), caracteriza el proceso de transformación del conocimiento referido a las ecuaciones lineales, en un plan de estudios de ingeniería, desde que ha sido diseñado en el currículo de la carrera, hasta que es enseñado en las aulas de clase. El segundo estudio, titulado, *La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad*, elaborado por Pilar Bolea, Marianna Bosch y Josep Gascón (Bolea, Bosch, & Gascon, 2001), analiza y explica los procesos de transposición didáctica en torno al álgebra elemental en el contexto de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en España.

En los planteamientos de la tesis de Ibarra se evidencian los diferentes factores que influyen en el proceso de transposición didáctica de las ecuaciones lineales, en el marco de un programa de ingeniería, a partir del estudio de la constitución de significados personales/institucionales³. Dicha tesis asume el análisis del proceso transpositivo a nivel micro, es decir, se estudian los procesos de transformación que tiene el conocimiento matemático, al interior de una institución. Para ello examina el significado personal/institucional, el significado pretendido y el significado referencial, que se tiene sobre las ecuaciones lineales, a la luz de los sistemas de prácticas matemáticas institucionalizadas. Éstos últimos se estudian como conjunto de acciones y expresiones encaminadas a la solución de una situación puntual. Las relaciones que se establezcan

³ Como lo señala Ibarra (2008), “Entenderemos por significado personal/significado institucional de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas que hace una persona o una institución para resolver un campo de problemas” (p. 5). Vale la pena aclarar que nociones como significados personales e institucionales, sistemas de prácticas, significado pretendido y referencial son tomadas desde la teoría ontosemiótica desarrollada por el profesor Juan D. Godino y sus colaboradores.

entre cada uno de estos sistemas de prácticas son los que, en mayor proporción, van a determinar cada una de las transformaciones que sufre el conocimiento relativo a las ecuaciones lineales en el programa de ingeniería. Así pues, desde la perspectiva de la transposición didáctica, la tesis muestra que:

1. Un análisis transpositivo del saber matemático en el marco de una institución (nivel micro), involucra la reflexión en torno a los diferentes significados construidos: a nivel referencial (alude a la significación institucional que se va a asumir del conocimiento matemático); a nivel de diseño (el significado diseñado y que se espera alcanzar luego de un proceso de enseñanza del conocimiento matemático), y a nivel personal (el significado propio que tiene el docente del conocimiento matemático, el cual permea su acción).
2. Se requiere un estudio sistemático de los sistemas de prácticas, tanto institucionales como personales, para explicar y reconstruir el conocimiento matemático en el marco institucional.
3. Es necesario establecer redes de objetos que conciernen y dan sentido al conocimiento matemático objeto de estudio, en función de los requerimientos y responsabilidades sociales de las instituciones donde se estudió dicho objeto, y a partir de las diferentes formas de constitución del mismo, a través de la historia.

Por su parte, el reporte de investigación de Bolea, Bosch y Gascón, toma como referente el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para analizar los procesos de transposición didáctica que han permitido reconstruir las organizaciones matemáticas⁴ y didácticas, en torno a la proporcionalidad de magnitudes, en el marco de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en España. Para ello, se parte de la premisa de que “la transposición didáctica no actúa sobre objetos matemáticos aislados, sino sobre

⁴ Las organizaciones matemáticas son entendidas como la forma, la estructura, los sentidos y significados que en el marco de una determinada institucionalidad, se le asigna al conocimiento matemático, y que determinan las condiciones dentro de las cuales se despliega la actividad matemática de los individuos. Una organización matemática debe ser entendida como la epísteme que permite la actividad matemática de los individuos inscritos en dicha institución. En este sentido, la noción de organización matemática en la teoría antropológica de la didáctica (Bosch, et al., 2005; Bosch & Gascón, 2007; Chevallard, et al., 1997) es equivalente a la noción de configuración epistémica en la teoría ontosemiótica (D'amore & Godino, 2007; J. Godino, Batanero, & Font, 2007; J. Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2006; J. D. Godino, Font, & Wilhelmi, 2007).

praxeologías matemáticas dotadas de una dinámica compleja y que, además, están sometidas a un proceso de reorganización permanente” (Bolea, et al., 2001, p. 248). En este sentido, se plantean dos niveles de análisis de la actividad matemática institucional: uno a nivel epistemológico, donde se caracteriza el surgimiento y constitución del saber matemático, y otro, a nivel didáctico, donde se analizan las técnicas, las tareas y el discurso asociado a la enseñanza y aprendizaje del mismo. Con dicho análisis, se espera mostrar el carácter indisociable de los elementos matemáticos y didácticos, y su carácter determinante en los procesos transpositivos de reorganización y transformación de la naturaleza de saberes matemáticos escolares, y el cambio que ellos generan, en el proceso de estudio⁵ de tales saberes.

El trabajo realizado de esta forma permitió, identificar y dimensionar los elementos de las organizaciones algebraicas que se introducen en la escuela, a través de la transposición didáctica. A partir de tales elementos, se pudo analizar la coherencia, las transformaciones, las relaciones y el modo de existencia de tales saberes en el marco escolar de la ESO en España. Este esquema de trabajo, que retoma elementos teóricos de la transposición didáctica, evidencia que:

1. La transposición didáctica actúa sobre organizaciones matemáticas que tienen una estructura compleja, a la vez, permite caracterizar la génesis y desarrollo de las organizaciones matemáticas escolares (Bolea, et al., 2001, p. 290). Así, el análisis del proceso transpositivo aporta elementos para determinar posibles formas de estudiar un conocimiento matemático en el marco escolar.
2. Como resultado del análisis transposición didáctica, se pueden identificar diferentes tipos de restricciones a las que es sometido el saber enseñado (provenientes del tipo de representaciones institucionales del saber matemático, de la necesidad de evaluar, del tiempo didáctico y de la necesidad de que todo saber enseñado

⁵ El proceso de estudio desde la perspectiva de Chevallard se asume como la manera en que instituciones e individuos dan forma específica a la actividad matemática en función de los problemas que pretenden resolver. Esto vale tanto para el acto del matemático en el proceso de producción de conocimiento científico, como para el acto del estudiante que construye su conocimiento matemático en contextos escolares. La noción de proceso de estudio en la teoría antropológica de la didáctica (Bosch, et al., 2005; Bosch & Gascón, 2007; Chevallard, et al., 1997) es equivalente a la noción de trayectoria didáctica en la teoría ontosemiótica (D'amore & Godino, 2007; J. Godino, et al., 2007; J. Godino, et al., 2006; J. D. Godino, et al., 2007).

aparezca como definitivo), (Bolea, et al., 2001, p. 292). Estas condiciones se convierten en un primer referente para dimensionar los significados, las prácticas y los aprendizajes que han sido desarrollados por los estudiantes de dicha institución al respecto del conocimiento matemático en estudio.

Como se observa, los dos estudios referidos toman como base los elementos de la transposición didáctica para construir un proceso de análisis didáctico, que dé cuenta, de las transformaciones y reorganizaciones a que tiene lugar, el saber matemático en un marco institucional dado. En estos estudios se reporta la complejidad y los aportes que brindan los análisis transpositivos, para orientar los procesos de construcción de currículos, de replanteamiento de prácticas escolares y de construcción de significados en torno al saber matemático objeto de estudio.

2 Consideraciones Teóricas

2.1 Introducción

En las dinámicas sociales cotidianas se presentan situaciones donde se requiere el uso de las matemáticas. Ello hace necesario que los ciudadanos sean formados en esta área de tal forma que dispongan de herramientas conceptuales para afrontar tales situaciones. Esto implica determinar qué tipo de conocimiento matemático es relevante y necesario abordar en el trabajo escolar para el desarrollo de un pensamiento crítico, creativo y flexible en los miembros de una sociedad determinada. Pero el problema no sólo radica en la elección de saberes, involucra además, el reconocimiento y estudio de la complejidad de los procesos de representación, comunicación y conceptualización del conocimiento matemático en el marco de dinámicas grupales e institucionales. Así, el abordaje de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de los saberes matemáticos requiere buscar un campo de investigación que brinde alternativas de análisis y explicaciones sólidas, tanto a los procesos de construcción del conocimiento matemático en diferentes marcos de institucionalidad, como de sus formas de organización que lo hacen apto para ser enseñado.

En este capítulo se describen algunos elementos acerca de la Educación Matemática como marco general explicativo, y en particular, se destacan aquellos aspectos teóricos que son relevantes para la investigación.

2.2 La Educación Matemática como Campo de Investigación

En Colombia, el campo de la Educación Matemática se establece y se reconoce como disciplina de investigación alrededor de los años 80's. Ello no implica que antes de dicho reconocimiento como campo de investigación no se realizaran reflexiones, se

formularan interrogantes y cuestionamientos frente a los procesos de selección y de comunicación de saberes matemáticos en contextos escolares, sino que sólo hasta los años 80's se oficializan los grupos de investigación en las universidades, se crean los postgrados en el área y se establecen vínculos internacionales para el intercambio de información y el desarrollo de programas de cooperación entre grupos de investigación. Es decir, sólo al inicio de los años 80's se constituye una comunidad reconocida de educadores matemáticos, quienes se dan a la tarea de analizar, reconstruir y difundir los desarrollos teóricos, que a nivel internacional, ha tenido la Educación Matemática, y además, inician un proceso de reflexión sistemática acerca del estado de dicho campo en Colombia.

En la actualidad, dada la evolución del campo, tanto a nivel internacional como nacional, la Educación Matemática se constituye como una disciplina rica en problemáticas y desarrollos teóricos, que perfila claramente su objeto de estudio: los procesos de producción y comunicación de conocimientos y saberes matemáticos en el marco de contextos institucionales, lo cual circunscribe su campo de acción mucho más allá de los contextos escolares.

De acuerdo con la aseveración anterior, el objeto de estudio de la Educación Matemática no sólo se centra en analizar el quehacer pedagógico de los maestros, aborda también reflexiones acerca de los elementos y factores que influyen, ya sea de manera directa o indirecta, en el proceso educativo y pedagógico. De igual forma, centra su atención en el análisis crítico y reflexivo del currículo, en cuanto al tipo de conocimiento matemático que circula en la escuela, las posibles relaciones entre dichos saberes y los contextos y dinámicas sociales, grupales e institucionales.

El análisis de las dinámicas e interrelaciones que se generan al interior del proceso educativo implica el estudio de la cultura y de las instituciones donde se lleva a cabo dicho proceso, en tanto que tales factores, de índole antropológico y sociológico, están en la base de la actividad matemática de los estudiantes. Estas particularidades se evidencian en las actuaciones de los alumnos cuando se enfrentan a una situación de aula: el tipo, la forma y la fluidez del lenguaje, los ejemplos referenciados y las asociaciones que manifiestan, las técnicas de cálculo, las heurísticas particulares para

abordar la solución de problemas, las actitudes frente al fracaso y el error, los niveles de tolerancia y las dinámicas de interacción grupal, entre otros.

Lo anterior reitera la afirmación de que cada grupo cultural, en el marco de una institución, le asigna un estatus al conocimiento matemático, desarrollando por ende, sus propias formas de usar, relacionar, dar sentido y significado a tal saber. Esta particularización y caracterización del saber en el marco de una institución no niega el carácter universal de las verdades matemáticas, sino que parte de esos sentidos y significados particulares para, con base en ellos, acercarse al cuerpo teórico de la ciencia matemática. En este marco de referencia, se considera entonces, la enseñanza y el aprendizaje como un producto de interacciones, de intercambios y negociaciones socio-culturales. Así, el conocimiento matemático surge como resultado de una actividad humana.

Adicional a lo anterior, la Educación Matemática también se ocupa de analizar las concepciones filosóficas que tiene el maestro acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, puesto que, tales ideas, de un lado, son un factor determinante en las formas que el maestro emplea para enseñar las matemáticas, y de otro, permiten establecer los criterios de validez y el sentido de la ciencia misma. Así pues, las concepciones que tenga el maestro acerca de las matemáticas influyen y determinan su acción, de cara a los procesos de enseñanza y de aprendizaje en esta área de conocimiento.

Pero para comprender, dimensionar y enriquecer las concepciones que los maestros explicitan en su quehacer pedagógico, es necesario que la Educación Matemática también reflexione sobre la génesis y evolución de los conceptos matemáticos y su relación con los contextos sociales en los cuales surgieron. Esta reflexión va a permitir, tanto dimensionar la relevancia de los elementos sociales y culturales que intervinieron en el desarrollo de dicho concepto, como reconocer las invariantes matemáticas que potenciaron la formalización del mismo. El reconocimiento y la comprensión de dichos elementos por parte del maestro, se va a constituir en una herramienta fundamental para recrear en el aula de clase, hasta donde sea posible, situaciones que generen la necesidad de abordar el concepto en cuestión. De igual forma, el análisis al respecto de tales aspectos, puede permitir

identificar obstáculos epistemológicos inherentes a la naturaleza misma de los conceptos abordados.

Con las ideas anteriores se bosqueja parte de la complejidad del campo de investigación en Educación Matemática, y es en ese marco donde se observa la necesidad de vincular otras disciplinas diferentes a las matemáticas y la pedagogía para lograr dimensionar las relaciones e implicaciones de las problemáticas que este campo aborda. Se trata de construir marcos referenciales coherentes que permitan analizar y explicar ampliamente el objeto de estudio, donde otras disciplinas aporten elementos de reflexión que contribuyan a obtener una solución integral al problema en cuestión.

La *interdisciplinariedad* de la educación matemática hace referencia a los elementos que aportan diversos campos de saber desde su especificidad. No se trata de una yuxtaposición de desarrollos teóricos de varias disciplinas, no es una suma de esfuerzos, es una conjugación armónica e integral de elementos de análisis, donde cada disciplina se enriquece de las otras, para el abordaje integral de la problemática que se estudia⁶. Tal dinámica de trabajo conjunto, exige e impone ciertas restricciones a cada fuente de tal forma que se logre abordar la problemática de la manera más integral posible, pero sin que ninguna de las disciplinas se imponga sobre las otras. Así cada uno aborda el problema desde sus planteamientos teóricos, para luego, por medio de comunicaciones, lograr construir una caracterización conjunta que amplíe la visión, dimensión e implicaciones del problema.

Entre las principales disciplinas que aportan para el estudio de objetos en el campo de la Educación Matemática (C. E. Vasco, 1994) se tienen: *la matemática*, dado que de esta ciencia se toma el conocimiento base (objetos matemáticos); *la psicología*, que brinda pautas de análisis frente a la pregunta cómo se aprende; *la antropología y sociología*, que permite analizar las dinámicas, interrelaciones, valores y producciones que se generan en los grupos humanos, y que permite asumir el conocimiento matemático como resultado de dichas interrelaciones; *la epistemología*, que aporta elementos para la comprensión de las diferentes perspectivas sobre la naturaleza del conocimiento matemático; *la lingüística*, que propone desarrollos relativos a las diferentes formas de

⁶ Arboleda y Castrillón (2007) proponen que la complejidad del campo de la educación matemática implica un abordaje complejo de los problemas, en una perspectiva no solo inter, sino trans-disciplinar.

representación de los saberes y los sentidos y significados que de ellos se derivan . Se tiene entonces que, si bien la Educación Matemática requiere del aporte de otras disciplinas para el análisis integral de sus objetos de estudio, ella misma se consolida como un campo de investigación multi, inter, trans - disciplinar con independencia de dichas ciencias, con procesos, marcos teóricos y metodologías de investigación propias.

Por tanto, este carácter complejo de la educación matemática le plantea al investigador en educación matemática el reto de acercarse de manera abierta al diálogo con otros campos del saber, y dinamizar esquemas de trabajo donde se pongan en juego los saberes de manera armónica y objetiva para obtener el resultado esperado.

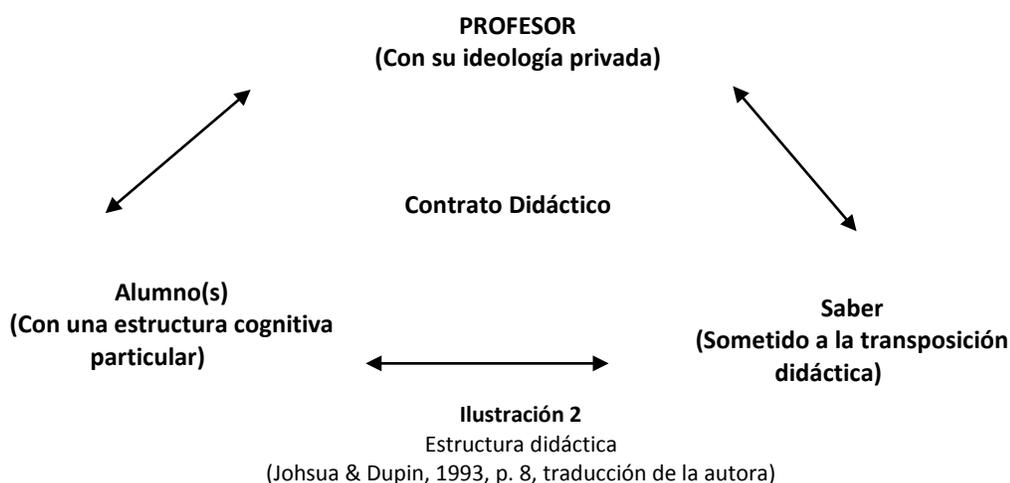
Los resultados de investigación que se reporta en el presente informe, se inscriben en el marco general de la Educación Matemática retomando su carácter interdisciplinar, pero dadas las condiciones logísticas, no se aborda la problemática objeto de estudio desde cada uno de los referentes de las disciplinas mencionadas, sino que retoma sólo algunas de ellas, en particular, la epistemología, la psicología cognitiva, la matemática y la antropología.

2.3 La Transposición Didáctica⁷

Como se mencionó en párrafos anteriores, uno de los objetos de estudio de la Educación Matemática son los saberes matemáticos: su naturaleza, su evolución histórica y su constitución como objeto formal en la ciencia, su reconocimiento como saber que debe ser enseñado en contextos escolares, entre otros aspectos. En esa dinámica de reflexión se asume que los conceptos matemáticos son “vivos”, cambiantes y evolutivos, que se desarrollan en función de las problemáticas y los requerimientos dados desde la cultura donde se trabaja. Esta característica de cambio e interacción asociada a la constitución y evolución de los saberes matemáticos es un aspecto relevante que es pertinente analizar de cara a la reflexión de los procesos de producción y de comunicación de los mismos en un marco institucional determinado.

⁷ Las ideas que se presentan a continuación son una síntesis de los desarrollos teóricos hechos por Chevallard al respecto de la transposición didáctica (Chevallard, 1998)

Para el caso particular de esta investigación la institución se circunscribe a la escuela, de ahí que se restrinja el campo de reflexión a los procesos de comunicación y adquisición de saberes matemáticos, particularmente, en situación escolar. Esta especificidad al ámbito escolar genera un contexto de acción diferente puesto que el proceso escolar pone en juego tres elementos básicos, a saber: el saber, el profesor y el alumno, determinando una compleja red de relaciones denominada estructura didáctica⁸. Dicha dinámica de intercambio e interdependencia se puede representar a través de un esquema como el de la ilustración 2.



El profesor participa y actúa en esta estructura en función de las concepciones que ha elaborado, a partir de su propia experiencia e historia, en torno a la pregunta sobre cómo aprende matemáticas el alumno. Dicha perspectiva determina cómo va a enseñar y la finalidad de tal proceso. Es decir, interactúa con sus alumnos, en función del saber matemático en juego, con base en su propia ideología. Por su parte el estudiante llega a la escuela con un conjunto de saberes específicos que ha logrado estructurar a través de sus experiencias ya sean escolares o extraescolares. Dichos esquemas cognitivos son la base con la cual el alumno interviene en la dinámica de la estructura didáctica: tales referentes pueden estar o no en consonancia con la propuesta de trabajo dada por el profesor. Es justo en este punto donde se detona la búsqueda de punto de equilibrio, de

⁸ “La estructura didáctica aparece como una construcción específica, que no se limita solamente a poner en correspondencia sus componentes: alumnos, profesor y saber, sino que también los determina. En ese sentido se trata de una construcción artificial [...] esta artificialidad es inherente al proyecto didáctico y consustancial a una organización intencional de una enseñanza”. (Johsua & Dupin, 1993, p. 8).

un intercambio de saberes y experiencias, para lograr un aprendizaje de un concepto matemático. Ese saber matemático que se presenta en la escuela no es un elemento aislado, al contrario, es producto de las interacciones sociales y culturales propias del medio en el cual se inscribe la escuela y el alumno. Dicho conocimiento ha recorrido un camino y tiene su propia historia e institucionalidad.

Se tiene entonces que la estructura didáctica no es un modelo estático sino que en ella se recrean dinámicas y relaciones tanto con el entorno físico y cultural de los participantes, como con las concepciones, creencias y fundamentos epistemológicos que orientan las formas de actuar de cada uno de ellos. El análisis de dichos entornos, a la luz de relaciones ternarias, en función de un saber matemático, brinda referentes para orientar tanto los procesos de enseñanza como los de aprendizaje.

La dinámica equilibrada e ideal de la estructura didáctica no funciona de manera espontánea, se regula a través del *contrato didáctico*. Éste se refiere a los acuerdos, generalmente implícitos, que se establecen entre profesor y alumnos, durante los procesos de construcción de un determinado saber. Bajo esta figura se determina implícitamente la responsabilidad, los roles y lugares que le corresponde a cada participante en la actividad matemática, y el camino de evolución de la misma. Tales acuerdos subsisten tácitos y sólo cuando se altera la dinámica de las relaciones se hacen explícitos. Esto es, el contrato didáctico sólo se evidencia cuando alguna de las partes incumple con una de las cláusulas. Una vez detectada esta situación, se reúnen las partes y acuerdan nuevos parámetros de trabajo o se cumplen los procedimientos alternos que han sido acordados previamente. Este continuo replanteamiento permite la evolución de las situaciones propuestas, y por ende, la movilización de las significaciones de los conceptos objeto de estudio.

Si bien la estructura didáctica involucra tres elementos y se regula a través del contrato didáctico, es el saber matemático el punto de encuentro y el motivo que genera el establecimiento de tales relaciones. El saber matemático asumido como producto cultural tiene ciertas particularidades: surge en condiciones históricas particulares, se instaura como respuesta a problemáticas específicas, se enmarca en unos elementos epistemológicos particulares. Tal conjunto de factores no puede ser integrado a la estructura didáctica, por ello el saber matemático sufre cambios y

transformaciones para ser incorporado en los esquemas escolares. Estas transformaciones son necesarias debido a que los saberes que circulan en una comunidad científica matemática por su misma construcción, presentación y epistemología no son “aptos” para ser enseñados tal cual. De ahí que sea indispensable elegir cuáles de estos saberes son preponderantes en la cultura circundante y qué de ellos es pertinente enseñar y aprender. Este proceso de selección, reconstrucción y adaptación de los saberes matemáticos para ser enseñados en los contextos escolares se denomina *transposición didáctica*.

El proceso de transposición didáctica se genera debido a la no correspondencia entre el saber matemático y el saber matemático escolar. Esto es, la naturaleza y epistemología de cada uno de estos saberes es diferente. Estas diferencias requieren la elaboración de un análisis didáctico para lograr determinar qué elementos del saber designado para ser enseñado, se deben y son factibles de ser enseñados. En este proceso de análisis se identifican aquellos elementos invariantes propios y que caracterizan el objeto matemático que se quiere abordar, y son justamente esos elementos quienes se convierten en objeto de enseñanza. De ahí que no haya lugar para comparar o decir que “los saberes a enseñar son reducciones o simplificaciones de los saberes científicos”. Por el contrario, son los saberes científicos quienes, junto con su historia, evolución y epistemología, dan validez y justifican la escogencia de un determinado saber para ser enseñado. El estudio de esa interdependencia es pues uno de los objetos centrales de la presente investigación.

La selección de saberes para ser enseñados requiere la elaboración de análisis epistemológicos, históricos y culturales en torno a los conceptos escogidos dado que cada saber adquiere una connotación diferente y su validez se certifica dentro de su respectiva comunidad científica. Para el caso de los saberes a enseñar es la *noosfera*⁹ la que se encarga de regular, de manera general, las relaciones entre la estructura didáctica y el medio social en el cual se enmarca la institución donde se lleva a cabo el

⁹ La noosfera es el grupo de personas que se encargan de tomar decisiones globales acerca de los saberes que van a ser enseñados en una determinada comunidad, y el proceso que deben seguir para ser inscritos en el contexto escolar. Está conformada principalmente por representantes de diferentes organizaciones gubernamentales, miembros de grupos de investigación, delegados de los padres de familia e instancias políticas.

proceso de transposición. Dicha comunidad se encarga también de regular la autonomía del funcionamiento didáctico, mantener el equilibrio y la compatibilidad entre el sistema y el entorno, de analizar y determinar qué saberes van a ser sometidos al proceso de transposición didáctica para luego ser introducidos en el currículo. Es decir, en esta esfera se piensa el funcionamiento didáctico, además, se señala los métodos y los contenidos que sirve de base para los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Los estudios que suceden en esta esfera (noosfera) requieren manejar dos aspectos importantes como son: la compatibilidad del saber enseñado con los saberes científicos y la lejanía del saber enseñado con los saberes que circulan comúnmente en la comunidad. Esto es, el saber enseñado debe mostrarse cercano a los procesos científicos de tal forma que los matemáticos “aprueben” el proceso social de su enseñanza, pero el mismo tiempo debe alejarse de lo banal, pues no tendría sentido que la escuela enseñe lo mismo que se puede aprender por la mera interacción social con el medio.

De acuerdo con lo anterior, el profesor no es quien decide directamente lo que va a enseñar. Él solamente hace parte de una estructura didáctica y está supeditado a las determinaciones iniciales que se tomen en la noosfera. Es decir, el docente es parte activa del engranaje, de la dinámica de la estructura didáctica, pero no es el único responsable de las decisiones que se toman el respecto de los saberes matemáticos escolares.

Pero el proceso de transformación adaptación y selección de saberes no se circunscribe al ámbito escolar, también se lleva a cabo a nivel de las comunidades científicas. Así, un saber para ser instaurado y reconocido como saber científico dentro de una comunidad sufre un proceso de decantación: se hace necesario una difusión del saber, compartirlo al interior de una comunidad científica; ello requiere un nivel de despersonalización, descontextualización, de atemporalización, se necesita dejar de lado las incertidumbres y posibles hipótesis iniciales, los procesos de ensayo y error; separar la persona del saber (el saber que en principio fue personal, pasa a ser social). Sólo se comunica a la comunidad científica un saber claro y riguroso, despersonalizado, formal y objetivo. Este proceso que enmarca la instauración de un saber como saber

científico, al interior de una comunidad, se denomina *transposición didáctica en sentido amplio*.

En contraste, *la transposición en sentido estricto* se entiende como el proceso de transformación desde el momento en que se instaura un saber como científico hasta que es seleccionado para ser enseñado.

En el proceso de transposición didáctica, ya sea en sentido amplio o estricto, se pueden identificar unas características especiales e inherentes, tales como: la especificidad de los saberes, la puesta en textos del saber, la desintetización de los modelos científicos, los tiempos didácticos y tiempos de aprendizaje, las nociones explícitas e implícitas. Cada uno de estos elementos participa activa y determinadamente en dicho proceso. Algunos de ellos no se ponen de manifiesto explícitamente y subyacen a otros elementos, pero todos son necesarios y participan en la transposición didáctica. Una revisión de cada una de estas características ayudará a clarificar el concepto mismo de transposición didáctica.

2.3.1 Especificidad de las construcciones didácticas.

Como se dijo antes, los saberes designados para ser enseñados no son de la misma naturaleza, ni simplificaciones de los saberes científicos. En contraste, ellos son el resultado de ajustes didácticos (elaborados en su mayoría en la noosfera) a la luz de las necesidades del entorno social. Así, cada saber científico es sometido a un proceso didáctico único, el cual lo justifica y lo valida. En este marco, un objeto de saber cobra sentido y existencia en función de la utilidad que preste en la estructura didáctica. Esto es, cuando el saber designado para ser enseñado es insertado en la estructura didáctica con una intencionalidad específica.

Los objetos de saber que se constituyen en material de enseñanza se denominan *nociones matemáticas*. Estas nociones son construidas a través de definiciones o por medio de la caracterización e identificación de sus propiedades. De igual forma se reconocen a partir de sus ocasiones de uso.

Durante el proceso de construcción de las nociones matemáticas se presentan y se utilizan otro tipo de nociones, las cuales sirven como herramientas y no se constituyen en objetos de aprendizaje. Dichas nociones se denominan *paramatemáticas* y se utilizan

como objetos auxiliares, necesarios para la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas, pero que son manejadas por los alumnos y por el maestro inconscientemente puesto que se asume que ellas ya han sido adquiridas previamente. Se tiene entonces que en el proceso de enseñanza y de aprendizaje se hace uso de diferentes tipos de saberes, algunos enseñables, otros enseñados y otros no enseñables. Esta interacción de saberes hace parte de la dinámica de transmisión burocrática del saber en contextos escolares.

Para lograr incorporar y transmitir los saberes en los contextos escolares es necesaria la división de la teoría en campos específicos de saber, lo cual genera formas particulares y especializadas de aprender, de relacionarse con dicho saber. Para ello, éste es presentado de una manera analítica con un discurso detallado: se entrega el saber por fragmentos, sucesiones de capítulos o lecciones. Se trata de restablecer unas nuevas relaciones y secuencias, de tal forma que el saber tenga sentido en el contexto donde está inmerso, pero sin perder su estructura general. Se trata de crear un modelo en el contexto didáctico. Este proceso se denomina *desincretización del saber*.

Una vez se delimitan y se perfilan los campos de saber, también se separa el saber de las personas o grupos que lo produjeron. Esto es, se *despersonaliza* el saber, se aísla y se borra todo rastro o relación con aquellas personas que intervinieron en su formalización como objeto de conocimiento. De esta manera el saber se muestra objetivo y universal, expresado a través de representaciones propias para lograr una comunicación dentro de la comunidad, ya que se requiere dar un sentido claro y lógico al saber a ser enseñado.

2.3.2 La puesta en textos del saber.

La delimitación de los saberes que se van a enseñar requiere que la comunidad que va a participar del proceso de transposición conozca, de manera explícita y escrita, las nociones matemáticas con las cuales se va a trabajar. Esto es, se requiere de un proceso de textualización del saber, que involucra de manera implícita, las nociones paramatemáticas que van a ser prerrequisitos o herramienta auxiliares, las concepciones de lo que significa “saber” entre las personas se asumen el proceso de estudio, y la epistemología que orienta el aprendizaje. De manera inherente, la puesta

en texto del saber, determina un camino progresivo del conocimiento, dado que el texto se organiza y se estructura a través de una lógica particular la cual sirve como referencia para la medición del aprendizaje.

Para lograr que los saberes textualizados sean integrados como objeto de enseñanza, es necesario que se introduzcan como algo novedoso, que genere inquietudes y retos para quien aprende. A la vez, debe encajar con la estructura de los saberes antiguos para que logre un engranaje inicial, punto de partida para la generación de nuevos aprendizajes. Así la introducción del objeto de enseñanza en la estructura didáctica produce una tensión entre lo nuevo y lo antiguo. Dicha tensión se supera cuando se dan los aprendizajes, pues el nuevo saber que fue insertado en la estructura, se articula a los saberes precedentes, se “automatiza”, se vuelve cotidiano en función de su uso, hasta que se desgasta y envejece. En este punto se inicia nuevamente el proceso.

2.3.3 El tiempo didáctico y el tiempo de aprendizaje.

Así como el profesor y el alumno se ubican en diferentes espacios de la estructura didáctica, la relación que cada uno de ellos establece en la dinámica de la duración didáctica es disímil. Se puede decir que en términos generales, no existe una correspondencia entre el tiempo del que enseña con el tiempo del que recibe la enseñanza. El tiempo didáctico ha sido programado y analizado por los didactas, es el tiempo “teórico” que se debería emplear para enseñar un saber dado, es lineal y secuencial. En contraste, el tiempo del que aprende es diferente y varía de acuerdo con las condiciones de cada individuo. En el proceso de aprendizaje los conocimientos se reorganizan, se redcontextualizan y se incorporan a una estructura cognitiva existente. De ahí que este tiempo no pueda ser preestablecido, sólo el alumno determina cuándo se ha apropiado de un concepto.

La presente investigación retoma las características generales del proceso de transposición didáctica para abordar la problemática objeto de estudio, pero dado que los procesos de enseñanza y de aprendizaje involucran personas inscritas en grupos sociales, y que el saber matemático se construye como resultado de la actividad

humana, se complementa la perspectiva de análisis con los desarrollos teórico de la teoría antropológica de lo didáctico.

2.4 Teoría Antropológica De Lo Didáctico

Desde el marco de la transposición didáctica se asume que “lo que se enseña en la escuela (los «contenidos» o «conocimientos») es, en cierto modo, una producción exógena, algo que se genera fuera de la escuela y que se lleva o «transpone» a la escuela por necesidades sociales de educación o difusión” (Bosch & Gascón, 2007, p. 387). Dicha postura si bien señala los saberes que pueden ser enseñables, también ofrece restricciones sobre “...las actividades matemáticas que es posible o imposible llevar a cabo en la escuela. La limitación más fuerte ocurre cuando el proceso de transposición no es capaz de mantener o recrear una posible «razón de ser» de los conocimientos que la escuela se propone transmitir” (Bosch & Gascón, 2007, p. 388). Esto es, una de las limitaciones del proceso de transposición didáctica es asumir como objetos de enseñanza conocimientos estáticos y genéricos (que han sido útiles en un tiempo determinado para resolver ciertas situaciones), sin detenerse a reflexionar en las condiciones, las necesidades y en las formas de actuar de los alumnos de una institución dada.

Con el ánimo de responder a tal debilidad, anotada y criticada desde la teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (Bosch & Gascón, 2007, citando a Brousseau) desde la Transposición didáctica se cuestiona el principio

“...de que el conocimiento matemático sería algo siempre bien definido (por y para la comunidad matemática, obviamente) para lo cual los didactas debe esforzarse en encontrar el mejor método de enseñanza. La perspectiva cambia si se considera que, fuera de la escuela, se construyen «saberes matemáticos» como respuesta a necesidades muy particulares, [...] y que deben seguir un proceso de construcción social, con múltiples actores y diferentes momentos temporales... (Bosch & Gascón, 2007, pp. 390-391)

Se asume entonces que el conocimiento matemático no es único, ni se corresponde directamente con los desarrollos de la ciencia como tal, como tampoco obedece a un sólo proceso de transposición. Justamente, se reconoce el conocimiento matemático como emergente de las necesidades y prácticas humanas, enmarcado en parámetros

dados por los grupos e instituciones a las cuales pertenecen las personas que asumen el trabajo con dicho conocimiento. Esto es, se asume de manera decidida el carácter antropológico de todo saber.

La asunción del carácter antropológico del conocimiento matemático implica la ampliación de la visión de la transposición didáctica. Por un lado, obliga a la formulación de cuestionamientos en torno a posibles modelos epistemológicos que respondan a la naturaleza de dicho conocimiento: indagar por las razones que originan y dan sentido al mismo, en el seno de la institución en la cual se trabaja. Por otro, supone analizar e interpretar cómo se usa, se desarrolla y se difunde dicho conocimiento a través de las interacciones sociales propias de la dinámica institucional.

Lo anterior redimensiona el estatus del conocimiento matemático: ya no se consideran dos tipos de saberes, uno “*sabio*” de mayor nivel y de naturaleza formal, y uno “*escolar*” de menor nivel, cuya naturaleza es intuitiva. Tampoco se delimita un “*saber sabio*” como la meta global que debe ser alcanzada por la escuela a partir de un “*saber escolar*” básico. Se trata ahora de reconocer que el conocimiento asociado a diferentes contextos de prácticas, entre ellas, las prácticas escolares, es igualmente válido como conocimiento matemático. Se asume entonces el conocimiento matemático como un emergente de la actividad de las personas en contextos de prácticas institucionales específicos (la escuela sería uno de estos contextos). “[...] Conocer en matemáticas quiere decir conocer los sistemas de prácticas (operativas y discursivas), pero ello presupone conocer los diversos objetos emergentes de los subsistemas de prácticas, y las relaciones entre dichos objetos” (J. Godino, et al., 2006, p. 2). Es decir, el conocimiento surge como resultado de la actividad matemática que el sujeto despliega en relación con la situación planteada, teniendo en cuenta la estructura socio-histórica específica en la cual actúa. Esta dinámica de construcción del conocimiento matemático implica, una relación dialéctica entre el sujeto y la comunidad o institución, dado que entre ellos existe un elemento común: las prácticas.

Godino y Batanero introducen la noción de práctica matemática como “toda actuación o expresión –verbal, gráfica, etc.– que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (D'amore & Godino, 2007, p. 208, citando

a Godino y Batanero, 1998). En relación con ello, definen también sistema de prácticas como “el contenido que una institución asigna a un objeto matemático, estableciendo, por lo tanto, una correspondencia entre el sistemas de prácticas (significado sistémico) y la expresión del objeto matemático” (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, 2004, p. 2, citando a Godino 2002)¹⁰.

Así se tiene que, las prácticas matemáticas, ya sean a nivel personal o institucional, se constituyen en el motor para la construcción del conocimiento matemático, en tanto que, es a través de tales relaciones, intercambios y dinámicas que se logra crear y comunicar sentidos y significados de los objetos matemáticos. Se trata de ajustes constantes a la actividad matemática personal en función de relaciones previas construidas y significados compartidos en contextos sociales particulares.

Adicionalmente, las nociones de sistemas de prácticas se complementan con las de significado personal / significado institucional de un objeto matemático, entendidas “como un sistema de prácticas operativas y discursivas realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas” (D'amore & Godino, 2007, p. 208, citando a Godino & Batanero, 1994). Dicho conjunto de significados personales determina las llamadas *configuraciones cognitivas*, mientras que el conjunto de significados institucionales, conforma las llamadas *configuraciones epistémicas*.

Para la presente investigación, las configuraciones epistémicas ocupan un lugar muy especial, pues un análisis de las mismas permite determinar la forma, la estructura, el contenido, las visiones, los enfoques, las heurísticas, la episteme propia de los objetos matemáticos en una época y lugar, y que hace posible las prácticas matemáticas en el marco de una institucionalidad particular. En relación a los procesos escolares, la atención se fija en el proceso vivido por el saber escolar (su tiempo y espacio), en sus sentidos y significados, y para los fines de un análisis micro-didáctico detallado, el estudio de las configuraciones epistémicas centra la mirada en la manera como se constituyen los sistemas de práctica matemática en el aula de clase, en la forma como estructuran los sentidos y significados de los elementos que la constituyen

¹⁰ Este artículo es el pre-print del artículo con el mismo nombre publicado en: Recherches en Didactique des Mathematiques, volumen 27, número 1, pp. 77 – 120, en el año 2007.

y que se construyen a partir de la práctica misma, y por ende, de los sentidos y significados para los objetos de conocimiento matemático en juego (J. Godino, et al., 2007; J. Godino & Font, 2007; J. D. Godino, Contreras, & Font, 2006).

3 Referentes Metodológicos

3.1 Estructura General de Análisis

Dada la complejidad del análisis del proceso transpositivo del conocimiento matemático y su carácter de fenómeno humano, la presente investigación se enmarca en *el paradigma cualitativo*¹¹. Tal marco responde a que el proceso de investigación requiere analizar, de manera detallada, cada uno de los momentos, las condiciones y situaciones, en las que el concepto de número natural es transformado y reconstruido, para dimensionar los sentidos que se privilegian y las restricciones a que se da lugar, cuando se asume un cierto referente epistemológico de base en una institución determinada. Además, como el proceso de transposición didáctica obedece a las condiciones y necesidades particulares de grupos sociales e instituciones, una investigación de corte cualitativo, permite identificar, estudiar y relacionar, los diferentes elementos y factores que intervienen y determinan dicho proceso adaptativo. Es decir, el estudio cualitativo, a partir de la interpretación de datos y la generación de categorías, potencia la reflexión analítica y explicativa sobre las múltiples perspectivas y factores que participan en el proceso de transposición didáctica.

Adicionalmente, con el ánimo de responder a la complejidad de los fenómenos transpositivos, y enmarcados en un paradigma de investigación cualitativa, el proceso de transposición didáctica en torno al concepto de número natural se analizará a través de la estrategia del estudio de casos¹². Tal elección se hace dado que el proceso

¹¹ “La investigación cualitativa es multimetódica, involucra una interpretación, un enfoque naturalístico de su materia. Esto significa que la investigación cualitativa estudia cosas en su escenario natural, intenta dar sentido a, o interpretar el fenómeno en términos del significado que la gente da de ellas. La investigación cualitativa involucra el estudio la recolección y el uso de una variedad de materiales empíricos –estudio de caso, experiencias personales, introspecciones, historias de vida, entrevistas, observaciones, interacciones, y textos- que describen rutinas y momentos problemáticos y significados en la vida de los individuos.”(Creswell, 1998, p. 15, citando a Denzin & Lincoln (1994), traducción de la autora).

¹² “Un *estudio de caso* es una exploración de un “sistema cerrado” o un caso (o múltiples casos) detallada a través del tiempo, que implica la recolección de datos en profundidad a través de múltiples fuentes de

transpositivo responde a unas necesidades contextuales particulares, y alude, a dinámicas humanas que requieren ser descritas e interpretadas: la escogencia, la transformación, la adaptación y la comunicación del concepto de número natural en el ciclo de educación preescolar y primer grado de básica primaria en Colombia. Con el análisis interpretativo de las relaciones, las dinámicas y los significados que se construyen durante el proceso transpositivo, en torno al concepto de número natural, se pueden formular explicaciones y justificaciones acerca de la naturaleza, el sentido y la funcionalidad que se le otorga al número natural en el contexto escolar.

En este sentido, se trata de caracterizar cada uno de los momentos en los que se lleva a cabo la transposición: la constitución del saber matemático como conocimiento científico, la determinación del saber matemático a enseñar, la contextualización del saber matemático enseñado y saber matemático aprendido por los estudiantes.).

Esto es, como se mencionó en los referentes teóricos (sección 2.3), el conocimiento matemático que circula en la escuela es el resultado de un proceso de adaptaciones y reorganizaciones del saber en función de las necesidades sociales particulares de una institución dada. Dicho proceso de transformación se lleva a cabo para dotar de sentido y significado el conocimiento matemático que se desea enseñar. Se busca entonces, que el conocimiento matemático que va a ser enseñado se reconstruya, de tal forma que se preserve su potencia y funcionalidad (Bosch & Gascón, 2006).

El proceso de transposición didáctica se inicia desde el momento mismo en que se instaaura el saber matemático en el seno de la ciencia: para que el matemático presente ante la comunidad científica un nuevo teorema o desarrollo teórico, debe formular su teoría de manera impersonal, desprovista de cualquier elemento subjetivo. Ahí se ha lleva a cabo un primer momento de transposición, dado que el saber científico se estructura, se comunica y cobra sentido en el marco de la disciplina científica, y se aparta de los procesos de producción del cuál surgió.

Un segundo momento del proceso transpositivo es llevado a cabo por un grupo de agentes e instituciones responsables de delimitar los parámetros educativos de una comunidad. Esta “noosfera” designa los saberes matemáticos van a ser enseñados en las

información en diversos contextos. [...] El contexto del caso implica el situar el caso dentro de su escenario, que puede ser un escenario físico, social, histórico y/o económico.” (Creswell, 1998, p. 61).

instituciones escolares, y las perspectivas didácticas generales que pueden emplearse para comunicar dichos conocimientos. En este nivel, se diseñan los programas y referentes curriculares (filosóficos, didácticos, metodológicos, cognitivos, entre otros) que van a orientar los procesos de enseñanza de las matemáticas. Los parámetros señalados por la “noosfera” son uno de los elementos que, junto con las concepciones, la formación y las experiencias personales que tiene el docente, se adoptan como base para el diseño de las propuestas de trabajo de aula.

A este nivel se realiza otro momento de transposición didáctica, pues el docente organiza su propuesta de trabajo de tal forma que se articulen los requerimientos institucionales (currículo, propuestas de libros de textos, Proyectos Educativos Institucionales¹³) y su postura personal acerca del conocimiento matemático que va a ser enseñado. Estos aspectos actúan y modelan el tipo de expresiones, el discurso, y en general, las prácticas de enseñanza que el docente emplea en su trabajo de aula.

En un último momento se ubica el proceso de aprendizaje del conocimiento matemático por parte del estudiante. Éste participa del proceso de enseñanza en aras de aprender un saber matemático, que luego va a poner en práctica, ya sea en los contextos matemáticos mismos o en la solución de situaciones de la vida cotidiana. El estudiante analiza el saber matemático que le ha sido enseñado, lo relaciona con otros saberes previos, y resignifica el sentido del mismo, en su estructura mental. El conocimiento que resulta de este proceso de aprendizaje, es el insumo del cual dispone el estudiante, para resolver problemas o asumir nuevos procesos de aprendizaje.

Lo anterior permite ver la complejidad implicada en un análisis de transposición didáctica y su relación con el saber matemático de referencia, al respecto de un concepto matemático específico. Esta complejidad se evidencia entonces en la necesidad de realizar diferentes tipos de indagaciones, con el fin de caracterizar, de manera completa, el proceso transpositivo: de orden histórico-epistemológico, para dar cuenta de las instituciones productoras del saber; análisis de textos (manuales

¹³ Es el documento rector que orienta las acciones institucionales. Este proyecto debe recoger los intereses y expectativas de la comunidad educativa. En este sentido, puede ser modificado cuando las condiciones institucionales lo ameriten. “El Proyecto Educativo Institucional debe responder a situaciones y necesidades de los educandos, de la comunidad local, de la región y del país, ser concreto, factible y evaluable” (Congreso de Colombia, 1994b. Art. 73).

escolares y disposiciones gubernamentales), con el fin de dar cuenta de lo realizado a nivel de la noosfera; de las planeaciones institucionales, y las propuestas pedagógicas de los maestros, para comprender el saber matemático que se enseña en las instituciones educativas; y de las producciones de los alumnos, para indagar por el conocimiento matemático realmente aprendido. Este trabajo de investigación, se centra en los tres primeros aspectos de la transposición didáctica (Ilustración 1) en tanto el tercero requeriría estudios de tipo longitudinal que exceden los tiempos y posibilidades de los alcances de esta tesis de maestría.

Lo anterior muestra que un análisis de los procesos transpositivos en relación al concepto de número natural requiere de indagaciones de naturaleza diferente, en relación a formas de institucionalidad distinta. Por lo tanto, siguiendo los planteamiento de Stake (2000) en relación al proceso de investigación por medio de estudio de casos, y con el fin de lograr una estructura de análisis coherente con el problema y objetivos propuestos, el proceso investigativo se debe asumir bajo la estructura de un *estudio de caso colectivo*¹⁴, donde cada uno de los momentos antes descritos se constituye en un caso.

Así, cada instancia donde se produce el proceso de transposición didáctica (Ilustración 1) va a servir de referente para dimensionar el proceso adaptativo global, que se lleva a cabo desde el saber matemático formal, hasta la incorporación de dicho saber en los contextos escolares. Es decir, la constitución del saber matemático formalizado, el proceso de determinación del saber matemático a enseñar, la contextualización del saber matemático enseñado y la determinación del saber matemático aprendido por los estudiantes, son asumidos como casos que aportan para la comprensión del fenómeno transpositivo en torno al concepto de número natural en el ciclo de educación preescolar y primer grado de básica primaria.

¹⁴ En su perspectiva, “un investigador puede estudiar conjuntamente un número de casos para investigar un fenómeno, población, o condición general. Yo llamo esto un estudio de caso colectivo. Este es un estudio instrumental extendido a varios casos. [...] Los casos son escogidos porque entendiéndolos a ellos se llegará a una mejor comprensión, o quizás mejor teorización.” (Stake, 2000, p. 437).

3.2 Recolección de la Información

Para llevar a cabo el proceso de recolección de información, la presente investigación asume que “la recolección de datos es visualizada como una serie de actividades interrelacionadas orientadas a reunir buena información para responder las preguntas de investigación emergentes.” (Creswell, 1998, p. 61). En este sentido propone un esquema de relaciones que se dan entre las actividades durante el proceso de recolección de la información. Tal dinámica, permite regresar periódicamente sobre los datos con el fin de revisar el proceso global. El esquema denominado *círculo de recolección de datos* (Ilustración 3) ilustra dichas relaciones.

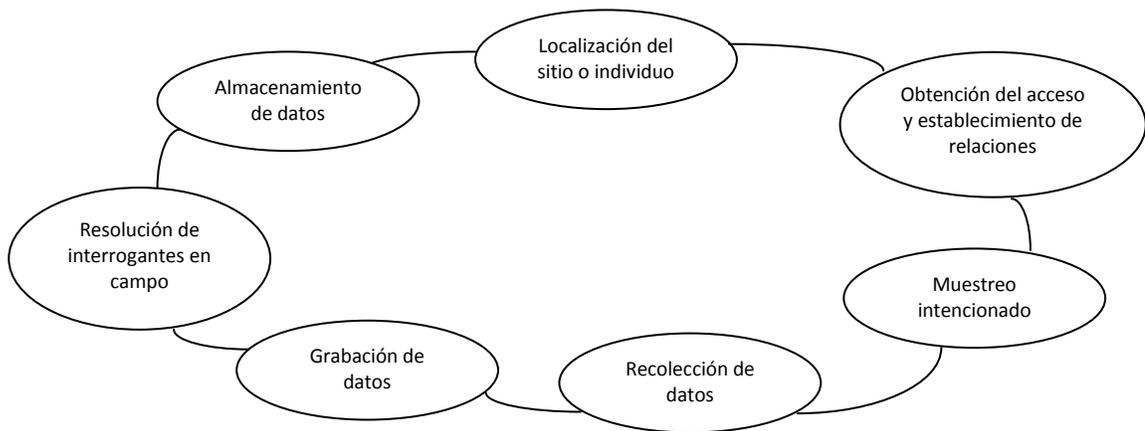


Ilustración 3
Ciclo de recolección de la información en la investigación cualitativa.
(Creswell, 1998, p. 110)

3.2.1 Localización de los casos

Siguiendo el círculo de recolección de datos, y aludiendo al tipo de estudio que se está realizando, se plantean dos momentos para analizar el proceso transpositivo: en sentido amplio y en sentido estricto. El sentido amplio abarca los análisis globales al respecto del establecimiento del saber matemático en las instituciones productoras de saber, y la selección del saber matemático a enseñar por parte de la noosfera. El sentido estricto, se refiere al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de número natural en el marco de una institución determinada. Acorde con esta estructura, se determinan los siguientes casos:

- *Caso 1: La construcción del concepto de número natural en los diferentes momentos de la historia de las matemáticas.* El análisis y la caracterización de tales procesos, permite dimensionar el sentido y la naturaleza (aspectos epistemológicos y ontológicos) que se le ha asignado al número natural a través de la historia. El resultado de este estudio, se constituye en un referente epistemológico que permite analizar las condiciones y las organizaciones que se dan a tal concepto, al ser puesto en textos de saber, o al ser incorporado en el contexto escolar.
- *Caso 2: Designación del concepto de número natural que va a ser enseñado.* La determinación del sentido del concepto de número natural que se está privilegiando en el sistema educativo colombiano (como representante de la noosfera), permite evidenciar las adaptaciones que se le hacen. Esta selección orienta los procesos de enseñanza, las concepciones que tienen los docentes, la formulación de libros de texto, y en últimas, define el currículo y el tipo de prácticas (tanto de alumnos como de docentes) que se van a asumir como válidas en el contexto escolar.
- *Caso 3: El concepto de número natural enseñado.* La especificación del proceso de enseñanza del concepto de número natural en una institución particular, permite perfilar las concepciones que tienen los docentes que participan en el proceso de enseñanza, y a la vez, establecer el tipo de prácticas que se privilegian al interior de la institución. Esta información se instaure como base para señalar la funcionalidad que se le otorga al número natural en el marco institucional.
- *Caso 4: El concepto de número natural aprendido.* Al describir y explicar las nociones y los principios aprendidos por los estudiantes de una institución, al respecto del concepto de número natural, se puede establecer el tipo de saber que se encuentra disponible en la comunidad de estudio. Este referente sirve de base para caracterizar el proceso transpositivo global en torno al concepto de número natural.

3.2.2 Recolección de los datos

Así, teniendo en cuenta la complejidad y los contextos donde se lleva a cabo el proceso de transposición didáctica, la presente investigación utiliza, entre otras, las siguientes técnicas de recolección de información: (1) *el análisis textual de diferentes tipos de textos*, a saber, la producción escrita de los alumnos; los registros audiovisuales y escritos de sesiones de trabajo con los alumnos; libros de texto de primer grado de básica primaria que circulan en Colombia; decretos y reglamentaciones del currículo en matemáticas en Colombia; documentos de carácter histórico sobre el concepto del número natural; encuestas realizadas a los docentes; (2) *la observación participante*, de la actividad matemática de los alumnos; (3) *notas reflexivas*, en relación con la información obtenida.

Dado que el proceso de investigación se lleva a cabo bajo el modelo de estudio de caso colectivo, es necesario establecer, para cada caso, el tipo de técnica de recolección de información y las fuentes documentales que se van a emplear. Así, para:

- *Caso 1, la construcción del concepto de número natural en los diferentes momentos de la historia de las matemáticas*, se emplea el análisis textual, para identificar y caracterizar los factores, los contextos, el sentido y la naturaleza que está presente en cada una de las construcciones que se ha hecho del número natural. Las fuentes documentales que se emplean en este caso son de dos tipos: *primarias*, que se refieren a textos escritos por los autores estudiados, y traducciones (en inglés, francés y español) de los textos originales; *secundarias*, que aluden a textos históricos que han sido escritos por autores que estudiaron las obras originales del autor.
- *Caso 2, designación del concepto de número natural que va a ser enseñado*, se utiliza el análisis textual, para reconocer y examinar el proceso de selección y adaptación que ha tenido el concepto de número natural en el currículo colombiano. Las fuentes documentales que se usan en este caso son: los reportes de investigación y las teorías cognitivas desarrolladas sobre el proceso de construcción y aprendizaje del número natural; los decretos, las leyes y reglamentaciones, que se han formulado, a nivel nacional, a lo largo del siglo XX a la fecha, en lo referido al currículo escolar;

los libros de texto de primer grado de básica primaria, que han circulado durante el siglo XX e inicios del XXI.

- *Caso 3, el concepto de número natural enseñado*, se emplea el análisis textual, para estudiar y categorizar las concepciones y conceptualizaciones que tienen los docentes al respecto del número natural. De igual forma, el análisis textual permite identificar las propuestas de trabajo de aula y el tipo de actividad que se plantea al interior de una institución, y dimensionar el efecto de las mismas, en el proceso de aprendizaje. Las fuentes documentales que se usan en este caso son: encuestas realizadas a docentes de preescolar; planeaciones institucionales del área de matemáticas para los grados jardín y transición; guías y talleres de trabajo de aula.
- *Caso 4, el concepto de número natural aprendido*, se usa el análisis textual, para indagar acerca del tipo de nociones, habilidades y principios, que emplean los estudiantes de preescolar, una vez han participado de un proceso de enseñanza del concepto de número natural. El análisis del texto escrito de los estudiantes permite una confrontación entre el saber que la institución esperaba enseñar, y lo que efectivamente se logra. Esta confrontación se revierte sobre la totalidad del proceso de investigación. Para complementar el estudio realizado a partir de los textos escritos por los estudiantes, se dispone de la observación participante durante la aplicación de las actividades evaluativas al respecto del número natural. En estos espacios la investigadora interactúa con los estudiantes a través de preguntas, ofreciendo explicaciones o solicitando argumentos frente a un proceso observado. Las fuentes documentales para este caso son: los textos escritos de los alumnos y las grabaciones de videos. Estos últimos, permiten recuperar no solo palabras sino también gestos que emplean los estudiantes durante su actividad matemática.

Durante todo el proceso de recolección de información se elaboran notas reflexivas sobre las relaciones, contextos y factores que intervienen en el proceso transpositivo. Dichas notas permiten ir resolviendo los interrogantes planteados al inicio de la formulación de la problemática. La información obtenida durante el proceso de investigación se almacena y organiza en medio magnético.

3.3 Análisis de la Información

Para el análisis de la información obtenida a partir de un estudio de caso, Creswell (1998) señala que “el análisis consiste en hacer una descripción detallada del caso y su entorno. Si el caso se presenta a través de una cronología de eventos, entonces se recomienda analizar las múltiples fuentes de datos para determinar evidencia de cada paso o fase en la evolución del caso. Sin embargo, el entorno es particularmente importante.” (p. 153). En concordancia con ello, Stake (1999) plantea que “[...] los casos rara vez existen solos. Si hay uno, seguramente habrá otros en alguna otra parte [...] el análisis permite [...] ver las partes por separado y observar cómo se relacionan entre sí...” (p. 68).

De acuerdo con los planteamientos anteriores, el proceso de análisis de la información acerca de la transposición didáctica en torno al concepto de número natural, se va abordar a través del estudio de los datos obtenidos de los casos (ver Localización de los casos, sección 3.2.1). En cada caso, se inicia con la organización de datos mediante la creación de archivos. Se procede luego, a la lectura reflexiva de dicha información, para identificar categorías básicas de análisis. Tales categorías son nominadas en función de las nociones y procesos que abarcan. Como punto de partida (categorías a priori) en esta investigación, se asumen las categorías de: *naturaleza de número natural*, *estructura matemática* que se establece en torno al número natural y *estructura cognitiva* que refiere el proceso mental de construcción del número natural. El número de categorías de cada caso puede aumentar o cambiar (categorías emergentes) a medida que se lleva a cabo la investigación, dada la cantidad de información y los requerimientos del análisis. Un tercer paso alude a la confrontación de las categorías elaboradas con las distintas fuentes (triangulación de datos) y la identificación de estructuras entre los datos. De esta forma se puede caracterizar, de manera puntual, el proceso transpositivo del número natural en cada caso. Finalmente, se plantea un análisis de las interrelaciones entre las categorías y las estructuras obtenidas en cada caso, para obtener un panorama completo y complejo del fenómeno transpositivo en torno al número natural. Es decir, mediante el contraste de la información obtenida en cada uno de los momentos del proceso de transposición

didáctica, y el reconocimiento de los múltiples factores que interviene y determinan dicho proceso, se puede obtener una caracterización de los fenómenos transpositivos en torno al concepto de número natural, en el contexto de la educación preescolar y el primer grado de educación básica primaria.

Para el proceso de análisis de la información se dispone del software informático *N-vivo*¹⁵, el cual es especializado en el análisis de datos cualitativos.

3.4 Validez

Siguiendo la propuesta de Stake (1999), al respecto de las formas de validación de la información en un estudio de caso, se asume, para la presente investigación, la triangulación de la información como el proceso que permite integrar y complementar la información obtenida de los diferentes momentos (casos) en que se lleva a cabo la transposición didáctica en torno al número natural. Dado que el fenómeno de transposición didáctica es complejo y se lleva a cabo en diferentes instancias, es necesario caracterizar cada uno de esos momentos, e integrar las diversas perspectivas del fenómeno transpositivo, para lograr una comprensión general del proceso estudiado. Además para cada caso, se dispone de una cantidad de datos, que requieren ser cruzados para establecer las categorías emergente de análisis del proceso transpositivo.

Otro proceso de validación que se va a emplear es la devolución de la información a los participantes del estudio y a docentes que ejercen su profesión en el ciclo de educación preescolar y primer grado de básica primaria. La información que se entrega, son los resultados parciales del análisis de algunos de los momentos del proceso transpositivo en torno al concepto de número natural. El proceso de devolución se lleva a cabo a través de conferencias, en el marco institucional donde se lleva a cabo la investigación, o en diferentes eventos de divulgación de resultados de investigación. Otra estrategia que se emplea para la devolución de la información es el

¹⁵ El software NVivo 8, es un programa informático especializado para el análisis de datos cualitativos desarrollado por QSR International. Sitio web <http://www.qsrinternational.com/>

diseño de cursos y talleres de formación docente, donde se socializan y analizan los resultados parciales obtenidos del proceso de estudio.

La triangulación y la devolución de la información generan una dinámica de reflexividad, donde se confrontan las bases teóricas, las estructuras elaboradas a partir de las categorías emergentes en cada uno de los casos y las conclusiones formuladas durante el proceso investigativo. Este ciclo así formulado incrementa la validez del estudio realizado.

Parte II: Transposición Didáctica en el sentido Amplio

4 Organización Matemática del Número Natural: El Saber de Referencia

Como se mencionó en líneas anteriores, en los análisis transpositivos, es necesario un estudio desde el punto de vista histórico epistemológico, donde se analice la evolución y las diferentes formalizaciones del concepto objeto de estudio, en este caso, el número natural. Para ello, en el presente apartado, se abordan algunos momentos representativos y coyunturales de la historia de las matemáticas donde el concepto de número natural ha sido reformulado o reinterpretado.

4.1 Babilonios y Egipcios

Los documentos que refieren las prácticas numéricas de estas culturas muestran grandes desarrollos asociados a los procesos de cálculo con números. Por ejemplo, muestran tablas de multiplicar que posiblemente fueron elaboradas por escribas con la funcionalidad de textos escolares. Estas tablas de multiplicar combinadas con las tablas de recíprocos formaban un sistema completo designado para hallar todas las divisiones sexagesimales $\frac{a}{b}$ con el rango del denominador dado por la tabla de recíprocos. De este listado, se excluían los números irregulares, aquellos números que contienen números primos no contenidos en 60 (Neugebauer, 1969).

A pesar de esta restricción, A Sachs (Citado por Neugebauer, 1969, p. 34) encontró una tabla que mostraba cómo abordar el problema de evaluar una aproximación del recíproco de un número irregular a través de una expresión finita de fracciones sexagesimales. Este hecho marca un primer paso hacia el análisis matemático de los procesos aritméticos infinitos y del concepto de número en general. De igual forma,

aparece una aproximación a $\sqrt{2}$ como $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$ (Neugebauer, 1969, p. 35).

Los babilonios usaban notación posicional sexagesimal para representar los números, en el cual combinaban un principio aditivo para generar los símbolos entre el 1 y el 59, y un principio posicional que se aplicaba sólo a números mayores que 60. En este sistema de escritura cuneiforme no se desarrolló un símbolo para el cero ni tampoco tuvieron un símbolo para separar la parte entera de la parte fraccionaria, además, todo tipo de número (fuera entero o fracción) se expresaba en notación sexagesimal. La falta de un símbolo para el cero, como del separador entre la parte entera y la fraccionaria, posiblemente era suplida por el contexto de la situación, marco en el cual debía ser interpretada la solución encontrada al problema propuesto, y que permitía eliminar las ambigüedades en la notación.

Otro aspecto de gran desarrollo en esta cultura fue el manejo de las ecuaciones. Aplicaban de manera correcta, la fórmula cuadrática para la solución de ecuaciones de segundo grado. Además, construían tripletas pitagóricas $d^2 = b^2 + l^2$, y a la vez se interesaban en la razón $\frac{d}{l}$, lo que garantiza un método práctico para las hallar tripletas pitagóricas (Neugebauer, 1969).

Son de destacar dos hechos de gran importancia: de una parte, los Babilonios desarrollaron un sistema numérico que les facilitó los cálculos matemáticos y que además, les permitió representar fracciones de unidad de una manera sencilla. Por otra parte, pudieron pensar la unidad como algo divisible en partes más pequeñas sin que por este hecho perdiera su carácter de número. Su sistema notacional seguramente tiene origen en sus desarrollos en el campo de la astronomía, y sus desarrollos aritméticos en las necesidades generadas en su sistema económico basado en la agricultura.

En cuanto a la matemática Egipcia, no se tiene mayor información con respecto a los procesos a partir de los cuales desarrollaron su aritmética. El papiro Rhind, que data aproximadamente del año 2000 A.C., es el mayor registro que se tiene sobre su matemática. Más que un texto de matemáticas, puede considerarse un compendio de

problemas y sus correspondientes métodos de solución. Dichos métodos sólo expresaban las operaciones necesarias para la hallar una respuesta, sin presentar algún tipo de justificación para las mismas. Los problemas allí presentados eran de orden geométrico y aritmético: se realizaban mediciones de longitudes, áreas y volúmenes, y problemas relativos con la agrimensura. A pesar del gran volumen de cálculos, al parecer no obtuvieron fórmulas generales ni tampoco desarrollaron demostraciones.

Su sistema de numeración era aditivo, lo que hizo que los métodos para solucionar problemas fueran complicados y tediosos. En cuanto a las fracciones, sólo tuvieron símbolos para las fracciones unitarias (de la forma $\frac{a}{n}$). "Con excepción de los dos tercios, para los que poseían un signo especial, cada fracción debía expresarse como la suma de fracciones con numerador 1. Por ejemplo la fracción $\frac{3}{4}$ era escrita como $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (obsérvese que no utilizaban el signo de adición), y $\frac{2}{61}$ se expresaba así:

$\frac{1}{40}, \frac{1}{244}, \frac{1}{488}, \frac{1}{610}$ " (Newman, 1994, p. 99).

Es de resaltar que los egipcios, a pesar de las restricciones que le imponía su sistema de numeración, lograron pensar la división de la unidad y la cuantificación a partir de las fracciones unitarias. Esto quizás se deba al tipo de problemas fundamentales que debían resolver en su cotidianidad: su sistema económico les implicaba el cálculo de áreas de tierras cultivables, proyectar la cosecha posible, computar el tributo por cobrar proporcional a la tierra cultivada y a la posible cosecha, y, además, debían resolver problemas de astronomía. En todos estos problemas las prácticas de la partición y la medición eran comunes. Por lo tanto, conceptualizar las fracciones de unidad era un problema importante para ellos.

Este panorama muestra cómo las grandes habilidades de cálculo de estas culturas tienen, de forma subyacente, un concepto de número natural, pero dicha concepción no se logra rastrear en los documentos a los cuales se tiene acceso. Es decir, sólo se conocen los desarrollos referidos a cálculos y algoritmos pero no se presenta de manera explícita su conceptualización de número natural.

4.2 Los Griegos

Del pensamiento matemático griego, a diferencia de lo sucedido con las dos culturas antes mencionadas, se tiene gran cantidad de información, así que no sólo se conocen los resultados que obtuvieron, sino también la manera como llegaron a ellos. Además, su interés epistemológico los llevó a indagar a fondo por la naturaleza de los objetos matemáticos tratados. Estos dos aspectos permiten un acercamiento más sistemático a las formas de pensamiento matemático griego.

En la tradición matemática griega el estudio de la *cantidad* se expresaba a través de la magnitud y el número; la primera ligada a las magnitudes continuas, y el segundo, ligado a lo discreto. En el número se identifica el uno (la unidad aritmética) como el principio generador de todos los números; por lo tanto, no es de la misma naturaleza que el número, y no puede ser dividido en partes más elementales. Esto es, la unidad aritmética no es divisible: “Si en su presencia [de los matemáticos] tratas de dividir la unidad propiamente dicha, se burlan de ti y no te escuchan, pero si la divides, ellos la multiplican en la misma medida, temiendo que la unidad no aparezca tal cual es, sino una reunión de partes” (Platón, 1998, p. 283). Estas características de la unidad y del número fueron objeto de profunda reflexión filosófica, en tanto entrañaban la existencia de lo uno y lo múltiple, lo divisible y lo indivisible, pero sobre todo, por el carácter eminentemente abstracto de la unidad.

El estudio de *la cantidad*, y bajo una fuerte influencia de las ideas de Platón, se hacía desde dos ámbitos¹⁶: *la cantidad en sí misma*, es decir el estudio de su naturaleza, de que está hecha, cuáles son sus elementos constitutivos (por ejemplo, la naturaleza de lo par o impar, del ser primo, y otras propiedades de los números: ser abundante, ser perfecto, deficiente), y el estudio de *la cantidad en relación con otra cantidad*, es decir, el estudio de las cantidades cuando se comparan unas con otras (por ejemplo, a través de las razones y proporciones, o de las operaciones y relaciones entre números). En el primer ámbito, el número era denominado *aritmético* y en el segundo, *numerado*. La

¹⁶ Nichomaqus, citado por Klein (1992), dice al respecto: “la cantidad una parte es estudiada *en sí misma*, sin ningún tipo de relación con alguna otra. [...] y la otra es cuando tiene *algún tipo* [clase] *de relación con otra*, y solo puede ser pensada a través de este tipo de relación.” (p. 26).

disciplina encargada de estudiar el número, en el primer caso, era *la aritmética*, mientras que en el segundo, era *la logística*.¹⁷

Para Platón la aritmética es “el arte de los números” es la ciencia que nos permite conocer su esencia, es el arte correcto de contar. Pero la logística, el arte de calcular no era menos importante, pues un conocimiento profundo de las operaciones y relaciones entre los números era considerado fundamental para la perfecta comprensión de la naturaleza del número. Así “contar correctamente presupone una relación y distinción continua entre las cosas numeradas con respecto a los números” (Klein, 1992, p. 20).

Sin embargo, quizás el tratado más importante de los números en la tradición griega se puede encontrar en la obra de los Elementos de Euclides (Euclid, 1908), donde las dos perspectivas antes mencionadas se funden en un todo indistinguible. De esta forma, en los libros propiamente aritméticos (libros VII al X) se encuentran mezclados definiciones y proposiciones que se refieren al estudio de los números en sí, y al estudio de los números en relación con otros. Por lo demás, el concepto de número que presenta Euclides sigue al pie de la letra la tradición matemática griega, donde se evidencia una posición ontológica en la que presupone la existencia de objetos elementales a partir de los cuales el mundo es construido físicamente. Para ello, los objetos del mundo se designan con nombres, y a partir de esta designación se les atribuyen propiedades y se establecen relaciones a través de proposiciones, las cuales, a su vez, enuncian los hechos o estados de las cosas. Estas proposiciones ya no son del mismo estatus que las cosas designadas, son enunciados abstractos que caracterizan conceptualmente el objeto estudiado. De esta manera, y cómo lo manifiesta Gardies (2004), el número en los Elementos no supera la lógica de primer orden, a condición de que los números sean definidos como individuos, es decir, el uno como unidad, la esencia, la mónada del número; el dos, resultado de la aglomeración de dos unidades, pero como tal, individuo cuya sustancia se compone de unidades y por tanto, al ser de

¹⁷ Ambas disciplinas (la aritmética y la logística) tenían su contraparte pragmática, pero en la tradición griega era claro que esta parte práctica de las matemáticas no era su objeto de estudio. La aritmética práctica manipula, cuenta objetos concretos, mientras que su contraparte teórica se ocupa de estos mismos actos, pero con los objetos del pensamiento, es decir la unidad y el número como conceptos. Algo similar sucede con la logística, es decir una cosa son el estudio de las relaciones numéricas, las razones, aplicadas por ejemplo a la música (para fabricar instrumentos o ejecutarlos) y otra el estudio de estas mismas relaciones en el plano de lo teórico.

naturaleza distinta al uno, totalmente distinguible de éste; y así sucesivamente para los números restantes.¹⁸

Se tiene entonces que el número era conceptualizado a partir de colecciones de objetos reales. Cada objeto real era asociado con una unidad abstracta única, así que el número era concebido como una colección de unidades. Como consecuencia inmediata se observa que, el 1 no tenía el estatus de número, puesto que no estaba compuesto de unidades, pero a la vez, él mismo era la esencia, y la esencia no podía ser de la misma naturaleza que la sustancia (números). Por su parte, el 0 no era concebido en el pensamiento griego, ya que se asociaba con cosas que contradecían el ser.

En general, se puede decir que Euclides concebía el número natural como una expresión de cantidad. Esto se evidencia, por ejemplo, en las siguientes definiciones del libro VII de los elementos (Euclid, 1908):

Def. 1: Es unidad aquello por lo que cada una de las cosas existentes se dice es uno.

Def. 2: Es número la multitud compuesta de unidades.

La unidad es pues una idea en sí misma, que se elige arbitrariamente, a condición de que se deje aglomerar de alguna manera con otros objetos de igual estatus. Esta noción permite identificar que el número natural era concebido desde lo discreto, asociado a la acción de contar una determinada aglomeración, y es dicho proceso de conteo quien permite apropiarse del concepto. Por ende, cada número es tratado como si fuera él, en sí mismo, un individuo, un objeto singular, independiente y aislado.

Así pues, la matemática griega nos muestra dos caras para la aritmética: una en relación con los aspectos pragmáticos de la misma (las operaciones y el cálculo), y otra en relación con los teóricos (naturaleza y esencia del número). En virtud de su forma de comprender la naturaleza de lo continuo y lo discreto, la unidad aritmética (el uno) era considerado indivisible, y por ende, el número era del orden de lo discreto

¹⁸ Klein (1992), muestra como el concepto de número en los griegos escapa a esta lógica de los enunciados de individuos en tanto para ellos era claro que si bien el acto de contar, la acción física en sí, hace que el resultado del conteo se refiera a cosas en particular, es decir pone el número en relación con lo sensible, la aritmética, en su carácter de ciencia, no se ocupa de estos números concretos, sino de los números del pensamiento, allí donde 3 es lo mismo siempre, sin importar tres que. Expresa Klein, referenciando los diálogos de Platón y la República: “así pues, existen unidades accesibles solo a través del pensamiento, las cuales uno puede por tanto, aprehender y contar, solo *“por sí mismas”* en distinción de “cualquier referencia exterior que tengan los números”. De hecho “tales números solo tienen existencia en el pensamiento” sobre la base de la pureza de las unidades, por la cual “todas y cada una son idénticas y no tienen la más mínima diferencia y no tienen partes en sí mismas” (p. 24).

(divisible solo un número finito de veces). Una idea que se deriva de esta concepción de número natural es que los números son infinitos, ya que dado cualquiera de ellos, se puede encontrar otro mayor, adicionándole una unidad. En esta premisa es claro el manejo del infinito potencial, y se constituye en una evidencia de la división existente entre unidades aritméticas y geométricas en esta cultura.

Finalmente, es importante resaltar que, su sistema de numeración era fundamentalmente aditivo, combinado con algunos principios multiplicativos, pero sin ser posicional. Ahora bien, dado que su sistema de numeración era en esencia aditivo, entonces un mismo número podía tener varias representaciones simbólicas y además, los algoritmos de las operaciones aritméticas eran largos y complicados. Estas características de su sistema de numeración, si bien podrían dificultar los cálculos, no fue obstáculo para el desarrollo de la matemática griega, dado que tenían en la geometría y en la demostración otras fuentes y métodos fructíferos en la producción de conocimiento matemático.

4.3 La Edad Media

Sin negar los innumerables avances en los desarrollos de la aritmética desde la época Griega hasta la edad media, se puede afirmar que los fundamentos griegos sobre la naturaleza del número permanecen casi inalterables hasta finales de esta época con los trabajos de Simón Stevin¹⁹. Como se puede ver, transcurre un largo período de tiempo (casi 20 siglos), para que la naturaleza, las fuentes y el concepto mismo de número fueran redimensionados. La profundidad de este problema se teje en torno a la naturaleza de la unidad: el 1 como el primer número de la serie (que no puede ser dividido y no es considerado número), pero a su vez, como elemento constitutivo de los demás números (que si pueden ser finitamente divisibles). Esto es, la unidad es al mismo tiempo, esencia y sustancia, parte constitutiva del número, lo cual, cómo lo había hecho notar el mismo Platón, se constituía en una aporía lógica.

¹⁹ Simón Stevin (1548 - 1620) fue un matemático e ingeniero naval, nacido en Brujas (Holanda). Sus trabajos fueron poco conocidos en occidente, pero sus tratados sobre la aritmética son considerados de gran aporte al desarrollo de las matemáticas.

En el contexto de la edad media se presenta un gran flujo comercial. Los intercambios comerciales se realizaban utilizando diferentes sistemas de pesos y medidas, lo cual generaba un obstáculo para la agilidad de los cálculos y sus correspondientes equivalencias. Cabe anotar también, que en dicho ambiente, ya se habían expandido los desarrollos de las matemáticas de los árabes: el sistema de numeración decimal era popular, al igual que los manejos algebraicos. Se suma a ello otro factor: durante el renacimiento se crean centros culturales y científicos que generan un ambiente nuevo y otras visiones de las matemáticas.

En ese contexto social y cultural, Simón Stevin, haciendo gala de su formación como ingeniero y comerciante, a la par que matemático, impone nuevas formas de relación con el conocimiento, como lo manifiesta Klein (1992): "... Stevin conscientemente rompe con las formas tradicionales de la ciencia, y pone su experiencia "práctica" en el comercio, las finanzas y la ingeniería al servicio de su preocupación teórica, y a la inversa, su "teoría" es puesta al servicio de su "actividad práctica"..." (p. 186). Así, Stevin observó las necesidades prácticas del comercio y se dio a la tarea de elaborar un tratado matemático que unificara los procesos comerciales de pesos y medidas, pero que a la vez tuviera soportes conceptuales sólidos que le dieran su carácter científico. Esta empresa se plasma en dos de sus principales escritos²⁰: *L'Arithmetique* y *La Practique D'arithmetique* ambos publicados en 1585. El primero de estos dos tratados presenta los fundamentos de la aritmética, y servía de base conceptual, para el segundo, uno de cuyos capítulos se titulaba *La disme* (el arte de los dieces), el cual pretendía generar un sistema universal de medidas, aplicable a cualquier magnitud, de tal forma que operara con la misma estructura del sistema de numeración decimal: Es decir, que una vez se estableciera la unidad de base para la magnitud correspondiente, las relaciones de equivalencia entre los diferentes órdenes de magnitud se obtuvieran a través de relaciones decimales (décimos, centésimos, milésimos, diez veces, cien veces, etc.). De esta forma, todo lo que se conocía sobre el cálculo numérico se podría transferir al cálculo comercial con magnitudes.

²⁰ Una compilación completa de sus obras se puede leer en Stevin (1634), compilación realizada por Albert Girard, disponible en el sitio web ECHO (European Cultural Heritage Online): <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView/ECHOzogiLib?pn=1&ws=1.5&mode=texttool&url=/mpiwg/online/permanent/library/NUA55ZF4/index.meta>.

En ese proceso de generar la nueva aritmética comercial y darle un fundamento matemático, para que fuese creíble, Stevin reformula algunos aspectos del concepto clásico del número natural.

Un primer aspecto se refiere a la reconceptualización del concepto de cantidad, que desde la época griega había estado dividido en dos categorías: el número y la magnitud. Stevin propone que el número no sólo es resultado del conteo de cantidades discretas, sino que éste también es el resultado de la medición de magnitudes. De esta manera el número emerge como una categoría general que abarca las magnitudes y sus medidas, y el sistema de numeración decimal aparece como la herramienta que permite esta nueva unidad en torno a la aritmética. Pero esta nueva visión sobre la aritmética le permite toda una reconceptualización de las nociones de base en torno al número, la unidad, las magnitudes, su representación y las operaciones.

Así, las definiciones I y II de su aritmética son claras en esta nueva perspectiva conceptual (Stevin, 1634, p. 1, columna de la izquierda):

Definición I: Aritmética es la ciencia de los números.

Definición II: Número es aquello por lo cual la cantidad de cada cosa es revelada.

Estas definiciones varían en comparación con la griega, en la medida en que el número se fundamenta en la cantidad y no en la aglomeración de unidades, además, la cantidad puede referirse a un proceso de conteo (cantidades discretas) o a un proceso de medición (magnitudes continuas). Esta reconceptualización moviliza en el trasfondo la unificación de la unidad: ya no se trata con unidades de distinta naturaleza (una geométrica y otra numérica) como en la matemática griega, sino que se concibe que todo proceso ya sea de conteo o de medición, requiere una unidad de base.

Pero esta forma de abordar el número le permite abordar críticamente la concepción griega de que la unidad no es de la misma naturaleza que el número, esto es, que el uno no es número, por ser el principio generador de todos los números, lo que lo lleva a afirmar categóricamente *que la unidad es un número*. La demostración de tal afirmación se ve en el siguiente silogismo:

La parte tiene la misma naturaleza del todo. La Unidad es parte de la multitud de unidades. Luego la unidad es de la misma naturaleza de la multitud de unidades. Pero la naturaleza de la multitud de unidades es el número. Por lo tanto la naturaleza de la unidad es el número. (Stevin, 1634, p. 1, columna de la izquierda)

Posterior a estas discusiones sobre el número, la unidad, expone una serie de definiciones que permiten explicar el uso de la notación decimal para expresar los números: define las cifras y sus símbolos (definición III), el valor de posición de cada cifra (definición V) y las agrupaciones de las cifras de un número en paquetes de tres en tres (definición IV), y otras que tratan de las propiedades aritméticas de los números, como por ejemplo, los números aritméticos, es decir, que no se adjetivan con una magnitud (definición VI), números primos entre sí (definición VIII), entre otras.

Demostrada la unidad entre número y magnitud, y el estatus de la unidad como número, explicada la notación decimal y las propiedades aritméticas fundamentales del número, el siguiente paso dado por Stevin fue la conceptualización de las fracciones de unidad como número²¹ y la extensión del sistema de numeración decimal para la escritura de las fracciones de unidad, las cuales ahora podían ser pensadas como números.

Es importante destacar que Stevin fue consciente de que al emplear dicho método de escritura decimal, no se podían llegar a escribir de manera exacta, las cantidades inconmensurables (números irracionales) y algunas conmensurables (como por ejemplo las fracciones decimales periódicas infinitas), ya que la subdivisión física tendría necesariamente un límite determinado por las condiciones físicas, y por lo tanto, se podría llegar a concluir que cualquier magnitud es conmensurable, o que cualquier fracción decimal es finita. Esto es, Stevin era consciente de que el proceso de representación decimal de los números no podía ser atado a las relaciones y manipulaciones físicas, sino que debía abordarse desde un aspecto formal abstracto matemático, para no incurrir en contradicciones.

²¹ Argumentando desde el carácter de número de la unidad, y el hecho de que la unidad estaba compuesta de multitud de partes, por lo tanto, las partes tienen igualmente la misma naturaleza que el todo. Vale la pena resaltar que Stevin ya utiliza la notación $\frac{a}{b}$ para representar las fracciones, explicando que a expresa la cantidad de veces que se repite la b -ésima parte de la unidad. En este sentido, $\frac{1}{b}$ es interpretado como la medida de cada una de las b partes iguales en que se ha dividido la unidad. Así, a es interpretado como una cantidad, y es llamado *numeratur*, mientras que b no es una cantidad, sino una cualidad que expresa la relación cuantitativa entre cada una de las partes y la unidad, y es llamado *nominatur*.

Se tiene pues que la propuesta de Stevin permite ampliar el dominio de los números naturales y la cerradura de las operaciones con números positivos. También concilia los aspectos de lo continuo y lo discreto de la cantidad, mediante su definición de número natural. El número actúa con carácter continuo ya que puede ser dividido infinitamente, pero a la vez con carácter discreto puesto que cuantifica. Otro cambio que se presenta es en el manejo de la unidad, puesto que ya no considera como principio de generación absoluto. Todas estas rupturas permitieron concebir el número natural en un sentido más amplio y completo.

4.4 Etapa de Fundamentación

En la sección precedente se mostró, a partir del trabajo de Stevin, un avance significativo en lo relativo a la conceptualización del número. La nueva conceptualización del número natural, instaurada durante la edad media, fue asumida y validada por la comunidad de matemáticos de la época. Con base en ella, se produjeron cambios y desarrollos en distintos campos de las matemáticas. Se puede decir que estos cambios fueron fundamentalmente en cuestiones de orden ontológico y epistemológico, pero bajo esta nueva perspectiva del número, y con el recurso del sistema de numeración decimal, se desarrollan nuevos conceptos, técnicas y procedimientos que brindan grandes posibilidades de desarrollo a las matemáticas de la época.

Es así que en los inicios del siglo XIX, y debido a los desarrollos del análisis, se hace un uso generalizado de simbología especializada (como muestra de sistematicidad en la teoría), y las definiciones y propiedades aritméticas eran vistas como medida de la precisión y la generalidad²². Sin embargo, esta misma sistematicidad y aritmetización del análisis empieza a mostrar nuevas necesidades y a plantear nuevos problemas y paradojas en relación con lo continuo, lo infinito, y la fragilidad del concepto de número real. Dicha problemática se reflejaba de manera directa en la necesidad de una conceptualización más sólida de los números reales y su continuidad. Esto es, si bien el proceso de aritmetización de los infinitesimales, del concepto de límite y de la

²² El trabajo de Cauchy es un buen ejemplo de ello. En su introducción al “Course d’Analysis” (Cauchy, 1821) se lee la necesidad de desarrollar un método de investigación, que con todo el rigor de la geometría, no recurra a las generalizaciones abusivas de lo algebraico. Este método sería buscado a través de la aritmética.

continuidad de funciones, es altamente formalizado con base en definiciones, teoremas y técnicas puramente aritméticas, su concepción de número real es clásica en todo sentido: la naturaleza del mismo, su sentido y significado, se debe buscar en las magnitudes, esto es, a través de las magnitudes y sus medidas se garantiza la existencia del número.²³

Así pues, en la búsqueda de clarificar las nociones de lo continuo, lo infinito, y sobre todo, el carácter de \mathbb{R} como continuo, llevó a indagar por las bases, los fundamentos de los razonamientos numéricos, y reconociendo que los mismos se fundamentaban sobre profundas intuiciones tomadas desde lo geométrico, se dio un giro fundamental en el abordaje de dichas problemáticas: se buscaron fundamentos para los números basados en relaciones y propiedades puramente numéricas, y por ende, tratando de eludir cualquier tipo de intuición externa a ella, en particular, cualquier tipo de intuición geométrica.²⁴ En la indagación por tales fundamentos, la reflexión se centró en la naturaleza la base de los números, y por ende, se volvió la mirada sobre, en primera instancia sobre los números reales, y finalmente sobre los naturales mismos. De ahí el nombre de etapa de fundamentación.

Si bien a lo largo de siglo XIX se dieron diferentes intentos de fundamentar los números reales en general, las fundamentación de los naturales como tal solo se logró con éxito a finales de este período. Entre los trabajos más sobresalientes se pueden resaltar los de Cantor, Dedekind, Peano y Frege.

4.4.1 Dedekind: una fundamentación desde la perspectiva ordinal del número

Se puede resumir la motivación fundamental de Dedekind como la búsqueda de la formulación de los fundamentos de la aritmética sobre la base de un conjunto de

²³ De todas formas Cauchy es consciente de la necesidad de una fundamentación de las operaciones y las relaciones que se pueden hacer con los números, y eso es lo que presenta en la nota I de su Course D'Analyse, titulada "sobre la teoría de las cantidades positivas y negativas" (Cauchy, 1821). A grandes rasgos, sobre la base de los números y sus operaciones, los cuales se suponen conocidos, demuestra toda una serie de teoremas sobre la suma y multiplicación de las cantidades numéricas (ley de los signos, operaciones aditivas y multiplicativas, directas e inversas, con algunas de sus propiedades, etc.).

²⁴ Por ejemplo, la siguiente cita de Dedekind muestra tales intereses en los matemáticos del siglo XVIII: "Me encontraba entonces, en tanto que profesor del Politécnico federal de Zürich, obligado por primera vez a exponer los elementos del cálculo diferencial, y sentí en esta ocasión, más vivamente todavía que antes, cuán falta está la aritmética de una fundamentación auténticamente científica." (Dedekind, 1927, p. 1).

enunciados, los más simples posibles, que se refirieran a conceptos abstractos (y en ese sentido, afirmaciones lógicas) y que no recurrieran a intuiciones primarias (a priori) del espacio y el tiempo. Si se quiere se trata de una edificación de la aritmética sobre una base constructiva a partir de conceptos lógicos, los cuales, antes que basarse en intuiciones a-priori del espacio y el tiempo, permitiera explicarlas. “A través de la edificación puramente lógica de la ciencia de los números y del dominio numérico continuo ganado en ella, estamos por primera vez puestos en situación de investigar con precisión nuestras representaciones de espacio y tiempo, en tanto que las relacionamos con este dominio creado en nuestro espíritu (Dedekind, 1930, p. 119).

Dedekind fue partidario de una visión sobre el conocimiento matemático que propendiera por elaboraciones basadas únicamente sobre objetos del pensamiento (conceptos lógicos), los cuales tienen existencia el marco de las predicaciones que se puedan hacer sobre ellos. En este marco, si bien la meta era encontrar esos elementos conceptuales fundantes de los objetos matemáticos, reconocía en las actividades cotidianas del hacer matemático una fuente importante para esta identificación, pero no para transponer las intuiciones y las acciones concretas a los razonamientos matemáticos, sino para identificar las bases de dicha actividad que puedan ser elevadas al nivel de definiciones universales que describan las propiedades de los objetos independientes de la representación o de las acciones desarrolladas al solucionar situaciones específicas. Esto es, dichos principios, al ser elevados al nivel de definiciones adquieren un status lógico, y les da el derecho de ser usados con todo rigor en los procesos constructivos. Esto es evidente, por ejemplo, en la manera como expresa que la correspondencia uno a uno es el principio básico sobre el cual se debe edificar el concepto de número natural al analizar las acciones subyacentes a la actividad de contar o de representar:

“Si se sigue con precisión lo que hacemos al contar un conjunto o una cantidad de cosas, se llega a la consideración de la capacidad del espíritu de poner en correspondencia una cosa con otra cosa, o representar una cosa con otra cosa, facultad sin la cual no es posible ningún pensamiento en absoluto. Sobre este único, aunque también completamente imprescindible fundamento debe edificarse toda la ciencia de los números, según mi punto de vista, ...” (Dedekind, 1930, p. 102).

Adicional a lo anterior, Dedekind planteó la necesidad de demostrar todo lo que fuera susceptible de ser demostrado, es decir, para él no bastaba con que la intuición validara un resultado a través de manipulaciones directas, era necesario demostrar la verdad de ese resultado, por evidente que fuera su verdad.. Así, propuso construir estructuras que describieran las propiedades y las relaciones que se podían establecer en función de un objeto, de forma tal que no hubiera duda acerca de la naturaleza y esencia de tal objeto. “Lo que se puede demostrar, no debe en la ciencia ser creído sin demostración. A pesar de que este requisito parece tan evidente, no puede considerarse como cumplido, a lo que creo, en la fundamentación misma de la ciencia más simple, a saber, en aquella parte de la lógica que trata de la doctrina de los números, incluso según las representaciones más recientes...” (Dedekind, 1930, p. 119). Así pues, buscaba que a partir de los fundamentos primarios de la aritmética se pudiera demostrar todo el conjunto de propiedades de lo numérico, sin asumir como válido nada que la experiencia nos muestre como tal, si no ha sido pasado por el filtro lógico.

En este marco filosófico y matemático, la definición formal de número natural es introducida por Dedekind, una vez ha establecido un álgebra de conjuntos (teoría de sistemas en sus palabras), un sistema formal en el cual define operaciones, transformaciones, equivalencias, homomorfismos, isomorfismos, orden total, operación del sucesor, inducción completa (fundamental en el marco de la teoría desarrollada), conjunto infinito, ordinal y cardinal, entre otras propiedades aritméticas importantes de lo que él considera una teoría general de un sistema numérico infinito simple bien ordenado.²⁵ Fue en este marco general donde, y como un caso particular de un sistema simple infinito bien ordenado, que Dedekind presentó la siguiente caracterización de lo que él denominó un sistema simple infinito (el cual más adelante identificará con los números Naturales una vez definido el concepto de ordinal):

71. Definición: Un sistema N se dice *simplemente infinito*, si existe una aplicación similar φ de N en sí mismo tal que N resulte la cadena (44) de un elemento no contenido en $\varphi(N)$. Llamamos a este elemento, que en lo que sigue indicamos con el símbolo 1, *el elemento fundamental* de N , y decimos que el sistema simplemente

²⁵ Todo este trabajo puede leerse en *¿qué son y para qué sirven los números?* (Dedekind, 1930). Toda la caracterización de los números naturales se puede leer en el capítulo 6 de este trabajo, artículos 71 – 172.

infinito N está *ordenado* por la aplicación φ . Conservando las notaciones precedentes §4 para las imágenes y de las cadenas, podemos decir que la esencia de un sistema N simplemente infinito está caracterizada por la existencia de una aplicación φ de N , y de un elemento 1 que satisfacen las condiciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ siguientes:

$$\alpha: N' \subseteq N$$

$$\beta: N = 1_0$$

γ : El elemento 1 no está contenido en N'

δ : La aplicación φ es unívoca

De $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se sigue evidentemente que cada sistema N simplemente infinito es de hecho un sistema infinito (64), porque es similar a una parte propia N_0 de sí mismo. (Dedekind, 1930, p. 149, capítulo 6, artículo 71)

En esta definición es claro el papel asignado a 1 , elemento fundamental, dado que se constituye en la base generadora de los elementos del conjunto, a la vez que, mediante la aplicación se establece un orden total (es más, se establece un buen ordenamiento). Dicha forma de presentar las relaciones sobre las cuales se construye un sistema simplemente finito, (los naturales como un caso particular de ello), deja en evidencia el manejo de un principio de inclusión, pues la generación de un número natural, se obtiene por medio de la adición de 1 . Así, cada nuevo número natural es el “siguiente de” su predecesor pues se construye sobre la base de éste.

De esta manera, el significado del número se establecía en función de aquello que se pudiera decir sobre él, en razón de las proposiciones que se pudieran formular. En esa medida, el número natural tenía sentido por la estructura que se creaba en torno a él, su definición quedaba implícita en la estructura misma, en las propiedades que se le puedan adjudicar. Así, el número natural se estableció como un objeto de la lógica, como una idea de la mente, alejado de los referentes prácticos.

En síntesis, se puede plantear dos elementos característicos del trabajo de Dedekind en relación a los números naturales (Grattan-Guinness, 2000):

1. La apuesta por la ordinalidad como el principio básico sobre el cual se construyen los números naturales como *sistema simple infinito* y ordenado.

73. *Definición.* Si en la consideración de un sistema N simplemente infinito ordenado por un aplicación se prescinde por completo de las características específicas de los elementos, se mantiene fundamentalmente su distinguibilidad y sólo se consideran las relaciones que se establecen mediante la aplicación

ordenadora (\mathbf{N}), entonces estos elementos se llaman números naturales o números ordinales y también simplemente números, y el elemento fundamental 1 se llama el número fundamental de la sucesión numérica \mathbf{N} . Con referencia a esta liberación de los elementos de todo otro contenido (abstracción) se puede denominar con derecho a los números una creación libre del espíritu humano. Las relaciones o leyes, que se derivarán exclusivamente de las condiciones α , β , γ , δ en 71 y que por esto son las mismas siempre en todos los sistemas simplemente infinitos ordenados, sean los que fueren los nombres dados ocasionalmente a los elementos particulares (cf.134), conforman el objeto inmediato de la ciencia de los números o aritmética... (Dedekind, 1930, p. 149, capítulo 6, artículo 73)

Esta cita muestra el carácter abstracto y formal que quiere dar a su teoría, una teoría en la que los objetos que al componen, los números, solo pueden significar a partir de las definiciones y teoremas de la teoría misma. En este marco, el cardinal tan solo es una aplicación de la ordinalidad, pero en todo caso, igualmente una abstracción sobre los sistemas.

2. La no definición de los números naturales a partir de los conjuntos, como lo hacen Frege o Russell, sino que asocia los números naturales con los sistemas (cómo se puede ver de las dos citas extensas anteriores). Si se quiere, los números naturales son una aplicación de su teoría general, o mejor aún, su teoría general permite explicar casos especiales, como el de nuestros números naturales.

4.4.2 Peano: una fundamentación axiomática del número

El trabajo de Giuseppe Peano puede inscribirse en una línea de gran influencia entre los matemáticos del siglo XIX: la búsqueda de formas de expresión simbólica, que no solo, liberaran las matemáticas de las imprecisiones del lenguaje natural, sino que permitiera significar los conceptos matemáticos desde aspectos exclusivamente matemáticos. Para el caso de Peano, esta búsqueda lo llevó por los caminos de la lógica. En palabras de Boyer (2001), Peano “intenta desarrollar un lenguaje formalizado en el que pudiera expresarse no sólo la lógica matemática, sino todas las ramas más importantes de la matemática” (p. 735). Él trataba de expresar a través de símbolos las relaciones lógicas y matemáticas conocidas hasta el momento, evitando así, el uso de lenguajes especulativos y poco rigurosos, explicitando de manera directa,

las hipótesis y los significados de los conceptos matemáticos manipulados. Se pretendía reducir la matemática, “a lo estricta y absolutamente esencial del simbolismo formalizado” (Boyer, p. 735).

Para el caso de la aritmética, Peano en el año 1889 publica su libro *Arithmetices principia: nova metodo*, en el cual, luego de una extensa presentación y explicación (un prefacio de 13 páginas), no solo de la notación, usada, si no de la manera de significar los conceptos lógicos introducidos a través de esta nueva simbología (si se quiere, una explicación del lenguaje que usará), presenta una teoría de los números naturales, siguiendo una forma axiomática: sobre la base de cuatro conceptos primitivos, a saber, el “1”, que le asigna el significado de unidad; “ N ” que significa número entero positivo (el conjunto de los números naturales); “ $a+1$ ” que significa la secuencia: de a sigue $a+1$ y “ $=$ ” que significa ser lo mismo (en lenguaje moderno, se trata de una relación de equivalencia). Tomando como base estos conceptos primitivos estructura un conjunto de 9 axiomas, con los cuales estructura una teoría formal de los números naturales siguiendo el método deductivo.

Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N. \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in N. \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in N. \supset . \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N.$
6. $a \in N. \supset . a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N. \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N. \supset . a + 1 - = 1.$
9. $k \in K . \therefore 1 \in k . \therefore x \in N . x \in k : \supset . x + 1 \in k : : \supset . N \supset k.$

Ilustración 4

Axiomas de Peano en su formulación original (Peano, 1889, p. 1). En su escritura, el signo \supset se puede interpretar con el sentido moderno de la implicación. Las proposiciones donde aparecen son enunciados condicionales de la forma “si ... entonces ...”

De estos 9 axiomas, el primero le da estatus de número al signo que representa la unidad, los siguientes tres, definen el signo “ $=$ ” como relación de equivalencia, el sexto garantiza que el sucesor de cualquier número es un número, y el séptimo

garantiza que cuando los sucesores de número son iguales, el octavo garantiza que la unidad no tiene sucesor, y finalmente, el noveno es una forma particular del axioma de inducción completa (presentado sin cuantificadores).

En lo que sigue del libro presenta las definiciones de las operaciones suma, resta, multiplicación, división, con sus respectivas propiedades como teoremas. En todos los casos la noción de sucesor, y el recurso al axioma de inducción son la base fundamental del trabajo.

Esta forma de presentación de los números naturales, si bien tiene algunas similitudes con el trabajo de Dedekind, el cual le antecedió por unos años, tiene diferencias significativas, que hacen pensar que no fue una simple copia o simplificación del trabajo de éste. En las similitudes se pueden enunciar el que ambos se basan en la noción de sistema simple infinito bien ordenado (aunque presentados en distinto nivel de formulación: en Dedekind es un teorema, mientras que en Peano es una especie de aplicación de la noción de sucesor). Igualmente el énfasis en una estructura ordinal, basada en la noción de cadenas de clases (conjuntos) que se suceden unos a otros a partir de la operación s , y por ende, el lugar central a la inducción como la condición o la propiedad que de un x se transfiere a $s(x)$, para cualquier elemento de la cadena.

Por su parte, entre las diferencias se pueden enunciar (Grattan-Guinness, 2000):

1. Peano comprende el número como un primitivo, y axiomatiza sus principales propiedades. Para Dedekind los números son una creación de la mente humana, y su trabajo fundamental es la formalización de este proceso creativo.
2. Dedekind teoriza sobre el axioma de inducción, mientras que Peano lo formula como un axioma y lo presenta bajo una forma de principio de lógica de primer orden (sin el recurso a los cuantificadores).
3. Para Dedekind, la aritmética es parte de la lógica, mientras que en Peano hay distinción de la una a la otra: la lógica es una herramienta para fundamentar la otra.

4.4.3 Cantor: una fundamentación desde la perspectiva cardinal de número

Si bien en principio no puede decirse que Cantor tenía un interés explícito en la formalización de los números naturales, no puede negarse la influencia que tuvo su

teoría sobre los conjuntos en una nueva comprensión del número natural. Su interés fundamental, inicialmente, era la comprensión de la naturaleza de los conjuntos continuos, y por esta vía, una comprensión más apropiada de los números reales: la naturaleza de su continuidad. Para ello, aborda el estudio de las funciones, en particular, lo relativo al conjunto de puntos de discontinuidad en un intervalo dado. Ello implicó pensar la numerabilidad de los conjuntos infinitos y asumir la pregunta: ¿Cómo contar conjuntos infinitos?

Una principio de respuesta a este tipo de interrogantes se puede ver en su artículo “Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers” (Cantor, 1915), el cual inicia con la definición de conjunto (agregado) y de número cardinal:

Por agregado (...) comprenderemos cualquier colección de un todo (...) M de objetos m de nuestra intuición o de nuestro pensamiento, definidos y separados. Esos objetos serán llamados los elementos de M ...

Llamaremos por el nombre de “potencia” “número cardinal” de M al concepto que, por medio de nuestra facultad activa del pensamiento, emerge del agregado M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de su variedad de elementos m y del orden en el cual ellos son dados.

Nosotros notaremos el resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o potencia de M , por \overline{M} . (Cantor, 1915, pp. 85-86)

Posteriormente hace uso del principio de equipotencia para definir la equivalencia entre conjuntos. “Decimos que dos agregados M y N son equivalentes [...] si es posible ponerlos, a partir de alguna ley, en relación uno con el otro de tal forma que cada elemento del uno le corresponda uno y solo un elemento del otro” (Cantor, 1915, pp. 86-87) . A partir de esta definición de correspondencia (y luego de mostrar que la misma es una relación de equivalencia) define la igualdad del número cardinal de dos conjuntos que dos conjuntos que son equivalentes tienen entonces el mismo número cardinal.

Posteriormente define el orden entre números cardinales, en función del número cardinal de los conjuntos que se contienen uno al otro en sentido estricto y las diferentes operaciones entre números cardinales. De especial interés es la forma cómo define la suma a partir de la unión de dos conjuntos que no tengan elementos en común (intersección vacía) y la multiplicación a partir de un proceso de formar todas

las parejas entre los elementos de dos conjuntos distintos (es decir, si $m = \overline{\overline{M}}$ y $n = \overline{\overline{N}}$ entonces el producto $m \cdot n$ es el cardinal del conjunto formado por todas las parejas (m, n) formadas con los elementos de M y de N). En este sentido, el producto de dos números no es interpretado como una repetición de sumas de sumando iguales, sino como a partir del producto cartesiano entre dos conjuntos. En suma, al dotar de una estructura a los números cardinales, Cantor lo que está demostrando es precisamente que éstos se comportan como los números naturales. Este uso de la noción de cardinalidad para la construcción de los números naturales se ve en el capítulo 5 de su trabajo. En dicha sección analiza las propiedades de la secuencia de los números cardinales finitos, es decir, su principio básico generador, con el fin de extender estos principios hacia los conjuntos infinitos (números cardinales infinitos) labor que realiza en la sección 6.

El mismo Cantor expresa que usará las nociones precedentes sobre los números cardinales “para presentar de una manera más natural, más corta, y rigurosa los fundamentos de la teoría de los números finitos [los números naturales]” (Cantor, 1915, p. 98). De manera esquemática, el procedimiento seguido para tal construcción es la siguiente:

1. Parte de la existencia de cosas singulares, las cuales “se pueden subsumir bajo el concepto del agregado $E_0 = (e_0)$. El cual le corresponde el número cardinal “uno”, simbolizado por 1; tenemos entonces que $1 = \overline{\overline{E_0}}$ ” (p. 98).
2. Luego el conjunto E_0 se une con otra cosa cualquiera, llama a tal unión, “el agregado-uni6n E_1 ; así que $E_1 = (E_0, e_1)$. El número cardinal de E_1 será llamado “dos” y se simbolizará por 2: $2 = \overline{\overline{E_1}}$ ” (p. 98).
3. El procedimiento continua agregando un elemento a cada nuevo conjunto obtenido: “... $E_2 = (E_1, e_2)$, $E_3 = (E_2, e_3)$, ..., lo cual genera sucesivamente una sucesi6n ilimitada, que podemos llamar “los números cardinales finitos” simbolizados por 3, 4, 5, ...

Esta idea le permite mostrar entonces que en última instancia “cualquier número cardinal, excepto el 1, es la suma del precedente más una unidad.” (pp. 98-99)

Así pues, los trabajos de Cantor toman como punto de partida los principios de los conjuntos finitos, y desde allí, construye los números naturales a partir del concepto de «potencia» o cardinalidad de un conjunto que esté en correspondencia biunívoca con el conjunto que tiene la propiedad de poseer ese cardinal. Se da preponderancia al aspecto cardinal, el cual se define como el número de elementos de un conjunto dado. Un aporte fundamental del trabajo cantoriano radica en que por primera vez se aclara qué significa ser el número de un conjunto de cosas.

De esta manera, los principios fundamentales en su teoría de los números naturales son:

- La correspondencia biunívoca (equipotencia)
- La cardinalidad.
- La ordinalidad, como consecuencia de la sucesión de cardinales.
- Y finalmente, la idea de que cada nuevo cardinal incluye los anteriores.

4.4.4 Frege: una perspectiva conjuntista del número natural

El trabajo de Frege se puede enmarcar, de un lado, en la búsqueda de los fundamentos de la aritmética solamente a partir de principios lógicos, pero de otro, centrado en los problemas propios de la filosofía del lenguaje de tal forma que se mostrará que dichos fundamentos para la aritmética sólo serían posible en base a la lógica y no en términos de explicaciones físicas, fisiológicas o psicológicas (toda la primera parte de su libro titulado *los fundamentos de la aritmética* (Frege, 1996) está dedicado a criticar las diferentes posturas teóricas sobre el número natural existente hasta el momento). Adicional a ello, Frege mostró profundas inclinaciones por las reflexiones filosóficas, con ánimo de dar un sentido y significado a los signos y conceptos básicos empleados en la lógica de tal forma que los libere de las imperfecciones de la lengua natural, y por esta vía, construir un conjunto mínimo de principios basados únicamente en el pensamiento puro (principios lógicos), libres de cualquier tipo de intuición proveniente de los sentidos, de la experiencia física, o basados en explicaciones fisiológicas o psicológicas.

Así pues, el trabajo de Frege se debe entender en el marco de la búsqueda de una fundamentación de la aritmética (movimiento muy propio de los matemáticos del siglo

XIX) que le permitiera expresar sus principios básicos sin recurrir a ninguna idea, objeto, ley, etc., que necesitara algún tipo de justificación externa al pensamiento puro en sí mismo. Para Frege el número es un objeto lógico: no es un individuo concreto, ni una colección de unidades, ni las imágenes en nuestra mente de dichas colecciones, como tampoco lo es la característica común a todos los conjunto equipotentes. En Frege, el número está en relación con la extensión de un concepto, y de esta manera, centra su mirada, al igual que Cantor, en el aspecto cardinal del mismo. El número es un objeto lógico, en tanto puede ser formulado como una expresión del pensamiento puro, lo cual es equivalente a decir, que puede ser expresado en el lenguaje, libre de todo tipo de intuición o referencia externa al pensamiento en sí mismo.

El punto de partida para la construcción del número natural como un objeto, son las nociones de “concepto F ” y “caer bajo un concepto”. El concepto es de naturaleza predicativa en tanto afirma propiedades de algo, es algo sobre lo cual predica un concepto es un objeto, y por lo tanto, caer bajo un concepto significa que un objeto dado cumple con la propiedad enunciada en el concepto. Así todos los objetos que caen bajo un concepto forman una clase, y esta clase es la extensión del concepto. Es decir, si P es un concepto, la extensión de P es la clase de todos los objetos x tales que $P(x)$ es verdadero. Adicionalmente, otro punto de anclaje está en la noción de equinumerosidad²⁶ la cual le permite expresar cuando dos clases tienen la misma extensión.

Con los anteriores elementos se siguen entonces un conjunto de definiciones, que le permiten construir, lógicamente la serie infinita de números naturales: el cero (0 es el número que corresponde con el concepto “desigual consigo mismo”), el uno (1 es el número que corresponde al concepto “igual a cero”) y la noción de sucesor (“existe un concepto F y un objeto x que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto F es n , y que el número que corresponde al concepto “que cae bajo F , pero no es igual a x ” es m)” (Frege, 1996, artículos 70 a 83).

²⁶ “si todo objeto con el que x está en la relación Φ cae bajo el concepto F , y si del hecho de que d caiga bajo el concepto F , se sigue, en general, sea lo que sea d , que todo objeto con el que d , está en la relación Φ , cae bajo el concepto F , entonces y cae bajo el concepto F , sea F el concepto que sea” (Frege, 1996, p. 118, artículo 75). En términos lógicos modernos esto se puede expresar como: $\forall x[F(x) \rightarrow (\exists y)(G(y) \wedge \Phi(x, y))] \wedge \forall y[G(y) \rightarrow (\exists x)(F(x) \wedge \Phi(x, y))]$.

En suma se puede plantear entonces que para Frege la naturaleza del número se encuentra en las nociones lógicas que permiten definirlo como un objeto del pensamiento. La noción de cardinalidad está en la base, pero cada número es definido en sí mismo, con existencia propia independiente de los demás, a diferencia de Cantor, para el cual cada nuevo número gana su existencia en tanto se constituye sobre los precedentes. El orden es consecuencia de la noción de sucesor, la cual no es definida en términos de la operación agregar uno más, como en las otras posturas estudiadas, sino que éste se define lógicamente como el elemento.

4.5 Reflexiones Finales

Al elaborar la revisión de la evolución y las diferentes formalizaciones que se han hecho del número natural a lo largo de la historia, se identifican dos tendencias a saber: una línea de trabajos que se orientan hacia la determinación de la naturaleza del número natural (¿qué es el número?), y la otra, cuyos estudios se enfocan en la definición de la estructura matemática que sirve como base para dar sentido y significado a tal concepto.

Para caracterizar y definir el concepto de número natural, cada una de estas tendencias elabora reflexiones en torno a tópicos centrales que les permiten determinar la naturaleza y el carácter de dicho concepto.

Uno de tales tópicos es la unidad. Se tiene que en unas tendencias, la naturaleza de la unidad es eje central del análisis para la definición del concepto de número natural, dado que al definir la esencia de ésta, se puede determinar la naturaleza del número mismo. Por su parte, en otras perspectivas, la unidad se asume como un elemento simbólico que hace parte de la estructura matemática que se establece en torno al concepto de número natural.

En cuanto a las fuentes que dan sentido o donde se pueden hallar situaciones que se refieran al concepto de número natural, se tiene que unas pocas perspectivas evocan un referente práctico, relativo a la experiencia y a la vida cotidiana. En contraste, la mayoría de las tendencias se remiten a que las fuentes del concepto de número natural se encuentran en las relaciones mentales que el hombre construye. Son abstracciones

que se elaboran a partir de acciones y referentes físicos, o a partir de formulaciones sobre el lenguaje.

De manera inherente y a la luz de las caracterizaciones que se elaboran en cada una de las perspectivas de conceptualización del número natural, las operaciones y las propiedades de éstas, se plantean de manera implícita o explícita. Esto es, en algunas perspectivas se plantea de manera formal la estructura algebraica que puede construir sobre el conjunto de los naturales en relación con sus operaciones, mientras que en otras tendencias, no se determina con dicha formalidad tales relaciones, sólo se menciona cómo se puede operar –y de hecho se despliegan grandes habilidades de cálculo–.

En lo relativo al concepto mismo de número natural, se encuentran muy diversas perspectivas, desde aquellas que lo asumen como aglomeración de unidades, como individuo independiente, hasta aquellas que los asumen como un objeto lógico.

Si bien cada una de las conceptualizaciones sobre el número natural aportan para el desarrollo de las matemáticas y en general, para los procesos culturales, no todas ellas se han instaurado como perspectivas dominantes ni han logrado un alto nivel de formalización, a pesar de ello, se constituyen en una base para el análisis de las prácticas escolares y los procesos de aprendizaje.

5 Perspectivas Cognitivas en la Construcción del Concepto de Número Natural: ¿Cómo se Espera que el Niño Aprenda?

Las investigaciones cognitivas realizadas al respecto del número natural no se circunscriben únicamente al análisis de la estructuración del concepto de número natural en el niño, sino que también incluyen otros aspectos que de una u otra manera influyen o se relacionan con dicho proceso de construcción.

Es así como en dichas investigaciones se integran reflexiones en torno al desarrollo y aplicación de las habilidades numéricas en contexto. Éstas se refieren a la capacidad que tiene el niño para: realizar conteos y manejar la correspondencia de la secuencia numérica, responder por las tareas de cardinalidad y ordinalidad, establecer comparaciones entre cantidades, componer y descomponer cantidades, desarrollar cálculos numéricos ya sean mentales o a través de los algoritmos convencionales, usar la numeración como medio de comunicación de cantidades, y solucionar situaciones de adición y sustracción junto con sus propiedades. Esta nueva visión acerca de la comprensión del número natural, se ha denominado desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años²⁷.

Las investigaciones acerca del desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años, se pueden describir y agrupar en función de las siguientes tendencias²⁸:

La primera visión corresponde a los aportes del trabajo de Piaget. Estos están basados en la fundamentación lógico matemática del desarrollo del concepto de número.

La segunda visión surge en oposición y crítica a la postura de las operaciones lógicas de Piaget, argumentando la importancia de las habilidades de conteo como elementos básicos para el desarrollo del concepto de número.

La tercera visión integra las dos visiones anteriores y propone un modelo sintético. Aquí tanto la teoría de las operaciones piagetianas como la teoría de las habilidades de

²⁷ Los primeros años hacen referencia al rango de edades entre 2 y 7 años, periodo en el cual el niño inicia su proceso de comunicación y de inserción escolar.

²⁸ Esta propuesta de tendencias y líneas de trabajo fue dada por (Torbeyns et al., 2002)

conteo son piezas fundamentales para el desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años. Se plantea integrar de manera sistemática los elementos conceptuales de ambas posturas y generar un nuevo modelo integral. Para ello, se basan en la propuesta de Van de Rijt (1996, citado por Torbeyns, et al., 2002) donde se establecen 8 criterios que describen el proceso de comprensión general del número, y por ende, del desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años.

Se hace necesario ahora, describir los elementos teóricos que orientan cada visión y sus autores más relevantes, y con base en ello, poder determinar los puntos de encuentro entre dichos planteamientos y las propuestas de trabajo plasmadas en los libros de texto que circulan en el medio.

5.1 Perspectiva Piagetiana

La *primera visión* es quizás la postura más conocida y referenciada entre los docentes e investigadores, debido a los grandes aportes que brindó, en cuanto al modelo de estructuración de conceptos, en particular los matemáticos, en la mente de los niños.

La visión de Piaget se sustenta en varias nociones, entre ellas se encuentra la conservación como relación básica. Ésta se propone como “condición necesaria para toda clase de actividad racional” (Piaget & Szeminska, 1982, p. 19). Es decir, la conservación es una condición relevante para todo proceso mental referido a la matemática. En particular, una colección sólo puede ser concebida mentalmente si su valor total permanece invariable, independientemente de los cambios que se generen en la relación de distribución de sus elementos. Inherente a ello, el número sólo puede ser comprendido si su cuantificación permanece idéntica, cualquiera sea la organización de las unidades que lo componen (Piaget & Szeminska, 1982, p. 20). Esto implica, revisar las relaciones que convergen y sustentan tal invarianza, y su aporte para la formación del concepto de número.

Según Piaget, el niño primero debe comprender la conservación de la cantidad para luego acceder a la noción de cantidad propiamente dicha. La conservación es un juicio y no una percepción, dado que esta última no pone de manifiesto la coordinación de las relaciones cuantitativas e ignora la cantidad multidimensional. Luego para

comprender la cantidad, no es suficiente la percepción de las cualidades de los objetos y la comparación de las mismas. Es necesaria la coordinación de las relaciones cuantitativas por medio de operaciones aditivas o multiplicativas. Así, la conservación, -base para la comprensión de la cantidad-, involucra la coordinación de relaciones desde su carácter lógico de multiplicación y de composición matemática de las partes (Piaget & Szeminska, 1982, p. 20).

Se tiene entonces que el establecimiento y la coordinación de relaciones es un elemento importante dentro del esquema propuesto por Piaget. La relación se concibe como la conexión que se establece a nivel mental, de las categorías que se abstraen de las percepciones. Dichas relaciones pueden ser de dos formas (Piaget & Szeminska, 1982, pp. 20-21): las simétricas, que expresan semejanzas, y las asimétricas, que expresan diferencias. Las relaciones simétricas se orientan a generar clasificaciones, en tanto que las relaciones asimétricas, se orientan a las comparaciones, y por ende, inician la cuantificación. Las relaciones desde su carácter psicológico, tienen sentido en la medida en que se establece su transitividad lógica.

Cabe anotar también, que las relaciones se pueden operar de manera lógica. La adición de relaciones consiste en la coordinación unidimensional de las mismas. Así, la adición de las relaciones asimétricas se realiza a través de la seriación. Por lo tanto, se adiciona lógicamente cuando puede deducir la transitividad de dichas relaciones. En cuanto a la multiplicación, se tiene que consiste en la coordinación de la seriación simultánea respecto a dos o más relaciones a la vez.

En coherencia con la perspectiva anterior, se plantea que para concebir la cantidad propiamente dicha, el niño en un primer momento, reduce la cantidad al establecimiento de comparaciones: cuánto más o menos. Pasa luego, a la coordinación de relaciones asimétricas, las cuales generan la cantidad intensiva²⁹. Por último, pone en proporción³⁰ las diferencias y en consecuencia, surge la noción de cantidad total de orden extensivo. Esta última, se plantea como un concepto que requiere la fusión las

²⁹ Las cantidades intensivas se proponen como sistemas de gradaciones respecto a una relación asimétrica establecida. (Piaget & Szeminska, 1982, p. 20)

³⁰ La proporción es concebida como la combinación de la igualdad con la relación asimétrica. Esto es, la coordinación simultánea y la compensación de las diferencias que se establecen a través de la relación asimétrica. (Piaget & Szeminska, 1982, p. 22)

relaciones asimétricas y simétricas de tal forma que la combinación de diferencias e igualdades genere la multiplicación lógica. Tal acción es primordial para el desarrollo del número natural.

Otra noción que interviene de manera directa en el proceso de desarrollo del concepto de número natural es la correspondencia. Ésta se inicia desde la correspondencia perceptual, donde no existe la equivalencia duradera debido a la falta de contacto entre los elementos correspondientes. Se procede sólo por evaluación global del espacio ocupado o por las dimensiones que se perciben de la colección, en especial la forma. Es decir, la correspondencia se establece sobre totalidades perceptivas.

En el siguiente nivel de correspondencia, la percepción involucra todas las partes de la totalidad y las comparaciones se hacen teniendo en cuenta la coordinación de varios criterios. Esta correspondencia se denomina “cualitativa de orden intuitivo” (Piaget & Szeminska, 1982, p. 66). En este nivel ya se presentan algunos rasgos de reversibilidad, y se manifiestan cuando el niño puede generar la forma inicial de la colección a partir de la que ha sido modificada.

En cuanto al último nivel, se tiene que las colecciones correspondientes son equivalentes independientemente de su disposición espacial. Esto se logra en la medida en que las unidades se asumen como intercambiables e iguales entre sí, gracias a compensación de las transformaciones. Este nivel se caracteriza por la movilidad y reversibilidad de las acciones y relaciones.

Por tanto, la correspondencia cuantitativa no requiere solo de la correspondencia perceptiva, sino también de la igualación de diferencias y la compensación de las mismas. Estas operaciones conducen a la equivalencia duradera, y por ende, al número natural.

El trabajo de Piaget, también involucra la noción de seriación. Al igual que en las nociones anteriores, se proponen tres niveles: seriación global donde el niño no comprende el orden progresivo de los elementos; seriación intuitiva, donde se establecen ordenes rígidos que no permiten el ingreso de nuevos elementos a la serie; seriación operatoria donde se manifiesta un coordinación sistemática de las relaciones asimétricas. Así, al enumerar los elementos de una clase, el niño comprende que cada

lugar ocupado se define en relación con los elementos seriados, y que esta colección constituye además una totalidad invariable.

De manera análoga, esta teoría propone tres niveles para la cardinación, los cuales se corresponden con los de ordinación. El primer nivel hace referencia a la ausencia de la conservación de la cantidad. El segundo nivel, se caracteriza por la conservación inestable ya que se presenta sólo para ciertas transformaciones. En el último nivel se presenta la cuantificación total estable.

Se tiene entonces, que las diversas nociones que se involucran en la estructuración del concepto de número natural, según Piaget, tienen una evolución comparable: los primeros niveles parten de las percepciones, son de naturaleza global y dependen totalmente de la experiencia y la intuición; en los segundos niveles, se presenta una capacidad de análisis que no siempre supera la experiencias perceptuales y por ello, las relaciones establecidas no son estables; por su parte en los últimos niveles, hay una preponderancia de las operaciones sobre la intuición. Lo anterior explicita el camino que se propone para el desarrollo del concepto de número natural en el niño.

Ahora, una vez determinado este camino evolutivo y las nociones que involucra, se hace necesario definir el concepto como tal. Según Piaget, el número “es al mismo tiempo una clase y una relación asimétrica, puesto que las unidades que lo componen se adicionan en tanto son equivalentes y al mismo tiempo se serian en tanto son diferentes unas de otras [...] el número resulta, por el contrario, al mismo tiempo de la equivalencia generalizada y de una seriación generalizada” (Piaget & Szeminska, 1982, p. 216). Por lo cual, no es de carácter empírico. Se construye a través de la abstracción reflexionante a partir de establecer relaciones abstractas de las cualidades diferenciales. Esta diferenciación permite reconocer cada elemento de las colecciones como unidades independientes equivalentes. Estableciendo esto, tales elementos se pueden seriar para distinguir uno de otro, y a la vez, se incluyen unos en los otros. Es decir, el número natural es una síntesis de las operaciones lógicas de conservación, seriación y orden.

Entonces, se tiene que esta línea de investigación, apunta al desarrollo del concepto de número natural orientado por los avances de la Psicología cognitiva, en la perspectiva psicogenética. El número natural es una estructura mental a la cual se

accede por medio de la abstracción reflexionante, siendo así de carácter individual, interno e independiente de las percepciones experimentales.

Estos planteamientos han aportado en lo relativo a los diferentes procesos mentales que lleva a cabo el niño en la estructuración de su pensamiento, pero por su objeto de investigación, no ha brindado elementos que orienten los procesos didácticos. Esto es, las tareas propuestas por Piaget no están pensadas para que por medio de ellas el niño aprenda a establecer las relaciones necesarias que dan sentido y significado al número natural, sino más bien, para explicitar los niveles de conceptualización de tal proceso.

En particular, los trabajos de Piaget no tienen en cuenta el lenguaje como fuente de progreso para la estructuración del concepto de número, ya que es considerado un conocimiento social y por ende, tiene sus fuentes en convenciones arbitrarias creadas por las comunidades. Ello implica, acceder a él mediante abstracciones empíricas, no siendo este el carácter y la naturaleza del concepto de número natural, al cual se accede sólo mediante la abstracción reflexiva.

Otro aspecto que es pertinente analizar es el papel adjudicado al proceso de conteo, pues para Piaget esta acción sólo conduce a verdades empíricas ya que se basa en actos concretos y no implicaría procesos de abstracción reflexiva.

5.2 Perspectiva acerca del Conteo

En contraste, la *segunda visión*³¹ surge en oposición y crítica a la postura de las operaciones lógicas de Piaget, argumentando la importancia de las habilidades de conteo como elementos básicos para el desarrollo del concepto de número natural. Se considera indispensable desarrollar gran número de actividades que involucren conteos para estructurar el concepto de número natural, de adición y de sustracción. Dentro de esta visión se encuentran autores como Baroody, Gelman & Gallistel, y Ginsburg. A continuación se exponen sus principales planteamientos.

³¹ Esta visión incluye tanto la postura del conteo como la del subitising, dado que según (Beckwith & Restle, 1966; Brownell, 1928; Silverman & Rose, 1980 citados por Clements & Sarama, 2007) este proceso de visión global de la cantidad, se puede asumir como una forma abreviada de conteo.

(Ginsburg, 2002), (Song & Ginsburg, 1988) plantea que el conteo no es una simple manera mecánica de “coro” numérico. Es una actividad cognitiva interesante que se puede presentar a los niños pequeños como una oportunidad de enriquecer su aprendizaje matemático. Se debe aprovechar la espontaneidad y el interés que tienen los niños tanto para el conteo de series numéricas como para determinar la cantidad de elementos de una colección dada, tomando como contexto las situaciones de la vida cotidiana y los juegos libres.

En estos últimos, según el autor, los niños usan tres tipos de estrategias de solución: la enumeración, la cual incluye decir palabras número, enumerar objetos y observar la cantidad de objetos de una colección; la magnitud, que involucra actividades como juzgar qué colección tiene más cantidad de objetos, cuál es la cantidad mayor y cuál la menor; los patrones, donde se elaboran simetrías en 3 dimensiones a través de juegos con bloques.

De igual forma se plantean los procesos cognitivos que subyacen al proceso de conteo. Para contar exitosamente, el niño primero debe memorizar un conjunto de sonidos sin sentido en una secuencia arbitraria. Seguido, generan reglas para usar secuencias de palabras número, asociadas en primera instancia, a los términos para las unidades. Por último, comprenden el sistema de reglas que orientan el proceso de conteo y aprenden a producir las décadas (grupos de diez), y combinar unidades y décadas para generar números grandes.

En esta propuesta de trabajo, se plantea entonces, la importancia del lenguaje ya sea oral o simbólico (escrito) como aspecto clave para el desarrollo del conteo, pues permite identificar estructuras similares, las cuales involucran ideas acerca del valor de posición y del sistema de numeración decimal. De esta forma se estructura el conteo como una herramienta para el cálculo formal.

Por su parte, (Gelman, 2000; Gelman & Butterworth, 2005; Hartnett & Gelman, 1998; Zur & Gelman, 2004), plantea el conteo como herramienta de solución de tareas razonadas con números relativos, debido a su estrecha relación con los principios aritméticos: el conteo suministra un valor cardinal que puede ser ordenado, sumado o restado. Su proceso de evolución se puede dinamizar a partir de los juegos numéricos donde se debe predecir el resultado de una adición o sustracción, tomando como

referente la cancioncilla numérica, y se verifica dicho resultado por medio del conteo. Para las predicciones se tiene en cuenta el principio adición como incremento de la numerosidad y el principio de sustracción como decremento de la numerosidad. También emplean la herramienta de subitising para establecer las predicciones.

En concordancia con lo anterior, el conteo se plantea como mecanismo que permite referir la propiedad “el siguiente de” como parte de la estructura del número natural. Esto se debe a que cada vez que el conteo expresa un cardinal, la palabra número siguiente en la secuencia del conteo, evoca la cantidad anterior y la nueva, que corresponde a la colección que se está contando. Esto es, se evidencia la adición y la generación de un nuevo número a partir de la cantidad anterior.

Los planteamientos de Gelman acerca de la pertinencia del conteo como estructura básica para la comprensión del concepto de número natural, se sustentan desde el desarrollo cognitivo, consideraciones que se asemejan en gran medida a la propuesta de Piaget. Así, la adquisición del conocimiento involucra la construcción de representaciones estructurales. Se parte del principio de que el niño participa activamente en su propio desarrollo cognitivo, tomando como base la estructura mental existente para encontrar, interpretar, crear y acumular información. Aquí se evalúa la relevancia de la información y se almacena sólo la importante, construyendo de esta forma, el dominio de conocimientos relevantes.

La diferencia al respecto de la teoría de Piaget se encuentra en los mecanismos y en la forma en que se accede y se obtiene la información. Para la perspectiva piagetiana, la experiencia no podía constituirse en fuente del conocimiento lógico matemático, en contraste con Gelman, quien sí reconoce en las situaciones contextuales, la fuente de las relaciones que van a ser estructuradas a nivel mental.

Gelman en su propuesta teórica plantea tres principios que permiten evidenciar y desarrollar el concepto de número natural: el principio de cardinalidad como fin del proceso de conteo, el de orden estable y el de correspondencia 1-1. Además, se presenta un análisis de la tipología de errores que presentan los estudiantes en el proceso de conteo, con su correspondiente argumentación.

Así, esta visión propone un trabajo centrado en el conteo como mecanismo que permite dar sentido al concepto de número natural. El conteo se asume como un

proceso de razonamiento mental y no sólo como la repetición de la serie numérica. Por medio de él, se puede comprender los diferentes elementos que se involucran en el concepto de número: la cardinalidad, la ordinalidad, el orden estable y la conservación. En esta visión se da preponderancia al uso del lenguaje como motor y orientador del proceso de conteo, a la vez que brinda elementos de referencia para generar significados del número natural en contextos cotidianos. De igual forma, se valora la estimación y el cálculo mental como herramientas que aportan tanto al concepto mismo de número natural, como a la comprensión de los algoritmos de las operaciones básicas.

A pesar de estos significativos aportes en cuanto a las formas didácticas, sociales y culturales del desarrollo del concepto de número natural, dado que reconoce la existencia de habilidades numéricas iniciales dadas por la cultura, que en principio no se constituyen en sistemas, pero que sirven de fundamentación para los procesos numéricos posteriores, esta visión deja de lado el análisis de la estructuración de los procesos mentales inherentes a los conceptos numéricos. Propone cómo dinamizar procesos de conteo pero no describe el funcionamiento mental que se desencadena con esta tarea. De igual forma, aunque propone el lenguaje como elemento relevante para el desarrollo del conteo, no menciona cómo se integra este aspecto a la cotidianidad de la escuela, ni tampoco clarifica el papel de la interacción social y la comunicación en el aula como mecanismos mediadores en el aprendizaje del número natural.

5.3 Visión Integradora

La *tercera visión* se plantea como punto de encuentro entre las dos visiones anteriores y propone un modelo sintético, donde el desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años se asume como proceso, el cual se inicia antes de comenzar la educación formal. En esta medida, cuando los niños llegan a los preescolares ya tienen algunos conocimientos intuitivos acerca del número natural (en cuanto a su significado en situaciones contextualizadas), usan formas numéricas, recitan secuencias de palabras número, son capaces de contar grupos pequeños de objetos concretos, entre otros. Para continuar con el desarrollo y afianzamiento de

tales competencias matemáticas tempranas, se propone gran cantidad de experiencias y situaciones cuantificables referidas a contextos escolares y no escolares.

Para la organización del proceso de desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años, se basan en la propuesta de Van de Rijt (1996, citado por Torbeyns, et al., 2002), donde se establecen 8 criterios, a saber:

Concepto de comparación: habilidad de los niños para comparar objetos por medio de la observación de cantidades o propiedades cuantitativas. Esta habilidad se evidencia cuando se proponen tareas de comparación (cuántos más – cuántos menos).

Clasificación: se refiere a la habilidad para agrupar objetos en clases o subclase sobre la base de uno o varios criterios. Esta habilidad se evidencia cuando el niño es capaz de clasificar objetos sobre la base de similitudes.

Correspondencia 1-1: habilidad para poner en relación 1 con 1 diferentes objetos. Se evidencia en la medida en que se comparen objetos a través de la relación 1 a 1.

Seriación: Ordenación de objetos de acuerdo con uno o más criterios. Implica la habilidad de repartir objetos de manera discreta y ordenada según un criterio dado.

El uso de las palabras número: Manejo de la secuencia de conteo para contar a partir de un número dado, uso del aspecto ordinal y cardinal del número.

Conteo estructurado: Habilidades de conteo señalando los ítems individuales de una colección, sin omitir ninguno y sin contarlos más de una vez. Se evidencia en las tareas donde se requiera dar el cardinal de una colección, teniendo ésta una forma determinada.

Conteo resultante: El número es usado para establecer la cantidad de elementos en cualquier situación. Se evidencia en las tareas donde se requiera dar el cardinal de una colección, teniendo ésta una forma o no, determinada. Aquí el niño ya no señala los objetos cuando los cuenta.

Comprensión general del número: Integra los otros componentes. Se refiere a la habilidad de aplicar la numeración en situaciones de la vida cotidiana.

Se plantea así en este marco, que el concepto de número natural se estructura de manera gradual, a través de la coordinación de procesos de conteo, mediante la comparación y la comunicación de cantidades. Tales habilidades se abordan a la luz de la solución de situaciones en contextos cotidianos para los estudiantes.

A continuación se describen los planteamientos de algunos autores representativos de esta visión: Fuson y Verschaffel.

(Fuson, 1998; Fuson, Pergament, Lyons, & Hall, 1985; Fuson & Secada, 1986; Fuson, Secada, & Hall, 1983), retoma los planteamientos de Piaget en cuanto a la concepción de número natural como síntesis de la inclusión jerárquica de clases y del orden, teniendo como propósito final la conservación de la cantidad. Propone la estructuración conceptual como forma para acceder al concepto de número natural. Considera que la utilización simultánea de materiales concretos y abstractos resulta bastante efectiva en la instrucción de la estrategia de contar, pues la combinación de ellos, ayuda a movilizar diferentes estrategias para avanzar en dicho proceso.

Se propone la interacción social como medio facilitador del aprendizaje, donde aflore la pedagogía de la equidad, que facilite la comprensión de las nociones matemáticas desde los niveles bajos hasta lograr el avance de los miembros del grupo. Este planteamiento conlleva al análisis conceptual del pensamiento del niño y de las herramientas semióticas culturales, ya que la notación formal de los conceptos matemáticos se va adquiriendo a través de la construcción de significados. No basta pues con lo cotidiano y los conceptos espontáneos para adquirir los significados matemáticos, se hace necesario, la interacción con los conceptos formales. Así, se debe partir de las concepciones que tienen los alumnos y las maneras cómo las usan al momento de solucionar situaciones verbales y simbólicas de contextos cotidianos (herramientas semióticas culturales), para luego, evolucionar hacia las conceptualizaciones matemáticas.

Estos elementos evolutivos se plasman en la propuesta dada para el progreso en el aprendizaje de la secuencia verbal de palabras número (Fuson & Hall, 1982; Fuson, Richards & Briars, 1982; citado por Clements & Sarama, 2007, p. 475). Se propone así, cinco niveles:

Nivel cuerda: las palabras no son los objetos de pensamiento, no son oídas como palabras separadas.

Lista irrompible: las palabras son escuchadas y llegan a ser objetos del pensamiento.

Nivel cadena rompible: partes de la cadena pueden ser producidas a partir de cualquier número.

Nivel cadena numérica: las palabras llegan a ser en sí mismas unidades que pueden ser contadas.

Nivel cadena bidireccional: las palabras pueden ser producidas en cualquier dirección y unitización³² seriada empleada en la secuencia numérica permite establecer relaciones parte-todo y emplear una variedad de estrategias flexibles.

Estos diferentes niveles anteceden y posibilitan cambios en las estrategias de solución de adiciones y sustracciones (Fuson, 1992; citado por Clements & Sarama, 2007, p. 475), elementos que fortalecen el pensamiento numérico, y por el ende, el concepto de número natural.

(Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquière, 2001), por su parte, centra la atención en el estudio de las estrategias que emplean los niños para determinar la numerosidad en una tarea dada. En primera instancia, se analizan los aspectos relativos a la exactitud y a la velocidad con que emplean dichas estrategias. Luego se enfoca en las adaptaciones que hacen los niños de las mismas, según las necesidades de la tarea propuesta. Las estrategias que producen resultados adecuados se incorporan a las estructuras mentales y se vuelven rutinarias, para luego solucionar situaciones cognitivamente similares. Esta perspectiva de trabajo se enmarca en el modelo que se denomina cambio de estrategias. En este modelo se distinguen cuatro dimensiones de competencias:

- Adquisición de nuevas estrategias y abandono de las viejas.
- Cambiar hacia el mejor uso de más estrategias eficientes de las que se dispone.
- Mejorar en la fluencia y eficiencia con las estrategias ejecutadas.
- Incrementar la naturaleza adaptativa de la escogencia entre estrategias disponibles.

Se trata entonces, que la escuela y los procesos de enseñanza se encaminen a buscar la transformación gradual de las estrategias informales de conteo que tienen los niños, en estrategias integrales y más convencionales, donde se alcancen mayores

³² Unitización se refiere al reconocimiento y utilización de la unidad como parte constitutiva del número siguiente.

niveles de generalización a través del reconocimiento de estructuras y esquemas³³ invariantes. El modelo se propone en cuatro etapas a saber:

- Repertorio: Acerca del tipo de estrategias que aplican para resolver una situación dada.
- Distribución: Se refiere a la frecuencia con que cada estrategia es usada.
- Exactitud y velocidad: Se refiere a la rapidez y los resultados obtenidos al aplicar cierta estrategia.
- Selección: Se refiere a la adaptación de estrategias individuales escogidas para la solución eficiente de la situación propuesta.

La aplicación de este modelo se evidencia en la medida en que el niño tome en consideración las características de las estrategias de desempeño que tiene a su alcance, y evalúe cuáles de ellas le conducen más rápidamente a una respuesta correcta.

En este marco de cambio de estrategias, se deben generar espacios donde el niño tenga acceso a dos tipos de condicionamientos: el primero, donde se brinde libertad para escoger la estrategia de solución; el segundo, donde se fijan las estrategias que pueden ser utilizadas para encontrar la solución de la situación, de tal forma que surja la necesidad de emplear unas nuevas, que ofrezcan una respuesta de manera más eficiente.

De acuerdo con los planteamientos explicitados en los párrafos anteriores, esta tercera visión realiza aportes en lo referido a la estructuración del concepto de número natural, y a la vez, propone líneas de trabajo didáctico para dicha estructuración. Se asume el concepto de número natural como el resultado de un proceso, donde intervienen diferentes nociones que se dinamizan mediante el proceso de conteo y la solución de problemas. Así, el concepto de número natural se alcanza, una vez se disponga una amplia gama de estrategias para resolver situaciones donde dicho concepto se involucre.

En esta visión, el proceso de estructuración de las nociones matemáticas toma como punto de partida los conocimientos previos y estrategias que tiene el niño y la relación de los mismos con su entorno, para lograr movilizar nuevos razonamientos y

³³ Aquí los esquemas se asumen como esquemas mentales que comandan la acción del niño.

nuevas estrategias que le permitan construir diferentes significados para el número natural: como instrumento para pensar y solucionar las situaciones cotidianas.

Esta puntualización en los conocimientos previos, hace necesario pensar en las diferencias de los miembros del grupo. Así que las propuestas de trabajo que se planteen, deben ser accesibles a todos ellos, cimentándose así un clima de reconocimiento y de valoración de la diferencia, ambiente que genera intercambio de información, argumentación, validación de hipótesis, y en general, produce comunicación de saberes.

De la misma manera que las otras visiones, esta tercera, también presenta limitaciones en cuanto a que, si bien reconoce las diferencias entre los miembros del grupo, no ahonda en lo relativo a la interculturalidad que está mediando el proceso educativo. En lo relativo al modelo de cambio de estrategias, se tiende a centrar la atención en el uso de la estrategia misma (perspectiva instrumentalista) y no tanto, en los procesos mentales que están mediando tal cambio. A pesar de ello, brinda pautas para el trabajo docente al respecto del tipo de actividades que se pueden formular para que se genere la necesidad de emplear otras estrategias más eficientes en la resolución de una situación dada.

En general, se tiene que cada una de las diferentes visiones describe elementos y aspectos que influyen y permiten la estructuración del concepto de número natural. Dichos aspectos se proponen de manera gradual, a través de etapas y niveles, iniciando con los números pequeños y gradualmente, se avanza hacia el dominio de los más grandes. De igual forma, se observa que para el desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años, es necesario incluir en los procesos de enseñanza situaciones que involucren: la discriminación y el reconocimiento de cantidades (iniciando por las pequeñas), procesos de comparación y ordenación de cantidades, el uso convencional de la serie numérica y la comunicación de resultados obtenidos (cantidades) utilizando como posible estrategia el establecimiento de correspondencias 1- 1, la necesidad de identificar el doble carácter del número desde su aspecto cardinal y ordinal mediante procesos de conteo, entre otros.

Si bien cada una de las visiones anteriores aporta referentes al respecto del proceso de estructuración del concepto de número natural en los niños, y en general del

desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años, hay elementos que no se demarcan claramente en la bibliografía abordada.

Uno de estos elementos es la exploración de los sentidos y significados del número natural en contextos de medida. Tales contextos permiten reconocer que el número no sólo se utiliza para contar sino que también se puede emplear para medir. De igual forma, se cuestiona el papel de la unidad de medida y su correspondiente representación a través de un sistema de medidas. La reflexión sobre los contextos de medida permite que el estudiante relacione el concepto de número natural y el concepto de magnitud, situación que en los desarrollos históricos fue crucial para el avance y formalización del número natural, del número entero y del número racional.

Otro elemento que no se explicita en los informes de las investigaciones consultadas, se refiere a los fenómenos de transposición didáctica y sus efectos en las habilidades y comprensiones numéricas alcanzadas por los niños en los primeros grados de escolaridad. Si bien se encuentran desarrollos teóricos al respecto de los efectos de dicho fenómeno transpositivo, no se refieren estudios donde se analice qué nociones y conceptos de número natural están circulando en las instituciones escolares, y en consecuencia, qué y cómo aprenden los niños tales nociones. Esto es, no se encuentran estudios donde se indague sobre las formas y tipos de aprendizaje que alcanzan los niños al respecto del número natural, al estar inscritos en cierta institucionalidad donde circula una u otra conceptualización al respecto de tal concepto.

Quedan entonces abiertas estas líneas de trabajo al respecto del proceso de desarrollo del pensamiento numérico y en particular, de la estructuración del número natural.

6 El Número Natural en el Sistema Escolar: Lo que se Espera Enseñar

6.1 Introducción

En el ejercicio de transposición didáctica se hace necesaria la selección de los saberes que van a ser enseñados en los contextos escolares. Dicha reflexión implica, de un lado, el análisis de los aspectos histórico epistemológicos con el fin de disponer de un panorama donde se plasmen las diferentes vías de constitución del objeto matemático, y en función de los mismos, tomar decisiones al respecto de qué perspectiva o perspectivas se van a privilegiar para el proceso de enseñanza de tal concepto. Por otro lado, y complementario a la reflexión anterior, se requiere el estudio de las condiciones y necesidades históricas y culturales propias del grupo social donde se llevará a cabo el proceso de enseñanza, dado que el saber que circule en la escuela debe aportar un cierto valor agregado para la formación de ciudadanos.

Una forma de elaborar este análisis, en torno a la selección del saber matemático y a la perspectiva de enseñanza del mismo, es rastrear las propuestas curriculares que se han formulado en un determinado grupo cultural, ya que en ellas se plasman los intereses de diferentes grupos (políticos, económicos, pedagógicos, entre otros) y se encuentran (-de manera implícita generalmente-) los referentes de base, que asumen los docentes para orientar sus propuestas de aula. El estudio de dicho camino, se convierte en insumo para la formulación de conjeturas acerca de los posibles aprendizajes que pueden alcanzar los alumnos partícipes de tal estructura curricular.

6.2 Currículo Propuesto³⁴

Como lo expresa (Stenhouse, 1991, p. 31) “La escuela tiene por misión poner a disposición del niño o del adolescente una selección del capital intelectual, emocional y técnico con el que cuenta la sociedad, [...], que he designado “tradiciones públicas””. La puesta en acto de tal cúmulo de saber, se puede observar a través de las leyes y decretos que rigen y han orientado las acciones escolares, o por medio de las propuestas dadas desde los libros de texto. A continuación se describen algunos elementos que evidencian cómo se ha integrado el concepto de número natural en las reglamentaciones curriculares colombianas y en algunos libros de textos usados para el trabajo escolar.

6.3 Reglamentación Curricular

En este sentido, el presente apartado se orienta hacia el rastreo y estudio de los elementos curriculares (decretos, leyes y reglamentaciones) que han servido de referente para el trabajo escolar en torno al concepto de número natural a lo largo del siglo XX y XXI en Colombia. Cabe anotar que si bien se elabora un análisis de tales reglamentaciones, no se tiene un cubrimiento total de las mismas, dada su extensión. Así, sólo se retoman ciertos periodos de tiempo donde es notorio y significativo el cambio en las propuestas curriculares.

6.3.1 Los años 1886 – 1950

Este periodo de tiempo se caracteriza por la emanación de leyes y decretos que ordenan la instrucción y la escuela pública en Colombia, dado que hasta el momento la educación pública no era masificada y no todas las personas tenían acceso a ella.

La educación que se brindaba en la época era esencialmente práctica, enfocada a la religión y a la formación de ciudadanos capaces de desenvolverse en los contextos del

³⁴ Esta noción se asume como el compendio de orientaciones teóricas generales que se propone a la comunidad educativa en general, y en particular a los docentes, al respecto del proceso educativo que se va a implementar en el contexto escolar. Dentro de dichas orientaciones se encuentran, entre otras, las reglamentaciones del currículo, los procesos de evaluación, las propuestas de libros de texto, los ejes o contenidos programáticos. Cada uno de estos aspectos viene dado desde lo teórico, desde lo que se dispone y diseña previamente, de ahí su denominación de “propuesto”.

país: en agricultura, comercio o como operarios de fábricas (Congreso de Colombia, 1904b, artículo 35, capítulo III). De acuerdo con dichos contextos, las escuelas se orientaban a los conocimientos básicos, en lo rural, y se profundizaba en algunos ejes, cuando la escuela era urbana. Este tipo de formación se brindaba de manera separada a niños y niñas de la zona.

Entre los primeros decretos que se expidieron para organizar la propuesta curricular colombiana se encuentra el decreto 595 (Congreso de Colombia, 1886), por medio del cual se organiza la Instrucción pública primaria en tres ramos: la instrucción, la inspección y la administración. Al respecto de la instrucción se plantea que:

“Las Escuelas tienen por objeto formar hombres sanos de cuerpo y de espíritu, dignos y capaces de ser ciudadanos y Magistrados de una sociedad republicana y libre, [...]. La enseñanza en las Escuelas no se limitará a la instrucción, sino que comprenderá el desarrollo armónico de todas las facultades del alma, de los sentidos y de las fuerzas de cuerpo”(Congreso de Colombia, 1886, Artículo 14° y 15°. Capítulo I. Título III).

De acuerdo con ello, se puede notar que el trabajo de la escuela no se centraba exclusivamente en brindar información sobre las diferentes áreas de conocimiento, sino que también tenía por objeto la formación de seres integrales, a partir de tres niveles: cuerpo, mente y alma. El encargado para brindar tal formación era el maestro quien debía gozar de buen reconocimiento, prestigio y ser modelo de comportamiento dentro de su comunidad. Para complementar la formación anterior, el decreto 1790 de 1930 (Congreso de Colombia, 1930) reglamenta el mínimo de educación obligatoria por parte de los padres o tenedores de niños. Se señala aquí que la enseñanza mínima inicia a los 6 años y que podía brindarse en la escuela o en el hogar. Además, debía velarse para que los niños permanecieran un mínimo de tiempo en la escuela para cumplir con la responsabilidad de alfabetización mínima que debía tener todo ciudadano colombiano.

En lo relativo a métodos y contenidos de las diferentes áreas, se tiene que era función del Ministro de Instrucción pública: “Adoptar los textos que han de servir para la enseñanza en las diferentes Escuelas, [...], Formar y circular programas minuciosos que comprendan todos los puntos a que ha de sujetarse la enseñanza de cada materia

en las diferentes Escuelas”(Congreso de Colombia, 1930, artículo 4° y 5°. Capítulo I. Título II). Esto es, el Ministerio era el encargado de reglamentar y dictaminar los métodos que el docente debía usar en su clase; además, determinaba de manera estricta, los contenidos que se debían abordar. Desde las leyes se promovía como forma general de intervención de aula, la exposición sencilla y lógica de los contenidos, de tal forma que se estimulara el cultivo de la inteligencia y el entendimiento, en detrimento de la memorización y la repetición mecánica de los saberes (Salazar, 2008, p. 97).

Además, se tiene que no se da preponderancia a una materia en particular y se promueve el aprendizaje de agricultura y artes y oficios. También se reconoce la gradación de la enseñanza de acuerdo con la edad y las habilidades mentales de los estudiantes. (Salazar, 2008, p. 96).

La caracterización y formas de aplicación de esta perspectiva de instrucción se complementa con la ley 39 de 1903 (Congreso de Colombia, 1903), donde se presenta de forma sistemática, normas centrales del sector educativo. Se destaca que la enseñanza debe basarse en la intuición y en el empleo de los procesos de observación, reflexión e invención, tendientes a la comunicación de nociones correctas y exactas. De igual forma, se resalta el mecanismo de repetición, a través de formas variadas, como medio para lograr la familiarización con el contenido aprendido. En esa medida y para cumplir con el control sobre lo que se enseñaba a nivel nacional, se suministraban libros de texto unificados para todo el país y se realizaban evaluaciones generales al final de cada periodo a todos los niños de la escuela.

Esta propuesta de trabajo escolar reconoce la experiencia y la intuición como principios relevantes en el proceso de aprendizaje, pero deja atados los mecanismos a través de los cuales se pueden llevar a cabo tal exploración. De igual forma, los resultados y las conclusiones a las que llegase el alumno, deberían ser las mismas que indicara el maestro. Es decir, a pesar de partir de un principio de exploración para la construcción del conocimiento, los alumnos sólo podían proceder de una determinada forma. Ello iba en detrimento de la construcción de significados propios, de ahí, que se recurriera a la repetición como forma de fijar el conocimiento. De este marco se puede inferir que, el saber se asumía fijo, predeterminado y con una formas de representación únicas.

El carácter rígido y estático del saber se evidencia en el plan de estudio emanado en el decreto 491 de 1904 (Congreso de Colombia, 1904a) donde se especifican los contenidos que deben ser enseñados en las diferentes Escuela colombianas. El pensum reglamentario para las escuelas al respecto de las matemáticas, se distribuirá así (Congreso de Colombia, 1904a):

Escuela rural

Año 1

Aritmética: se hará que el niño adquiera sobre la unidad ideas ciertas y de manera objetiva, conocimientos de los dígitos y combinación de estos hasta 50. En este círculo ejercitará el maestro la inteligencia de los niños en las operaciones fundamentales.

De las escuelas urbanas

Sección elemental de primer año

Aritmética – Cálculo mental y escrito comprendido entre los primeros treinta números cardinales; nociones sobre números y problemas diversos dentro del mismo círculo.

ESCUELA 2ª

Sección elemental de segundo año

Aritmética – Cálculo mental y escrito relativo a los cincuenta primeros números cardinales; sistema de numeración; ejercicios y problemas orales y escritos, referentes a las cuatro operaciones con números enteros, dentro del citado círculo.

De acuerdo con lo anterior, el trabajo escolar alrededor del número natural se centraba en el reconocimiento de unidades a partir de las experiencias inmediatas: todo lo que en el mundo se pueda contabilizar e identificar de manera directa como uno, un carro, un árbol, una cama, etc. Esas ideas se constituían en la base para el conteo de elementos de una colección.

Otro aspecto señalado en los referentes curriculares era el relativo a la escritura de cantidades y la operatividad con ellas. Luego el tipo de actividades que se proponían en la escuela, estaban orientadas a la aplicación de reglas para la formación de cantidades en el sistema de numeración decimal, iniciando en un rango bajo y avanzando paulatinamente. La generación y abordaje de estas cantidades estaba asociada a la cardinación de colecciones. De ahí que, el aspecto privilegiado en la conceptualización del número natural era el principio de cardinalidad.

Además, dado que la única forma permitida de representar cantidades era a través sistema de numeración decimal, ya fuera de manera oral o escrito, y que en la reglamentación no se refiere ningún otro aspecto para ser estudiado en función del número natural, se puede concluir que el concepto de número natural era homologado por dicha representación. Esto es, el número entero –como se denominaba en esa época- era asumido como su representación numérica (número y representación eran lo mismo). Por tanto, el objetivo central de la escuela en ese primer año, y en general, de la primaria, era tener nociones sobre el número entero que se circunscribían sólo a la representación y a la solución de problemas con varias operaciones básicas. Si se tenían grandes habilidades para el cálculo escrito u oral, se asumía que el estudiante tenía gran dominio de los conocimientos necesarios sobre el número natural (desarrollo de la inteligencia en torno al número como se menciona en el decreto).

Al analizar esta propuesta curricular a la luz de los elementos históricos epistemológicos del número natural, se puede concluir que su fundamentación sobre el objeto matemático número natural, está en correspondencia con la postura de Platón en lo relativo al número numerado. Esto se evidencia en la naturaleza concreta del número, pues éste se emplea para establecer relaciones y realizar cálculos entre cantidades de cosas que se presentan en situaciones reales. También, se tiene que la unidad es relativa a los objetos sensibles y sólo puede ser dividida en función de dichas singularidades. Además, el estudio de las operaciones es un eje central y se presenta como un arte que debe ser enseñando. Así, se puede decir que el número natural es asumido como expresión de la cantidad o multitud concreta de objetos.

Para cerrar las orientaciones curriculares que se promulgaron en este periodo de tiempo, se retoma la ley 56 de 1927 (Congreso de Colombia, 1927) que decretó la educación primaria como obligatoria para todos los niños del país y la ley 32 de 1936 (Congreso de Colombia, 1936) que destaca los principios de libertad e igualdad que deben regir en la instituciones escolares: No debe practicarse ningún tipo de discriminación ya sea por raza, religión, clase o ilegitimidad de nacimiento.

6.3.2 Los años 1950 a 1968

En este espacio de tiempo se gestan dos momentos de reformas curriculares. El primer momento contempla reestructurar entre otros aspectos (Ministerio de Educación Nacional, 1950, pp. 7-8) los siguientes:

Instrucción y Educación Religiosa: se hace el llamado a que no basta con dictar la clase de Religión católica, sino que el profesor debe aprovechar toda acción y situación para formar e infundir hábitos virtuosos, realizar prácticas cristianas y prevenir las malas costumbres.

Cursos de vacaciones: se formulan espacios de capacitación docente acerca de la forma de ejecutar los programas y el sentido de dicha reforma.

Tipos de programas: Se reforman los programas de la escuela rural en aras de brindar mayor cantidad de conocimientos a las zonas campesinas acordes con sus requerimientos y unificar el currículo nacional según los grados de instrucción.

Finalidad de la reforma: Se aspira despertar el espíritu de los maestros por formar a sus estudiantes como seres integrales, dignos y laboriosos antes de privilegiar la mera instrucción.

Estos aspectos se explicitan a través del decreto 3468 de 1950 donde se adopta el plan de estudios de la escuela primaria urbana y rural.

La escuela primaria se organiza a través de tres grados de instrucción: “Escuela Rural Alternada, de dos años de estudio; Escuela Rural de un solo sexo, de cuatro años de estudio; Escuela Urbana, de cinco años de estudio” (Ministerio de Educación Nacional, 1950, p. 9). Teniendo en cuenta la población a la cual va dirigida la enseñanza, se establecen programas donde se especifica la intensidad horaria y los contenidos que deben ser desarrollados en cada grado y año de escolaridad. Cada programa incluye, en general, religión, lectura y escritura, aritmética, labores para niñas y niños, educación cívica, urbanidad y educación física.

Para el caso de la aritmética en primer año, los programas (Ministerio de Educación Nacional, 1950, pp. 9-11) se plantean así:

Grados de instrucción	Clases semanales	Duración de la clase	Contenido
Escuela Rural Alternada	4	30 min	Círculo de 1 a 100 Ejercicios intuitivos y variados para que los niños adquieran las nociones de cantidad, tamaño, peso y aprendan a expresar tales nociones, aplicándoles a la vida campesina. Enseñanza de los números de uno a nueve. Signos más

Grados de instrucción	Clases semanales	Duración de la clase	Contenido
			<p>(+), menos (-), igual (=). Ejercicios sencillos y objetivos, aplicados especialmente a la vida rural, de suma, resta, multiplicación y división con números aprendidos. Nociones de medio (1/2) y un cuarto (1/4) La decena y su escritura. Enseñanza de los números de 11 a 19. La docena Lectura y escritura de los números romanos hasta XII. Enseñar las horas en el reloj. Enseñar el número 20. Los números 30, 40, 50, etc., hasta 100. Contar, leer, escribir los números hasta 100. problemas de aplicación sacados del medio ambiente y tendiente a la moralización de las costumbres. Sumas, restas, multiplicación y división, orales y escritas, dentro de este círculo. Medidas, tales como el paso, el pie, la cuarta, la pulgada, la brazada. Vara, yarda y metro. Libra, kilo, arroba.</p>
Escuela Rural de un solo sexo	6	30 min	<p>Círculo de 1 a 100 Sígase el programa que, para este mismo año, se ha señalado en las escuelas rurales alternadas. Advertencia: cada una de las nociones aritméticas contenidas en el programa se afianzará, antes de pasar a la siguiente, con ejercicios variados y se aplicarán problemas concretos, sacados del medio ambiente que sean útiles al campesino su vida económica y moral.</p>
Escuela Urbana	6	30 min	<p>Círculo de 1 a 100 Ejercicios intuitivos y variados para adquirir las nociones de cantidad, tamaño y peso a fin de que se aprenda emplear adecuadamente las palabras y frases que expresan tales nociones. Enseñanza de las cantidades de 1 a 9. Paralelamente se enseñarán los números cardinales y ordinales. Enseñanza de los signos más (+), menos (-), igual (=). Ejercicios sencillos y objetivos de suma, resta, multiplicación y división con las cantidades aprendidas. Nociones de medio (1/2) y un cuarto (1/4). La decena y su escritura. Enseñanza de las cantidades 11 a 19 La docena Ejercicios intuitivos y variados de suma, resta, multiplicación y división con las cantidades aprendidas. Lectoescritura de los números romanos hasta 12. Enseñar las horas en el reloj. Enseñar la cantidad 20 (veinte). Las cantidades 30, 40, 50, etc. hasta ciento Contar, leer y escribir las cantidades hasta ciento Suma y resta, con las cantidades aprendidas. Ejercicios orales y escritos. Problemas de aplicación sencillos y variados, con datos que correspondan a la realidad.</p>

Grados de instrucción	Clases semanales	Duración de la clase	Contenido
			Medidas como: el paso, el pie, la cuarta, la pulgada, la brazada. Vara, yarda y metro, como medidas más exactas. Libra, kilo y arroba.

La propuesta de trabajo escolar en torno al número natural dada en esta nueva reglamentación deja de lado el tema sobre el reconocimiento de unidades y se concentra más en el número mismo. Si bien se menciona la intuición como principio para acercarse al número natural, se plantea un estudio un poco más sistemático sobre los principios que rigen el funcionamiento del sistema de numeración decimal como mecanismo eficiente para la representación de cantidades.

Por otro lado, se continúa asumiendo la asociación número – símbolo como la base para la conceptualización del número natural. También, se retoman los ejercicios de escritura de cantidades en el círculo numérico de 1 a 100, pero destacando la formación de decenas y centenas como núcleos básicos del sistema, y por ende, del número mismo. Así, los números se obtienen a partir de la generación de la serie numérica: aumentando 1 cada vez. De ahí que el aspecto cardinal se trabaje de manera paralela con el aspecto ordinal.

En cuanto a los elementos nuevos que introduce la reglamentación, se tiene el énfasis en el reconocimiento y medición de magnitudes. Este nuevo contexto se propone como otro ámbito donde el número natural podía ser usado en función de los procesos de medida con unidades determinadas (ya fueran estandarizadas o no). Sumado a lo anterior, se presenta gran variedad de problemas de la realidad donde se requiere el uso de varias operaciones para su solución. Esa gama de problemas permitía la generación de modelos intuitivos en torno a las operaciones. Ello permite concluir que se pretendía avanzar en la conceptualización del número natural a través de la profundización en las relaciones matemáticas presentes en los esquemas de aditivo y multiplicativo a partir del análisis y solución de problemas cotidianos.

Ahora bien, al contrastar esta propuesta curricular con los elementos históricos epistemológicos del número natural, se puede afirmar que su postura se relaciona con lo propuesto por Stevin, dado que el número natural ya se empieza a formalizar a través de elaboraciones mentales, a las cuales se accede mediante el uso del sistema de

numeración decimal. Además, el concepto de número natural resulta de los procesos de conteo y de medición de magnitudes, por ello se asume como un elemento que permite cuantificar cualquier magnitud, ya sea discreta o continua. Dicha conceptualización se complementa con la generación de esquemas generales para la estructura aditiva y multiplicativa, a partir del estudio de situaciones cotidianas y la aplicación de las propiedades correspondientes a las operaciones básicas.

Retomando los momentos de reformas curriculares que se proponen en este periodo de tiempo, se encuentra un segundo espacio, que obedece a la formulación del decreto 1710 de 1963 por el cual se adopta el Plan de Estudios de la Educación Primaria Colombiana. Esta reforma se gesta en función de:

“Que los actuales Planes y Programas de estudio de Educación Primaria, que rigen desde 1950, establecen un triple sistema educativo que es necesario unificar para situar la escuela primaria en un plano de igualdad, tanto en el medio urbano como en el rural; Que dichos Planes y Programas deben ser actualizados y reestructurados de acuerdo con el progreso de las ciencias, las necesidades del desarrollo económico y social del país y con los avances de la pedagogía, y que en las Escuelas Piloto del Ministerio de Educación Nacional se han experimentado planes y programas de estudio que siguen las recomendaciones del Primer Plan Quinquenal de Educación en Colombia y de los Seminarios Interamericanos de Educación, cuyos resultados dan garantía para que sean acogidos”(Congreso de Colombia, 1963)

Se pretendía entonces, unificar y actualizar los planes y programas de educación primaria en Colombia, en razón de los cambios dados a nivel teórico en el campo pedagógico y de las necesidades y derechos de la población colombiana (principio de igualdad).

Así la educación primaria se formulaba como la etapa inicial del proceso educativo al que tenía derecho todo ciudadano a partir de los 7 años de edad. Los objetivos centrales(Congreso de Colombia, 1963) de este ciclo de educación eran, entre otros: la formación integral básica a través del dominio de conocimientos, la educación en higiene y protección de la salud y el medio ambiente, el desarrollo de la capacidad reflexiva para adoptar posturas personales acerca de la naturaleza del conocimiento, la capacitación laboral de acuerdo con las inclinaciones vocacionales, el desarrollo de la sensibilidad artística y la estimulación del espíritu de convivencia.

De acuerdo con ello se puede decir que los fundamentos y objetivos de esta propuesta educativa para la primaria, reconocía que el estudiante debía ser formado de manera integral, incluyendo en dicha categoría, el desarrollo de capacidades para cuidarse, tomar decisiones y respetar a los demás. De igual forma, se observa que esas metas globales asumen que cada estudiante es diferente y que puede tener habilidades y vocaciones distintas a las del resto del grupo. En general, se propone una educación primaria más integral y abierta, que reconoce las individualidades de los estudiantes y su vocación.

Se decreta además que la Escuela primaria colombiana será única y se harán solo adaptaciones a los programas según las necesidades del contexto (rural o urbano). Las asignaturas se organizan de manera global y dentro de ellas se agrupan las diferentes materias. Para el caso de las matemáticas en primer grado, se tiene que:

Asignatura	Grado	Clases semanales	Materias
Matemáticas	I	6	Aritmética y geometría intuitiva

Es de resaltar que los cambios que se mencionan en el currículo de la escuela primaria sólo se dan a nivel organizativo, pues en los decretos no se refieren cambios al respecto de los conceptos o a la forma de abordarlos. Así, que se continúa con la perspectiva descrita en párrafos anteriores.

6.3.3 Los años 1968 y 1994

Entre los hechos educativos destacables al inicio de este periodo de tiempo y finales del pasado, fue la tercera Misión alemana en Colombia (1968), que se ejecutó como apoyo para el trabajo escolar en los contextos rurales. De ésta se puede afirmar que brindó referentes metodológicos y pedagógicos para los docentes rurales a través de la distribución de guías de trabajo de aula, las cuales fueron adoptadas como dogmas y terminaron por desplazar los programas oficiales dados desde el Ministerio de Educación en el decreto 1710 de 1963 (Vasco, 2008). La propuesta pedagógica que orientaban dichas guías aun se puede observar en las acciones de algunos maestros al cimentar sus prácticas sobre el esquema de estímulo respuesta (perspectiva conductista).

Otro momento sobresaliente en este periodo fue la formulación de la ley 088 de 1976 (Congreso de Colombia, 1976) por la cual se reestructura el sistema educativo y se reorganiza el Ministerio de Educación Nacional. Al respecto de la educación se tiene que es asumida como un derecho que debe ser garantizado por el Estado. Se proponen dos modalidades de educación: la formal, organizada por ciclos y conducente a la obtención de un título; en contraste la informal, se desarrolla de manera complementaria e independiente de la formal.

Para el caso de la educación formal, se proponen varios niveles progresivos: el preescolar, la básica, la media y la superior. La educación básica comprende cinco grados de primaria y cuatro de secundaria, iniciando a los 6 años de edad. El ciclo de primaria será obligatorio y gratuito en los establecimientos del Estado y tiene por objeto central la orientación de la vocación de los alumnos (Congreso de Colombia, 1976, Artículo 7°). “La educación media continúa la educación básica, diversificándola con el doble propósito de preparar al alumno para los estudios superiores y para el ejercicio laboral en profesiones técnicas y auxiliares” (Congreso de Colombia, 1976, Artículo 10°). Se observa en esta reorganización de los ciclos de educación formal, la intencionalidad de orientar la formación de los estudiantes hacia la exploración de vocaciones: laborales, artísticas, pedagógicas, científicas y en esa medida, brindar pautas básicas sobre tales inclinaciones.

Como elemento regulador se formula el decreto 1002 de 1984 (Congreso de Colombia, 1984), por el cual se establece el Plan de Estudios Para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional de la Educación Formal Colombiana. En este documento se especifica la función y objeto de cada uno de los niveles de la educación y se designan las áreas de formación “como el conjunto estructurado de conceptos, habilidades, destrezas, valores y actitudes afines, relacionados con un ámbito determinado de la cultura” (Congreso de Colombia, 1984, Artículo 3°, capítulo II). Desaparecen así, las asignaturas y las materias y se asumen las áreas de formación escolar.

Dentro de las áreas comunes para la educación primaria se proponen las matemáticas (Congreso de Colombia, 1984, Artículo 5. Capítulo II), dado que en todas las actividades cotidianas se requiere efectuar cálculos y estimaciones con los datos

involucrados. Este carácter práctico de las matemáticas se convierte en uno de los aspectos básicos para la fundamentación de la propuesta curricular del área.

Se insiste que el trabajo escolar retome los aspectos operativos de las matemáticas, pero dando lugar a la comprensión de los procesos y los conceptos involucrados en dichos cálculos. Se plantea la formulación y solución de problemas como contextos para incentivar tales comprensiones y a la vez, ejercitarse en los procesos algorítmicos, de estimación y de aproximación (Ministerio de Educación Nacional, 1984).

Para la comprensión de los conceptos matemáticos se propone dominar las nociones básicas de la teoría de conjuntos como forma de proporcionar un lenguaje común al estudio de los diversos sistemas matemáticos y preparar al estudio de la teoría axiomática de conjuntos, en la educación media. Se pretende abordar la matemática mediante un lenguaje preciso y universal, que no genere duda alguna ni ambivalencias, enfocado a la generalización y a la formalización. (Ministerio de Educación Nacional, 1984, pp. 144-145). Este enfoque teórico pretende unificar las diferentes ramas de la matemática a partir de la identificación de las estructuras comunes en cada una de ellas, y es justo el lenguaje de la teoría de conjuntos quien ofrece esta forma de trabajo. Para el manejo didáctico y curricular de esta postura teórica matemática, el Ministerio de Educación Nacional propone el concepto de sistema.

El concepto de sistema se define como “un conjunto de objetos con sus relaciones y operaciones” (Ministerio de Educación Nacional, 1984, p. 147). En esta formulación conjunto se puede asumir como una colección o grupo; objeto como elementos o entidades; relación como vínculo o referencia y operación como transformación o modificación. Dicho esquema y nociones son aplicables a cualquier rama de la matemática. Se propone así, que todo sistema en matemática, queda definido mediante un conjunto de objetos, un conjunto de operaciones y un conjunto de relaciones. Dentro de las ventajas que se mencionan al respecto del enfoque de sistema se tienen que permite organizar y unificar los contenidos matemáticos a partir de un lenguaje común; facilita la articulación de la matemática con otras áreas del currículo; permite desarrollar los contenidos según las características de los alumnos, teniendo en cuenta la realidad en que viven (Ministerio de Educación Nacional, 1984, p. 149). Esta

organización brinda entonces, una visión global de los contenidos que se abordan en cada grado y sus relaciones con otros temas, para que el profesor disponga de un referente y diseñe actividades articuladas, que desencadenen en los alumnos conocimientos progresivos y sólidos, que permiten ver las diferentes áreas de las matemáticas como totalidades estructuradas.

Teniendo en cuenta las ventajas del enfoque de sistemas, el Ministerio de Educación Nacional organiza el contenido del currículo de matemáticas en 5 sistemas a saber: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos (conjuntos, relaciones y operaciones). En cada uno de ellos se detallan contenidos, secuencia, grado de profundidad, interrelaciones y desarrollo del enfoque (Ministerio de Educación Nacional, 1984, p. 152). Para el caso particular, el concepto de número natural se aborda en los sistemas numéricos.

En el marco de los sistemas numéricos se plantea trabajar el número natural de manera gradual, iniciando en el círculo de 0 – 100 en el grado primero, e ir ampliando dicho rango a través de la primaria. Con ello se espera que los estudiantes conozcan los elementos básicos del sistema de los naturales. Una vez se ha abordado la escritura de los números, se introducen las operaciones de adición y sustracción y sus correspondientes propiedades, así los estudiantes podrán dimensionar las transformaciones que se pueden realizar con los elementos del sistema. Por último, se sugiere la formulación y solución de problemas como campo de aplicación de las operaciones, como espacio para identificar y establecer relaciones y afianzar el cálculo mental. De manera paralela, se abordan los elementos referidos a los conjuntos y es a través de la equinumerosidad que se construye el sentido de cada uno de los números naturales. Dicha equinumerosidad se expresa mediante el cardinal. En el siguiente cuadro se detalla la propuesta de contenidos básicos de matemáticas relacionados con el concepto de número natural, para la educación básica primaria en el grado primero.

TEMA GRADO	SISTEMAS NUMÉRICOS	CONJUNTOS	RELACIONES Y OPERACIONES
1°	Simbolización de números. Naturales de 0 a 100 con adición y sustracción.	Clasificaciones. Noción de conjuntos; elementos.	Iniciación a la representación de relaciones.

	Algoritmos con aplicaciones. Orden aditivo ...es mayor que... ...es menor que... Ordinales Operadores como -1, +1, -2, etc.	Conjuntos, equinumerosos. Cardinal. Noción de unión de conjuntos disyuntos. Representación gráfica. Arreglos sencillos	Diversas maneras de efectuar operaciones.
--	---	--	--

Estudiando el cuadro de contenidos y tomando como base la fundamentación del enfoque de sistemas, se puede decir que el tratamiento escolar del número natural se hace en función de su estructura formal como elemento de un sistema numérico. Se inicia con el reconocimiento de la representación simbólica (conjunto de objetos), se estudian luego las operaciones y sus correspondientes propiedades (conjunto de operaciones); por último, se abordan las relaciones de orden (conjunto de relaciones).

Cada uno de estos momentos involucra un tipo de sistema en particular. Así, al proponer el trabajo con simbolización de números y la iniciación a la representación de relaciones, se está tratando con sistemas simbólicos, los cuales brindan al estudiante el soporte básico para escribir y comunicar socialmente la cantidad. Por su parte, cuando se están estudiando las relaciones de orden (mayor y menor que) y los operadores -1, +1, -2, se está enfocando el proceso en los aspectos mentales que dan sentido y fundamentan el concepto de número natural (semejanzas, diferencias, orden). Como base para los dos sistemas anteriores (simbólico y conceptual), se encuentran los sistemas concretos que ya han construido los estudiantes a través de sus experiencias pasadas (números para contar y ordenar), y a partir de las cuales, proceden a la construcción de los sistemas conceptuales (C. Vasco, 1994). Dichos sistemas concretos se reconocen a través de las acciones y manipulaciones, mediante el empleo de ideas y preconceptos que tienen los estudiantes en torno del número natural. En el caso particular de la propuesta curricular, se identifican como aspectos del sistema concreto la adición y sustracción con naturales de 0 a 100 y sus correspondientes algoritmos vistos a la luz de solución de problemas (algoritmos con aplicaciones).

Esta perspectiva de estudio del número natural se puede justificar desde los desarrollos teóricos dados por Cantor, puesto que el número es asociado a la cardinalidad de una clase de conjuntos equipotentes: aquellos que tienen la

característica de poseer el mismo número de elementos. En correspondencia, las operaciones con naturales se abordan a partir de las operaciones de unión e intersección de conjuntos. En este marco, el número natural es de naturaleza abstracta y cobra sentido en función de la estructura lógica conjuntista. Además, se diferencia entre el concepto de número natural y sus formas de representación.

6.3.4 Los años 1994 a 2006

Este periodo inicia con un hecho político que marcó cambios en varios aspectos y dinámicas nacionales: La reforma de la constitución nacional en 1991. Entre los aspectos que se reformulan en dicho documento se encuentra la educación. Ésta se proclama como un derecho social y cultural por medio del cual se accede al conocimiento y al legado cultural de la humanidad. Se plantea como obligatoria desde el grado de transición hasta noveno de educación básica. Se enuncia además, que los servicios educativos pueden ser ofrecidos por medio de instituciones del Estado, en cuyo caso no tendrá costo alguno, o por entidades privadas. La formación que se brinde en cada una de estas instituciones está determinada por la comunidad educativa respectiva, respetando los principios y fines generales de la educación (Congreso de Colombia, 1991, Artículo 67 - 68. Capítulo 2).

De acuerdo con las ideas anteriores, se observa que la educación se asume desde una perspectiva más abierta y ya no es dada a través de decretos únicos por el Estado colombiano. Al respecto, es coherente con el principio de libertad e individualidad que rige las dinámicas de los ciudadanos colombianos.

Dado el marcado carácter de libertad expresado en la constitución de 1991, y en aras de formular líneas de acción general para el desarrollo del país, se convoca la Misión de ciencia y tecnología en 1993. Dicha comisión tuvo la misión de analizar y diagnosticar la situación de Colombia en lo que a ciencia, educación y tecnología se refiere. Con base en ello, la comisión debía formular una propuesta de acción (a manera de recomendaciones) para lograr el desarrollo científico y tecnológico del país. Estas formulaciones estaban orientadas a:

- “1. Desarrollar y fortalecer la capacidad nacional en ciencia y tecnología.

2. Crear condiciones de competitividad en el sector productivo nacional, por medio de políticas sectoriales activas que contemplen la tecnología como factor crucial para el desarrollo de ventajas comparativas adquiridas.
3. Fortalecer la capacidad para mejorar los servicios sociales y generar conocimiento sobre la realidad social del país.
4. Generar y aplicar conocimiento científico y tecnológico orientado a asegurar un desarrollo sostenible, basado en el conocimiento, en la preservación y uso racional de la biodiversidad y de los recursos naturales no renovables, así como el desarrollo de patrones de asentamiento humano sostenibles.
5. Integrar la ciencia y la tecnología a la sociedad y a la cultura colombiana a través de un programa de enseñanza, divulgación y popularización de las mismas.”(Planeación, 1994, p. 4)

En estos ejes de acción se observa un llamado sobre el papel y la función de la educación como motor de cambio y desarrollo social, como mecanismo de intercambio social y de democratización y generación de conocimiento, como espacio de reconocimiento de la identidad nacional. De ahí que la educación sea señalada como uno de los focos para lograr el desarrollo del país.

Ahora bien, teniendo como referente lo promulgado en la constitución de 1991 al respecto de la educación, y las recomendaciones dadas por la comisión de ciencia y tecnología, era necesario reglamentar y fijar unas orientaciones generales acerca de los servicios y procesos educativos colombianos. En este marco surge la ley 115 de 1994 donde se fijan las normas generales que regulan el Servicio Público de la Educación, en aras de que haya consonancia entre educación y necesidades e intereses sociales y humanos. Dicha ley retoma los principios básicos de libertad de educación consagrados en la Constitución Política y reconoce al alumno como partícipe y centro del proceso educativo(Congreso de Colombia, 1994a, Artículo 1 y 91).

En coherencia con el reconocimiento del principio de libertad, la ley 115 restringe la acción del Ministerio de Educación Nacional en cuanto a la formulación de parámetros curriculares fijos y lo limita a plantear elementos de regulación del currículo. Dentro de esos elementos se encuentra el plan de estudios básico que incluye las siguientes áreas: Ciencias Naturales y ED. Ambiental, Ciencias Sociales, Historia, Geografía, Constitución Política y Democracia, Educación Artística, Educación Ética y Valores Humanos, Educación Física Recreación y Deportes, Educación Religiosa,

Humanidades, Lengua Castellana e Idiomas Extranjeros, Matemáticas, Tecnología e Informática (Congreso de Colombia, 1994a, Artículo 23. Título II).

Dicho plan de estudios debe ser enmarcado y contextualizado por cada institución en el Proyecto Educativo Institucional (PEI). En este documento se expresa el modelo educativo propio, se especifican los principios y fines de la formación que se espera brindar. Además, debe reconocer e integrar las necesidades particulares de la comunidad educativa. Así el PEI se convierte en la carta de navegación de las instituciones educativas y en el punto de base para los procesos de evaluación.

Sobre la base de la autonomía curricular y atendiendo a las disposiciones legales, cada institución debe formular su propio plan de estudios donde se determinen objetivos, metodología, distribución de tiempos y criterios de evaluación (Congreso de Colombia, 1994a, Artículo 78. Capítulo II). Es decir, cada institución es autónoma para organizar su currículo teniendo en cuenta las necesidades locales y los ejes de desarrollo nacional.

Cabe anotar, que si bien la ley 115 consagra elementos básicos acerca de la libertad y autonomía educativa, el Estado colombiano debe tener unos referentes generales que le permitan perfilar el proceso educativo que se está desarrollando en el país. De ahí que se formule la resolución 2343 de 1996, donde se presentan los logros que debe alcanzar cualquier estudiante colombiano en los diferentes grados y niveles. Esta resolución presenta una lista de indicadores que permiten formular supuestos acerca de las metas y niveles que se esperan alcanzar. Dichos parámetros sólo se proponen como un referente inicial que reflejan parte de la complejidad del proceso de aprendizaje. Así, los resultados obtenidos al respecto de tales metas, servirán para diseñar futuros planes de acción y mejoramiento del proceso educativo.

Si bien este compendio de indicadores y logros no se formuló con la intención de determinar el currículo de las instituciones, en la práctica sí se constituyó en ello, dado que las instituciones y los libros de texto volcaron la atención en “entrenar” a los estudiantes para que pudieran alcanzar tales metas. Además, al leer con detenimiento los enunciados de cada logro e indicador, se pueden rastrear e identificar habilidades, destrezas y contenidos susceptibles de volverse objeto de enseñanza en la escuela.

En consonancia con los elementos planteados en la ley 115 y en aras de brindar un sustento teórico que oriente el trabajo escolar en las diferentes áreas de conocimiento, el Ministerio de Educación Nacional formula en 1998, los Lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998). En ellos se condensa una propuesta acerca del papel del currículo colombiano, el tipo de formación que se espera brindar, los desarrollos teóricos y didácticos que orientan la enseñanza y el aprendizaje de cada área. Los elementos que allí se describen son generales y transitorios³⁵ y se espera que, en función de las necesidades institucionales y locales, se adapten, contextualicen y resignifiquen los aspectos dados en esta propuesta.

Con la formulación de los Lineamientos curriculares cambia el rol del Ministerio de Educación, de diseñador de currículo a orientador del mismo. Esto es, ya no se formula un único currículo nacional sino que se formulan orientaciones básicas generales y se brinda el espacio para que las instituciones diseñen propuestas educativas puntuales, que respondan a necesidades locales, pero que a la vez, cumplan con los parámetros generales nacionales. Se trata de que el proceso educativo integre los sentidos y las experiencias particulares, y en función de ello, se articulen los desarrollos teóricos generales de cada una de las áreas, para lograr así, la formación integral de los estudiantes y de ciudadanos colombianos.

Para el caso particular de las matemáticas, los Lineamientos curriculares proponen una nueva visión del conocimiento matemático, donde éste se asume como una creación humana, resultado de una evolución histórica y que se gesta en el proceso de solución de problemas contextuales. Así, el conocimiento matemático cumple un papel social en el marco de una cultura. En ese sentido, se cambia la expresión “la matemática” por “las matemáticas” dado que existen diversas formas de consolidar y usar el conocimiento matemático, no sólo la perspectiva formal.

En los Lineamientos se reconoce también, el proceso de transposición didáctica, como dinámica inherente del proceso de enseñanza y aprendizaje del saber matemático, dado que este saber por su naturaleza, no es apto para ser enseñando. La transposición

³⁵ Lo transitorio se refiere a que dichas formulaciones obedecen a unas necesidades sociales y contextuales unidas a un tiempo específico. Además, como la educación es un proceso cambiante, los lineamientos no pueden ser fijos. Ellos deben evolucionar acorde con los desarrollos sociales y culturales propios del grupo donde se formulan.

se refiere al proceso de adaptación y contextualización del saber matemático que va a ser enseñado en los contextos escolares. Así, las orientaciones curriculares dadas por el Ministerio de Educación toman como base los resultados de este proceso transpositivo.

De igual forma, los Lineamientos consideran que el conocimiento matemático se “constituye en una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento”(Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 16) no sólo por las estructuras formales que dan sentido al saber mismo, sino por la dinámica de construcción de los mismos a través de la actividad matemática desplegada por el estudiante durante el proceso de aprendizaje: la formulación de conjeturas, la argumentación de ideas, las validación y generalización de resultados, entre otros. Complementario a la actividad matemática, se presentan las tecnologías como un recurso que permea las formas de interacción y de representación de los objetos matemáticos, a la vez que cambia las formas sociales de manipular la información.

Se tiene entonces que las orientaciones básicas dadas en los Lineamientos curriculares de matemáticas redimensionan el saber matemático presente en la escuela y la forma de enseñarlo. Se busca en líneas generales, que la educación matemática brindada en los contextos escolares mejore la calidad de vida de los ciudadanos, de tal forma que el individuo pueda relacionarse con su entorno de manera crítica y creativa para participar activamente en las decisiones y dinámicas culturales locales y nacionales.

Las consideraciones hechas sobre la nueva visión del conocimiento matemático son la base para propuesta de organización de una estructura curricular para el área. Así, los Lineamientos sugieren que el currículo de matemáticas debe dimensionar las posibles relaciones que tiene este saber con las demás áreas del currículo, para lograr en los estudiantes aprendizajes integrales y duraderos, no sólo basados en la memorización y/o acumulación de definiciones, sino mas bien fundamentados en procesos de pensamiento. De esta manera, se asume el conocimiento matemático como una herramienta de pensamiento que permite representar, organizar, sintetizar, interpretar y comunicar las experiencias y relaciones sociales.

En este marco, los Lineamientos curriculares de matemáticas proponen organizar la estructura curricular a partir de tres ejes, a saber: los procesos generales, donde se referencian procesos que están presentes en la actividad matemática y que son necesarios para dimensionar las relaciones y significados del saber matemático; los conocimientos básicos que describen y organizan las nociones y los conceptos matemáticos que van a ser objeto de estudio; los contextos donde se refieren los diferentes ambientes en los cuales el estudiante puede dar sentido al saber matemático. Las interpretaciones y relaciones de estos tres ejes son tarea de los asesores e instituciones para generar una propuesta curricular acorde con las necesidades institucionales.

Para la organización de los conocimientos básicos que se van a trabajar en los contextos escolares, se proponen 5 pensamientos que abarcan el saber matemático: numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio. El cambio que aquí se introduce, en contraste con las propuestas curriculares anteriores, radica en que se asume como objeto de estudio no sólo los contenidos matemáticos sino también las formas de operar, los sentidos y las posibles relaciones que se puedan establecer entre dichas nociones y los diferentes campos del saber y las situaciones de la vida cotidiana. Esto es, se espera que el trabajo escolar en torno a las matemáticas le brinde al estudiante herramientas para pensar e interpretar el mundo, teniendo como base el saber matemático.

Para el caso del concepto de número natural, el trabajo escolar se inscribe en el pensamiento numérico. Este pensamiento se centra en estudiar los números, las operaciones que se puedan realizar con ellos y las formas de pensar y usar esas nociones numéricas en la solución de situaciones, en la toma de decisiones, en la interpretación y la comunicación de información. Como lo menciona (Mcintosh (1992) citado por, Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 26), “el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones”.

Para lograr tal comprensión y desarrollo del pensamiento numérico, se requiere desarrollar procesos a lo largo del tiempo (ciclos de educación) y centrar la atención en tres ejes (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 27), a saber:

- La comprensión del número y la numeración.
- Comprensión del concepto de las operaciones.
- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones.

Al respecto de la comprensión del número y la numeración, se plantea abordar situaciones donde se use y se evidencie los diferentes sentidos y significados del número. Para el caso del número natural, se sugiere verlo como “secuencia verbal, para contar, para medir, como ordinal, como código, como tecla” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pp. 27-29). La exploración de situaciones cotidianas donde el estudiante pueda manipular materiales y recursos (físicos o tecnológicos), donde requiera comunicar los resultados de los procesos, de las relaciones establecidas y de los cálculos realizados, son potentes para reflexionar y dimensionar cada uno de estos significados del número natural.

La construcción de los diferentes sentidos y significados del número en general, y en particular del número natural, requiere un período de tiempo amplio. Los Lineamientos curriculares señalan que una evidencia de la construcción del concepto de número se advierte cuando “los niños logran integrar los aspectos ordinal y cardinal del número, es decir, cuando al contar asocia a la última palabra número un doble significado: para distinguir un objeto que tiene la misma categoría de los restantes y para representar la cantidad de objetos de la colección” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 28).

La comprensión del número y en general, de las nociones numéricas, implica además, reflexionar acerca de las diferentes formas de representación de la cantidad. El sistema de numeración decimal es una de esas formas, de ahí que la escuela dedique un espacio para el análisis de la estructura que da sentido a dicho sistema. Se plantea orientar las actividades hacia la exploración de situaciones (juegos de puntajes, compras, información de periódicos, etc.) donde el estudiante pueda apreciar el tamaño de los números y con base en ello, iniciar el estudio del valor relativo y absoluto de las cifras. Los Lineamientos curriculares sugieren abordar, en el trabajo escolar,

actividades que impliquen contar (ascendente y descendientemente, de a dos, de a tres, de a diez,) para lograr ordenar y comparar números. También se destacan las actividades de agrupación como base para iniciar la conceptualización sobre uno de los principios que fundamenta el Sistema de numeración decimal: la base 10. De igual forma, se refieren actividades donde se resalta el valor de posición que tiene una cifra, a través del empleo de material concreto (ábaco, tiras de papel, regletas, multibloques, etc.)

Como último aspecto para el desarrollo del pensamiento numérico, los Lineamientos curriculares señalan el estudio del sentido de las operaciones y los cálculos con números. Se plantea aquí que el docente proponga situaciones concretas donde las operaciones surjan como herramienta viable y económica para obtener una respuesta. Sobre el análisis de tales situaciones, los estudiantes pueden ir reconociendo invariantes operatorias asociadas a los modelos usuales donde cada operación tiene sentido.

Se tiene entonces que en la propuesta curricular dada por los Lineamientos curriculares de matemáticas, la construcción del concepto de número natural se redimensiona integrando sentidos y significado del número, a la vez que, integra las diferentes representaciones de la cantidad y los contextos donde la operatividad con tales números tiene sentido. En particular, el número natural se asume desde la perspectiva del conteo y es a través de éste, como se va construyendo el sentido cardinal y ordinal. Esta forma de trabajo se corresponde con los planteamientos de Fuson y Verschaffel quienes refieren que el desarrollo del pensamiento numérico, y del número natural en particular, se fundamenta en el conteo, dado que a través de éste, el niño expresa relaciones cuantitativas. El conteo se asume como proceso que inicia de manera informal, a partir de aprendizajes sociales, y va evolucionando en la medida en que las situaciones que plantea la escuela requieran mayores y mejores técnicas de conteo. Es mediante la progresión de las técnicas de conteo, la reflexión sobre las acciones, la necesidad de representación de cantidades, que se logra la estructuración conceptual del número natural.

Esta perspectiva de estudio del número natural se puede justificar desde dos elementos. En principio, el trabajo con el número natural se aborda desde la

experiencia y la interacción con diferentes situaciones donde este concepto cobra sentido. La actividad reflexiva sobre las acciones desplegadas (contar, medir, codificar, ordenar) permite avanzar en la construcción de relaciones numéricas. Los modelos conceptuales que el estudiante puede construir a partir del análisis de la utilidad brindada por el número natural, se constituyen en la base para modificar las estructuras conceptuales previas y evolucionar hacia nuevas relaciones. Esta forma de trabajo se corresponde con los principios del pragmatismo, dado que el estudiante logra asumir los sentidos y significados del número en función de la practicidad y utilidad del mismo.

En un segundo momento, se toman como base los referentes dados por la experiencia, y se centra la atención en el tipo de relaciones lógicas y conceptuales que el estudiante puede construir en función del número natural. Las relaciones invariantes que subyacen a las situaciones abordadas cimientan y definen la estructura del número natural. Así, la reflexión acerca del concepto de las operaciones, sus propiedades, su efecto y relación con otras operaciones, son también elementos que ayudan a conceptualizar los objetos y nociones numéricas.

Así, el número natural, queda definido por la estructura misma que se crea en torno a él, junto con su operatividad y propiedades. Tal perspectiva responde a lo planteado por Dedekind. Además, la propuesta de trabajo dada por los Lineamientos curriculares recupera el manejo del principio de inclusión, pues la construcción de un número cualquiera, se obtiene vía “el sucesor de”, dinámica que organiza y está presente en el funcionamiento del sistema de numeración decimal.

Complementario a la propuesta de los Lineamientos curriculares y en respuesta a las demandas globales y nacionales de democratización de la educación y la atención a la diversidad, se formulan en 2003 los estándares básicos de competencias. Los estándares se asumen como parámetros de referencia que marcan metas deseables acerca de los desempeños de los estudiantes. Sirven como un referente nacional acerca de los procesos y habilidades que deben orientar las propuestas de formación de las instituciones educativas colombianas. Además, se formulan en función de procesos generales, de tal forma que el docente pueda encontrar ejes de articulación con otros pensamientos y otras áreas de conocimiento.

Al respecto del pensamiento numérico se tiene que los estándares básicos de competencias plantean enriquecer las conceptualizaciones del número a partir de la integración de los procesos de medición y cuantificación de magnitudes, dado que a través de la historia los elementos métricos han permitido generar y dar sentido a nuevos sistemas numéricos. Se trata entonces, de recuperar y recrear la necesidad de medir y de asociar el número a tales procesos, no solo asumirlo como resultado de procesos de conteo. Así mismo, los procesos de medición implican una reconceptualización de la unidad, pues no siempre se opera con unidades enteras, también se encuentran situaciones donde la unidad de medida no está contenida un número entero de veces en la cantidad que se desea medir.

Se tiene también que los procesos de medida se pueden realizar a partir de un punto de referencia absoluto o relativo, situación que genera y da sentido a los enteros, como elementos que expresan la medida relativa de cantidades. (Ministerio de Educación Nacional, 2006a).

Desde esta visión, la construcción del número abarca no sólo la cuantificación de colecciones sino la integración de contextos de medida. Dicho proceso de medición se convierte en detonante para la exploración de relaciones y estructuras que redimensionan y amplían el sentido numérico.

6.3.5 Consideraciones finales

Al rastrear y caracterizar las propuestas curriculares que ha tenido Colombia en el siglo XX y XXI al respecto de las matemáticas, en particular lo relativo al número natural, se pueden destacar algunos aspectos que pueden nutrir la reflexión didáctica y el proceso de transposición de tal noción.

Se tiene que a lo largo de los períodos de tiempo estudiados, las propuestas curriculares se han formulado en función de las necesidades de la sociedad de la época y retoman principios fundamentales de teorías cognitivas desarrolladas en dicho tiempo. Así por ejemplo, el currículo de los años 20's se fundamenta en la psicología conductista que destaca el trabajo a partir del estímulo y la respuesta, esquema que orienta las prácticas docentes. Por su parte, las habilidades que se pretendían desarrollar en la escuela, se centraban en el trabajo de reconocimiento y escritura de

cantidades a partir de la cuantificación de colecciones de objetos del mundo circundante, dado que el número se empleaba básicamente para cuantificar (sentido cardinal).

Se destaca además, que las propuestas curriculares retoman los diferentes sentidos del número natural, -en unas se explora un mayor número de tales sentidos que otras-, como base para su conceptualización aunado a la representación simbólica del mismo a través de diferentes sistemas de numeración, ya fuera romano o decimal. De igual forma, se observa la enseñanza del número natural en función de las operaciones que se pueden realizar. Esto es, el número natural es útil por sus sentidos y significados pragmáticos, a la vez, tal nivel de beneficio se refleja en el tipo de cálculos y estructuras que pueden establecer.

El referente matemático que permite explicar cada una de las propuestas curriculares, sitúa y asume el número natural desde diversas perspectivas. En general, se plantea el concepto de número natural como una idea, como un constructo mental, como una abstracción que puede ser manipulada mediante representaciones ya sean simbólicas, gráficas y en el lenguaje natural.

Los contextos señalados en las propuestas curriculares, donde se propone dar sentido al número natural, privilegian uno de dos sentidos básicos: lo cardinal o lo ordinal. Dependiendo de la fundamentación matemática que tenga la propuesta se enfatiza uno u otro sentido.

El señalar los anteriores aspectos brinda un referente para los docentes acerca de las diversas vías de abordaje para la construcción del concepto de número natural, a la vez que dimensiona el por qué de la propuesta curricular actual. De esta forma, el docente puede asumir posturas críticas para el diseño de actividades de aula y determinar qué nociones y principios numéricos va a potenciar en sus estudiantes.

6.4 Una Mirada a los Libros de Texto

Como se mencionó en el apartado 6.1, en el ejercicio de transposición didáctica se requiere la selección de los contenidos y de los objetos matemáticos que van a ser enseñados en un contexto escolar. La delimitación de dichos saberes, responde a las

perspectivas y concepciones de quien realiza este trabajo: “la noosfera”. Esto es, el proceso de selección del saber está orientado por las concepciones de aprendizaje que tenga la noosfera, y por las metas y el tipo de formación que se quiera ofrecer a una comunidad. Como producto de esta mezcla de intereses y metas se obtiene el saber matemático que va a circular en los contextos educativos.

Como parte del proceso de textualización del saber, que se ha seleccionado para que circule en los contextos escolares, se encuentran las propuestas de trabajo que se plasman en los libros de texto. A pesar de que en Colombia los libros de texto no son producidos directamente por el Ministerio de Educación Nacional, estos instrumentos si recogen, si no todos, gran parte de los elementos teóricos y didácticos que deben ser tenido en cuenta, por los docentes e instituciones, para la enseñanza del saber matemático en la escuela. De ahí que los libros de textos se conviertan en otro referente para analizar el proceso de transposición didáctica que ha tenido el concepto de número natural en el contexto escolar. Además, dado que el libro de texto es un instrumento empleado por los docentes para el diseño de actividades de aula, el estudio de las propuestas que traen los libros, permite configurar elementos sobre el modelo de enseñanza que se emplea, y por ende, prever los posibles aprendizajes en torno al número natural en el ciclo de educación preescolar y primer grado de básica primaria. Como lo propone (Gómez, 1999, p. 20), “En efecto, los libros de texto, además de un reflejo del estado de la ciencia, son una muestra indicativa de las concepciones dominantes en los distintos momentos de la historia acerca de qué contenidos deben ser enseñados, cuáles deben ser enfatizados, cuál es la forma de organizarlos, con qué enfoques conceptuales y con qué metodología”.

En este sentido, el presente apartado se orienta hacia la caracterización de las propuestas que traen algunos de los libros de texto de primer grado que han circulado y han servido de referente para el trabajo escolar en torno al concepto de número natural a lo largo del siglo XX y XXI en Colombia. El criterio de selección de los libros de texto, fue el año de impresión y su recurrencia de aparición en las bases de datos de las bibliotecas de la Universidad del Valle y de la Universidad de Antioquia, Biblioteca Departamental del Valle del Cauca, Biblioteca Nacional de Colombia. Para la

selección de los libros de texto de los años 90 en adelante, se tiene en cuenta que hayan sido producidos por una editorial de reconocimiento y trayectoria nacional.

6.4.1 Contextualización

Para el análisis de los libros de texto que han circulado en el contexto escolar colombiano, durante el siglo XX y XXI, se han demarcado períodos de tiempo en la historia educativa del país, en función de los cambios que ha tenido el currículo. Tales cambios se ilustran en el apartado 6.3

Los años 1900 a 1950

Para este periodo caracterizado por la instauración de estatutos y leyes para la regulación y masificación de la educación pública en el país, se eligen dos libros de texto. Cabe anotar que en esta época, el desarrollo de la industria editorial en el país era poca, de ahí que gran parte de los libros de texto eran importados de España, Méjico y Argentina, países donde se realizaban las traducciones del libro original. Esta dificultad en cuanto al acceso a la información, generó que, por un lado, el número de libros de texto que circularan en el contexto escolar fuera limitado. Sólo se trabajaba con libros de texto de unos cuantos autores. Por otro, el tipo de diagramación de los mismos era escaso y limitado. Eran libros impresos en blanco y negro con muy pocas ilustraciones.

Otro elemento a resaltar es que los libros de texto del año 1910, estaban dirigidos al maestro, pues en ellos se condensaban tanto los conceptos y nociones matemáticas que se debían enseñar, como las recomendaciones pedagógicas y el tipo de estrategias que debía emplear el docente durante el proceso de enseñanza de las matemáticas. En contraste, los libros de texto del año 1930, si fueron orientados hacia los estudiantes.

En general, los libros de texto analizados en este período se organizaban así:

- Se presentaba un compendio de las definiciones matemáticas básicas que iban a ser abordadas en cada capítulo.
- Se ilustraba la nomenclatura, la simbología y las abreviaciones que se iban a emplear.

- Cada definición se recreaba con un ejemplo (referido a los conceptos, a la lectura y a la escritura de la información involucrada).
- La enunciación de *reglas* generales que recogían los procesos y las nociones ejemplificadas. Dichas reglas se destacaban en negrilla o en letra cursiva.
- Finalizando el capítulo se propone un grupo numeroso de ejercicios para garantizar que los conceptos quedaran bien aprendidos.

Esta organización daba cumplimiento a los requerimientos del Ministerio de Instrucción Pública, ya que en los libros de texto se plasmaba, de manera detallada, todos los temas que se debían enseñar en cada materia en la escuela primaria. A continuación se ilustra el tipo de definiciones, ejemplos y ejercicios empleados en los libros de este período.

<p><i>Medir</i> una cantidad es compararla con otra de su misma especie, llamada <i>unidad</i>.</p> <p><i>Unidad</i> es la cantidad que se elige, las más veces al arbitrio, para medir otra cantidad de su misma especie.</p> <p>De medir ó comparar una cantidad con su unidad, resulta que ésta cabe en aquélla una ó más veces, lo que da origen al <i>número</i>.</p> <p><i>Número</i> es el resultado de medir una cantidad con su unidad ó la relación entre la cantidad y la unidad.</p>	<p>El signo de la multiplicación se representa con dos líneas en forma de X (×) y se lee <i>multiplicado por</i>; colocado entre dos cantidades indica que la una debe multiplicarse por la otra.</p> <p>El signo de la división se representa por medio de dos puntos separados por una línea horizontal y se lee <i>dividido por</i> (÷); sirve para indicar la división de dos cantidades.</p>
<p>Ejemplo de definiciones</p>	<p>Ejemplo de nomenclatura</p>
<p>Ejemplo:</p> $\begin{array}{r} 89,224 \\ 63,798 \\ \hline 25,426 \end{array}$ <p>La operación se hace así:</p> <p>De 8 á 14 van 6; escribo 6 y llevo una; una y 9 son 10, á 12 van 2; escribo 2 y llevo 1; 1 y 7 son 8, á 12 van 4; escribo 4 y llevo 1; 1 y 3 son 4, á 9 van 5; escribo 5 no llevo nada por cuanto el resultado no pasó de 10; de 6 á 8 van 2 que lo escribo.</p>	<p><i>Regla.</i> Para hacer la suma de los números enteros se colocan de manera que las unidades de cada clase formen columna; se trasa una línea horizontal por debajo y se principia á sumar la primera columna que es la de las unidades; si el resultado no pasa de diez, se coloca íntegramente debajo de la primera columna; pero si pasaren de diez se escriben las unidades y se llevan las decenas para juntarlas con las de la columna siguiente, en la cual y en las restantes se hace lo mismo que con la primera.</p>
<p>Ejemplo correspondiente a definición de multiplicación</p>	<p>Ejemplo de la formulación de Reglas</p>

Ejercicios para la suma y la resta

1.º Composición del número 1 hasta llegar á 100, así:

1, 2, 3, 4, 5..... 100

luego con el 2 así: 2, 4, 6, 8..... 100

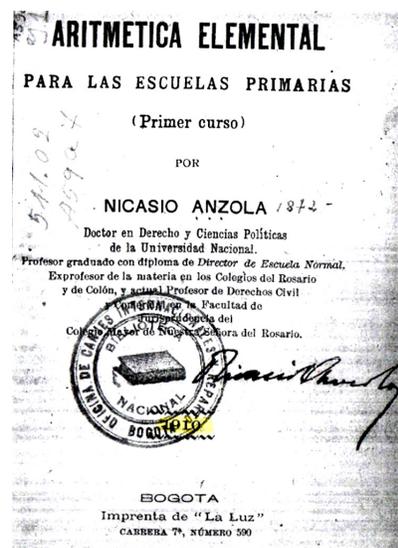
luego con el 3 así: 3, 6, 9, 12..... 102

luego con el 4, el 5, el 6 y así sucesivamente con cada uno de los números dígitos.

Ejemplo de ejercicios

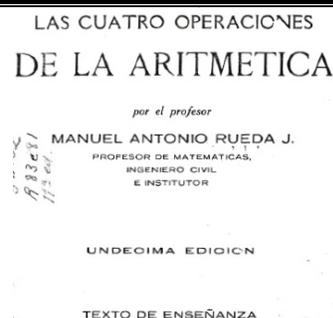
El primer libro de texto seleccionado fue:

FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Aritmética Elemental
DIRIGIDO A	Para escuelas primarias (Primer curso)
AUTOR	Nicasio Anzola
PERFIL AUTOR	Doctor en Derecho y Ciencias políticas. Profesor graduado con diploma de director de Escuela Normal. Ex profesor de la materia en los colegios del Rosario y de Colón, y actual profesor de Derecho Civil y Comercial en la Facultad de jurisprudencia del Colegio de Mayor Nuestra Señora del Rosario.
IMPRENTA	"La luz"
CIUDAD	Bogotá
AÑO	1910
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1910_Anzola



El segundo libro elegido fue:

FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Las cuatro operaciones de la aritmética
DIRIGIDO A	Texto de enseñanza para las escuelas primarias y las preparatorias.
AUTOR	Manuel Antonio Rueda
PERFIL AUTOR	Profesor de matemáticas. Ingeniero civil e institutor
EDITORIAL	Minerva S.A.



CIUDAD	Bogotá
AÑO	1931 Undécima Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1931_Rueda

Los años 1950 a 1968

En este espacio de tiempo, donde se adelanta la unificación de planes y programas de las escuelas rurales y urbanas, en aras de brindar una mayor y mejor educación para los colombianos, según sus necesidades y contexto (urbano o rural), se eligen dos libros de texto.

A pesar de que en los años 50 había mayor divulgación del conocimiento a través de los documentos escritos, los libros analizados en este período, continúan siendo editados en blanco y negro. Como recurso complementario para la enseñanza, se introducen ilustraciones. En éstas se presentan imágenes de monedas y billetes, paisajes, instrumentos de medida y objetos comunes, que se mencionan en las situaciones planteadas. Las ilustraciones plasmadas en los libros de texto no solo eran empleadas como elemento de ejemplificación o de referencia, sino que a través de ellas, también se recreaban las relaciones matemáticas y el tipo de cálculo que se estaba explicando.



Ilustración 5

En general, los libros de texto analizados en este período se organizaban así:

- Se presentaba una definición central y se ilustraba con uno o varios ejemplos, o con ilustraciones de las relaciones explicadas.
- Los ejemplos empleados aludían a situaciones cotidianas, generalmente de compra y venta de alimentos u objetos comunes.

- Terminada una sesión, se formulaban algunos ejercicios de aplicación. Los ejercicios propuestos involucraban el manejo del dinero, procesos de medición y la solución de problemas.
- Los contextos y ejemplos referidos en los libros de texto analizados estaba acorde con las propuestas curriculares de la época, pues se pretendía brindar una educación práctica que le brindara al ciudadano las herramientas necesarias para enfrentar cualquier situación de su contexto inmediato y poder desempeñarse en el campo laboral.

En ese marco se eligen los siguientes libros de texto

FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Mi aritmética
DIRIGIDO A	Año primero de primaria
AUTOR	---
SERIE	Textos Pax S.J
EDITORIAL	Bedout
CIUDAD	Medellín
AÑO	1953 Segunda Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1953_Buendia



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Mi libro de aritmética
DIRIGIDO A	Actividades para alumnos de enseñanzas infantil y primero de primaria
AUTOR	Macedonio Valderrama R y Elpidia Flechas de Valderrama
PERFIL AUTOR	Maestros de Escuela Primaria Superior, graduados en las escuelas Normales de Tunja, Profesores especializados en Matemáticas, en la Facultad de Educación de la misma



	ciudad. Catedráticos de la materia, en varios planteles oficiales y privados de la República.
EDITORIAL	Bedout
CIUDAD	Medellín
AÑO	1951 Cuarta Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1951_Valderrama

Los años 1968 a 1984

Durante esta época la educación colombiana se enfocó en formar a los estudiantes de acuerdo con sus intereses y vocaciones; ello produciría un gran capital humano que pudiera especializarse en una rama determinada y desempeñarse en diversos campos laborales. Para lograr esta dinámica, la educación se organizó a partir de áreas de formación que integraran conceptos, destreza y valores para lograr la formación integral del ser. En este referente se escogen 2 libros de textos.

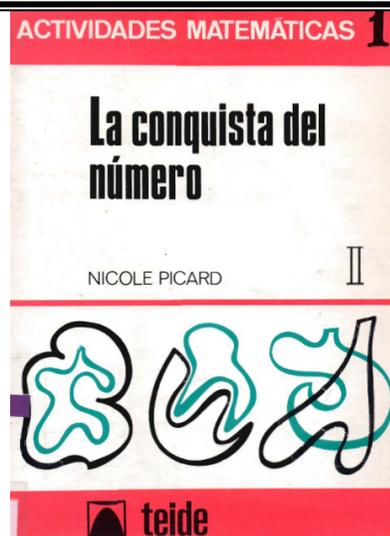
Los libros de texto analizados proponen reflexiones matemáticas desde los elementos lógicos de la teoría de conjuntos, y dejan de lado la perspectiva de la matemática práctica, pues consideran que la matemática trasciende lo mero operativo. Pese a ello la propuesta de trabajo reconoce que para desarrollar tal proceso lógico, los docentes deben partir de actividades con un referente concreto, para ir evolucionando hacia niveles más complejos de abstracción. En cuanto a la diagramación empleada, se tiene que los libros de texto estudiados usan colores básicos en sus ilustraciones, con predominio del verde, gris y naranja.

En general, los libros estudiados presentan las siguientes características:

- Se destaca en el título, la temática o el concepto que se va a abordar.
- Se muestran pocas definiciones de los conceptos y se ilustran las relaciones matemáticas a través de ejemplos simbólicos o gráficos (imágenes).
- Se formulan actividades donde el estudiante pueda poner en práctica la noción abordada.
- Se propone a los docentes pautas y orientaciones para el trabajo de aula, en cartillas complementarias al libro de texto.

En ese marco se eligen los siguientes libros de texto.

FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	La conquista del número I. Actividades matemáticas I
DIRIGIDO A	Los niños de la primera etapa de enseñanza
AUTOR	Nicole Picard. Traducción y adaptación: Ricardo Pons. Lic en Matemáticas
PERFIL AUTOR	---
EDITORIAL	Teide S.A
CIUDAD	Barcelona
AÑO	1972 Primera Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1972_Picard



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Matemática 1
DIRIGIDO A	Primer curso
AUTOR	María Deschamps
PERFIL AUTOR	Directora escolar
EDITORIAL	Teide S.A
CIUDAD	Barcelona
AÑO	1973 Quinta Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1973_Deschamps



Los años 1984 a 1998

En este período la educación colombiana sufre una reorientación denominada Renovación curricular. En particular, en el currículo de matemáticas se reestructura, adoptando el enfoque de sistemas. Esta perspectiva de trabajo pretende unificar el estudio de las ramas de la matemática a partir de la identificación de sus elementos, de las relaciones y de las operaciones que se puedan establecer entre ellos. De esta forma

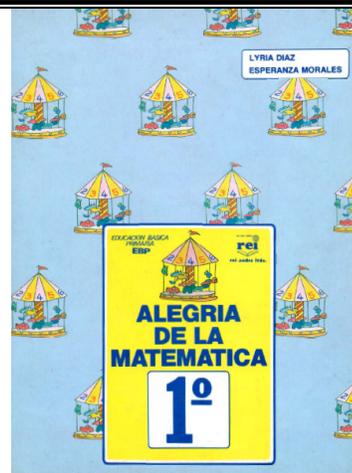
se lograrían articular los contenidos matemáticos, y brindar a cada estudiante un esquema de trabajo graduado. En este marco se eligen tres libros de texto, dado que se dispone de mayor recurso bibliográfico.

Los libros de texto escogidos se caracterizan por tener gran número de ilustraciones sobre animales, situaciones cotidianas y elementos que los estudiantes manipulan comúnmente. Además se resaltan en los títulos de las páginas las nociones que se van a abordar. En general, estos libros siguen este esquema:

- No se formulan definiciones de los objetos matemáticos trabajados.
- Las actividades propuestas evocan situaciones que son comunes al contexto de los niños: juegos o implementos usados durante su juego.
- Las propuestas de trabajo se apoyan en ilustraciones y con base en ellas se formulan interrogantes para que el alumno reflexione sobre su acción.
- Una misma noción se estudia a partir de varias actividades, que pueden ser propuestas en una misma página.

Acorde con estos referentes, los libros elegidos son:

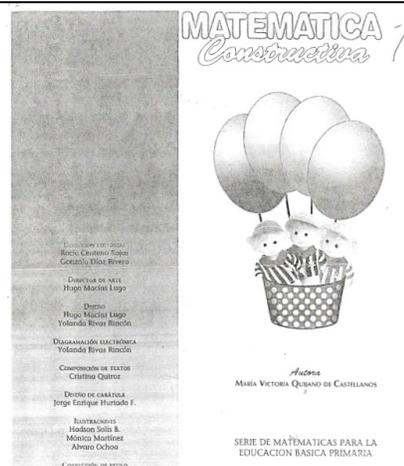
FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Alegría de la Matemática 1
DIRIGIDO A	Primer grado de Básica Primaria
AUTOR	Lyria Díaz de Cortés y Esperanza Morales
PERFIL AUTOR	Licenciada en Matemáticas y Física. Magister En Educación. Especialización en investigación y evaluación Socio educativa. Especialización en metodología de la Matemática. Licenciada en Matemáticas. Magister en Estadística
EDITORIAL	Rei Andes Ltda
CIUDAD	Bogotá
AÑO	1989 Segunda Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1989_Alegría_de_la_mat



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Pensar y Contar 1
DIRIGIDO A	Primer curso de Básica Primaria
AUTOR	Virginia Cifuentes de Buriticá Teresa León Pereira
PERFIL AUTOR	---
EDITORIAL	Rei Andes Ltda
CIUDAD	Bogotá
AÑO	1990
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_ 1990_Pensar_contar



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Matemática Constructiva 1
DIRIGIDO A	Primer curso
AUTOR	María Victoria Quijano de Castellanos
PERFIL AUTOR	---
EDITORIAL	Libros y Libres S.A
CIUDAD	Bogotá
AÑO	1994
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_ 1994_Matconstructiva



Los años 1998 a 2007

Este período se caracteriza por el reconocimiento de la educación como motor de desarrollo y cambio social como mecanismo de democratización del conocimiento. En consonancia con esta perspectiva se formulan los Lineamientos de Matemáticas como elemento de referencia para los procesos de enseñanza de las matemáticas en los contextos escolares. En estos documentos se propone asumir el conocimiento matemático como un producto de la acción humana en contexto. Esta perspectiva social implica el reconocimiento de los procesos de transposición didáctica de los saberes matemáticos y la redimensión de la actividad matemática del estudiante como

dinámica necesaria para el aprendizaje. En este marco general y dado que la educación preescolar ha tenido mayor reconocimiento en este período, se eligen tres libros de primer grado de Básica primaria y tres libros de preescolar.

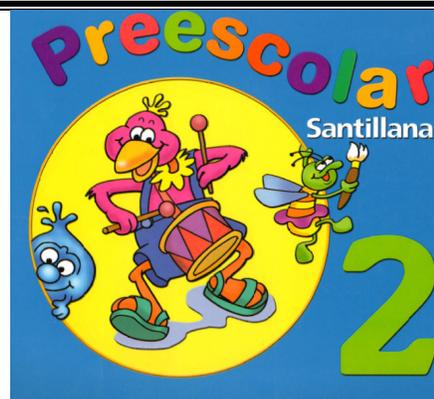
Cabe anotar que si bien la educación preescolar se reconoce como parte obligatoria de la educación formal colombiana en 1994, sólo a finales de esta década y comienzos de la siguiente, se formulan propuestas masivas de libros de texto para este ciclo de escolaridad. De ahí que en los periodos citados anteriormente no se haya hecho una presentación de libros de preescolar. Además, como en un comienzo, la educación preescolar fue de carácter privado, las instituciones mismas elaboraban las guías de trabajo de clase, y por ello, no se encuentra mucho registro del tipo de actividades que se proponían.

Los libros de texto de preescolar que se escogieron son propuestas de trabajo integrado, dado que en este ciclo de escolaridad se trabajó por proyectos, y se incorporan todas las dimensiones que fundamentan la educación del ser. Ello hace que las nociones matemáticas se presenten en diferentes momentos del texto y relacionadas con los contextos cotidianos en el que interactúa el niño de preescolar. Las fichas de trabajo tienen escasos enunciados y abundantes ilustraciones, pues los niños a esta edad (4 a 6 años aprox.) no saben leer y les llama la atención los dibujos coloridos. Además las actividades se plantean en hojas grandes dado que el niño aún no logra delimitar sus trazos y manejar adecuadamente el espacio de trabajo.

Por su parte, los libros de texto de primer grado proponen actividades que recreen contextos cercanos a los estudiantes. Se privilegia también el lenguaje gráfico para generar motivación en el estudiante y como recurso para ejemplificar las nociones que se estudian. Durante las actividades propuestas en los libros de texto, se emplean preguntas para que el estudiante vaya sacando conclusiones sobre las nociones y los procesos que ha empleado. De ahí que no se formulen, de manera explícita, las definiciones de los conceptos matemáticos que se están estudiando.

Acorde con estos referentes, los libros de texto de preescolar elegidos son:

FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Preescolar 2
DIRIGIDO A	Estudiantes de Jardín
AUTOR	Clara Inés Rangel García
PERFIL AUTOR	Licenciada en Educación preescolar. Psicóloga.
EDITORIAL	Santillana S.A
CIUDAD	Bogotá
AÑO	2004
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_2004_Santillana



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Proyecto Aprendo: Letras y números
DIRIGIDO A	Preescolar C
AUTOR	Robinson Ascencio
PERFIL AUTOR	---
EDITORIAL	Ediciones S M
CIUDAD	Bogotá
AÑO	2008
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_2008_sm

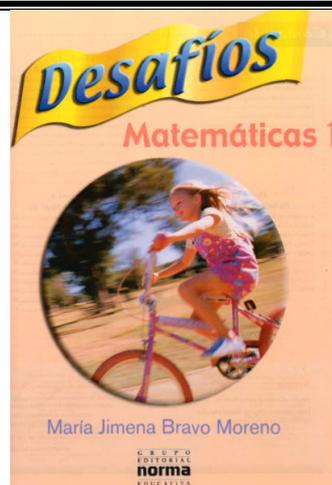


FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Comencemos
DIRIGIDO A	Educación preescolar 3
AUTOR	Nora Mejía Botero
PERFIL AUTOR	Licenciada en educación preescolar
EDITORIAL	Norma
CIUDAD	Bogotá
AÑO	2001 Segunda Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_2001_Comencemos

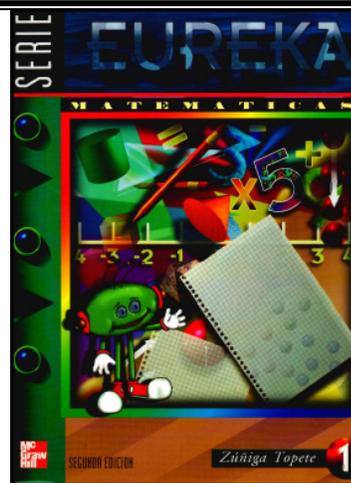


Por su parte, los libros de texto de primer grado de Básica primaria elegidos son

FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Desafíos Matemáticas 1
DIRIGIDO A	Primer grado de Básica
AUTOR	María Jimena Bravo Moreno
PERFIL AUTOR	Licenciada en pedagogía infantil y familiar
EDITORIAL	Norma
CIUDAD	Bogotá
AÑO	2004
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_2004_Desafios



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Eureka
DIRIGIDO A	Educación preescolar 3
AUTOR	Enrique Zúñiga Topete, Jorge A. Zúñiga Topete, H Ignacio Zúñiga Topete
PERFIL AUTOR	---
EDITORIAL	McGrawHill
CIUDAD	Bogotá
AÑO	1999 Segunda Edición
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_1999_Eureka



FICHA GENERAL DEL LIBRO DE TEXTO	
TÍTULO	Matemáticamente 1
DIRIGIDO A	Primer grado de Educación Básica
AUTOR	Víctor Hernán Ardila Gutiérrez
PERFIL AUTOR	Licenciada en Matemáticas
EDITORIAL	Voluntad
CIUDAD	Bogotá
AÑO	2007
Ver Libro	Anexo 1, LIBRO_2007_Matmente



6.4.2 Categorías de análisis

Dado que el proceso de transposición didáctica se genera debido a la no correspondencia entre la naturaleza y la epistemología del saber matemático y el saber matemático escolar se hace necesario elaborar un análisis didáctico, para determinar qué elementos y sentidos del saber matemático están circulando en el contexto escolar. Tal identificación, permite dimensionar el tipo de aprendizajes que se generarían en los estudiantes, al incorporar en los currículos y práctica de aula, estos elementos.

En este sentido para analizar el saber matemático que en torno al concepto de número natural se plasma en los libros de texto, se toman como referentes varios aspectos. El primero, se refiere a considerar cómo se ha constituido, a lo largo de la historia de las matemáticas, como objeto matemático, el número natural. Este estudio proporciona, entre otros, una base acerca de la naturaleza que se le ha asignado al número natural y el tipo de fuentes de donde se obtiene el conocimiento válido en cada cultura. Unido a ello, el estudio epistemológico permite identificar si en torno al concepto de número natural se han desarrollado estructuras formales junto con sus operaciones y propiedades. Así, a través de estas distinciones, se puede dimensionar el estatus otorgado a la unidad y cómo se definía el concepto mismo de número natural, en cada período. Este estudio histórico epistemológico se toma como referente del saber matemático a partir del cual se inicia el proceso transpositivo.

El segundo aspecto a considerar para el análisis de los libros de texto son los elementos curriculares dado que en el diseño del currículo confluyen diversos intereses y concepciones, tanto del objeto matemático mismo, como de aspectos relativos a la pedagogía y didáctica de las matemáticas. De igual forma, en el diseño de lineamientos curriculares se plasma una connotación sobre el saber matemático escolar, se determina la actividad matemática que se espera el alumno desarrolle, y en últimas, se delimitan los sentidos y la funcionalidad de los conceptos matemáticos estudiados en la escuela. Por tanto, es pertinente incluir en las categorías de análisis de los libros de textos, factores asociados al currículo.

Un tercer aspecto a tener en cuenta son las perspectivas cognitivas sobre los procesos de aprendizaje del concepto de número natural. Si bien los desarrollos teóricos de la psicología cognitiva (en lo relativo a las matemáticas), en general, se

presentan como marcos explicativos sobre el proceso de aprendizaje, también se constituyen en referentes para las prácticas del docente y para el diseño de actividades de aula. La asunción de una u otra perspectiva cognitiva, al respecto del aprendizaje del número natural, potencia y desencadena en los niños, ciertos sentidos, habilidades, relaciones y conceptualizaciones. Por ello, es pertinente involucrar aspectos cognitivos en las categorías de análisis de los libros de texto.

El estudio histórico epistemológico, el análisis curricular y la caracterización de las perspectivas cognitivas al respecto del concepto de número natural, señalados como aspectos básicos para el análisis de los libros de texto, se presentan en los apartados 4, 6.3, 5, respectivamente. Los aspectos contemplados y obtenidos como resultado de estos tres análisis, se convierten en la base para la formulación de las categorías de estudio de los libros de texto. A continuación se presenta el esquema general de las categorías formuladas.

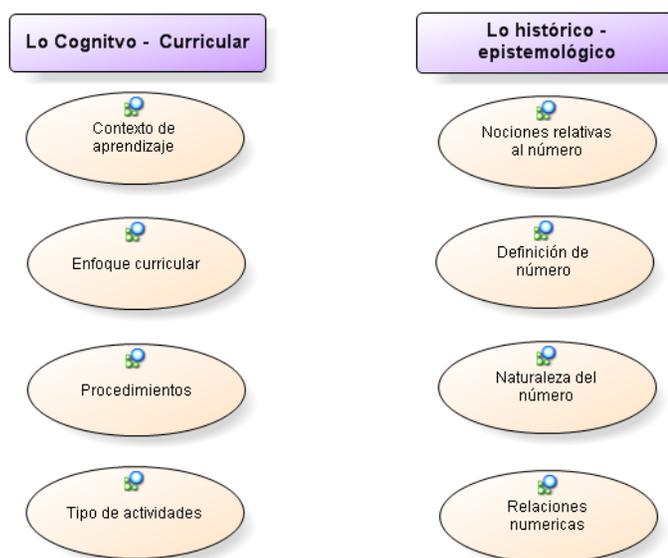


Ilustración 6

El eje designado como *lo cognitivo - curricular* integra las perspectivas dadas desde los análisis cognitivos y curriculares. Aquí se agrupan las categorías que aluden a los ambientes, los procesos y las actividades que se emplean para la enseñanza del número natural en contextos escolares. De igual forma se incluyen los referentes cognitivos

que explican cómo se construye este concepto. El eje consta de cuatro categorías: Contexto de aprendizaje, enfoque curricular, procedimientos y tipo de actividades.

El eje designado como *lo histórico – epistemológico* recoge los elementos básicos dados por el análisis epistemológico en torno al número natural. Se congregan aquí las categorías que indagan por los sentidos, la naturaleza y el tipo de formalización construida en torno al número natural, a lo largo de la historia. El eje consta de cuatro categorías: Definiciones de nociones relativas al número, definiciones de número, naturaleza del número y relaciones numéricas.

Contexto de aprendizaje

Dado que cada libro de texto se formula en un período, el esquema que se adopta en su diseño integra diversos intereses, entre ellos, las perspectivas cognitivas del aprendizaje. En este sentido, la categoría *contexto de aprendizaje* sistematiza los enfoques cognitivos y didácticas generales, que orientan las propuestas de trabajo de los libros de texto en torno al concepto de número natural. Esta categoría se estructura a través de cinco sub - categorías: Ejercicios de enunciado verbal, Piagetiano, Aritmético, Integrado y Conteo. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Contexto de Aprendizaje

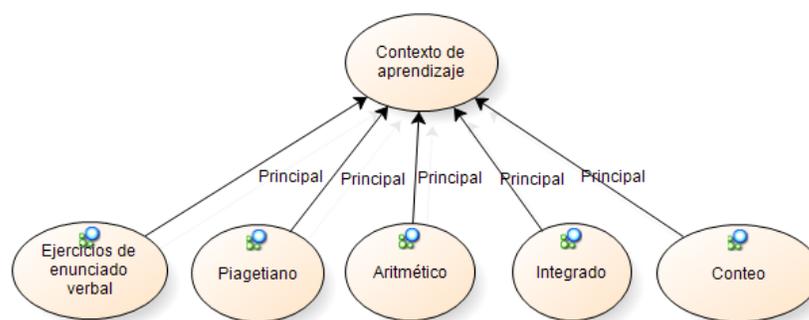


Ilustración 7

Ejercicios de enunciado verbal - Esta sub-categoría agrupa los contextos que proponen como herramientas de enseñanza actividades de solución de ejercicios de enunciado verbal. Los ejercicios de enunciado verbal se asumen como enunciados escritos donde se hace "...uso de destrezas o técnicas sobreaprendidas (es decir,

convertidas en rutinas automatizadas como consecuencia de una práctica continuada)” (Pozo, 1994, p. 18). Así, en esta categoría se inscriben todos aquellos contextos de enseñanza donde se propone un paquete de definiciones con sus correspondientes ejemplos, seguidos de un gran número de formulaciones verbales (denominados en los libros de texto como problemas), donde el trabajo del estudiante se encamina a repetir técnicas que han sido explicadas previamente, para dar solución a situaciones ya conocidas.

Piagetiano - En esta sub-categoría se inscriben aquellos contextos que emplean para la enseñanza del número natural, los principios y las operaciones lógicas expresadas por Piaget. Estos principios se operacionalizan por medio de actividades de identificación de cualidades y características comunes en un grupo de objeto dados, ejercicios de clasificación, seriación, comparación, correspondencia y conservación.

Aritmético – Esta sub-categoría recoge contextos de enseñanza que se orientan hacia la manipulación de símbolos numéricos sin referirse al significado de éstos, en una situación particular. Es decir, se manejan símbolos en función de sus relaciones numéricas, operaciones y propiedades, sin aludir a referentes contextuales. En estos contextos se presenta una serie de definiciones alusivas al número natural y con base en ello, se plantean ejercicios de manipulación simbólica ya sea para operar, escribir o comparar números.

Integrado – Esta sub-categoría alude a los contextos de enseñanza donde se retoman elementos dados por la teoría de Piaget en cuanto a la forma de constitución de los objetos en la mente, y la perspectiva del conteo como habilidad básica en el proceso de construcción del número natural. Estos contextos integran actividades con colecciones de objetos, que a través del conteo son comparadas, ordenadas y cuantificadas.

Conteo – En esta sub-categoría se integran aquellos contextos de enseñanza donde se emplea el proceso de conteo como actividad cognitiva y como una

herramienta de solución de tareas razonadas, que permite identificar los principios de cardinalidad, ordinalidad y conservación como elementos básicos para la construcción del número natural. Estos contextos involucran actividades donde el niño emplee el conteo como un mecanismo rápido y eficaz para encontrar una respuesta.

Definición de número

Como uno de los ejes centrales de esta investigación es el concepto de número natural, es pertinente estudiar las diferentes formas que emplean los libros de texto para la presentación y enunciación de tal concepto. Así, la categoría *definición de número* agrupa los modos y las condiciones cómo se formulan las definiciones de número natural. Esta categoría se organiza por medio de dos sub - categorías: Enunciado de carácter y formulado de manera. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Definición de Número

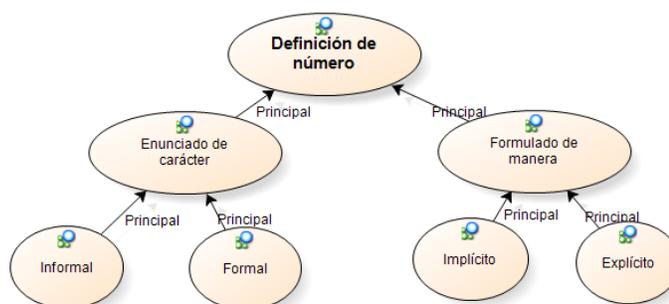


Ilustración 8

Enunciado de carácter – Esta sub-categoría recoge los elementos involucrados en la estructura de los enunciados empleados para definir número natural. Para ello, se analiza si el enunciado usa nociones, conceptos, elementos y relaciones claramente definidas en el contexto del libro de texto. Este análisis determina si el enunciado ha sido formulado con un carácter:

Informal cuando en la enunciación se emplean términos y nociones ambivalentes o que sugieren múltiples sentidos e interpretaciones.

Formal cuando en la enunciación se emplean nociones y relaciones que han sido previamente definidas en el contexto del libro de texto.

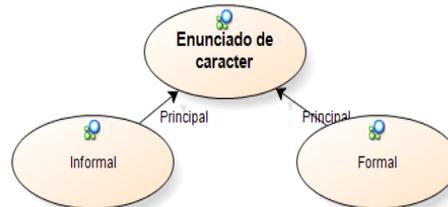


Ilustración 9

Formulado de manera – En esta sub-categoría se integran las formas que usa el libro de texto para formular el enunciado de la definición de número natural. Esto es, si el enunciado está formulado de manera:

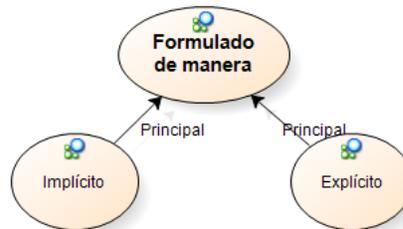


Ilustración 10

Implícita: si en el libro de texto sólo se menciona o se refiere el número natural durante el discurso de la actividad, sin llegar a presentar ninguna definición al respecto del mismo. Se deja tácita la definición de número natural, y se espera que el estudiante infiera de qué se trata, y en qué sentido se puede emplear dicho concepto.

Explícita: si el libro de texto enuncia una definición de número natural, en función de las nociones previamente trabajadas en el texto.

Nociones relativas al número

El conocimiento matemático asumido como producto de la humanidad, se constituyen como un cuerpo de saberes estructurado y relacionado. El número natural como parte de dicho cuerpo, no es ajeno al carácter vivo, a partir del cual se establecen interrelaciones con otras nociones y conceptos matemáticos. Así, esta categoría reúne las definiciones y /o explicaciones de nociones y conceptos que se relacionan y aportan para la conceptualización del número natural. Esta categoría se estructura a partir de seis sub-categorías: Nociones conjuntistas, nociones métricas, nociones aritméticas, representaciones, enunciados. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Nociones relativas al número

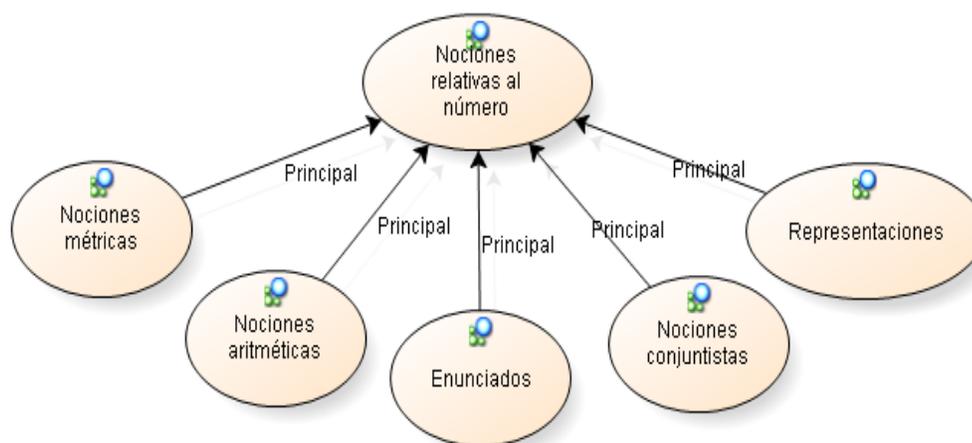


Ilustración 11

Enunciados – Esta sub-categoría recoge los elementos involucrados en la estructura de los enunciados empleados para definir y/o explicar nociones y conceptos relacionados con el número natural. De igual forma, se observan las formas que usa el libro de texto para formular los enunciados. Para ello, se analiza si el enunciado usa nociones, conceptos, elementos y relaciones claramente definidas en el contexto del libro de texto y se determina si son de carácter:



Ilustración 12

Informal cuando en la enunciación se emplean términos y nociones ambivalentes o que sugieren múltiples sentidos e interpretaciones.

Formal cuando en la enunciación se emplean nociones y relaciones que ha sido previamente definidas en el contexto del libro de texto.

Implícita si en el libro de texto sólo se menciona las nociones relativas al número natural durante el discurso de la actividad, sin llegar a presentar ninguna definición y/o explicación al respecto de las mismas. Se dejan tácitas las definiciones de las nociones relacionadas con el número natural, y se espera que el estudiante infiera de qué se trata, y en qué sentido se pueden emplear tales nociones.

Explícita si el libro de texto enuncia una definición y/o explicación sobre la nociones relacionadas con el número natural, en función de las nociones previamente trabajadas en el texto.

Nociones conjuntistas – Esta sub-categoría abarca las definiciones y/o explicaciones de nociones, principios, relaciones y conceptos que se emplean en la teoría de conjuntos. Tales nociones pueden ser empleadas para introducir o dar sentido al concepto de número natural. Las nociones, relaciones, principios y conceptos incluidos en esta sub-categoría son:

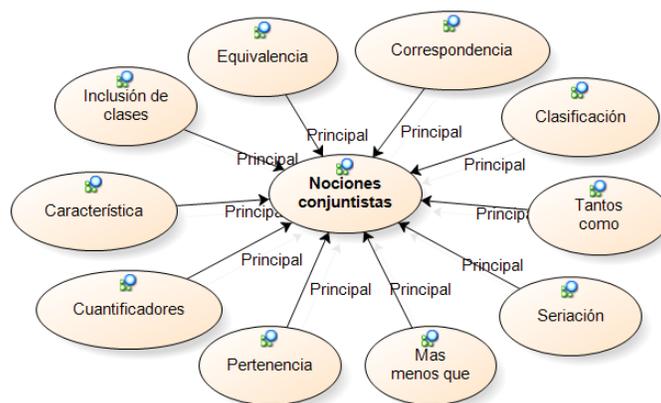


Ilustración 13

Característica: Se refiere a enunciados donde se especifica qué es la característica de un conjunto, o aquellas situaciones donde se emplee o explicita la característica de un conjunto para establecer o realizar cualquier relación lógica.

Inclusión de clases: Se refiere a enunciados donde se especifique qué es incluir una clase o conjunto en otro, o aquellas situaciones donde se use la inclusión para explicar un resultado o una relación entre elementos de un conjunto o entre números naturales.

Equivalencia: Se refiere a enunciados donde se especifica qué es equivalencia entre dos o más conjuntos, o aquellas situaciones donde se emplee la equivalencia para explicar un resultado obtenido a partir de relaciones entre elementos de conjuntos o entre números naturales.

Correspondencia: Se refiere a enunciados donde se especifique cómo se establece correspondencias entre elementos de conjuntos, o aquellas situaciones donde se use la correspondencia para explicar un resultado o una relación entre elementos de conjuntos o entre números naturales.

Clasificación: Se refiere a enunciados donde se especifique qué es y cómo se establece una clasificación de elementos, o aquellas situaciones donde se use la clasificación para explicar un resultado o una relación entre elementos de conjuntos o entre números naturales.

Tantos como: Se refiere a enunciados donde se especifique el proceso de comparación necesario para determinar o construir un conjunto con tantos elementos

como el que se dio como referencia, o aquellas situaciones donde se use la relación tantos como, para explicar un resultado o una relación entre elementos de conjuntos o entre números naturales.

Seriación: Se refiere a enunciados donde se especifique qué es y cómo se establece una seriación de elementos o números, o aquellas situaciones donde se use la seriación para explicar un resultado o una relación entre elementos de un conjunto o entre números naturales.

Más menos que: Se refiere a enunciados donde se especifique el proceso de comparación necesario para determinar o construir un conjunto con menos o con más elementos que el que se dio como referencia, o aquellas situaciones donde se use la relación más o menos que, para explicar un resultado o una relación entre elementos de conjuntos o entre números naturales.

Pertenencia: Se refiere a enunciados donde se especifique la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto dado, o aquellas situaciones donde se emplee la relación de pertenencia para clasificar elementos o cuantificarlos.

Cuantificadores: Se refiere a enunciados donde se especifique el empleo de los cuantificadores universales y existenciales, o aquellas situaciones donde se usan tales cuantificadores para construir conjuntos o establecer relaciones entre sus elementos.

Representaciones - Esta sub-categoría incluye las representaciones, las definiciones y/o explicaciones de nociones, principios, relaciones y conceptos que se emplean para representar los números naturales. Tales representaciones pueden ser empleadas para comunicar cantidades, elaborar cálculos, comparaciones y operaciones. Las nociones, relaciones, principios y conceptos incluidos en esta sub-categoría son: colecciones, símbolos numéricos y palabras-número.

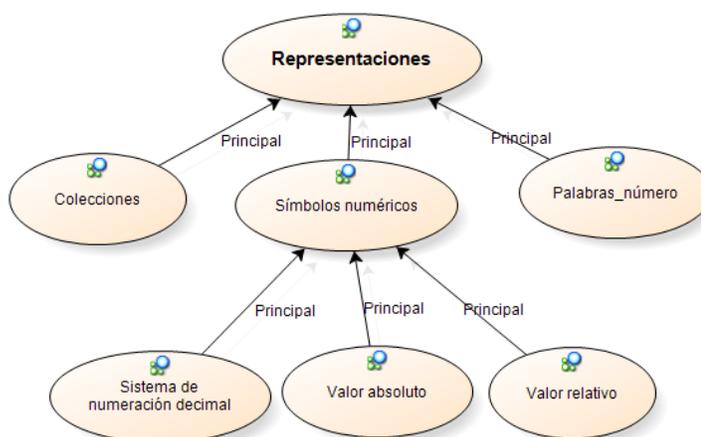


Ilustración 14

Colecciones: Se refiere a ilustraciones o enunciados donde se represente el número natural mediante colecciones de objetos, dedos de las manos, arreglos de puntos (como los empleados en las fichas de dominó o en los dados).

Palabras-número: Se refiere a ilustraciones o enunciados donde se represente el número natural mediante palabras.

Símbolos numéricos: Se refiere a ilustraciones o enunciados donde se represente el número natural mediante símbolos numéricos, o aquellas situaciones donde se explique cómo elaborar los trazos de los grafismos. Dado que la representación simbólica del número natural se hace en el marco del sistema de numeración decimal, otras nociones que se incluyen en este nodo se refieren al funcionamiento del sistema mismo y al valor de posición de las cifras.

Sistema de numeración decimal: Alude a la explicaciones de los principios de reagrupación que fundamentan el sistema y su relación con la base 10. También se incluye la nominación de los órdenes de magnitud del sistema y el proceso de equivalencia entre las diferentes unidades.

Valor absoluto: Alude a las explicaciones relativas al valor que tiene una cifra en sí misma en el sistema decimal.

Valor relativo: Alude a las explicaciones relativas al valor que tiene una cifra en función de su posición en los diferente órdenes de magnitud del sistema decimal.

Nociones métricas - Esta sub-categoría integra las representaciones, las definiciones y/o explicaciones de nociones, procesos y relaciones que aluden a la medición. Tales nociones pueden ser empleadas para dar sentido e ilustrar uno de los contextos donde se emplea el número natural. Las nociones, procesos y relaciones incluidos en esta sub-categoría son: Magnitud y medición.

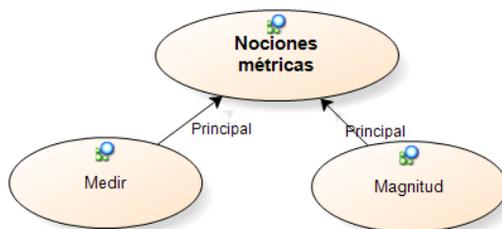


Ilustración 15

Medir: Se refiere a ilustraciones o enunciados donde se explicita qué es medir y cómo llevar a cabo el proceso.

Magnitud: Se refiere a ilustraciones donde se representan magnitudes, o enunciados donde se explicita qué es una magnitud. También se incluyen las situaciones donde se comparan cualitativamente magnitudes.

Nociones aritméticas - En esta sub-categoría se agrupan las notaciones, los principios, las definiciones y/o explicaciones de nociones, procesos y relaciones, que aluden al número mismo como objeto de estudio en la aritmética. Tales nociones y principios pueden ser empleadas para estructurar el concepto de número natural. Las nociones, procesos y relaciones incluidos en esta sub-categoría son: cardinalidad, ordinalidad, orden, operaciones, contar, cantidad, notación.

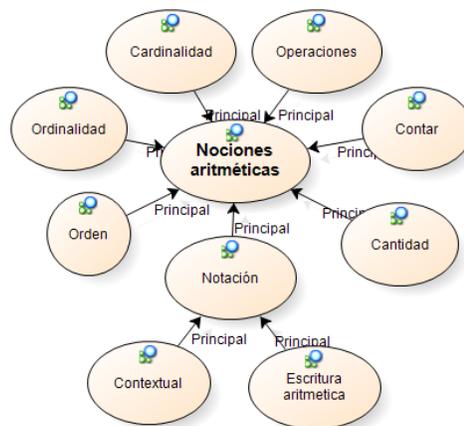


Ilustración 16

Cardinalidad: Se refiere a enunciados donde se especifique qué es y cómo se establece la cardinalidad de un conjunto, o aquellas situaciones donde se use la cardinalidad para explicar un resultado o una relación entre elementos de un conjunto o entre números naturales.

Ordinalidad: Se refiere a enunciados o situaciones donde se empleen expresiones numéricas para establecer una sucesión ordenada con los elementos de un conjunto.

Orden: Se refiere a enunciados o situaciones donde se establezca o se explicita en qué consiste la relación de orden entre números naturales. Además, incluye las explicaciones referentes al empleo de la simbología correspondiente ($<$, $>$).

Operaciones: Se refiere a enunciados o situaciones donde se indique el sentido de las operaciones con números naturales, o donde se expliciten los pasos a seguir para realizar los algoritmos correspondientes.

Contar: Se refiere a enunciados o situaciones donde se emplee el proceso de conteo para establecer la cantidad de elementos de un conjunto o para establecer relaciones entre números naturales.

Cantidad: Se refiere a enunciados o ilustraciones donde defina qué es, o a contextos donde se emplee la noción de cantidad.

Notación: Se refiere a enunciados donde explique el uso de la notación numérica u operativa. Tales enunciados pueden recurrir al contexto para dotar de significado a los símbolos (contextual) o a las relaciones y reglas que se establecen en la escritura misma de las cantidades y operaciones (escritura aritmética).

Enfoque curricular

Teniendo en cuenta que el conocimiento matemático surge como producto de la actividad humana, y que evoluciona y se contextualiza en los marcos sociales e institucionales, es pertinente estudiar las características particulares que identifican el saber que ha sido seleccionado para ser incorporado en los contextos escolares. Tal caracterización permite identificar períodos donde se han privilegiado ciertos sentidos y funcionalidades del número natural en el currículo colombiano. Así, esta categoría, agrupa los períodos donde se observan cambios en la forma de enseñar y de dar sentido al concepto de número natural. Esta categoría se estructura a partir de cinco sub-

categorías: años 10 – 50, años 50 – 70, matemáticas modernas, renovación curricular y lineamientos curriculares. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Enfoque curricular

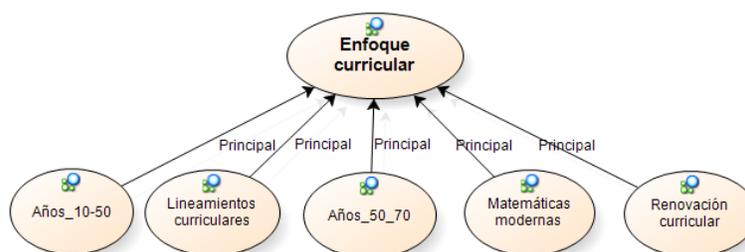


Ilustración 17

Años 10 – 50 - En esta sub-categoría se agrupan los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación, que fueron producidos entre los años 1910 y 1950.

Años 50 – 70 - Esta sub-categoría recoge los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación, que fueron producidos entre los años 1950 y 1970.

Matemáticas modernas - En esta sub-categoría se integran los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación, que fueron producidos entre los años 1970 y 1984.

Renovación curricular - En esta sub-categoría se incluyen los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación, que fueron producidos entre los años 1984 y 1998.

Lineamientos curriculares - En esta sub-categoría se agrupan en los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación básica y de educación de preescolar, que fueron producidos entre los años 1998 y 2007.

Naturaleza del número

Como resultado del análisis histórico - epistemológico del número natural, se tiene que este concepto ha sido asumido de diferentes maneras a lo largo la historia de las matemáticas. Cada una esas perspectivas, define y estructura el concepto de número natural, de acuerdo con unos principios epistemológicos y ontológicos propios de la cultura donde surgieron. Este saber matemático es el punto inicial del proceso transpositivo, por tanto, es pertinente rastrear en los libros de texto, qué principios y

naturaleza se refieren para definir el número natural. En este sentido, la categoría naturaleza del número, compila las diferentes perspectivas epistemológicas que pueden ser asumidas en los libro de texto, para dotar de sentido al concepto de número natural y a la unidad. Esta categoría se organiza a partir de tres sub-categorías: naturaleza de la unidad, ontológica y epistémica. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Naturaleza del número

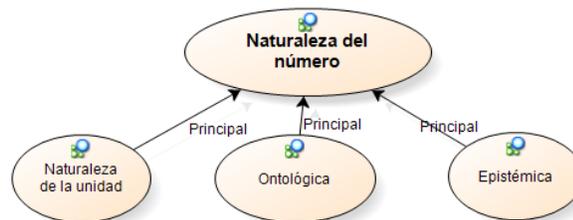


Ilustración 18

Epistémica – En esta sub-categoría se agrupan los enunciados, las representaciones y las acciones que identifican cada una de las perspectivas epistemológicas que se han asumido para formalizar el concepto de número natural a lo largo de la historia de las matemáticas. Las perspectivas incluidas en esta sub-categoría son: Egipcios y Babilonios, Platón, Euclides, Stevin, Dedekind, Peano, Cantor, Frege.

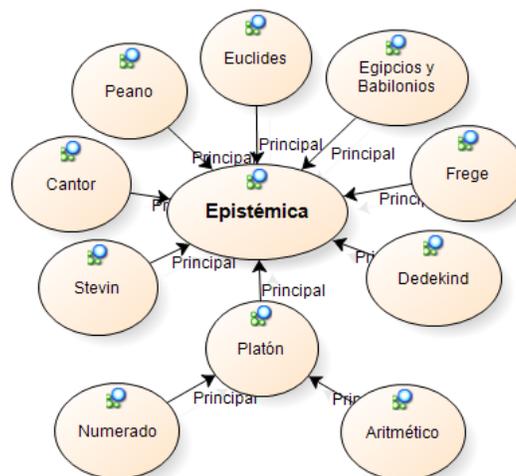


Ilustración 19

Egipcios y Babilonios: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se asume como una abstracción que se manipula a través de representaciones simbólicas y modela ciertas relaciones numéricas entre elementos de situaciones contextuales.

Platón: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se asume ya sea como multitud de unidades (aritmético) o como multitud concreta de objetos (numerado).

Euclides: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se asume como un individuo en sí mismo, independiente y aislado que se construye a través del conteo, como una multitud compuesta de unidades.

Stevin: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se asume como “aquello por lo cual la cantidad de cada cosa es revelada” y se obtiene como resultado de procesos de conteo y de medición.

Dedekind: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se define en función la estructura que se pueda crear en torno de él, destacando el principio de inclusión.

Peano: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se asume en función de la axiomática construida sobre la propiedad “el siguiente de”

Cantor: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural es asociado a la cardinalidad de un conjunto, destacando la formación de clases equipotentes que tienen la propiedad de poseer ese cardinal.

Frege: Se refiere a los enunciados, las actividades y las representaciones donde el número natural se asume como objeto lógico que responde a la extensión del concepto.

Ontológica - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados, las representaciones y las acciones que identifican el estatus asignado al número natural en cada una de las perspectivas epistemológicas señaladas.

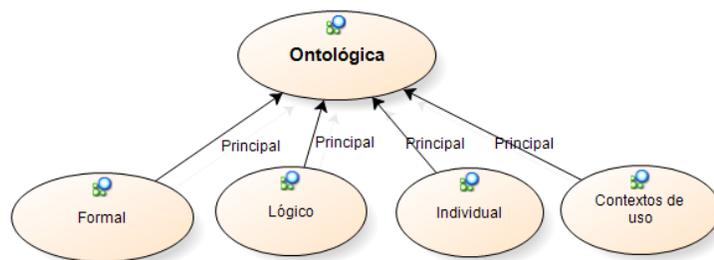


Ilustración 20

Las asignaciones incluidas en esta sub-categoría son: Formal, lógico, individual y contextos de uso.

Formal: Cuando el número natural es definido axiomáticamente, o en función de sus propiedades.

Lógico: Cuando el número natural es definido en términos de clases, o en función de la propiedad de equinumerabilidad.

Individual: Cuando el número natural es definido como un ente aislado, con existencia propia.

Contextos de uso: Cuando el número natural se define y clasifica en función de los contextos en que se usa.

Naturaleza de la unidad - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados, las representaciones y las acciones que identifican el estatus asignado a la unidad en cada una de las perspectivas epistemológicas señaladas. Las asignaciones incluidas en esta sub-categoría son: estatus de número y estatus independiente.

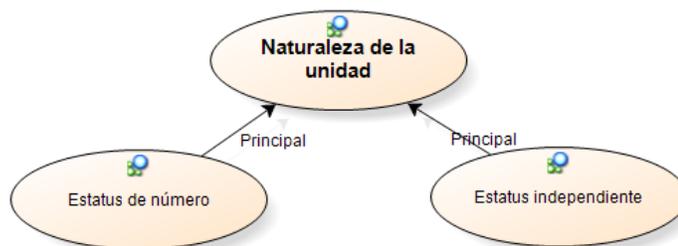


Ilustración 21

Estatus de número: Cuando la unidad se asume de la misma naturaleza que el número natural. Se opera y se establecen relaciones con ella, al igual que con otro número natural.

Estatus independiente: Cuando la unidad se asume de una naturaleza diferente de aquella del número natural.

Procedimientos

Una vez que el concepto de número natural es adaptado e incorporado al contexto escolar, se determina por parte de la noosfera, la perspectiva epistémica que va a dar sentido a dicho concepto. En ese marco referencial se determinan procedimientos que van a ser asumidos como válidos para expresar y relacionar números naturales. Los procedimientos aluden a una serie de pasos definidos previamente, que se ejecutan de la misma manera y que conducen a un resultado. De acuerdo con ello esta categoría recoge los procedimientos que proponen los libros de texto para comunicar y relacionar cantidades. Esta categoría se organiza en función de cinco sub-categorías: Para leer un número, para generar números de una serie, para escribir un número, para calcular y operar con números, para relacionar números. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Procedimientos

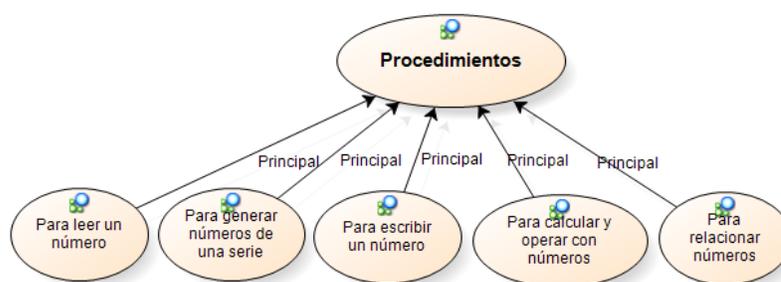


Ilustración 22

Para leer un número - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados y las representaciones que indican cómo leer un número natural expresado en símbolos numéricos.

Para escribir un número - En esta sub-categoría se reúnen los enunciados y las representaciones que indican cómo escribir un número natural empleando símbolos numéricos, cuando es dado en lengua natural.

Para generar números de una serie - Esta sub-categoría integra los enunciados y las representaciones que indican cómo generar nuevos números naturales, expresados en símbolos numéricos, que cumplan con la característica de la serie a la cual pertenecen. La generación de números puede ser por adición o por sustracción de 1, de 2, de 3, etc.

Para calcular y operar con números - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados y las representaciones que indican cómo realizar cálculos y algoritmos de operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) con números naturales.

Para relacionar números - En esta sub-categoría se incluyen los enunciados y las representaciones que indican cómo relacionar números naturales ya sea por equivalencia o por diferencias.

Relaciones numéricas

Parte de los elementos que definen la estructura matemática y dan sentido al número natural es el tipo de relaciones que se puedan establecer entre ellos. En ese sentido, esta categoría reúne los diferentes procesos que se proponen en los libros de texto, para establecer relaciones entre uno o varios números naturales dados. Así, esta categoría se organiza a partir de tres sub-categorías: comparaciones, orden y equivalencia. Para ver en detalle los recursos codificados en ésta categoría ingresar a Anexo No.2 Relaciones numéricas

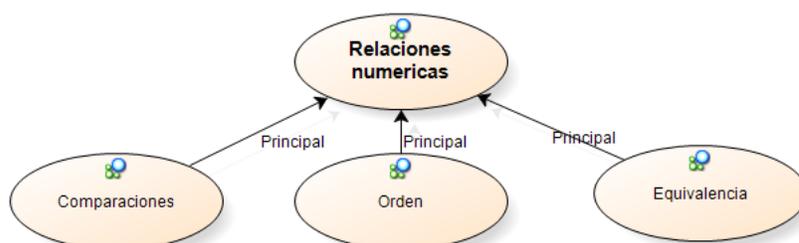


Ilustración 23

Comparaciones - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados y las representaciones que indican procesos de comparación, ya sea entre cardinales de conjuntos o entre números naturales.

Orden - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados y las representaciones que indican el establecimiento de la relación de orden entre números naturales.

Equivalencia - En esta sub-categoría se agrupan los enunciados y las representaciones que indican el establecimiento de la relación de equivalencia entre números naturales.

Tipo de actividades

Las propuestas de actividades que se plasman en los libros de texto, para abordar el concepto de número natural, se enmarcan en ciertas posturas cognitivas, didáctica y epistemológica. Tales supuestos teóricos se operacionalizan a través de las formas de comunicación y los tipos de actividades planteados, los cuales integran elementos representativos de cada teoría. En este sentido, la categoría *tipo de actividades* reúne los diferentes tipos de actividades que plantean los libros de texto para enseñar y dar sentido al número natural. Para ver en detalle los recursos codificados en esta categoría ingresar a Anexo No.2 Tipo de actividades

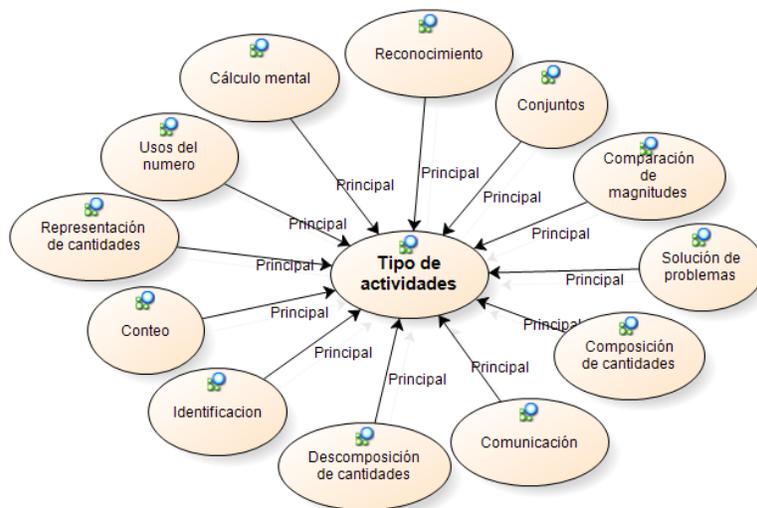


Ilustración 24

Esta categoría se estructura a partir de doce sub-categorías: Representación de cantidades, usos del número, cálculo mental, reconocimiento, conjuntos, comparación de magnitudes, solución de problemas, composición de cantidades, comunicación, descomposición de cantidades, identificación, conteo.

Representación de cantidades - En esta sub-categoría se agrupan las actividades que involucran procesos de representación de cantidades, ya sea a través de símbolos numéricos, colecciones o palabras-número.

Usos del número - En esta sub-categoría se compilan las actividades que involucran situaciones donde el número natural se emplea como código, como tecla, como ordinal, como resultado de una medición.

Cálculo mental - En esta sub-categoría se reúnen las actividades que involucran situaciones donde se requiere dar el resultado de un cálculo con números naturales sin emplear lápiz y papel.

Identificación - En esta sub-categoría se integran las actividades donde se requiere buscar y seleccionar el símbolo numérico asociado a un número natural dado.

Reconocimiento - En esta sub-categoría se agrupan las actividades donde se requiere encontrar diferentes expresiones que representan el número natural dado, ya sea que se exprese mediante colecciones y palabras-número.

Conjuntos - En esta sub-categoría se recogen las actividades donde se requiere identificar, comparar y relacionar, elementos y cardinales un conjunto dado.

Comparación de magnitudes - En esta sub-categoría se incorporan las actividades donde se comparan cantidades de magnitud, las cuales se expresan por medio de números naturales acompañados de las unidades correspondientes.

Solución de problemas - En esta sub-categoría se agrupan las actividades donde se emplean las operaciones básicas con números naturales para encontrar una respuesta a una o varias preguntas formuladas.

Composición de cantidades - Esta sub-categoría se compone de las actividades donde se requiere obtener la agrupación de varios números naturales para obtener un número natural dado. En estas situaciones se manipulan símbolos numéricos y se trabaja con adición de cantidades.

Descomposición de cantidades - Esta sub-categoría se compone de las actividades donde se requiere expresar un número natural en función de otros números naturales dados. En estas situaciones se manipulan símbolos numéricos y se trabaja con adiciones y sustracciones.

Conteo - Esta sub-categoría se compone de las actividades donde se requiere contar para obtener el número de elementos de una colección o para dar respuesta a una situación planteada ya sea de manera oral o escrita. El conteo se lleva a cabo mediante el uso de:

Colecciones de muestra: cuando el conteo utiliza colecciones homólogas a la cantidad que se quiere contar.

Colecciones de dedos: cuando el conteo utiliza los dedos para representar la cantidad que se quiere contar.

Constelaciones: cuando el conteo utiliza arreglos de puntos estandarizados para representar la cantidad que se quiere contar.

Numerales: cuando el conteo utiliza símbolos numéricos para llevar el control de la cantidad que se quiere contar.

Palabras-número: cuando el conteo utiliza palabras-número para llevar el control de la cantidad que se quiere contar.

Comunicación - Esta sub-categoría se compone de las actividades donde se requiere expresar una cantidad ya sea de manera escrita u oral.

Escritura de números: cuando en la comunicación de la cantidad emplea símbolos numéricos.

Lectura de números: cuando en la comunicación de la cantidad emplea palabras números.

6.4.3 Caracterización de las propuestas de los libros de texto de matemáticas de primer grado de educación básica y preescolar

Siguiendo el requerimiento de elaborar un análisis didáctico para determinar qué elementos y sentidos del número natural están circulando en el contexto escolar, en

particular, en los libros de texto, se desarrolla un estudio de las propuestas de trabajo plasmadas en 14 libros de texto de matemáticas, editados entre 1910 y 2008.

Para el procesamiento de la información se emplea el programa *N-Vivo 8* dada la naturaleza cualitativa de los datos a analizar. Cada libro es clasificado en una época de acuerdo con el año en el que fue impreso, a saber: época 1 (1910 – 1950); época 2 (1950 – 1970); época 3 (1970 – 1984); época 4 (1984 – 1998); época 5-1 (1998 – 2008); época 5-P (1998 – 2008). De cada libro de texto se seleccionan las páginas donde se refieren actividades relacionadas con el concepto de número natural. Este compendio de páginas se convierte en el insumo principal que va a ser codificado de acuerdo con las categorías presentadas en 6.4.2. La información obtenida, luego del proceso de codificación, se filtra en función de las ocho categorías principales: Contexto de aprendizaje, enfoque curricular, procedimientos, tipo de actividades, nociones relativas al número, definiciones de número, naturaleza del número y relaciones numéricas. Se espera caracterizar, a lo largo del tiempo, los elementos presentes en cada categoría, y con base en ello, elaborar un marco explicativo acerca de los modelos epistemológicos y cognitivos de número natural, presentes en los libros de texto de matemáticas de primer grado de básica y del preescolar. Dicho marco explicará una de las líneas donde se lleva a cabo el proceso transpositivo en torno al concepto de número natural en el contexto escolar colombiano: los libros de texto.

Resultados obtenidos al respecto del contexto de aprendizaje

Al respecto de los enfoques cognitivos y didácticos generales, que orientan las propuestas de trabajo de los libros de texto, en torno al concepto de número natural, se obtuvo que el contexto piagetiano fue el enfoque más empleado para orientar el proceso de enseñanza del número natural a lo largo de los períodos analizados. Ello se observa en la Ilustración 7, donde aparece presente desde la época 2 hasta la época 5-P. A la vez, se identifica que si bien el contexto piagetiano ha estado presente en esta época, ha sido menos frecuente su empleo en las épocas 5-1 y 5-P, períodos donde aparecen otros tipos de contextos de enseñanza en las propuestas de los libros de texto. También cabe señalar que el contexto piagetiano se empleó con mayor frecuencia durante las épocas 2 y 3, que se corresponden con la perspectiva curricular

de las matemáticas modernas y la renovación curricular, donde se enfatiza el trabajo escolar en las nociones básicas de la teoría de conjuntos como base para el estudio de los diversos sistemas matemáticos.

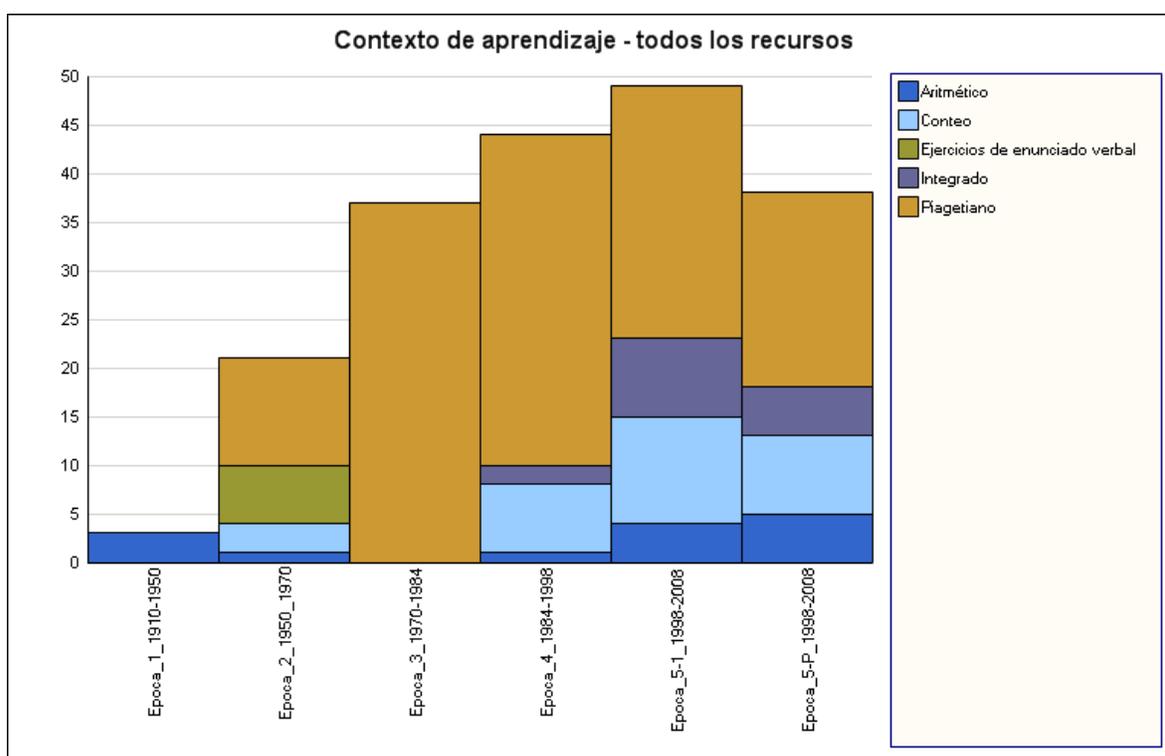
Del contexto de ejercicios de enunciado verbal, se puede mencionar que únicamente se presenta en la época 1, período en el cual el currículo trabajaba el concepto de número natural a partir del reconocimiento de unidades en situaciones cotidianas. Además, se prestaba atención a la escritura y a la operatividad de cantidades. Luego el trabajo propuesto por los libros de texto en cuanto a la solución de ejercicios de enunciados verbales, complementaba el trabajo algorítmico con símbolos numéricos.

En lo relacionado con el contexto aritmético se puede argumentar que, ha estado presente en las propuestas de trabajo de los libros de texto a lo largo de las épocas, excepto en la época 3, y que fue el único contexto empleado durante la época 1, donde el trabajo con el número natural se circunscribía a la representación de cantidades y al desarrollo de habilidades de cálculo mental o escrito. Se tiene además que si bien el contexto aritmético fue poco utilizado en las épocas 2 y 4, en las épocas 5-1 y 5-P, aumenta su frecuencia de uso en las propuestas de trabajo de los libros de texto. En particular se anota que en la época 5_P, donde se ubican los libros de texto del ciclo de educación preescolar, es mayor la manipulación de símbolos numéricos en función de sus relaciones numéricas, operaciones y propiedades, que en los libros de texto de primer grado, ubicados en el periodo 5-1. En general, se puede señalar que los contextos que aluden a la manipulación simbólica del número natural han formado parte de las propuestas de los libros de texto para enseñar y dar sentido, al número natural en el contexto escolar.

Por su parte, el contexto de conteo se emplea en las épocas 2, 4, 5-1 y 5-P, presentando mayor frecuencia en la propuesta de los libros de texto de la época 5-1. Ello se articula con la propuesta curricular de los lineamientos curriculares de matemáticas, formulados en 1998, donde se señala que el desarrollo del pensamiento numérico se logra a través de situaciones donde el estudiante pueda identificar los diferentes sentidos y usos del número natural, y donde el conteo se emplea como un proceso viable para encontrar respuestas, y desarrollar los principios que fundamentan

el concepto de número natural. Se observa además, que la frecuencia de empleo del contexto de conteo va aumentando a través de las épocas, y se va consolidando como un contexto alternativo para las propuestas de trabajo de los libros de texto, al respecto del número natural.

Finalmente, los resultados indican que el contexto integrado se incorpora en las propuestas de los libros de textos de las épocas 4, 5-1 y 5-P, situación que se relaciona con que los desarrollos teóricos cognitivos de la visión integradora, sólo se formulan en los finales de los años 80's e inicio de los 90's. Además, las propuestas curriculares de Renovación curricular y Lineamientos curriculares, destacan que para la enseñanza del número natural, es necesario emplear, tanto situaciones de conteo, como relaciones lógicas de inclusión y orden de clases. También cabe señalar que el contexto integrado se consolida como otro de los enfoques que emplean los libros de texto para enseñar el concepto de número en la actualidad.



Gráfica 1

Implicaciones

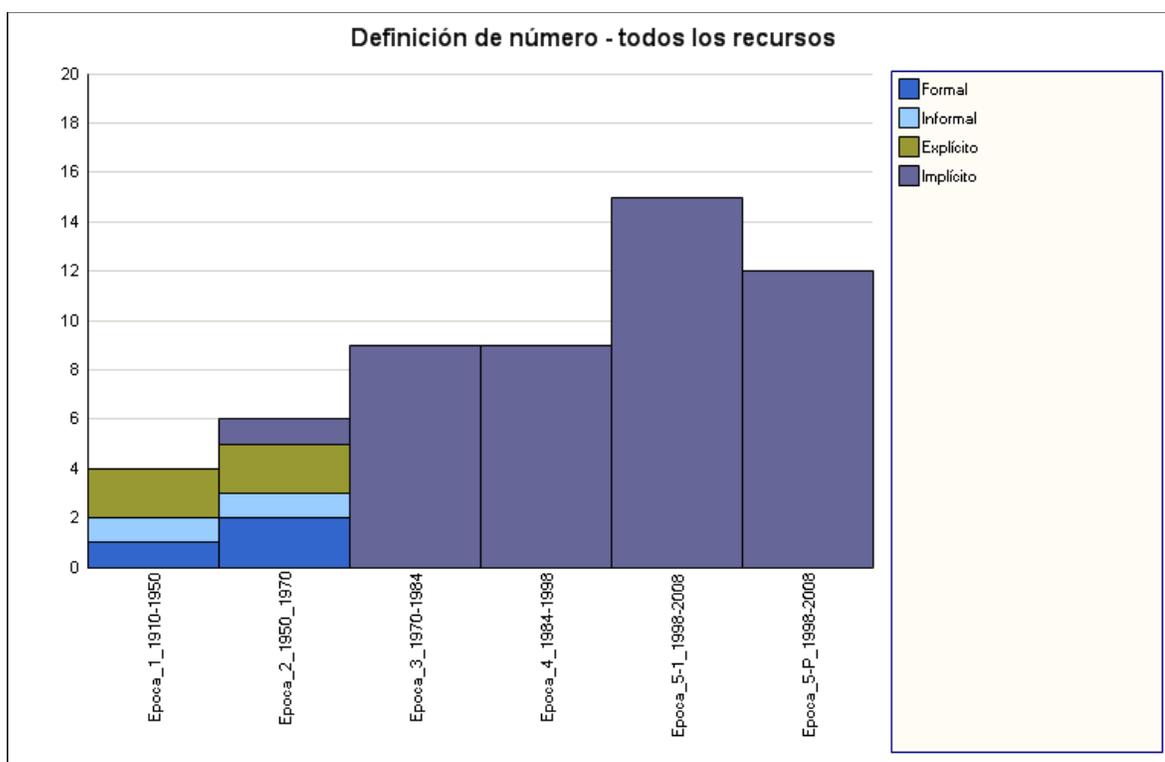
De acuerdo con los resultados obtenidos al respecto del contexto de aprendizaje empleados por los libros de texto para la enseñanza del número natural se puede inferir que:

- Se reconoce que el contexto piagetiano ofrece un marco referencial potente para el diseño de las propuestas de trabajo de los libros de texto.
- Al emplear comúnmente el contexto piagetiano, como un enfoque para el diseño de las propuestas de trabajo de los libros de texto, se continúa promoviendo en el contexto escolar, que el concepto de número natural se construya sólo desde las relaciones lógicas entre clases, y en función de la conservación de la cantidad. Esta perspectiva deja de lado, la construcción de otros sentidos del número: como medida, como código, como tecla, entre otros. Además, las propuestas que se enmarcan en el contexto piagetiano, no reconocen que las experiencias previas que ha tenido el estudiante, al respecto de nociones numéricas (conteos, juegos de puntajes, cálculos con dinero, etc.), sirvan como base para las conceptualizaciones en torno al número natural. Así, la permanencia de este contexto en las propuestas de los libros de texto, sesga el tipo de conceptualizaciones y sentidos que pueda construir el niño en torno al concepto del número natural.
- Los contextos alternativos como el conteo o el integrado no han sido incorporados masivamente en las propuestas de los libros de texto, pese a estar sustentados en desarrollos teóricos contemporáneos que incorporan perspectivas sociales acerca de la construcción del conocimiento matemático.
- Las propuestas de trabajo de los libros de texto actuales (del año 2000 a la fecha), al respecto del concepto de número natural, integran diferentes contextos de aprendizaje, lo cual puede asumirse como un factor a favor, dado que la riqueza de enfoques, puede permitir que los estudiantes establezcan múltiples relaciones conceptuales en torno al número natural. Pero queda abierto el interrogante acerca de la coherencia e integralidad con las que cada contexto es integrado en la propuesta de los libros de texto.

Resultados obtenidos al respecto de la definición de número natural

En la codificación y análisis de las propuestas de trabajo de los libros de texto se encontró que, en las épocas 2, 3, 4, 5-1 y 5-P, sólo se menciona el número natural durante el contexto y desarrollo de las actividades, pero no se presenta una definición explícita del mismo. Es decir, las propuestas de los libros de texto formulan de manera implícita la definición de número natural. En contraste, en las propuestas de los libros de texto de la época 1 y 2, si se enuncia, de manera explícita, una definición de número natural.

Al respecto de la estructura que tienen los enunciados empleados para definir el número natural, se observa que en las propuestas de los libros de textos de la época 1 y 2, los enunciados emplean nociones y relaciones que han sido previamente definidas en el contexto del libro. Es decir, los enunciados empleados para definir el número natural son de carácter formal. En menor proporción, durante las épocas 1 y 2, las propuestas de trabajo de los libros de texto, emplean enunciados informales para definir el concepto de número natural.



Gráfica 2

Implicaciones

De acuerdo con los resultados obtenidos al respecto de los modos y las condiciones en que se formulan las definiciones de número natural, en los libros de texto, se puede inferir que:

- Existe la tendencia de los libros de texto de primer grado y de preescolar, a no explicitar definiciones del concepto de número natural. Esto se puede explicar a partir de dos aspectos. El primero alude al rango de edades de los estudiantes a quien se dirige el texto, pues ellos se encuentran entre los 4 y 7 años aproximadamente y están iniciando su proceso de lectura en lengua materna. Esto implica que se empleen pocos enunciados para la formalización de los conceptos estudiados en clase. Un segundo aspecto se refiere a una interpretación sesgada de los principios constructivistas, donde es el estudiante quien construye sus propios conceptos, y en aras de respetar ese proceso de construcción, no es pertinente explicitar definiciones de los conceptos que se estudian.
- Si bien los libros de texto plantean conjuntos de actividades donde se refiere o se emplea el número natural sin presentar una definición, dado que se espera que el estudiante a través del proceso construya sus propias conceptualizaciones, se genera un riesgo en cuanto a que dichas propuestas se pueden reducir a la simple manipulación de materiales (activismo) y no trascender para alcanzar los niveles de abstracción requeridos. Se requiere entonces la acertada intervención del docente y los espacios de socialización para brindar orientaciones que le permitan al estudiante construir el concepto de número natural.

Resultados obtenidos al respecto de la nociones relativas al número natural

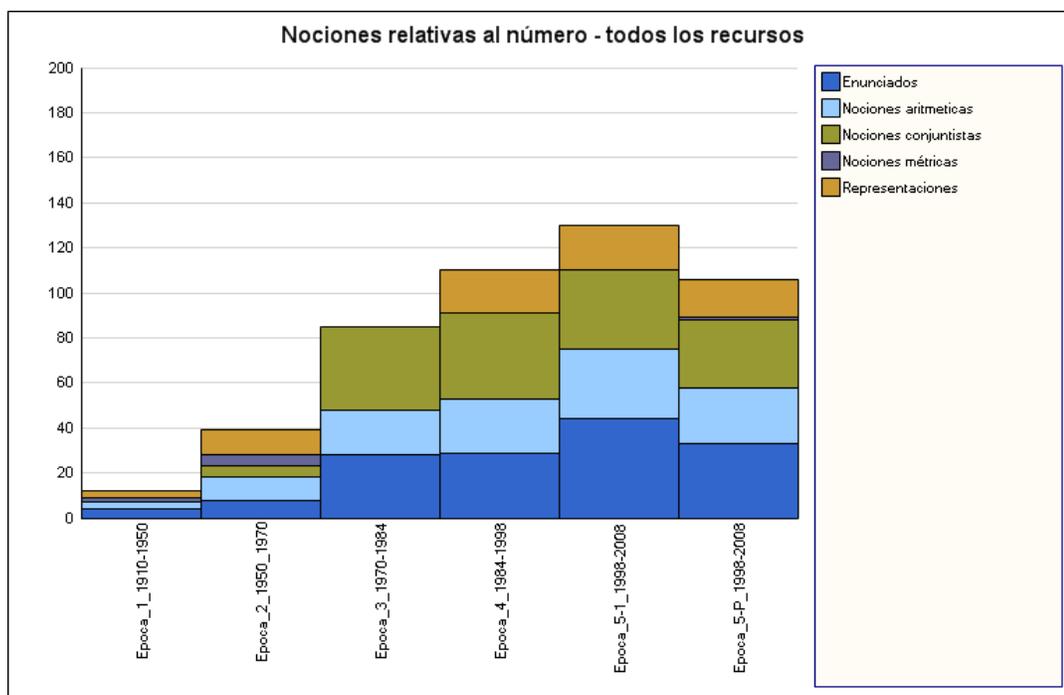
En el análisis de las propuestas de los libros de texto, al respecto de las definiciones y/o explicaciones de nociones relacionadas con el concepto de número natural, se obtuvo que las nociones aritméticas siempre han estado presentes como elementos que ayudan a la conceptualización del número natural. Además, tales nociones se presentan en menor proporción en la época 1, y van aumentando su presencia en las propuestas de los libros de texto en las épocas 2, 3 y 4, hasta consolidarse en la época 5-1. De acuerdo con lo anterior, se puede concluir que las

nociones de cardinalidad, ordinalidad, cantidad, contar, orden, operaciones y notaciones, se han empleado como elementos y principios que fundamentan y dan sentido al concepto de número natural.

En contraste, las nociones métricas que aluden a la identificación y manipulación de magnitudes y sus correspondientes procesos de medición, han estado presentes en muy baja proporción en las propuestas de trabajo de los libros de texto; de hecho, sólo se registra el contexto métrico en las épocas 1, 2 y 5-P. Cabe resaltar que si bien las nociones métricas han sido poco incorporadas, en las épocas 1 y 2 si son asumidas en las propuestas de trabajo de los libros de texto como nociones relevantes. Ello encaja con los planteamientos curriculares de dichas épocas, donde el número natural se enseñaba en función de su operatividad y su utilidad como herramientas para expresar la cuantificación de magnitudes.

En lo relativo a la nociones conjuntistas se observa que se introducen en las propuestas de los libro de texto desde la época 2, y continúan presentes a través de las épocas hasta el tiempo actual. Es de señalar que en las épocas 3, 4, 5-1 y 5-P, las nociones conjuntistas se consolidan como elementos centrales para la enseñanza del número natural.

Por su parte los elementos y las nociones relativas a la representación de cantidades ya sea de manera oral o escrita, han estado presentes en las propuestas de los libros de texto desde el inicio del siglo XX hasta la actualidad, exceptuando la época 3, donde no se registra ningún tipo de noción relativa a la representación del número natural. Es de anotar que las representaciones y nociones empleadas para comunicar cantidades ha sido un aspecto que ha conservado su importancia relativa, al interior de las propuestas de trabajo de los libros de texto, durante las épocas en las que ocurre.



Gráfica 3

A continuación se detallan las nociones aritméticas, conjuntistas y de representación, que se integran en las propuestas de trabajo de los libros de texto. Las demás nociones no se detallan dado que no se integran frecuentemente en las propuestas de los libros de texto.

Nociones aritméticas

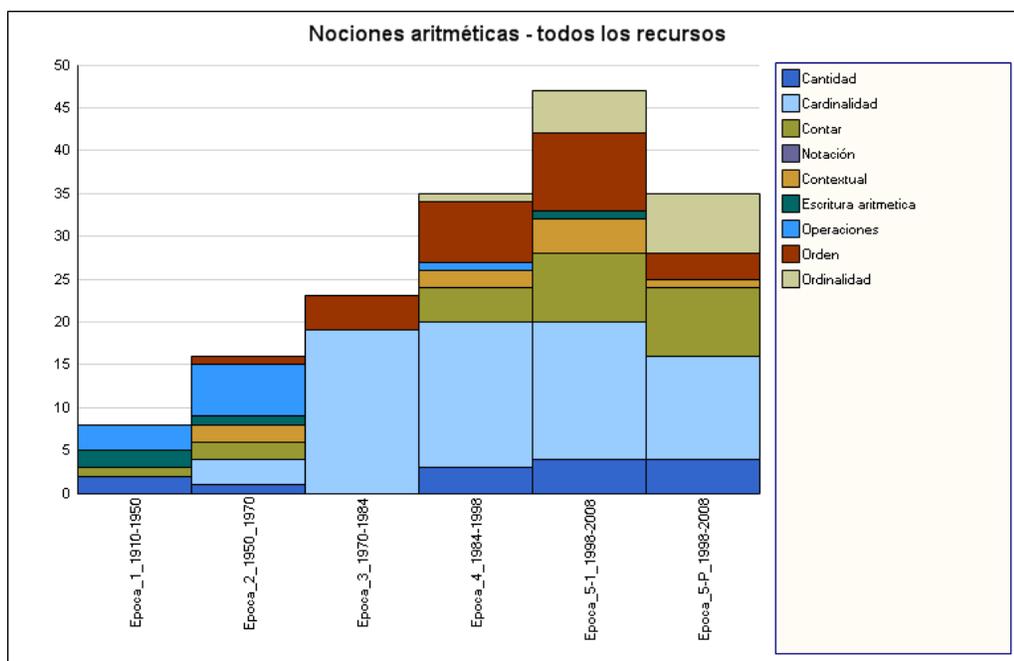
Al respecto de las nociones aritméticas se puede señalar que la cardinalidad es uno de los principios que más se exploran en las propuestas de los libros de texto. Ello implica que es frecuente encontrar en las propuestas de los libros de texto, actividades orientadas al establecimiento de la cardinalidad de un conjunto o a la comparación de los mismos. Otra noción que también se privilegia en las propuestas de los libros de textos es el orden. Esta relación se establece a través de la comparación de cardinales de conjuntos o comparando símbolos numéricos. Se resalta en particular el uso del símbolo mayor y menor que. De igual forma el proceso de contar ha sido integrado todas las épocas excepto en la época 4 que corresponde al trabajo con la matemática moderna, donde los procesos de formalización son el centro de atención.

Llama la atención que la noción de cantidad se refiera en poca proporción en las propuestas de trabajo de los libros de texto, dado que ella ha sido la base para la consolidación y formalización del concepto de número natural a lo largo de la historia de las matemáticas. También es de señalar que los contextos donde se indique el sentido de las operaciones con naturales, o donde se expliciten los pasos a seguir para resolver un algoritmo, se introducen sólo en las épocas 1, 2 y 4, y su proporción en las propuestas de trabajo de los libros de texto disminuye hasta desaparecer en la época actual.

Por su parte, la ordinalidad se ha incorporado en las propuestas de los libros de texto de las épocas 4, 5-1 y 5_p, lo cual la ubica como una noción que se introduce en la época contemporánea. La ordinalidad es señalada en los lineamientos curriculares de matemáticas como uno de los contextos donde se usa el número natural, de ahí que, las actividades donde se requiere establecer una secuencia ordenada con los elementos de un conjunto, se integre en los años posteriores a la formulación de los lineamientos.

En lo relativo al uso de la notación numérica u operativa, se observa que las propuestas de trabajo de los libros de texto, recurren al contexto para dotar de significado los símbolos usados. Es decir, los textos no centran su atención en explicar al lector cuál es el significado de los símbolos que allí se introducen y emplean, sino que esperan que sean los mismos estudiantes quienes infieran tales sentidos, a partir del uso de los símbolos en una situación determinada.

En términos generales se puede concluir que las nociones aritméticas presentes en las propuestas de trabajo en el libro de texto, se articulan y se desarrollan a partir de la noción de cardinalidad. Por ende, el sentido asignado al número natural es desde lo cardinal.



Gráfica 4

Nociones conjuntistas

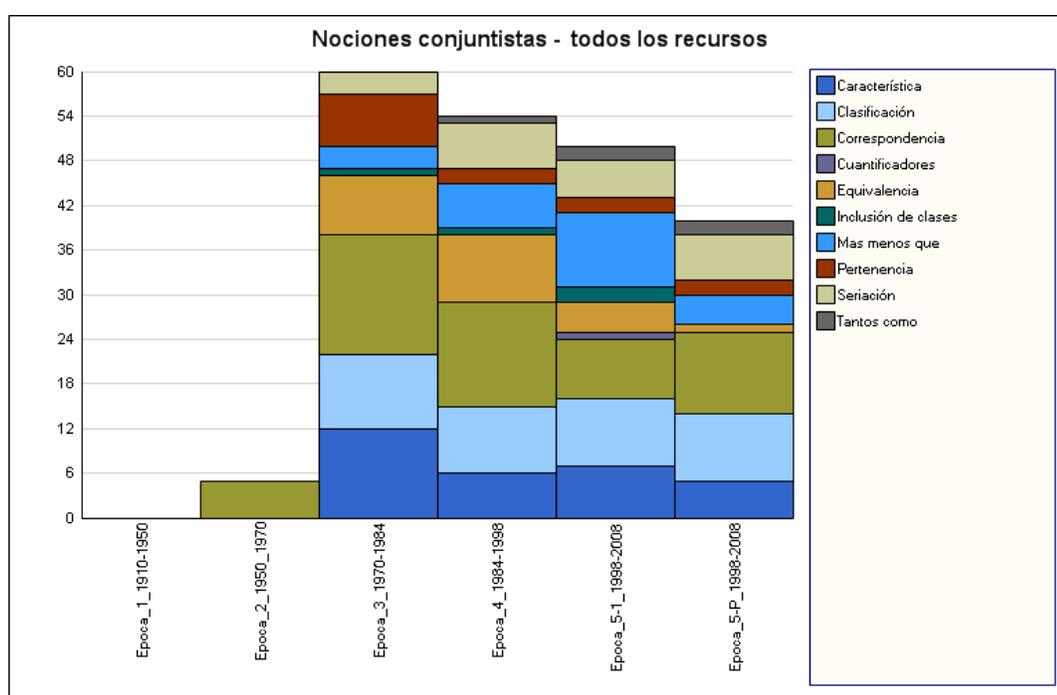
Las nociones conjuntistas han sido incorporadas en las propuestas de trabajo de los libros de texto, alcanzando su mayor frecuencia en la época 3, y con tendencia a disminuir, pero no a desaparecer, en la época actual.

Las nociones de correspondencia, clasificación, seriación e identificación de la característica específica de los elementos de un conjunto, han sido frecuentemente incorporadas en las propuestas de trabajo de los libros de texto a lo largo de las épocas. Ello se corresponde con la tendencia a emplear el enfoque piagetiano como contexto para la enseñanza del concepto de número natural dado que el marco teórico expuesto por Piaget, retoma los principios de correspondencia, clasificación, e inclusión jerárquica como base para la construcción del número natural.

Por su parte, los cuantificados sólo se refieren en la época 5-1 y tienen asociado una pequeñísima proporción en la propuesta de trabajo de los libros de texto. Situación similar sucede con la inclusión de clases, noción que sólo aparece referida en la época 3, 4 y 5-1.

En lo que respecta a los procesos de comparación, dados por relaciones de equivalencia (tantos como) y de orden (más o menos que), se observa que han permanecido en la misma proporción durante las épocas.

En términos generales se puede concluir que las nociones conjuntista presentes en las propuestas de trabajo de los libro de texto, se articulan y se desarrollan a partir de la identificación de la característica de un conjunto dado y con base en ello se establecen clasificaciones y correspondencias. Por ende, el sentido asignado al número natural es como el cardinal asignado a un conjunto.



Gráfica 5

Representaciones

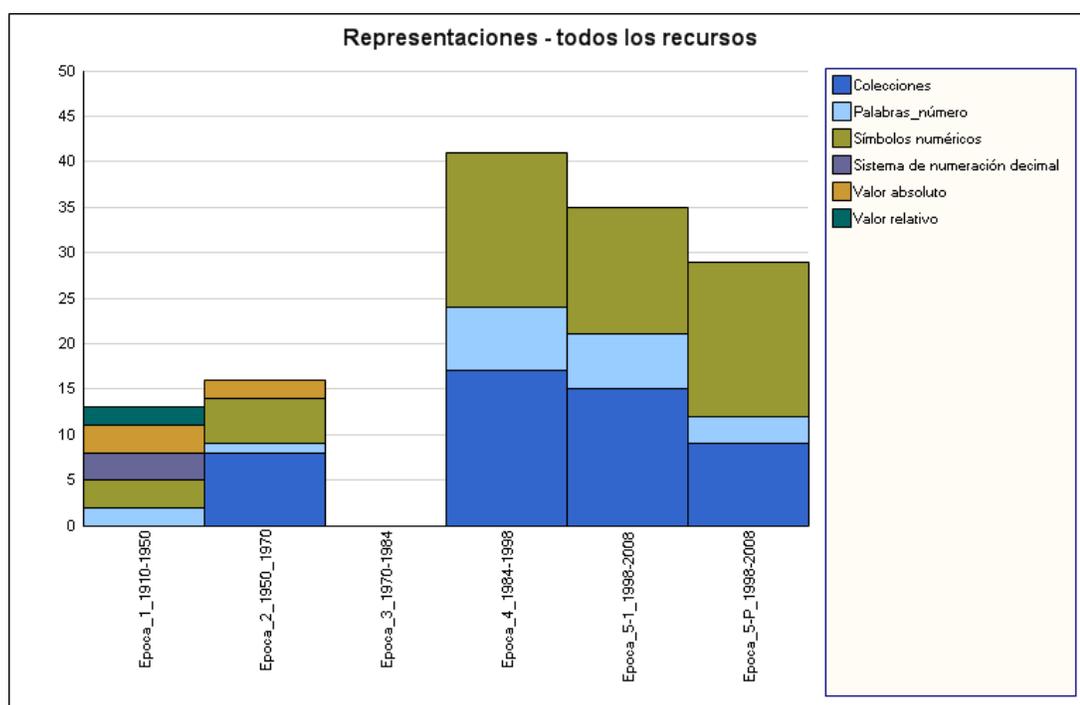
De acuerdo con los datos obtenidos, se observa que, las nociones relativas a la representación de la cantidad no se encuentran en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 3. En contraste, en las demás épocas, si se emplean frecuentemente colecciones y símbolos numéricos para representar la cantidad.

Cabe señalar que en la época 1, las propuestas de trabajo de los libros de texto, no incorporan representaciones de colecciones, sino que centran toda la atención en las

representaciones simbólicas del número natural. En este tipo de propuestas, se privilegia la escritura y lectura de cantidades en el sistema de numeración decimal, destacando el valor absoluto y relativo de las cifras. Esta perspectiva de trabajo se corresponde con el enfoque curricular de la época, donde había un marcado interés en la ejercitación de técnicas de cálculo y algoritmos con números naturales.

En lo relativo a las palabras número, se tiene que las propuestas de trabajo de los libros de texto las incorporan como elemento que permite representar cantidades, pero no dedican una franja amplia para el desarrollo de actividades en este sentido. Esta situación quizás se deba a que las palabras número se aprenden a través de la comunicación en lengua natural, y por ello la escuela sólo deba formalizar la escritura de las mismas.

En general se puede plantear que las propuestas de trabajo de los libros de texto emplean colecciones y símbolos numéricos para representar la cantidad. Esta perspectiva privilegia el sentido cardinal del número natural.



Gráfica 6

Implicaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos al respecto del empleo de nociones que se relacionan, y aportan para la conceptualización del número natural, se puede afirmar que:

- Las propuestas de trabajo de los libros de texto no abordan de manera aislada el concepto de número natural, si no que integran un conjunto de nociones, principios y relaciones, que le brindan al estudiante un panorama amplio del saber matemático. La presentación integrada del saber matemático relativo al concepto de número natural, le ofrece al estudiante, la posibilidad de construir significados y relaciones mentales mucho más amplias que si se limitara a estudiar el concepto de número natural en sí mismo.
- Si bien las propuestas de trabajo de los libros de texto integran nociones conjuntistas, métricas, aritméticas y relativas a las representaciones, para brindar un panorama amplio de significación del concepto de número natural, queda abierta la inquietud acerca de la coherencia y el nivel de articulación con que son presentadas tales nociones, al interior del libro de texto.
- Los libros de texto incluyen en sus propuestas de trabajo, nociones y principios, que le permiten al estudiante dotar de significado al número natural. Tales nociones ponen de manifiesto que el número natural no solo se emplea desde su sentido cardinal, sino que también puede verse desde su aspecto ordinal, desde su carácter lógico y como expresión que permite cuantificar magnitudes. A pesar de reconocer la amplia gama de significados que se pueden construir en torno al concepto de número natural, los libros de texto privilegian las nociones aritméticas, conjuntistas y lo relativo a la representación de la cantidad. De ahí que el profesor debe darse a la tarea de incorporar en sus actividades de clase otras nociones y principios que le permitan al estudiante ampliar conceptualizaciones en torno al número natural.
- La fuerte tendencia a incluir nociones conjuntistas en las propuestas de trabajo en los libros de texto, evidencia que existe una arraigada concepción de que el número natural se construye a partir de relaciones lógicas entre conjuntos. Dicha perspectiva permite realizar, de manera interna (mental), operaciones lógicas para

establecer clases equipotentes que tenga la propiedad de poseer el mismo cardinal. Frente a esta forma de construir el número natural se formulan algunas inquietudes, dado que se no se consideran los contextos prácticos de donde han surgido otras formalizaciones del número natural.

- Las propuestas de trabajo de los libros de texto incorporan de manera implícita las nociones y los principios que se relacionan con el número natural. Esta forma de presentación de la información puede generar que el estudiante no logre reconocer y relacionar ese compendio de nociones aritméticas, métricas, conjuntistas y de representación, que dotan de sentido y significado al número natural. El docente que emplee dichas propuestas de trabajo debe generar espacios de socialización y puestas en común, donde los estudiantes puedan interactuar y llegar a formulaciones comunes acerca de las nociones y principios que se relacionan con el número natural.
- Teniendo como referente que los libros de texto actuales no hace mención de las nociones métricas y que los planteamientos dados desde los lineamientos curriculares de matemáticas, con respecto al desarrollo del pensamiento numérico, resaltan las nociones métricas y los contextos de medida como elementos que redimensionan el significado del número natural, es pertinente que los docentes integren a sus actividades de clase, aspectos donde el estudiante reconozca el número natural desde su carácter métrico. Además, los estudios epistemológicos en torno al concepto de número señalan que los contextos de medida fueron potentes para la consolidación y formalización del concepto.

Resultados obtenidos con respecto de la naturaleza del número natural

Al estudiar los datos obtenidos en cuanto a la naturaleza que se otorga al número natural en las propuestas de trabajo de los libros de texto se observa que dicha naturaleza se enmarca necesariamente desde en unos supuestos epistémicos y ontológicos particulares. En cada propuesta de trabajo se puede identificar y caracterizar las formas de organización y validación del conocimiento al igual que la naturaleza y la forma de constitución del número natural.

A continuación se detallan cuáles principios se integran en las propuestas de trabajo de los libros de texto para definir el concepto de número natural.

Epistémica

El concepto de número natural, a lo largo de la historia, ha sido construido en función de los principios epistemológicos propios del pensamiento dominante de la época en que se lleva a cabo la formalización de dicho concepto. Esos principios epistemológicos permean y sustentan las propuestas de trabajo de los libros de texto.

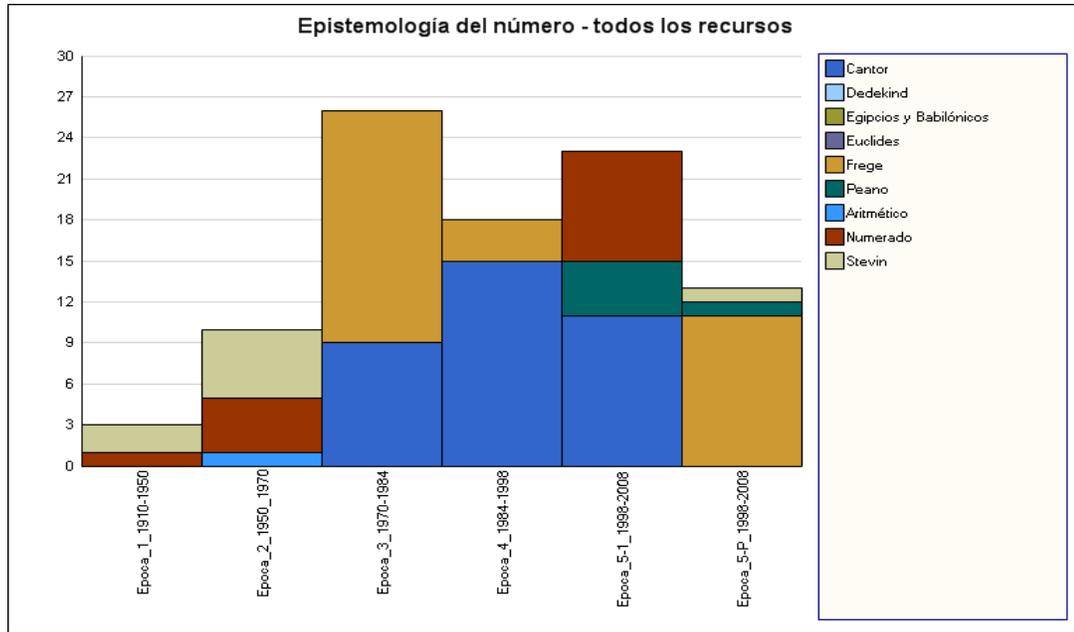
Al analizar los datos obtenidos se tiene que una de las perspectivas epistemológicas frecuentemente incorporadas en las propuestas de trabajo de los libros de texto es la de Cantor, que se reporta en la época 3, 4 y 5-1. Esto implica que el número natural es construido como la característica común que tienen todos los conjuntos que poseen el mismo cardinal, y que se proceda por adición de un nuevo elemento, para generar el siguiente número natural. De ahí que las actividades propuestas en los libros de texto, se centren en el establecimiento de correspondencias entre conjuntos, en determinar la cardinalidad de conjuntos dados, en la comparación de conjuntos a partir de su cardinal, en generar los números naturales y la serie numérica en general, a partir de agregar un elemento más al conjunto de base, en abordar la adición en función de la unión de conjuntos, entre otros.

Otra de las perspectivas epistemológica que emplean frecuentemente las propuestas de trabajo de los libros de texto es la de Frege. En las épocas 3, 4 y 5-P se observan actividades y enunciados donde el número natural se asume como un objeto lógico que expresa la misma extensión de un concepto. En este sentido, las actividades se enfocan a la identificación de todos aquellos conjuntos que tienen el mismo cardinal, en determinar cuáles situaciones involucran el mismo número, en reconocer el símbolo numérico y la palabra número asociados a un número particular, entre otros. El número natural se construye entonces, como concepto en sí mismo a partir del aspecto cardinal.

En particular, las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 1 y 2, no incorporan las perspectivas cardinales de Cantor y Frege, sino que se inscriben en los referentes epistémicos de Stevin y Platón (en el sentido del número numerado). Así, en

los libros de estas épocas, es común encontrar actividades y enunciados donde el número natural es asumido como expresión de cantidad, ya fuera como resultado de procesos de medida y de conteo. Se encuentran además, algunas actividades y representaciones que aluden al número como multitud concreta de objetos (número numerado). De acuerdo con la tendencia de trabajo en estos períodos, el número natural se caracteriza en función de su naturaleza concreta como elemento que permite expresar, relacionar y operar con cantidades.

Por otro lado, sólo las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 5-1 y 5-P, emplean enunciados y actividades donde el número natural se construye aplicando la propiedad de “el siguiente de”. En estas propuestas es usual encontrar actividades donde se requiera: escribir qué número va antes o después de uno dado, componer y descomponer números a partir de la adición o sustracción de 1’s (unos), completación de series numéricas (ascendente o descendentes), entre otras. Estas características permiten inferir que las propuestas de trabajo de los libros de texto de estas épocas, asumen que el número natural puede ser construido de manera secuencial desde 0 (*cero*) en adelante, aplicando la propiedad del sucesor de.



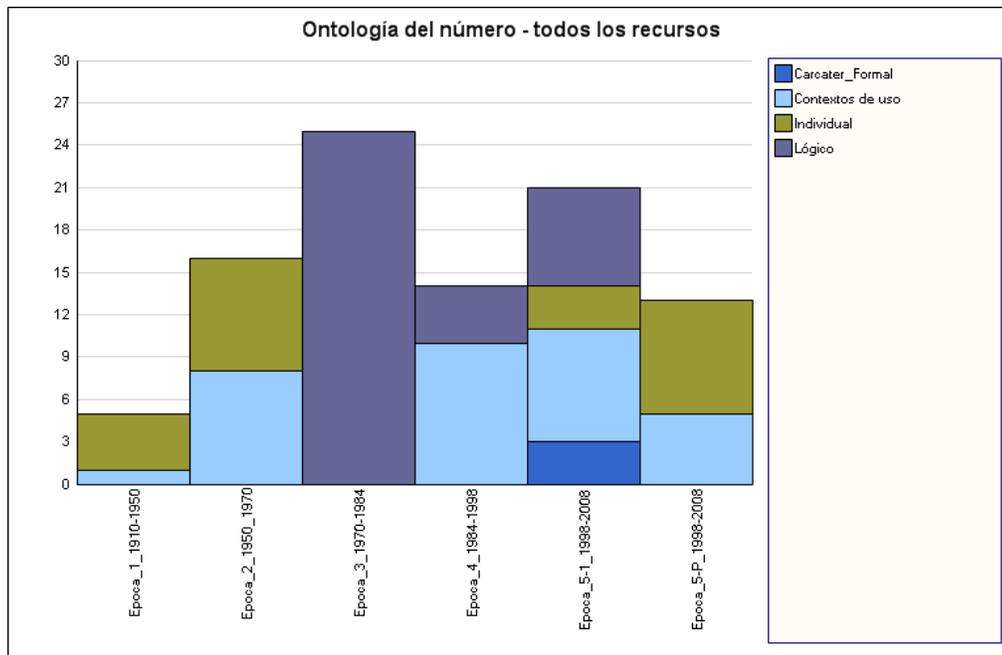
Gráfica 7

Ontológica

En cuanto a las acciones que identifican el estatus y la naturaleza asignada al número natural, en las propuestas de trabajo de los libros de texto se tiene que en las épocas 3, 4 y 5-1, el número es definido en términos de clases o en función de la propiedad de equinumerabilidad. En particular, durante la época 3, el número natural sólo se aborda desde su naturaleza lógica. Ello concuerda con el enfoque curricular de las matemáticas modernas, donde el número se construye a partir de las relaciones lógicas entre conjuntos.

Por otra parte se tiene que en las épocas 1 y 2 el número natural es definido como un ente aislado con existencia propia. Esta perspectiva epistemológica está en consonancia con el enfoque curricular de las épocas en mención. En esos períodos, el número natural se estudiaba en función de sus representaciones y operatividad, independiente de los significados contextuales que se le pudieran asignar. Ahora bien, la naturaleza individual del número natural también se presenta en las épocas 5-1 y 5-P. Tal incorporación puede explicarse a partir de los elementos referidos en los lineamientos curriculares, donde se propende por integrar a las propuestas de clase, los diferentes sentidos que se le pueden asignar al número natural, entre ellos, se encuentra el número como ente aislado.

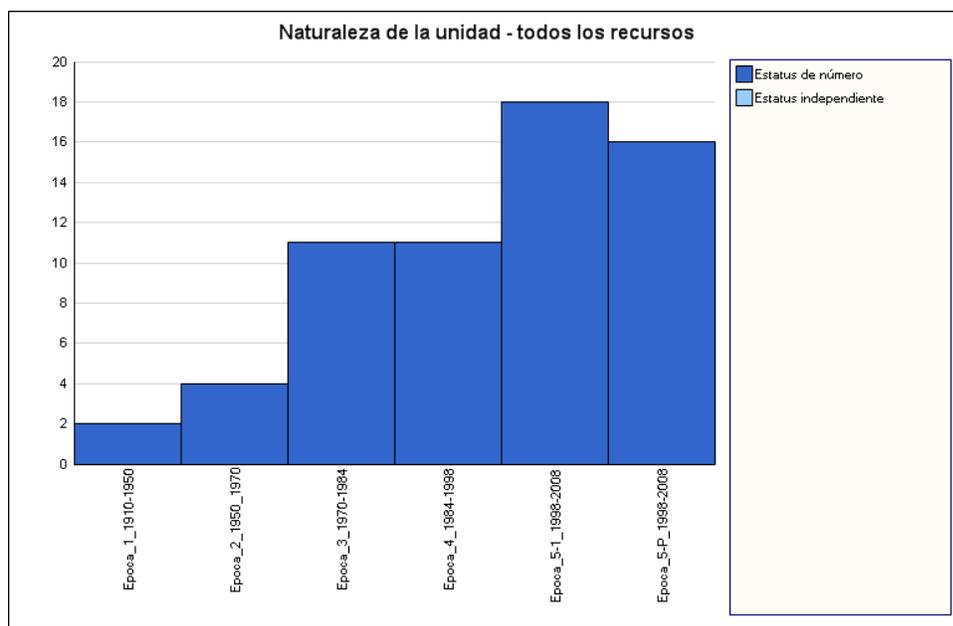
Las propuestas de trabajo de los libros de texto también proponen identificar la naturaleza del número natural a partir de los contextos donde se usa. Esta perspectiva ontológica se identifica en las propuestas de los libros de texto de las épocas 1, 2, 4, 5-1 y 5-P. En función de ello se puede decir que si bien los libros de texto determinan una naturaleza formal del número natural (desde su carácter lógico e individual), también destacan y recuperan su naturaleza concreta en relación con los usos del mismo.



Gráfica 8

Naturaleza de la unidad

En las propuestas de trabajo de los libros de texto se observa una clara tendencia a reconocer que la unidad es de la misma naturaleza que el número natural. De ahí que se opere y se establezcan relaciones con ella, al igual que con otro número natural. Se tiene entonces que los libros de texto no asumen ninguna reflexión o conflicto entre si la unidad es número o no, hecho que si fue relevante en el período del pensamiento griego. Se asume entonces que la unidad es otro número más y con el cual se generan los demás números naturales.



Gráfica 9

Implicaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos al respecto de la naturaleza del número natural, se puede afirmar que:

- En general, en las propuestas de trabajo de los libros de texto existe una tendencia a asumir el número natural desde su naturaleza lógica y destacar el sentido cardinal del mismo. Dicho carácter lógico del número se corresponde con la preponderancia del enfoque curricular piagetiano.
- Si bien las actividades de los libros de texto en sí mismas no son suficientes para generar en los estudiantes los niveles de abstracción requeridos en torno al número natural, las acciones y reflexiones que se potencian a través de sus propuestas de trabajo, si conducen a que el estudiante construya ciertos sentidos y significados en torno a dicho concepto. Es pertinente que el docente reconozcan los sentidos que cada libro de texto privilegia y en función de ello, complemente sus propuestas de trabajo de aula, de tal forma que integre actividades que enriquezcan los sentidos y funcionalidades del concepto de número natural.
- Los libros de texto de cada época incorporan en sus propuestas de trabajo una o dos perspectivas epistemológicas para orientar la conceptualización del número

natural. Esta referencia múltiple puede verse desde dos puntos. Uno, donde el asumir varias perspectivas epistemológicas puede generar conflicto en los esquemas mentales de los niños, dada la ambivalencia de significados asignados al número natural. Otro, donde la coexistencia de varios sentidos del número puede ampliar el horizonte de significaciones. El reto se le formula nuevamente al docente, quien tiene que decidir cómo estructurar sus actividades y cómo lograr a través de ellas, dotar de sentido al número natural.

- En la propuesta de los libros de textos no se observa ninguna distinción frente a la naturaleza de la unidad, tal como se encuentra en la época de los griegos. Los libros de texto superan la distinción entre unidad y número natural, y operan naturalmente con la unidad, la asumen como un número más.
- Las perspectivas epistemológicas y ontológicas que orientan las propuestas de trabajo de los libros de texto acerca del número natural, se corresponden en gran medida con las propuestas curriculares de cada época. De ahí que el proceso de transposición didáctica llevado a cabo por las casas editoriales no generan mayores cambios en el sentido y funcionalidad del concepto de número natural determinado por la noosfera a través de las propuestas y programas curriculares.

Resultados obtenidos al respecto de los procedimientos

En el análisis de las propuestas de los libros de texto, al respecto de los procedimientos válidos para expresar y relacionar números naturales se obtuvo que es frecuente encontrar enunciados y representaciones que indiquen cómo relacionar números naturales, ya sea por equivalencia o por diferencia. Esta tendencia se identifica en las épocas 1, 2, 4, 5-1 y 5-P, y se enfatiza en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 5-1. Dicho énfasis se puede explicar a la luz de los referentes dados por los lineamientos curriculares y de la perspectiva integradora sobre el aprendizaje del número natural. Los lineamientos argumentan que para potenciar el desarrollo del pensamiento numérico es necesario comparar, componer y descomponer cantidades en el marco de situaciones problema³⁶. Por su parte, la

³⁶ Las situaciones problema se puede asumir como “un contexto de participación colectiva para el aprendizaje en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto

perspectiva integradora propone que el proceso de construcción del número natural, debe integrar situaciones de comparación, correspondencia y conteo de cantidades.

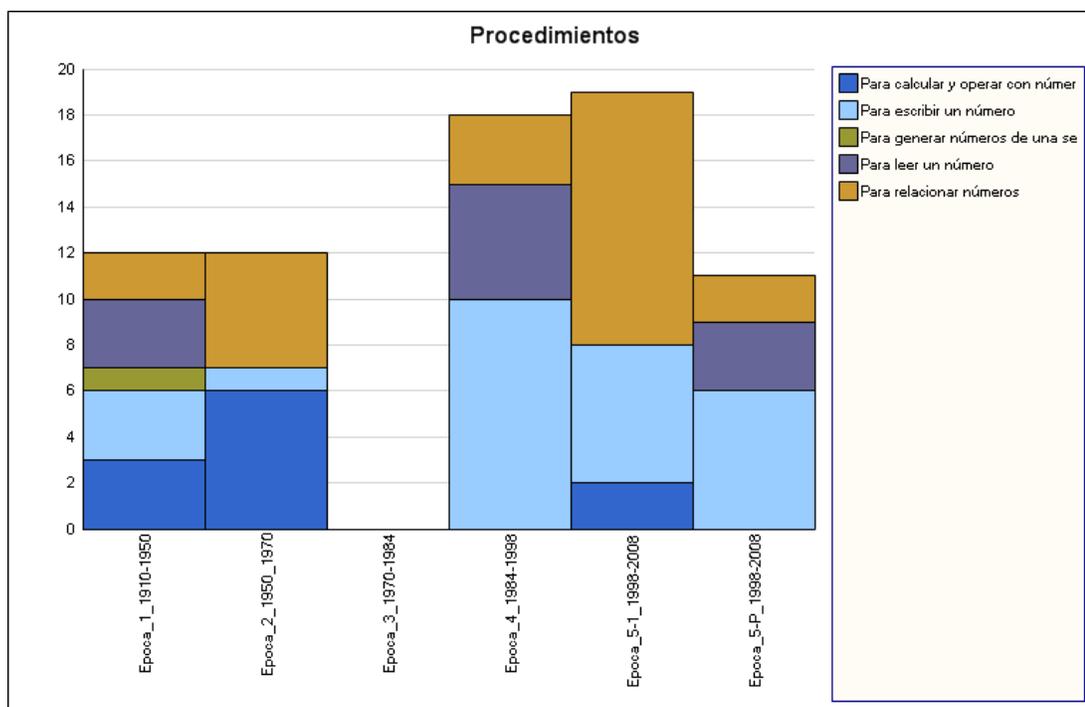
Otro procedimiento que se destaca en las propuestas de trabajo del libro de texto son los relativos a la escritura de número naturales. Dichos procedimientos se presentan en las épocas 1, 2, 4, 5-1 y 5-P, y se enfatiza en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 4. Esta tendencia encaja con la perspectiva de la Renovación curricular, donde el enfoque de sistemas resalta la necesidad de definir y conocer los elementos del sistema, en el nivel simbólico, en este caso, los números naturales. Este mismo enfoque puede justificar también, la incorporación de procedimientos para leer números en la época 4.

En particular, los procedimientos para calcular y operar con números naturales, se presentan con mayor énfasis en las épocas 1 y 2, donde el número natural era estudiado en función de sus representaciones y operatividad, independiente de los significados contextuales que se le pudieran asignar. De ahí el énfasis en los procedimientos algorítmicos. En contraste, en la época 5-1, los procedimientos para calcular y operar ocupan una pequeña franja en las propuestas de trabajo de los libros de texto. Ello puede deberse a que los lineamientos curriculares no centran la atención en los algoritmos sino que destacan la comprensión de la operación y los procesos de estimación y aproximación.

Es de señalar que el procedimiento menos frecuente fue el que indica cómo generar nuevos números naturales, que sólo se identifica en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 1.

Llama la atención que en los libros analizados en la época 3, no se encuentran referencias a explicaciones de procedimientos para comunicar, relacionar y operar cantidades.

de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducente a la construcción de los conocimientos” (Obando & Múnera, 2003, p. 1)



Gráfica 10

Implicaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos con respecto a los procedimientos que proponen los libros de texto para comunicar, relacionar y operar cantidades con números naturales, se puede inferir que:

- Las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 1 tienen una marcada tendencia a explicitar los procesos que los estudiantes deben realizar en torno al número natural, dado que se señalan procedimientos para escribir, para leer, para operar, para relacionar y para generar números naturales. Estas formas de trabajo se corresponden con el enfoque curricular de la época donde el estudiante debía ejercitarse en los procesos denotados por el profesor.
- Pese a que en las propuestas de trabajo de los libros de texto de las diferentes épocas sólo se explicitan algunos procedimientos que los estudiantes deben seguir, es marcado el carácter prescriptivo de los libros de texto.
- Los procedimientos más empleados en las propuestas de trabajo de los libros de texto son los que aluden a la escritura y relación de cantidades. Ello puede

obedecer a la necesidad de institucionalizar entre los estudiantes, los elementos simbólicos que se emplean en la sociedad y que van a ser objeto de estudio en la escuela, ya que parte de la función de la escuela es difundir el conocimiento científico, que en este caso alude a los números naturales expresados a través del sistema de numeración decimal.

- Los procedimientos que señalan los libros de texto para comunicar, relacionar y operar cantidades con números naturales responden en general, a las necesidades sociales de la época donde se inscribe el texto, dado que el número natural se convierte en un instrumento de comunicación.
- Parte de la estructura que presentan los libros de texto para conceptualizar el número natural son los procedimientos para escribir y relacionar números. Tales procedimientos permiten comunicar números y establecer relaciones, elementos básicos para dar sentido al número en una estructura matemática.

Resultados obtenidos con respecto a las relaciones numéricas

En las propuestas de trabajo de los libros de texto, con respecto a tipo de relaciones que se pueden establecer entre números naturales se observa que hay tendencia en todas las épocas hacia los procesos de comparación entre cardinales de conjuntos o entre símbolos numéricos. La presencia de este proceso como eje central en las propuestas de trabajo de los libros de texto, puede ser debido a que la comparación es la base para establecer relaciones formales de orden y equivalencia.

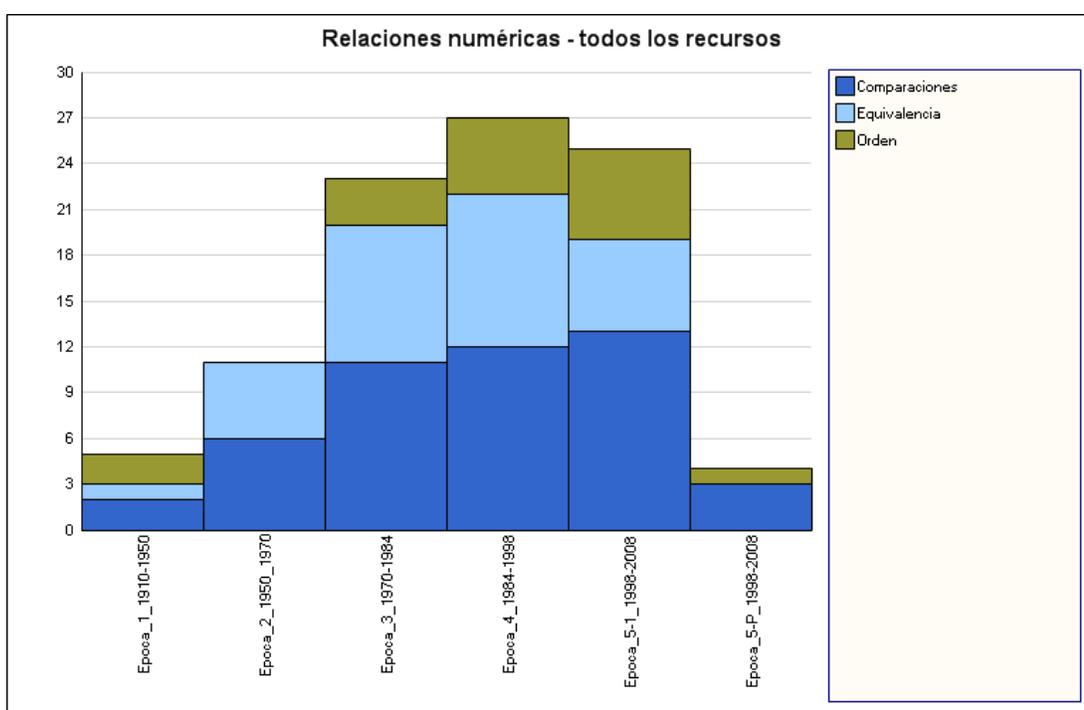
Al respecto de las relaciones de equivalencia se tiene que son incorporadas en las propuestas de trabajo de los libros de texto de las épocas 1, 2, 3, 4 y 5-1. Por su parte, las relaciones de orden se refieren, en menor proporción, en las propuestas de las épocas 1, 3, 4, 5-1 y 5-P.

En particular, las propuestas de trabajo de los libros de textos de la época 5-P, presentan poco énfasis en las relaciones numéricas. Esto puede ser debido a que la educación preescolar pretende brindar un espacio de exploración de las nociones matemáticas, y el fijar la atención, ya sea en las relaciones de equivalencia o de orden, asignaría una connotación muy formal para el número natural.

Implicaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, con respecto a tipo de relaciones que se pueden establecer entre números naturales, expresadas en los libros de texto, se puede inferir que:

Existe una tendencia en las propuestas de los libros de texto por definir una estructura formal en torno al concepto de número natural, dada la explicitación de enunciación y símbolos referidos a procesos de comparación, de equivalencia y de orden. Dicho énfasis se corresponde con la naturaleza lógica asignada al número natural a través de las propuestas de trabajo de los libros de texto.



Gráfica 11

Resultados obtenidos con respecto al tipo de actividades

En las propuestas de trabajo de los libros de texto se observa una clara tendencia a emplear actividades donde se requiere identificar, comparar y relacionar conjuntos. Dichas actividades se presentan en las épocas 3, 4, 5-1 y 5-P, y se enfatizan en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 3, donde el currículo se enmarca en la propuesta de la matemática moderna. Cabe señalar que si bien la

tendencia es a trabajar con conjuntos, la frecuencia de tales actividades ha ido disminuyendo en la actualidad.

En contraste se observa que las propuestas de trabajo de los libros de texto no incorporan el cálculo mental como actividad básica para la construcción del concepto de número, sólo en la época 1 se hace referencia a ello. En particular, en esta época, el cálculo mental fue una de las actividades más empleadas para la enseñanza del número natural.

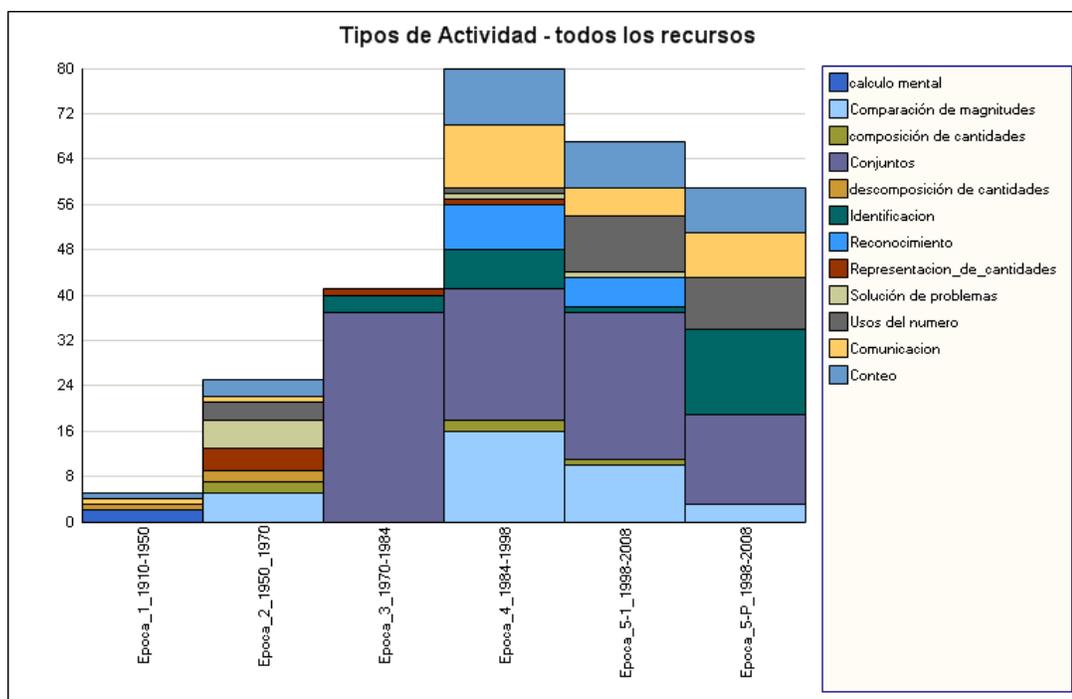
También llama la atención que las actividades de solución de problemas se presenten en gran proporción en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 2, y que disminuyan significativamente en la época 4 y 5-1, siendo la solución de problemas un proceso básico para el aprendizaje de las matemáticas, y en particular, del número natural.

En las propuestas de trabajo de los libros de texto de las épocas 2, 4, 5-1 y 5-p se integran actividades donde el número natural se usa como código, como tecla, como ordinal, como resultado de una medición. Ello puede ser explicado en función de que, en la época 2, el número era asumido desde la perspectiva de Stevin por lo cual se asociaba con resultados de procesos de conteo y medición. En cuanto a las épocas 5-1 y 5-P, se tiene que los lineamientos curriculares de matemáticas propenden por construir el concepto de número natural a partir de sus usos en diferentes contextos.

Otro tipo de actividad que ocupa una franja representativa en las propuestas de trabajo de los libros de texto son las relativas a la comparación de magnitudes. Dichas actividades se presentan en las épocas 2, 4, 5-1 y 5-P, y se enfatizan en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 4, donde el currículo se enmarca en la propuesta de Renovación curricular bajo el enfoque de sistemas.

Es de resaltar la proporción que ocupan en las propuestas de trabajo de los libros de texto de la época 5-P (preescolar) las actividades de identificación, donde se requiere buscar y seleccionar el símbolo numérico asociado a un número natural. Esta tendencia puede explicarse en función de la tarea de inculturación que cumple el preescolar: institucionalizar el saber matemático que circula en la cultura, y el número natural hace parte de ello.

Por otra parte, las propuestas de trabajo de los libros de texto proponen las actividades de composición y descomposición de números naturales aisladas de aquellas de conteo y comparación. Ello se evidencia en la pequeña proporción asignada a las actividades de composición y descomposición en los textos siendo que los procesos de conteo permiten componer cantidades, y a la vez, la composición fortalece el conteo.



Gráfica 12

Implicaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, con respecto al tipo de actividades que se proponen en los libros de texto para enseñar y dar sentido al número natural, se puede inferir que:

- Las propuestas de trabajo de los libros de texto recurren a gran variedad de actividades para construir el concepto de número natural. Ello implica que no basta con enunciar una definición y generar una estructura matemática en torno al número natural, es necesario explorar otras nociones y relaciones que constituyen y dan sentido al concepto mismo.

- Existe una marcada tendencia en las propuestas de trabajo de los libros de texto a incorporar actividades con conjuntos. Tal enfoque evidencia una perspectiva epistemológica del número natural como objeto lógico y destaca la cardinalidad como principio que homogeniza y permite abstraer lo que tienen de común los conjuntos que tienen el mismo número de elementos.
- La solución de problemas ha estado ausente de las propuestas de libros desde la década del 70 hasta la actualidad. Ello evidencia que no existe coherencia entre las propuestas de la Renovación curricular y los lineamientos curriculares, frente a las propuestas de trabajo de los libros de texto, puesto que en las primeras se propende por la construcción del saber matemático a partir del análisis de situaciones contextuales o problemas. Además, retomando los elementos históricos, se observa que la solución de problemas ha sido un motor contextual para el surgimiento y evolución del conocimiento matemático. Por ello es pertinente que los libros de texto, instrumentos de referencia para las actividades de aula, integren actividades de solución de problemas.
- La presencia de actividades de conteo, de comunicación y de uso del número natural, en las propuestas de trabajo de los libros de texto de las épocas 4, 5-1 y 5-P, determina una tendencia de la época moderna hacia la construcción del concepto de número natural a partir de procesos de interacción social, hecho que se corresponden con los desarrollos cognitivos (Torbeyns, et al., 2002) y (Bishop, 1999) que apelan a la construcción social del conocimiento matemático.

6.4.4 A manera de cierre

Al analizar las propuestas de trabajo de los libros de texto en torno al concepto de número natural se observa que éstas incorporan diversos referentes matemáticos y cognitivos para diseñar las actividades.

En cuanto a los referentes cognitivos, en general, se tiene que el contexto piagetiano es un referente frecuente en el diseño de las propuestas de trabajo de los libros de texto a lo largo de todas las épocas. Tal perspectiva promueve la construcción del número natural a partir de relaciones lógicas entre clase, y por ende, el número natural se asume como una construcción lógica mental. En este sentido, los

libros de texto, formulan actividades de clasificación, seriación y correspondencias uno a uno, para tratar de acercar al estudiante al tipo de operaciones lógicas que les permitirían construir el número natural. No obstante, las propuestas de trabajo de los libros de texto no incluyen actividades de inclusión y de conservación, operaciones que sustentan el concepto desde la perspectiva piagetiana.

La asunción del enfoque piagetiano como marco de referencia para la formulación de actividades en los libros de texto, si bien potencia ciertas relaciones y conceptualizaciones en torno al concepto de número natural, sesga y limita el trabajo de clase, dado que no permite incluir posturas donde el número se aborde en función de sus usos sociales, recurso que ayuda la construcción de significados en torno al número natural. Además, aludir a los contextos de uso del número natural permite articular de manera efectiva, otras perspectivas cognitivas del número como el conteo.

Por otro lado, al analizar los referentes epistemológicos y ontológicos que orientan las propuestas de trabajo de los libros de texto, en lo relativo al concepto de número natural, se observa una tendencia a asumir el número natural como elemento de naturaleza lógica que se construye a partir del establecimiento y comparación del cardinal de conjuntos. Este enfoque se explica a partir de los referentes de Frege, donde el número natural está relacionado con la extensión de un concepto de ahí que el énfasis se haga sobre el aspecto cardinal del número destacando el concepto de equinumerosidad.

Otro de los referentes epistemológicos y ontológicos que también se identifican en los libros de texto es el de asumir el número natural como una colección de unidades ya sean concretas o abstractas. Dicho enfoque corresponde a un referente platónico, donde el número natural expresa cantidad y se concibe en función de las relaciones cuantitativas que se establezcan con otras cantidades. La perspectiva de cuantificación de unidades resulta ser un contexto bastante natural para que los niños inicien el estudio del número natural. Pese a ello, la cuantificación no es el único sentido del número natural.

Frente a la caracterización de los referentes epistemológicos y cognitivos que orientan las propuestas de trabajo de los libros de texto en lo relativo al concepto de número natural se concluye que el proceso transpositivo sí determina los elementos

que van a circular en el contexto escolar en cuanto a saber matemático y en lo relativo a aspectos cognitivos. Es pertinente que el docente reconozcan los sentidos que cada libro de texto privilegia y en función de ello, complemente sus propuestas de trabajo de aula, de tal forma que integre actividades que potencien y desencadenen en los niños, mayores habilidades, relaciones y sentidos del concepto de número natural.

*Parte III: Transposición Didáctica en el Sentido
Estricto*

7 El Saber Didáctico de los Docentes al respecto del Concepto de Número Natural

7.1 Introducción

Como se mencionó en la sección 2.3 la transposición didáctica se enfoca en el proceso de selección, reconstrucción y adaptación de los saberes matemáticos para ser enseñados en los contextos escolares. Este proceso se lleva a cabo en diferentes niveles: (1) en las instituciones productoras de saber, (2) en la “noosfera”, (3) en el aula y (4) en la comunidad de estudio. En los capítulos precedentes, se ha analizado cómo se lleva a cabo el proceso de transposición didáctica en torno al concepto de número natural en los niveles (1) y (2). En el presente apartado, se pretende estudiar algunos aspectos acerca de cómo se desarrolla el proceso de transposición didáctica en el nivel (3).

Una vez que la “noosfera” designa qué saberes matemáticos van a ser enseñados, el proceso de transformación y adaptación continua. Los programas y referentes curriculares, junto con los libros de textos, se convierten en los mecanismos básicos de distribución del saber matemático en los contextos escolares. Así cada institución y su correspondiente cuerpo de docentes incorpora en los esquemas institucionales el saber matemático que se va a enseñar.

A este nivel el proceso transpositivo continúa. El docente, quien es el directamente responsable de orientar los procesos de enseñanza, organiza sus propuestas de trabajo de aula en función de los requerimientos institucionales, sin dejar de lado, sus concepciones, sus experiencias personales y sus conocimientos matemáticos, pedagógicos y didácticos. Estos aspectos determinan el discurso, y en general, las prácticas de enseñanza que el docente emplea en su trabajo de aula. De ahí que sea necesario, caracterizar el saber didáctico del docente, para dimensionar el tipo de restricciones y alcances de un proceso de enseñanza de saberes matemáticos en el contexto escolar.

En ese sentido, la didáctica de las matemáticas ha desarrollado investigaciones para tratar de responder a la pregunta qué tipo de conocimiento requiere o usa el docente para enseñar? (Shulman, (1985) citado por Graeber & Tirosh, 2008, pp. 118-119), señala que, “el conocimiento pedagógico de los contenidos matemáticos (PCK)³⁷ es una forma particular de conocimiento sobre el contenido, que involucra aspectos del contenido, además de lo que atañe a su enseñabilidad”. Es decir, el conocimiento pedagógico de los contenidos matemáticos incluye tanto el saber matemático que va a ser enseñado, como todos aquellos aspectos que se relacionen con el proceso de enseñanza de los mismos. (Shulman, (1987) citado por Graeber & Tirosh, 2008, p. 119) considera que el PCK incluye: “el conocimiento de la materia, el conocimiento pedagógico general y de la materia, el conocimiento curricular, que incluye un conocimiento de programas y herramientas, el conocimiento del estudiante y sus características, el conocimiento del contexto educativo junto con los fines, propósitos y valores, al igual que los fundamentos filosóficos de la educación” (Shulman, 1987, p. 8). Tales dimensiones implican que la práctica del docente responde a un sistema complejo de interacciones previamente elaboradas por quien enseña.

Así teniendo como referencia el proceso de transposición didáctica y que el docente es un elemento activo del mismo, se estudiará unos de los aspectos que hacen parte del saber didáctico del docente con respecto al concepto de número natural.

7.2 Caracterización del Saber Matemático y Cognitivo del Docente con Respecto al Concepto de Número Natural

Dado que el saber didáctico del docente abarca una gran cantidad de saberes e interrelaciones, la presente investigación sólo analizarán los conocimientos relativos al saber matemático en torno al concepto de número natural, y los que se refieren a elementos cognitivos con respecto al proceso de aprendizaje del número natural.

Para recoger la información sobre el saber matemático y cognitivo del docente, se elaboró un paquete de preguntas organizadas a través de tres encuestas. Cada encuesta integra preguntas de respuesta abierta y cerrada, según se requiera. *La primera encuesta*

³⁷ En función de la definición expresada por Shulman, con respecto al conocimiento pedagógico del contenido, en adelante, se asumirá tal noción como homóloga al saber didáctico del docente.

pretende identificar: (1) qué nociones, principios y conceptos privilegian los docentes en sus procesos de enseñanza del número natural; (2) qué referentes han construido los docentes acerca de cada uno de los principios y conceptos señalados. *La segunda encuesta* trata de reconocer qué relaciones y significados han construido los docentes en torno al principio de construcción de los números naturales (“el siguiente de”) y a los aspectos ordinales del número natural. *La tercera encuesta* indaga sobre el saber matemático y didáctico que tienen los docentes frente a las duplas orden – ordinalidad y conteo – conjuntos. Los ejes que orientan las preguntas de las encuestas aluden a los principios que se han señalado como básicos para la construcción del concepto de número natural, desde los estudios cognitivos (perspectiva piagetiana, perspectiva del conteo y perspectiva integradora).

Así, el conjunto de instrumentos pretende identificar qué nociones y principios matemáticos se asocian con el número natural, y cómo los docentes usan dichas nociones en las actividades que emplea para la enseñanza. Cabe anotar, que los instrumentos no se diseñan en aras de realizar una evaluación de los saberes de los docentes, sino, en términos exploratorios, para indagar acerca de sus visiones y conceptualizaciones en torno al número natural.

7.2.1 Participantes

El paquete de encuestas fue aplicado a 30 docentes de instituciones educativas públicas del departamento del Valle del Cauca, que ejercían en preescolar y primer grado de básica primaria.

7.2.2 Estructura del instrumento y respuestas obtenidas

La primera parte de las encuestas recoge información demográfica de los docentes, sobre su nivel de escolaridad y su experiencia docente. Con respecto a ello se obtiene que los docentes que respondieron la encuesta, reportan en promedio 17 años de experiencia docente en el ciclo de educación preescolar y primer grado de educación primaria. En particular se tiene que el 50% de los docentes tiene más de 15 años de experiencia; el 25% de los docentes tienen entre 10 y 15 años de experiencia y el resto tienen menos de 5 años de experiencia. En cuanto al nivel de escolaridad se tiene que el

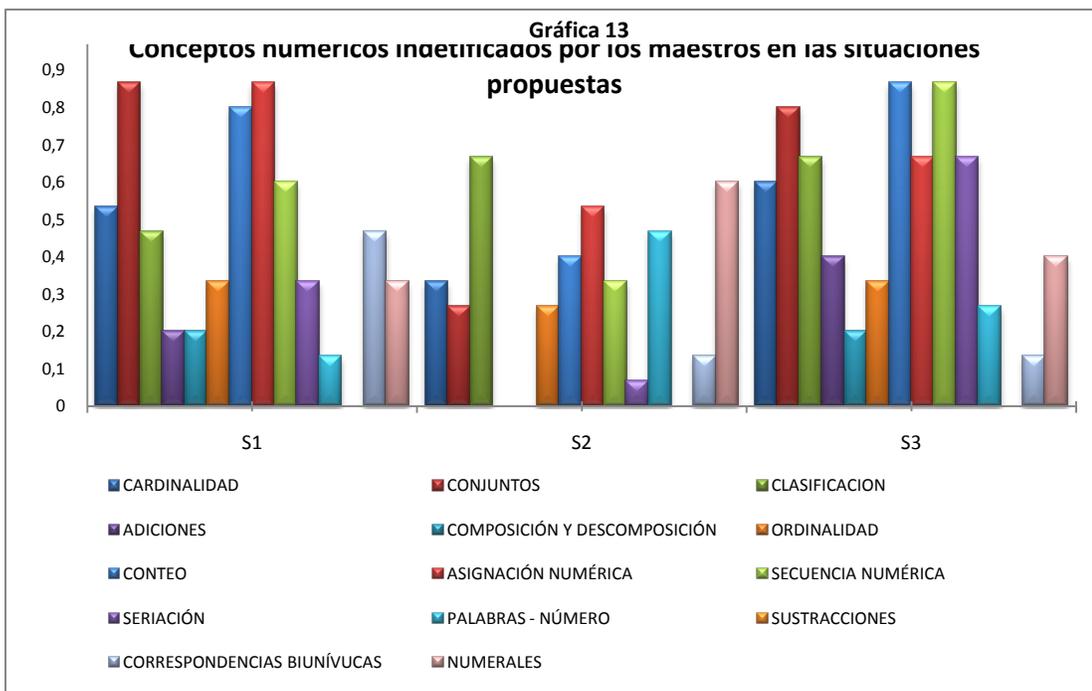
75% de los docentes son profesionales, y de éstos, el 80% son postgraduados; el 25% restante son tecnólogos. De acuerdo con ello, se puede afirmar que los docentes que respondieron las encuestas contaban con suficiente experiencia en la enseñanza del concepto de número natural, y en general, presentaban un perfil alto de formación académica, lo cual ubica a los docentes, en condiciones idóneas para responder las preguntas formuladas en los instrumentos.

Para ver el detalle de las encuestas remitirse al anexo 3, encuesta_1

Encuesta 1

Este instrumento contiene tres preguntas

En *la primera pregunta* se describen tres situaciones de clase que emplean los docentes de preescolar para enseñar el número natural. Cada situación se identifica con S1, S2 y S3, respectivamente. Se espera que los docentes señalen, de una lista de conceptos relativos al número natural, aquellos que estarían presentes en cada una de las actividades presentadas. La primera situación (S1) propone actividades de correspondencia biunívocas entre colecciones y símbolos numéricos. Para establecer dicha correspondencia, los estudiantes pueden obtener el cardinal de la colección a través del conteo de sus elementos y proceder a la asignación numérica correspondiente. Por su parte, la segunda situación (S2) se remite al trabajo con un almanaque donde se anotan eventos del grupo. La asignación de fechas para cada acontecimiento se lleva a cabo a partir de un día de referencia, que puede ser el primer día del mes o la fecha actual. Ubicado en esa fecha, el estudiante puede marcar el día del evento mediante conteo, siguiendo la secuencia numérica del calendario ó realizando adiciones. En la acción de asignación de la fecha y a través del recorrido del conteo, realiza correspondencias biunívocas pues a cada espacio del calendario se le denota con un número. De igual forma, durante el proceso de conteo de los días, se enuncian las palabras número correspondientes a cada símbolo numérico. La tercera situación (S3) se enfoca a reconocer un número natural dado, a partir de la asignación numérica a colecciones equivalentes. Así, una vez se haya abordado un número natural, se prosigue a formar colecciones con el número que sigue en la serie numérica.



Durante el desarrollo de esta actividad el estudiante reconoce los numerales a partir del establecimiento de correspondencias biunívocas con los conjuntos dados, a la vez, establece el cardinal de los conjuntos dados y se ejercita en el orden de la serie numérica.

Frente a estas situaciones los docentes señalaron que: Los conceptos relativos al número natural que se estaban trabajando con mayor fuerza en S1 eran: conjuntos, conteo, asignación numérica y secuencia numérica. En menor proporción señalan: las correspondencias biunívoca, clasificación, seriación, ordinalidad y numerales. Frente a estos resultados, llama la atención que: (1) las correspondencias biunívocas no estén en el mismo nivel de proporción que la asignación numérica y el conteo, a pesar de ser ellas, el proceso de fondo que se moviliza para establecer la asignación numérica y el conteo; (2) los conjuntos ocupen un lugar preponderante, si la situación no hacía ningún énfasis en tal noción, pues los elementos de los carteles estaban pegados de manera aleatoria y no necesariamente tenían características en común; (3) la seriación y ordinalidad se asocian en una situación donde se está explorando el sentido cardinal del número natural a través del conteo.

En *la segunda pregunta* se exploran las posibilidades de diseños de trabajo de aula, que proponen los docentes, para complementar las situaciones S1, S2 y S3. La información obtenida de esta pregunta sirve como elemento aclaratorio para determinar el tipo de nociones que el docente asocia con el número natural, y cómo ellas, pueden ser integradas en actividades de aula. En ese sentido, los docentes plantean que a S1 se le pueden incorporar acciones de clasificación, trabajo con adición y sustracción a partir de agregar elementos a los conjuntos, procesos de comparación (más o menos que). Por su parte, en S2, proponen incluir el manejo de ilustraciones que describan el evento, hacer conteo de los días que faltan y han transcurrido para el evento. En S3, las actividades complementarias aluden a usar imágenes de objetos que le ayuden al alumno, a fijar el trazo del grafismo (por ejemplo, al número dos hacerlo corresponder con un pato), trabajar adición y sustracción de elementos. En términos generales, los docentes sugieren integrar actividades de clasificación, de adición y sustracción de elementos a los conjuntos dados o de cálculos en términos de la cantidad de días. Estas actividades complementarias evidencian la tendencia de los docentes para abordar las operaciones de adición y sustracción entre naturales desde la vía conjuntista, dejando de lado, los procesos de composición y descomposición de cantidades. La explicitación de tales elementos permite inferir que para los docentes, el número natural se construye en función de su operatividad, perspectiva que responde al enfoque epistemológico de Dedekind, donde el número natural es de naturaleza abstracta y se define en función de la estructura misma que se pueda crear en torno a él.

En *la tercera pregunta* se plantean cuatro procesos de cómo enseñar a los niños de preescolar y primero los números naturales. Se espera que los docentes las analicen y señalen cuál o cuáles de ellas están acordes con sus perspectivas de trabajo personal. Al señalar una u otra opción, se podrán reconocer los principios y nociones que los docentes privilegian para la enseñanza del número natural, y cómo las articulan en las propuestas de aula. Las tendencias encontradas en esta pregunta se pueden contrastar con las de la primera, para señalar elementos generales acerca del saber matemático y los aspectos cognitivos que cimientan la práctica de los docentes en torno al concepto de número natural.

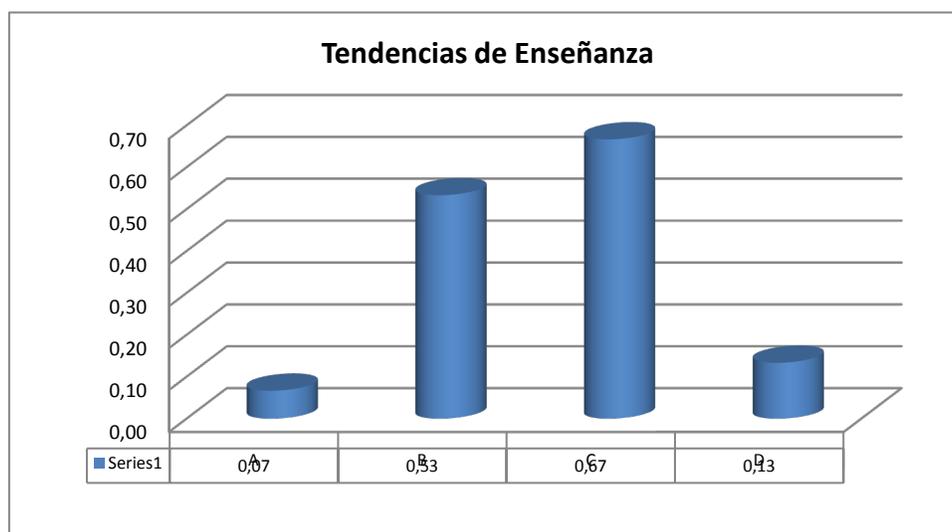
En la opción (a) se describe un proceso de enseñanza del número natural centrado en: la manipulación de los símbolos numéricos, la formación de la serie numérica a través de la adición de 1's (unos) y la combinación de cifras, destacando que los cambios se introducen a partir de la formación de grupos de 10.

En la opción (b) se describe un proceso de enseñanza del número natural centrado en: la formación de colecciones y la asignación numérica correspondiente al cardinal.

En la opción (c) se describe un proceso de enseñanza del número natural centrado en: el conteo y la comunicación de cantidades (mediante símbolos numéricos, palabras número o colecciones de muestra) en contextos de juegos de puntajes.

En la opción (d) se describe un proceso de enseñanza del número natural centrado en: los aspectos ordinales y el orden estable de la secuencia numérica.

Las repuestas dadas por los docentes se pueden agrupar de la siguiente manera:



Gráfica 14

Se observa entonces, una tendencia hacia las actividades donde el número natural se asume como cardinal de conjuntos, y aquellas donde se involucran el conteo, como un proceso para determinar la cantidad de elementos de una colección. Los docentes argumentan que “es importante partir del concepto de conjunto para luego llegar a la noción de número, ya que en los conjuntos se muestra la cantidad”. En cuanto a los juegos, explican que “en las actividades mediadas por juegos se propicia la integración, el dialogo y la experimentación. Además, se parte de lo real y por medio del conteo, el niño concluye sobre la cantidad y conoce los símbolos”.

Estas perspectivas en los procesos de enseñanza del número natural, se corresponden en gran medida, con las respuestas dadas en la primera pregunta, donde los docentes identificaron los conjuntos, el conteo, la asignación numérica y la secuencia numérica, como conceptos y nociones relevantes para la enseñanza del número natural.

En general, con la información obtenida en la encuesta 1, se puede afirmar que los docentes:

- Identifican y nominan los procesos generales de conteo y asignación numérica como elementos básicos para la enseñanza del número natural, pero no logran explicitar los procesos y principios que el estudiante emplea para llevar a cabo tales procesos generales. Esto es, no identifican las correspondencias biunívocas que se establecen entre los elementos de una colección y las palabras número correspondientes. Al igual que el principio de orden estable que organiza la serie numérica empleada para el conteo.
- Muestran una fuerte tendencia a emplear actividades que involucren la formación, las operaciones y las relaciones entre conjuntos. Si bien este enfoque se corresponde con la perspectiva epistemológica de Frege (con respecto al aspecto cardinal), los docentes no evidencian claridad frente a la noción de conjunto que emplean. Esto es, asumen que cualquier actividad donde se utilicen elementos o representaciones de éstos, ya alude a conjuntos, sin detenerse a reflexionar sobre la característica de los objetos involucrados.
- No reconocen las actividades de ordenamiento de eventos y el trabajo con el calendario como potentes para introducir reflexiones sobre el número natural. Es decir, no reconocen que el trabajo a partir de los aspectos ordinales del número pueda ser una

forma viable de dar sentido al número natural. Ello se evidencia en la poca escogencia de la opción (d) de la pregunta 3 de la encuesta y la poca identificación de principios y nociones asociadas al número, en las situaciones descritas en la pregunta 1.

Encuesta 2

Este instrumento contiene cuatro preguntas

En *la primera pregunta* se presenta una tarea para una clase de primer grado de primaria. El objetivo de la tarea es que el estudiante escriba el número siguiente y el anterior, a un número dado. Se espera que el docente decida si les propondría o no, a sus alumnos, dicha actividad. La escogencia del docente brindará ideas acerca de sus conceptualizaciones sobre el orden y la propiedad “el siguiente de”.

Frente a esta tarea, el 90% de los docentes señalaron que si la propondrían a sus alumnos de primer grado de primaria. Tal escogencia se argumenta desde la utilidad de la actividad: “serviría para desarrollar cálculo mental, trabajar lateralidad (izquierda - derecha) y (antes – después), aprender la secuencia de los números”. Sólo el 10% de los argumentos aluden al orden de los números naturales. Con base en los argumentos expresados por los docentes surge la inquietud, ¿qué saberes matemáticos tienen con respecto al orden y el principio de generación de los números naturales?, pues del tipo de conceptualizaciones que tenga el docente, depende el tipo de actividades que se formulen en el aula para dotar de sentido al número natural. Posibles respuestas a este interrogante se encontrarán en los argumentos que expresen los docentes en las preguntas 2 y 3.

En *la segunda pregunta* se le plantea al docente cómo explicaría a sus estudiantes el hecho de que el 10 sea el siguiente de 9. La formulación se hace dado que cuando el docente le explica a un alumno, explicita en su discurso, muchas de sus conceptualizaciones. Se espera identificar en el argumento del docente, sus ideas y conceptualizaciones acerca del orden de los números naturales.

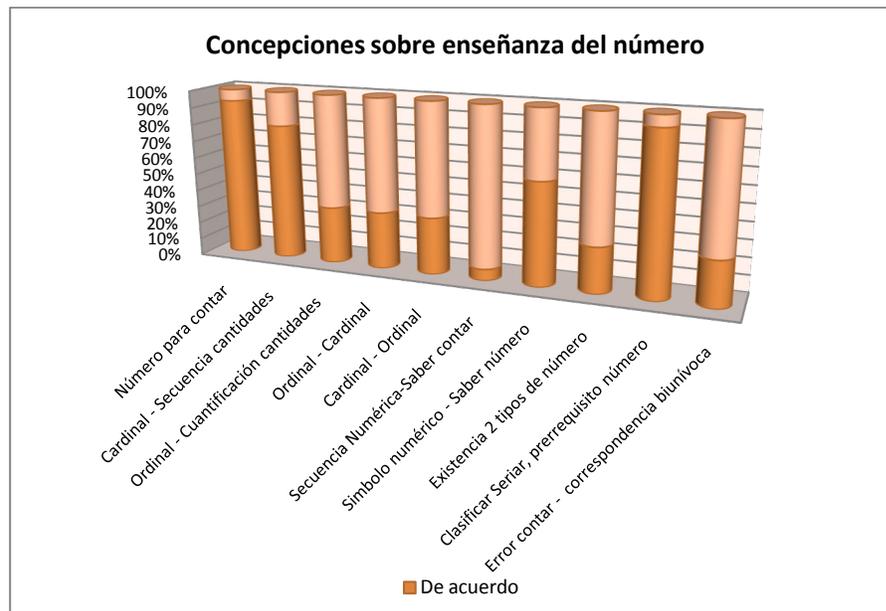
Las repuestas dadas por los docentes para explicar por qué 10 es el siguiente de 9 aluden a que: “esa relación se da así por la serie numérica, siempre va en el mismo orden desde que inventaron los números y no se puede saltar ninguno”, “por la seriación de los números adicionando 1 se llega a 10”, “dejaría que los niños cuenten

fichas y lleguen a la conclusión”. Además, cabe anotar que el 20% de los docentes no respondieron la pregunta. De acuerdo con las respuestas dadas, se observa que para ellos no es del todo claro el principio de formación de los números naturales, pues aun formulan argumentos y justificaciones sobre la base de la autoridad de la tradición (“siempre ha sido así”) y se esperaría que un docente formado y con la riqueza de la experiencia, tenga suficientes desarrollos conceptuales y argumentos teóricos que le permitan justificar la relación entre dos número naturales consecutivos, para así, brindar a sus alumnos amplias y variadas actividades para construir el conocimiento matemático que sustenta esta relación de orden.

En *la tercera pregunta* se indaga sobre el saber matemático que tiene el docente frente a la noción se antecesor y sucesor de un número natural. Con los argumentos presentados por los docentes, se espera caracterizar cómo conciben el orden entre números naturales, aspecto esencial para la construcción del significado y la estructura matemática del número. Con respecto al interrogante sobre si todo número natural tiene sucesor y antecesor, los docentes respondieron al 100% que sí, sin cuestionarse sobre el caso del cero, elemento que no tiene antecesor. Llama la atención las explicaciones que esbozan los docentes para justificar sus respuestas: “sí, porque los números tiene ordinalidad y son consecutivos, siempre hay uno antes y uno después”, “sí, porque al agregar 1 nos da el siguiente y si le restamos 1 nos da el anterior” “sí, todos los números tienen un principio y un fin, hay positivos y negativos”. De estos argumentos se puede inferir que, no todos los docentes tienen claridad frente a la propiedad “el siguiente de” y sustentan el orden y la generación de los números naturales desde la ubicación espacio temporal de los números en la serie (antes y después). De ahí que, tiendan a homologar orden con ordinalidad.

En *la cuarta pregunta* se exploran los saberes matemáticos y cognitivos que tienen los docentes con respecto a la cardinalidad y la ordinalidad. Se espera que el docente señale, de una lista de expresiones, aquellas con las que está de acuerdo. Algunas de las expresiones se refieren al uso de la cardinalidad y la ordinalidad en actividades de aula. Otras aluden al sentido matemático de tales principios.

Las respuestas dadas por los docentes se muestran a continuación:



Gráfica 15

Frente a ello se tiene que los docentes identifican que uno de los usos comunes del número natural es como instrumento para realizar procesos de conteo, el cual involucra algo más que la simple verbalización de la secuencia numérica. Tal concepción entra en conflicto al observar que los docentes también señalan que es necesario enseñar a clasificar y a seriar antes de aprender el número natural. Si se asume la clasificación y la seriación como principios básicos y previos al número, el docente está construyendo el número natural desde una naturaleza lógica conjuntista que se justifica desde el marco piagetiano, perspectiva donde el conteo no puede ser reconocido ni desarrollado como proceso cognitivo, pues el conteo es un conocimiento social y no lógico matemático como el número natural. Esta dualidad de perspectivas evidencia que los docentes emplean, en sus actividades de aula, diversos principios que dan sentido al número natural, sin detenerse a reflexionar, si dichos principios pueden articularse o no, o si responden a perspectivas epistemológicas diferentes.

Otro aspecto a destacar en las respuestas de los docentes es que asocian directamente cardinal con cantidades, sin reflexionar el tipo de relación que expresa el enunciado: secuenciación de cantidades. De ahí que sea frecuente que señalen la cardinalidad hasta en los procesos de ordenación de los elementos de un conjunto,

situación que sólo alude a asignar una secuencia determinada a los elementos del conjunto.

En cuanto al rol asignado a los aspectos ordinal y cardinal frente al proceso de aprendizaje del número natural, los docentes ofrecen igualdad de respuesta en uno y otro sentido. Esto es, los docentes consideran que pueden iniciar el proceso de enseñanza del número natural a partir de lo ordinal, y pasar luego, a lo cardinal, y viceversa. No hay una discriminación frente a las bondades de ingresar por una vía u otra. Ello evidencia, por un lado, que hay poca claridad con respecto a lo que involucra la cardinalidad o la ordinalidad del número natural, y de otro, no reconocen las relaciones de complementariedad que ofrecen dichos principios para la construcción del concepto de número natural.

Por último, se tiene que los docentes afirman que cuando el niño escribe el símbolo numérico que corresponde a un número que se le dictó, ya sabe el número natural. Ello evidencia que los docentes consideran que el dominio de la simbología numérica junto con sus correspondientes palabras número, son prueba de la comprensión del concepto de número natural. Este enfoque deja de lado otros principios (conteo, medición, composición y descomposición de cantidades, comparaciones, entre otros) que dan sentido y funcionalidad al número natural.

En general, con la información obtenida en la encuesta 2, se puede afirmar que los docentes:

- Diferencian la cardinalidad de la ordinalidad al nivel de procesos relativos al número natural, pero no logran ver las relaciones y aportes que cada una de estas nociones brinda, para el diseño de actividades de aula en torno al concepto de número natural.
- Identifican los principios y nociones que aluden al número natural (cardinalidad, orden, ordinalidad, etc.) si éstos se presentan de manera aislada. Esto es, el docente responde fácilmente, aunque no siempre de manera acertada, qué es o a qué se refiere una noción o principio determinado, pero en el momento de dimensionar las relaciones y aportes de éstos, en función de la enseñanza del número natural, no logran tomar decisiones claras. Esta situación de incoherencia entre lo que el docente sabe sobre el número natural y la forma de enseñarlo, es una de las líneas que quedan abiertas para afinar los estudios transpositivos en torno al concepto de número natural.

- Incorporan, de manera poco reflexiva, en sus actividades de clase, diversos principios que aluden al número natural. Dicha conjugación de principios, quizás responde, a los saberes matemáticos y cognitivos que posee el docente sobre el número natural. La situación problemática que queda planteada es que si bien los docentes poseen esos saberes, no se han dado a la tarea de analizar si dichos elementos responden a una misma perspectiva epistemológica, o que si tales elementos, se pueden articular de manera coherente, para brindarle al estudiante una gran variedad de propuestas de trabajo de aula, donde pueda explorar y construir diversos sentido y significado del número natural.

Encuesta 3

Este instrumento contiene dos preguntas.

En *la primera pregunta* se presentan dos situaciones, cada una compuesta de dos actividades, donde se emplea el número natural: una desde su aspecto ordinal y la otra desde su aspecto cardinal.

En la primera situación, la actividad 1, se refiere al ordenamiento de un grupo de cajas que contienen diferentes cantidades de dulces. La actividad 2, alude a la posición (lugar) que ocupa una persona en una fila. Se espera que el docente exprese diferencias y similitudes entre una y otra situación, elementos que darán evidencia acerca de las conceptualizaciones que tiene sobre orden y uso ordinal del número.

En la segunda situación, la actividad 1, se refiere a la formación de conjuntos con un determinado número de abejas. La actividad 2, alude al conteo de puntos de un dado y la correspondiente asignación numérica de la cantidad. Se espera que el docente exprese diferencias y similitudes entre una y otra situación, elementos que darán evidencia acerca de las conceptualizaciones que tiene sobre cardinal de un conjunto y el conteo para establecer el número correspondiente.

Al respecto de la primera situación, la mayoría de los docentes expresan que si hay similitud entre las actividades. La similitud radica en que: “en ambas actividades se involucra el orden”. La diferencia alude a que “en una actividad hay que ordenar dulces y en la otras personas”. Ante dichas respuestas, se puede afirmar que los docentes no diferencian entre ordenar (llevar una secuencia) y establecer una relación de orden

entre cantidades. Al establecer un orden en cuanto a la posición que ocupa un elemento en una serie, se apela a la identificación de una característica a partir de la cual se establece cierto orden, y éste puede ser arbitrario. En contraste, al ordenar colecciones según la cantidad de elementos que contienen, se tiene en cuenta el principio generador de los números naturales: “el siguiente de”, razón por la cual, cada número natural (excepto el cero (0)) es mayor o menor que otro por 1 unidad de diferencia. Tampoco fue significativo para los docentes que, en una actividad se señalaran posiciones a través de ordinales, y en la otra, se manejaran números naturales desde lo cardinal (número de dulces). Ello ratifica el hecho que los docentes enuncian unas ideas acerca de su saber matemático pero no las evidencia ni articulan en las actividades de aula.

En lo relativo a la segunda situación, la mayoría de los docentes expresan que si hay similitud entre las actividades. La similitud radica en que: “en ambas actividades se involucra el conteo”. La diferencia alude a que “en una actividad hay que agrupar y en la otra no, sólo hay correspondencias”. Ante dichas respuestas, se puede afirmar que los docentes no logran discriminar que en la actividad 1, no hay un proceso de conteo propiamente dicho, ya que la formación de grupos de dos abejas sólo requiere la discriminación visual de la cantidad. Además, una vez construido el primer conjunto de dos abejas, lo que resta es replicar dicha acción. En lo que concierne a la actividad 2, los docentes no reconocen, que si bien los estudiantes deben contar el número de puntos de cada dado para asignarle un número, la mediación de la disposición de los puntos permite agilizar el cálculo. Esto es, el docente no discrimina que el conteo sobre un grupo de elementos cualquiera y un grupo de elementos organizados a través de configuraciones particulares, son diferentes, dado que el primero, se lleva a cabo por conteo uno a uno de los elementos, mientras que en el segundo, se hace un reconocimiento global de la cantidad (subitising).

En *la segunda pregunta* se formulan dos interrogantes acerca de la percepción que tiene el docente sobre las dos situaciones planteadas en la pregunta anterior. Se espera que discriminen si las actividades planteadas en la situación 1 o en la situación 2, responden a un mismo enfoque epistemológico del número natural.

En general, se observa que los docentes no logran establecer diferencias de fondo en un paquete de actividades dadas, sólo reconocen en ellas, algunos principios o nociones relativas al número natural, y sobre tales nociones cimientan las diferencias o semejanzas. Ello señala que, los docentes no reconocen los diferentes enfoques epistemológicos o cognitivos que existen para fundamentar la enseñanza y el aprendizaje del número natural. En el caso de las actividades de la primera situación, no identifican que la actividad 1, se sustenta sobre el enfoque epistemológico de Frege, mientras la actividad 2, se enmarca en el enfoque epistemológico de Dedekind. Por su parte, en la segunda situación, el referente epistemológico que sustenta la primera actividad es la teoría de Frege, mientras que para la segunda actividad es Platón (número numerado).

En general, con la información obtenida en la encuesta 3, se puede afirmar que los docentes:

- Poseen unos conocimientos globales de las nociones relativas al número natural, en particular de lo ordinal y lo cardinal, pero no tienen claridad frente a los marcos teóricos, matemáticos y cognitivos, que los sustentan. De igual forma, no han elaborado una reflexión sistemática acerca de las implicaciones que trae para la conceptualización del número natural, la incorporación de unos u otros principios, en las actividades de clase.
- Tienden a confundir, ordinalidad con relación de orden entre números naturales, y conteo con cardinalidad. Si bien estas nociones pueden asemejarse en algunos aspectos, cada una de ellas alude a un proceso o noción diferente. Esta falta de claridad conceptual influye en sus prácticas de aula, y por ende, en el tipo de significados y en las relaciones que puedan construir sus alumnos al respecto del número natural.

7.3 Observaciones Finales

El docente como elemento del sistema didáctico, y responsable directo de la orientación de los procesos de aula, actúa y perfila su quehacer, desde múltiples enfoques. El estudio del saber didáctico del docente en torno al número natural, permite identificar esos referentes matemáticos, cognitivos, didácticos, curriculares y

pedagógicos que emplea para orientar sus prácticas de aula. En ese sentido, las encuestas aplicadas pretendían identificar los principios matemáticos y cognitivos, que los docentes asocian con el número natural, y cómo los articulan en las actividades que emplea para la enseñanza.

Dentro de los principios y nociones matemáticas que reconocen los docentes como básicos para la enseñanza del número natural se tiene la cardinalidad, los conjuntos, el conteo, la asignación numérica y la secuencia numérica. Tales elementos responden a un enfoque cardinal del número natural: “sirve para contar”. Ello implica que, el referente del número como expresión de la cantidad de magnitud o como código, -por ejemplo-, no son considerados como opciones para dotar de sentido al número natural. El encasillamiento en una sola perspectiva de trabajo con el número natural, limita las experiencias que se puedan plantear a los estudiantes. Por ende, las construcciones mentales que elaboren los niños, en torno al concepto de número natural, serán mínimas.

Al cuestionar a los docentes sobre el uso de los principios y nociones matemáticas relativas al número natural, en el marco de actividades de aula, se observa poca claridad en cuanto al alcance didáctico de las mismas. Los docentes nominan y explican cada noción por separado (a nivel teórico), pero no logran operacionalizar esos sentidos teóricos a través de las situaciones de aula. En el trabajo de análisis de actividades, los docentes suelen confundir una noción con otra, o sobre generalizar los principios: “toda agrupación de elementos responde a un cardinal y debe ser contada”. El manejo genérico de las nociones relativas al número natural, permite inferir que los docentes poseen un saber matemático básico y desarticulado, pues no logran identificar semejanzas o diferencias entre unas nociones y otras.

Las respuestas obtenidas en la encuesta 3 sustentan y amplían las percepciones expresadas en el párrafo anterior. Los docentes ante dos actividades para enseñar el número natural, que utilizan el contexto cardinal u ordinal, no discriminan si tales actividades, responden a un mismo enfoque epistemológico o cognitivo del número natural. Se evidencia que los docentes han construido un saber que integra tanto lo matemático como lo didáctico, y en esa fusión no hecho elaboraciones detalladas de cada uno de esos referentes.

El manejo genérico de las nociones matemáticas con respecto al número natural por parte de los docentes, puede verse reforzada por las propuestas de trabajo de los libros de texto, dado que éstos integran diferentes referentes epistemológicos y cognitivos y con base en ello, formulan sus actividades, sin explicitar los principios teóricos que orientan tales diseños. Si el docente recurre a los libros de textos como fuente de propuestas de aula, o como base para elaborar las propias, va a observar gran variedad de principios relativos al número natural puestos indiscriminadamente a lo largo del texto, situación que validaría su saber personal.

Dada la multiplicidad de elementos que confluyen y determinan el saber didáctico del docente en torno del número natural, es necesario adelantar investigaciones al respecto de este campo, dado que los resultados obtenidos en el presente capítulo sólo esbozan algunos de esos elementos. El saber didáctico del docente es quien determina, -en gran medida-, sus prácticas escolares. Un estudio minucioso de éste, permitirá perfilar cómo incorpora esos saberes teóricos en las acciones diarias en el aula de clase, y por ende, poder proyectar los posibles aprendizajes de sus alumnos en torno al concepto de número natural.

8 Alternativa para el Trabajo de Aula en torno al Concepto de Número Natural

Teniendo como referente la complejidad del proceso transpositivo en torno al concepto de número natural, y el carácter determinístico del mismo, en cuanto a políticas educativas, saberes matemáticos escolares, enfoques cognitivos del aprendizaje, entre otros, es pertinente brindar al docente una propuesta de trabajo de aula, que si bien no supla las necesidades de formación del docente, sí brinde unos referentes básicos para su quehacer pedagógico. Además, dada la multiplicidad de enfoques, tanto matemáticos como cognitivos, que se presentan en las propuestas de trabajo de los libros de texto, y la falta de explicitación de los marcos de referencia correspondientes, es oportuno generar una propuesta de trabajo de aula donde se incorporen de manera coherente tanto elementos de cognitivos, como curriculares y matemáticos.

En ese sentido, el presente capítulo presenta una propuesta de actividades de aula donde el estudiante pueda explorar y construir diferentes significados del concepto de número natural.

8.1 Elementos Teóricos de Referencia

La propuesta de actividades se enmarca en los elementos teóricos cognitivos dados por el enfoque integrador (sección 5.3). Este enfoque propone partir de situaciones cotidiana donde se usen formas numéricas o donde se requieran conteos, dado que el estudiante cuando llega a la escuela, ya tiene unas ideas previas sobre el concepto de número natural. Se trata de retomar tales nociones y resignificarlas, con tareas orientadas a explorar los usos del número para organizar, comparar y comunicar cantidades. El uso sistemático del número en tareas cada vez más complejas, conduce a la abstracción de propiedades que identifican el concepto.

En lo relativo a la perspectiva epistemológica, la propuesta de actividades se enmarca en los principios dados por Peano, dado que se movilizan el principio del “siguiente de antecesor” a través del sucesor y el antecesor. Igualmente, se incorporan ideas de Platón, en cuanto a que se manejan unidades concretas que van a ser contadas, comparadas y operadas. Por último, se integran elementos de la perspectiva de Stevin en lo relativo a la unificación del número y la unidad, y los contextos métricos.

Con respecto a los referentes curriculares, la propuesta de actividades se elabora según las ideas expresadas en los Lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias de matemáticas. Dichos documentos sugieren orientar el trabajo escolar con respecto al número natural desde los diferentes contextos dónde éste se use. La exploración de situaciones que recreen tales contextos, brindará al estudiante mayores posibilidades para dotar de significado el concepto de número natural. A la vez, dejará abierta la posibilidad para que el estudiante establezca nuevas relaciones conceptuales, y reconozca que el conocimiento matemático se construye gradualmente y responde a unas necesidades específicas.

Las actividades se proponen en contextos de juegos aludiendo a una de las dimensiones que se proponen desde los lineamientos curriculares de preescolar: la lúdica, donde se “reconoce el juego como dinamizador de la vida del educando mediante el cual construye conocimientos, se encuentra consigo mismo, con el mundo físico y social, desarrolla iniciativas propias, comparte sus intereses, desarrolla habilidades de comunicación, construye y se apropia de normas” (Ministerio de Educación Nacional, 1997, p. 16). Además, la pedagogía activa, fundamento pedagógico de la educación preescolar, reconoce que “la actividad en el desarrollo se concibe como la interacción que el sujeto establece con los objetos del mundo físico y social; pasa de un plano externo, sensorial y práctico a uno interno, reflexivo, que le permite encontrar las relaciones que existen entre ellos, representarlas y operar mentalmente para así construir o reconstruir conocimientos, logrando alcanzar de esta forma niveles cada vez más superiores en sus propias y muy personales formas de pensar y de relacionarse con los objetos y las personas”(Ministerio de Educación Nacional, 1997, p. 13). Así, por medio del juego se espera que los estudiantes construyan reflexiones sobre el conocimiento que se les presenta en las actividades de aula.

8.2 Paquete de Actividades

En términos generales, los elementos, las nociones y los principios básicos que se pretenden movilizar a través de las actividades, en torno al concepto de número natural, son: establecimiento del cardinal de una colección, el reconocimiento de los grafismos numéricos, la invarianza de la cantidad a través de comparaciones de arreglos de puntos, el establecimiento de correspondencias entre los elementos de colecciones, el reconocimiento del orden convencional de la serie numérica, la comparación y ordenamiento de cantidades, la composición y descomposición de cantidades. Todos estos procesos se proponen para un rango numérico de 1 – 20, dado que los estudiantes están iniciando el conocimiento simbólico de los números y no se requiere avanzar en la serie numérica, sino, construir relaciones generales entre los primeros números, que luego puedan ser generalizadas al resto de la serie.

En términos generales, los elementos, las nociones y los principios básicos que se pretenden movilizar a través de las actividades, en torno al concepto de número natural, son: establecimiento del cardinal de una colección, el reconocimiento de los grafismos numéricos, la invarianza de la cantidad a través de comparaciones de arreglos de puntos, el establecimiento de correspondencias entre los elementos de colecciones, el reconocimiento del orden convencional de la serie numérica, la comparación y ordenamiento de cantidades, la composición y descomposición de cantidades.

Todos los procesos que se pretenden movilizar a través de las actividades, se proponen para un rango numérico de 1 – 20, dado que los estudiantes están iniciando el conocimiento simbólico de los números y no se requiere avanzar en la serie numérica, sino, construir relaciones generales entre los primeros números, que luego puedan ser generalizadas al resto de la serie.

El contexto general de las actividades es el juego, o las actividades cotidianas que realizan los estudiantes como el manejo de la fecha en el calendario. Los materiales que se emplean son de bajo costo o pueden ser elaborados por los mismos niños en el aula de clase.

De acuerdo con los parámetros descritos, las actividades que se proponen son las siguientes.

Dominó

Descripción general

Se retoma el principio general del dominó tradicional, donde se requiere establecer correspondencias entre la cantidad de puntos de las fichas. La variación que se introduce es que las fichas trabajan con puntos y con figuras, que se ubican en diferentes configuraciones. Cada jugador debe elegir, y hacer corresponder, una ficha del montón, con la ficha expuesta sobre la mesa. El alumno para establecer la correspondencia, debe tener en cuenta la igualdad en la cantidad de objetos entre una ficha y otra. El juego transcurre con reglas similares a las de un dominó tradicional.

Tipo de actividad: Grupal (6 niños por equipo)

Tiempo estimado: 1 hora

Elementos orientadores

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- La determinación del cardinal de una colección cuando debe saber cuántos puntos o figuras hay en la ficha que va a emparejar.
- La percepción global de la cantidad (subitising) cuando la cantidad de puntos es menor que 5.
- El manejo y reconocimiento de constelaciones para agilizar el conteo de los puntos o figuras de las fichas
- El reconocimiento de la invarianza de la cantidad a través de comparaciones de arreglos de puntos o figuras.
- El establecimiento de correspondencias entre los elementos de colecciones y entre colecciones, durante el apareamiento de las fichas

Ver Anexo 4, Fichas de Trabajo, *Dominó*

Juego con dados

Descripción general

Se organizan 2 grupos de trabajo, y se entrega a cada uno, un paquete de fichas con los símbolos numéricos de los números de 1 a 12. Cada paquete de fichas es de un color determinado. El objetivo del juego es conformar cada uno de los números de 1 hasta 12, a través de diferentes configuraciones de puntos obtenidas con los dados. Cada grupo juega por turnos, y gana, el equipo que logre llegar a 12 más rápidamente. Las diferentes configuraciones se registran en una hoja. Para el juego se trabaja con tres dados convencionales.

Tipo de actividad: Grupal (4 niños por equipo).

Tiempo estimado: 2 horas

Elementos orientadores

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- La percepción global de la cantidad (subitising) cuando determine la cantidad de puntos de cada dado.
- La determinación del cardinal de una colección cuando debe saber cuántos puntos hay en cada dado y cuánto entre los tres.
- El manejo y reconocimiento de constelaciones para agilizar el conteo de los puntos de los dados.
- El reconocimiento de la invarianza de la cantidad a través de la combinación de diferentes configuraciones de puntos para obtener un número particular.
- La composición y descomposición de cantidades a través de la combinación de diferentes configuraciones de puntos para obtener un número particular.
- El establecimiento de correspondencias entre los elementos de colecciones y entre colecciones, durante el apareamiento de las fichas
- El conteo cuando deben totalizar los puntos obtenidos en los dados.
- La comparación y ordenamiento de cantidades cuando deben llevar el control de los números de la serie hasta 12.

Ver Anexo 4, Fichas de trabajo, *Juego con Dados 1*

Ver Anexo 4, Fichas de trabajo, *Juego con Dados 2*

Comparando puntos

Descripción general

Se le presenta al estudiante un cartel con el grafismo de un número entre 6 y 12 y se le pide que elija, de un grupo de fichas, aquellas que tengan tantos puntos como indica el número. El objetivo del juego es establecer correspondencias entre colecciones equivalentes. Gana quien encuentre, en menor tiempo, la mayor cantidad de fichas equivalentes. Las fichas que se manipulan presentan diferentes configuraciones de puntos.

Tipo de actividad: Parejas

Tiempo estimado: 1 hora.

Elementos orientadores

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- El conteo cuando deben totalizar los puntos de cada ficha y cuando debe determinar cuántas fichas equivalentes logró mostrar.
- La comparación de cantidades cuando deben escoger una ficha que tenga la cantidad de puntos señalados y cuando debe establecer quién ganó el juego.
- La determinación del cardinal de una colección cuando debe saber cuántos puntos hay en cada ficha.
- El manejo y reconocimiento de constelaciones para agilizar el conteo de los puntos de las fichas.
- El reconocimiento de la invarianza de la cantidad a través de la escogencia de fichas que tengan la misma cantidad de puntos a pesar de no tener la misma distribución espacial.
- El establecimiento de correspondencias entre las fichas que tienen la misma cantidad de puntos.

Ver Anexo 4, Fichas de trabajo, *Comparando puntos*

Fechas importantes

Descripción general

Se le presenta al estudiante un cartel con la distribución de los días de un mes (un calendario). Se fija un día como referencia y a partir de ahí, se pide al estudiante que ubique en el calendario una lámina que represente una actividad determinada. El objetivo es realizar cálculos para determinar la fecha en que se debe ubicar la lámina dada, teniendo en cuenta la secuencia numérica. Las láminas aluden a actividades que realizan los niños en el contexto escolar como por ejemplo ir a clase de natación o de danza, asistir a la entrega de informes, la fecha en que inician las vacaciones, etc.

Tipo de actividad: Individual.

Tiempo estimado: 1 hora.

Elementos orientadores

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- El conteo cuando deben ubicar la fecha del evento.
- El reconocimiento del orden convencional de la serie numérica cuando recorren los días del calendario.
- La comparación de cantidades cuando deben establecer cuánto días faltan para un evento determinado o cuántos días han transcurrido a partir de la fecha señalada.
- El manejo del aspecto ordinal del número, al determinar qué evento sucede primero y cuál después.
- La utilización de palabras que denoten ordinalidad, cuando deben expresar en qué orden suceden los eventos.

Secuencias numéricas

Descripción general

Se le presenta al estudiante tres fichas de trabajo donde deben completar series numéricas e identificar el antecesor y el sucesor de un número dado. El objetivo es realizar conteos ascendentes y descendentes siguiendo el orden convencional de la serie numérica e identificar la posición de un número dado. Las fichas presentan la información a través de "escaleras numéricas" y rectas numéricas. La introducción de rectas numérica permite acercar al estudiante a los procesos de medición de longitudes.

Tipo de actividad: Individual.

Tiempo estimado: 2 horas

Elementos orientadores

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- El conteo cuando deben ubicar en la escalera los números que hacen falta
- El reconocimiento del orden convencional de la serie numérica cuando recorren la escalera que va siendo completada.
- La comparación de cantidades cuando deben establecer qué número es el antecesor y cuál el sucesor.
- La identificación del antecesor y sucesor de un número en función de la serie que está completando al aumentar o disminuir 1.
- El establecimiento de correspondencias biunívocas entre el símbolo numérico y el recuadro de la escalera o de la recta numérica.

Ver Anexo 4, Fichas de trabajo, *Secuencias numéricas*

Construcciones manuales

Descripción general

Se le presenta al estudiante un modelo de un collar elaborado con cuencas de colores. Cada niño debe dirigirse a la mesa de materiales a tomar la cantidad de cuenca que considere necesarias para elaborar un collar que presente una

configuración igual al dado. El objetivo es realizar conteos y establecer correspondencias 1 - 1 para obtener un patrón dado.

Tipo de actividad: Individual.

Tiempo estimado: 1 horas.

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- El conteo cuando deben tomar de la mesa tantas cuencas como sean necesarias para formar el modelo.
- La determinación del cardinal de una colección cuando debe saber cuántas cuencas de cada color se necesitan en el collar.
- El manejo de colecciones de muestra al remitirse al número de cuencas del collar para realizar el conteo de las cuencas que necesitan para elaborar el modelo propio.
- El establecimiento de correspondencias biunívocas entre cada cuenca del collar modelo y la cuenca que enhebran para el collar propio.

La canasta

Descripción general

Se conforman equipos de trabajo. A cada equipo se le entregan 10 tapas de gaseosa, una canasta de huevos, pintada de 3 colores diferentes y cada uno con un valor a saber: 1, 2, 3; una hoja de registro. Los participantes se organizan y cada jugador en su turno lanzará, de forma sucesiva, 10 tapas hacia la canasta. Una vez efectuado el turno, el jugador debe observar la ubicación de las monedas para determinar el puntaje obtenido, en función del color donde haya caído la tapa. Luego anota los puntajes obtenidos en la hoja de registro. Gana el participante que obtiene el mayor puntaje. El objetivo es realizar conteos, composiciones y descomposiciones de cantidades, y establecer relaciones de orden entre naturales.

Tipo de actividad: Grupal (5 estudiantes)

Tiempo estimado: 2 horas.

Durante la actividad se espera que el estudiante despliegue procesos relativos a:

- El conteo cuando deben totalizar los puntos obtenidos en cada tiro.
- El establecimiento de correspondencias biunívocas entre cada tapa que lanzó dentro de la canasta y su correspondiente valor. Dicho ejercicio se realiza al tomar el registro del puntaje.
- La comparación de cantidades cuando deben determinar el ganador del juego.
- El establecimiento de la relación de orden entre número naturales para determinar quién tiene mayor puntaje y quién el menor.
- La composición y descomposición de cantidades a través de la combinación de diferentes puntajes para obtener un número particular.

9 Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación descrita en el presente documento, siguiendo como eje conductor el proceso realizado, y en función de los objetivos planteados.

El proceso realizado

El estudio de la problemática relativa al proceso transpositivo en torno al concepto de número natural es un ejercicio investigativo, que si bien es particular, dado que alude a un cierto concepto matemático, refleja en gran medida, el proceso adaptativo que recorre el saber matemático para lograr ser incorporado en los contextos escolares. Dicho proceso adaptativo se lleva a cabo en diferentes instancias, y responde a una multiplicidad de factores: las políticas públicas sobre educación, las políticas económicas y de desarrollo del país, los procesos evaluativos del sistema escolar, los intereses privados de las casas editoriales de libros de texto, las necesidades contextuales de las instituciones educativas, los saberes didácticos de los docentes, etc. La caracterización elaborada acerca del proceso transpositivo en torno al concepto de número natural, permitió identificar las instancias donde se lleva a cabo y los factores que lo determinan. El proceso recorrido en cuanto a los análisis de orden histórico-epistemológico, de orden didáctico, de caracterización del saber didáctico de los docentes y de las propuestas que presentan los libros de texto, y de análisis los procesos cognitivos que se ponen en juego en el proceso de construcción del concepto de número natural, es un mapa de ruta para elaborar futuros estudios en torno a otros conceptos matemáticos, además de brindar elementos para la elaboración de propuestas curriculares muy bien fundamentadas en torno a la enseñanza del número natural.

Desde el inicio de la investigación se tomaron decisiones para acotar la problemática y elegir el concepto matemático objeto de reflexión. En ese sentido, el número natural y el ciclo de la educación preescolar y el primer grado de educación básica, fueron

seleccionados, dado que, no se encontraban registros de trabajos de investigación en educación matemática que aludieran al proceso transpositivo en estos grados. Se pretendía generar un documento de referencia, tanto para docentes como investigadores, que evidenciara cómo llega el saber matemático al contexto escolar, y en esa línea, aportar elementos de reflexión didáctica para cualificar el saber didáctico y las prácticas del docente en estos grados, ya que en Colombia es escasa la literatura que alude a estas temáticas. Dicho propósito se cumplió, pues el presente informe de investigación sintetiza análisis epistemológicos, didácticos y cognitivos en torno a un concepto central en el desarrollo del pensamiento numérico, que se trabaja cotidianamente en las aulas de clases. De ahí que los análisis que aquí se exponen, pueden ser atractivos y funcionales para ser consultados por el docente interesado.

El marco teórico de la transposición didáctica y su desarrollo a través de la teoría antropológico de lo didáctico, ofrecieron un referente fundamental para determinar qué tipo de análisis se debían elaborar para caracterizar las adaptaciones que ha tenido el concepto de número natural a lo largo del siglo XX y XXI en el contexto escolar colombiano. Cada uno de los cuatro saberes que se denotan en el proceso transpositivo (el saber matemático, el saber matemático a enseñar, el saber matemático enseñado y el saber matemático disponible) y las instancias en las que se producen, demarcaron hacia dónde enfocar la investigación. El saber matemático se reconstruyó a partir de los estudios histórico – epistemológicos, el saber matemático a enseñar mediante el análisis de los programas y reglamentaciones curriculares, y a través de la caracterización de las propuestas de trabajo de los libros de texto. Por su parte, el saber enseñado se perfila sobre la base del saber didáctico del profesor. En este ejercicio investigativo queda abierta la línea de trabajo que se pregunte y de cuenta del saber matemático disponible en el aula de clase (lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden), de la cual, en el presente trabajo tan solo se dejan esbozadas unas líneas generales de acción a través de una prueba piloto realizada con alumnos del preescolar.

Los objetivos planteados

En el marco del presente estudio transpositivo se planteó como objetivo la caracterización de las diferentes formalizaciones del concepto de número natural. Frente a

ello se tiene que, a lo largo de la historia de las matemáticas se puede caracterizar en tres momentos. Un primer momento, inscrito en la perspectiva griega, donde el número natural es asumido con un carácter discreto, asociado a la acción de contar una determinada aglomeración. Aquí cada número es tratado como si fuera él, en sí mismo, un individuo, un objeto singular, independiente y aislado, desprovisto del principio de inclusión dado por la naturaleza de la construcción del “siguiente de”.

Un segundo momento, contextualizado en los desarrollos de la edad media, donde se concibe el número natural como la expresión de la cantidad, la cual cuantifica cualquier magnitud (continua o discreta). De esta manera, la magnitud y la cantidad son unificadas dentro de la categoría de número natural. Esta definición varía en comparación con la griega, en la medida en el número se fundamenta en la cantidad y no en la unidad, a la vez que se moviliza en el trasfondo de la unificación de la unidad y en el uso social del número.

Un tercer momento, denominado periodo de fundamentación, donde los interrogantes por el carácter de continuo numérico llevó a repensar los naturales. Aquí los naturales son concebidos bajo dos enfoques: uno que enfatiza el aspecto ordinal, desarrollado por Dedekind, y otro que enfatiza el aspecto cardinal, propuesto por Cantor. El primer énfasis considera que el significado del número natural se establece en función de la estructura que se pueda crear en torno a él, su definición queda implícita en la estructura misma, en las propiedades que se le puedan adjudicar. Así, el número natural se establece como un objeto de la lógica, como una idea de la mente. Por su parte el segundo énfasis, considera el número natural en relación a la cardinalidad de un conjunto que esté en correspondencia biunívoca con el conjunto que tiene la propiedad poseer ese cardinal. Este enfoque evidencia el uso de un principio de inclusión, pues cada cardinal se define en función de los elementos constitutivos de su predecesor. El conjunto de todos los cardinales finitos es llamado los Naturales cuya cardinalidad es infinita. Paralelo a estos dos enfoques, se puede identificar la apuesta por una fundamentación del número en términos de la lógica, en el trabajo de Frege. En su perspectiva el número debía ser fundamentado a partir de principios puramente lógicos, en relación con la noción de la cardinalidad de una clase (la extensión de un concepto).

Del análisis histórico epistemológico elaborado se obtienen elementos de referencia para el trabajo de aula. Uno de ellos es la acción de contar que integra procesos de

numeración y de establecimiento de correspondencias biunívoca. Así, el conteo no es una simple repetición de sonidos sino que alude a un proceso cognitivo más complejo. Ello hace necesario la integración real del conteo en los diseños de actividades de aula y en los procesos cotidianos de cuantificación. Otro elemento relevante que se obtiene del análisis histórico epistemológico, es asumir el número como expresión de cantidad, bien sea el resultado de un proceso de conteo o de un proceso de medición (s decir el número como cardinal). Y tercero, el principio de la operación “uno más” como la otra acción fundamental que da origen al número natural (el concepto de sucesor como mecanismo básico en la construcción del número natural). Esta triple connotación del número permite abordar de manera amplia y significativa los aspectos ontológicos y epistemológicos del número. Si bien es cierto, que la escuela está tratando de integrar los procesos de conteo como actividad básica en la construcción del concepto de número natural, no sucede lo mismo con los procesos de medición. Esto se debe a que la medición se asume como una actividad muy compleja para que los niños accedan a ella, y además, estos procesos, involucran el manejo de una unidad, de los números decimales, el manejo de magnitudes continuas y de un sistema de medidas que permita expresar los resultados obtenidos. Queda entonces planteada la inquietud acerca de incorporación de contextos de medida para dar significado al número natural.

Con respecto a las propuestas de trabajo de los libros de texto, se tiene que centran la atención en el proceso de escritura de símbolos numéricos, en desarrollar tareas de conservación de la cantidad, en abordar el manejo temprano de las operaciones lógicas de seriación y clasificación, en la mecanización temprana del algoritmo de suma, dejando de lado los contextos donde el niño crea significaciones del número natural y las intuiciones que tiene de dicho concepto. Es decir, las actividades que se proponen no incluyen de manera sistemática los procesos de conteo ni las intuiciones numéricas tempranas, de tal forma que se conjuguen los aspectos cardinal y ordinal del número natural. Además, dichas actividades se presentan descontextualizadas y ajenas a los referentes directos que tiene el niño, por ende, los logros alcanzados por ellos no son significativos para el proceso de construcción de significados.

En cuanto a los procesos didácticos relativos a la construcción del concepto de número natural, se advierten varios elementos básicos que son necesarios dinamizar en las

propuestas de intervención de aula. Entre ellos se encuentran el aspecto cardinal, el aspecto ordinal, el principio de correspondencia biunívoca, el principio de conservación, el principio de inclusión y el principio de orden estable. Para lograr integrar estos elementos de manera armónica, se plantean dos enfoques de trabajo que pueden plantearse como complementarios. En la primera perspectiva, los diseños de intervención dan mayor preponderancia a las estrategias de conteo como elemento importante porque ayuda a estructurar las nociones básicas de la cardinalidad. En la segunda perspectiva, se aborda la conceptualización del número natural a través del manejo de las colecciones de muestra como una alternativa para realizar el proceso de representación de cantidades. Ambas propuestas de trabajo parten de procesos familiares a los niños y los orientan sobre sus desarrollos, para alcanzar niveles mayores de significación.

Así pues, la enseñanza del número natural en los contextos escolares está pasando por una crisis que se manifiesta, de un lado, por estar fundamentada en la transposición de los fundamentos de la teoría piagetiana sin un análisis crítico de las implicaciones de tal transición, y de otro, de una organización curricular fundamentada en la teoría de conjuntos, que busca la rápida memorización de reglas y algoritmos, y más complejo aun, que no reconoce de manera consciente y sistemática otras formas ontológicas en los procesos de constitución del número natural. Adicional a lo anterior, estas propuestas curriculares no se muestran coherentes con los lineamientos curriculares del área de matemáticas.

Se requiere entonces en la escuela, un trabajo de corte didáctico encaminado a la construcción del concepto de número de manera significativa y coherente con los marcos institucionales y sociales, epistemológicos y ontológicos. Ello implica, indagar sobre los elementos y contextos que permiten dinamizar diferentes significados de número. De igual forma, se debe centrar la mirada en las situaciones que generan necesidades de comunicación de cantidades y en el conteo como estrategia fundamental para el desarrollo de las comprensiones numéricas.

10 Bibliografía

- Arboleda, L. C., & Castrillón, G. (2007). Educación Matemática, Pedagogía y Didáctica. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 2(1), 5-27.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación Matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural* (G. S. Barberán, Trans.). Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.
- Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2005). *Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics*. Paper presented at the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education IV (CERME IV), Sant Feliu de Guixols, España.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. *ICMI Bulletin* No. 58., (58). Retrieved from <http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/58.pdf>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. In L.-R. Higuera, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 385-406). Jaen, España: Publicaciones de la Universidad de Jaen.
- Boyer, C. (2001). *Historia de la matemática*. Madrid: cast.:Alianza Editorial, S.A.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Course Doctoral. Montreal Universite. Montreal. Retrieved from http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf
- Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans. 1 ed.). New York: Dover Publications, INC.
- Cauchy, A. (1821). *Cours D'Analyse. Analyse Algebraico*.
- Clements, D., & Sarama, J. (2007). Early Childhood Mathematics Learning. *Second Handbook Of Research On Mathematics Teaching and Learning 2 Volume Set*
- Congreso de Colombia. (1886). *Decreto 595 del 9 de junio de 1886*. (595). Bogotá.
- Congreso de Colombia. (1903). *Ley 39 del 26 de octubre de 1903*. (39). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/1621/articles-102524_archivo_pdf.pdf
- Congreso de Colombia. (1904a). *Decreto 491 del 3 de junio de 1904*. (491). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/1621/articles-102515_archivo_pdf.pdf
- Congreso de Colombia. (1904b). *Decreto Número 491 del 3 de Junio de 1904*. (491). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/1621/articles-102515_archivo_pdf.pdf
- Congreso de Colombia. (1927). *Ley 56 del 10 de noviembre de 1927*. (56). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/.../article-85243.html.
- Congreso de Colombia. (1930). *Decreto 1790 de octubre 22 de 1930*. (1730). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/1621/articles-102974_archivo_pdf.pdf.
- Congreso de Colombia. (1936). *Ley 32 del 20 de febrero de 1936*. (32). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/1621/articles-102894_archivo_pdf.pdf.
- Congreso de Colombia. (1963). *Decreto 1710 del 25 de julio de 1963*. (1710). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/.../article-103714.html.

- Congreso de Colombia. (1976). *Decreto 088 del 22 de enero de 1976*. (088). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/1621/articulos-102584_archivo_pdf.pdf.
- Congreso de Colombia. (1984). *Decreto 1002 del 24 de abril de 1984*. (1002). Bogotá: Retrieved from www.mineduacion.gov.co/.../article-103663.html
- Congreso de Colombia. (1991). *Constitución Política de Colombia*. Bogotá: Retrieved from <http://www.anticorrupcion.gov.co/marco/documentos/constitucion.pdf>.
- Congreso de Colombia. (1994a). *Ley 115 del 8 de febrero de 1994*. (115). Bogotá: Retrieved from menweb.mineduacion.gov.co/.../Decreto115.htm
- Congreso de Colombia. (1994b). *Ley General de Educación (Ley 115 de 1994)*. Bogotá: Retrieved from <http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=292>.
- Congreso de Colombia. (2009). *Ley 1295 del 6 de abril de 2009*. (1295). Bogotá: Retrieved from http://www.mineduacion.gov.co/1621/articulos-187668_archivo_pdf_ley_1295_2009.pdf.
- Creswell, J. W. (1998). *Qualitative Inquiry and Research: Choosing Among Five Traditions* (1 ed.). Thousand Oaks, USA: SAGE Publications.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (C. Gilman, Trans. 3 ed.). Buenos Aires: Aique Grupo Editor S. A.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje* (Vol. 2). Barcelona: I.C.E. Universitat Barcelona - Editorial Horsori.
- D'amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 10, 191-218.
- Dedekind, R. (1927). Continuidad y números Irracionales Traducción de la quinta edición (1927) por J. Bares y J. Climent. Retrieved junio, 2007, from <http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf>
- Dedekind, R. (1930). ¿Qué son y para qué sirven los números? Traducción de la sexta edición (1930) por J. Bares y J. Climent. Retrieved Junio, 2007, from <http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf>
- Euclid. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 2). Cambridge: CAMBRIDGE: the University Press.
- Frege, G. (1996). Los Fundamentos de la Aritmética (J. Mosterín, Trans.). In J. Mosterín (Ed.), *Escritos Filosóficos* (1 ed., pp. 7-144). Barcelona: CRÍTICA.
- Fuson, K. (1998). Pedagogical, Mathematical, and Real-world Conceptual –Support Nets: A Model for Building Children's Multidigit Domain Knowledge. *Mathematical Cognition*, 4(2), 147-186.
- Fuson, K., Pergament, G., Lyons, B., & Hall, J. (1985). Children's Conformity to the Cardinality Rule as a Function of Set Size and Counting Accuracy. *Child Development*, 56(6), 1429-1436.
- Fuson, K., & Secada, W. (1986). Teaching children to add by counting-on with one-handed finger patterns. *Cognition and Instruction*, 3(3), 229-260. doi: 10.1207/s1532690xci0303_5
- Fuson, K., Secada, W., & Hall, J. (1983). Matching, Counting, and Conservation of Numerical Equivalence. *Child Development*, 54(1), 91-97.
- Gardies, J.-L. (2004). *Du Mode d'existence des Objets de La Mathématique* (1 ed.). Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.
- Gelman, R. (2000). The Epigenesis of Mathematical Thinking *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 27-37. doi: 10.1016/S0193-3973(99)00048-9

BIBLIOGRAFÍA

- Gelman, R., & Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related? *Trends in Cognitive Sciences*, 9(1), 6-10. doi: 10.1016/j.ticcs.2004.11.004
- Ginsburg, H. P. (2002). *Little Children, Big Mathematics: Learning and Teaching in the Pre-School*. Paper presented at the Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, England.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 125-137. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1
- Godino, J., & Font, V. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. In C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.20* (1 ed., Vol. 20, pp. 376-381). Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Godino, J., Font, V., Contreras, Á., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una Visión de la Didáctica Francesa desde el Enfoque de Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 9(1), 117-150.
- Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Analisis de procesos de instrucción basados en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26, 39 - 88.
- Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2007). *Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico*. Paper presented at the Version revisada de la conferencia invitada en el IV congreso internacional de Ensino da Matematica, Ulbra, Brasil.
- Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de “compañías”. *Relime*, 2(3), 19-29.
- Graeber, A., & Tirosh, D. (2008). Pedagogical Content Knowledge. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*. Sense Publishers.
- Grattan-Guinness, I. (2000). *The search for mathematical roots, 1870-1940 : logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Godel* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.
- Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, 8(4), 341-374. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00026-1
- Ibarra, S. E. (2008). *La Transposición Didáctica del Álgebra en las Ingenierías. El Caso de los Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional, Mexico D. F. Retrieved from http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ibarra_2008.pdf
- Johsua, S., & Dupin, J.-J. (1993). *la didactique des scienc matiques* (1 ed.). Paris: Presses universitaires de France
- Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). New York: Dover Publications, Inc.
- Ministerio de Educación Nacional. (1950). *Planes y programas de la enseñanza primaria, rural y urbana*. Bogotá: Imprenta del Departamento.
- Ministerio de Educación Nacional. (1984). *Marco General del Programa de Matemáticas para la Educación Básica*. Bogotá.

- Ministerio de Educación Nacional. (1997). *Lineamientos Curriculares del Preescolar*. (Decreto 2247). Bogotá: Retrieved from http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articulos-89869_archivo_pdf10.pdf.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Retrieved from http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articulos-89869_archivo_pdf9.pdf.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006a). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas M. d. E. Nacional (Ed.) Retrieved from <http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006b). *Plan Decenal de Educación 2006 - 2016*. Bogotá: Retrieved from <http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/channel.html>.
- Neugebauer, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity* (2 ed.). New York: Dover Publications INC.
- Newman, J. R. (1994). El papiro Rhind. In J. R. Newman (Ed.), *SIGMA: El Mundo de las Matemáticas* (Vol. 1, pp. 97-105). Barcelona, España: Ediciones Grijalbo S.A.
- Obando, G., & Múnera, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización de la matemática. *Revista de educación y pedagogía*, XV(35), 185.
- Peano. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo* Retrieved from <http://www.archive.org/details/arithmeticespri00peangoog>
- Piaget, J., & Szeminska, A. (1982). *Génesis del número en el niño* (Sexta edición ed.). Buenos aires: Editorial Guadalupe.
- Planeación, D. N. d. (1994). *Política Nacional de Ciencia y Tecnología 1994 - 1998*. (Documento CONPES 2739 -COLCIENCIAS-). Santafé de Bogotá: Retrieved from www.colciencias.gov.co/c/document_library/get_file?p_l_id..
- Platón. (1998). *La República* (5 ed.). Bogotá, Colombia: Panamericana Editorial Ltda.
- Pozo, J. (1994). *La solución de problemas* (Primera ed.). Madrid: Santillana S.A.
- Salazar, M. (2008). *El campo de saber sobre la lectura y escritura en la escuela colombiana: un recorrido por sus prácticas entre 1886 y 1968*. Doctorado, UNiversidad de Manizales, Manizales. Retrieved from <http://www.umanizales.edu.co/ceanj/tesis/TesisMarthaLuciaSalazarAndica.pdf>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1).
- Song, M., & Ginsburg, H. P. (1988). The Effect of the Korean Number System On Young Children's Counting: A Natural Experiment in Numerical Bilingualism. *International Journal of Psychology*, 23(1), 319-332. doi: 10.1080/00207598808247769
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (R. Filella, Trans. 2 ed.). Madrid: Ediciones Morata S. L.
- Stake, R. (2000). Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research. Second Edition* (pp. 435-454). London: Sage Publications, Inc.
- Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículo*. Madrid: Ediciones Morata S.A.
- Stevin, S. (1634). *Les Oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges*. Retrieved from <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView/ECHOzogiLib?url=/mpiwg/online/permanent/librariy/NUA55ZF4/index.meta&pn=1&ws=3&mode=texttool&start=1>
- Torbeyns, J., van den Noortgate, W., Ghesquiére, P., Verschaffel, L., van de Rijdt, B. A. M., & van Luit, J. E. H. (2002). Development of early numeracy in 5-to 7-year-old children: A comparison between flanders and the netherlands. *Educational Research and Evaluation*, 8(3), 249-275

BIBLIOGRAFÍA

- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2001). *Investigating young children's strategy use and task performance in the domain of simple addition, using the Choice-/no-choice method*. Paper presented at the Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the psychology of mathematics education, Utrecht date:12-17 July 2001.
- Vasco, C. (1994). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. In O. Múnera (Ed.), *Un enfoque para la Didáctica de las Matemáticas* (Vol. 2). Bogotá: División de Materiales Impresos y audiovisuales.
- Vasco, C. (2008, septiembre 2008). Un bosquejo para una historia de la Educación Matemática en Colombia. *Revista Javeriana*, 144, 29 - 45.
- Vasco, C. E. (1994). La Educación Matemática: una disciplina en formación. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 3(2), 59-75.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2004). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Retrieved Julio, 2009, from http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf
- Zur, O., & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 121-137. doi: 10.1016/j.ecresq.2004.01.003

11 ANEXOS

Dada la extensión de los anexos, los mismos se han compilado en el CD adjunto. La siguiente tabla muestra la relación de los mismos y las carpetas dentro del CD que los contiene.

Descripción del anexo	Ubicación CD
Anexo 1: Copias de Libros de texto (Completas)	Ingresar a: Anexo_1_libros_de_texto_def
Anexo 2: Codificaciones	Ingresar a: Anexo_2_Contexto_Aprendizaje Anexo_2_Definicion_Numero Anexo_2_Enfoque_Curricular Anexo_2_Naturaleza_Numero Anexo_2_Nociones_Relativas_Nmero Anexo_2_Procedimientos Anexo_2_Relaciones_Numericas Anexo_2_Tipo_Actividades
Anexo 3: Encuestas realizadas a profesores	Ingresar a: Anexo_3_encuesta
Anexo 4: Fichas de trabajo de los niños	Ingresar a: Anexo_4_Fichas_de_Trabajo