Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele

EDISON DARÍO VASCO AGUDELO
JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MEDELLÍN
2005

Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”, COLCIENCIAS $1115-11-12704$, y en el programa de Maestría en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad de Antioquia en convenio con la Universidad Eafit.

EDISON DARÍO VASCO AGUDELO
JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN

Proyecto de trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemáticas.

Asesor
Ph. D. PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
2005

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Tesis

Entre presidente y jurados del Trabajo de Investigación **"DISEÑOS DE MÓDULOS DE INSTRUCCIÓN PARA EL CONCEPTO DE APROXIMACIÓN LOCAL EN EL MARCO DE LAS FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO VAN HIELE"**, presentado por los estudiantes **Edison Darío Vasco Agudelo** y **Jorge Alberto Bedoya Beltrán**, como requisito para optar al título de **Magister en Educación** Docencia de las Matemáticas, hemos acordado calificar este, después de su presentación y sustentación como:

Aprobado: X
No aprobado:

A los Trabajos de investigación que merecieren ser destacados, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Sobresaliente:
Meritorio: X

Medellín, 26 de agosto de 2005

Pedro V. Esteban
Pedro Vicente Esteban Duarte
Presidente

Andrés de la Torre
Andrés de La Torre Gómez
Jurado

Carlos Mario Jaramillo López
Jurado

Edison Vasco

A mi madre Nancy Agudelo, a mi padre John Darío Vasco, a mis hermanas Leidy y Viviana y a mis sobrinas Laura y Estefania, que son el eje central de mi proyecto de vida.

Jorge Bedoya

A mi esposa e hijos, a mi madre y en especial a mi padre Jorge Iván Bedoya, quien con sus consejos no solo me impulsa, sino que me apoya y motiva para cumplir mis metas tanto personales como académicas.

AGRADECIMIENTOS

Con este trabajo culminamos un periodo importante de nuestra formación académica y profesional, que no hubiera sido posible sin la colaboración de personas que estuvieron cerca de nosotros brindándonos su apoyo. Para ellos nuestro más sincero agradecimiento.

Por su directa implicación en esta Tesis, agradecemos a nuestro asesor, el Doctor Pedro Vicente Esteban Duarte, quien con su apoyo y orientación, hizo posible que este trabajo de investigación se pudiera llevar a cabo. Así mismo, agradecemos a los alumnos que participaron en el proyecto de investigación, quienes nos permitieron aplicar nuestra propuesta metodológica y trabajaron con nosotros hasta alcanzar la forma más adecuada para ella.

En el plano institucional, agradecemos el apoyo brindado por Colciencias, la Universidad de Antioquia y la Universidad Eafit, que a través del grupo de investigación **Educación Matemática e Historia (Udea – Eafit)**, apoyaron el trabajo realizado en esta Tesis. Así mismo, aunque ya más alejado de este trabajo, a todos los profesores del programa de Maestría y a todo el personal del Departamento de Educación Avanzada de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Finalmente, y aunque no menos importante, agradecemos profundamente a nuestras familias, quienes con su amor, esfuerzo y dedicación, siempre estuvieron presentes.

CONTENIDO

Capítulo 1

Marco Teórico

La presente investigación, parte de los resultados obtenidos por Esteban ([12]), en su tesis doctoral. Este hecho es muy significativo, pues generalmente las investigaciones que se realizan en Educación Matemática, por distintas razones, no llegan a los alumnos, quienes deben ser los directamente beneficiados con los resultados obtenidos en los proyectos de investigación de este tipo.

El presente Capítulo, se exponen algunas de las teorías del aprendizaje, que tienen como objetivo primordial, ayudar a los alumnos involucrados dentro de un proceso educativo, bien sea, a mejorar la forma de resolver problemas o como avanzar en su forma de razonar frente a un concepto específico; es en esta última forma, donde se sitúa el modelo educativo de van Hiele, que debido a su composición ha permitido realizar diversos estudios fuera de su área básica de aplicación. Así mismo, se propone la utilización de los mapas conceptuales para detectar, analizar y evaluar el lenguaje empleado por los alumnos, debido a que este, es un factor esencial en el momento de verificar si un alumno ha avanzado o no en su nivel de razonamiento.

1.1. La Educación Matemática

La Educación Matemática construye explicaciones teóricas, globales y coherentes que permiten comprender el fenómeno educativo que surge en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para lograr esto, se deben adaptar y desarrollar nuevos métodos de estudio y de investigación, así como encontrar formas propias de contrastar los resultados teóricos con la realidad. La Educación Matemática, no se centra exclusivamente en problemas didácticos, sino que trata de "entender la naturaleza del pensamiento matemático, su enseñanza y aprendizaje, y usar tales comprensiones para mejorar la instrucción de esta ciencia" ([22], p. vi), además, si se le compara con otras disciplinas, "es un campo relativamente joven con sus propias características, historia, metodología, trabajo y organización profesional" ([48], p. 431). Su desarrollo, en las últimas tres décadas, se debe a los grupos de investigación en esta área en todo el mundo, dedicados a estudiar los problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, así como al desarrollo de productos de "aplicación" de los resultados de las investigaciones que contribuyen a la solución de estos problemas, es por esto, que en este mismo periodo, la profesionalización de los educadores de la matemática, se ha visto estimulada por las reformas de la enseñanza de las matemáticas emprendidas en distintos países, particularmente en América y en Europa. Barrantes y Ruiz ([61]) reconocen esta influencia de la siguiente manera:

> Lo más significativo que debemos citar de la historia de la reforma y de la Educación Matemática de los últimos treinta años es la creación de una nueva profesión o, mejor dicho, de nuevos profesionales especialistas: los educadores de la matemática.
>
> En este mismo sentido, continúan diciendo: No es que no haya habido educadores de las matemáticas antes (lo que es evidente), lo que deseamos subrayar es que, en los últimos treinta años se ha dado una verdadera profesionalización de la enseñanza de las matemáticas, que ha avanzado desigualmente en las diferentes latitudes. Cada día se progresa en la fisonomía de esta disciplina que antes se llegó a concebir como matemáticas de menor nivel o, muchas veces, como una especie de embutido de matemáticas y didáctica sin plena articulación. Puesto en otros términos: se ha avanzado extraordinariamente en la construcción de una auténtica comunidad científica y académica en torno a la educación matemática.

Así mismo, el término *Educación Matemática* recuerda que estamos tratando con una disciplina, que tiene un pie puesto en el terreno de la educación y el otro en el de la matemática, lo cual implica que el ámbito de estudio de la investigación en esta disciplina se centra en clarificar, mediante trabajos de tipo teórico y de tipo experimental, los procesos que ocurren en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y en desarrollar estrategias docentes que tomen en consideración los factores que influyen en estos procesos, según Esteban ([12], p. 6), estos son:

1. Aspectos que son específicos de las matemáticas (tanto en áreas del conocimiento como en su método, tal como demostraciones, definiciones, etc.).

2. Factores cognitivos (resolución de problemas, errores conceptuales, etc.).

3. Factores psicológicos, ambientales o metodológicos (tales como la motivación, la visualización de los conceptos, las clases, trabajos en grupo, uso de tecnología o de material escrito, etc.).

4. Propuestas de cambio (individuales o institucionales, de programas, de contenidos, etc.).
5. Factores culturales (procedencia cultural o social, influencia de factores extra escolares, etc.).

Pero, el tratar de dar respuesta a la pregunta ¿qué quiere decir que la Educación Matemática esté simultáneamente asentada en la educación y en las matemáticas?, dos campos de estudio aparentemente ajenos e independientes, la respuesta se debe presentar en términos de su propia actividad, es decir, que las preguntas de investigación que plantea el educador de las matemáticas acerca de la educación están, por naturaleza, siempre cargadas de contenidos matemáticos, y que las preguntas que elabora sobre la matemática contienen, de manera inherente, un interés educativo. Esta característica hace a los investigadores en Educación Matemática, distintos a los matemáticos y a los educadores, al tiempo que los habilita como interlocutores de ambos.

A partir de esto, es preciso reconstruir, aunque de manera breve, como evolucionaron estas características, para así poder explicar y relacionar su funcionamiento dentro del entorno nacional.

1.1.1. Antecedentes y fundamentos de la Educación Matemática

La enseñanza de las matemáticas esta influenciada por diversos movimientos que han sugerido cambios, tanto en los contenidos, como en la forma de su enseñanza. En los años 60 y 70 la llamada *new math* ([25], p. 15) o “matemática moderna” propuso hacer énfasis en las estructuras abstractas y en el lenguaje formal de las matemáticas desde los niveles básicos, sin embargo, desde su inicio se comenzó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían arrojado los resultados esperados; es así como a comienzos de los 70 el movimiento *back to basics* ([25], p. 16) o “regreso a lo básico”, brindaba mayor importancia al manejo de las operaciones elementales con los números enteros, fraccionarios y decimales, sin embargo, tampoco mejoró el aprovechamiento de los alumnos, ya que aunque se obtenían muy buenos resultados numéricos, estos mismos no eran entendidos dentro de situaciones concretas, lo que indicaba falta de sentido, significado y comprensión a las respuestas numéricas obtenidas.

Es por eso, que tanto en el movimiento llamado “matemática moderna”, como en el denomiado “regreso a lo básico”, aunque permitian que los alumnos desarrollaran ciertas formas de operar con las ideas matemáticas, realmente no mostraban comprensión de esta disciplina, que tiene entre sus principales características ayudar a desarrollar el razonamiento del alumno y su aplicación a otras ramas del saber.

A continuación, se mostrará cual fue el enfoque propuesto para superar estas limitaciones a través de la llamada "Renovación Curricular" en Colombia.

Renovación curricular en Colombia

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el proceso de renovación curricular, pretende la superación de las limitaciones anteriormente descritas y ha sido uno de los programas de largo plazo del Ministerio de Educación Nacional Colombiano (MEN), con más de 20 años de diseño, experimentación, revisión y aplicación gradual. Este proceso se planteó de la siguiente manera:

> ...se seleccionó los aspectos positivos que tenía el enfoque conceptual de la matemática moderna sin caer en enseñar lógica y conjuntos, y ofrecer esos criterios teóricos que permitieran la toma de decisiones.
>
> Para la preparación de sus clases el marco teórico del programa propuso al maestro enfocar los diversos aspectos de las matemáticas como *sistema* y no como conjuntos. Esto se llamó "enfoque de sistemas"[1] y propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistemática que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.
>
> El enfoque del programa también propuso al docente distinguir cuidadosamente entre el *sistema simbólico* (que se escribe, se pinta o se habla), el *sistema conceptual* (que se piensa, se construye, se elabora mentalmente) y los *sistemas concretos* (de donde los niños pueden sacar los conceptos esperados).
>
> La sugerencia pedagógica del programa es la de explorar los sistemas concretos que ya utilizan los niños, para partir de ellos hacia la construcción de los sistemas conceptuales respectivos; cuando ya se ha iniciado la construcción de este, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros ([25], pp. 16 - 17).

En la actualidad, este proceso continúa pero desde perspectivas mucho más amplias de las planteadas anteriormente. Ahora el papel de las escuelas filosóficas; el Platonismo, el Logicismo, el Formalismo, el Intuicionismo y el Constructivismo, tienen en cuenta

[1] Para ampliar la visión del enfoque de sistemas puede consultarse en el "marco general de la propuesta de renovación curricular de matemáticas", en "Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas", Vol. I y II, de la serie Pedagogía y currículo del MEN.

tanto aspectos externos (la historia, la génesis y la práctica de las matemáticas), como aspectos internos (el ser y el conocer), que atienden, según el MEN ([24], p. 17) al llamado de la educación activa y participativa, yque promueven en el estudiante la capacidad crítica, reflexiva y analítica para fortalecer el avance científico e investigativo.

Otro proceso que se ha perfeccionado a través del tiempo es la evaluación en educación, en particular en la Educación Matemática, a continuación sa hará una descripción sobre el desarrollo de este concepto y como incide en los procesos actuales de enseñanza y de aprendizaje.

1.1.2. La evaluación en matemáticas

La evaluación se conformó históricamente como una forma ideal de selección y control, siendo empleada como un instrumento de medición para poner etiquetas a los individuos, con ella, se trató de concretar formas de control individual y se extendio a formas de control social.

El significado de la evaluación ha evolucionado, en los últimos años, desde los juicios realizados por el profesor sobre los estudiantes a partir de la obtención de un logro, hasta un interés por proporcionar información para apoyar un programa, es por esto que la evaluación no tiene sentido si no es dentro de un currículum, ya que este tiene incidencia inmediata sobre los estudiantes y los profesores, planteando un enfoque de trabajo directo en el aula.

En el Siglo XX, el proceso evaluativo aparece como actividad y técnica cuyo nombre fue *examen*, que pretendía valorar los conocimientos que poseían los alumnos después de la enseñanza impartida, considerándose, inclusive, como un acto cohercitivo para el alumno. En este mismo siglo, aparece el término test[2] reemplazando al de examen. El test es considerado, como un instrumento científico válido y objetivo, que puede determinar una infinidad de factores psicológicos de un individuo, como la inteligencia, las aptitudes e intereses y la capacidad de aprendizaje.

Simultáneamente, la evaluación en educación, se ha desarrollado al amparo de la psicología experimental y se le concibe como una actividad sistemática integrada al proceso educativo, y su finalidad es optimizar el mismo, propiciando la máxima información para mejorar este proceso, reajustando los objetivos, revisando críticamente planes, programas, métodos y recursos; facilitando la máxima ayuda y orientación a los alumnos y profesores. Permitiendo elevar la calidad y el rendimiento del aprendizaje. Según Acevedo ([40], p. 128),

[2]Se entiende por Test, una prueba objetiva y estandarizada que proporciona información cuantificable e independiente sobre determinadas características de una persona. Su interpretación se basa en la comparación de las respuestas con otras ya establecidas como referencia.

> ... Hemos de considerar la evaluación como parte integral del proceso educativo, que implica una concepción de la práctica como un seguimiento permanente al proceso de aprehensión de una cultura *básica*. La evaluación tiene, desde luego, una función pedagógica; a partir de ella se reconocen cambios surgidos en el proceso que permiten regular, valorar el trabajo escolar, determinar el grado de apropiación de conceptos y procedimientos, parcialmente consolidados, para proponer revisiones y reelaboraciones.

Así mismo, retomando el principio que se propone *The Assesment Principle* del *National Council of Teachers of Mathematics*, citado por Acevedo ([40], p. 128 - 129): "si la evaluación es parte integral del trabajo en el aula de matemáticas, debe contribuir significativamente a que todos los estudiantes aprendan matemáticas", además, Acevedo advierte que la evaluación en matemáticas,

> ... debe reflejar la matemática que "todos" los estudiantes deben conocer (conocimientos fundamentales) y debería abordar tanto la "comprensión de los conceptos" como el "uso con significado" de procesos, procedimientos y herramientas, teniendo en cuenta los diferentes ritmos de los estudiantes para acceder a los distintos significados, aproximaciones, representaciones y estrategias diversas. La evaluación debe considerar aproximaciones múltiples.

Bajo esta perspectiva, la concepción que en esencia se predica es que saber matemáticas, es hacer matemáticas. Esta concepción implica, para la evaluación, el prestar más atención a los procesos y no sólo a los resultados y obliga, según Acevedo y García ([55], p. 94), a "reexaminar de manera significativa la función social de la Educación Matemática, los contenidos, la enseñanza y el aprendizaje e indudablemente los principios con los que se aborda el proceso de evaluación".

En la presente investigación, se entiende la evaluación como la comprensión conceptual que involucra procesos de razonamiento, los cuales permiten que los alumnos apliquen los conceptos con intención y criterio, más que como un mero desarrollo mecánico de habilidades.

1.2. Teorías del Aprendizaje

Es claro que la educación, en especial la Educación Matemática, como ciencia, como arte, y como conjunto de acciones tendentes a transformar, necesita apoyarse en alguna teoría psicológica del aprendizaje. Sin embargo, no puede realizarse una transferencia mecánica desde los principios psicológicos a las determinaciones normativas de su didáctica. Según Gimeno y Pérez ([60], p. 36),

> ...la mayoría de las teorías del aprendizaje son modelos explicativos que han sido obtenidos en situaciones experimentales, y hacen referencia a aprendizajes de laboratorio, que sólo relativamente pueden explicar el funcionameinto real de los procesos naturales del aprendizaje incidental y del aprendizaje en el aula. Éstas teorías deberían afrontar estos procesos como elementos de una situación de intercambio, de comunicación, entre el individuo y su entorno físico y sociocultural, donde se establecen relaciones concretas y se producen fenómenos específicos que modifican al sujeto.

Sin embargo, la dificultad de comprender los problemas de aprendizaje del sujeto, no son enfrentados por todas las teorías del aprendizaje con la misma pretensión de aproximación a la situaciones naturales vividas en el aula.

A continuación, se reseñan algunas de las principales teorías del aprendizaje que se desarrollaron en el Siglo XX. La característica principal es que presentan un esquema jerarquizado o semi-jerarquizado en el proceso de la adquisición del conocimiento.

1.2.1. J. Piaget

En sus trabajos, Piaget muestra, en el sentido más amplio, que los cambios intelectuales y cognoscitivos en el individuo son el resultado de su desarrollo. Su "hipótesis" general es que el desarrollo cognoscitivo es un proceso coherente de cambios sucesivos y cuantitativos en las estructuras cognoscitivas, y que cada estructura con su cambio correspondiente se deriva lógica e inevitablemente del anterior. Las nuevas estructuras no sustituyen a las anteriores, sino que se incorporan a ellos ampliándolas, lo que produce un cambio cualitativo.

Piaget afirma que el conocimiento se desarrolla a base de una construcción ordenada de estructuras intelectuales que regulan los intercambios del sujeto con el medio.

Piaget, conceptúa el desarrollo como un proceso ininterrumpido dentro de un continuo y que los cambios en el desarrollo intelectual, además de paulatinos, nunca son abruptos[3]. Desde este punto de vista, para poder conceptuar el crecimiento cognoscitivo, es necesario dividir el desarrollo intelectual en cuatro grandes etapas o estadios de pensamiento. Según Piaget ([29], pp. 229 - 254), las cuatro etapas son:

Etapa de la inteligencia sensomotora: En esta etapa, la conducta del niño es en esencia motora. El niño aún no representa internamente los acontecimientos o fenómenos ni razona mediante conceptos, aunque en su desarrollo cognoscitivo puede verse conforme elabora sus esquemas.

[3] Esta es la noción de Constructivismo adoptada por Piaget a lo largo de sus diferentes trabajos.

Etapa del pensamiento preoperativo: Esta etapa se caracteriza por el desarrollo del lenguaje y de otras formas de representación y de rápido desarrollo conceptual. Durante esta etapa el desarrollo es prelógico o semilógico.

Etapa de las Operaciones concretas: En esta etapa el niño desarrolla la capacidad de aplicar el pensamiento lógico a problemas concretos.

Etapa de las operaciones formales: En esta etapa, las estrucruras cognoscitivas del niño alcanzan su máximo nivel de desarrollo y adquiere la capacidad de aplicar el razonamiento lógico a toda clase de problemas.

Esencialmente, la teoría de Piaget es:

Genética: En cuanto los procesos superiores surgen de mecanismos biológicos, arraigados en el desarrollo del sistema nervioso del individuo.

Maduracional: Porque cree que los procesos de formación de conceptos siguen una pauta invariable a través de varias etapas o estadios claramente definibles cuando aparecen en determinadas edades.

Jerárquica: En cuanto las etapas propuestas tienen que experimentarse y atravesarse en un determinado orden antes que pueda darse ninguna etapa posterior de desarrollo.

Piaget sostiene, además, que tres factores son de especial importancia para asegurar la aparición de las etapas del desarrollo cognoscitivo. Son ellos:

1. Los factores biológicos que explican la regularidad e inevitabilidad de las etapas o estadios que postula, de la misma manera como vemos aparecer las características sexuales durante un determinado período evolutivo de los varones y las niñas, antes que se los pueda llamar adultos maduros.
2. La transmisión educacional y cultural que, según Piaget, explica las diferencias en las edades cronológicas en que aparecen sus estadios al pasar de un individuo a otro.
3. Las actividades a que se dedican los niños. Piaget tiene una visión "activa", no "pasiva", del papel que desempeñan los niños en su propio desarrollo. La actividad motriz autodirigida del niño la ve como una necesidad de desarrollo cognoscitivo. La ocupación anterior de Piaget, en biología y lógica, se refleja en el amplio uso del lenguaje técnico de esas ciencias.

Finalmente como observa Tall ([35], p. 8), "es difícil aplicar la teoria de los cuatro estadios a la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, debido al probre desempeño de los estudiantes en el nivel abstracto de las operaciones lógicas, que según Piaget, es alcanzado por los niños en su adolescencia temprana"[4].

Es importante resaltar, que los diferentes trabajos de Piaget, han servido como base teórica para diversos trabajos de investigación en áreas tan diversas como lo son la psicología, la sociología, la educación, la epistemología, la economía y el derecho y es el fundamento para el desarrollo de nuevas téorias del aprendizaje.

1.2.2. G. Polya

Polya, en su libro, "Cómo Plantear y resolver Problemas", establece que las formalidades de una prueba matemática y su derivación tienen poco que ver con el trabajo real de resolver problemas en matemáticas. Además, discute el potencial de los métodos heurísticos como descomponer el problema en subproblemas, resolver problemas más simples que reflejen los aspectos o características del problema principal, usar diagramas para representar un problemas en formas diferentes, y examinar casos especiales para tener una idea del problema.

La forma heurística identificada por Polya, se enmarca en comunicar su propia experiencia al resolver problemas, compartiendo además la idea de que las estrategias y preguntas de un experto podian ser modeladas por los docentes en el salón de clase. Así, el trabajo de Polya se desarrolló alrededor de la resolución de problemas matemáticos e identifica cuatro fases[5] fundamentales para la resolución de problemas, donde el método heurístico juega un papel importante.

Las fases para la resolución de problemas, según Polya ([30], pp. 28 - 35), se presentan de una forma general de la siguiente manera:

Comprensión del problema. En esta fase del problema se ubican las estrategias que ayudan a representar y enterder las condiciones del problema.

Concepción de un plan. En esta fase se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución.

[4]Esta, es la traducción presentada por de la Torre([9], p. 6) del siguiente párrafo "A difficulty of applying such theory to college mathematics teaching is that many -probably most- college students are not able to perfom at the abstract level of formal aperations, which Piaget reported occurring in children during their early teens."

[5]No se debe confundir el término "fases" en el desarrollo de la teoria de Polya, con el término "fases de aprendizaje" presentado en el modelo educativo de van Hiele, debido a que no tienen correlación la una con la otra.

Ejecución del plan. En esta fase se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución del problema.

Visión retrospectiva. La idea fundamental, de esta fase es tratar de resolver el problema de una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida.

Aunque las ideas de Polya, se comenzaron a implementar a partir de 1980, las estrategias heurísticas como dibujar diagramas, buscar submetas, considerar casos particulares y resolver problemas más simples que se consideran como parte esencial de la instrucción matemática, muestran todavía una diferencia notable en el aprovechamiento matemático de los alumnos, esta idea, según Polya ([30], p. 28), se ve reflejada en el siguiente parráfo:

> Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.

Apartir de esto, se evidencia la importancia de tener un método y de apropiarse de una forma de trabajo adecuada en la resolución de problemas matemáticos, que debe ser inculcada por padres y profesores a los alumnos desde temprana edad.

1.2.3. B. Bloom

En la Taxonomía de Bloom se clasifican las conductas cognoscitivas en seis categorías, que van desde las más simples hasta las más complejas, al igual que otras taxonomías, ésta es jerárquica, y los aprendizajes de los niveles superiores dependen del conocimiento y las habilidades de los niveles inferiores.

Según de la Torre ([9], p. 7), algunos criticos han señalado que Bloom “no acompaña su Taxonomía con criterios que permitan juzgar si la actividad del aprendiz está correctamente encaminada hacia la consecución de los objetivos que propone”; disponer de tales criterios es especialmente importante en aquellos casos en los que el objetivo es la adquisición de un concepto que requiera un nivel de pensamiento matemático avanzado.

A continuación se presenta una descripción de las seis categorias fundamentales de la Taxonomía de Bloom.

Conocimiento. Recordar, memorizar, reconocer, recuperar.

Comprensión. Interpretar, traducir de un medio a otro, describir con palabras de uno mismo.

Aplicación. Resolver problemas, aplicar información para producir algún resultado.

Análisis. Subdividir algo para mostar cómo se reúnen sus partes, encontrar la estructura subyacente a una comunicación o mensaje, identificar motivos.

Síntesis. Crear un producto único y original ya sea en forma verbal o como objeto físico.

Evaluación. Tomar decisiones de valor acerca de diferentes asuntos, resolver controversias o diferencias de opinión.

La contribución de Bloom a la educación va más allá de su taxonomía. Estaba interesado fundamentalmente en el pensamiento y en su desarrollo. Su trabajo sobre el estudio de los procesos mentales de los estudiantes universitarios fue otra iniciativa innovadora e importante para determinar lo que ocurría en la mente de los alumnos, a través de un proceso de estimulación de la memoria y de técnicas de pensamiento en voz alta. Lo que Bloom pretendía develar era en qué pensaban los alumnos mientras enseñaban los profesores, porque reconocía que, en definitiva, lo importante era lo que ellos estaban experimentando. La utilización de protocolos de pensamiento en voz alta proporcionó una base importante, para comprender mejor qué sucedía en la mente de los alumnos.

1.2.4. Ed. Dubinsky

En 1988, Ed. Dubinsky, desarrolló su teoría de aprendizaje denominada APOS (*Action, Process, Object, Schema*) basada en la teoría de Piaget sobre la adquisición de los conceptos matemáticos. En ella, Dubinsky propone que cada individuo construye su propio conocimiento matemático a través de un proceso de abstracción reflexiva y una de sus principales preocupaciones, es el camino por el cual un concepto es:

- Interiorizado y convertido en rutinario.
- Resumido, para considerarlo como concepto.

- Coordinado, con cada uno de los siguientes procedimientos.
- Invertido, para ser ejecutado en la dirección inversa.
- Generalizado, siendo puesto en un contexto más extenso.

Esta teoría, considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez, los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas.

Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas (APOE)[6], mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son: interiorizaciones, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones. En definitiva, las acciones, los procesos, los objetos, los esquemas y los mecanismos de construcción, es lo que Dubinsky denomina la descomposición genética de un concepto.

Dubinsky, cree que el conocimiento matemático individual está motivado por la tendencia a responder, cuando se percibe una situación problemática, por construcción o reconstrucción de un esquema o de un nuevo esquema, en el esfuerzo de tratar con esta nueva situación. Cabe resaltar, que ésta ha sido base de diferentes investigaciones, que involucran distintos conceptos matemáticos tales como: las funciones, y algunos temas relativos al álgebra abstracta, la matemática discreta, el cálculo, la estadística y la teoría de números. También es una herramienta útil para estudiar la comprensión de los estudiantes frente a conceptos matemáticos más básicos.

1.2.5. D. Ausubel

Analizando la realidad escolar, Ausubel descubre que en ella predominan dos tipos de aprendizaje, el memorístico y el significativo. El aprendizaje memorístico, se genera cuando el alumno no tiene intención de asociar el nuevo conocimiento con la estructura conceptual que ya posee en su estructura cognitiva[7], y el aprendizaje significativo, tiene lugar cuando el alumno intenta dar sentido o establecer relaciones entre los nuevos conceptos y, los conceptos y conocimientos ya existentes en su estructura cognitiva. Ausubel ([41], p. 538), define este último tipo de aprendizaje como:

[6] APOE, traducción al español de la sigla APOS.

[7] Según Ontoria ([43], p. 14) dentro de la concepción de Ausubel se define como "Construcciones hipotéticas, es decir, entidades supuestamente hipotéticas que tanto deben explicar la unidad, cierre y homogeneidad individual, como las semejanzas y coincidencias de determinados modos de comportamiento. En cada estructura mental está implicito un momento de generalidad".

> . . . Adquisición de significados nuevos; presupone una tendencia al aprendizaje significativo y una tarea de aprendizaje potencialmente significativa (es decir, una tarea que puede estar relacionada de manera sustancial y no arbitraria con lo que el aprendiz ya conoce). Es parte del continuo de aprendizaje de memoria → significativo, en oposición al continuo recepción → descubrimiento.

Algunas de las diferencias más relevantes, entre estos dos tipos de aprendizaje, según Ausubel ([41], p. 37) son:

> En el aprendizaje significativo la nueva información se incorpora de forma sustantiva, no arbitraria a la estructura cognitiva del estudiante, y hay intencionalidad de relacionar los nuevos conocimientos con los de nivel superior más inclusivos, mientras que en el aprendizaje memorístico la incorporación de los nuevos conocimientos se producen de forma arbitraria y no hay intención de integrarlos en la estructura cognitiva.

Sin embargo, Ausubel no concibe estos dos tipos de aprendizaje como radicalmente "opuestos", pues establece que, ambos tipos de aprendizaje pueden ser significativos si:

1. El estudiante emplea una actitud de aprendizaje significativo, y
2. La tarea de aprendizaje es potencialmente significativa, es decir, si consiste en un material razonable o sensible y si puede relacionarse de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante en particular.

Es importante resaltar, que pese a la distinción ya expuesta, entre los tipos de aprendizaje antes señalados, no tiene nada que ver, según Ausubel ([41], p. 37) "con las dimensiones significativo-representativas del problema de aprendizaje", pues suelen ser confundidas, ya que se ha tenido la creencia que el aprendizaje por repetición es invariablemente repetitivo y que el efectuado por descubrimiento es inherente y forzosamente significativo.

Tipos de aprendizaje significativo

De acuerdo con Ausubel, lo que se aprende son palabras u otros símbolos, conceptos y proposiciones. Dado que el aprendizaje representacional conduce de modo natural al aprendizaje de conceptos y que éste está en la base del aprendizaje proposicional, los conceptos[8] constituyen un eje central y definitorio en el aprendizaje significativo. A través de la asimilación se produce básicamente el aprendizaje en la edad escolar y adulta. De esta forma se generan combinaciones diversas entre los atributos característicos de los conceptos que constituyen las ideas de anclaje, para dar nuevos significados a nuevos conceptos y proposiciones, lo que enriquece la estructura cognitiva. Para que este proceso sea posible, se admite que se cuenta con un importantísimo vehículo que es el lenguaje:

> . . . el aprendizaje significativo se logra por intermedio de la verbalización y del lenguaje y requiere, por tanto, comunicación entre distintos individuos y con uno mismo ([41], p. 100).

Ausubel ([41], pp. 52 - 53), clasifica el aprendizaje significativo en tres tipos, en función del grado creciente de complejidad:

Aprendizaje de representaciones: Consiste "en hacerse del significado de los símbolos solos o de lo que estos representan". Este tipo de aprendizaje se vincula con la adquisición del vocabulario.

Aprendizaje de conceptos: Los conceptos también representan símbolos y palabras individuales, pero hay un mayor grado de abstracción en función de unos atributos de *criterios comunes*.

Aprendizaje de proposiciones: Consiste en "captar el significado de nuevas ideas expresadas en forma de proposiciones". Este tipo de aprendizaje puede hacerse, según Ausubel, combinando o relacionando palabras individuales entre sí, cada una con un referente distinto, y combinándolas de tal manera que el resultado (la proposición) es más que la suma de los significados de las palabras individuales.

En resumen, según Ausubel, ésta teoría es psicológica, porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que hace el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación. Es una teoría de aprendizaje, porque ésa es su finalidad. Por último, la teoría del aprendizaje significativo aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo.

[8]Ausubel, citado por Moreira ([26], p. 21) define conceptos como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos criteriales comunes y se designan, en una cultura dada, por algún signo aceptado".

1.2.6. Tall y Vinner

En 1980 Tall y Vinner introdujeron los términos "*concept image*" (concepto imagen), "*concept definition*" (concepto definición) y "*concept image definition*" (concepto imagen definición), para describir el estado de los conocimientos del sujeto en relación con un concepto matemático. Estos términos, se utilizan actualmente en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos o en el pensamiento matemático avanzado, en particular en el Análisis Matemático.

Dichos términos, se refieren a esquemas mentales que tienen características propias y consideran que cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto algo es evocado en nuestra mente, pero aquello que evocamos no es la definición matemática del concepto sino el concepto imagen. Ellos, definen este término de la siguiente forma:

> Usaremos el término concepto imagen para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. (...) Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente aparece cualquier sensación de conflicto o confusión ([35], p. 68).

Por otra parte, definen el *concepto definición*, como "la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto" ([35], p. 152). Vinner concibe el concepto imagen como una especie de celda que se va llenando gradualmente pero que no necesariemente refleja todos los aspectos del concepto definición y lo utiliza para describir la totalidad de la estructura cognitiva asociada con un concepto.

Cuando se trata de resolver algún tipo de situación, los dos conceptos se activan, lo ideal sería que la conducta intelectual estuviera determinada por un proceso en el cual intervinieran ambos, pero en la práctica dicho proceso ocurre esporadicamente, este resultado viene determinado, en muchas ocaciones por el concepto imagen del individuo, y según Tall ([35], pp. 65 - 81):

> ...sólo los problemas no rutinarios, en los que los conceptos imagen incompletos pueden ser equivocados, pueden estimular a referirse al concepto definición. Tales problemas son raros y cuando se proponen a los alumnos suelen considerarlos improcedentes o injustos. Por tanto, no parace haber nada que tienda a cambiar los hábitos comunes de enseñanza que son, en principio, inadecuados en contextos técnicos.

Además, por un lado, consideran la definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica, distinguiendo entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen encontrar escritas en los libros), y las definiciones utilizadas por las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. Por otro lado consideran que el concepto imagen, se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y que va cambiando según el individuo madura y encuentra nuevos estímulos.

La Figura 1.1 (p. 16), muestra la interacción, que se genera entre el concepto imagen y el concepto definición.

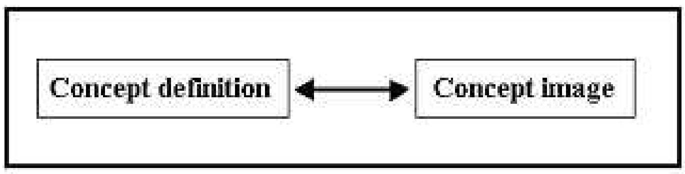


Figura 1.1: Interacción entre el concepto imagen y el concepto definición.

Esta interacción, forma lo que Tall y Vinner introdujeron como "*concept image definition*", y que se puede entender como el proceso que el concepto definición establece en la mente de los alumnos, generando el adecuado concepto imagen.

Una situación más favorable para el alumno, se da cuando la implementación del concepto imagen ha sido bien formado, al resolver un problema, o algún tipo de ejercicio, se podrá guiar mediante un esquema ideal como el representado en la Figura 1.2 (p. 16).

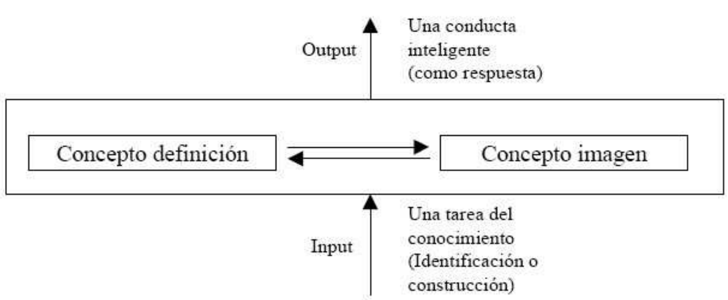


Figura 1.2: Deducción formal con apoyo del concepto imagen.

El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto, tal como se ha puesto de manifiesto en numerosos trabajos, algunos relativos al Análisis Matemático.

1.3. Modelo de Entendimiento de Pirie y Kieren

La teoría de aprendizaje desarrollada por Pirie y Kieren en 1994, define el Entendimiento Matemático de la siguiente forma:

- El Entendimiento Matemático puede caracterizarse por niveles pero no en forma lineal.
- Es un fenómeno recursivo, y la recursión ocurre cuando el pensamiento se mueve entre niveles sofisticados.
- Cada nivel de entendimiento está contenido en los niveles siguientes.
- Cualquier nivel en su interior es dependiente de las formas y los procesos y además está condicionado por los niveles externos.

Usando esta definición, concibieron su modelo de Entendimiento Matemático compuesto por ocho niveles potenciales: *Primitive Knowing, Image Making, Image Having, Property Noticing, Formalising, Observing, Structuring, Inventising*, que se pueden traducir como "Conocimento primitivo", "Creación de la imagen", "Estableciendo imagen", "Deducción de propiedades", "Formalización", "Observación", "Estructuración" y "Creación o Invención", la Figura 1.3 (p. 18) muestra la concepción del modelo de Entendimiento Matemático, el cual comienza por el primer nivel potencial *Primitive Knowing* o *PK*.

1.3.1. Características del Modelo de Pirie y Kieren

Este modelo es dinámico, pues capta la esencia del cambio del entendimiento de un concepto en todo momento. Hay una característica fractal en el modelo, el nivel de "Conocimiento Primitivo" comprende muchos tópicos, cada uno entendido en su propio nivel. La característica más crítica del modelo es el desdoblamiento, que ocurre cuando se experimenta una nueva situación y el entendimiento presente no satisface las exigencias cognitivas del problema. El aprendiz, vuelve a examinar los niveles anteriores de entendimiento a la luz de la parte que no encaja y entonces reorganiza el nivel interno para acomodar la nueva información.

Otra característica del modelo, es el complemento de un proceso y una acción de forma orientada. Para cada nivel, Pirie y Kieren creen que se deben exhibir algunas

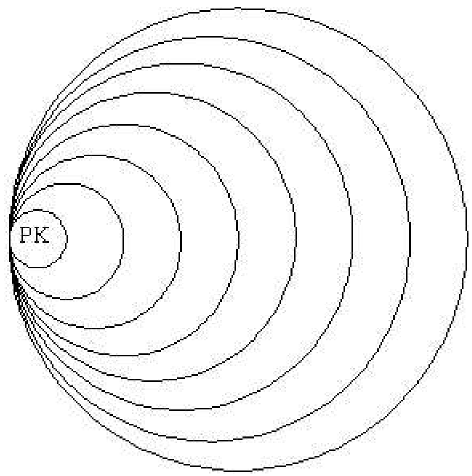


Figura 1.3: Concepción del modelo de Entendimiento Matemático de Pirie y Kieren, compuesto por ocho niveles potenciales.

acciones y verbalizaciones con el fin de considerar que se está operando en el nivel particular respectivo. La descripción anterior caracteriza un concepto particular; las acciones específicas y verbalizaciones serán trazadas a la luz del modelo general. Si el aprendiz no demuestra tal complemento en el proceso y en la acción de forma orientada, se considera que no ha alcanzado el nivel de comprensión.

1.4. El modelo educativo de van Hiele

A finales de los años 50, los esposos Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, trabajaban como profesores de matemáticas en la enseñanza media. A partir de su experiencia docente y mientras estudiaban algunos de los trabajos de Piaget, Pierre van Hiele formuló su sistema de niveles de razonamiento en geometría. Él notó, como es evidente, en algunas de las entrevistas de Piaget, que los problemas o tareas que se le presentan a los niños con frecuencia requieren del conocimiento de un vocabulario o de algunas propiedades que están fuera del alcance de su nivel de razonamiento. Según Gutierrez ([16], p. 303), algunas de las razones que llevaron a los esposos van Hiele a formular este sistema, fue que:

> . . . los profesores se lamentaban de una serie de problemas como los siguientes: Muchas veces no hay manera de conseguir que los estudiates comprendan algún concepto nuevo; otras veces parece que estos *se saben* los conceptos o propiedades que el profesor les acaba de introducir, pero sólo

son capaces de usarlos en ejemplos idénticos a los resueltos con la ayuda del profesor; también ocurre, especialmente en Enseñanza Media, que los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto o más formalizado; otra situación típica de las clases de las matemáticas es la de los estudiantes que tienen que recurrir a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver problemas, pues es la única forma legal que tienen de aprobar los exámenes.

Estas observaciones fueron fundamentales en el desarrollo del modelo educativo. Su estudio dentro de los procesos de investigación en educación, han permitido generar nuevas alternativas metodológicas de trabajo en Educación Matemática, las cuales ayudan a comprender de una mejor forma el razonamiento exhibido por los alumnos frente al concepto objeto de estudio.

El modelo educativo de van Hiele se compone de tres partes: (i) La percepción (*insight*), (ii) Los niveles de pensamiento, y (iii) Las fases de aprendizaje, que según van Hiele, citado por Esteban ([12], p. 19), tal como se utiliza actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

i. Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas.

ii. Cada nivel supone una forma de comprensión un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.

iii. Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.

iv. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que este se haga de un modo rápido y eficaz.

A continuación, se presentará una breve descripción de cada una de estas partes.

1.4.1. El Insight

Los cambios que presenta un alumno en su forma de razonamiento, frente a un concepto específico, a lo largo de una intervención pedagógica, se pueden observar y analizar a través del aumento progresivo en el lenguaje empleado por él, y a su vez, en la forma como manifiesta, analiza y emplea el nuevo conocimiento adquirdio en nuevas situaciones, esto último, según van Hiele, se denomina *Insight* y lo define como "Comprensión"([37], p. III).

Cabe resaltar, que esta definición se precisa, cuando en su texto *Structure and Insight*, van Hiele afirma que "El Insigth, existe cuando una persona actúa adecuadamente en una nueva situación y con intención[9]" ([17], p. 24).

1.4.2. Los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele

Los niveles de razonamiento, también llamados la parte descriptiva del modelo, permiten ubicar a un alumno en alguno de ellos, de acuerdo con la comprensión que tenga frente a un concepto matemático.

Van Hiele propone que un alumno pasa por cinco (5) niveles de razonamiento en la estructuración de un concepto matemático en su red de relaciones, describiéndolos para la geometría. En la presente investigación se utiliza la nomenclatura propuesta por J. L. Llorens ([14], pp. 139 - 141), en donde se describen los niveles de razonamiento de la siguiente manera:

Nivel 0, predescriptivo. Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global. Pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras.

Nivel I, de reconocimiento visual. Los alumnos analizan las propiedades de las figuras. Pero no interrelacion explícitamente las figuras con sus propiedades.

Nivel II, de análisis. Los alumnos relacionan las figuras con sus propiedades. Pero no organizan los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.

Nivel III, de clasificación y relación. Los alumnos organizan sucesiones de enunciados que les permiten deducir un enunciado a partir de otro. Pero no reconocen la necesidad de rigor y no alcanzan a comprender las relaciones entre varios sistemas deductivos.

Nivel IV, de deducción formal. Los alumnos analizan diversos sistemas deductivos con un grado de rigor comparable al exigido por D. Hilbert en su tratamiento de la geometría, comprenden ahora las propiedades de las que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

[9]Esta es la traducción realizada por los autores al párrafo "*Insight exists when a person acts in a new situation adequately and with intention*".

Cabe resaltar, que estas descripciones son presentadas, tal y como se indicó anteriormente para la geometría, sin embargo, Hoffer ([18], pp. 205 - 227), describe en forma general, los objetos para cada uno de los niveles de razonamiento en los siguientes términos:

- Nivel 0: Los objetos son los elementos básicos de estudio.
- Nivel 1: Los objetos son propiedades que analizan los elementos básicos.
- Nivel 2: Los objetos son enunciados que relacionan las propiedades.
- Nivel 3: Los objetos son ordenaciones parciales (o sucesiones) de los enunciados.
- Nivel 4: Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.

Así mismo, van Hiele en su tratado de 1986, *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*; condujo sus metas en términos de su teoría. Dichas metas, apuntan, a que los alumnos aprendan a pensar con respecto a las matemáticas, pero más importante que esto, es que aprendan a pensar matemáticamente. Primero, él disertó sobre la adquisición del conocimiento, donde cree que se alcanza mejor a través del aprendizaje de estructuras y segundo, sobre el desarrollo de la habilidad para pensar matemáticamente, es decir, adquirir conocimiento a través de la aplicación de pensamiento puro, de percibir una estructura matemática, de desarrollar el *insight*. Pero, para lograr esto, se necesita que los alumnos sean clasificados de acuerdo a su nivel de razonamiento.

Para poder realizar una clasificación de un grupo de alumnos, frente a un concepto específico, se necesitan los descriptores de los niveles de razonamiento y según Esteban ([12], p. 22), se definen como las principales características que permiten reconocer cada uno de esos niveles de razonamiento matemático, a partir de la actividad de los estudiantes. Para cada nivel, se pueden clasificar en descriptores de detección y separación, que son respectivamente, los que permiten establecer que criterios debe cumplir un alumno para ser adscrito en un nivel de razonamiento determinado y cuáles debe superar para que sea promovido al nivel inmediatamente superior.

Propiedades de los niveles de razonamiento

En investigaciones recientes, se ha comprobado que los niveles de razonamiento cumplen las siguientes propiedades:

Secuencialidad fija: Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel $n-1$.

Adyacencia: El objeto de percepción del nivel $n-1$ se convierte en el objeto de razonamiento del nivel n. Esta propiedad fue descubierta por Mayberry ([23]).

Distinción: Para alcanzar el nivel n el aprendiz debe reorganizar y reinterpretar el conocimiento adquirido en el nivel $n-1$, de modo que llegue a la percepción de una nueva estructura.

Separación: De acuerdo con esta propiedad, dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel tiene un lenguaje específico, a tal punto que las distintas capacidades de razonamiento que van unidas a cada uno de los niveles de van Hiele, se manifiestan de una manera notoria en la expresión verbal y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico.

Según Jaramillo ([21], p. 31), la idea central de van Hiele, en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, es que "la adquisición, por una persona, de buenas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia", pero el término experiencia se utiliza aquí no sólo en su acepción de experiencia de aprendizaje, sino en su sentido amplio, de modo que no sólo se refiere a lo que se adquiere en las aulas, sino a todas las experiencias que pueden afectar la comprensión del concepto.

Van Hiele describe el paso de un alumno, de un nivel al siguiente, como una función del aprendizaje: "La transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tiene lugar bajo la influencia del programa de enseñanza y de aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje[10]" ([17], p. 50). El paso de un nivel al siguiente sigue una acordada y específica secuencia de fases de progreso.

1.4.3. Las fases de aprendizaje

Las fases de aprendizaje tienen como fin, ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, y básicamente constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Las fases de aprendizaje son cinco (5) y se describen, según Gutierrez ([16], p. 333), de la siguiente forma:

Información. Se trata de toma de contacto; el profesor debe informar a los alumnos sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, que tipo

[10]Esta es la traducción al párrafo *"The transition from one level to the following is not a natural process; it takes place under influence of a teaching - learning program. The transition is not a possible without the learning of a new language."*

de problemas se van a plantear, que materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para el trabajo matemático propiamente dicho.

Orientación directa. Los alumnos empiezan a explorar el campo de estudio por medio de las investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los alumnos descubran, comprendan y aprendan cuales son los conceptos, propiedades, figuras, etc., principales en el área que se está estudiando. Es esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

Explicitación. Los alumnos intercambian sus experiencias, comentan las regularidades observadas, explican como han resuelto las actividades, además se debe prestar gran atención a las diferencias en los puntos de vista, ya que el intento de cada alumno por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas, ordenarlas y expresarlas con claridad. Es importante recalcar que esta fase, no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones, de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

Orientación libre. Los estudiantes aplican los conocimientos y el lenguaje adquirido en otras actividades (investigaciones) diferentes a las anteriores. El campo de estudio que es en gran parte conocido por los alumnos, debe ser perfeccionado, esto se consigue mediante el planteamiento de actividades, que preferiblemente puedan desarrollarse de diversas formas o que impliquen diferentes soluciones. En estas actividades se colocaran indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores. Este tipo de actividad es la que le permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan relaciones más complejas y más “importantes”.

Integración. Se refuerza la visión general sobre los contenidos, relacionando los conocimientos adquiridos con otros campos ya estudiados, pero no aportando ningún concepto o propiedad nuevos al estudiantes, esta solo debe ser una acumulación, comparación e integración de cosas que ya conoce.

Completadas esta cinco fases, los alumnos habrán adquirido una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior, completándola y reformulándola, y a partir de ese momento, el alumno ha progresado a un nuevo nivel de razonamiento. Al conjunto de las actividades que se realizaron para lograr esto, se les denominará Módulo de Intrucción.

Módulo de instrucción. Se entiende por módulo, un elemento combinable con otros de la misma naturaleza o que concurren a una misma función. En este sentido, un *módulo de instrucción* es la colección de todas las actividades realizadas para cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, frente al concepto objeto de estudio. Fuys afirma que:

> ...el módulo de instrucción, debe estar basado en el modelo de van Hiele y diseñado para utilizarlo como una herramienta de investigación en una prueba que se ajusta a una instrucción docente – alumno ([42], p. 11).

De acuerdo con lo anterior, el papel del módulo de instrucción es vital, ya que permite establecer un orden secuencial a la aplicación de las actividades propuestas para cada una de las fases de aprendizaje, frente al concepto objeto de estudio. En particular, se debe resaltar el hecho, de que hasta el momento no se han elaborado módulos de instrucción para las fases de aprendizaje frente a conceptos del Análisis Matemático, convirtiendo la presente investigación en pionera dentro de este campo de investigación, pero para conceptos geométricos se puede ver el trabajo realizado por Corberán ([7]).

En la siguiente sección se exponen brevemente, los resultados de algunas investigaciones enmarcadas en el modelo educativo de van Hiele, para la detección de los niveles de razonamiento en conceptos del Análisis Matemático.

1.4.4. Investigaciones recientes que tienen como marco teórico el modelo educativo de van Hiele

Los contenidos matemáticos, con los que tradicionalmente se diseña el currículo escolar y la forma cómo estos son enseñados, están siendo investigados por diversos movimientos académicos, que no sólo analizan lo que se refiere al uso de nuevas tecnologías y lo relativo a otras formas de enseñanza desprendidas de la creciente investigación en Educación Matemática, sino que también, aplican modelos educativos, cuya validez ha sido probada, para implementar metodologías alternativas que buscan mejorar el razonamiento de los alumnos, en conceptos relativos a las matemáticas.

Debido a sus características, el modelo educativo de van Hiele, ha sido la base de recientes proyectos de investigación y de diferentes Tesis Doctorales, en Educación Matemática, que centran su aplicación en algunos tópicos del Análisis Matemático que poseen un alto componente visual y geométrico. En particular, a partir de 1982 comenzaron a desarrollarse algunos proyectos de investigación con el objetivo común de llevar a cabo una revisión curricular (referida a la geometría) aplicando el modelo de van Hiele, en ella se destacan tres proyectos realizados en EE.UU que han tenido gran difusión: Los proyectos Chicago, Oregon y Brooklyn. Así mismo, las exploraciones de la validez de los supuestos del modelo sobre algunas nociones del análisis matemático, vienen desarrollándose desde 1994, con las Tesis Doctorales de José Luis Llorens Fuster ([14]), Pedro Campillo Herrero ([6]), Andrés de la Torre Gómez ([8]), Carlos Mario Jaramillo López ([21]) y María de los Ángeles Navarro Domínguez ([22]), dirigidas por el Dr. Pedro Pérez Carreras, y en la misma línea, la tesis de Pedro Vicente Esteban Duarte ([12]), dirigida por el Dr. José Luis Llorens Fuster. Cabe resaltar, que estas Tesis solo abordaron la detección de los niveles dentro del modelo de van Hiele, pero no abordaron el estudio de como avanzar entre ellos, es decir, no abordaron el estudio de las fases de aprendizaje de dicho modelo, ni como el *Insight* se produce en la mente de los alumnos.

A continuación revisaremos, algunos de los principales aspectos de los proyectos y las memorias de las Tesis Doctorales enmarcados en el modelo educativo de van Hiele, tanto en el ámbito de la geometría como fuera de ella.

Proyectos Chicago, Oregon y Brooklyn

Estos proyectos, se realizaron entre los años de 1982 y 1988. Su base pedagógica fue el modelo educativo de van Hiele y su eje central era el estudio de algunos conceptos geométricos. Cada uno de ellos cumplia un propópsito diferente, a saber, el proyecto Chicago, validó la teoría de van Hiele, mientras el proyecto Oregon y el de Brooklyn concluyeron la aceptación de su fundamentación teórica.

Las siguientes Tesis Doctorales, mantienen como base central, el modelo educativo de van Hiele, pero se salen del ámbito de la geometría, al del Análisis Matemático y al del Álgebra elemental para realizar sus investigaciones.

Memoria para optar al título de doctor presentada por J. Land

Judy Land, presentó su memoria en la Universidad de Boston con el nombre de *Apropiatness of the van Hiele Model for describing Stundents Cognitive Processes on algebra task as typified by College Students Learning of Functions* en 1991. La memoria de Land se centró en las habilidades de tipo operacional de los alumnos y no en el pensamiento de los mismos, lo cual la diferencia sustancialmente de los trabajos realizados con posterioridad en el campo del Análisis Matemático. Los objetivos del trabajo fueron:

i. Definir operacionalmente la conducta de los estudiantes en cada nivel usando el modelo de van Hiele para el tema de las funciones exponenciales y logarítmicas.
ii. Determinar si las respuestas de los estudiantes a una entrevista escrita pueden ser caracterizadas de acuerdo con los niveles.
iii. Formular descriptores de niveles que dan cuenta del conocimiento y el metaconocimiento.
iv. Explorar el uso de las fases de aprendizaje para facilitar el recorrido de los estudiantes desde un nivel a otro.

Los resultados que se perseguían eran:

i. Diseñar un instrumento para una evaluación clínica de los estudiantes sobre el nivel de pensamiento de entrada en una materia específica como es el Álgebra. Este instrumento incorporó opciones para bifurcar la instrucción guiada en fases.
ii. Descriptores de nivel para cada concepto estudiado del Álgebra (Land, J. 1991).

Fue J. L. Llorens, quien abrió el camino para la extensión del modelo de van Hiele, a un área diferente de la geometría, al estudiar los procesos de razonamiento de los alumnos en un concepto no geométrico.

Memoria para optar al título de doctor presentada por J. L. Llorens

La memoria de José Luis Llorens Fuster, titulada *Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local*, fue presentada en 1994 en la Universidad Politécnica de Valencia (España). Uno de los mayores logros, de este trabajo, es la extensión del modelo de van Hiele al estudio del concepto de aproximación local, que es el pilar del Análisis Matemático, abriendo de este modo, nuevas perspectivas a la aplicación del modelo y a la investigación en Educación Matemática.

El concepto elegido fue el de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto. El diseño de entrevistas clínicas semiestructuradas y de tipo socrático sirvió para formular y confirmar los descriptores de los niveles de razonamiento I, II y III. El diseño de una prueba escrita semiestructurada permitió confirmar los resultados obtenidos a través de las entrevistas en muestras más grandes de alumnos. Además, esto ayudo a automatizar las pruebas escritas para el concepto estudiado y detectar el nivel de razonamiento en el que se encuentra adscrito un alumno.

Según, Navarro ([22], p. xxx), *la utilización de un asistente matemático permitió al autor, usar un método de visualización – la ampliación sucesiva de imagenes – mediante el cual consiguió romper con el concepto imagen preconcebido de los alumnos*, que según los trabajos de Vinner se podría resumir diciendo que *la tangente toca a la curva pero no la corta*, sustituyéndolo por otro en el cual la tangente a una curva en un punto A *es la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica en un entorno de* A.

El estudio realizado permitió establecer la relación existente entre los niveles de van Hiele descritos, la dualidad de conceptos del modelo de Vinner y puso de manifiesto la eficacía de los métodos de visualización, tanto para favorecer el progreso en el nivel de razonamiento, como para conciliar el concepto imagen y definición, de acuerdo con los modelos de van Hiele y Vinner, en relación al concepto estudiado.

Memoria para optar al título de doctor presentada por P. Campillo

La memoria de Pedro Campillo Herrero, titulada *La Noción de Continuidad desde la Óptica del Modelo de van Hiele*, presentada en 1999 en la Universidad Politécnica de Valencia (España), se catacteriza por formular y confirmar los descriptores para los niveles I, II y III de razonamiento frente al concepto de continuidad de Cauchy, y aplica el modelo de van Hiele para proporcionar una nueva propuesta metodológica cuyo fin es la asimilación del concepto objeto de estudio.

Además, emplea el "estiramiento horizontal" como herramienta de visualización sobre un punto de una curva plana, consiguiendo construir un concepto imagen geométrico no intuitivo que no se apoya en la idea de "no rotura" de la curva sino en el mecanismo del "control de curvas", usado para implantar en el alumno la noción de "curva controlable", como aquella que tiende a quedarse plana tras la realización de sucesivos estiramientos horizontales. Según Navarro ([22], p. xxx), el autor, en su trabajo "consigue crear en el alumno un concepto imagen nuevo que no se basa en lo que la palabra "continuidad" sugiere en el lenguaje coloquial, ni en las experiencias pre-universitarias que los alumnos pudieran haber tenido con respecto a este tema, sino que es la idea de "controlar localmente" una curva que lo lleva a conseguir un modelo mental adecuado para la asimilación del concepto de continuidad local".

Este trabajo confirma la eficacia de la entrevista clínica, semiestructurada y de tipo socrático, en la detección del nivel de razonamiento en el que se encuentra un alumno y basándose en ella, diseño una prueba escrita que permitió la detección del nivel de razonamiento en el que se encuentra un alumno frente a la noción estudiada.

Memoria para optar al título de doctor presentada por P. Esteban

La memoria de Pedro Vicente Esteban Duarte titulada *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*, es la base fundamental en el planteamiento del presente trabajo de investigación, pues allí encontramos los señalamientos que relacionan el modelo educativo de van Hiele con el concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, mediante el mecanismo del haz de secantes. Esta Tesis fue leída en la Universidad Politécnica de Valencia (España) en el año 2000.

Según Esteban ([12], p. 87 - 109), la Tesis formula y confirma los descriptores para los niveles I, II y III de la noción estudiada, y la aplicación del modelo de van Hiele a este concepto, empleando para ello entrevistas clínicas semiestructuradas y de caracter socrático, en las que utiliza el haz de secantes como mecanismo, para definir la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. Dichas entrevistas tienen un carácter visual y geométrico acorde con el modelo de van Hiele y en ellas el lenguaje se manifiesta en las respuestas ofrecidas para su elección. En su diseño se encuentran los descriptores para cada uno de los niveles objeto de estudio, donde se destaca la parte visual y se analiza el razonamiento explicitado por el alumno a partir del lenguaje empelado por él.

En este mismo sentido, dichas entrevistas, sirvieron de base para diseñar una prueba escrita que permitió corroborar sus resultados en muestras de alumnos más amplias. La aplicación masiva del test permite desligar la adscripción de un estudiante a un determinado nivel de razonamiento de la subjetividad propia de las entrevistas clínicas.

Además de esto, la memoria plantea el objetivo de comparar los resultados que se obtienen al introducir el concepto a partir de la visualización que se obtiene por medio de los mecanismos del zoom y del haz de secantes en grupos de alumnos con caracteristicas similares. Así mismo, compara, utilizando para ello el test utilizado por Vinner en 1982, los resultados obtenidos por tres grupos de alumnos, a dos de los cuales se les introdujo el concepto utilizando el ordenador, mediante el zoom y el haz de secantes respectivamente, y al tercer grupo sin hacer uso de los mismos. La conclusión obtenida fue que *el ambiente gráfico que se crea al trabajar en el ordenador hace que los conceptos queden claros para un mayor número de estudiantes.* De este trabajo están escritos los artículos "Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de recta tangente a través del haz de secantes" ([52]) y "Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local" ([53]), entre otros.

Un estudio posterior, titulado *Noción de punto, recta y curva en el nivel de reconocimiento visual de van Hiele*, realizado en la Universidad de Eafit (Medellín - Colombia), tiene como base ésta tesis doctoral y fue dirigido por los profesores Pedro Vicente Esteban Duarte y Carlos Alexander Grajales. En este, aparece como común denominador el empleo de una entrevista clínica de carácter socrático, con la que se indaga por los elementos primitivos de punto, segmento, recta y curva, para determinar si en la mente del alumno se encuentran las relaciones básicas entre ellos. En dicha investigación, se concluyó, que un gran número de alumnos que no respondierón correctamente las preguntas relacionadas con estos elementos primitivos, no mostraron un avanzado nivel de razonamiento en el concepto de aproximación local.

Memoria para optar al título de doctor presentada por C. Jaramillo

La memoria de Carlos Mario Jaramillo López, titulada *La Noción de Serie Convergente desde la Óptica de los Niveles de van Hiele*, fue presentada en el año 2000 en la Universidad Politécnica de Valencia (España). En ella, se utiliza la longitud de un zig–zag obtenido a partir de segmentos de recta, como el mecanismo de visualización para romper la preconcepción, de que la acumulación de una cantidad infinita de términos debe tener un resultado infinito.

Jaramillo ([21], p. 57 - 72), utilizó entrevistas clínicas semiestructuradas y de tipo socrático para determinar los descriptores de los niveles I, II y III de razonamiento frente a la noción de serie convergente, diseño un test escrito que le permitió corroborar los resultados obtenidos en la clasificación de los alumnos en su correspondiente nivel de razonamiento.

Un estudio posterior, titulado *Técnicas de análisis multivariado e interpretación de datos en las investigaciones relativas al concepto de límite*, realizado en la Universidad de Antioquia (Medellín - Colombia), tiene como base ésta tesis doctoral y fue dirigido por los profesores Carlos Mario Jaramillo López y Leonardo Ceballos Urrego. Éste tiene como base los resultados encontrados por Jaramillo ([21]), y entre sus objetivos está comparar y convalidar estos resultados aplicando el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (A.F.C.M). Además, explorar la existencia de subniveles dentro de cada nivel, específicamente en la noción de convergencia, a la luz del modelo de van Hiele.

Esta investigación con los tipos de análisis desarrollados, no solo condujo a la obtención de los objetivos propuestos en ella, sino que validó una metodología de análisis para estudios de la misma naturaleza, en los que predominan las variables cualitativas.

Memoria para optar al título de doctor presentada por A. de la Torre

La memoria de Andrés Felipe de la Torre Gómez, titulada *La Modelización del Espacio y del Tiempo: Su Estudio Vía el Modelo de van Hiele*, fue presentada en el año 2000 en la Universidad Politécnica de Valencia (España). Dicha memoria, consta de dos partes: la primera de ellas proporciona una propuesta metodológica para la asimilación del concepto de equipotencia de agregados infinitos de puntos, para alumnos de último grado de bachillerato y del primer año de universidad, y los prepara para comprender la modelización del espacio y el tiempo que se estudia en la segunda parte.

En la primera parte, explora la proyección como el instrumento que permite comparar dos conjuntos con infinitos elementos, con el objetivo de que el alumno llegue, mediante sus propios razonamientos, a la conclusión de que dos figuras geométricas tienen la misma cantidad de puntos si es posible proyectar una de ellas sobre la otra, de modo que los puntos queden en correspondencia uno a uno. La segunda parte de la memoria tiene por objetivo la elaboración de una propuesta metodológica, enfocada a la comprensión del proceso seguido en la formulación del modelo matemático del espacio y el tiempo y a la explicación de los hechos del mundo representativo a la luz del modelo de van Hiele. En esta última parte, De la Torre se sale del contexto geométrico para detectar los niveles de van Hiele verbalmente, analizando razonamiento puro. En esta parte se limita a la realización de entrevistas clínicas. En ambos casos se proporcionan los desriptores de los niveles I, II y III de van Hiele en los procesos de razonamiento asociados con los conceptos en cuestión y se estudian los obstáculos cognitivos que no permiten al alumno comprender dichos conceptos.

Memoria para optar al título de doctor presentada por M. Navarro

La memoria de Maria de los Ángeles Navarro Domínguez, titulada *Un Estudio de la Convergencia Encuadrada en el Modelo Educativo de van Hiele y su correspondiente Propuesta Metodológica*, fue presentada en el año 2002 en la Universidad de Sevilla (España). Esta investigación incorpora como base teórica la elaboración de una propuesta metodológica, en concordancia con el modelo educativo de van Hiele, que propicia en el alumno la formación de un concepto imagen apropiado para el proceso de convergencia de una sucesión, permitiendo detectar los niveles de razonamiento I, II y III, en los que se encuentran los estudiantes.

Navarro, diseña y aplica un modelo de guión para una entrevista clínica semiestructurada y de tipo socrático, que permite la detección de los descriptores de los niveles de razomamiento y la clasificación de cada alumno entrevistado en su correspondiente nivel, para la noción estudiada.

1.5. La teoría de la asimilación: El aprendizaje significativo

Se habla de comprensión, cuando el alumno le da sentido a aquello con lo que entra en contacto y mediante lo cual se forman representaciones y esquemas cognitivos. Se trata, pues, de una asimilación activa, consistente en captar o adquirir lo que está implicado en el proceso de aprendizaje, según Ontoria ([43], p. 22) "la teoría de la asimilación es el punto central del planteamiento de Ausubel sobre el aprendizaje significativo, de tal manera que la mayor parte de este aprendizaje consiste en la asimilación de la nueva información", pues la estructura cognitiva de un estudiante es el factor más importante que influye en el proceso de adquisición o no de un nuevo concepto, y es en este proceso donde se modifican la estructura cognitiva y la nueva información, esta interacción constituye el núcleo de la teoría de la asimilación. De acuerdo con Ausubel ([41], pp. 70 - 71):

> . . . la adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una interacción de la nueva información con ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado de la interacción que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una asimilación de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognitiva altamente diferenciada.

La teoria del aprendizaje significativo, fue concebida con la intención de superar tanto los límites de la enseñanza tradicional (memorística y acumulativa), como el exceso de actividad que se derivaba de las corrientes a favor del aprendizaje por descubrimiento, el cual impedía en ocasiones la asimilación de nuevos contenidos. Este se presenta, según Maya ([39], p. 21), "cuando nuevos conocimientos pasan a significar algo para el estudiante, siendo capaz de integrar y explicitar dicho conocimiento, es decir, si explica algunas situaciones con sus propias palabras y emplea este conocimiento para la resolución e interpretación de nuevos problemas en distintos contextos".

En síntesis, el aprendizaje significativo es el proceso que se genera en la mente humana cuando obtiene nuevas informaciones de manera no arbitraria y sustantiva, y que según Rodriguez Palmero ([28], p. 4), requiere,

> . . . predisposición para aprender y material potencialmente significativo que, a su vez, implica significatividad lógica de dicho material y la presencia de ideas de anclaje en la estructura cognitiva del que aprende. Es subyacente a la integración constructiva de pensar, hacer y sentir, lo que constituye el

> eje fundamental del engrandecimiento humano. Es una interacción triádica entre profesor, aprendiz y materiales educativos del currículum en la que se delimitan las responsabilidades correspondientes a cada uno de los protagonistas del evento educativo. Es una idea subyacente a diferentes teorías y planteamientos psicológicos y pedagógicos que ha resultado ser más integradora y eficaz en su aplicación a contextos naturales de aula, favoreciendo pautas concretas que lo facilitan. Es, también, la forma de encarar la velocidad vertiginosa con la que se desarrolla la sociedad de la información, posibilitando elementos y referentes claros que permitan el cuestionamiento y la toma de decisiones necesarios para hacerle frente a la misma de una manera crítica.

Pero, estas no son las únicas condiciones que pueden ayudarnos a entender lo que es el aprendizaje significativo, y además, son pocas las técnicas que se han construido con este propósito.

1.6. Los mapas conceptuales

La noción de mapa conceptual, se desarrolló a partir de la década del setenta, o del siglo anterior, y ha constituido desde entonces una perspectiva de trabajo teórico-experimental de gran atención para profesores, investigadores educativos, psicólogos y alumnos en general. Los mapas conceptuales, surgieron como una forma de instrumentalizar la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, en especial, en lo referente a la evolución de las ideas previas que poseen los alumnos, fueron desarrollados por J. D. Novak, y divulgados a través del libro Aprendiendo a Aprender, en el cual, según Novak ([46], pp. 13 - 15), se pretendía entre otros, un objetivo medular: "liberar el potencial de aprendizaje en los alumnos que permanece sin desarrollar y que en muchas prácticas educativas lo único que hacen es obstaculizarlo más que facilitarlo".

Novak ([46], p. 33), plantea que los mapas conceptuales tienen por objeto "representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones y que una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica", además, los define como "un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones". Es por eso, que los mapas conceptuales son un instrumento que facilita la evaluación formativa del alumno y son instrumentos evaluativos útiles en la detección de errores conceptuales y en la evolución del lenguaje empleado por los alumnos, a lo largo del proceso educativo.

En el mismo sentido, "los mapas conceptuales, pueden ser empleados como una técnica de estudio y como herramienta para el aprendizaje ya que permiten al docente explorar con sus alumnos los conocimientos previos que tienen frente a un tema específico" ([46], p. 33), además, su elaboración, le permite al alumno organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento del concepto estudiado, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad.

Los mapas conceptuales pueden ser empleados como una representación gráfica o esquemática del conocimiento, en este esquema todo el conocimiento esta organizado y representado en todos los niveles de abstracción, situando, "los más generales e inclusivos en la parte superior del mapa y los menos inclusivos en la parte inferior del mismo" ([46], p. 35).

Esta forma gráfica de representar los conceptos y sus relaciones, proveen a los profesores y alumnos de una manera para organizar y comunicar su estructura mental sobre un tema determinado. Ausubel, citado por Maya ([39], p. 19), sostiene que "la estructura cognitiva de una persona es el factor que decide acerca de la significación del material nuevo y de su adquisición y retención", por lo tanto, un concepto podrá o no, ser incorporado de acuerdo a la estructura cognitiva que el alumno posea y a las tareas de aprendizaje que se le presenten.

Desde una perspectiva innovadora e investigativa, los mapas conceptuales son una fuente de información del lenguaje que posee un alumno, lo cual le permite al docente regular el proceso de enseñanza y de aprendizaje, y dicha regulación, se realiza principalmente con una intervención directa entre docente y alumno.

1.6.1. El lenguaje: Relación entre el modelo educativo de van Hiele y los mapas conceptuales

El lenguaje tiene un papel crucial dentro del proceso de formación de conceptos y en el aprendizaje significativo de los mismos. Es la facultad humana que permite, entre otras cosas: expresar, comunicar, manejar códigos y sistemas de símbolos organizados de acuerdo con leyes internas, con el fin de manifestar lo que se conoce, se vive, se piensa, se desea, se siente, entre otros actos de la actividad humana.

Según Ausubel, la adquisición del lenguaje es lo que permite en gran parte a los humanos el aprendizaje significativo, de una vasta cantidad de conceptos y principios que, por si solos, no podrían nunca descubrir a lo largo de sus vidas. Es por eso que se hace relevante dejar explícito el papel que juega el lenguaje dentro de la construcción de los mapas conceptuales, ya que según Novak ([46], p. 37), "...es útil para traducir regularidades que reconocemos normalmente, en códigos que podemos utilizar para describir nuestros pensamientos, sentimientos y acciones".

En concordancia con el modelo educativo de van Hiele, el lenguaje constituye uno de los factores de mayor importancia en la detección del nivel de razonamiento en el que se encuentra un alumno, donde además de la observación de los términos que los alumnos utilizan, es de especial interés la evolución y el refinamiento que provoca en ellos la búsqueda de una mayor precisión, según Gutierrez ([16], p. 313),

> ...las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario.

En este mismo sentido, Esteban ([49], p. 154), afirma que

> ...al indagar por un concepto específico, el docente puede darse cuenta del tipo de relaciones construidas por los alumnos, con qué otros conceptos lo relaciona, el lenguaje utilizado y el grado de integración entre ellos. Al evaluar esta información, la instrucción se puede orientar a ayudarle a los alumnos a ampliar la red de relaciones, propiciando el *insight*, objetivo fundamental del modelo de van Hiele.

Por lo tanto, el propugnar por la evolución del lenguaje de los alumnos, debe ser uno de los objetivos primordiales en las actividades de aprendizaje diseñadas por el docente, pues ésto le permite una mejor interacción con ellos, ya que si hay limitaciones en el lenguaje, se generan dificultades para comprender, analizar y razonar frente al concepto matemático estudiado, tal como lo describe Beyer y Suárez ([56], p. 66)

> El manejo del vocabulario matemático se mejora cuando la interacción estudiante – profesor crea la necesidad de encontrar la palabra correcta para expresar una determinada idea.

Dichas dificultades, se tornan aún más graves, si a lo anteriormente expuesto se le agrega la poca habilidad que puede tener el estudiante en el uso y comprensión del lenguaje utilizado. Esto trae como consecuencia las fallas al interpretar el lenguaje en el contexto matemático, no permitiedo a los alumnos, sintetizar, analizar y razonar sobre el concepto objeto de estudio. Lo anterior se puede entender en el contexto del modelo educativo de van Hiele como “dos personas que razonan, y que interpretan los argumentos de otro, en diferentes niveles no podrán comprenderse” ([16], p. 315).

De acuerdo a lo anteriormente planteado, el lenguaje es una de las principales relaciones que hay entre el modelo educativo de van Hiele y la técnica de los mapas conceptuales, debido a que en dicho modelo es un factor de distinción entre niveles de razonamiento y en los mapas conceptuales es un factor esencial en su elaboración.

1.6.2. Otras formas de representación del conocimiento

Los mapas conceptuales no son la única forma de representación de conceptos, estos también se pueden representar mediante diagramas de flujo, organigramas, redes conceptuales, redes semánticas, epítomes, esquemas, entre otros. Según Maya ([39], p. 105), ninguno de estos tipos de representación se basa en la teoría del aprendizaje significativo, ni en la teoría del conocimiento que constituyen la base de la elaboración de los mapas conceptuales.

Las siguientes definiciones son presentadas por Ontoria ([43], p. 44), en relación con la representación del conocimiento:

Diagramas de flujo: Representa la sucesión temporal de acontecimientos, no el orden de inclusividad.

Organigramas: Son representaciones de una jerárquia, pero no de significados sino de unidades o funciones administrativas.

Redes conceptuales: Expresan jerárquias de significados, de tal manera que los conceptos más generales se explicitan en una serie de conceptos más concretos que describen el significado de los primeros. Las relaciones se simbolizan por medio de flechas y no necesariamente han de expresarse en forma verbal.

Redes semánticas: Las redes concpetuales se llaman también redes semánticas porque pretenden, fundamentalmente, establecer relaciones de significados entre los conceptos (nodos) que tratan de representar.

Epítomes: Constituyen un marco conceptual de una asignatuta o área escolar, que recoge los elementos eseciales del contenido y los contextualiza conceptualmente.

Esquemas: Novak, distingue los mapas conceptuales, de los esquemas con base a que la selección de los conceptos es mucho más intensa en los mapas, su lenguaje es más explícito y conciso, y la jerarquización es más estricta que en los esquemas y también es mayor su impacto visual.

1.6.3. R. Duval

Los estudios experimentales de Raymond Duval, involucran, por un lado, los problemas de manipulación de representaciones dentro de un sistema matemático de signos, y por otro, los problemas de conversión entre dos o más sistemas de representación de un mismo objeto matemático, estos han generado una nueva noción que es la base de registro semiótico de representación, cuya idea está totalmente ligada a las funciones esenciales para toda actividad cognitiva.

Una forma de ejemplificar lo anteriormente descrito, es la escritura de un número en diferentes sistemas de representación, por ejemplo:

$$0,33... = \frac{1}{3} = 3^{-1} = \frac{2}{6} \quad \dots$$

Duval ([32], pp. 29 - 30), caracteriza un sistema semiótico de la siguiente manera:

> Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:
>
> - La presencia de una representación identificable.
> - El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
> - La conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Sobre la construcción de conceptos matemáticos, Duval ([31], p. 46) establece que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, esto implica que debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.

La Figura 1.4 (p. 37), muestra un modelo cognitivo de la representación, y según Duval ([32], p. 68), este se entiende como

> Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

Así mismo, Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico" ([32], p. 30). Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.

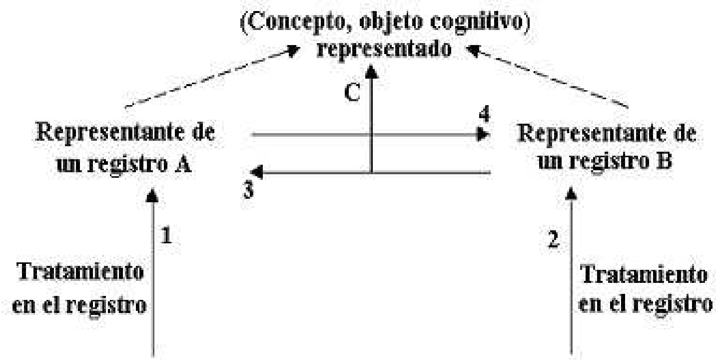


Figura 1.4: Modelo cognitivo de la representación centrado en la función de objetivación.

1.7. Marco teórico de la investigación

Finalmente, de las teórias y modelos educativos presentados en este Capítulo, el que ha sido adoptado en la presente investigación es el de van Hiele, pues como se expuso anteriormente, ha sido probado en áreas diferentes a las inicialmente propuestas por los esposos van Hiele, en particular, en el concepto de aproximación local, en algunas de sus manifestaciones.

A partir de esto, y teniendo en cuenta las carecterísticas presentadas por los lineamientos curriculares ([25], p. 58), donde se describe que

> . . . la moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales.
>
> Muestra al modelo educativo de van Hiele, como “la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución”, en lo relativo al pensamiento geométrico.

y debido a los resultados de sus recientes aplicaciones, en lo relativo a algunos conceptos del Análisis Matemático y del Álgebra elemental, podría ser también una propuesta que describe con bastante exactitud esta evoluciónen en lo relativo al pensamiento variacional, que es uno de los ejes centrales del proceso Educativo Colombiano.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

El concepto de aproximación local está relacionado con todos los procesos de paso al límite, tales como el de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, el de derivada de una función en un punto, el de continuidad de una función en un punto, la convergencia de sucesiones y de series, entre otros. En investigaciones recientes, relacionadas en el Capítulo 1, que tienen como marco teórico el modelo educativo de van Hiele, se proponen entre sus objetivos encontrar los niveles de razonamiento propuestos para los correspondientes conceptos de aproximación local estudiados, diseñar entrevistas clínicas y test semi-estructurados, pero no se enfocan a diseñar propuestas metodológicas para potenciar el nivel de razonamiento de los alumnos.

Un factor, que es fundamental para determinar y potenciar el nivel de razonamiento de un alumno, es el lenguaje empleado por este. En este Capítulo se presenta una descripción del concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, y la forma como los mapas conceptuales se pueden implementar dentro del modelo educativo de van Hiele, para analizar el lenguaje empleado por ellos en este concepto, lo cual permitirá presentar formalmente el problema objeto de estudio de esta investigación.

2.1. El concepto de aproximación local

Las primeras manifestaciones del concepto de aproximación local se comienzan a explicar en los últimos años de bachillerato y en los primeros años de universidad, en relación con el Análisis Matemático. En estos grados escolares el concepto se explica de manera intuitiva, exponiendo las definiciones con palabras, para evitar la simbología necesaria en un tratamiento riguroso. Es común creer, que la compresión de los procesos en los cuales esta involucrado el concepto de aproximación local no debería presentar obstáculos para los alumnos y por ello se pasa rápidamente de las definiciones presentadas en forma verbal a los problemas algebraicos, no teniendo en cuenta el desarrollo del razonamiento que es inherente a los conceptos que requieren el paso al límite.

La recta tangente a una curva es una manifestación del concepto de aproximación local, que para su estudio, se puede dotar de una componente visual y geométrica, que ayuda al alumno a comprender los procesos de razonamiento en los cuales está involucrado el paso al límite y a la vez hacer explícitos, mediante el lenguaje, los procesos mentales que efectúa para obtener conclusiones.

Según Esteban ([12], p. 56) "El poder dotar la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, de una componente visual (La tangente a una curva en un punto A es la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica en un entorno de A), y el hecho intrínseco de ser geométrico, fue lo que permitió extender el modelo de van Hiele al campo del Análisis Matemático, en particular al concepto de aproximación local, llevándolo fuera del ámbito de la geometría elemental", esto facilita detectar los descriptores para los distintos niveles de razonamiento propuestos por el modelo.

2.2. El concepto de recta tangente a través de la historia

Los matemáticos griegos, en el mundo geométrico en el cual se movían, siempre estuvieron interesados en encontrar tangentes a las curvas que estudiaban, en especial a las cónicas, de las que fueron sus descubridores, caracterizándolas de acuerdo con las propiedades que estas curvas tienen. La historia destaca en este campo a Apolonio, el cual dedicó su libro V al estudio de los segmentos máximos y mínimos, trazados con respecto a una cónica. Acerca de esto, Boyer dice:

> ...Los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Sin un conocimiento de las propiedades de las tangentes a una parábola sería imposible un análisis preciso de las trayectorias locales en el movimiento de proyectiles y, de la misma manera, un estudio detallado de las trayectorias de los planetas es inimaginable sin hacer referencia a las tangentes a una elipse. Resulta pues meridianamente claro, dicho en otras palabras, que fue la matemática pura de Apolonio la que hizo posible la aparición, unos 1.800 años más tarde, de los Principia de Newton, ... Los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva C en un punto P, considerándola como una recta L que tiene el único punto P

> común con la curva, y tal que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por P e incluida entre la recta L y la curva C ([4], p. 203).

Así mismo, debido a la falta de un sistema numérico y de coordenadas adecuado, tuvieron que pasar varios siglos antes de que estas ideas fueran retomadas desde un punto de vista algebraico y contribuyeran a solucionar otros problemas matemáticos de gran importancia, esta nueva visión fue expuesta en los trabajos de Descartes, tal como lo expone Jourdain:

> El problema de trazar la tangente – posición límite de la secante cuando los dos puntos de intersección se aproximan indefinidamente el uno al otro – en cualquier punto de una curva cobró importancia como resultado de la obra de Descartes, y esto, junto con las nociones afines de velocidad y aceleración "en el instante", que aparecen en la clásica investigación de Galileo publicada en 1.638, y la ley de la caída de los graves, originó a la larga el potente y cómodo "cálculo infinitesimal" de Leibniz y el "método de fluxiones" de Newton([19], p. 398).

Descartes y varios de sus seguidores adoptaron diferentes formas de la definición de tangente, las cuales suponen en realidad la idea de límite, noción que aparece abiertamente en la formulación rigurosa del cálculo infinitesimal cuya definición formal (la de límite) fue dada por Cauchy, en la primera mitad del siglo XIX. En la segunda mitad del siglo XIX, el celebre analista alemán Karl Weierstrass, "construyó una base aritmética puramente formal para el análisis, totalmente independiente de toda intuición geométrica" ([5], p. 284). Como puede observarse, el concepto de tangente siempre estuvo presente en la mente de los grandes matemáticos, sirviendo de motivación para el desarrollo de otros temas afines hasta la formalización del análisis con Cauchy y Weierstrass.

2.3. Mecanismos para construir la tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella y su relación con el modelo de van Hiele

Algunos de los mecanismos que permiten de una manera gráfica, explorar el concepto de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella son el zoom y el haz de secantes. Por medio del mecanismo del zoom se logró por primera vez extender el modelo de van Hiele a conceptos fuera de la geometría elemental, encontrándose los descriptores para los Niveles I, II y III, lo cual permite detectar el nivel de razonamiento de un alumno, en uno de estos niveles de acuerdo con el modelo educativo de van Hiele. Este trabajo fue realizado por J. L. Llorens ([14]), quien expandió las posibilidades de aplicación de dicho modelo a otros trabajos en el campo del Análisis Matemático como es el de la continuidad local, realizado por Campillo Herrero ([6]), entre otros.

El mecanismo del zoom permite definir la tangente como "la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica en un entorno de A", tiene como ventaja principal que es "fácil" de visualizar. La mayoría de asistentes matemáticos y las calculadoras gráficas tienen funciones especiales para efectuarlo rápidamente; de otro lado, tiene la desventaja de que no es fácilmente formalizable, es decir, no permite explorar el razonamiento en niveles avanzados.

Otro de los mecanismos que permite explorar el concepto de recta tangente a una curva plana en un punto A dado sobre ella, es el haz de secantes. A partir de él, Esteban ([12]) caracterizó los niveles de razonamiento I, II y III del modelo de van Hiele, encontrando los descriptores para cada uno de ellos. Dicho mecanismo puede definirse como "las rectas que pasan por A y por puntos sobre la curva cada vez mas cercanos a A". A partir de él, se puede definir la tangente en A como "el límite de las secantes AM cuando el punto M tiende a A a lo largo de la curva", tal como se ilustra en la Figura 2.1 (p. 43).

La construcción del mecanismo es más laboriosa, puesto que requiere trazar rectas, bien sea con regla o con la ayuda de un programa gráfico que permita hacerlo rápidamente; de otro lado, desde el comienzo se recalca la localidad (se hace sobre un punto de la curva), hecho fundamental en el concepto de tangente. Según Esteban ([12], p. 67),

> estos dos mecanismos, el "zoom" y "el haz de secantes", permiten explorar el concepto-imagen que los estudiantes tienen de la tangente a una curva en un punto y ponen en crisis, en los estudiantes que no razonan en un nivel elevado, el concepto imagen de tangente como recta que toca a la curva en un punto (caso de la circunferencia), o el de que la tangente no puede cortar a la curva (en algunos casos especiales), permitiéndoles ver que la tangente debe cumplir una propiedad adicional que depende de la propia curva y del paso al límite que se hace a partir del mecanismo elegido.

Cabe resaltar, que a diferencia del mecanismo del zoom, el mecanismo haz de secantes permite que los estudiantes realicen procesos de formalización[1] verbal, es decir, permite explorar el razonamiento en niveles avanzados (Nivel III y IV del modelo educativo de van Hiele).

[1]Es importante aclarar, que este proceso de formalización no se refiere a dar una definición formal del concepto objeto de estudio, sino, a que los alumnos expresen verbalmente definiciones matemáticamente válidas para dicho concepto.

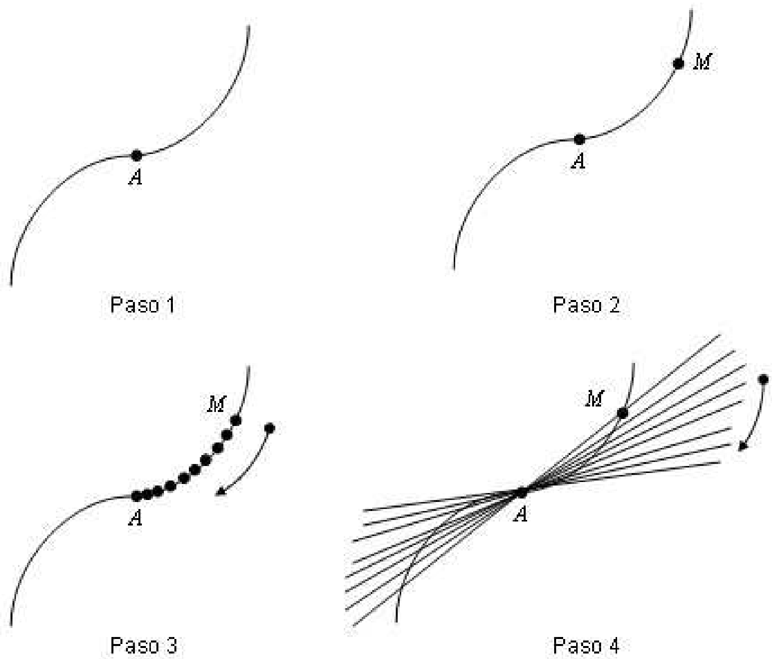


Figura 2.1: Proceso de construcción del mecanismo del haz de secantes en cuatro (4) pasos. Paso 1, marque un punto A sobre la curva. Paso 2, marque un punto M sobre la curva a la izquierda o derecha de A. Paso 3, marque puntos sobre la curva, a partir de M cada vez más próximos a A. Paso 4, trace las rectas secantes que pasen siempre por A y por los puntos marcados cada vez más proximos a A.

Existen otros mecanismos para explorar el concepto de tangente, como los expuestos por Artigue en el artículo *Analysis*, publicado en el texto "*Advanced mathematical thinking*" ([35], p. 174), pero el que ofrece mayor interés dentro de la presente investigación, es el del "haz de secantes".

2.4. La recta tangente en el currículo académico colombiano

El concepto de recta tangente, en el currículo escolar Colombiano, se presenta a los alumnos en los primeros años de bachillerato, y se hace con una imagen estática[2] en

[2]Se debe entender por "estático", aquellas imágenes que no conducen a la noción de aproximación, y por "dinámicas", aquellos imágenes que involucren en su proceso de construcción el paso al límite.

relación a con una circunferencia mostrando únicamente una gráfica, como la ilustrada en la Figura 2.2 (p. 44).

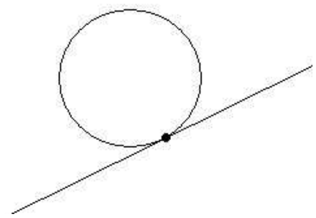


Figura 2.2: Ilustración del concepto de recta tangente dado a los alumnos en los últimos años de primaria y los primeros años de bachillerato.

Está presentación del concepto a partir de imagenes estáticas no pérmite que los estudiantes evolucionen en su nivel de razonamiento, y por el contrario, puede tener elementos que lo inducen a creer que la tangente no puede cortar a la curva, impidiendo que el alumno construya en su mente una imagen dinámica del concepto de recta tangente a una curva plana, desaprovechando la oportunidad de utilizar la componente geométrica en un sentido dinámico, es decir, la capacidad de abstraer que el proceso de construcción de la tangente es infinito y requiere del paso al límite.

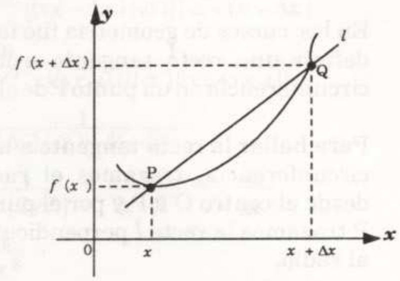
Durante los años siguientes el problema de construcción de la tangente esta "ausente" de los programas de matemáticas, y sólo se vuelve a tratar en el último año de bachillerato cuando se trabaja el concepto de derivada, apareciendo por primera vez el mecanismo del haz de secantes, tema con el cual se relaciona directamente la recta tangente a una función en un punto dado. Las Figuras 2.3 (p. 45) y 2.4 (p. 46), muestran como se presenta y se trabaja el tema de acuerdo con dos de los textos más populares de matemáticas, que se siguen en el último año de bachillerato.

De acuerdo con lo anteriormente descrito, se tiene que el concepto de tangente no se encuentra definido y se utiliza de manera encubierta para definir el concepto de derivada. En ningún momento se hace una distinción entre los dos conceptos (derivada – tangente), creando en muchos alumnos un concepto-imagen que no corresponde a ninguno de ellos. Según Esteban ([12], p. 82), algunos aspectos que resaltan este hecho son:

- Si no se ha definido ni explicado el concepto de recta tangente, a una curva en un punto, no es natural que la derivada se interprete geométricamente como la pendiente de la recta tangente.
- Las explicaciones que se dan sobre la tangente a una curva en un punto, al utilizarla para definir la derivada, no ayudan a que el estudiante erradique el concepto–imagen de tangente a una circunferencia, y por

Ecuación de la recta tangente

Sea una curva cualquiera definida por $y = f(x)$. Grafiquemos una parte de ella.
Tracemos una recta l que pase por los puntos P y Q, dos puntos de la curva.



Toda recta que corta a una curva en dos puntos se llama *recta secante*, la recta l es una de ellas. Supongamos que P tiene coordenadas (x,y)

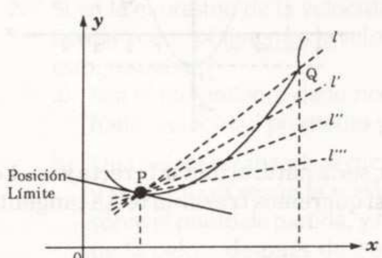
Sean las coordenadas de $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ donde Δx puede ser una cantidad positiva o negativa.

La pendiente de l se puede obtener de su fórmula, cuando tenemos dos puntos.

$$m = \text{Pendiente de } l = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando Δx tiende a cero, vemos que el punto Q tiende al punto P, y la recta l (secante) gira en torno a P en el sentido del desplazamiento de las manecillas del reloj. Podemos pensar, que la recta l tiende a una recta límite cuando $\Delta x \to 0$ y ésta debe ser la tangente a la curva en el punto P.

Grafiquemos varias posiciones de la recta l cuando $\Delta x \to 0$.



Además, si la función tiene derivada, sabemos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Es decir, las diferentes rectas l tienden a una pendiente límite, que es la derivada de la función f en el punto P. Si trazamos por P una recta con pendiente $f'(x)$, obtenemos la ecuación de la recta tangente.

Recordemos que la fórmula punto pendiente para la ecuación de la recta es:

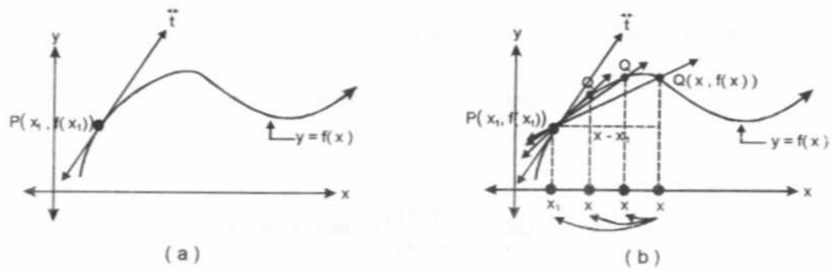
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si tomamos $y_1 = f(x_1)$ y $m = f'(x)$, obtenemos la ecuación de la recta tangente en el punto P. Entonces:

***La tangente** a la curva de ecuación y= f(x) en P (x,f(x)) es la recta trazada por P(x,f(x)) con pendiente f'(x).*

Figura 2.3: Ilustración tomada del texto, Matemática Constructiva 11 ([57], p. 132), en la cual se muestra como se presenta el concepto de recta tangente.

Hallar la ecuación de la recta tangente $\overleftrightarrow{t}$ a f en el punto $P(x_1, f(x_1))$; figura 7 - 6 (a).



SOLUCIÓN

1. De acuerdo con la estrategia de Leibnitz tomamos otro punto arbitrario Q(x, f(x)) de la curva; figura 7 - 6 (b)

2. La pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ es:

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

   siempre que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ no sea vertical.

3. Si ahora "movemos" el punto Q a lo largo de la curva de manera que cada vez se aproxime más al punto P, entonces podemos observar dos cosas:

   i. Que la abscisa x del punto Q se hace cada vez **más próxima** a la abscisa x_1 del punto P; es decir $x \to x_1$.

   ii. Que el valor de la pendiente de cada una de estas secantes se **aproxima** cada vez más a lo que debe ser la pendiente de la tangente.

4. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente $\overleftrightarrow{t}$ a la curva en el punto P es igual al **"límite de la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ cuando x tiende a x_1"**; es decir:

$$m_{\overleftrightarrow{t}} = \lim_{x \to x_1} m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Figura 2.4: Ilustración tomada del texto, Matemática Experimental 11 ([20], p. 305), en la cual se muestra como se presenta el concepto de recta tangente.

el contrario refuerzan la idea de que la tangente "toca" la curva en un punto y no la "corta", para diferenciarla de una "secante" que también se da por entendido y no se define explícitamente. Esto hace que se mantengan distintas concepciones sobre lo que es la recta tangente a una curva.

- A partir de la derivada sólo se puede encontrar la tangente a curvas que representen funciones derivables en los puntos de estudio, pero nada se dice de los otros tipos de curvas, incluida la circunferencia (no es la gráfica de una función de una variable), que es la que se da como primer ejemplo para ilustrar la tangente a una curva.

- Se puede alcanzar suficiente destreza al trabajar con la derivada de una función, y encontrar la tangente a curvas cuyas ecuaciones analíticas no sean fáciles de manipular, pero se pierde la parte más importante que es la de potenciar la capacidad de razonamiento y de entender los procesos de aproximación local.

Son muchas las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de estos conceptos, a pesar de los esfuerzos didácticos que se hacen para hacer mas claras las explicaciones, apoyadas con textos en formatos cada vez más novedosos y con nuevas tecnologías introducidas en el aula de clase, que van desde la utilización de poderosos asistentes matemáticos hasta recursos diseminados por internet. Aún así, los resultados que se siguen obteniendo no son muy alentadores: pues no se diseñan estrategias de aprendizaje adecuadas a partir de ellas impidiendo que el alumno comprenda los conceptos involucrados, manifestándose en su bajo desempeño, deserción de los cursos y la mortalidad académica en los primeros años de universidad, creándose así una necesidad de implementar metodologias alternativas de enseñanza en el área, que permitan a los alumnos comprender realmente estos conceptos.

2.5. Problema de investigación

Tradicionalmente, cuando se desarrolla un curso de cálculo diferencial, se hace énfasis en la manipulación de ecuaciones y en la sustitución de valores dentro de ellas, esto no basta para que el alumno integre los conceptos matemáticos tratados, y por lo tanto, crea la falsa convicción de que el cálculo se reduce a la aplicación directa de un algoritmo del cual no se conoce su verdadero sentido y significado.

No obstante, desde el punto de vista operacional, los aspectos mencionados anteriormente siguen siendo importantes en el dominio del concepto, pero poco aportan al desarrollo del razonamiento de los alumnos, pues en ellos prima el manejo de algoritmos y la memorización de conceptos de forma aislada, no permitiendo comprender los procesos de aproximación local.

Este hecho, no solo cuestiona la metodología tradicional seguida en la explicación de esos conceptos tanto a nivel de bachillerato como universitario, evidenciando un grave problema metodológico en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los fundamentos del Análisis Matemático, en particular, con el concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana, sino que traen como consecuencia las siguientes situaciones:

El bajo desempeño de los estudiantes de último grado de bachillerato. La Figura 2.5 (p. 49) hace parte del informe de las pruebas de estado, presentado por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior – ICFES[3]– entre los años 2000 y 2004 y muestra el bajo desempeño de los alumnos en el área de matemáticas. Los criterios de puntuación tenidos en cuenta son[4]:

- BAJO entre 0 y 30 puntos.
- MEDIO entre 31 y 70 puntos. Podría plantearse una subdivisión del rango medio en dos partes así: medio bajo, que iría desde 31 hasta 45 puntos, y medio alto, que iría desde 46 hasta 70 puntos.
- ALTO entre 71 y 100 puntos.

En la Figura 2.6 (p. 49), se observa que en el segundo semestre del último año, el área de matemáticas presenta la mayor cantidad de alumnos con puntajes inferiores o iguales a 45 puntos; para ser más precisos 329.021 alumnos de 408.113, esto representa un porcentaje del 80.62 % del total. Cabe resaltar, que 366.629 (89.8 %) son alumnos de grado 11 y 41.484 son egresados de la educación media de años anteriores, así mismo el grupo de alumnos proviene de 7.837 distintos colegios del país; 263.537 son alumnos de instituciones oficiales y 103.092 de instituciones privadas. Esto permite inferir, que el bajo rendimiento de los alumnos, no es un problema sectorizado, es decir, no depende de la región y del tipo de institución de donde provienen los alumnos.

Deserción en los primeros semestres universitarios. El bajo rendimiento académico presentado por los alumnos, en especial en el área de matemáticas y la deserción de los mismos en los cursos de cálculo, que se ofrecen en los primeros semestres de las diferentes universidades[5], se producen por diversas situaciones que van desde los procesos externos al ámbito educativo o institucional dónde el estudiante realiza su formación (entre ellos se encuentra la falta de recursos didácticos), hasta las referidas al terreno propio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, donde se puede relacionar, la calidad educativa, la estructura y pertinencia curricular del área dentro del saber específico y la falta de una adecuada capacitación docente, que se refleja en la débil elaboración

[3]Véase, Grupo de divulgación de resultados, ICFES. Informe de resultados del examen de estado aplicado en abril del 2004, en http://www.icfes.gov.co.

[4] Véase, Grupo de divulgación de resultados, ICFES. ¿Cuáles son los tipos de resultados y su interpretación? En http://www.icfes.gov.co

[5]Según entrevistas con Jefes de Departamentos y Vicedecanos de diferentes universidades (públicas y privadas), sostienen que en promedio la tasa de deserción de los cursos de cálculo y matemáticas básicas, alcanza y en algunos casos supera el 60 %. Ellos consideran como deserción, la cancelación de cursos, cancelaciones de semestre y desertores académicos.

EXAMEN DE ESTADO PARA INGRESO A LA EDUCACION SUPERIOR
PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON PUNTAJES MENORES A 30 POR PRUEBA
2000 A 2004

Aplicacion	Biologia	**Matematica**	Filosofia	Fisica	Historia	Quimica	Lenguaje	Geografia
2000-1(*)	1,21	**0,81**	1,50	1,36	0,68	0,30	2,09	1,64
2000-2	1,19	**1,21**	1,58	1,39	1,60	0,33	0,76	1,19
2001-1	1,21	**1,31**	2,66	0,90	1,23	0,68	0,41	2,50
2001-2	0,48	**1,58**	0,83	0,98	0,82	0,31	0,47	3,04
2002-1	0,80	**1,54**	4,83	0,45	1,74	0,24	0,52	0,79
2002-2	0,46	**1,26**	1,64	1,12	0,54	0,45	0,32	1,52
2003-1	1,22	**1,83**	1,61	0,37	1,20	0,22	0,32	1,00
2003-2	0,64	**1,62**	1,64	1,49	0,83	0,88	0,42	3,90
2004-1	1,11	**5,06**	0,94	1,02	1,56	0,50	0,19	0,83
2004-2	0,28	**4,72**	1,14	2,56	0,91	1,59	0,29	0,28

(*) EL NUMERO DESPUES DEL GUION INDICA EL SEMESTRE DE REALIZACION DEL EXAMEN

Figura 2.5: Informe de los porcentajes obtenidos en la aplicación del examen de estado, a partir del primer semestre del año 2000 al segundo semestre del 2004, cuyos resultados fueron clasificados como bajos.

EXAMEN DE ESTADO **Para Ingreso a la Educación Superior**	Porcentaje acumulado de estudiantes en cada Rango de Puntaje a nivel Nacional

Rango	Biología	Matemáticas	Filosofía	Física	Historia	Química	Lenguaje	Geografía	Inglés
Hasta 30	0.28	4.72	1.14	2.56	0.91	1.59	0.30	0.28	3.54
Hasta 35	2.11	15.61	6.22	14.48	5.19	8.53	1.41	1.74	16.04
Hasta 40	15.16	48.20	20.55	25.77	24.09	36.66	4.73	6.10	64.98
Hasta 45	43.46	80.62	57.77	68.07	51.65	78.16	16.30	20.73	87.53
Hasta 50	79.69	95.62	87.94	87.19	85.40	94.31	35.70	50.36	95.47
Hasta 55	93.31	98.64	98.34	97.68	96.56	98.50	65.45	72.44	97.58
Hasta 60	99.16	99.79	99.90	99.58	99.67	99.66	83.37	92.21	98.72
Hasta 65	99.90	99.95	100	99.89	99.99	99.92	94.07	98.24	99.34
Hasta 70	99.99	99.99	100	99.97	100	99.98	97.61	99.80	99.68
71 o más	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Figura 2.6: Informe de los porcentajes obtenidos por área en el segundo semestre del 2004.

de experiencias de aprendizaje, que ayuden a los alumnos a mejorar su nivel de razonamiento, entre otras.

Esta última situación es la que más influye en el aumento de los índices de deserción, pues los alumnos no reciben la cantidad de experiencias de aprendizaje necesarias para aprender y comprender significativamente los conceptos involucrados en el estudio de esta rama del saber.

Lo anterior, evidencia el problema que existe en la docencia que se imparte en esta disciplina, y revela el problema que tienen los alumnos, no solo para aprobar las asignaturas que corresponden a dicha área, sino para comprender los razonamientos propios de la misma, que son precisamente aquellos los que permiten organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento adquirido, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad.

Aunque hay otros factores que influyen en el bajo rendimiento académico, como son:

i. El entorno social en el cual se desenvuelve el alumno.

ii. Las condiciones económicas y familiares.

iii. Las condiciones educativas.

iv. La motivación que tienen los alumnos, hacia el estudio formal y no formal de las matemáticas, entre otras.

no se tienen en cuenta en este estudio, ya que por si solos, cada uno de ellos correspondería a otro proceso de investigación.

De acuerdo a lo anteriormente planteado, se puede evidenciar que los alumnos ubicados en la interfase bachillerato universidad, no razonan correctamente frente al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, lo que impide que obtengan una mejor comprensión del mismo, y que no puedan integrar en su red de relaciones, los procesos de razonamiento infinito intrínsecos en este proceso. Es por esto, que el presente trabajo de investigación se centra en diseñar y aplicar un módulo de instrucción, a la luz del modelo educativo de van Hiele que ayude a los alumnos a progresar en su nivel de razonamiento.

Capítulo 3

Metodología

El presente trabajo de investigación, se enmarca dentro del modelo educativo de van Hiele que propugna por la aplicación de experiencias significativas de aprendizaje para que se produzca el progreso de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, frente al concepto objeto de estudio.

En este Capítulo, se presentan los objetivos que delimitan el trabajo de investigación y el módulo de instrucción con sus respectivas experiencias de aprendizaje, para que los alumnos ubicados en el Nivel II de razonamiento en el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella progresen al Nivel III del modelo educativo de van Hiele.

3.1. Objetivo general

Diseñar y aplicar un módulo de instrucción, que permita a un alumno ubicado en el Nivel II de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, en el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, progrese al Nivel III, utilizando como mecanismo de exploración e indagación el haz de secantes. De tal forma que queden situados a las puertas de la formalización y que reconozcan los procesos del paso al límite intrínsecos en este proceso.

3.2. Objetivos específicos

1. Pasar el test denominado "Curvas y Tangentes" diseñado por Esteban [12] (Ver Apéndice G, p. 215) a un grupo de alumnos, para determinar el nivel de

razonamiento en el cual se encuentran frente al concepto objeto de estudio.

2. Diseñar las experiencias de aprendizaje, que conforman el módulo de instrucción, para cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, que potencie el progreso de un alumno ubicado en el Nivel II de razonamiento al Nivel III.

   Dichas experiencias deben tener las siguientes características:

   - Facilitar la introducción del concepto objeto de estudio sin requerir del alumno ningún tipo de destreza operacional.
   - Transmitir la idea de lo que es un proceso de razonamiento infinito.
   - Permitir al alumno la conexión de las ideas nuevas, con las anteriores.
   - Preparar al alumno para que puede definir verbalmente, el concepto objeto de estudio.

   Y además, deben diseñarse a la luz de los descriptores de separación, del Nivel II al Nivel III, los cuales se deben superar, y que fueron detectados por Esteban ([12], pp. 87 - 111); ellos son:

   - El alumno no dará, en general, respuesta a las situaciones patológicas, es decir, aquellas en las que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación. Por ejemplo, para la recta y para los ángulos (valor absoluto).
     En este nivel, el mecanismo del haz de secantes no se tiene como un mecanismo para encontrar la recta tangente para todas aquellas curvas en las cuales se puede aplicar, presentándose desconcierto en las situaciones patológicas. No define la tangente a una curva en un punto a partir del haz de secantes y la capacidad de deducción de propiedades no se tiene aún desarrollada, estas son diferencias que marcan la separación entre los Niveles II y III de razonamiento.
   - Un alumno no progresará desde el Nivel II al Nivel III (ni al IV) mientras mantenga dualidades entre el concepto imagen (la progresión de las secantes que pasan por un punto A de la curva y por otros puntos situados sobre la curva cada vez mas cercanos a A) y el concepto definición (reconocer la tangente como el límite del haz de secantes, es un proceso infinito). El nivel de razonamiento que permite la compresión de los conceptos avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre concepto imagen y concepto definición. La plena integración entre los conceptos intuitivos estáticos (tangente a una circunferencia) con los dinámicos (aproximación infinita mediante el haz de secantes) caracteriza el acceso al Nivel III.

3. Vincular los mapas conceptuales dentro de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, como una estrategia para detectar el lenguaje empleado por los alumnos y, para estudiar la red de relaciones que forman a medida que desarrollan el módulo de instrucción.

4. Seleccionar un grupo de control y un grupo experimental, del grupo de estudiantes clasificados en el Nivel II de razonamiento, para llevar a cabo la aplicación de las experiencias de aprendizaje y poder contrastar los resultados obtenidos.

5. Aplicar el módulo de instrucción al grupo experimental, y comprobar mediante el test "Curvas y Tangentes" y el oportuno tratamiento estadístico el progreso del Nivel II al Nivel III de razonamiento de los alumnos del mismo grupo.

6. Proponer recomendaciones en aras del mejoramiento de la enseñanza del concepto objeto de estudio.

3.3. Módulo de instrucción

En esta sección, se presenta el módulo de instrucción, que contiene las experiencias de aprendizaje para cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele, y cuyo objeto es ayudar a promover a los alumnos ubicados en el Nivel II de razonamiento al Nivel III, frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, empleando el mecanismo del haz de secantes.

Diseño Metodológico. Las experiencias de aprendizaje, pueden ser entendidas no sólo como las que se realizan en el aula, sino también como aquéllas que promueven aprendizajes significativos, independientes del contexto donde se lleven a cabo. Estas deben ser enfocadas de tal manera que los alumnos se involucren en procesos de enseñanza y de aprendizaje más específicos. Así mismo, las experiencias de aprendizaje fuera del aula, serán aquellas que se realicen con propósitos formativos y que permitan al alumno adquirir habilidades, destrezas y actitudes , además, establecer relaciones válidas entre los conocimientos adquiridos y otras áreas del saber.

De acuerdo con lo anterior y según las características del modelo educativo de van Hiele, dichas experienicias deben ser desarrolladas de tal forma, que permitan al alumno ser partícipe de su propio aprendizaje, ya que según Gutiérrez ([16], p. 330):

> . . . la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia. Esta experiencia se adquiere unas veces fuera

del aula y otras veces dentro de ella. La enseñanza adecuada es, aquella que proporciona esa experiencia.

Bajo esta perspectiva, se construyeron las experiencias de aprendizaje, que son la base del módulo de instrucción del concepto objeto de estudio. Antes de comenzar con la descripción de cada una de las experiencias que componen el módulo, se presentará un digrama, que orienta la secuencia en su diseño y dará una visión general de su contenido.

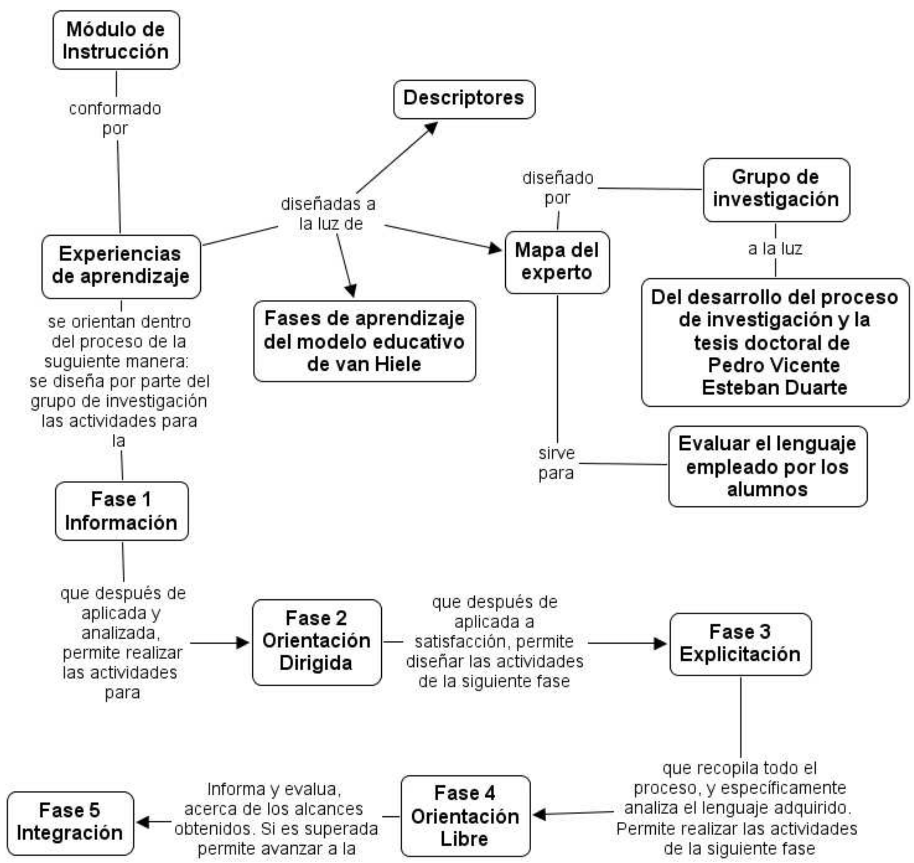


Figura 3.1: Diagrama acerca de la composición del módulo de instrucción.

Así mismo, se muestra el listado de los elementos que los alumnos tenían a disposición al momento de iniciar cada una de las actividades, en las distintas fases de aprendizaje:

- Un lápiz.

- Una regla.
- Papel en blanco.
- Experiencias de aprendizaje, diseñadas por el grupo de investigación.
- Hilo, tijeras y materiales adicionales que se requerian durante las diferentes actividades, se suministraron en el momento oportuno.

El mapa conceptual[1], mostrado en la Figura 3.2 (p. 56), es una guía del proceso académico e instruccional al que va a ser sometido el grupo experimental (ver Capítulo 4, p. 148), dentro del proceso de investigación y así mismo, sirvió como base para realizar el proceso de evaluación del lenguaje utilizado por los alumnos, después de concluida cada una de las experiencias de aprendizaje, donde era requerida la implementación de la técnica.

A partir de esto, y de acuerdo con la descripción dada en el Capítulo 1 para la fase 1, el grupo de docentes elabora los objetivos que se deben cumplir con ella, ellos son:

1. Aplicar una técnica que permita detectar la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva, frente al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en punto dado sobre ella.
2. Hacer una puesta en común con todos los alumnos involucrados en la experiencia del lenguaje del Nivel II, de acuerdo con el modelo de van Hiele.
3. Manejar correctamente el mecanismo del haz de secantes.

Las Actividades presentadas en la fase 1, buscan cumplir estos objetivos.

3.3.1. Fase 1: Información

Teniendo en cuenta los objetivos diseñados para esta fase, se proponen las siguientes experiencias de aprendizaje:

Actividad 1. Que los alumnos elaboren, un mapa conceptual con los conceptos geométricos de: punto, curva, recta y tangente.

El objetivo de ésta Actividad, es indagar por la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva, frente al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

[1] Este mapa conceptual, se conocerá con el nombre de "mapa del experto" y fue diseñado por el grupo de docentes participantes en la investigación, a partir del estudio del concepto de aproximación local y del análisis de la tesis doctoral de Esteban ([12]).

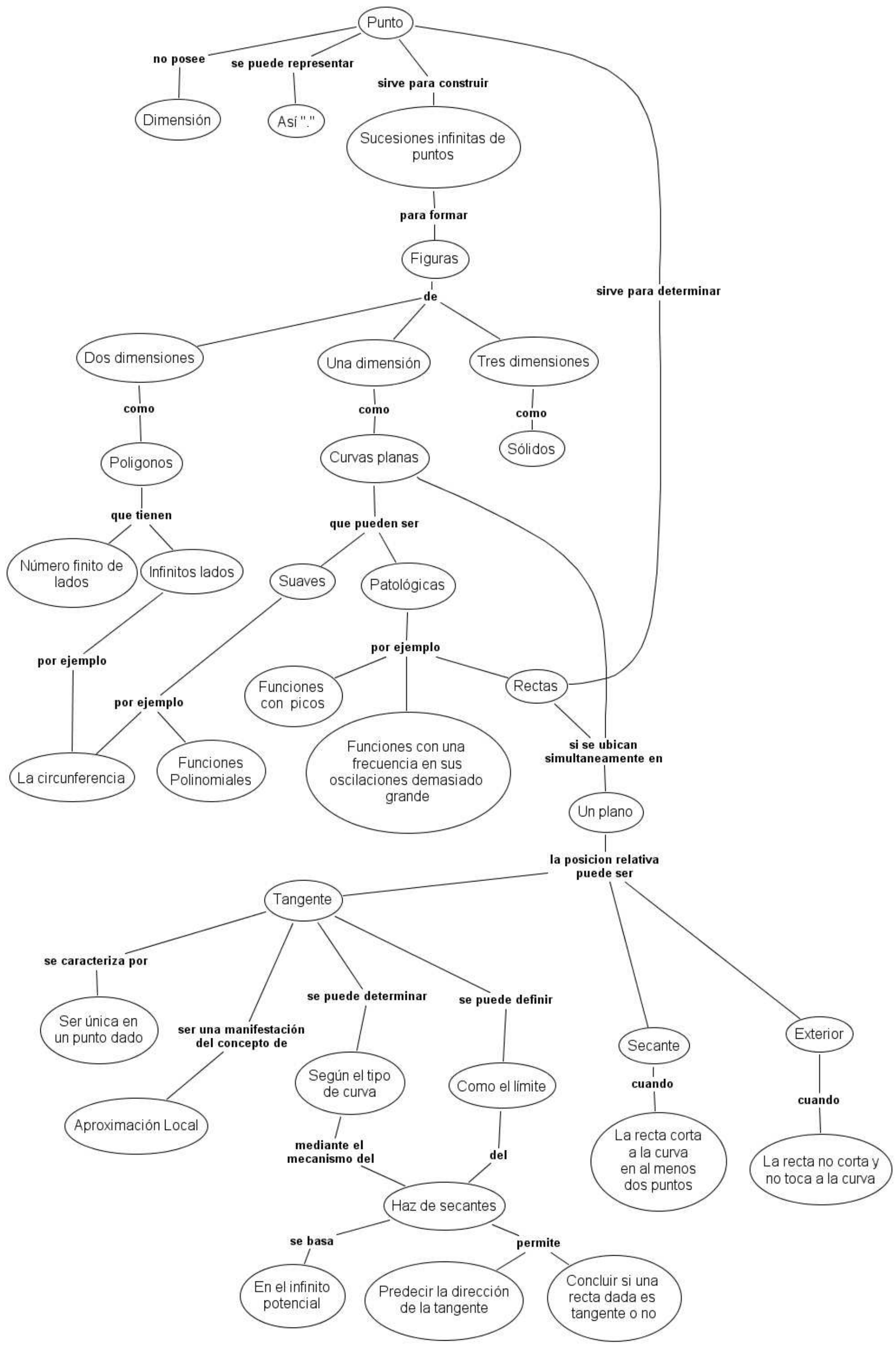


Figura 3.2: Mapa conceptual que orienta la evolución en las relaciones que debe presentar el grupo de alumnos al finalizar la aplicación del módulo de instrucción.

La técnica seleccionada, para realizar tal indagación, es la de los mapas conceptuales, ya que según Esteban ([49], p. 153), "los mapas conceptuales, permiten al alumno poner de manifiesto las relaciones significativas entre los conceptos propuestos (punto, curva, recta y tangente), la forma como comprenden éstos y que relaciones relevantes les faltan para completar los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel".

Actividad 2. Aplicar el test "Exploración de la idea de punto", diseñado por Esteban ([11], p. 121).

El objetivo de esta Actividad, es colocar un punto común de partida en el lenguaje que emplean los alumnos ubicados en este nivel, sobre los conceptos básicos de estudio, a saber, la idea de punto, ya que el lenguaje tiene un papel crucial dentro del proceso de formación de conceptos y en el aprendizaje significativo de los mismos, y ésta idea es una de las bases fundamentales para el desarrollo del proceso.

El test, aplicado es el siguiente.

Exploración de la idea de punto[2]

Instrucciones: Responde libremente las siguientes preguntas. No dejes ninguna sin contestar. Después de haber respondido una pregunta no la corrijas.

1. ¿Qué es para usted un punto?
2. ¿Cómo te imaginas que es un punto?
3. ¿Podrías representarlo? ¿Cómo lo harías?
4. ¿Un mismo punto se puede representar de varias formas?
   4.1. ¿De cuál(es) forma(s)?
5. ¿La forma de un punto depende del instrumento con el cual se representa?
6. ¿El punto tiene una forma geométrica definida?
   6.1. Si tuvieras un lápiz de mina cuadrada, ¿Podrías dibujar un punto?
7. ¿Un punto es lo mismo que su representación?
8. ¿Dónde se encuentran (*hallan, buscan*) los puntos?

[2]El test fue desarrollado como parte del proyecto de investigación "Exploración del concepto de punto, recta y curva en alumnos de secundaria" en el año 2002. Participaron los profesores Carlos Alexander Grajales y Pedro Vicente Estaban Duarte.

9. Supongamos que tienes una foto de tú cantante preferido. ¿Esa foto es el cantante o una representación de él?
10. Las marcas que hiciste ahora, ¿son el punto o la representación del punto?
11. Ahora, ¿cómo te imaginas un punto?

    Aporte de información: En geometría se distinguen tres dimensiones: largo, ancho y alto.
12. ¿Con cuál de esta tres dimensiones asociaríais el punto? ¿Porqué?
13. ¿Qué forma le asignarías ahora al punto?
14. ¿Le asignarías algún tamaño al punto?
15. A partir de las dimensiones, ancho, largo y alto, ¿cómo definirías el punto?
16. El punto que acabaste de definir, ¿puede cambiar de tamaño al colocarle lupas de distintos aumentos?
17. Observa la Figura 3.3: En ella se han representado los puntos A y B. ¿Cuántos puntos hay entre A y B?

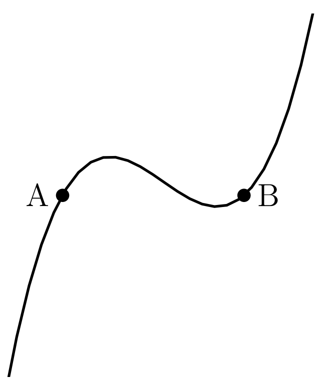


Figura 3.3: Puntos sobre una curva.

18. ¿Puedes representar todos los puntos entre A y B?
19. A partir de su noción de punto, ¿qué es una línea recta?
20. ¿Qué dimensión tiene la línea recta?
21. ¿Crees que una línea recta es un caso especial de una curva?

Observaciones: En el espacio siguiente escribe otras ideas que consideres importantes acerca de la idea de punto.

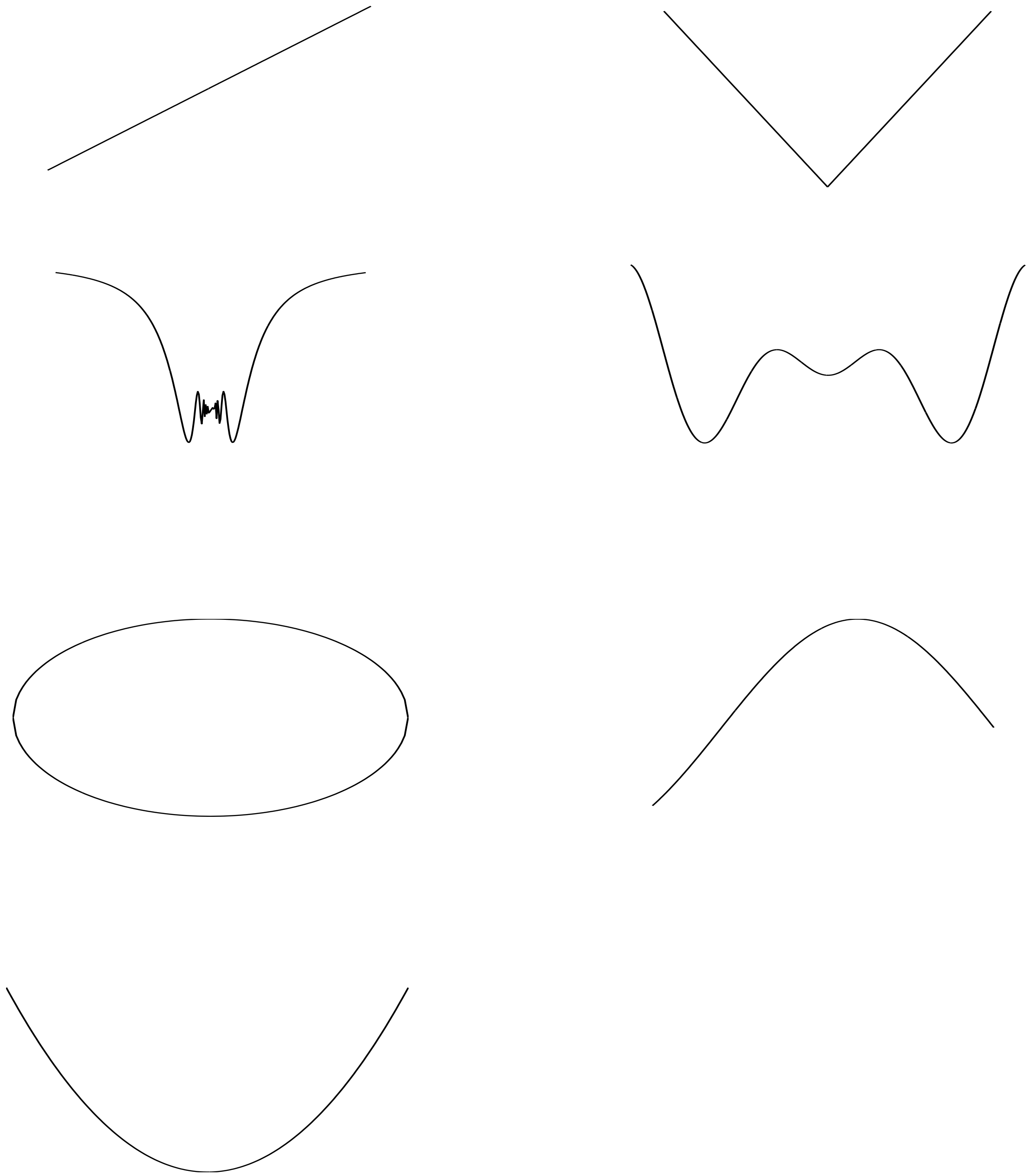
Actividades 3, 4, 5 y 6. Estas actividades, tienen como objetivo que el alumno manipule adecuadamente el mecanismo del haz de secantes seleccionado en esta investigación, pues como se indicó en el Capítulo 2, sección 2.3 (p. 41), éste permite con mayor facilidad estudiar los procesos de razonamiento sin manipulaciones algebraicas.

Cabe resaltar que en estas actividades se proponen 11 curvas diferentes, que pueden ser clasificadas en dos grupos asi:

1. Curvas patológicas: son aquellas que presentan una mayor dificultad para la aplicación del mecanismo, por ejemplo las que tienen “picos”, “oscilaciones” alrededor de un punto determinado y la recta; y son fundamentales al momento de analizar los resultados obtenidos por los alumnos, de acuerdo con los descriptores presentados por Esteban ([12], pp. 87 - 111).
2. Curvas suaves: Son aquellas donde el manejo del mecanismo no presenta ningún inconveniente, y pueden ser, según su estructura abiertas o cerradas.

Actividad 3.

Marca sobre cada una de las curvas dadas, los puntos que consideres necesario para describir la forma de la curva. Donde creas conveniente puedes escribir un comentario sobre esta Actividad a la derecha de la curva.



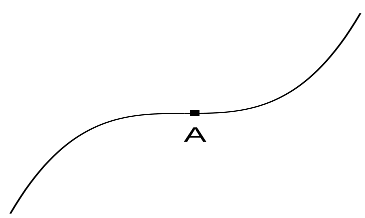
- Describe con tus propias palabras la actividad que acabas de realizar.

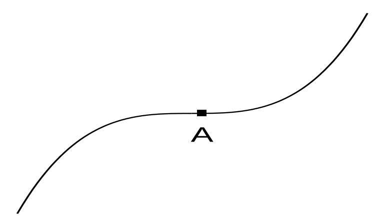
Actividad 4.

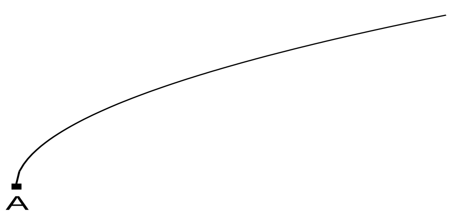
- Para cada una de las curvas ubicadas en la columna izquierda, cuando sea posible, marca un punto B, sobre ella, a la derecha de A. Partiendo de B marca puntos cada vez más cercanos a A pero sin sobrepasarlo.
- Para cada una de las curvas ubicadas en la columna derecha, cuando sea posible, marca un punto C, sobre ella, a la izquierda de A. Partiendo de C marca puntos cada vez más cercanos a A pero sin sobrepasarlo.
- Donde creas necesario, puedes escribir un comentario sobre esta actividad a la derecha de la curva.

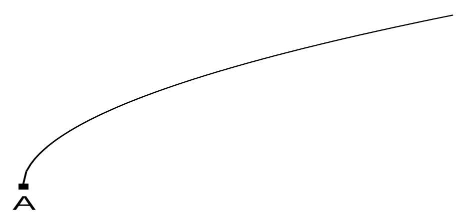
Columna izquierda

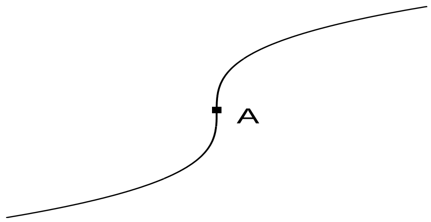
Columna derecha

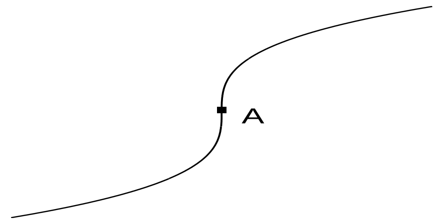


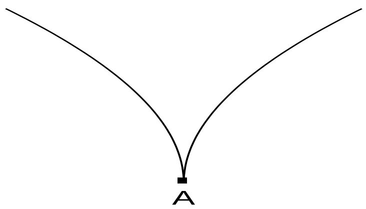


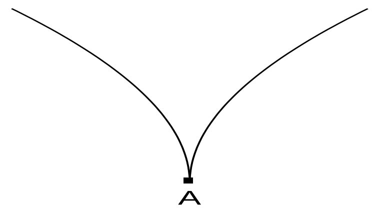


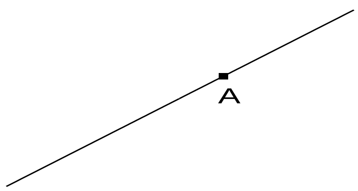


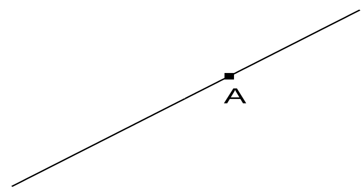


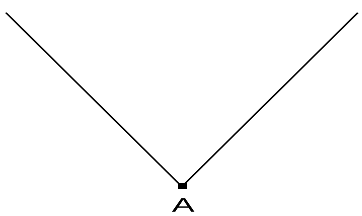


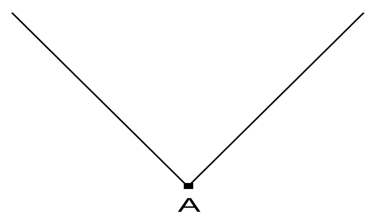


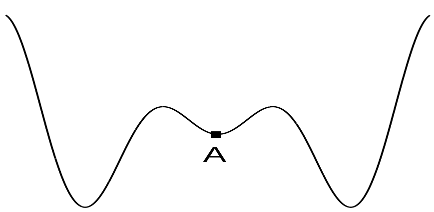


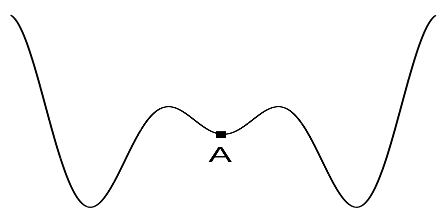






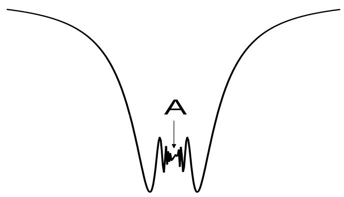


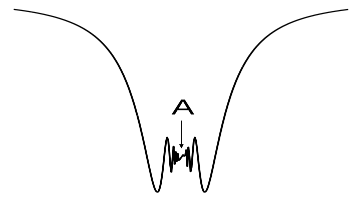


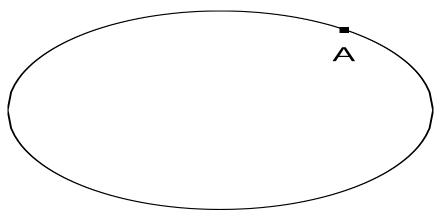


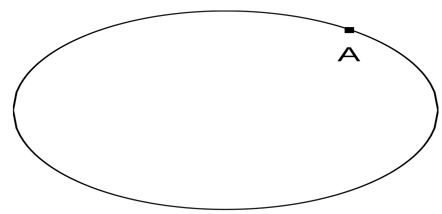
- Con tus propias palabras, describe el proceso de marcar puntos sobre una curva cada vez más cercanos a un punto dado. ¿Para todas las curvas el proceso es el mismo?

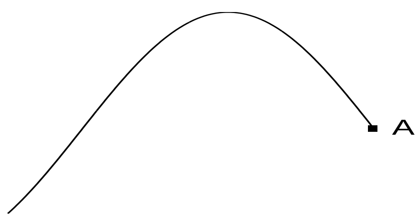
Actividad 5.

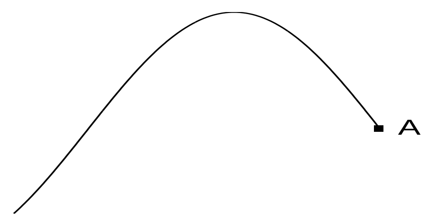


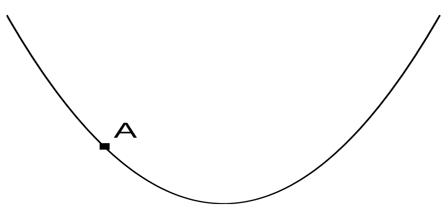


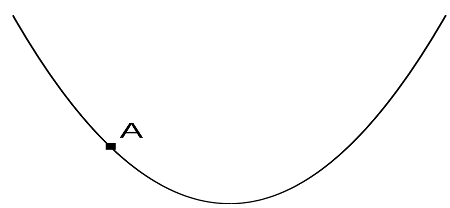












Para cada una de las cuvas:

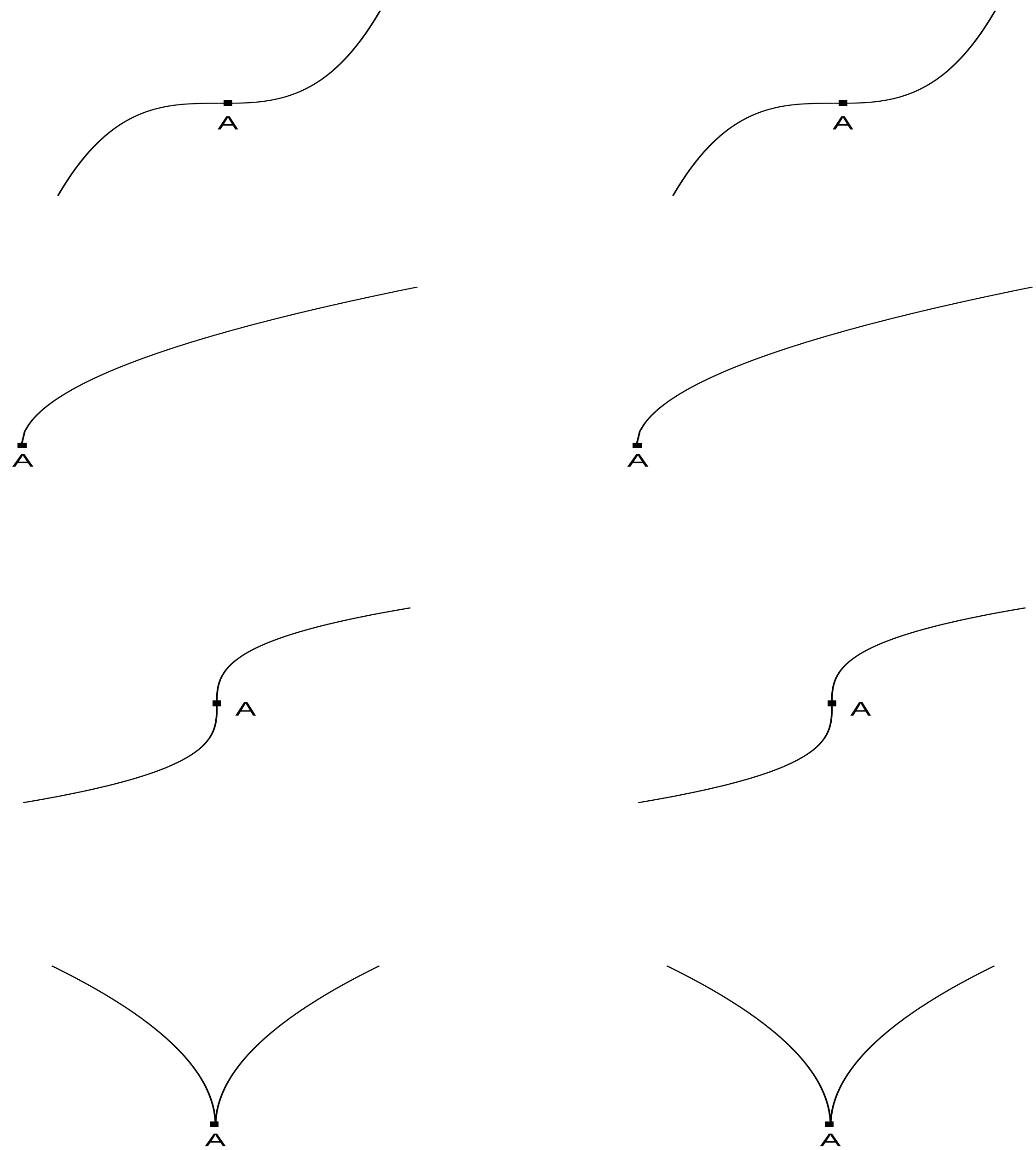
a. Repite la experiencia anterior.

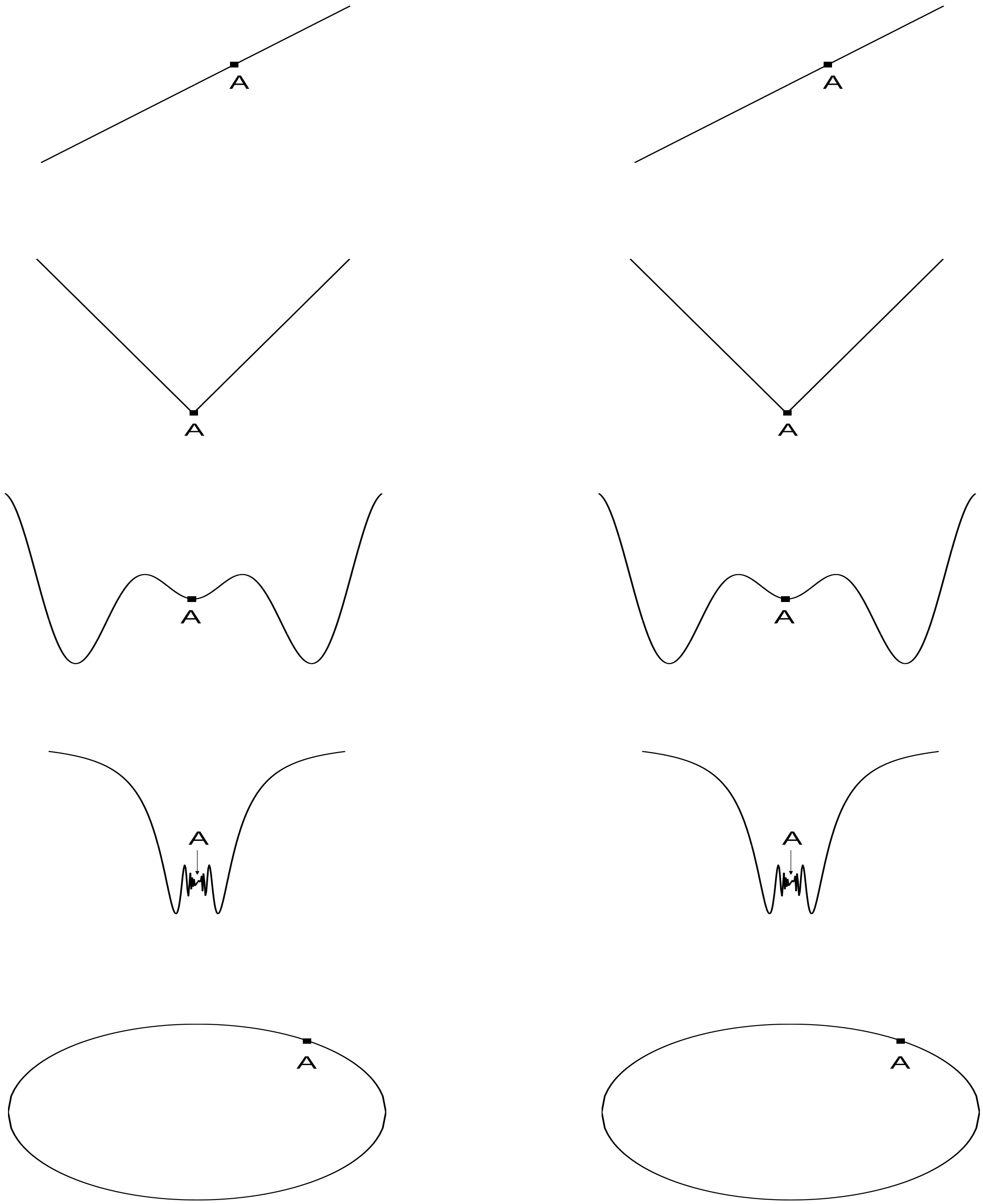
b. Luego, con la regla traza rectas que pasen por el punto A y por cada uno de los puntos marcados sobre la curva cada vez más cercanos a A, (rectas secantes).

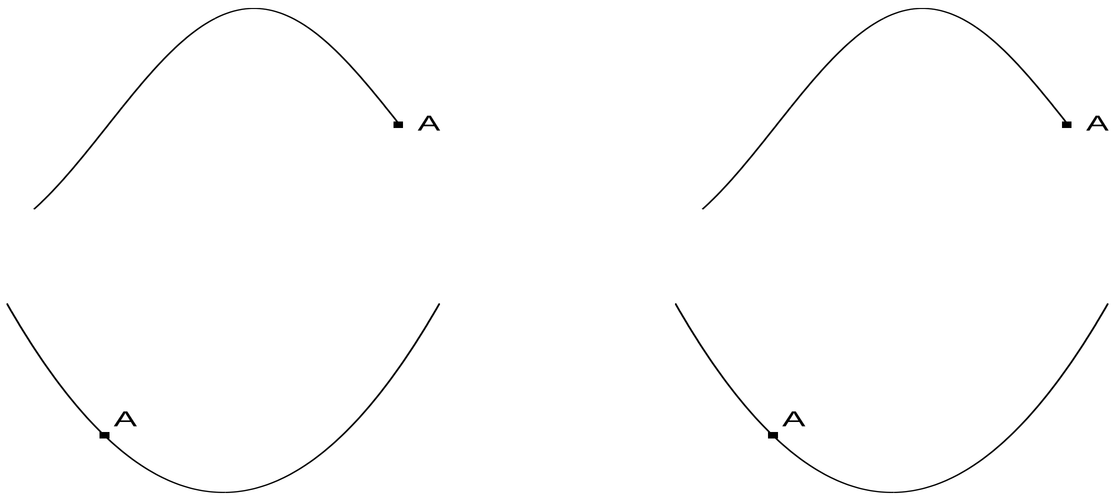
c. Donde consideres necesario, escribe un comentario sobre la actividad a la derecha de la curva.

Puntos sobre la izquierda de A

Puntos sobre la derecha de A


A
A
A
A
A
A
A
A


A
A
A
A
A
A
A
A
A
A



Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué le sucede a las rectas secantes cuándo se trazan por puntos cada vez más cercanos a A?

b. Como pudiste notar, en cada caso las curvas a izquierda y a derecha son las mismas y está marcado sobre cada una de ellas el mismo punto. Sí huieras hecho el proceso de marcar los puntos a izquierda y a derecha sobre la misma curva ¿A qué conclusiones se podría llegar?

Observación: Es importante aclarar, que estas actividades, conducen al alumno a la noción de aproximación a un punto dado sobre una curva, y permiten comenzar con el proceso de definición de "recta tangente", a través de la implementación del mecanismo del haz de secantes. Así mismo, son una gran fuente de "alimentación" del lenguaje propio del nuevo nivel, que debido a su estructura, permite en los alumnos la adquisicíón del mismo.

Actividad 6. Recapitulación

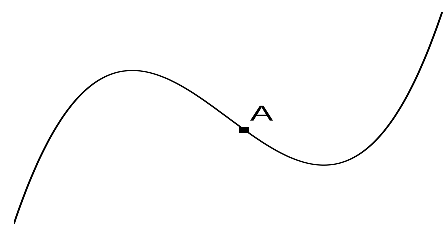
En objetivo de esta Actividad, es que el alumno observe, describa y defina el concepto de aproximación selecionado, lo cual le permitirá mostrar el avance obtenido hasta ese momento, funcionando como un intrumento de control interno del proceso, tanto en la obtención del lenguaje como en la implenetación del mecanismo. La actividad propuesta se describe a continuación.

En la siguiente curva, se presenta, como en los casos anteriores, una curva y un punto ubicado sobre la misma. En ella debes realizar el siguiente proceso:

a. Marca puntos muy proximos tanto a la derecha como a la izquierda de A.

b. Traza las rectas secantes que pasan por A y por los puntos cada vez más cercanos a A.

c. Al trazar secantes que pasen sobre la curva, a uno y otro lado del punto dado. ¿Qué observaste? ¿Qué conclusiones puedes obtener?



Durante el análisis de la información obtenida en esta fase, se observó la necesidad de aplicar diferentes situaciones, físicas y geométricas, que conlleven a la apropiación del concepto de infinito potencial, a la interiorización de la noción de aproximación y al establecimiento de su relación con el mecanismo seleccionado. Esta última parte es el objetivo de la siguiente fase.

3.3.2. Fase 2. Orientación Dirigida

Detectada la necesidad de aplicar el concepto objeto de estudio en diferentes situaciones cotidianas, se diseñan los objetivos a seguir durante esta parte del proceso, y a partir de ellos, se crean las experiencias de aprendizaje necesarias para cumplir con estos propósitos.

Los objetivos diseñados para esta fase son:

Objetivos de la fase 2

- Análizar distintas situaciones que con lleven a la interiorización de la noción de aproximación local.
- Explorar la noción de infinito potencial, con el cual se abordará el estudio de la manifestación del concepto de aproximación local seleccionado.
- Integrar y diferenciar en las situaciones planteadas, el concepto de infinito potencial, que es el principio del mecanismo seleccionado.
- Verificar el lenguaje adquirido por los alumnos y el significado asignado a éste, así como las nuevas relaciones válidas que realicen frente al concepto objeto de estudio.

Actividad 1.

El objetivo es iniciar a los alumnos en procesos de razonamiento infinito, pero con la característica de que dicho razonamiento está limitado por las condiciones físicas propias de la actividad.

- Divide el trozo de cuerda que se te ha entregado por la mitad, toma uno de los dos trozos resultantes y divídelo por la mitad nuevamente, continua este proceso hasta donde consideres que se puede realizar.

Preguntas.

- ¿Cuántos cortes pudiste realizar?
- ¿La cantidad de cortes que realizaste depende del instrumento de corte utilizado? ¿Depende del material?
- Si la respuesta anterior es afirmativa. ¿Cuántos cortes más crees que puedes hacer, si tuvieras un material más apropiado para realizar la actividad? Justifica tu respuesta.
- ¿Este proceso puede parar? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué resultaría si volvieras a unir los trozos cortados?

Actividad 2.

El objetivo es que los alumnos diferencien los procesos físicos, de los procesos matemáticos, ya que el progreso en el nivel de razonamiento, frente al concepto de aproximación local, está basado en gran parte en la superación de esta dualidad (físico – mental).

- Para el segmento de recta dado

  Dividelo por la mitad, sombrea uno de los dos segmentos resultantes. El trozo sin sombrear, divídelo nuevamente a la mitad. Repite el proceso anterior. Continua este proceso hasta cuando consideres que se puede realizar con los instrumentos utilizados.

Preguntas.

- ¿Cuántas divisiones pudiste realizar aplicando éste proceso?

- ¿Consideras que la cantidad de divisiones hechas depende de la longitud del segmento? Justifica tu respuesta.
- ¿Consideras que este proceso puede terminar?
- ¿Qué pasa con la región sombreada?
- Imaginate un segmento, ¿si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar?, ¿qué sucedería con la región sombreada?

Observación: Cabe resaltar que la diferencia fundamental entre las actividades 1 y 2, de esta fase de aprendizaje, es que en la primera de ellas, solo intervienen procesos físicos, mientras que en la segunda Actividad, se involucra el paso del proceso físico al proceso mental, lo que debe generar en la mente del alumno un cambio en su forma de razonamiento en relación a la noción de aproximación.

El objetivo de las actividades 3, 4 y 5, es introducir la noción de aproximación puntual bilateral, es decir, la aproximación a un punto dado, tanto por la izquierda como por la derecha, a través de procesos de razonamiento infinitos en donde el alumno se ve obligado a emplear términos tales como "se apróxima", "tiende", "se acerca", que son característicos de la noción de aproximación estudiada.

Actividad 3.

- Para el segmento de recta dado

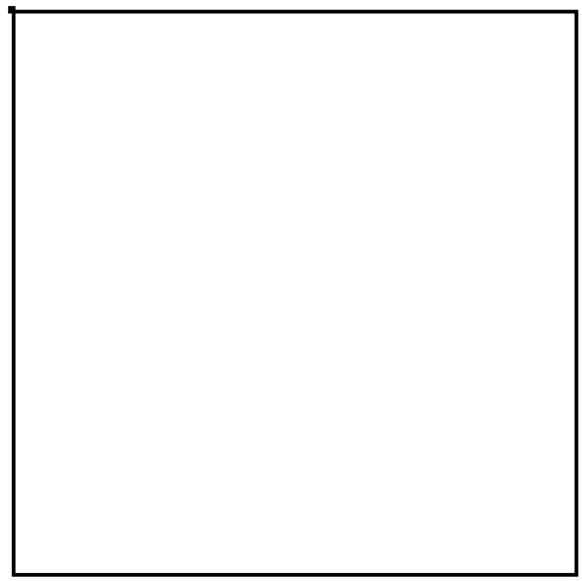
  Dividelo en tres partes iguales, sombrea la parte de la izquierda y la de la derecha del segmento resultante. Con el segmento que quedo sin sombrear, repite el proceso descrito anteriormente. Continúa este proceso hasta donde consideres que se puede realizar con los instrumentos utilizados.

Preguntas.

- Consideras que este proceso puede terminar.
- ¿Qué pasa con la región sombreada?
- Imaginate un segmento, ¿si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar?, ¿qué sucedería con la región sombreada?

Actividad 4.

- El siguiente cuadrado



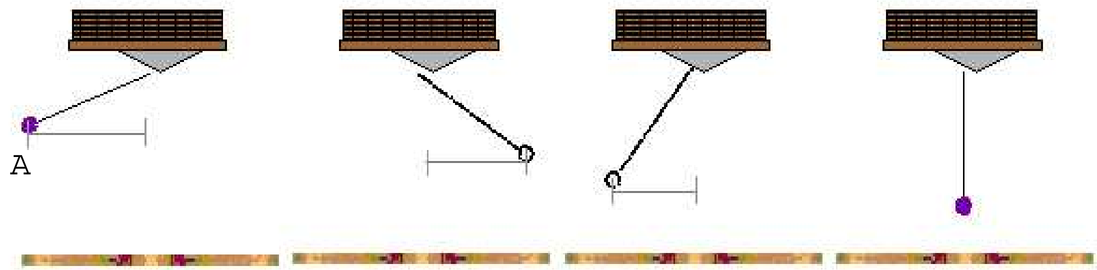
Dividelo en dos partes iguales, sombrea una de ellas. A la parte del cuadrado que quedo sin sombrear divídela nuevamente en dos partes iguales y de nuevo sombrea una de ellas. Continua este proceso hasta cuando consideres que se puede realizar con la ayuda de los instrumentos utilizados.

Preguntas.

- El proceso realizado, ¿puede terminar?
- ¿Qué pasa con la región sombreada?
- Imaginate un cuadrado, ¿si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar? ¿Qué sucedería con la región sombreada?

Actividad 5.

- Un péndulo se suelta de la posición A, se deja oscilar libremente sujeto a la fuerza de la gravedad y a la fricción del aire. Progresivamente, se observa la desviación, hacia la derecha o hacia la izquierda, desde la vertical que pasa por el pivote hasta el extremo del péndulo, como lo indican las marcas horizontales. Esta acción será ilustrada por el docente en el aula de clase, mostrando un péndulo oscilando.



Preguntas.

- Consideras que este proceso puede terminar.
- Describe con tus propias palabras, ¿qué observa con el movimiento del péndulo?
- Puedes relacionar este movimiento con alguna de las actividades realizadas anteriormente. Si tu respuesta es afirmativa escribe el número de la actividad y representa o describe la similitud entre ellas.

Observación: Aunque el objetivo es el mismo para las tres actividades, estas por su naturaleza tienen tres enfoques diferentes, a saber: matemático, geométrico y físico, además, estas actividades pueden ser reformuladas con cualquier objeto de su área específica, por ejemplo, el cuadrado puede ser cambiado por un triángulo, el péndulo por un resorte, siempre y cuando no alteren los objetivos propuestos para dichas actividades.

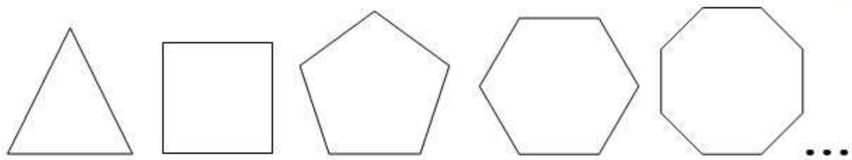
Actividad 6.

El objetivo de esta Actividad es, comenzar con el proceso de inducir al alumno a dar definiciones matemáticas precisas, es decir, que no generen ningun tipo de ambigüedad, para esta investigación, debe comprender la noción de aproximación local como un límite.

- Observa la siguiente secuencia de figuras . . .

Preguntas.

- Consideras que este proceso puede terminar.
- Describe con tus propias palabras ¿Qué pasa con la secuencia de figuras?



- Puedes relacionar este proceso con alguna de las actividades realizadas anteriormente. Si tu respuesta es afirmativa escribe el número de la actividad y representa o describe la similitud entre ellas.

Actividad 7. Mapa Conceptual

El objetivo es que los alumnos muestren como han reformulado y/o ampliado su red de relaciones válidas frente al concepto objeto de estudio, y así mismo, que muestren como relacionan el mecanismo del haz de secantes con el concepto de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. La Actividad propuesta es la siguiente:

- Elabora un mapa conceptual con los términos: punto, curva, recta, tangente, aproximación y haz de secantes.

En conclusión, con las preguntas formuladas y las actividades realizadas en las dos primeras fases de aprendizaje, se buscaba que el alumno se apropiara del concepto de aproximación local y descubriera la relación existente entre éste y el mecanismo seleccionado, y de esta forma adquiriera de manera significativa, el lenguaje pripio del nuevo nivel.

La siguiente fase, tiene como propósito que los alumnos intercambien sus experiencias, comentando las regularidades e irregularidades observadas, y además hagan una revisión global del trabajo realizado hasta el momento, tal como se indico en el Capítulo 1, sección 1.4.3 (p. 23).

3.3.3. Fase 3. Explicitación

Con el fin de observar que los alumnos hayan asimilado, aplicado correctamente la instrucción y alcanzado los objetivos propuestos en las fases anteriores, se diseñan los objetivos para esta nueva fase de aprendizaje:

Objetivos de la fase 3

- Recapitular del proceso, mediante la implementación de actividades que conlleven a la aplicación del concepto trabajado, mediante la orientación de asistentes matemáticos, como el Derive®, Matlab®, MuPAD®, entre otros.

- Análizar el lenguaje y las relaciones presentadas por los alumnos, mediante trabajos grupales e individuales.

Para cumplir con este objetivo, se diseñan cuatro actividades, distribuidas en tres grupos así:

Grupo 1. Está compuesto, por la Actividad 1 y 2, y tienen como objetivo recapitular todo el trabajo realizado, pero a través de asistentes matemáticos. Esto permitirá a los alumnos afianzar la noción de aproximación estudiada.

Grupo 2. Está compuesto por la Actividad 3, cuyo objetivo es, que los alumnos expresen el lenguaje adquirido hasta esta fase de aprendizaje, y que hagan explícitas las nuevas relaciones que han hecho y cómo las están relacionando entre sí.

Grupo 3. Está compuesto por la Actividad 4, cuyo objetivo es que los alumnos propongan curvas, que por su forma tengan un alto grado de abstracción y que permitan inferir que están empleando el mecanismo de una manera adecuada. Es importante resaltar, que esta Actividad, está relacionada con las tres (3) Actividades anteriores.

Las actividades propuestas son las siguientes:

Actividad 1. Recapitulación de todo el trabajo realizado en las dos fases anteriores, mediante una experiencia con el asistente matemático DERIVE ®, de forma participativa con los alumnos del grupo experimental.

Actividad 2. Discusión y puesta en común de todo el proceso. Se hará énfasis en la forma de expresarse de los estudiantes y de las relaciones y propiedades establecidas o creadas durante el transcurso del trabajo.

Actividad 3. Elaborar dos mapas conceptuales, el primero de ellos será diseñado por grupos de tres alumnos con los conceptos: punto, recta, curva, tangente, aproximación y haz de secantes. El segundo mapa conceptual se hará en forma grupal y tendrá como eje los mismos conceptos trabajados anteriormente.

Actividad 4. A continuación se presentan dos columnas, en cada una de ellas realiza el proceso que se indica:

En esta columna, realiza la gráfica de curvas con las cuales no se hayan trabajado anteriormente y que consideres, se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado sobre ella.	En esta columa, realiza la gráfica de curvas con las cuales no se hayan trabajado anteriormente y que consideres, **no** se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado sobre ella. Además de realizar las gráficas, marca el punto o el sitio donde el mecanismo del haz de secantes no se puede aplicar y describe con tus propias palabras el porqué de este hecho.

Observación: Es importante resaltar el hecho, de que estas cuatro (4) actividades, tienen como objetivo proporcionarle al alumno experiencias de aprendizaje para que supere la dualidad entre el coneto imagen y el concepto definición, se debe observar la superación de las dualidades entre el concepto imagen y el concepto definición(Ver Capítulo 3, sección 3.2, p. 52), ya que el nivel de razonamiento que permite la compresión de los conceptos avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre ellos. Es por esto que la fase siguiente tiene entre sus objetivos, comprobar la interiorización y comprensión del concepto mencionado.

3.3.4. Fase 4. Orientación Libre

En esta fase, se aplican los conocimientos y el lenguaje adquirido en las actividades anteriores y sirve como criterio de evaluación del proceso, además, los alumnos deberán completar la red de relaciones que empezaron a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

Los objetivos diseñados para esta fase son los siguientes:

Objetivos de la fase 4

- Plantear y análizar problemas cotidianos en diferentes contextos, que conlleven a la implementación del mecanismo para obtener una solución o varias soluciones a los mismos o indicar que dichas soluciones no existen.
- Revisiar y evaluar el proceso, haciendo énfasis en: El lenguaje adquirido y el significado que el alumno le da al mismo, las nuevas relaciones válidas adquiridas, y la aplicación del mecanismo en situaciones favorables o desfavorables.

Para cumplir con estos objetivos, se diseñan siete (7) actividades, distribuidas en tres grupos así:

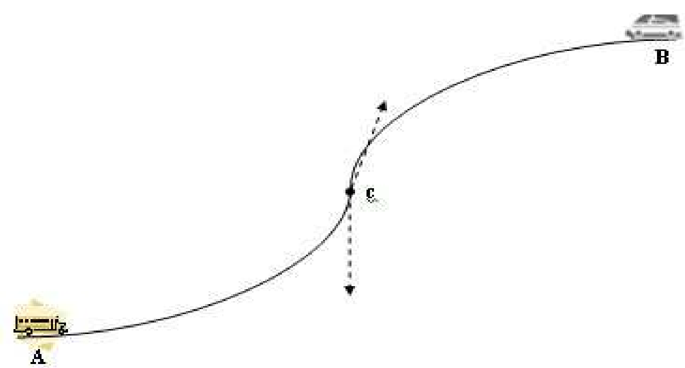
Grupo 1. Consta de las actividades 1, 2 y 3, y tienen como objetivo, que el alumno emplee el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente en situaciones concretas.

Grupo 2. Consta de las actividades 4, 5 y 6, y tienen como objetivo que el alumno implemente correctamente el infinito potencial, y lo identifique como eje central del concepto de aproximación local.

Grupo 3. Consta de la Actividad 7, y tiene como objetivo plantear nuevas situaciones, en las que se aplique el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva en un punto dado sobre ella.

Las actividades propuestas son las siguientes:

Actividad 1. En el siguiente croquis,

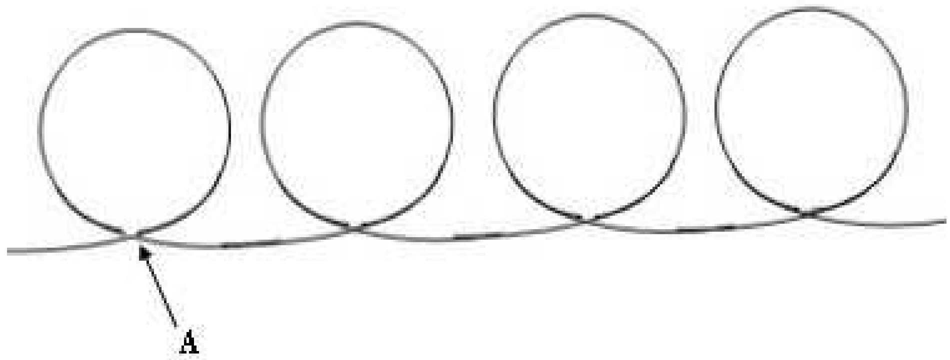


Se observan dos carros situados sobre una misma vía. El vehículo situado en la posición **A**, debido a un descuido del conductor, se sale de la vía en el punto **C**. Lo mismo le sucede al vehículo situado en la posición **B**. Las investigaciones del caso, realizadas por un ente policial, arrojan como resultado que ambos carros se salieron en forma tangencial en el punto indicado. Uno de los abogados defensores, alega que el argumento presentado anteriormente es falso.

- Si de alguna manera, en forma contundente, pudieras ayudar al abogado que alega que el argumento presentado es falso, ¿de que forma lo harías?

- Si fuera el caso que alguno de los dos carros, no se hubiera salido de la carretera en forma tangencial, ¿cómo probarías cual de los dos carros es? y ¿cómo podrías garantizar que el método empleado anteriormente, es el correcto?

Actividad 2. Observa la siguiente figura.

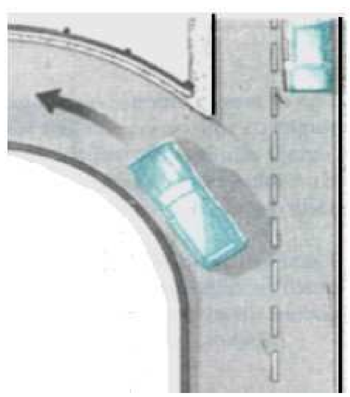


¿Es posible encontrar la recta tangente a esta curva en el punto indicado? Justifica tu respuesta.

¿Si no es posible, describe que pasa con la curva en ese punto?

¿Si lo pudieras relacionar con alguna de las actividades realizadas anteriormente, con cuál lo harías y porqué?

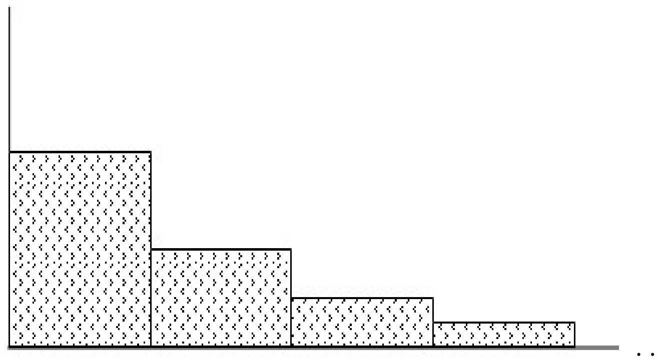
Actividad 3. En la siguiente figura se puede observar como un automóvil, toma a gran velocidad una curva. Si la puerta derecha del automóvil se encuentra abierta, ¿Qué movimiento describirá un objeto ubicado en dicha puerta, en el preciso instante que el automóvil comience a describir la curva? Justifica tu respuesta.



Actividad 4. La imagen que se muestra a continuación, describe el siguiente proceso: se toma un rectángulo y con igual base, pero con la mitad de su altura se construye el siguiente, y así sucesivamente se continúa con el proceso.

¿Qué pasa con el área de los rectángulos? Justifica tu respuesta.

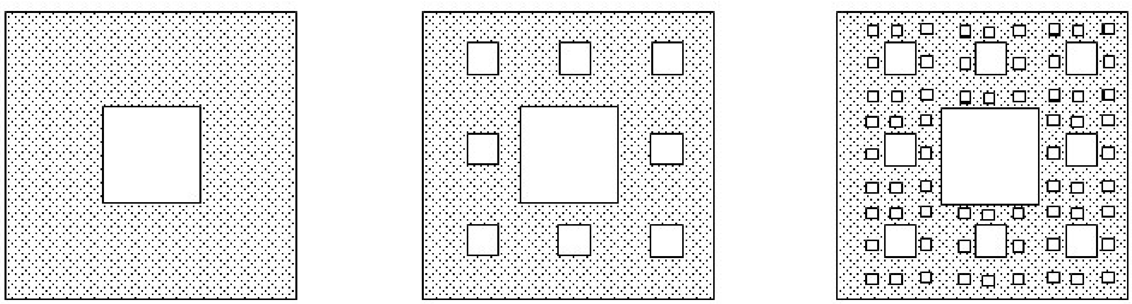
¿Puedes graficar este proceso indefinidamente?



Si tu respuesta anterior es NO, ¿de qué manera puedes representar esta figura?

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna de las actividades realizadas anteriormente con cual lo harías y porqué?

Actividad 5. La carpeta de Sierpinski, se forma quitando la novena parte central de un cuadrado de lado 1. Después se suprimen los centros de los ocho cuadrados restantes, que son más pequeños, y así sucesivamente. La figura anexa muestra los tres primeros pasos de este procedimiento.



Según el proceso descrito anteriormente:

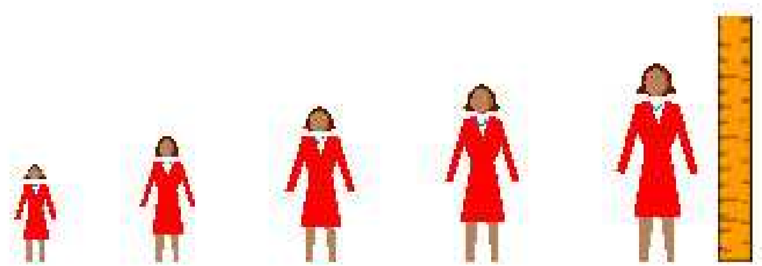
¿Qué podrías decir acerca de la suma de las áreas de los cuadrados que se quitaron?

¿Qué pasa con al área de la carpeta de Sierpinski?

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna otra de las actividades realizadas con cual lo harías y porqué?

Actividad 6. Observa la siguiente imagen:

Se supone que el crecimiento de una persona depende de la edad y se interpreta este fenómeno como un proceso continuo, ¿qué pasa con este fenómeno... para, sigue, se estabiliza?



¿Puedes afirmar categóricamente cuál es la estatura de una persona? Justifica tu respuesta.

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna de las actividades realizadas anteriormente, con cuál lo harías y porqué?

Actividad 7. A partir de tus propias experiencias (fenómenos, objetos, hechos, etc.), construya o cite ejemplos como los anteriores. Además, realiza una interpretación de la situación descrita y, cómo y porqué se relaciona con el objeto de estudio trabajado hasta el momento.

Observación: Esta fase, tiene entre sus propósitos evaluar el proceso realizado, pues según Corberán ([7], p. 7), “La constatación de eventuales fracasos indicará la conveniencia de retornar a la fase 2. Por contra la evidencia de un grado razonable de exito indicará la conveniencia de pasar a la fase de integración”, tal como se observa en la Figura 3.4 (p. 79).

La siguiente fase tiene entre sus objetivos, ayudar al alumno a adquirir una visión integral, que le permita reorganizar la información.

3.3.5. Fase 5. Integración

Es en esta fase, donde los alumnos exponen, mediante un mapa conceptual, la apropiación del concepto objeto de estudio. Su comprensión y aplicación, constituyen el objetivo de esta fase de aprendizaje, siendo la comprensión el aspecto más relevante del mismo. En esta fase, los conceptos estudiados se reorganizan y adquieren un nuevo significado, haciendo explícita la nueva red conceptual y el conjunto de habilidades de razonamiento adquirido.

Cabe resaltar que esta fase, se ha venido elaborando a lo largo del proceso y es por eso que la elaboración de un mapa conceptual cumple a satisfacción con las necesidades de la misma.

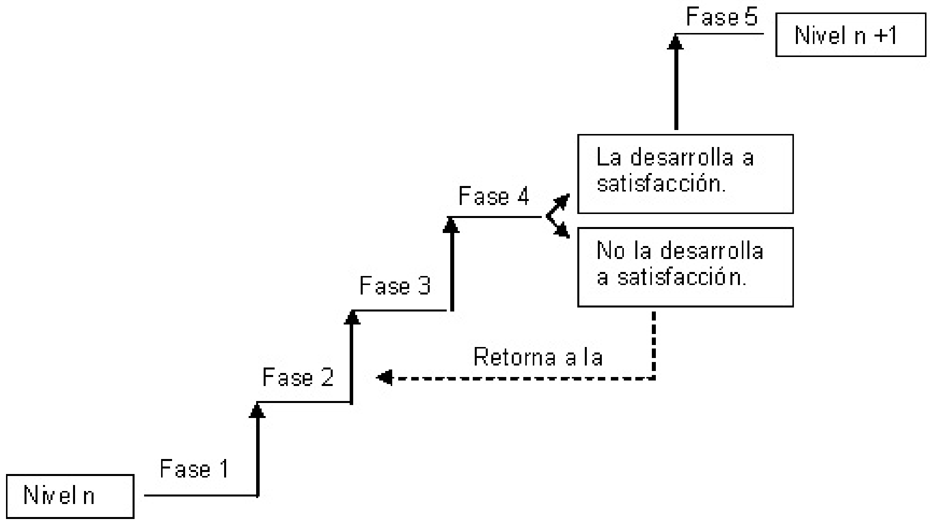


Figura 3.4: Esquema para la aplicación de las fases de aprendizaje en la superación del nivel n al nivel $n+1$.

A partir de lo anterior, el objetivo propuesto para esta fase es:

- Verificar la incorporación del lenguaje propio del nuevo nivel.

Conclusión: En este Capítulo se presentaron las experiencias de aprendizaje, diseñadas con el fin de dar cumplimiento parcial al objetivo general del presente trabajo de investigación. Estas son la base del estudio experimental que se llevará a cabo con un grupo de alumnos de la Universidad de Antioquia y del Instituto Tecnológico Metreopolitano y cuyos resultados se presentan en el Capítulo 4.

Capítulo 4

Aplicación de la propuesta metodológica y análisis de resultados

En el presente Capítulo, se muestran los resultados obtenidos con la aplicación del módulo de instrucción al grupo experimental y los resultados obtenidos por el grupo de control después de la intervención pedagógica, además, se analizan las respuestas más respresentativas, brindadas por los alumnos del grupo experimental, respecto a las experiencias de aprendizaje del módulo de intrucción.

Cabe resaltar, que el proceso completo de clasificación de los alumnos en los diferentes niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, se muestra de manera detallada en el Apéndice A.

4.1. Muestra elegida para el proyecto

La muestra elegida, para realizar el proyecto de investigación fue de 154 alumnos discriminadaos de la siguiente manera: 115 de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia), y 39 del Instituto Técnológico Metropolitano (Medellín, Colombia). Después de la aplicación del Test "Curvas y Tangentes"(Ver Apéndice G, p. 215) y de la clasificación de los alumnos en los diferentes niveles de razonamiento, se obtiene que 63 de ellos fueron clasificados en el Nivel I, 66 en el Nivel II y 25 en el Nivel III. De los clasificados en el Nivel II, dos (2) alumnos son del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM), que corresponden a las etiquetas A2 y A3.

4.2. Selección del grupo de control y del grupo experimental

Como se indicó en el Capítulo 3, la aplicación del módulo de instrucción tiene como objetivo propiciar las experiencias de aprendizaje a un alumno ubicado en el Nivel II de razonamiento con el fin de que progrese al Nivel III.

Para cumplir este propósito, se dividieron aleatoriamente los 66 alumnos ubicados en el Nivel II de razonamiento, en dos grupos. El primero, es el grupo experiental, que contiene el 60 % del total, es decir, 40 alumnos, 39 de la Universidad de Antioquia y uno (1) del Instituto Tecnológico Metropolitano. El segundo, es el grupo control, que contiene el 40 % del total, es decir, 26 alumnos, 25 de la Universidad de Antioquia y uno (1) del Instituto Tecnológico Metropolitano. Sin embargo, por dificultades en el desplazamiento, económicas y por incompatibilidad horaria, los dos (2) alumnos del Instituto Tecnológico Metropolitano, deciden no participar en el proyecto. A partir de esto, el grupo experimental y el grupo control quedan conformados por 39 y 25 alumnos respectivamente.

4.2.1. Grupo experimental y grupo de control

Para realizar la intervención pedagógica, el grupo experimental y el grupo de control reciben las clases magistrales de acuerdo con el programa académico correspondiente, sin embargo, los alumnos del grupo experimental son sometidos a la aplicación del módulo de instrucción diseñado por el grupo de docentes, en horarios diferentes a los programados para las clases habituales y con una intensidad horaria de 4 horas semanales adicionales a las de su jornada académica, durante 8 semanas.

Cabe recalcar que los alumnos implicados en la investigación no presentan carácteristicas reseñables distintas a la generalidad de los alumnos universitarios de primer semestre y, además de esto, su participación en la intervención pedagógica fue voluntaria, y no es motivada por intereses económicos y/o académicos fuera de los establecidos por el reglamento universitario.

4.3. Aplicación del módulo de instrucción al grupo experimental

Para realizar la intervención pedagógica, el grupo experimental y el grupo control reciben las clases magistrales de acuerdo con el programa académico correspondiente, sin embargo, los alumnos del grupo experimental son sometidos a la aplicación del módulo de instrucción diseñado por el grupo de docentes, en horarios diferentes a los programados para las clases habituales y con una intensidad horaria de 4 horas semanales adicionales a las de su jornada académica, durante 8 semanas. Cabe recalcar que los alumnos implicados en la investigación no presentan carácteristicas reseñables distintas a la generalidad de los alumnos universitarios de los primeros semestres.

4.4. Análisis de los resultados obtenidos

Después de la intervención pedagógica, es necesario clasificar nuevamente los alumnos de los dos grupos en su respectivo nivel de razonamiento. Esto implicó pasar de nuevo el Tests "Curvas y Tangentes", arrojando los siguientes resultados: de los 39 alumnos del grupo experimental, 38 fueron promovidos al Nivel III de razonamiento y uno (1) permaneció en el Nivel II, mientras que de los 25 alumnos del grupo de control, seis (6) progresaron al Nivel III, 12 permanecieron en el Nivel II y siete (7) involucionaron al Nivel I.

Para analizar los resultados obtenidos de los grupos experimental y de control, se dividieron los alumnos de la siguiente manera:

1. Resultados obtenidos por los 38 alumnos que progresaron al Nivel III de razonamiento.

2. Resultados obtenidos por el alumno, perteneciente al grupo experimental, que no fue clasificado en el Nivel III de razonamiento.

3. Resultados obtenidos por el grupo de control.

4.4.1. Análisis de los resultados obtenidos por los 38 alumnos que progresaron al Nivel III de razonamiento

El presente análisis, está basado en las respuestas brindadas por los alumnos después de la aplicación del módulo de instrucción, de acuerdo a los objetivos y a las actividades planteadas en cada una de las fases de aprendizaje y a la secuencia de como fueron aplicadas.

Antes de comenzar con la aplicación de las experiencias de aprendizaje, el grupo de alumnos fue instruido en la elaboración de la técnica de los mapas conceptuales, durante un periodo de dos semanas, con el fin de evitar errores en la creación de los mismos, ya que según Novak ([46], p. 52) "algunas de las concepciones equivocadas puede que se deba simplemente a la falta de destreza con los mapas". En nuestras palabras, se podría interpretar como un error operativo, además, se busca que los alumnos los hagan más claros y sin el amontonamiento de conceptos, permitiendo que mejoren la significatividad de la elaboración del mismo.

Fase 1. Información

La primera Actividad, propuesta para comenzar el proceso de intervención pedagógica, fue la elaboración de un mapa conceptual a partir de los conceptos[1] de punto, curva, recta y tangente, pues los mapas conceptuales son una técnica válida para verificar las relaciones erróneas que pueden tener los alumnos *a priori* de los conceptos objeto de estudio. Con los mapas conceptuales, se puede según Esteban ([49], p. 153), "evaluar cualitativamente un alumno, pues permiten ver claramente si ha conseguido comprender las relaciones conceptuales, y si tienen interiorizados los significados básicos que se han de abordar en el proceso".

El mapa conceptual de la Figura 4.1 (p. 85), muestra, como el alumno relaciona algunos de los conceptos propuestos, por ejemplo el de punto, considerado objeto primitivo en la geometría. Además, define la recta tangente a una curva como "el tipo de recta que corta a la función en infinitos puntos, y corta a la circunferencia en un solo punto", mostrando que no tiene claro el concepto y conservando la idea de la definición de tangente a una circunferencia; lo anterior evidencia que los alumnos no consideran la necesidad de definir la recta tangente a través de una propiedad adicional que esta tiene, que es la de ser la recta de estabilización del proceso del haz de secantes. Este mapa, realizado para la fase 1 de la experiencia, es representativo, ya que la mayoría de los alumnos sometidos a ella presentaron mapas similares.

A partir del análisis del lenguaje, presentado por los alumnos en sus respectivos mapas conceptuales, el grupo de docentes, diseña y aplica 5 actividades con el fin de establecer el punto de partida en el lenguaje empleado por los alumnos, y el correcto manejo del mecanismo del "haz de secantes", que es el seleccionado en el presente proceso de investigación.

Con el test "Exploración de la idea de punto" o Actividad 2 (Ver Capítulo 3, p. 57), se logra que los alumnos reconozcan los objetos básicos en el sentido visual y/o geométrico, pero con sus propiedades matemáticas elementales, por ejemplo: Un punto no tiene dimensiones y no tiene una única representación; una recta no tiene "grosor", pero si tiene "longitud"; las curvas están formadas por puntos, algunas son cerradas, otras no tienen principio ni fin, como las rectas; las rectas son una clase especial de curvas, de las que solo es posible dibujar un trozo. Lo anterior se refleja en las respuestas brindadas por los alumnos en las preguntas 7, 12, 15, 20 y 21, de este test.

[1]Según Esteban ([12], p. 100), dichos conceptos son fundamentales en la potenciación del nivel de razonamiento acerca del concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

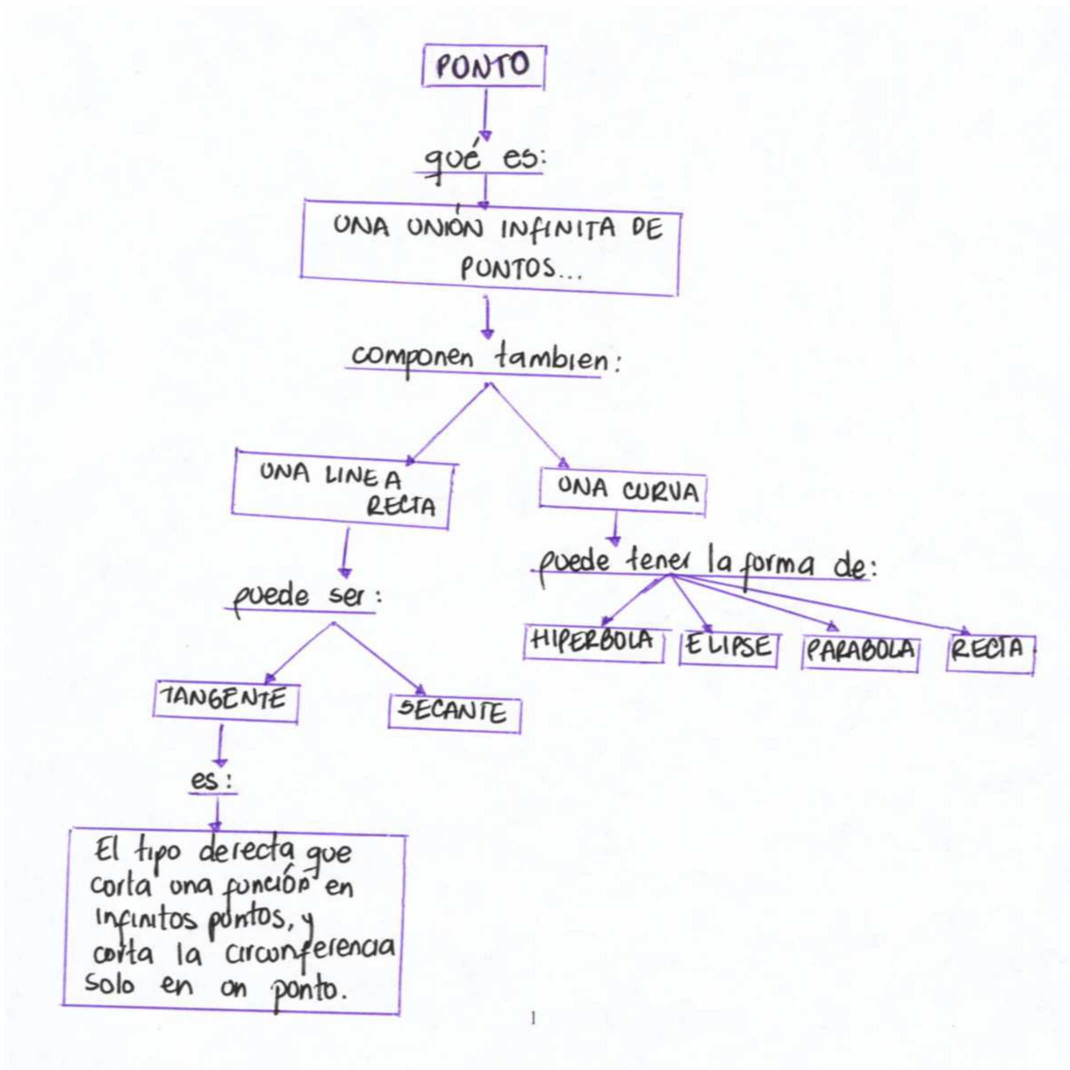


Figura 4.1: Mapa representativo en la Actividad 1, realizada en la fase 1 y clasificado como "debe ser re-formulado". Dicha expresión, puede entenderse como; debe ser nuevamente construido a la luz de algunas experiencias de aprendizaje presentadas por el docente.

Con la aplicación de las Actividades 3, 4 y 5, los alumnos logran reconocer que por un punto en el plano pasan infinitas rectas y por dos puntos pasa una única recta, y al tomar sobre una curva cualquiera un punto fijo A y otro punto móvil cualquiera también sobre ella, primero sobre un lado de A y luego sobre el otro, admite que este puede acercarse indefinidamente sobre la curva hacia A, reconociendo que por un punto fijo A de una curva y por puntos situados sobre la curva, cada vez mas cercanos a A, se pueden trazar infinitas rectas secantes, tal como puede observarse en la Figura 4.2.

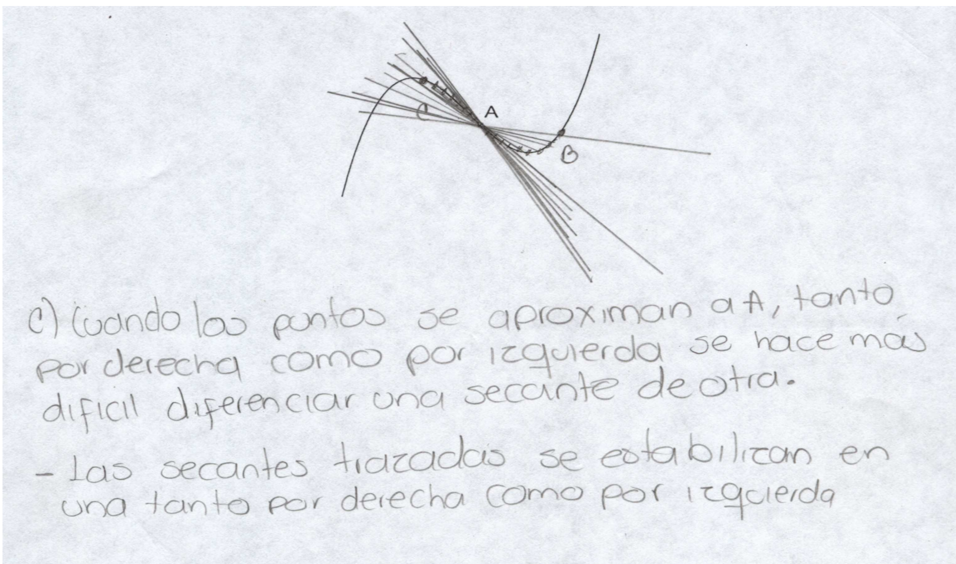


Figura 4.2: Con esta observación el alumno reconoce que se pueden trazar infinitas rectas secantes que pasen por un punto dado y por puntos cada vez más cercanos a este.

Lo anterior, indica que el grupo de alumnos ha comprendido la construcción del mecanismo del haz de secantes para una curva plana en un punto dado sobre ella. Sin embargo, al trazar el haz de secantes a curvas que presentan "picos u oscilaciones infinitas", en uno de tales puntos, muestran desconcierto, manifestando que no es posible construirlo o se construye incorrectamente. Esta situación se da en forma general en el grupo de alumnos, como se puede observar en las Figuras 4.3 (p. 87) y 4.4 (p. 87).

Con la aplicación y discusión de la Actividad 6 "recapitulación", el grupo de alumnos, al mostrarle o pedirle que realicen el proceso del haz de secantes sobre un punto fijo A de una curva y por puntos situados sobre la curva, cada vez más cercanos a A, reconoce visualmente que el haz de secantes se estabiliza en una línea recta. Para ello utiliza expresiones verbales tales como "las secantes se van juntando cada vez mas", "las secantes no se pueden distinguir, cuando se acerca el punto móvil al punto fijo A", "las líneas se unen formando una nueva línea recta que se estabiliza" y así mismo, algunos

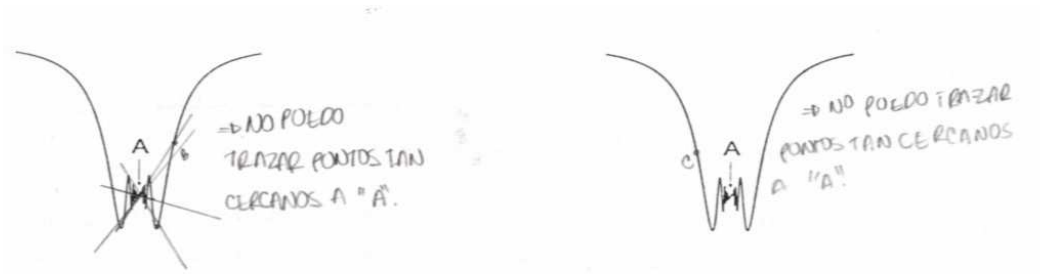


Figura 4.3: Observación que realiza un alumno, al pedirle que construya el haz de secantes a la curva $x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ que pertenece a la Actividad 5, de la fase 1.

Figura 4.4: El alumno realiza incorrectamente el haz de secantes a la curva $x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ que pertenece a la Actividad 5, de la fase 1, pues en el punto dado sobre la curva realiza el proceso de aproximación local sin ninguna observación de que no lo puede realizar.

de ellos empiezan a relacionar la estabilización del proceso del haz de secantes con la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, entendiendo la tangente como el final de un proceso de aproximación local.

Algunas de las observaciones realizadas por el grupo de alumnos, se pueden ver en las Figuras 4.5 (p. 88), 4.6 (p. 88) y 4.7 (p. 89).

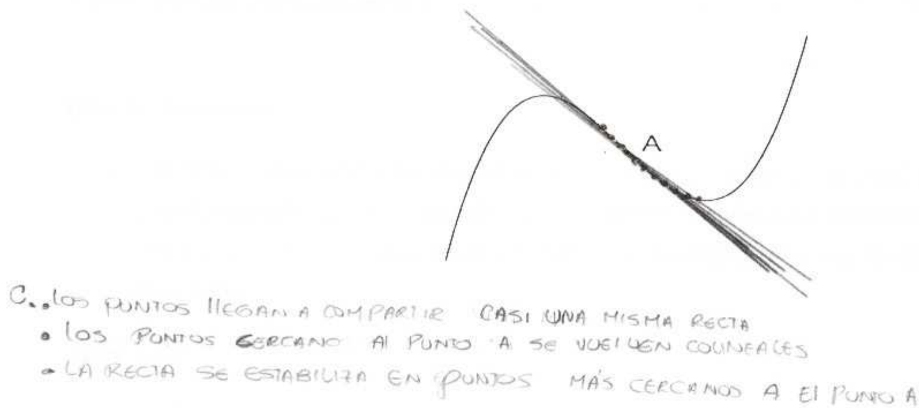


Figura 4.5: Observación que realiza un alumno, al pedirle que describa lo que observa al trazar el haz de secantes, a uno y otro lado del punto dado. Expresión técnica: *Estabilización de las rectas.*

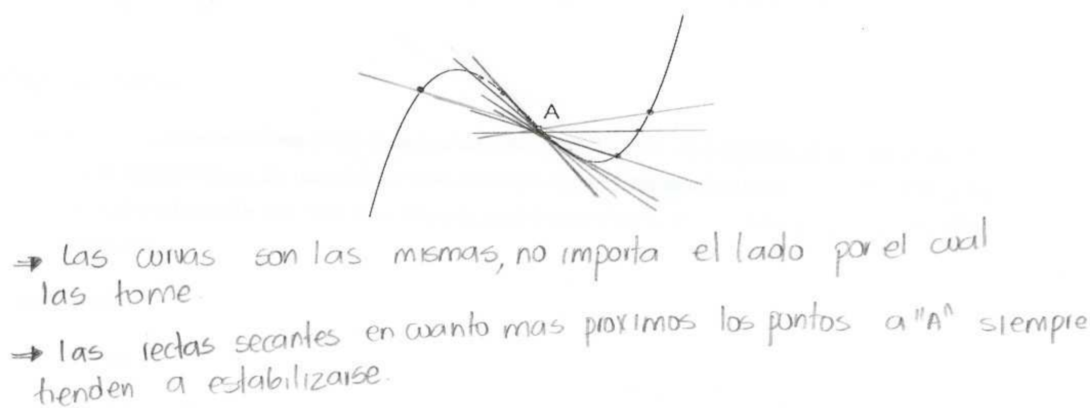


Figura 4.6: Observación que realiza un alumno, al pedirle que describa lo que observa al trazar el haz de secantes, a uno y otro lado del punto dado. Expresión técnica: *rectas secantes en cuanto más próximos los puntos a "A" siempre tienden a estabilizarse.*

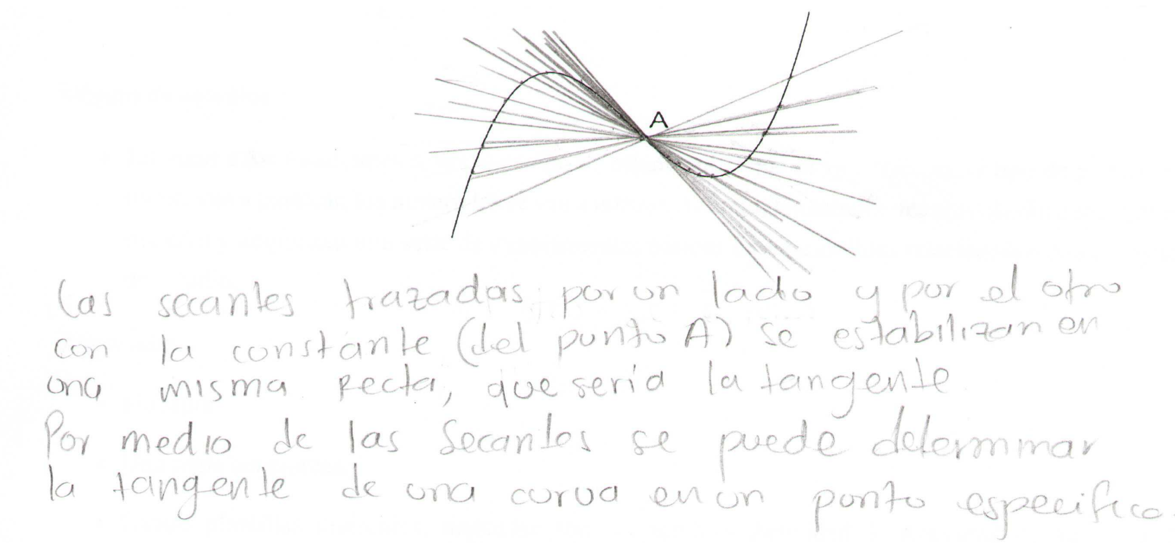


Figura 4.7: Observación que realiza un alumno, al pedirle que describa lo que observa al trazar el haz de secantes, a uno y otro lado del punto dado. Expresión técnica: *Las secantes trazadas por uno y otro lado del punto A, se estabilizan en la misma recta, que sería la tangente.*

Con el análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las actividades presentadas en esta fase, se puede concluir que la técnica de los mapas conceptuales permitió detectar y analizar la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva, frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, además, se logró establecer un punto de partida en el lenguaje empleado por los alumnos en este nivel. Finalmente, los alumnos dan muestras del manejo correcto del mecanismo del haz de secantes en curvas suaves (Ver Capítulo 3, p. 59), presentando dificultades en el manejo del mismo, en curvas patológicas.

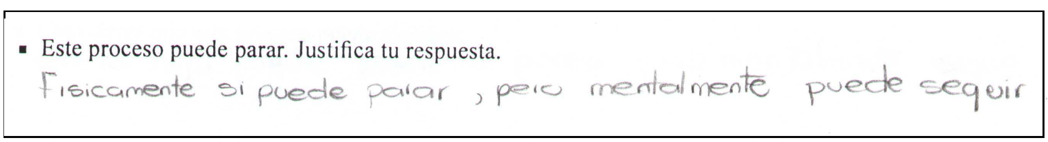
Fase 2. Orientación dirigida

Al inicio del proceso, la visón que los alumnos tenían acerca del infinito potencial, estaba asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente, por lo tanto la idea de la noción de infinito potencial era, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre se puede continuar, pero sin alcanzar un límite o llegar a estabilizarse.

Para el estudio del cálculo se requiere que los alumnos comprendan, aunque sea, de manera intuitiva el concepto de infinito potencial, pues es la base del concepto de aproximación local en sus diversas manifestaciones. A partir de esto y de la información obtenida durante el análisis de las actividades presentadas en la fase 1, se diseñan experiencias de aprendizaje para la fase 2 buscando que los alumnos descubran, aprendan y comprendan los conceptos, relaciones y propiedades de los elementos con los que se va a trabajar durante la intervención pedagógica.

En particular, con las actividades 1, 2, 3, 4, 5 y 6, de esta fase de aprendizaje, se logra que los alumnos interioricen la noción de aproximación y se apropien, de manera intuitiva, del concepto de infinito potencial. Esto se evidencia con algunas de las respuestas presentadas por los alumnos. Por ejemplo al abordar la Actividad 1, que plantea al alumno: *Dividir un trozo de cuerda dado por la mitad, que luego tome uno de los dos trozos resultantes y lo divida por la mitad nuevamente, y que continue con este proceso hasta donde considere que se puede realizar*, los alumnos hacen afirmaciones del siguiente tipo: "las operaciones físicas para realizar el proceso tienen limitaciones, pero las operaciones mentales no" y "cuando se continúa con un proceso de corte, sobre el trozo de cuerda, siempre habrá, aunque muy pequeño, un trozo de cuerda que cortar", estas afirmaciones son características propias del infinito potencial y del concepto de aproximación local abordado.

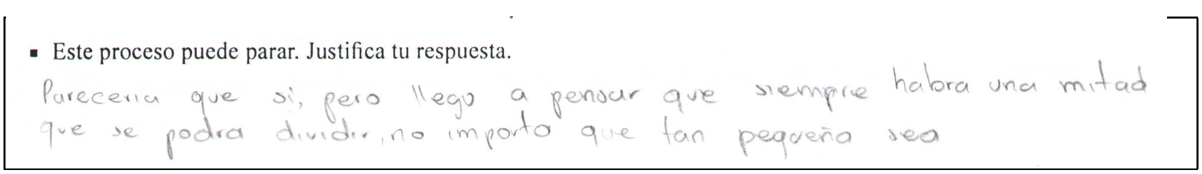
Estas observaciones, son ilustradas en las Figuras 4.8 (p. 90), 4.9 (p. 90) y 4.10 (p. 91), así mismo esta interiorización, se ve reforzada con observaciones realizadas por la mayor parte del grupo de alumnos, al desarrollar la Actividad 4, tal como se muestra en la Figura 4.11 (p. 92).



- Este proceso puede parar. Justifica tu respuesta.

Fisicamente si puede parar , pero mentalmente puede seguir

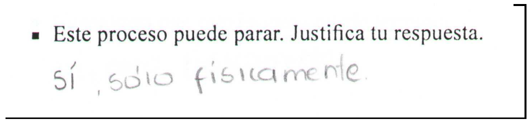
Figura 4.8: Con esta observación el alumno marca la diferencia de realizar un proceso mental y un proceso físico.



- Este proceso puede parar. Justifica tu respuesta.

Pareceria que si, pero llego a pensar que siempre habra una mitad que se podra dividir, no importa que tan pequeña sea

Figura 4.9: Con esta observación el alumno acepta, aunque de manera intuitiva el concepto de división, como un proceso infinito.


- Este proceso puede parar. Justifica tu respuesta.

sí, solo físicamente.

Figura 4.10: Al igual que en la Figura 4.8, el alumno marca una diferencia entre los procesos físicos y mentales.

A partir de lo anterior, se puede verificar el hecho de que los alumnos realmente interiorizaron el proceso y que no solo estan generando repeticiones escritas de lo que los investigadores quieren. Para comprobarlo, se le pide al grupo de alumnos que elaboren un nuevo mapa conceptual, ya que de acuerdo con Ausubel:

> La adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una interacción de la nueva información con ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una asimilación de significados nuevos y antiguos para formar una estructura altamente diferenciada ([41], p. 71).

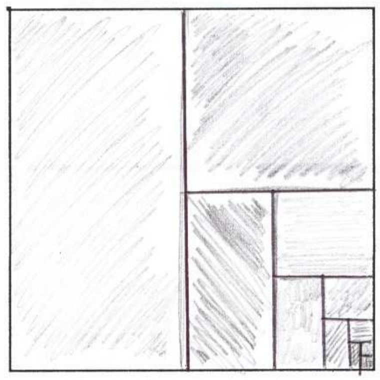
Es por eso, que el mapa conceptual, pedido en la Actividad 7, revela como los alumnos logran reformular y ampliar su red de relaciones válidas frente al concepto objeto de estudio.

La Figura 4.12 (p. 93), muestra un mapa conceptual representativo del grupo de alumnos, más completo que el presentado en la fase anterior, pues en él, los alumnos conservan los conceptos básicos y sus propiedades y adicionalmente relacionan el mecanismo del haz de secantes como una propiedad adicional para la definición del concepto de recta tangente, siendo esto último una condición necesaria para progresar del Nivel II al Nivel III de razonamiento del modelo educativo de van Hiele.

Con el análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las actividades presentadas en esta fase, se puede concluir que las distintas situaciones empleadas en las experiencias de aprendizaje llevaron a la interiorización de la noción de aproximación local por parte del alumno, logrando la apropiación del concepto de infinito potencial, además, los mapas conceptuales realizados permitieron verificar el lenguaje adquirido por ellos, la manera como lo emplean y el significado asignado a éste.

Actividad 4:

- Divide el cuadrado dado en dos partes iguales, sombrea una de ellas. A la parte del cuadrado que quedo *sin* sombrear divídela nuevamente en dos partes iguales y de nuevo sombrea una de ellas. Continua este proceso hasta cuando consideres que se puede realizar con los instrumentos utilizados.



Preguntas:

- El proceso realizado, ¿puede terminar?

  No, queda un espacio diminuto que no se llena con sombra

- ¿Qué pasa con la región sombreada?

  Aumenta hasta casi Cubrir toda el area del Cuadrado

- Imaginate un cuadrado ¿Si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar? ¿Qué pasaria con la región sombreada?

  No, imaginanddo puedo dividir infinita/ ese espacio pequeño que me queda

Figura 4.11: Esta Actividad, muestra avances en el proceso de razonamiento utilizado por el grupo de alumnos sobre el concepto trabajado, debido a que ya no relacionan el infinito potencial con la ausencia de límites o de fronteras.

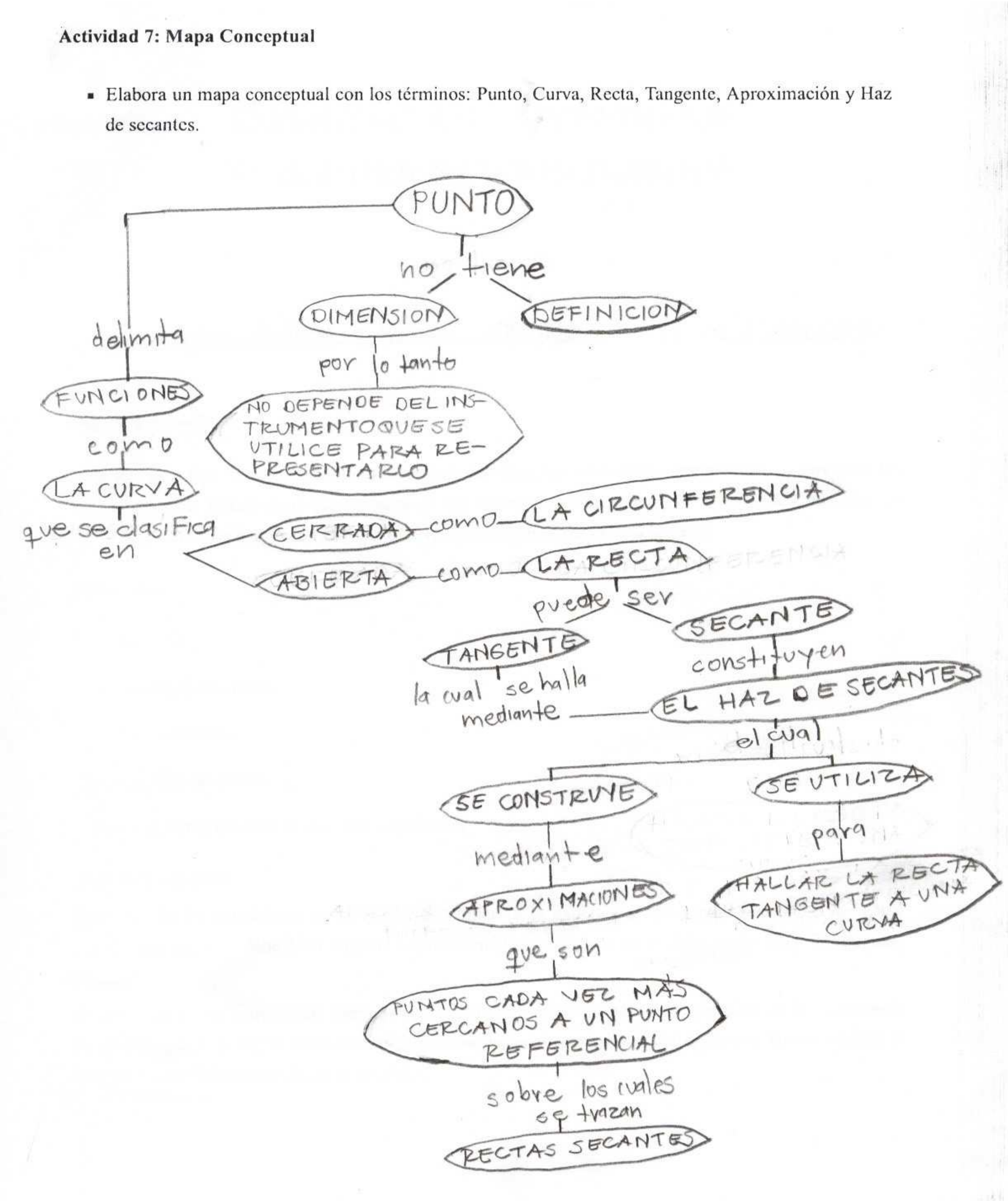


Figura 4.12: Mapa conceptual presentado en la Actividad final de la fase 2, donde se muestra un avance significativo en el lenguaje empleado por los alumnos.

Fase 3. Explicitación

Con la aplicación de las actividades propuestas para esta fase, se logra que los alumnos refuercen los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, lo cual se ve reflejado cuando comentan y discuten las regularidades e irregularidades observadas en el proceso y explican como han resuelto las actividades propuestas.

En particular, la aplicación de las actividades[2] 1 y 2, se desarrolló en tres etapas conjuntas, discriminadas de la siguiente manera:

E.1. Recapitulación del proceso de investigación: Apropiación de la noción de aproximación local, aplicación del concepto de infinito potencial y manejo del mecanismo.

E.2. Reconocimiento visual del manejo del mecanismo: Predicción de la dirección de la recta de estabilización del haz de secantes.

E.3. Análisis del manejo del mecanismo en su aplicación a curvas patológicas.

Se obtuvieron los siguientes resultados para cada uno de ellos:

E.1. Los alumnos, amplían su vocabulario respecto al concepto objeto de estudio, empleándolo con una intención determinada: empezar a dar descripciones más precisas de los diferentes objetos matemáticos utilizados dentro del proceso. Esta afirmación se ve reflejada, cuando se les pide que describan como se desarrolla el proceso de acercamiento de puntos móviles a un punto fijo sobre una curva dada. En dicha descripción emplean términos tales como “los puntos se acercan cada vez más”, “los puntos son más próximos a A y se confunden con A” y “los puntos se aproximan demasiado al punto A, sin ser A”.

Así mismo, al pedirles que describan el mecanismo utilizado, lo hacen de la siguiente manera: “para construir el haz de secantes, se ubican puntos por la izquierda y por la derecha del punto fijo A, cada vez más cercanos a A. Al trazar las secantes, estas se estabilizan en una sola recta”, lo cual evidencia que en su razonamiento, establecen de forma concreta la relación que tiene el mecanismo seleccionado, haz de secantes, con el infinito potencial.

E.2. En esta Etapa, los alumnos, establecen que la recta tangente a la curva en un punto dado, además de tocar o cortar a la curva, debe cumplir una propiedad adicional: ser la “recta de estabilización”, el “final” del proceso de aproximación local.

[2] Para verificar, las observaciones presentadas como conclusiones de estas actividades, se debe observar detalladamente el material en medio magnético (video) anexo al trabajo de investigación.

En concordancia con esto el grupo de alumnos, dada una curva, una recta con apariencia de tangente y un punto fijo donde la recta toca o corta a la curva, formulan la necesidad de iniciar el proceso de aproximación local o construcción del haz de secantes para dar respuesta a la pregunta de si la recta es tangente o no.

Cabe recalcar que dentro de este proceso, los alumnos son capaces de predecir la dirección de la recta tangente a una curva en un punto dado a partir de la utilización del mecanismo del haz de secantes, bien sea, que lo hagan por algún medio escrito o bien aplicando un proceso de razonamiento mental que los lleve a la respuesta adecuada.

E.3. En esta Etapa del proceso, los alumnos presentan un correcto manejo del mecanismo en las curvas consideradas patológicas, siendo estas en las que existe alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación local, por ejemplo, al inicio del proceso algunos de los alumnos no sabían graficar, interpretar y definir la recta tangente de una línea recta en un punto dado sobre ella, mostrando para esta etapa, un avance significativo, ya que utilizan expresiones del tipo "una recta dada y la recta tangente a ella, se sobreponen una con la otra" y "no es necesario trazar el haz de secantes en una recta, ya que la tangente siempre va ha ser ella misma", para las funciones que contienen "picos" ($|x|$ y $\sqrt{|x|}$) y para las funciones cuyas oscilaciones son muy repetidas ($x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$), trabajadas en el Capítulo 3 sección 3.3 (p. 59), pasaron de utilzar expresiones del tipo "las curvas tienen infinitas tangentes en el punto dado" y "no sabemos identificar cual es la tangente de todas las secantes que podemos trazar" a utilizar expresiones del tipo "en curvas donde hay "picos" las secantes no se estabilizan en una sola recta, por lo tanto no hay tangente" y "en curvas donde hay demasiadas oscilaciones juntas no se aplica el mecanismo, porque no se pueden determinar los puntos móviles, al rededor del punto fijo". Según Esteban ([12], p. 107)

> La característica fundamental del proceso de aproximación local es la capacidad de razonamiento (paso al límite) que haga para resolver situaciones patológicas, en las cuales no es suficiente la información visual que se obtiene al aplicar un determinado mecanismo o de la forma de una curva particular. Si no se tiene la suficiente capacidad de raciocinio, no podrá utilizar secuencias de enunciados para hacer demostraciones o para entenderlas cuando se las explican.

Este avance en la forma de trabajo de los alumnos, muestra un mejoramiento en la capacidad de razocinio de ellos, ya que elaboran sus conclusiones sobre las imágenes de las curvas propuestas en el módulo de instrucción y en ningún momento tuvieron la oportunidad de ver cuál era la expresión matemática correspondiente a cada una de ellas, no permitiéndoles realizar procesos algorítmicos en la determinación y verificación de si una recta es tangente o no, en las diferentes situaciones planteadas. Este hecho juega un papel fundamental para analizar el razonamiento que realizan a partir del mecanismo seleccionado.

Una forma de observar dicho razonamiento, es identificar las relaciones válidas que los alumnos hacen frente a los conceptos estudiados. Con la aplicación y discusión de la Actividad 3, de esta fase de aprendizaje, se obtuvieron resultados concretos en este sentido, un ejemplo de esto se muestra en la Figuras 4.13 (p. 97) y 4.14 (p. 98), donde se observa claramente, que los alumnos, comienzan con un proceso de separación de conceptos y establecen una jerarquía entre los términos entregados al inicio del proceso, comenzando por el término punto, luego con el de curva y colocan la recta como un tipo especial de esta, prosiguen con el concepto de tangente hasta terminar por definirla por medio del mecanismo seleccionado. Así mismo, los alumnos diferencian los procesos "mentales" de los procesos "físicos", entendiendo el manejo del mecanismo, como un proceso dinámico, totalmente diferente a la concepción que presentaban al inicio de la experiencia, donde afirmaban que "este proceso puede terminar".

Cabe resaltar, que si esta concepción no hubiese sido superada implicaría que el proceso por el cual se encuentra la tangente a una curva en un punto es finito, lo cual quiere decir que no se han apropiado del dinamismo que caracteriza la aproximación local y sus diferentes manifestaciones, trae como consecuencia, que no podrian progresar en su nivel de razonamiento, manteniendo la dualidad entre el concepto imagen y el concepto definición.

Además, el exigir al grupo de alumnos reflexiones sobre el contexto de su estudio, les permitió relacionar los conceptos involucrados en el aula de clase, con los adquiridos en las experiencias de aprendizaje, presentándose otros importantes avances en el desarrollo del lenguaje, como el hecho de que conforme aumentaba el número de actividades las conclusiones de éstas se obtenían más rápidamente y con más precisión. Así mismo, se evidencia como empiezan a desaparecer las imprecisiones presentadas al inicio del proceso, permitiendo que los alumnos vayan construyendo su propio conocimiento y construyan una forma propia del razonamiento.

Finalmente, puesto que casi todos los conceptos están relacionados de algún modo en la estructura cognitiva del alumno, y aunque es difícil explorar todos los elementos relevantes que ella posee, se puede afirmar, que la elaboración de mapas conceptuales es una herramienta que ayuda a descubrir en gran parte esta estructura, ya que con este procedimiento, el alumno tratará de revelar todas sus ideas expresando mucho más de lo que ellos creen saber, pues es bien sabido el gran desfase que hay entre lo que un alumno piensa y lo que comunica.

Con la aplicación y discusión de la Actividad 4, al pedirle al grupo de alumnos que realice gráficas de curvas con las cuales no se haya trabajado anteriormente y que a su consideración, se les pueda y no se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado, se observan procesos de abstracción,

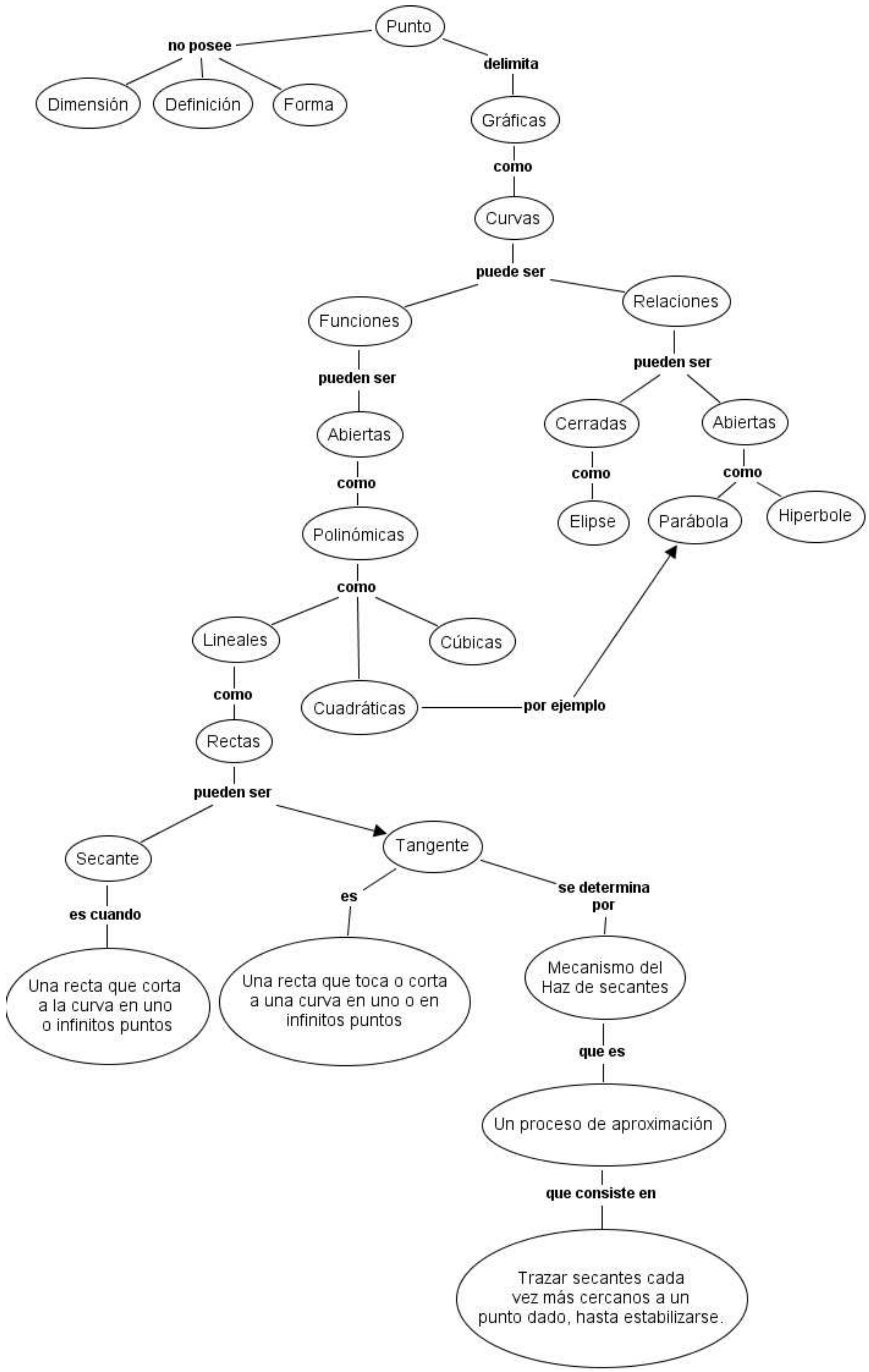


Figura 4.13: Mapa conceptual presentado en la Actividad 3, de la fase de Explicitación, realizado por uno de los alumnos, donde se muestra un avance significativo en el lenguaje empleado por ellos.

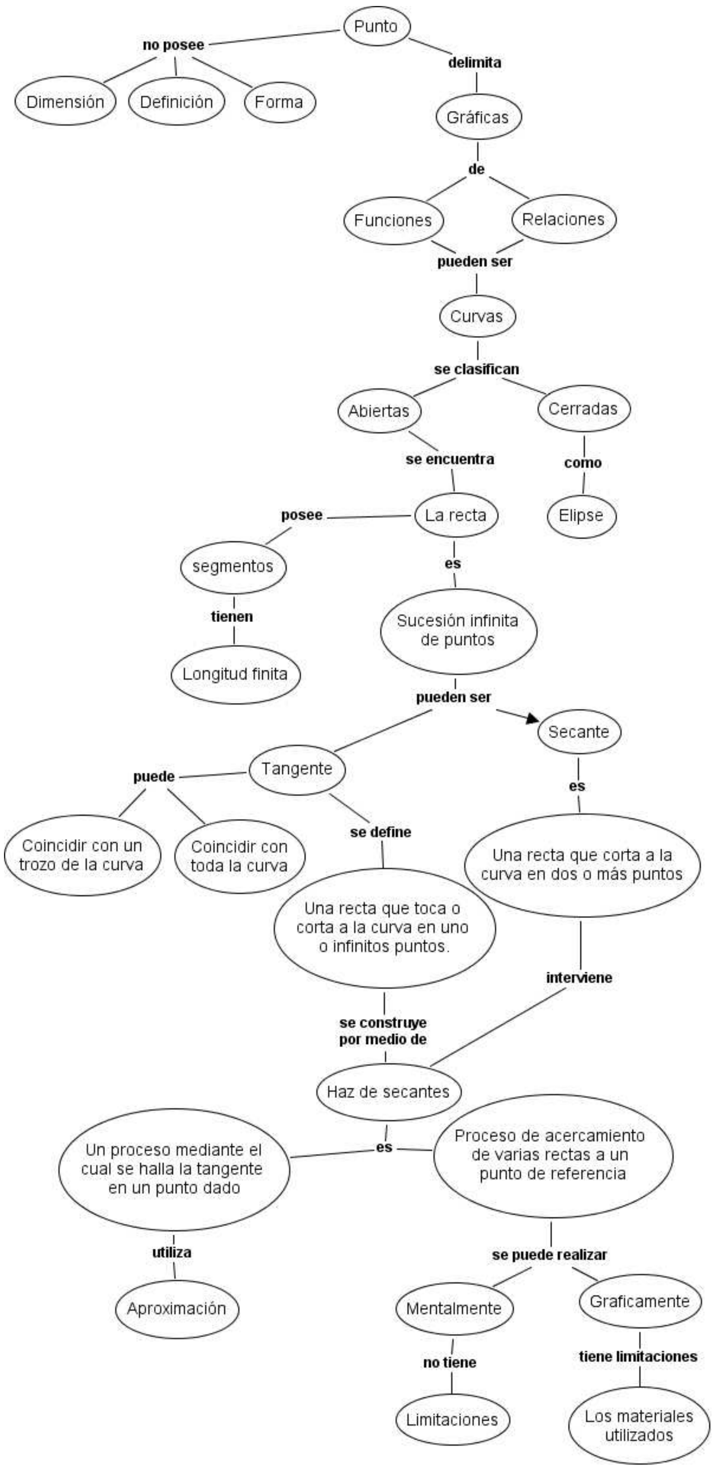


Figura 4.14: Mapa conceptual presentado en la Actividad 3, de la fase de Explicitación, realizado colectivamente por el grupo, donde se muestra un avance significativo en el lenguaje empleado.

reflejados en la elaboración y análisis de dichas curvas. Particularmente, en las Figuras 4.15 (p. 99), 4.16 (p. 100) y 4.17 (p. 100), se observa que comenzaron a desarrollar un pensamiento matemático útil en diferentes actividades académicas y/o cotidianas; esto cobra importancia porque les permitió ir más allá de su destreza para manipular expresiones simbólicas y les sirvió de base para analizar fenómenos o situaciones reales, aumentar de manera significativa su capacidad de razonamiento y su conocimiento, para afrontar el análisis de dichas situaciones y la formulación de otras nuevas.

Es importante resaltar, que una de las curvas propuestas por uno de los alumnos, Figura 4.16 (p. 100), se puede clasificar como una de las de mayor dificultad, para decidir si ésta, tiene recta tangente o no en un punto determinado y además de eso predecir correctamente su dirección, pues concuerda con los resultados presentados por *Shlomo Vinner* en el texto "*Advanced Mathematical Thinking*" ([35], p. 76), en la cual de una muestra de 278 alumnos, solo el 12 % del total del grupo da una respuesta satisfactoria; después de mostrada la curva, a la pregunta *"It is impossible to draw through* P *a tangent to the curve"*, que puede ser traducida como "Es imposible trazar a través de P una tangente a la curva", tal como se observa en la Figura 4.18 (p. 101).

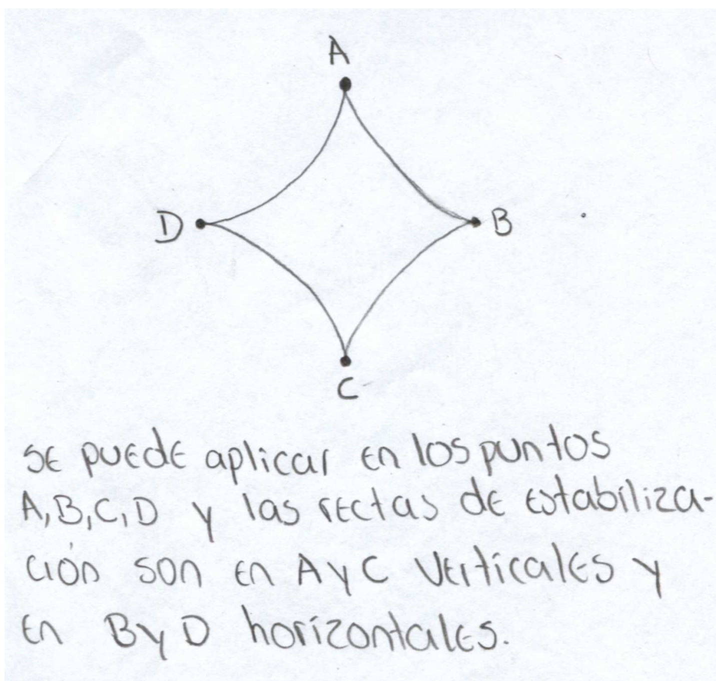


Figura 4.15: Curva propuesta por un alumno, en la que expresa que se puede trazar el haz de secantes, y predice correctamente si tiene recta tangente en un punto determinado y cual es su dirección.

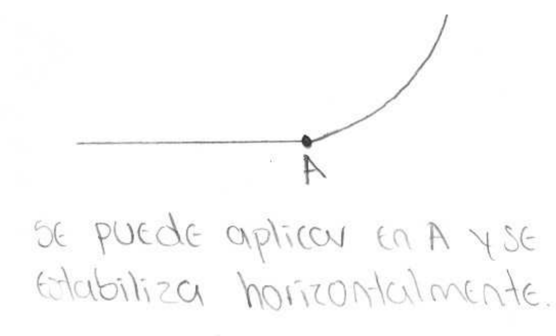


Figura 4.16: Curva presentada por un alumno, coincidente con una de las propuestas por Shlomo Vinner en el texto *Advanced Mathematical Thinking*.

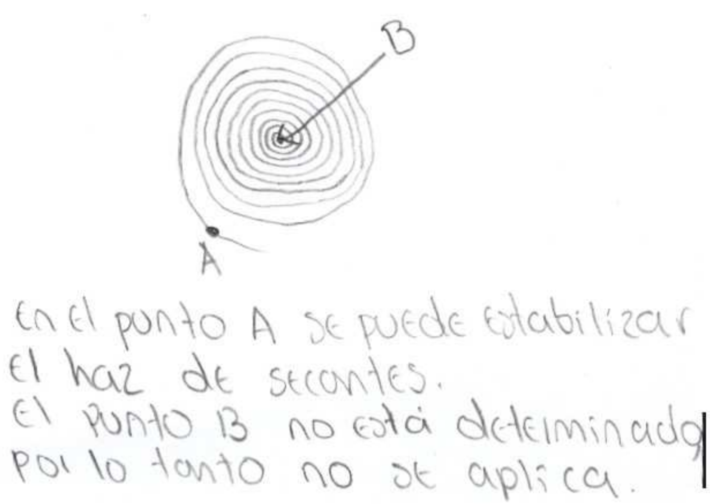


Figura 4.17: Curva presentada por la mayoría del grupo de alumnos, donde coinciden en los puntos donde se puede y no se puede aplicar el mecanismo del haz de secantes.

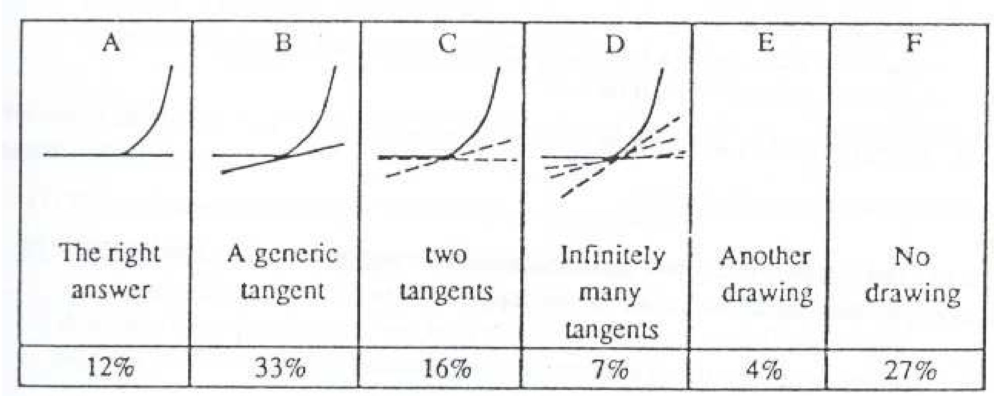


Figura 4.18: Tabla de distribucion que indica el porcentaje de los alumnos y el tipo de respuesta que presentaron durante la entrevista.

Así mismo, la curva mostrada en la Figura 4.17 (p. 100), propuesta por la mayoría del grupo de alumnos, permite inferir que están empleando el mecanismo de manera correcta, ya que mientras no puedan establecer la posición del punto fijo dado no es posible determinar la recta tangente y en consecuencia no pueden predecir la dirección de la misma, además, los alumnos que han intentado realizar el proceso de aproximación expresan “que se han trazado muy pocas secantes, y que debido al “embudo” que se forma alrededor del punto, las secantes cambian constantemente de dirección y que para determinar la dirección de la tangente, se tendrían que trazar un número mayor de secantes”, pero en este caso no es posible obtener visualmente la respuesta, lo que les llevó a admitir que no pueden deducir la existencia de la recta tangente en ese punto a partir del mecanismo del haz de secantes.

Finalmente, se puede afirmar que el grupo de alumnos, cuando se les pide trazar secantes que pasen por el punto dado y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él y existe una recta de estabilización, expresan que: “La recta tangente es el límite del haz de secantes”. Con esta respuesta u otras equivalentes, manifiestan que hacen un uso riguroso del lenguaje y entienden, que la tangente a una curva en un punto, cuando existe, es el final de un proceso de aproximación infinito, además, están manifestando que su razonamiento es avanzado respecto del concepto de tangente a una circunferencia en un punto, ya que han hecho una cadena de elaboraciones mentales que les permite percibir este concepto como un proceso dinámico (paso al límite).

Es importante resaltar que el lenguaje utilizado en la respuesta es una manifestación de la integración del concepto-imagen y el concepto definición de tangente que el alumno ha asimilado hasta el momento. Según Esteban ([12], p. 106)

Un estudiante no progresará desde el Nivel II al Nivel III (ni al IV) mientras

> mantenga dualidades entre el concepto imagen (la progresión de las secantes que pasan por un punto A de la curva y por otros puntos situados sobre la curva cada vez mas cercanos a A) y el concepto definición (reconocer la tangente como el límite del haz de secantes, es un proceso infinito). El nivel de razonamiento que permite la compresión de los conceptos avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre concepto imagen y concepto definición. La plena integración entre los conceptos intuitivos estáticos (tangente a una circunferencia) con los dinámicos (aproximación infinita mediante el haz de secantes) caracteriza el acceso al Nivel III.

Con las actividades propuestas para esta fase se logró recapitular todo el proceso desarrollado hasta ese momento, y con el análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las actividades presentadas, se puede concluir que se obtuvo una mejoria notable en el uso del lenguaje, pues las relaciones que utilizaron en sus mapas conceptuales y las expresiones verbales que emplearon para definir los conceptos, son una muestra del cambio conceptual y de la ampliación de su red de relaciones.

Fase 4. Orientación libre

En esta fase de aprendizaje los alumnos evidencian que han desarrollado e interiorizado el concepto objeto de estudio, ya que presentan en forma precisa la solución de los problemas, además, son capaces de construir otras soluciones a problemas ya conocidos, logrando simultáneamente relacionar los conceptos aprendidos de una manera adecuada con otros conceptos previamente presentados. En particular, las actividades de esta fase de aprendizaje, se pueden clasificar de acuerdo a sus propósitos en tres grupos, así:

Grupo 1. Buscar que el estudiante emplee el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente, en situaciones concretas.

Grupo 2. Implementar correctamente el infinito potencial como eje central del proceso.

Grupo 3. Generar nuevas situaciones que conlleven de una forma u otra a la puesta en práctica del concepto objeto de estudio.

Y para cada uno de ellos se obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo 1. Consta de las actividades 1, 2 y 3 de esta fase de aprendizaje (Ver Capítulo 3, p. 74), y en el análisis de las situaciones propuestas, se prueba que los alumnos adquirieron la construcción e interpretación del concepto matemático trabajado. Esto se demuestra en las observaciones hechas por ellos cuando enuncian algunas de las propiedades de la recta tangente, tales como: "ser única en un punto dado de la curva, debido a que el haz de secantes solo se estabiliza en una sola recta", esta afirmación, tal y como lo describe Esteban ([12], p. 107):

> En el Nivel III es capaz de demostrar que la tangente a una curva, suponiendo que exista, será la única recta que, precisamente, es el límite ("el final") del haz de secantes.

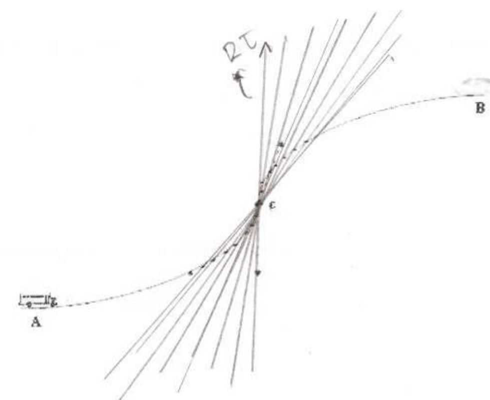
es una característica propia del Nivel III, del modelo educativo de van Hiele, para este concepto.

Las Figuras 4.19 (p. 104), 4.20 (p. 105), 4.21 (p. 105) y 4.22 (p. 106), muestran, además, de la afirmación anterior otras respuestas que exhiben claramente, el tipo de razonamiento propio del nuevo nivel.

Así mismo, el progreso hacia el Nivel III presupone experiencias en las que se compruebe la necesidad de verificar que la sola apariencia no describe el concepto de tangente. Esto se manifiesta en 4.19 (p. 104), cuando los alumnos reconocen la estabilización del haz de secantes y afirman que la tangente debe cumplir una propiedad adicional, que es la que realmente la caracteriza, que es ser el final de un proceso de aproximación y en 4.21 (p. 105), cuando reconocen la necesidad de llevar a cabo el proceso para distinguir aquellas rectas que son tangentes a una curva en un punto dado, de las que no lo son.

Grupo 2. Consta de las actividades 4, 5 y 6 de esta fase de aprendizaje (Ver Capítulo 3, p. 74), y durante el análisis de las respuestas a las situaciones propuestas en ellas, se concluye, que los alumnos adquirieron el manejo conceptual del infinito potencial y se apropiaron de los esquemas necesarios para este concepto. Es importante resaltar que las contradicciones generadas por este concepto son difícilmente superables, pero para este grupo de alumnos pasaron a ser aspectos normales dentro de su proceso académico.

Para probar este hecho, se emplean las afirmaciones utilizadas por el grupo alumnos, donde indican que: "teóricamente siempre es posible aproximarse a una cantidad dada, tanto como se quiera. Desde el punto de vista práctico, debido a las limitaciones de los aparatos de medición utilizados, la aproximación es siempre restringida", "los procesos de aproximación son infinitos, y se pueden presentar para describir algo muy grande o muy pequeño, cuando se trata de analizar algunos de las actividades propuestas" y "hay una seria diferencia entre los procesos matemáticos que conducen a la noción de aproximación y los procesos matemáticos que conducen a cálculos exactos", en concordancia con el lenguaje propio de este nivel, tal y como se ilustra en las Figuras 4.23 (p. 107) y 4.24 (p. 108),



- La única forma que yo conozco es trazar el método del haz de secantes, ya que si los dos abogados tuvieran razón, este método se debería estabilizar en dos rectas, lo cual es falso.
  El abogado defensor puede alegar que el haz de secantes se estabiliza en una sola recta y esta es la tangente.

- Si nos señalan por donde salio cada carro, entonces el método de haz de secantes nos diría cual de los dos carros se salio y cual no. Podría garantizar que el método de haz de secantes es el correcto para este caso, ya que si hablamos de forma tangencial, hablamos de la tangente y la mejor forma de sabe cual es la tangente es el método del haz de secante.

Figura 4.19: Análisis que realiza un alumno a la Actividad 1, de la fase de Orientación libre, donde expresa la unicidad de la recta tangente a través del haz de secantes.

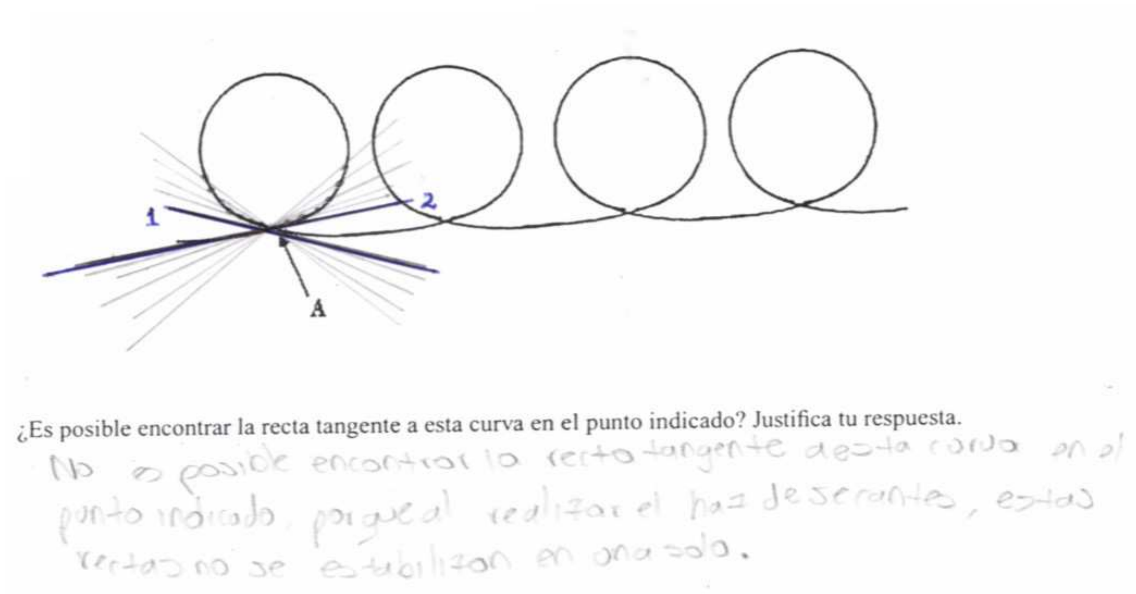


Figura 4.20: Análisis que realiza un alumno a la Actividad 2, de la fase de Orientación libre, donde reconoce la unicidad en la estabilización del haz de secantes.

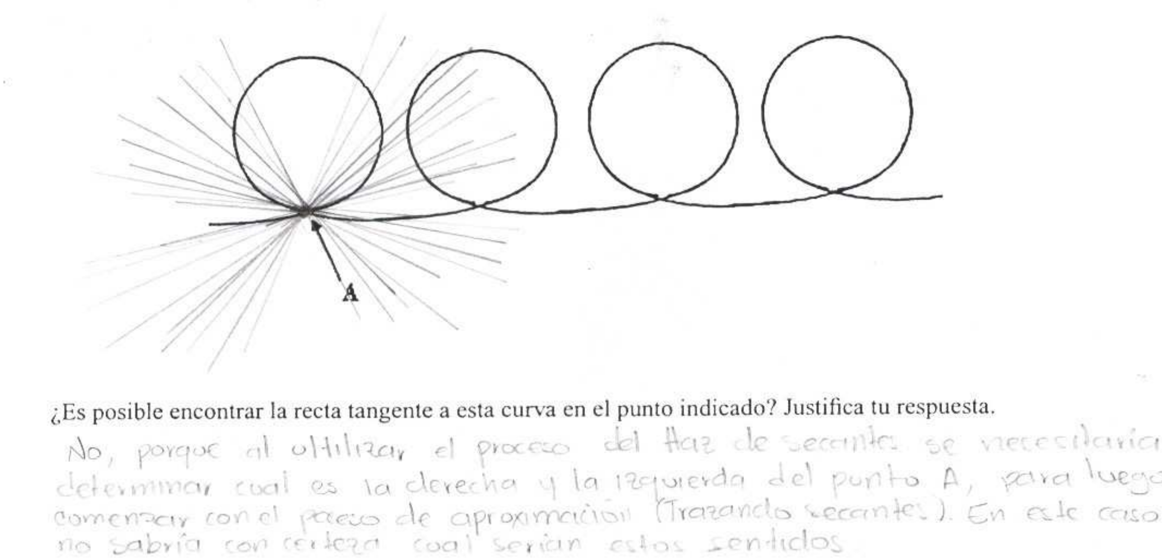
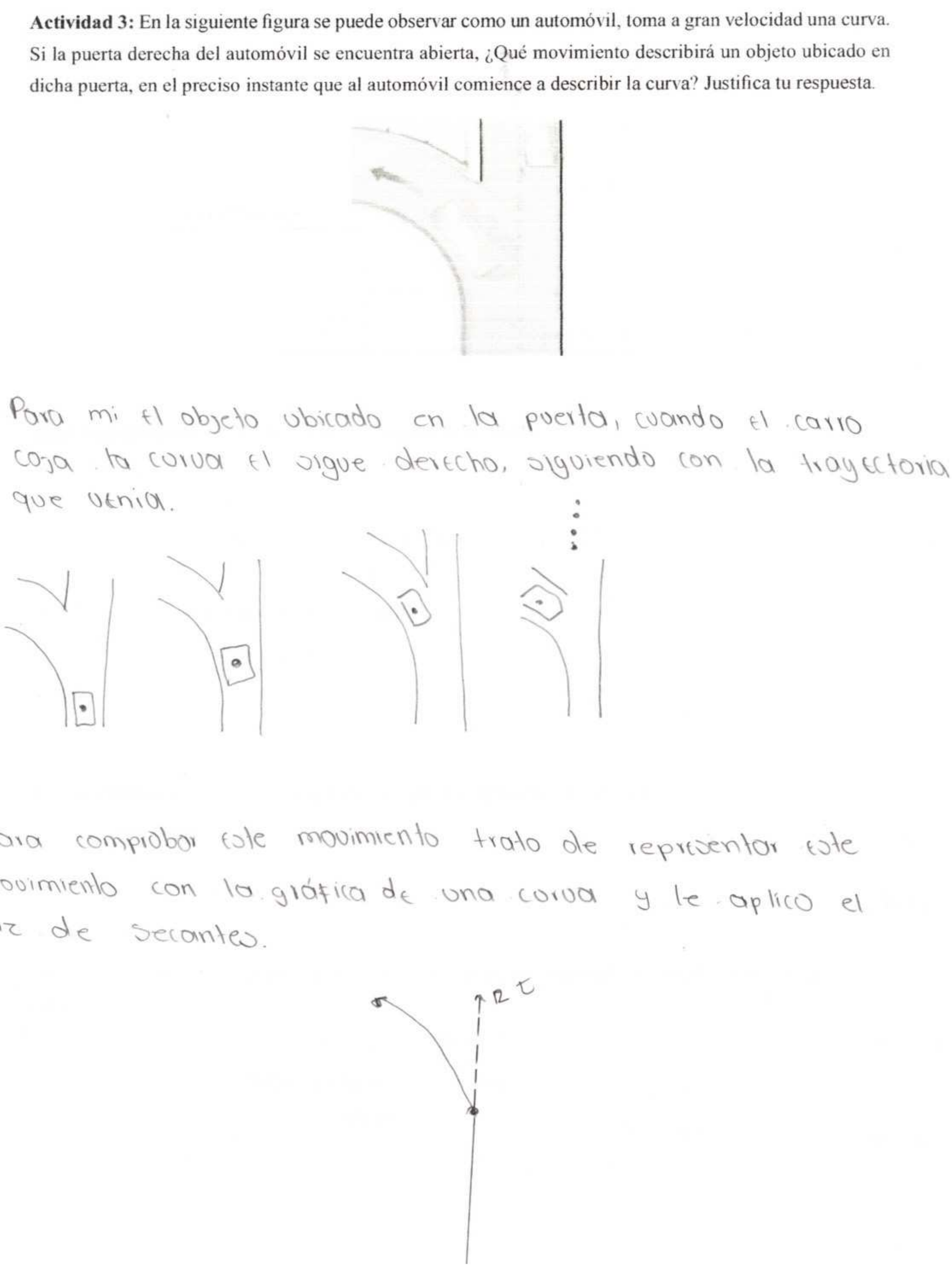


Figura 4.21: Análisis que realiza un alumno a la Actividad 2, de la fase de Orientación libre, en donde evidencia el dominio e interpretación correcta en el uso del mecanismo.



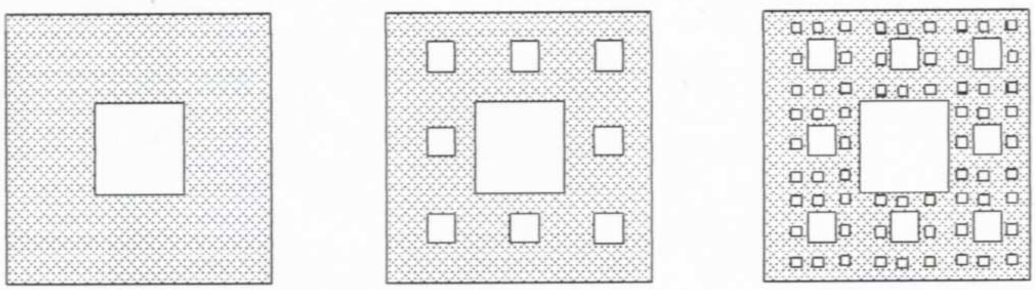
Actividad 3: En la siguiente figura se puede observar como un automóvil, toma a gran velocidad una curva. Si la puerta derecha del automóvil se encuentra abierta, ¿Qué movimiento describirá un objeto ubicado en dicha puerta, en el preciso instante que al automóvil comience a describir la curva? Justifica tu respuesta.

Para mi el objeto ubicado en la puerta, cuando el carro coja la curva el sigue derecho, siguiendo con la trayectoria que venía.

Para comprobar este movimiento trato de representar este movimiento con la gráfica de una curva y le aplico el hoz de secantes.

Figura 4.22: Análisis que realiza un alumno a la Actividad 3, de la fase de Orientación libre, donde realiza la indentificación de un objeto físico y lo transforma en un objeto matemático para analizarlo.

Actividad 5: La carpeta de Sierpinski, se forma quitando la novena parte de un cuadrado de lado 1. Después se suprimen los centros de los ocho cuadrados restantes, que son más pequeños, y así sucesivamente. La figura anexa muestra los tres primeros pasos de este procedimiento.



Según el proceso descrito anteriormente

¿Qué podrías decir acerca de la suma de las áreas de los cuadrados que se quitaron?

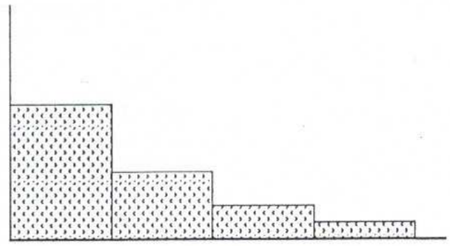
Si sumaríamos el area de los cuadros que quitamos, se tendería a tener el area del cuadrado Inicial.

¿Qué pasa con al área de la carpeta de Sierpinski?

Como cada vez le quitamos un pedazo del área, al final el área tendería a ser cero.

Figura 4.23: Análisis de la Actividad 5, de la fase de Orientación libre, donde se evidencia que los alumnos realizan los procesos de separación de lo exacto frente a lo aproximado. El proceso de aproximación es un proceso infinito que se va construyendo (infinito potencial).

Actividad 4: La imagen que se muestra a continuación, describe el siguiente proceso: se toma un rectángulo y con igual base, pero con la mitad de su altura se construye el siguiente, y así sucesivamente se continúa con el proceso.



¿Qué pasa con el área de los rectángulos? Justifica tu respuesta.

Va disminuyendo, porque la altura cada vez tiende a ser cero la base es constanta, lo que varía es la altura. Pero no podría afirmar que el Área va a ser cero; solo que el área tiende a ser cero amedida que la Altura se acerca a cero.

¿Puedes graficar este proceso indefinidamente?

No, porque los materiales no lo permitirían, y además no podría visualizar el area después de un tiempo de haber continuado con el proceso. (No se podría determinar exactamente el area)

Si tu respuesta anterior es no, ¿De qué manera puedes representar esta figura?

Solo mentalmente,

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna otra de las actividades realizadas con cual lo harías y porque?

Se relaciona con actividades como la del hilo, las rectas; el area del cuadrado, las curva y los puntos, puen en todas se maneja el concepto de aproximación. Además en cada una de ellas nos vemos limitados en el proceso, yaq' los materiales no permiten continuar en determinado instante.
De una u otra manera la figura que quedaba a los lados o por dentro, tendía aser la figura completa, o en otros casos a un solo punto o segmento.

Figura 4.24: Análisis de la Actividad 4, de la fase de Orientación libre, donde se observa la relación que el alumno hace entre el proceso de aproximación y el infinito potencial.

Grupo 3. Consta de la Actividad 7 y en ella los alumnos proponen nuevas actividades, en las que se encuentra involucrado el concepto de aproximación local, utilizando herramientas computacionales, textos universitarios y experiencias de docentes calificados en algunas áreas del saber. Las Figuras 4.25 (p. 109), 4.26 (p. 110), 4.27 (p. 110) y 4.28 (p. 111), muestran los aportes que representan la mayor parte de las situaciones propuestas por el grupo de alumnos.

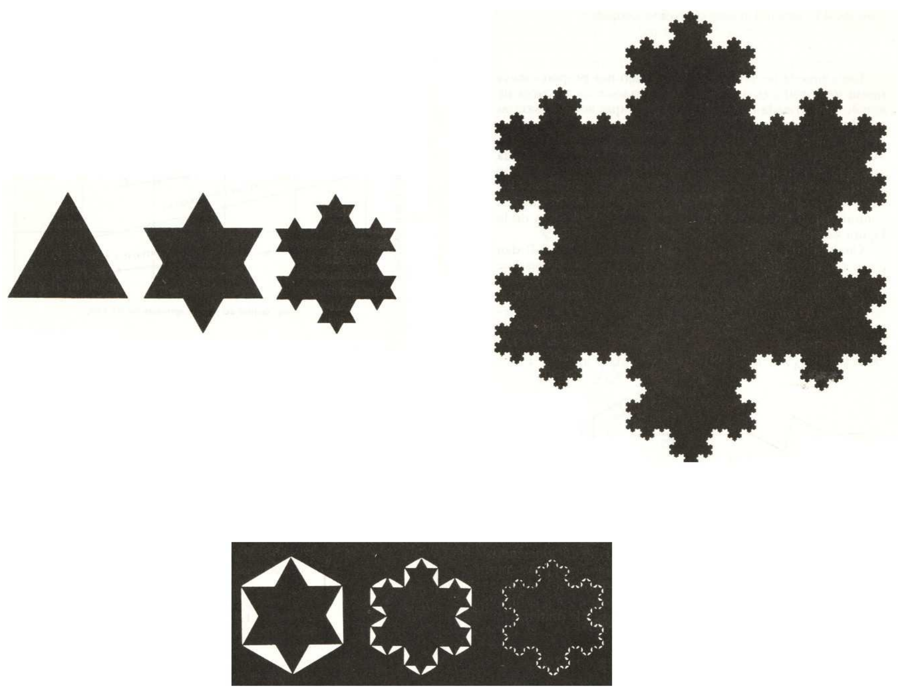


Figura 4.25: Curva presentada por uno de los alumnos, con el propósito de manifestar la elaboración de un proceso que sigue indefinidamente (construcción de una longitud infinita partiendo de una finita).

La siguiente es una lectura anexa al informe, en relación a la Figura 4.25 (p. 109)

> La curva descrita anteriormente, es una curva a la cual no se le puede hallar su longitud. La construcción de esta, parte de una figura en forma de triángulo equilátero. A continuación, en el tercio central de cada uno de los tres lados, se dispone a cabo en forma de triángulo ($\triangle$), con los lados iguales a un tercio, obteniéndose un hexágono regular estrellado o estrella de David. Si sigue el mismo proceso indefinidamente, se obtiene como resultado el diagrama mostrado a la derecha de la figura.

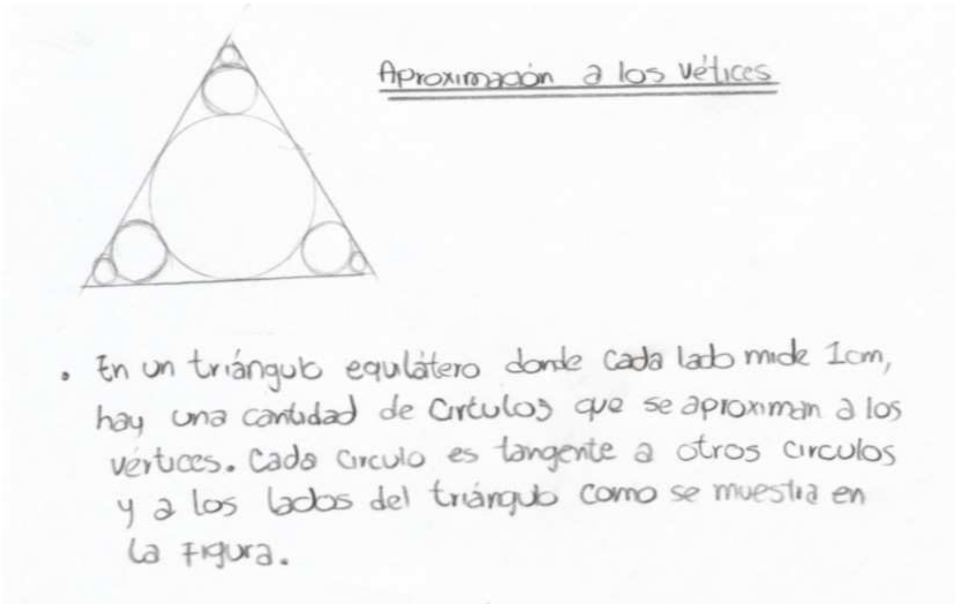


Figura 4.26: Figura presentada por uno de los alumnos, con el propósito de manifestar el concepto de aproximación, a través de aproximaciones de círculos en los vértices de un triángulo.

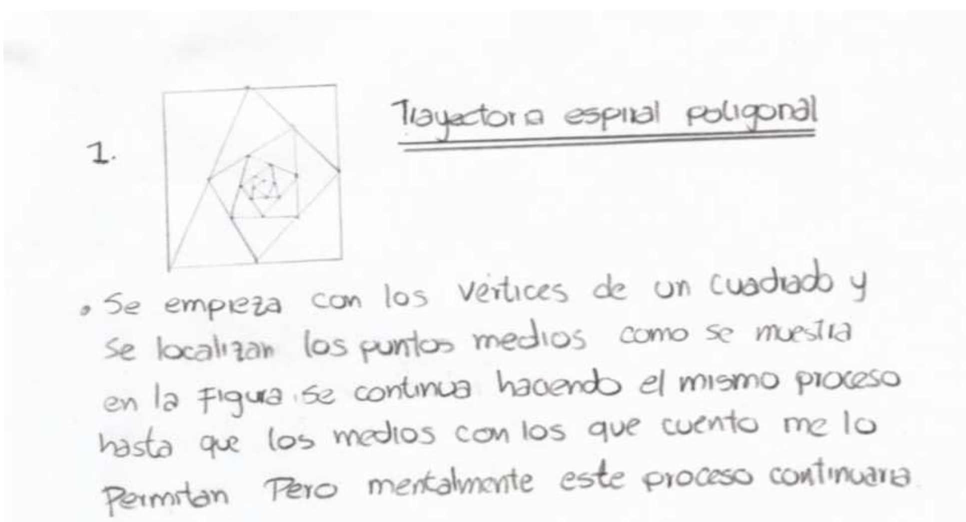


Figura 4.27: Curva presentada por uno de los alumnos, con el propósito de manifestar el concepto de aproximación, a través de una espiral poligonal.

La muerte como eternidad

En una novela de Arthur Schnitzler (Flight into Darkness, p. 29-30. Simon and Schuster, New York, 1931), uno de los personajes, el Dr. Leinbach recurre al infinito para demostrar que la muerte no existe: «Leinbach ha descubierto una prueba de que la muerte no existe. Más allá de toda duda, ha declarado, que en todo tipo de muerte, no sólo en la muerte por inmersión, se vuelve a vivir en el último momento toda la vida pasada, a una velocidad inconcebible para los demás. Esta vida recordada debe tener también un último momento, y este último momento su propio último momento y así sucesivamente. Por lo tanto morir era la eternidad. De acuerdo con la teoría de límites uno se aproxima a la muerte, pero nunca la alcanza » (Bernardet, p. 72)

Figura 4.28: Lectura presentada por uno de los alumnos, en donde se observa claramente, la noción de aproximación.

Un aspecto relevante de esta lectura, es el hecho de que los alumnos buscaron situaciones donde aparece el concepto de aproximación local, en ambientes no matemáticos. Esto genera un alto grado satisfacción al grupo de investigadores por la variedad de áreas del conocimiento en las cuales el concepto objeto de estudio fue aplicado.

Con las respuestas dadas, a las actividades propuestas para esta fase de aprendizaje, se puede afirmar que el grupo de alumnos ha adquirido el lenguaje propio del nuevo nivel de razonamiento, emplea correctamente el mecanismo del haz de secantes no solo en situaciones matemáticas, sino en situaciones presentadas en otros contextos, así mismo, lo emplea para determinar si una recta es tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella e identifica claramente en qué curvas lo pueden aplicar y en cuales no y porqué.

Debido a los logros mencionados anteriormente, se infiere que dicho grupo está preparado, para pasar a la aplicación de las actividades de la última fase del proceso, sin necesidad de regresar a ninguno de los alumnos a la fase 2.

Fase 5. Integración

Una de las características más importante del aprendizaje significativo es que produce una fuerte interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y el nuevo conocimiento, la cual no debe confundirse con una simple asociación, de tal modo que éstos adquieren un significado y puedan ser integrados a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial, favoreciendo la diferenciación, evolución y estabilidad de los conceptos estudiados.

En atención a lo anteriormente descrito y por la naturaleza de esta fase, se muestra el último de los mapas conceptuales realizado en forma colectiva por la totalidad del grupo de alumnos participantes en el proyecto. En él, se puede observar claramente la evolución del lenguaje utilizado, la forma como elaboran las relaciones y como son más precisos en la implementación del lenguaje adquirido. Cabe resaltar que este mapa puede servir como base de un posible módulo de instrucción para el siguiente nivel, esto en palabras de Corberán ([7], p. 37), sería "si la aplicación se realizó en un modo vertical, la fase de integración se puede solapar con la fase de información del nuevo nivel". La Figura 4.29 (p. 113), muestra las relaciones hechas en esta fase de aprendizaje.

En conclusión, se tiene que después de aplicado a satisfación el módulo de instrucción y analizados los resultados obtenidos, se logró que el 97.43 %, correspondiente a 38 alumnos de 39 del grupo experimental, haya progresado[3] al Nivel III de razonamiento del modelo educativo de van Hiele. La siguiente sección, está dedicada a analizar los resultados obtenidos por el alumno que no progresó en su nivel de razonamiento frente al concepto objeto de estudio.

4.4.2. Resultados obtenidos por el alumno, perteneciente al grupo experimental, que no fue clasificado en el Nivel III de razonamiento

Este análisis, pretende confirmar la clasificación obtenida para el alumno que no progresó en su nivel de razonamiento, es decir, concluir si fue bien clasificado en el Nivel II, o por el contrario con las respuestas presentadas en las actividades y el lenguaje utilizado en la solución de las mismas, el alumno debe ser clasificado en el Nivel III. Cabe resaltar, que en el caso de confirmarse, que la clasificación del alumno es el Nivel II, no se buscarán las causas del no progreso del alumno, ya que este no es el objetivo de esta investigación.

Para realizar el análisis de las actividades presentadas por, A24[4], no se seguirá el mismo esquema del análisis implementado para los alumnos que progresaron al Nivel III, sino que se realizará a la luz de los descriptores de separación, presentados como objetivos en el Capítulo 3, sección 3.2 (p. 52) y a la implementación del lenguaje adquirido, que como fue señalado en el Capítulo 1, sección 1.6.1 (p. 33), constituye uno

[3]Para obtener más información acerca de la clasificación de los alumnos, se debe observar el Apéndice A (p. 141)

[4]Esta es la etiqueta que el alumno posee dentro de la notación utilizada para esta investigación.

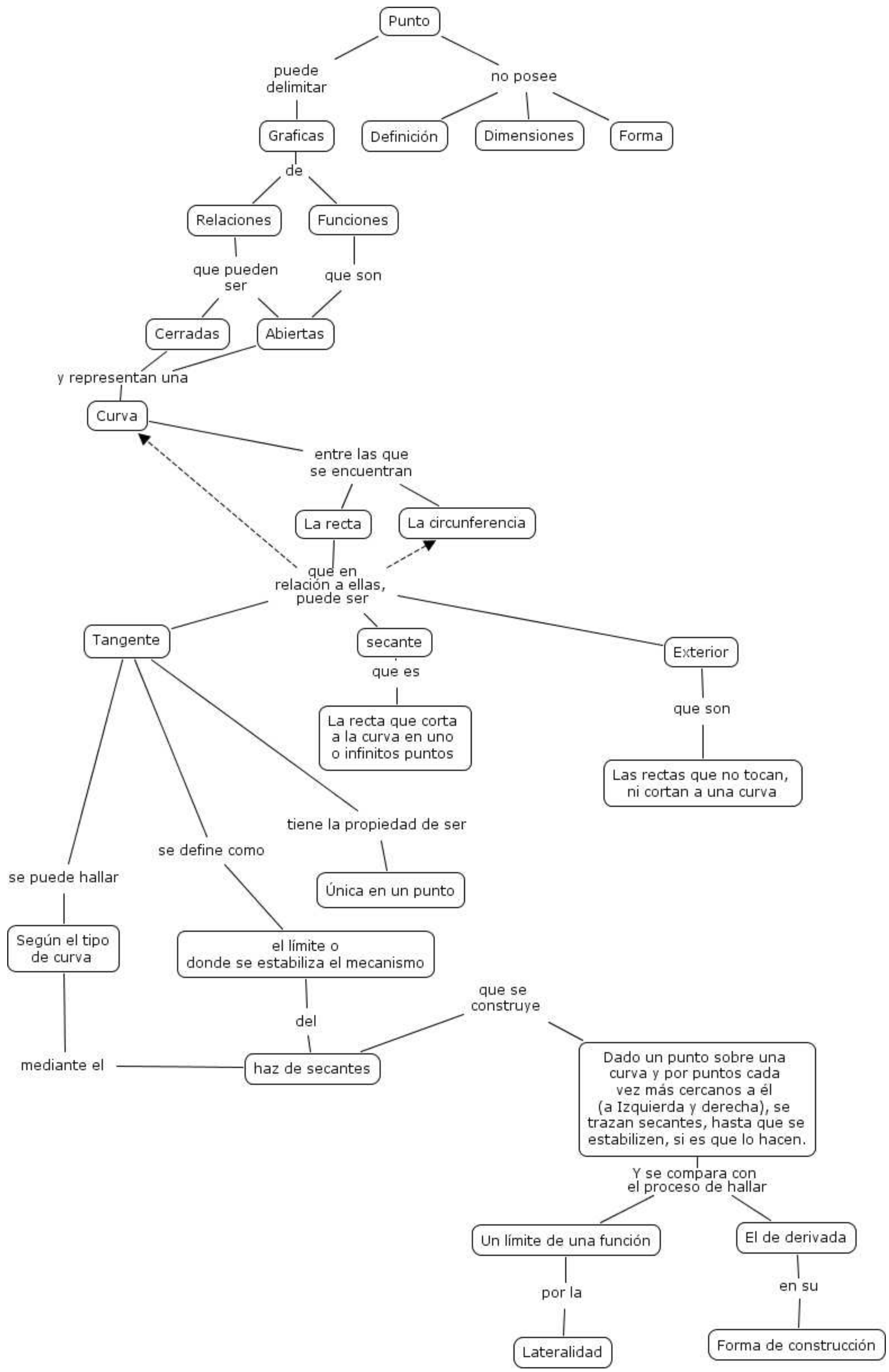


Figura 4.29: Mapa conceptual grupal, realizado para la fase de integración.

de los factores de mayor importancia en la detección del nivel de razonamiento en el que se encuentra un alumno, frente a un concepto específico.

Análisis

Como se indicó en la sección 4.4.1 (p. 83), la primera Actividad que se realizó con el grupo de estudiantes fue la elaboración de un mapa conceptual, con los conceptos de punto, curva, recta y tangente. La Figura 4.30 (p. 114), muestra el mapa conceptual realizado por A24, para la fase de información.

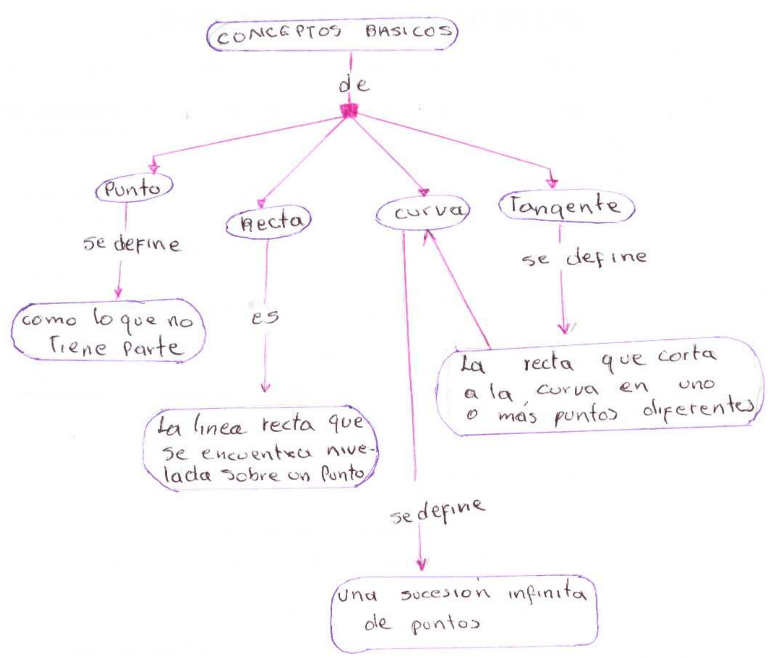


Figura 4.30: Mapa conceptual realizado, por A24 para la fase de Información.

Es importante anotar, que aunque este mapa también fue clasificado como debe ser reformulado[5], las relaciones aquí establecidas, están mostrando un alto grado de desintegración de los conceptos básicos, que el alumno posee en su estructura cognitiva al inicio del proceso y así mismo establece un punto de partida que es, el no reconocimiento de un concepto fundamental "el de punto" para el resto de los conceptos. Esto se evidencia por la necesidad del alumno de comenzar el mapa conceptual con la palabra "conceptos básicos", el cual no es un concepto y por lo tanto no debería ir dentro de la estructura del mapa.

[5]Término definido en el Capítulo 4, sección 4.4.1 (p. 85)

En esta misma dirección, se encuentra el mapa realizado para la fase de Orientación Dirigida, donde se supone que el alumno habría mejorado, el lenguaje propio del concepto de aproximación local, pero como se puede observar en la Figura 4.31 (p. 115), no emplea correctamente los términos dados, y los relaciona de tal manera, que no muestra ningún orden en su estructura cognitiva. Además, a diferencia de sus compañeros, este alumno no logra reformular y ampliar su red de relaciones válidas frente al concepto.

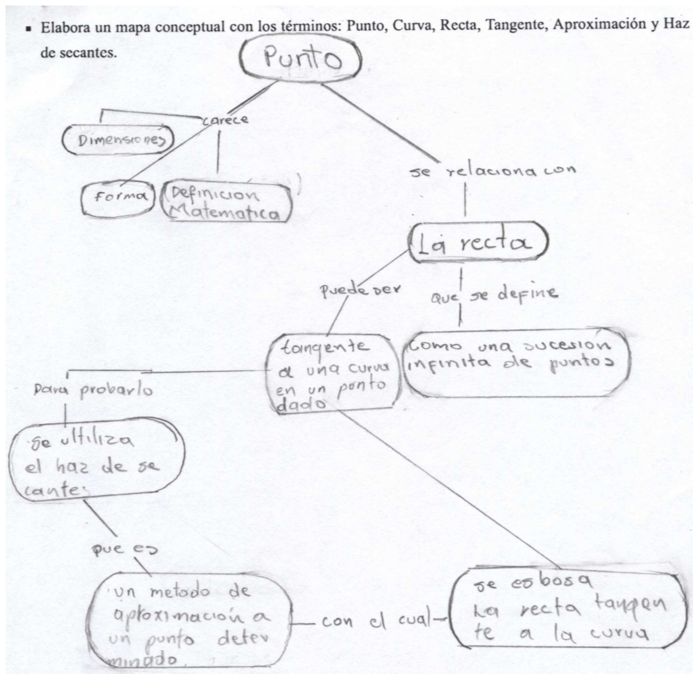


Figura 4.31: Mapa conceptual realizado, por A24 para la fase de Información.

Es importante resaltar, que dentro del mapa conceptual se mencionan los términos "haz de secantes", "aproximación" y se establece una posible relación entre la recta tangente y el mecanismo haz de secantes, pero esto no basta para asegurar que el alumno, tiene clara esta relación. Para ello, se observan las actividades de la fase 2, y se encuentra que:

i. Tiene dificultades con la construcción y apropiación del infinito potencial.

ii. Reconoce los procesos de aproximación local, inmersos en algunas de las actividades, pero no es capaz de relacionarlos en contextos similares.

iii. El comportamiento gráfico de los procesos dados, es el que predomina al momento de dar sus respuestas.

Esto se evidencia en las Figuras 4.32 (p. 116), 4.33 (p. 116) y 4.34 (p. 117), correspondientes a las respuestas dadas por el alumno, a las actividades 1, 5 y 6 de la fase de Orientación dirigida.

- Este proceso puede parar. Justifica tu respuesta.

A medida de que el segmento se va haciendo mas pequeño se dificulta mucho mar seguirlo dividiendo, y por esto parece parar.

- ¿Qué resultaría si volvieras a unir los trozos cortados?

resultaria la misma cuerda.

Figura 4.32: Respuesta dada a la pregunta 4, de la Actividad 1, de la fase de Orientación dirigida, en donde no separa en su mente los procesos físicos de los matemáticos.

- Consideras que este proceso puede terminar.

si porque el pedulo despues de osilar queda en un momento donde esta en reposo y no se mueve mas

- Describe con tus propias palabras ¿Qué pasa con el movimiento del péndulo?

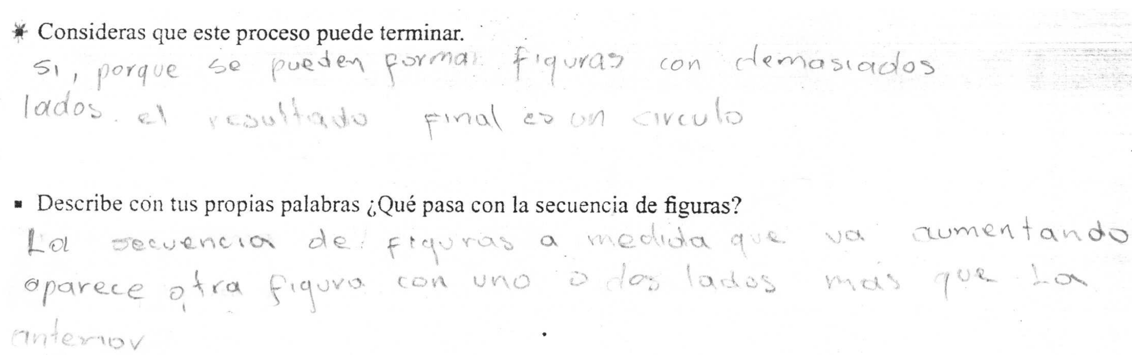
el péndulo parte desde una posicion y empieza hai hacer osilaciones, que con el tiempo se hacen mas cortas, hasta que no tiene movimiento.

- Puedes relacionar este movimiento con alguna de las actividades realizadas anteriormente. Si tu respuesta es afirmativa escribe el número de la actividad y representa o describe la similitud entre ellas.

No, Porque el proceso del péndulo tiene fín

Figura 4.33: Respuesta dada a la Actividad 5, de la fase de Orientación dirigida, donde no se relacionan los procesos de aproximación local con los movimientos físicos en ambientes ideales.

Pero, debido a que este análisis solo corresponde a las dos primeras fases, sería aventurado determinar el nivel de razonamiento en que se encuentra el alumno. Para poder dar una apresiación más acertada se deben analizar cuidadosamente las dos fases



- Consideras que este proceso puede terminar.

si, porque se pueden formar figuras con demasiados lados. el resultado final es un circulo

- Describe con tus propias palabras ¿Qué pasa con la secuencia de figuras?

La secuencia de figuras a medida que va aumentando aparece otra figura con uno o dos lados más que La anterior

Figura 4.34: Respuesta dada a la Actividad 6, de la fase de orientación dirigida, donde se observa claramente que no reconoce la diferencia entre las términos “aproximarse”, “tiende” o “se acerca” con el término “es”, el cual indica, de acuerdo con el concepto de límite, el final de un proceso.

siguientes, Explicitación y Orientación libre, pues en ellas, donde realmente mostrará si hubo una evolución en su nivel de razonamiento o no.

Para la fase 3, Explicitación, se enunció en el Capítulo 4, sección 4.4.1 (p. 94) la existencia de tres etapas, que se pueden resumir así: recapitulación del proceso de investigación, reconocimiento visual del manejo del mecanismo en las curvas básicas y en las curvas patológicas, donde se mostró como los alumnos participantes del proyecto lograron avances significativos dentro del proceso, en relación al manejo del lenguaje, el significado que se le da al mismo (sección 4.4.1, (p. 94)), el reconocimiento de las carácteristicas básicas del proceso de construcción de la recta tangente y el manejo del infinito potecial (sección 4.4.1, (p. 94)) y la correcta implementación del mecanismo seleccionado para el análisis de las curvas patológicas, sus consecuencias y formas de aplicación (sección 4.4.1, (p. 95)).

Cabe resaltar que la recapitulación de todo el proceso fue la primera Actividad y por ende se esperaban mejores resultados en forma individual, pero al analizar el trabajo presentado por este alumno, se encuentra que el mapa conceptual realizado, sigue manteniendo dificultades en las relaciones hechas, ya que no hay coherencia entre las afirmaciones y además de esto su lenguaje no es el apropiado para esta fase de aprendizaje, lo anterior se puede observar, comparando la Figura 4.13 (p. 97), correspondiente a otro alumno que progresó al Nivel III, con la Figura 4.35 (p. 118) que corresponde al mapa conceptual presentado por él, en esta fase de aprendizaje.

Además de esto, al resolver la Actividad 4 de esta fase de aprendizaje, donde se les pide que tracen curvas diferentes a las vistas dentro del proceso, a las cuales se les pueda aplicar el haz de secantes para determinar la recta tangente a la curva en un

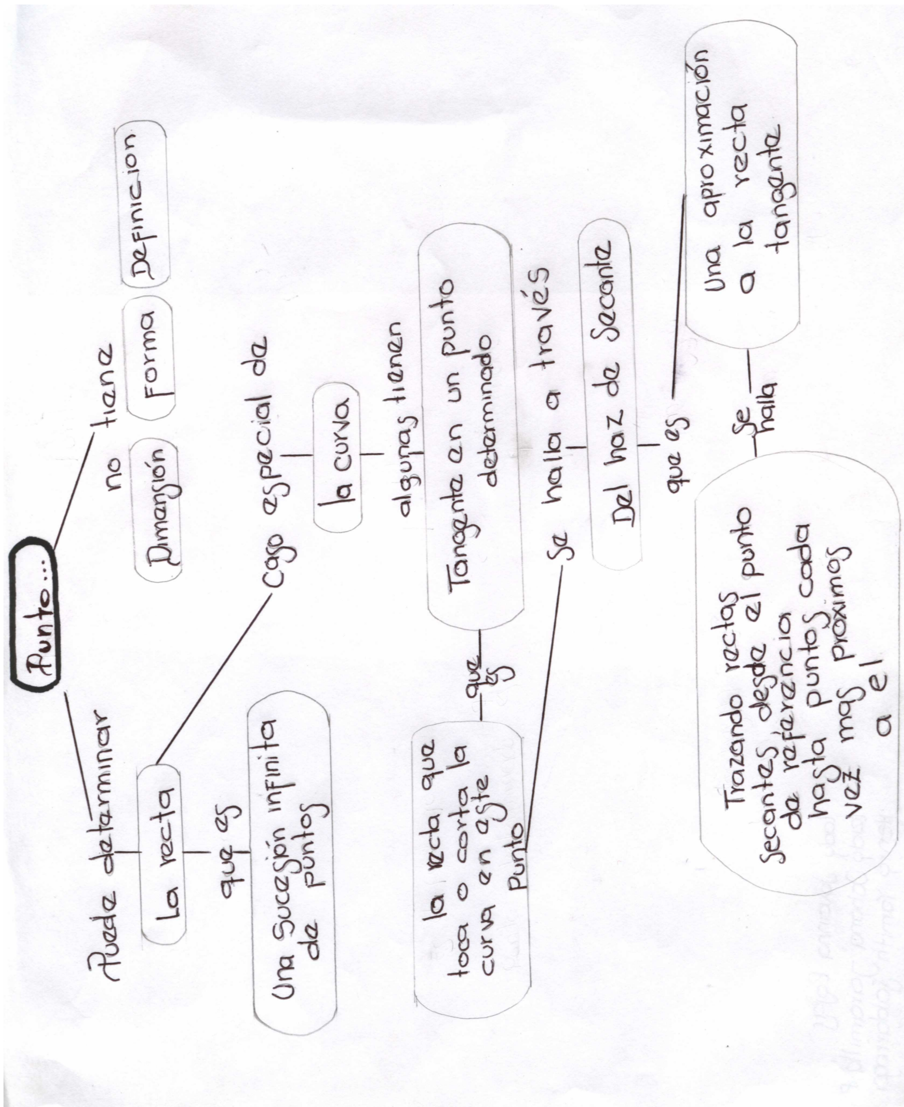


Figura 4.35: Mapa conceptual presentado por A24, para la fase de Explicitación.

punto señalado por ellos y otras en las que no se pueda aplicar el mecanismo, las cuales se muestran en la Figura 4.36 (p. 120) y de la cual se obtienen los siguientes resultados:

1. Generaliza que a todas las funciones por tramos, como curvas a las que no es posible encontrar su recta tangente en un punto dado sobre ella, y trata de mostrarlo a través de la curva $y = ||x||$ (mayor entero) y señala el punto terminal derecho, como aquel punto en el cual no existe la tangente, lo cual es falso, porque en ese punto la tangente existe y es horizontal.

   Lo anterior demuestra que no está utilizando el haz de secantes como mecanismo para determinar si una recta es tangente o no a una curva y solo razona a partir de lo que observa en la gráfica propuesta.

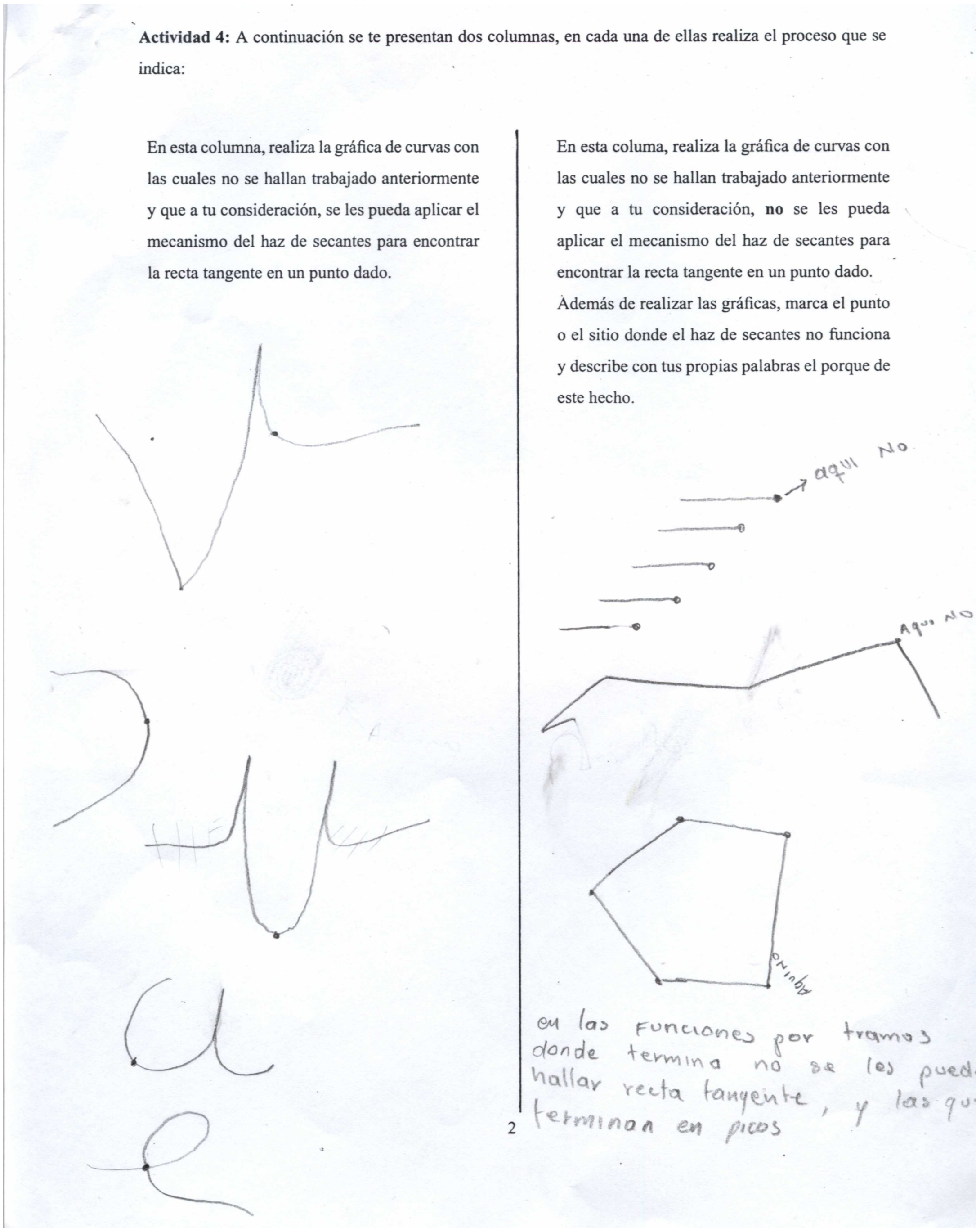
2. No genera nuevas situaciones, lo que muestra que solo reconce las curvas típicas, y cuando genera nuevas curvas, evidencia un mal manejo del mecanismo, pues presenta una curva, la última de la columna del lado izquierdo, donde marca un punto en el cual el mecanismo falla por no conocer la correcta aproximación a este.

Con esta información, se puede afirmar que el alumno no está mostrando un razonamiento avanzado respecto al concepto objeto de estudio, ya que no ha hecho una cadena de elaboraciones mentales que le permita percibir este concepto como un proceso dinámico, lo que le conduce a no comprender la formalización del concepto. Es por eso, que este alumno mantiene la dualidad entre el concepto imagen y el concepto definición de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, descrito en el Capítulo 4, sección 4.4.1 (p. 101).

A partir de lo anterior, se puede afirmar que el alumno no ha progresado en su nivel de razonamiento, de acuerdo con los descriptores de separación. Este hecho se comprobará con el análisis de las actividades de las fase 4 realizadas por él y con la comparación de los resultados obtenidos por los alumnos promovidos al Nivel III (Ver Capítulo 4, sección 4.4.1 (p. 102)), donde muestran importantes avances en el manejo del lenguaje y así mismo evidenciaron como utilizan el manejo del mecanismo seleccionado, en situaciones concretas.

El alumno, A24, dentro de la fase de orientación libre, mostró que no establece la relación existente entre el manejo del mecanismo y su implementación en dichas situaciones, un ejemplo de esto, es cuando da respuesta a la Actividad 3, de esta fase de aprendizaje, tal como se observa en la Figura 4.37 (p. 121)

Dicho alumno, al dar respuesta a las preguntas formuladas, en este caso en un contexto diferente, no inicia el proceso del haz de secantes para confirmar sus observaciones, más parece, que estuviera razonando a tavés de los procesos gráficos involucrados en las actividades, basándose sólo en la apariencia física, sin considerar la necesidad de ninguna propiedad adicional en la solución del mismo, es decir, como



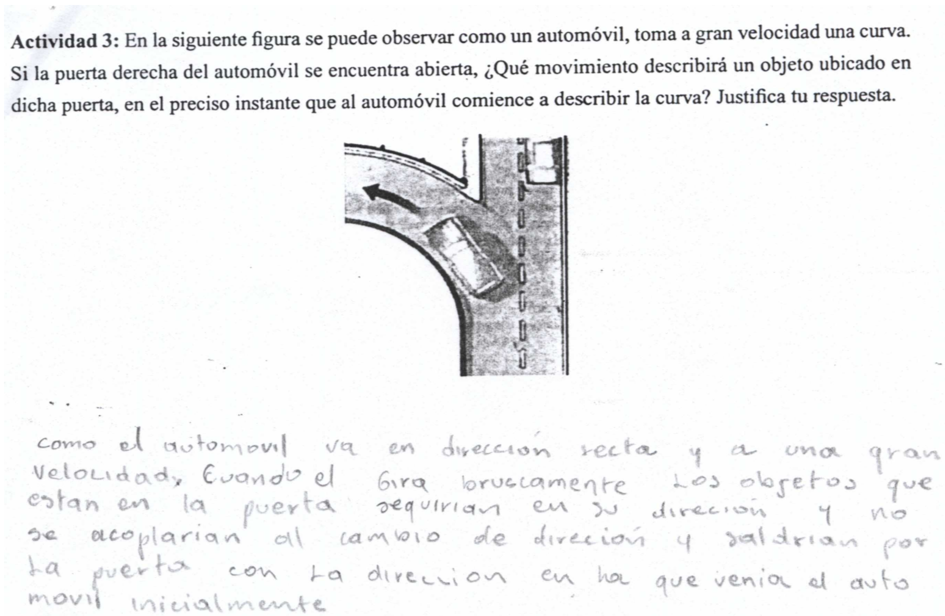
Actividad 4: A continuación se te presentan dos columnas, en cada una de ellas realiza el proceso que se indica:

En esta columna, realiza la gráfica de curvas con las cuales no se hallan trabajado anteriormente y que a tu consideración, se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado.

En esta columa, realiza la gráfica de curvas con las cuales no se hallan trabajado anteriormente y que a tu consideración, **no** se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado. Además de realizar las gráficas, marca el punto o el sitio donde el haz de secantes no funciona y describe con tus propias palabras el porque de este hecho.

2

Figura 4.36: Figuras presentadas por A24, para la fase de Explicitación, donde muestra que no comprende correctamente el manejo del mecanismo del has de secantes.


Actividad 3: En la siguiente figura se puede observar como un automóvil, toma a gran velocidad una curva. Si la puerta derecha del automóvil se encuentra abierta, ¿Qué movimiento describirá un objeto ubicado en dicha puerta, en el preciso instante que al automóvil comience a describir la curva? Justifica tu respuesta.

como el automovil va en dirección recta y a una gran velocidad, cuando el gira bruscamente los objetos que estan en la puerta seguirian en su direción y no se acoplarian al cambio de direción y saldrian por la puerta con la direccion en la que venia el auto movil inicialmente

Figura 4.37: Respuestas dadas por A24, para la Actividad 2, de la fase de orientación libre

el alumno no utilizó adecuadamente el mecanismo frente a estas nuevas situaciones, realmente no ha comprendido el concepto objeto de estudio.

4.4.3. Análisis de los resultados obtenidos por el grupo de control

El presente análisis, está basado en los resultados obtenidos por el grupo de control después de ser aplicado el test “Curvas y Tangentes”, tanto al inicio como al final de la intervención pedagógica, y se realizó con el fin de establecer cuales fueron las causas de la nueva ubicación de dicho grupo, respecto de los niveles I, II y III de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, frente al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

Así mismo, servirá como base para establecer una diferencia, si es que la hay, entre el razonamiento exhibido por los alumnos del grupo control y los del grupo experimental, frente al concepto objeto de estudio. Lo anterior se puede considerar como un criterio para sustentar la efectividad del módulo de instrucción.

Para dar comienzo al análisis de los resultados de este grupo, se muestra en la Figura 4.38 (p. 122) el patrón ideal de respuestas dados por Esteban en su tesis doctoral, para el test "Curvas y Tangentes", y posteriormente se presenta una breve descripción en la distribución del mismo.

	Bloque 1							Bloque 2									Bloque 3								
Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Respuesta	a	b	c	d	a	c	d	b	b	c	b	d	d	a	a	b	b	a	c	d	c	b	a	b	c

Figura 4.38: Patrón de respuestas ideales, dadas por Esteban ([12], p. 221).

Según Esteban ([12], p. 155-171), el test aplicado, tiene la siguiente distribución:

1. Las dos primeras preguntas o preguntas iniciales, tienen como objetivo sentar las bases en las cuales se va a mover la entrevista y producir un efecto tranquilizador en el entrevistado.

2. Las preguntas de la tres (3) a la seis (6), tienen como objetivo analizar la aproximación en el sentido visual del término, sin mencionar (por parte del entrevistador) la relación curva–tangente.

3. Las preguntas de la siete (7) a la doce (12), tienen como objetivo establecer la relación entre el concepto de aproximación y la recta tangente, y además exploran el concepto–imagen que se tiene de recta tangente a una curva en un punto.

4. La separación entre el Nivel II y el III, esta dada fundamentalmente, en el uso preciso y riguroso que el alumno haga del lenguaje para solucionar las distintas situaciones que se le presenten, por la capacidad de dar una definición precisa del concepto tratado a partir del mecanismo utilizado, en la capacidad de integrar el concepto–imagen con el concepto–definición, y en la manifestación de que el proceso de aproximación es un proceso infinito. Las preguntas 13 a la 16, están diseñadas para captar estas diferencias.

5. El resto de las preguntas, de la 17 a la 25, tienen como objetivo, que el alumno emplee un lenguaje riguroso y preciso, en donde deben hacer una descripción correcta del método, aplicándolo adecuadamente y relacionándo con el proceso de aproximación que se deriva de él con la tangente.

Con base a esta información, en la distribución presentada en el Apéndice A, sección A.3.1 (p. 150), ilustrada en las Figuras A.6 (p. 151), A.7 (p. 151), A.8 (p. 151) y A.9 (p. 151), y en la información presentada en las Figuras 4.39 (p. 123), 4.40 (p. 124) y 4.41 (p. 124), se observa un grado de mejoramiento en las respuestas de algunos de los alumnos, respecto a la primera aplicación, pero siguen presentando diferencias con el patrón ideal de respuestas.

Nro de Alumnos	Etiqueta del alumno	Nivel
1	A105	3
2	A32	2
3	A95	1
4	A126	2
5	A10	1
6	A26	3
7	A19	2
8	A104	2
9	A130	2
10	A58	2
11	A153	3
12	A17	1
13	A18	1
14	A35	3
15	A149	2
16	A147	2
17	A55	2
18	A11	2
19	A36	2
20	A40	1
21	A142	3
22	A139	2
23	A93	1
24	A150	1
25	A28	3

Figura 4.39: Distribución por niveles del grupo control.

Preguntas / Alumnos	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24	p25
A105	a	d	a	d	b	e	a	b	a	e	e	e	e	e	c	e	e	e	e	e	e	b	e	e	e
A32	a	d	a	d	a	a	a	b	b	e	e	b	b	b	b	b	d	b	d	e	e	e	b	b	b
A95	a	b	e	d	a	c	a	c	b	b	a	e	a	b	c	a	b	d	d	d	b	c	c	b	c
A126	a	b	a	d	a	c	a	b	b	c	a	a	a	a	a	a	e	a	c	b	b	a	b	a	a
A10	b	c	c	d	a	c	a	c	a	b	b	b	c	c	c	b	d	d	b	a	a	d	a	c	b
A26	b	e	d	d	b	e	e	b	a	e	c	b	b	d	b	e	e	e	b	b	a	b	c	c	e
A19	a	d	c	d	e	e	a	a	c	e	e	e	e	e	e	e	e	e	d	d	d	c	d	e	e
A104	a	b	c	b	b	b	e	d	c	e	c	e	e	b	b	b	a	e	e	a	a	a	b	c	b
A130	a	d	c	d	b	c	a	b	b	e	c	e	b	b	b	b	b	b	c	d	c	e	d	b	a
A58	a	d	c	d	d	c	b	b	b	e	b	c	a	b	b	c	c	d	d	d	b	d	c	d	d
A153	b	b	c	d	a	c	d	d	b	b	c	d	d	c	d	c	b	d	c	a	d	c	a	c	b
A17	a	c	d	a	a	c	a	b	c	d	d	c	d	b	c	d	c	a	d	b	d	a	b	d	d
A18	a	b	c	d	a	a	c	b	b	a	a	c	a	b	b	c	d	b	a	d	b	a	b	c	d
A35	a	c	c	d	d	e	c	b	c	a	d	c	c	c	d	b	d	d	d	d	d	d	c	c	b
A149	a	c	a	d	d	c	a	b	b	e	a	c	c	b	c	c	c	b	d	c	c	b	d	c	c
A147	a	b	a	d	a	e	b	b	a	b	a	a	a	a	c	a	e	a	d	b	e	d	c	a	e
A55	a	b	a	d	d	b	d	b	b	b	b	a	a	b	c	e	a	d	a	a	e	d	c	d	a
A11	e	b	a	d	a	c	a	b	a	b	d	a	b	c	e	b	d	b	d	d	a	a	c	d	a
A36	a	d	c	d	e	c	e	b	b	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	b	e	e	e	e	a
A40	a	d	a	d	a	c	a	c	d	b	b	a	b	d	a	a	c	c	a	a	a	a	c	a	a
A142	b	d	c	c	a	a	d	b	c	b	e	d	d	d	a	b	e	c	d	b	d	b	c	b	d
A139	b	b	c	d	a	c	b	b	b	e	d	c	c	e	a	a	d	a	d	b	a	d	d	a	d
A93	c	d	c	a	e	c	e	b	b	e	a	a	b	e	e	d	d	d	e	e	e	c	c	a	d
A150	a	b	e	d	e	c	b	d	c	c	b	d	a	d	b	c	d	b	d	d	e	d	c	d	d
A28	a	d	c	d	a	c	a	b	a	e	e	e	e	e	c	c	e	e	e	e	a	e	e	e	e

Figura 4.40: Respuestas dadas por el grupo de control, en su primera aplicación.

Preguntas / Alumnos	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24	p25
A105	a	b	c	d	a	c	d	b	b	c	a	d	d	a	a	a	b	a	a	b	c	b	a	b	d
A32	a	c	c	d	a	c	d	b	b	a	a	c	c	a	a	a	b	d	c	d	b	c	c	b	c
A95	a	b	c	d	a	c	c	d	b	b	a	d	a	b	c	b	b	d	d	a	b	b	b	d	b
A126	a	b	a	d	a	c	a	b	b	c	a	a	a	a	a	a	e	a	c	b	b	a	b	a	a
A10	c	b	a	d	d	c	a	c	d	e	c	d	b	c	c	b	c	b	a	a	a	e	d	d	b
A26	a	b	a	d	a	c	d	b	b	c	a	c	a	a	a	a	b	a	c	b	b	b	b	b	a
A19	a	b	a	a	b	c	b	c	b	b	c	b	d	d	a	d	c	a	c	c	b	b	b	d	d
A104	a	c	a	d	a	c	a	b	b	b	a	a	a	d	b	c	d	c	c	d	b	b	b	c	c
A130	a	b	c	b	b	c	a	b	b	d	a	d	d	c	e	b	b	c	c	d	b	c	b	b	c
A58	a	b	c	d	d	c	b	a	b	a	d	c	c	c	c	c	c	c	c	d	e	b	c	b	a
A153	b	d	c	d	a	c	d	c	b	c	b	d	d	a	a	e	b	a	c	d	b	c	d	e	c
A17	e	b	a	d	a	a	a	b	a	b	a	b	a	b	b	a	a	e	d	a	d	b	e	e	a
A18	c	b	c	a	d	c	a	d	b	c	a	a	a	b	b	b	b	a	d	a	d	b	b	a	a
A35	a	b	c	d	a	c	d	b	b	b	d	a	d	c	a	c	b	a	c	c	c	c	a	c	b
A149	a	b	c	d	b	c	d	d	b	a	a	c	a	b	b	a	b	a	e	c	c	b	c	b	c
A147	a	b	a	d	a	e	c	b	a	e	e	d	b	a	a	d	c	e	b	d	e	e	d	e	c
A55	a	b	a	d	a	c	d	d	c	e	c	d	a	b	d	d	b	a	d	d	b	b	b	e	e
A11	d	d	c	d	b	c	a	b	b	c	a	c	c	c	c	c	a	c	c	b	d	b	b	b	a
A36	a	b	c	a	c	c	d	a	b	b	a	d	b	b	b	b	b	a	c	d	b	b	a	d	c
A40	b	b	b	d	a	c	d	c	a	b	c	e	a	e	b	b	b	a	d	d	b	c	b	b	e
A142	d	d	c	d	a	c	d	d	b	d	b	d	d	a	a	b	b	a	c	d	b	b	a	b	c
A139	a	d	c	d	a	c	a	d	b	b	a	a	d	b	c	a	a	a	e	d	b	b	b	b	c
A93	c	b	c	d	a	c	a	b	b	e	c	e	b	e	b	b	d	b	b	a	a	e	d	b	d
A150	b	b	c	d	d	c	a	b	b	e	c	d	a	b	b	b	b	a	e	d	e	c	d	b	b
A28	b	b	a	d	a	d	a	b	b	c	b	c	d	a	d	b	b	a	c	d	b	c	b	a	c

Figura 4.41: Respuestas dadas por el grupo de control, en su segunda aplicación.

Una forma de evidenciar dichas diferencias, es analizando las respuestas presentadas por el grupo de alumnos, de acuerdo a los tres niveles estudiados.

Nivel I: Como se puede observar en la Figura 4.39, de los 25 alumnos clasificados en el Nivel II, 7 de ellos involucionaron en su nivel de razonamiento de acuerdo a los resultados obtenidos en la segunda aplicación del test.

Una forma de comprobar esta involución es confrontando las respuestas presentadas por este grupo de alumnos, en lo que respecta al progeso en su nivel de razonamiento. La Figura 4.42 (p. 125), muestra claramente que este grupo de alumnos, no ha cambiado su forma de razonar frente al concepto objeto de estudio y así mismo según las respuestas brindadas, se observa que los alumnos persisten en su concepto–imagen, pues expresan que una recta tangente no puede cortar a una curva, esto lo hacen, sin recurrir al mecanismo seleccionado para realizar sus conclusiones, esa falta de comprensión, según Esteban ([12], p. 167), es una confirmación de un razonamiento característico del Nivel I o mejor aún es una confirmación de no haber accedido al Nivel II.

	p13	p14	p15	p16
Patron ideal	**d**	**a**	**a**	**b**

Respuestas Primera Aplicación

	p13	p14	p15	p16
A95	a	b	c	a
A10	c	c	c	b
A17	d	b	c	d
A18	a	b	b	b
A40	b	d	a	a
A93	b	e	e	d
A150	a	d	b	c

Respuestas Segunda Aplicación

	p13	p14	p15	p16
A95	a	b	c	b
A10	b	c	c	b
A17	a	b	b	a
A18	a	b	b	b
A40	a	e	b	b
A93	b	e	b	b
A150	a	b	b	b

Figura 4.42: Respuestas presentadas en la primera y segunda aplicación del test, por los alumnos que no fueron clasificados en el Nivel II en la segunda aplicación

.

A partir de este análisis, se puede concluir que los alumnos no **involucionaron** en su nivel de razonamiento, ya que mantienen un patrón de respuestas similares, pero de acuerdo con los cambios observados en ellas, se puede deducir que estos alumnos se sienten más "comodos" razonando en un nivel inferior, al inicialmente detectado.

Nivel II: Como se indicó anteriormente de los 25 alumnos clasificados en el Nivel II, 12 de ellos permanecieron en su nivel de razonamiento de acuerdo a los resultados obtenidos en la segunda aplicación del test.

Un aspecto que hay que resaltar es que estos alumnos no mostraron diferencias significativas entre las dos aplicaciones del test y por lo tanto permanecieron invariantes en su nivel de razonamiento. Pero, de este resultado y de los obtenidos para el Nivel I, se puede concluir que la metodología tradicional no aporta al razonamiento de los alumnos, ya que el 76 % de los alumnos del grupo control permaneció en el nivel de razonamiento o se sintieron más comodos razonando en un nivel inferior, frente al concepto de aproximación local en la manifestación seleccionada.

Nivel III: Como se indicó anteriormente de los 25 alumnos clasificados en el Nivel II, 6 de ellos, correspondientes al 24 %, progresaron al Nivel III de razonamiento de acuerdo a los resultados obtenidos en la segunda aplicación del test.

Como se puede observar la diferencia obtenida por este grupo de alumnos es notable, tal y como se muestra en la Figura 4.43 (p. 126). Cabe resaltar que estos alumnos aunque progresaron en su nivel de razonamiento, presentan deficiencias en el uso del lenguaje y en algunos de los procesos de razonamiento infinito involucrados en el proceso, tal como puede observarse en el Anexo B, sección B.4 (p. 161).

	p13	p14	p15	p16
Patron ideal	**d**	**a**	**a**	**b**

Respuestas Primera Aplicación

	p13	p14	p15	p16
A105	e	e	c	e
A26	b	d	b	e
A153	d	c	d	c
A35	c	c	d	b
A142	d	d	a	d
A28	e	e	c	c

Respuestas Segunda Aplicación

	p13	p14	p15	p16
A105	d	a	a	a
A26	a	a	a	a
A153	d	a	a	e
A35	d	c	a	c
A142	d	a	a	b
A28	d	a	d	b

Figura 4.43: Respuestas presentadas en la primera y segunda aplicación del test, por los alumnos que progresaron del Nivel II al Nivel III.

Es importante anotar, que las respuestas presentadas en la Figura 4.43 (p. 126) corresponden a las preguntas donde se explora la integración entre el concepto imagen y el concepto definición.

Conclusión: Con base a los resultados expuestos anteriormente, se observa claramente la diferencia entre el nivel de razonamiento en el cual se encuentran los 38 alumnos que progresaron al Nivel III de razonamiento y el alumno que permaneció en el Nivel II. Esto, se evidencia en el lenguaje adquirido y la forma como lo implementan, tanto en situaciones propias del concepto de aproximación local como en situaciones concretas que conllevan la aplicación del concepto fuera del ámbito de la matemática, así mismo, se resalta que el hecho de que la implementación de una técnica, como lo son los mapas conceptuales, permita analizar de una forma eficaz, los progresos en el lenguaje y asociaciones que van surgiendo en la mente del alumno frente a un concepto específico.

Así mismo, se resalta el hecho de que las experiencias de aprendizaje implementadas dentro de la metodología tradicional solo permitió que un 24 % del total de un grupo progresará en su nivel de razonamiento, lo cual resalta el papel del módulo de instrucción que permitió el progreso del 97.44 % del grupo experiemental.

Capítulo 5

Conclusiones

A través de los distintos Capítulos de los que se compone este trabajo de investigación, se han realizado diversas observaciones y conclusiones importantes, las cuales tienen relación directa con el cumplimiento de los objetivos propuestos entorno al diseño y aplicación del módulo de instrucción. En este Capítulo, se hace una recopilación de todas esas conclusiones, discriminadas no por las etapas del proceso, sino por el cumplimiento de los objetivos.

Así mismo, se proponen futuras líneas de investigación y trabajos a desarrollar dentro de la aplicabilidad del concepto objeto de estudio.

5.1. Conclusiones relativas al cumplimiento del objetivo general

En esta parte de las conclusiones se hace énfasis en el diseño y aplicación del módulo de instrucción, a la técnica de los mapas conceptuales, y a su implementación dentro del modelo educativo de van Hiele, la cual se expone en el artículo “Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele” ([49]), publicado en el marco del Primer Encuentro Internacional sobre Mapas Conceptuales, realizado en la universidad Pública de Navarra en España en el año 2004.

Conclusiones: Respecto al diseño y elaboración del módulo de instrucción, para un concepto matemático determinado, que posea un alto componente visual y geométrico, es necesario que este tenga un estudio teórico previo que haya detectado los descriptores para los diferentes niveles de razonamiento en relación al modelo educativo de van Hiele, pues estos son la base del proceso de investigación, y además, orientan el mismo a lo largo de su desarrollo.

Respecto a su aplicación, el diseño del módulo de instrucción permitió cumplir con el Objetivo General de la investigación (ver Capítulo 4). De los 39 alumnos participantes en la investigación 38 de ellos progresaron al Nivel III de razonamiento, además, se muestra una diferencia entre los alumnos participantes en el grupo experimental y los del grupo de control, en la apropiación del concepto objeto de estudio.

Cabe rescatar, que el progreso en el nivel de razonamiento de los alumnos del grupo experimental se dio con una inversión minima de tiempo, y además de esto, se obtuvo una diferencia significativa en los resultados académicos obtenidos por ellos y los obtenidos por los alumnos del grupo de control, en el curso de Cálculo Diferencial (ver Figura 5.1 (p. 130)).

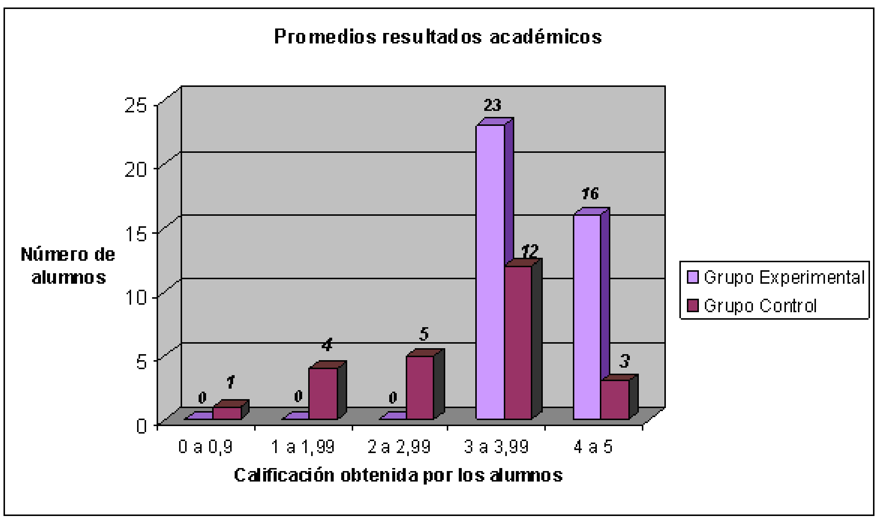


Figura 5.1: Relación de los promedios obtenidos por el grupo experimental y el grupo de control en el curso de Cálculo Diferencial.

En dicha Figura, se observa, que de los alumnos participantes en el proyecto de investigación ninguno perdió la asignatura, y los promedios académicos de los alumnos se ubican de la siguiente forma: un 58.97 % entre 3 y 3.99 y un 41.03 % entre 4 y 5, lo que es un indicador, no solo de su progreso en el nivel de razonamiento, sino en su nivel académico.

Estos resultados, muestran que es posible construir soluciones al problema de investigación, mencionado en el Capítulo 2, donde se mostró como los procesos de razonamiento infinito son una sería dificultad para los alumnos de la interfase bachillerato – universidad, donde suele creerce, que la compresión de los procesos en los cuales esta involucrado el concepto de aproximación local no debe presentar obstáculos para los alumnos y, por ello, se pasa rápidamente de las definiciones presentadas en forma verbal a los problemas algebraicos, no teniendo en cuenta el desarrollo del razonamiento que es inherente a los conceptos que requieren el paso al límite.

De acuerdo a lo anteriormente planteado, el diseño de un módulo de instrucción, para el concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, permite planificar, desarrollar y aplicar experiencias de aprendizaje para que el alumno pueda progresar a través de los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, ya que durante su aplicación, suministra a los alumnos las herramientas necesarias para reformular sus esquemas conceptuales, permitiendo una mejor integración entre los elementos teóricos y prácticos del concepto objeto de estudio.

5.2. Conclusiones relativas al cumplimiento de los objetivos específicos

Para la revisión y verificación del cumplimiento de los objetivos específicos, solo es necesario observar los resultados obtenidos por el grupo experimental (ver Capítulo 4), sin embargo, es importante mencionar otros logros obtenidos durante el proceso de investigación, en distintos aspectos:

- La aplicación del módulo de instrucción, permitió observar que la actitud por parte de los alumnos del grupo experimental, fue fundamental para el desarrollo del proyecto, ya que con ellos se realizó el trabajo en un ambiente de cordialidad. Su asistencia fue voluntaria y no se les obligaba ha realizar las actividades, sino que simplemente se les proponían para luego ser discutidas e implementadas dentro del proceso. Así mismo, durante el trabajo, cada uno de los alumnos era escuchado con sumo cuidado, lo cual los motivaba ha seguir insistiendo para tratar de transmitir lo que ellos pensaban y en hacer explícitas sus inquietudes.

- La elaboración de mapas conceptuales, enmarcados dentro del modelo educativo de van Hiele, permite una nueva forma de exploración de las condiciones propias del modelo, especialmente en el análisis del lenguaje empleado por los alumnos durante la intervención pedagógica. Además, permiten hacer un mejor seguimiento y evaluación de las nuevas relaciones conceptuales que van generando durante el proceso.

  Lo anterior se ve reforzado, cuando Esteban ([49], p. 154), afirma que "al indagar por un concepto específico a través de los mapas conceptuales, el docente puede darse cuenta del tipo de relaciones construidas por los alumnos, con qué otros conceptos lo relaciona, el lenguaje utilizado y el grado de integración entre ellos. Al evaluar esta información, la instrucción se puede orientar a ayudarle a los alumnos a ampliar la red de relaciones, propiciando el *insight*, objetivo fundamental del modelo de van Hiele".

- La aplicación del mecanismo del haz de secantes, motiva el razonamiento en los alumnos, ya que ellos elaboran sus conclusiones a partir de la implementación del mismo, sin necesidad de referirse a las expresiones algebraicas de las curvas estudiadas.

A partir de esto y de los resultados obtenidos en el Capítulo 4, (p. (83)) en las diferentes actividades, se puede concluir que los alumnos han comprendido el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente, rompiendo con la dualidad entre el concepto imagen y el concepto definición, siendo está última, una condición necesaria para que el estudiante progrese del Nivel II al Nivel III de razonamiento del modelo de van Hiele.

5.3. Observaciones realizadas durante la aplicación del módulo de instrucción

En esta sección, se enunciarán dos observaciones que se obtuvieron durante la aplicación del módulo de instrucción.

La primera de ellas, es que hay una clara diferenciación entre los alumnos pertenecientes al grupo de control clasificados en el Nivel III de razonamiento, y aquellos alumnos que progresaron al mismo nivel de razonamiento por la aplicación de las experiencias de aprendizaje del módulo de instrucción. Dicha diferencia, radica en el manejo del lenguaje, en la apropiación e implementación del mecanismo del haz de secantes y en su aplicación en contextos diferentes. Cabe resaltar que de los alumnos clasificados en el Nivel III, que no participaron en la intervención pedagógica, poseen todas estas características, pero no con la misma apropiación de los que sí participaron.

Es con base en esta observación y a la investigación realizada por Jaramillo (Ver Capítulo 1, sección 1.4.4, (p. 29), que se podría establecer la posible existencia de subniveles dentro de cada nivel de razonamiento, específicamente en la noción aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana, a la luz del modelo de van Hiele.

La segunda observación, se hace con base a las entrevistas informales (ver Apéndice B (p. 153)) sostenidas con alumnos del grupo experimental, un semestre después de concluida la intervención pedagógica. Las observaciones realizadas por estos fueron muy satisfactorias, porque reconocieron y aplicaron en temas tales como "Sumas de Riemann e integrales definidas", "Series y sucesiones" e "Integración numérica", el concepto de aproximación local, estableciendo un paralelo con la manifestación de recta tangente a una curva plana, con los conceptos estudiados.

Este hecho se hace relevante, porque sería propicio observar el proceso de los alumnos en cursos posteriores, lo cual permitiría analizar la efectividad del módulo de instrucción y observar como el concepto objeto de estudio se va ampliando en su estructura cognitiva.

5.4. Futuras líneas de investigación

En el transcurso de esta investigación se ha observado la necesidad de diseñar e implementar nuevas investigaciones tanto a nivel teórico como práctico, que tengan como sustento el modelo educativo de van Hiele. Es por ello que planteamos las siguientes líneas de trabajo:

5.4.1. A nivel teórico

1. Realizar la descripción teórica de las fases de aprendizaje, que correpondan a conceptos del Análisis Matemático, específicamente a aquellos que han sido estudiados a la luz del modelo educativo de van Hiele.

2. Diseñar con base en los resultados obtenidos en esta investigación, un módulo de instrucción que pueda ser aplicado en el menor tiempo posible, con el fín de convertir esta herramienta en una base del proceso de enseñanza y aprendizaje para la interfase bachillerato – universidad.

3. Comprobar si en realidad un alumno clasificado en el Nivel III de razonamiento, después de aplicado el test “Curvas y Tangentes”, presenta diferencias, respecto a un alumno que progreso mediante la aplicación del módulo de instrucción, y si se confirman dichas diferencias comenzar un estudio de la posible existencia de subniveles dentro del modelo educativo, frente al concepto objeto de estudio.

5.4.2. A nivel práctico

1. Diseñar los módulos de instrucción correspondientes al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, para ayudar a progresar a los alumnos ubicados en el Nivel 0 al Nivel I, los ubicados en el Nivel I al Nivel II.

De acuerdo con lo anterior, estas consideraciones junto con las de los Capítulos anteriores de este trabajo de investigación, muestran el cumplimiento de los objetivos planteados en el Capítulo 3 para el diseño y aplicación del módulo de instrucción, y como esta investigación hace un aporte significativo en la solución del problema de investigación.

BIBLIOGRAFIA

[1] Manuel Belmonte. *Mapas conceptuales y UVES heurísticas de Gowin. Técnicas para todas las áreas de las enseñanzas medias.* Ediciones Mensajero, Bilbao, 1997.

[2] Tina Blythe. *La enseñanza para la comprensión. Guía para el maestro.* Paidós, 1999.

[3] Norberto Boggino. *Cómo elaborar mapas conceptuales en la escuela. Aprendizaje significativo y globalizado.* Homo Sapiens, Rosario, Argentina, 2001.

[4] Carl B. Boyer. *Historia de la matemática.* Editorial Alianza, España, 1986.

[5] Carl B. Boyer. *The history of the calculus and its conceptual development.* Editorial Alianza, Estados Unidos, 1959.

[6] Pedro Campillo. *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 1999.

[7] Rosa Corberán. *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele.* Universidad de Madrid, Madrid, España, 1994.

[8] Andrés de la Torre Gómez. *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 2000.

[9] Andrés de la Torre Gómez. *Modelización del espacio y del tiempo.* Universidad de Antioquia, Medellín, 2003.

[10] José M. Del Castillo. Mapas conceptuales en matemáticas. http://www.cip.es/netdidactica/articulos/mapas.htm, 2004.

[11] Pedro Vicente Esteban Duarte. *La visualización en la enseñanza del cálculo diferencial.* Universidad Eafit, 2004.

[12] Pedro Vicente Esteban Duarte. *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele.* PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.

[13] Fransisco Vera. *Elementos de Geometría*, volume I. Científicos griegos, Aguilar, Madrid, 1970.

[14] José Luis Llorens Fuster. *Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local.* Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 1994.

[15] Howard Gardner. *Estructuras de la mente, la teoría de las inteligencias múltiples.* Fondo de Cultura Económica, Bogotá D.C, 2001.

[16] Jaime Gutiérrez. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*, -(4):295–384, 1990.

[17] Pierre M. Van Hiele. *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* Developmental Psychology Series. Academic Press, Inc., Orlando, 1986.

[18] A. Hoffer. *van Hiele - based research.* R. Lesh & M. Landau, eds., Acquisition of mathemaical concepts and processes., New York, 1893.

[19] P. Jourdain. *El mundo de las matemáticas.*, volume 1. Editorial Alianza, España, 2000.

[20] Julio Alberto Uribe Calad. *Matemática Experimental 11*, volume I. Editorial Uros, Medellín, Colombia, 2002.

[21] Carlos Mario Jaramillo López. *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 2000.

[22] María de los Angeles Navarro. *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica.* Universidad de Sevilla, Sevilla, España, 2002.

[23] J. W. Maybery. *An investigation of the van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers.* [Disertación doctoral no pulicada], 2 edition, Universidad de Georgia, 1981.

[24] Ministerio de Educación Nacional. *Ley General de Educación.* Editorial Unión, 2003.

[25] Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Magisterio, 1998.

[26] Marco Antonio Moreira. *Aprendizaje Significativo: teoría y práctica.* Editorial Visor. Madrid - España, 2000.

[27] Gloria García O. *Currículo y Evaluación en Matemáticas.* Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá, Colombia, 2003.

[28] María Luz Rodríguez Palmero. La teoría del aprendizaje significativo. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First International Conference on Concept Mapping*, 1(1):1 – 10, 2004.

[29] Jean Piaget. *Problems of the Social Psychology of Childhood, Traducido por Terrance Brown y Michael Gribetz.* Traité de sociologie, Universitaires de France, París., 1963.

[30] George Polya. *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas, México, 1984.

[31] Raymond Duval. *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Matemática Educativa II, Grupo Editorial Iberoamérica, Orlando, 1993.

[32] Raymond Duval. *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Cali-Colombia, 2004.

[33] Luz Manuel Santos Trigo. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, 2 edition, México, 1997.

[34] Alan H. Schoenfeld. Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices American Mathematical Society*, 47:643, 2000.

[35] David Tall. *Advanced mathematical thinking.* Klumer Academic Publishers, 1991.

[36] Z. Usiskin. Van hiele levels and achievements in secondary school geometry. Technical report, CRRSSG Report, University of Chicago, 1982.

[37] Pierre van Hiele. *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* PhD thesis, Holanda, 1957.

[38] Linda VerLee Williams. *Aprender con todo el cerebro. Estrategias y modos de pensamiento: visual, metafórico y multisensorial.* Martínez Roca, Barcelona, 1986.

[39] Maya, Arnobio y Díaz, Nohora. *Mapas Conceptuales, Elaboración y Aplicación.* Retina, Bogotá D. C., 2002.

[40] Acevedo Caicedo, Myriam. y et al. *Trazas y Miradas.* Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2003.

[41] Ausubel, D. P. y et al. *Psicología educativa.* Trillas, México, 1991.

[42] David Fuys, y et al. *The van Hiele Model of Thinking Geometry among Adolescents.* National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

[43] Ontoria Peña, Antonio y et al. *Mapas conceptuales.Una técnica para aprender.* Narcea, Madrid, 1999.

[44] Resnick, Lauren y Ford, Wendy. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós, 1990.

[45] Pérez Miranda, Royman y Gallego-Badillo, Rómulo. *Corrientes constructivistas. De los mapas conceptuales a la teoría de la transformación intelectual.* Colección mesa redonda, Magisterio, Bogotá, 1995.

[46] Novak, Joseph D. y Gowin, D. Bob. *Aprendiando a aprender.* Martínez Roca, 1999.

[47] Monsalve, Orlando. y Jaramillo, Carlos Mario. El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Educación y Pedagogía*, XV (35):11 – 24, enero - abril 2003.

[48] Annie Selden y John Selden. Collegiate Mathematics Education Research: What Would That Be like? *The College Mathematics*, 24(5):431 – 445, 1993.

[49] Pedro Vicente Esteban Duarte, Edison Darío Vasco Agudelo y Jorge Alberto Bedoya Beltrán. Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First International Conference on Concept Mapping*, 2 (1):151–154, 2004.

[50] Pedro Vicente Esteban Duarte y José Luis Llorens Fuster. Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de recta tangente a través del "haz de secantes". *Matemáticas & Educación*, 3(1 y 2):47 – 63, 1999.

[51] G. L. Nemhauser y L. A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization.* Wiley, Orlando, 1998.

[52] Esteban Duarte, Pedro Vicente y Llorens Fuster, José Luis. Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de recta tangente a través del haz de secantes. *Matemáticas y Educación*, 3:49–60, 1999.

[53] Esteban Duarte, Pedro Vicente y Llorens Fuster, José Luis. Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *SUMA*, 44:44–52, 2003.

[54] Carmen Azcárate Giménez y Matías Camacho Machín. Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2):135 – 149, 2003.

[55] Gloria García Ochoa y Myriam Acevedo Caicedo. *La evaluación de las competencias en matemáticas y el curriculum: un problema de coherencia y consistencia.* Secretaria de Educación de Bogotá, Bogotá, Colombia, 2000.

[56] Walter Beyer y Nelson Suárez Segovia. Influencia del lenguaje formal matemático en la solución de problemas con números racionales. *Educación y Ciencias Humanas*, 6(10):57 – 81, 1998.

[57] Gustavo Centeno R. y otros. *Matemática Constructiva 11*, volume I. Editorial Libros & Libres S.A., Bogotá, Colombia, 1998.

[58] Carlos Mario Jaramillo López y Pedro Campillo Herrero. Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9(1):65 – 84, 2001.

[59] Esteban Duarte, Pedro Vicente y Pérez Carreras, Pedro. Una propuesta metodológica de introducción temprana del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente vía el asistente matemático. *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática*, I:1 – 12, 2001.

[60] Gimeno S, José y Pérez G, Ángel. *Comprender y transformar la enseñanza.* Ediciones Morata, 1994.

[61] Barrantes, Hugo y Ruiz, Ángel. *La historia del comité interamericano de Educación Matemática.* Editora Guadalupe Ltda, Bogotá, 1998.

[62] Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Research in Mathematics Education*, 17(1):31 – 48, 1986.

Apéndice A

Tratamiento estadístico del proceso de investigación

Las técnicas de agrupamiento buscan la obtención de agrupamientos naturales dentro de un conjunto de datos (registros); es decir, hacen una división natural dentro del conjunto de datos disponible. Dichas técnicas son utilizadas para poder distinguir subclases dentro de una clase determinada.

El algoritmo K-means es una técnica de agrupamiento estadística, que pretende entre otras cosas, hacer una división natural dentro de un conjunto de datos disponible, cuyo factor fundamental es el uso de una medida de disimilitud entre agrupamientos, es decir, lo que consigue es distinguir si dos o más registros pertenecen al mismo agrupamiento o no.

En este Apéndice se lleva a cabo una descripción de esta técnica y se muestra como su aplicación, permite la clasificación de un grupo de estudiantes en un determinado nivel de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, frente al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado.

A.1. Procedimientos estadísticos

La obtención de agrupamientos naturales responde a muy diversos criterios. En general, el factor fundamental es el uso de una medida de disimilitud entre agrupamientos; es decir, lo que se consigue es distinguir si dos o más registros de un conjunto de datos pertenecen al mismo agrupamiento (disimilitud baja) o no (disimilitud alta). Esta medida también se aplica agrupamiento a agrupamiento, con el fín de propiciar fusiones y separaciones entre los diversos agrupamientos obtenidos, con el objetivo de conseguir los agrupamientos más adecuados posibles.

Formalmente, un proceso de agrupamiento sobre un conjunto de datos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, va a obtener c subconjuntos $X_1, X_2, ..., X_c, X_i \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, 3, ..., c$, tales que $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_C$ y disjuntos entre sí, es decir, $X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j$, de manera que los datos de cada X_i tengan entre sí una alta similitud. La imposición de que los conjuntos sean disjuntos entre sí, es una asunción necesaria para los métodos clásicos, pero los métodos difusos no tienen esta restricción, permitiendo que ciertos elementos pertezcan a más de un conjunto con una cierta probabilidad (certidumbre). La medida de similitud ideal, debería ser invariante a posibles reescalamientos del conjunto de datos, a fin de conservar el concepto de agrupamiento natural en cualquier presentación de los mismos.

Según el método clásico, para hacer el particionamiento, se puede hablar de diversas técnicas de agrupamiento, que a su vez forman familias dependiendo de la filosofía general a la que se le aplique el método. Las dos familias más importantes son las técnicas de agrupamiento jerárquicas y las técnicas basadas en la minimización del error cuadrático, siendo está última la base de esta investigación.

A.1.1. Agrupamientos basados en sumas de cuadrados

Esta técnica de agrupamiento, funciona según el criterio de minimizar la dispersión interna dentro de cada agrupamiento (distancia intragrupamiento) y de maximizar la dispersión entre los distintos agrupamientos (distancia interagrupamiento), y cumple con el propósito de que a partir de un conjunto inicial de registros, este se divide en un número determinado de agrupamientos naturales que optimicen dicha función, sin embargo, la optimización de dicha función requiere el empleo de muchas operaciones computacionales, por lo cual la mayor parte de los métodos aplicados son subóptimos. Dichos modelos se diferencian en el criterio de optimización, el cual mide en forma global las distancias intra e interagrupamiento, y en el proceso de optimización que adopte.

Los criterios de optimización básicos son:

1. Minimización de la diagonal S_w
2. Minimización de $|S_w|/|\hat{\Sigma}|$
3. Maximización de la diagonal $S_w^{-1}S_B$
4. Minimización de la diagonal $\hat{\Sigma}^{-1}S_w$

Donde $\hat{\Sigma}$ define la matriz de covarianzas del conjunto total de la muestra , S_w la matriz de dispersión de intraagrupamiento y $S_B = \hat{\Sigma} - S_w$ la matriz de dispersión de interagrupamiento.

A.1.2. Algoritmo K-means

El método *k-medias*, es el más popular entre los métodos de agrupamiento basados en sumas de cuadrados, este es un método subóptimo y consiste en minimizar el primer criterio de optimización (minimización de la diagonal S_w).

El algortmo *K-means*, es considerado rápido y eficaz si la distancia que utiliza es adecuada para el problema considerado, además, exige conocer el número de clusters en los que se desea clasificar la muestra de vectores de la población. Si el número de cluster no se conoce por adelantado, se puede dejar que el algoritmo determine el número utilizando parámetros definidos por el usuario.

El modo de funcionamiento del algoritmo consiste en mover cada vector al cluster cuyo centroide esté más cercano al mismo, y actualizar después los centroides de los clusters.

A.2. Muestra elegida para el proyecto de investigación

La muestra elegida, para realizar el proyecto de investigación fue de 154 alumnos discriminadaos de la siguiente manera: 115 de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia), y 39 del Instituto Técnológico Metropolitano (Medellín, Colombia). Dado que no se trata de lograr generalizaciones, sino de probar la efectividad de las experiencias de aprendizaje, definidas en el módulo de instrucción (ver Capítulo 3, sección 3.3, p. 53).

Así mismo, todos los alumnos seleccionados se encuentran en primer semestre de su carrera universitaria[1] y ninguno de ellos ha visto formalmente un curso de cálculo en una institución de educación superior. Además de esto, los profesores de los alumnos participantes, son los integrantes del proyecto de investigación.

Las Tablas A.1, A.2 y A.3 muestran la información global, tamaño y porcentajes, de como están situados los estudiantes, en lo relativo a la institución educativa, sexo y carácter de la institución.

[1] Los estudiantes seleccionados pertenecen a las carreras de matemáticas, ingeniería y tecnología en electrónica.

	Frecuencia	Porcentaje (%)	% válido	% Acumulado
ITM	39	25.3	25.3	25.3
UDEA	115	74.7	74.7	100.0
Total	154	100.0	100.0	

Tabla A.1: Nombre de la institución a la cual pertenecen los alumnos y porcentajes.

	Frecuencia	Porcentaje (%)	% válido	% Acumulado
Femenino	53	34.4	34.4	34.4
Masculino	101	65.6	65.6	100.0
Total	154	100.0	100.0	

Tabla A.2: Sexo de los alumnos y porcentajes.

	Frecuencia	Porcentaje (%)	% válido	% Acumulado
Oficial	104	67.5	67.5	67.5
Privado	50	32.5	32.5	100.0
Total	154	100.0	100.0	

Tabla A.3: Carácter de la institución a la cual pertenecen los alumnos y porcentajes.

Como se puede observar el la Tabla A.1 (p. 144), hay un mayor porcentaje de alumnos de la Universidad de Antioquia, esto se debe a la concurrencia de estudiantes en cada una de las instituciones anteriormente mencionadas. Así mismo, la información de la Tabla A.2 (p. 144), muestra una relación aproximada de 2 a 1, entre la cantidad de hombres y mujeres participantes en la investigación; esta relación es una de las principales características de los alumnos en estas carreras universitarias.

Finalmente, los datos de la Tabla A.3 (p. 144), presenta una mayor cantidad de estudiantes de colegios oficiales que de colegios privados, que es una tendencia de las universidades oficiales; como en este caso lo son, la Universidad de Antioquia y el Instituto Tecnológico Metropolitano.

Para realizar la clasificación de cada alumno, en el nivel de razonamiento correspondiente, se aplica el test denominado "Curvas y Tangentes[2]", previamente validado por Esteban ([12], pp. 113 - 258) en su tesis doctoral, que consta de 25 preguntas, discriminadas en tres bloques así: bloque 1, de la pregunta 1 a la 7, bloque 2, de la pregunta 8 a la 16 y bloque 3, de la pregunta 17 a la 25, a partir de esto, un alumno está ubicado en el nivel II, si responde como mínimo tres preguntas del bloque

[2]Para ver un modelo del test, debe ver el Apéndice G, (p. 215).

1, 6 del bloque 2 y a lo sumo 4 del bloque 3, como lo indica la Tabla A.4 (p. 145)

Criterio Experto	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel 3	≥ 5	≥ 6	≥ 3
Nivel 2	< 5	≥ 6	≥ 3
Nivel 1	< 2	< 4	≤ 3

Tabla A.4: Pre-clasificación, presentada por Esteban [12], en su tesis doctoral, denominada criterio del experto.

Al aplicar este criterio a la muestra obtenida, se pre-clasifican solo 18 estudiantes, de los cuales se tienen 4 en el Nivel II y 14 en el Nivel I. Esta información, se utiliza para obtener los centros iniciales, con los que se debe iniciar el algoritmo *k-means*, dentro del análisis estadístico.

Ahora, para realizar el proceso de clasificación de cada uno de los alumnos en los niveles I, II y II del modelo educativo de van Hiele, mediante la implementación de herramientas estadísticas, se emplea el programa SPSS ® versión 12.0 para Windows. En el menú *analizar*, se elige la opción de clasificación por el algoritmo *k-means*, que es uno de los métodos de agrupación alrededor de centros móviles, se suministran los centros iniciales, se le ordena al programa que obtenga tres grupos (*clusters*), que clasifique al mismo tiempo que interactúa y que utilice las medias actualizadas.

Para determinar los centros iniciales con los cuales se inicia el algoritmo, se utilizan las medias de "aciertos" (coincidencias con el patrón ideal de respuestas), es decir, los porcentajes de aciertos en cada una de las preguntas y para cada uno de los tres bloques del test de curvas y tangentes. La Tabla A.5 (p. 146) representa las medias de acierto, con la cual debe iniciar el algoritmo.

La convergencia de la solución se alcanza en la iteracción 12 con una distancia mínima entre los centros iniciales de 1,522, clasificando a los 154 alumnos en tres conglomerados, en correspondencia con los niveles I, II y II de razonamiento del modelo educativo de van Hiele de la siguiente manera: 63 en el Nivel I, 66 en el Nivel II y 25 en el Nivel III, como se ilustran en las Figuras A.1 (p. 147), A.2 (p. 147), A.3 (p. 147) y A.4 (p. 147).

De la información anterior, se concluye que de los 66 alumnos clasificados en el Nivel II, sólo dos (2) alumnos son del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM), que corresponden a las etiquetas A2 y A3. Es importante resaltar que la clasificación de los 66 alumnos ubicados en el Nivel II, se corroboró con el análisis de las respuestas brindadas por ellos en el desarrollo del Test "Curvas y Tangentes".

Nivel I	Nivel II	Nivel III
0,64	0,50	0,00
0,21	0,50	0,00
0,29	0,75	0,00
0,79	0,75	0,00
0,29	0,75	0,00
0,43	0,50	0,00
0,00	0,50	0,00
0,71	1,00	0,00
0,36	1,00	0,00
0,07	0,50	0,00
0,00	1,00	0,00
0,00	0,75	0,00
0,14	0,25	0,00
0,00	0,75	0,00
0,00	0,25	0,00
0,36	0,75	0,00
0,07	0,00	0,00
0,07	0,00	0,00
0,07	0,50	0,00
0,21	0,25	0,00
0,00	0,00	0,00
0,14	0,25	0,00
0,00	0,00	0,00
0,14	0,50	0,00

Tabla A.5: Medias de aciertos para realizar la clasificación.

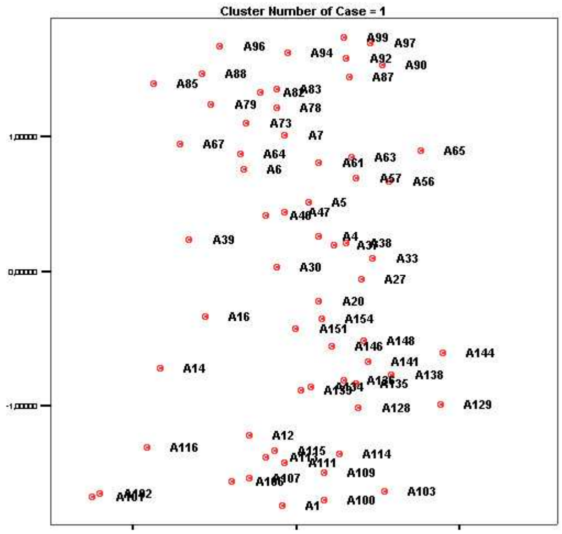


Figura A.1: Distribución del grupo de alumnos para el Nivel I de razonamiento.

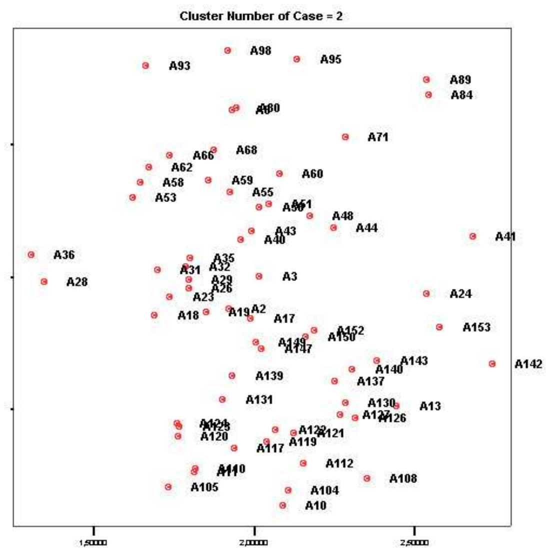


Figura A.2: Distribución del grupo de alumnos para el Nivel II de razonamiento.

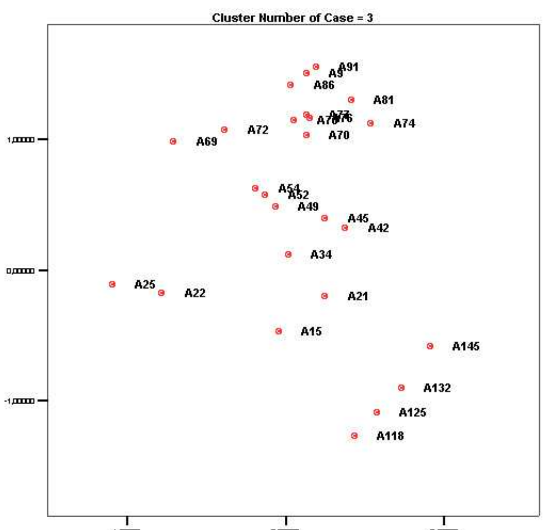


Figura A.3: Distribución del grupo de alumnos para el Nivel III de razonamiento.

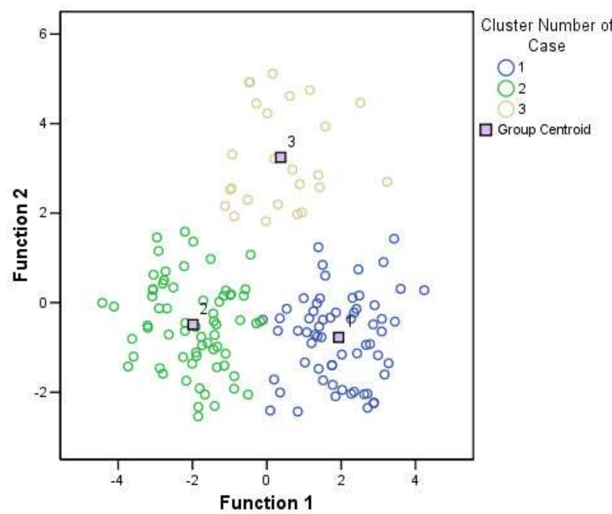


Figura A.4: Mapa teritorial de distribución, con sus respestivos centriodes.

A.3. Selección del grupo control y del grupo experimental

Como se indicó en el Capítulo anterior, la aplicación del módulo de instrucción debe cumplir el propósito de ayudar a un alumno ubicado en el Nivel II de razonamiento a progresar al Nivel III.

Para cumplir este propósito, se dividen aleatoriamente los 66 alumnos ubicados en el Nivel II de razonamiento, en dos grupos. El primero, es el grupo experiental, que contiene el 60 % del total, es decir, aproximadamente 40 alumnos, 39 de la Universidad de Antioquia y 1 del Instituto Tecnológico Metropolitano; y el segundo, es el grupo control, que contiene el 40 % del total, es decir, aproximadamente 26 alumnos, 25 de la Universidad de Antioquia y 1 del Instituto Tecnológico Metropolitano. Sin embargo, por dificultades en el desplazamiento, económicas y por incompatibilidad horaria, los 2 estudiantes del Instituto Tecnológico Metropolitano, deciden no participar en el proyecto. A partir de esto, el grupo experimental y el grupo control quedan conformados por 39 y 25 alumnos respectivamente.

A.3.1. Grupo experimental y grupo de control

Para realizar la intervención pedagógica, el grupo experimental y el grupo control reciben las clases magistrales de acuerdo con el programa académico correspondiente, sin embargo, los alumnos del grupo experimental son sometidos a la aplicación del módulo de instrucción diseñado por el grupo de docentes, en horarios diferentes a los programados para las clases habituales y con una intensidad horaria de 4 horas semanales adicionales a las de su jornada académica, durante 8 semanas. Cabe recalcar que los alumnos implicados en la investigación no presentan carácteristicas reseñables distintas a la generalidad de los alumnos universitarios de los primeros semestres y, además de esto, su participación en la intervención pedagógica es voluntaria, y no es motivada por intereses económicos y/o académicos fuera de los establecidos por el reglamento universitario.

Para comprobar, el supuesto de que la aplicación del módulo de instrucción ayudó a progresar a los estudiantes ubicados en el Nivel II de razonamiento al Nivel III, se aplica nuevamente el test denominado "Curvas y Tangentes", para obtener otros centros iniciales de los grupos experimental y de control. Dichos centros se muestran en las Tablas A.6 (p. 149) y A.7 (p. 149).

Con estos datos y aplicando nuevamente al algoritmo *k-means* se obtienen los siguientes resultados para dichos grupos:

Grupo experimental: Se clasifican 38 alumnos en el Nivel III de razonamiento

Nivel I	Nivel II	Nivel III
0,00	1,00	0.697
0,00	1,00	0,909
0,00	1,00	0,909
0,00	1,00	0,909
0,00	1,00	0,879
0,00	1,00	0,970
0,00	0,00	0,788
0,00	1,00	0,879
0,00	0,00	0,848
0,00	1,00	0,727
0,00	1,00	0,727
0,00	1,00	0,939
0,00	1,00	0,879
0,00	1,00	0,879
0,00	1,00	0,909
0,00	0,00	0,818
0,00	1,00	0,939
0,00	1,00	1,00
0,00	0,00	0,758
0,00	1,00	0,939
0,00	0,00	0,606
0,00	0,00	0,545
0,00	0,00	0,818
0,00	1,00	0,576
0,00	0,00	0,848

Tabla A.6: Medias grupo experimental

Nivel I	Nivel II	Nivel III
0,00	0,00	0,250
1,00	0,00	0,500
0,00	0,00	0,750
1,00	0,00	1,00
0,500	0,00	1,00
0,500	0,00	0,750
0,00	0,00	0,750
0,500	0,00	0,500
0,00	0,00	1,00
0,00	0,00	0,750
0,00	0,00	0,750
0,500	0,00	0,750
0,00	0,00	1,00
0,00	0,00	1,00
0,00	0,00	0,750
0,500	0,00	0,500
0,00	0,00	1,00
0,00	0,00	1,00
0,00	0,00	0,750
0,00	0,00	0,750
0,00	0,00	0,250
0,500	0,00	0,500
0,00	0,00	0,500
0,00	0,00	0,500
0,00	0,00	0,750

Tabla A.7: Medias grupo control

y 1 alumno en el Nivel II, la convergencia de la solución se alcanza en la iteración 11 con una distancia mínima entre los centros iniciales de 2,272.

La Figura A.5 (p. 150), muestra como están distribuidos los alumnos en cada uno de sus grupos. Y como se indico anteriormente sólo uno de ellos, el alumno A24, no pertenece al grupo de alumnos clasificados en el Nivel III. Cabe resaltar que no hay mapa territorial o indicación de los centrioles, debido a que no hay alumnos en el Nivel I, solo hay un alumno en el Nivel II y los 38 restantes están en el Nivel III.

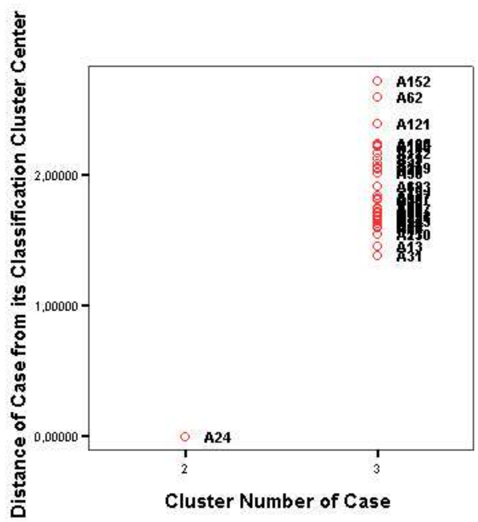


Figura A.5: Distribución del grupo experimental, después de la aplicación de las experiencias de aprendizaje.

Así mismo, se puede observar que con el criterio mostrado en la Tabla A.4 (p. 145), se clasifican 34 alumnos de 39 que participaron en el grupo experimental, de los cuales 33 alumnos fueron clasificados en el Nivel III y 1 permaneció en el Nivel II. Es importante resaltar, que este número de alumnos corresponde al 87.17 % del total del grupo experimental, que en comparación con la primera clasificación, que fue del 11.69 % del total de la muestra, evidencia un aumento significativo en la clasificación de los alumnos con este criterio tan riguroso.

Grupo de control: Se clasifican 6 alumnos en el Nivel III, 12 alumnos en el Nivel II y 7 alumnos en el Nivel I la convergencia de la solución se alcanza en la iteración 11 con una distancia mínima entre los centros iniciales de 2,272.

Las Figuras A.6 (p. 151), A.7 (p. 151), A.8 (p. 151) y A.9 (p. 151), muestran como están distribuidos los alumnos en cada uno de sus grupos y sus respectivos centroides.

En estas Figuras, se muestra claramente que los diferentes grupos de alumnos están

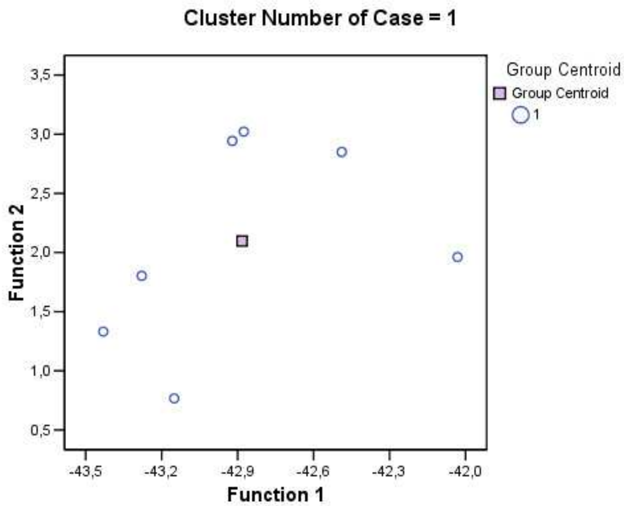


Figura A.6: Distribución del grupo de control, en el Nivel I de razonamiento.

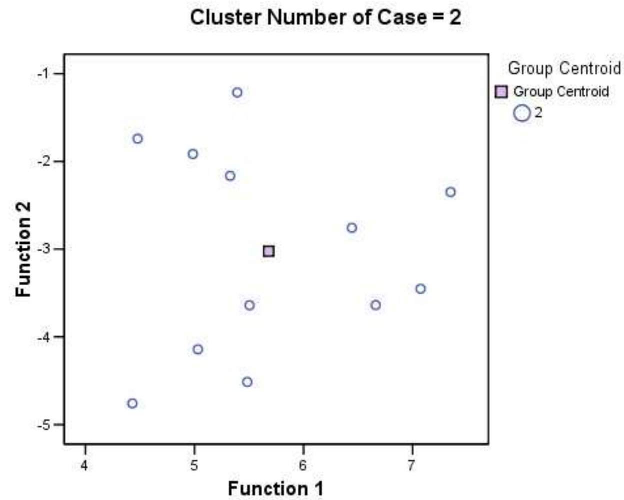


Figura A.7: Distribución del grupo de control, en el Nivel II de razonamiento.

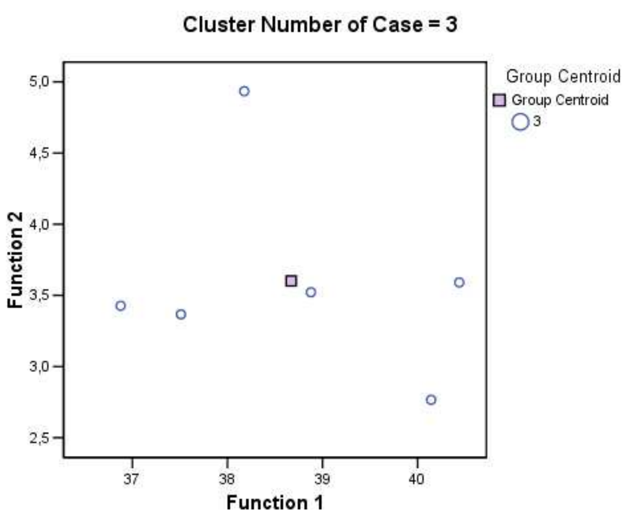


Figura A.8: Distribución del grupo de control, en el Nivel III de razonamiento.

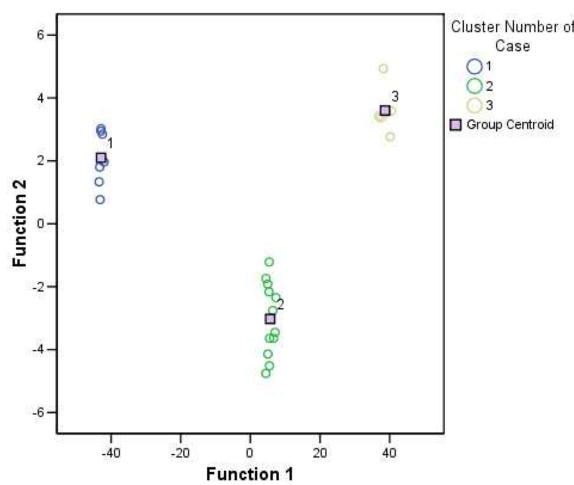


Figura A.9: Mapa territorial y ubicación de todos los centroides.

demasiado próximos a sus centriodes, indicando que existe una distribución uniforme en cada uno de ellos. Una forma de analizar las Figuras hasta aqui mostradas, es comparar la presentada para la distribución del grupo experimental (Ver Figura A.5, p. 150), con el mapa territorial del grupo control (Ver Figura A.9, p. 151), donde se observa que las distribuciones mantienen el mismo patrón de comportamiento, que es el de alargamiento alrededor del centroide. Así mismo, se pude concluir que el alumno A24 del grupo experimental, tiene como característica principal ser el centriode de su grupo.

Un hecho que es importante resaltar en este punto del análisis, es que con el criterio mostrado en la Tabla A.4 (p. 145), se clasifican solo 2 alumnos de los 25 que pertenecieron al grupo de control, los cuales permanecieron en el Nivel II de razonamiento, frente a 34 clasificados del grupo experimental.

En conclusión, se tiene que después de aplicado a satisfación el módulo de instrucción, se logro que el 97.43 %, correspondiente a 38 alumnos de 39 del grupo experimental, haya progresado al Nivel III de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, frente al 24 %, correspondiente a 6 alumnos de 25 del grupo control, en el que solo fue utilizada la metodología tradicional, es decir, la explicación global de los temas del curso de Cálculo I, confirmando lo hallado por Esteban ([12]) en su Tesis doctoral.

Apéndice B

Entrevistas

La entrevista, dentro del ámbito de la educación, tiene entre sus finalidades la obtención de información académica y/o personal que resulta importante dentro de un proceso de investigación. En una entrevista intervienen principalmente dos sujetos, el entrevistador (profesor) y el entrevistado (alumno), donde el primero, además de tomar la iniciativa de la conversación, plantea mediante preguntas específicas cada tema de su interés y decide en qué momento el tema ha cumplido sus objetivos y el segundo facilita información sobre sí mismo, su experiencia o el tema en cuestión.

En la investigación sobre el modelo de van Hiele predomina la utilización de entrevistas individualizadas entre el profesor y cada alumno para determinar el nivel de razonamiento. Estas entrevistas individuales suelen denominarse **entrevistas clínicas** y en ellas, el profesor plantea diversas actividades y dialoga con el alumno a tenor de su forma resolverlas y del nivel de razonamiento que vaya mostrando durante la entrevista, lo anterior se puede evidenciar en las contribuciones hechas al modelo educativo de van Hiele en el ámbito del cálculo, en particular al concepto de aproximación local, por Llorens ([14]), Campillo ([6]), Esteban ([12]), Jaramillo ([21]), de la Torre ([8]) y Navarro ([22]) en sus respectivas Tesis Doctorales.

En este Anexo, se mostrará la transcripción de cinco (5) entrevistas, en donde se podrá observar la diferencia en el lenguaje empleado por los alumnos, cuando se refieren al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, permitiendo resaltar la efectividad del módulo de instrucción aplicado frente a este concepto.

Transcripción de las entrevistas

Al final del proceso de investigación, se entrevistaron diferentes grupos de alumnos, a saber: el grupo experimental, el grupo control y un grupo de alumnos que no habían realizado un curso de cálculo I (cálculo dferencial) a nivel universitario. De estas, se transcribieron las entrevistas de 5 alumnos, de los cuales dos (2) pertenecen al grupo experimental, dos (2) pertenecen al grupo control pero uno de ellos progresó al Nivel III de razonamiento y el otro no, y un último alumno, que no había estado matriculado en un curso de Cálculo I a nivel universitario, lo cual implica, que la información de este, acerca del concepto trabajado durante la aplicación del proyecto, la había adquirido en la educación media.

Dichas entrevistas no tienen un estructura jerárquica predefinida, debido a las características propias de los entrevistados, sin embargo, sirven como un respaldo que evidencia las diferencias entre los alumnos sometidos a la intervención pedagógica y aquellos que no participaron de la misma, frente a los siguientes aspectos:

- El lenguaje utilizado por los alumnos.
- La aplicación de dicho concepto, en otros campos del saber.
- La estructura de las definiciones presentadas por cada uno de ellos, frente al concepto objeto de estudio.

La nomenclatura utilizada para dichas entrevistas, es la siguiente: El docente que está realizando la entrevista a partir del momento se denominará **Profesor** y el entrevistado a partir del momento se denominará **Alumno**. Es importante aclarar, que en las entrevistas no se utilizarán los nombre de los alumnos entrevistados, debido a una condición de confidencialidad impuesta por ellos al inicio del proceso.

B.1. Entrevista 1

Profesor: Buenos días, ¿cuál es tu nombre?

Alumno: Buenos días profesor, mi nombre es E_1

Profesor: ¿Cuál es la carrera que realizas actualmente?, ¿en qué semestre te encuentras?

Alumno: Estoy estudiando, Ingeniería Química y acabo de terminar el primer semestre.

Profesor: En relación al área de matemáticas, ¿qué materias cursaste, en el semestre que acabas de concluir?

Alumno: Geometría Euclidiana, Matemáticas Operativas y Cálculo I

Profesor: ¿Quién fue el profesor de Cálculo I?

Alumno: Usted,...Ja, Ja, Ja.

Profesor: Por favor menciona el nombre, del docente.

Alumno: Edison Vasco.

Profesor: Haz participado en proyectos de investigación, que involucren algún concepto del cálculo.

Alumno: Sí

Profesor: ¿Cuál concepto?

Alumno: El de recta tangente a una curva. Uhmm... pero habían otros conceptos, como el punto, la recta, el haz de secantes, la tangente, la curva, que también se trabajaron.

Profesor: ¿Y como podrías definir dicho concepto?

Alumno: Como el límite del haz de secantes.

Profesor: E_1, aplicando esta definición que me acabas de dar, podrías encontrar la recta tangente a cualquier curva, en cualquier punto sobre ella.

Alumno: Profe, no siempre se puede aplicar el haz.

Profesor: ¿Porqué?

Alumno: Porque hay puntos sobre las graficas donde el haz no se estabiliza.

Profesor:E_1, descríbeme con tus propias palabras, como son las graficas en las cuales no se estabiliza el haz de secantes.

Alumno: Los graficas que tienen "picos"o muchas oscilaciones.

Profesor: Pero este fenómeno, de que no se estabilizan, sucede en todos los puntos de la gráfica.

Alumno: No profe..., por ejemplo en las que tiene " pico" en el " pico", las de las oscilaciones en lugar donde se ven los puntos demasiado juntos.

Profesor: E_1, realmente no me queda claro, lo que me quieres decir...

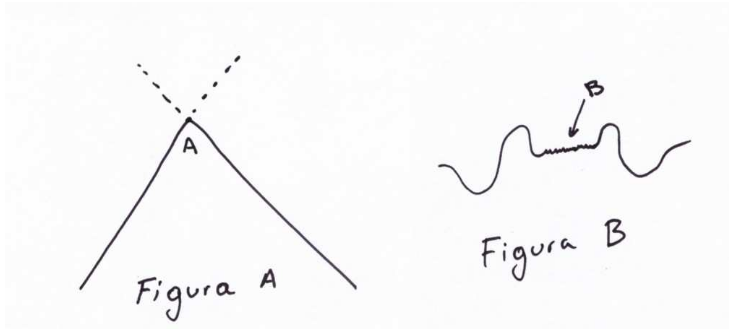
Alumno: Profe, présteme una hoja que yo se lo grafico.

Alumno: Mire profe las graficas, pero ubiquese en estos puntos.

Profesor: Uhmm... Ahora, marca por favor, cada una de las gráficas que acabas de realizar.

Alumno: ... Listo

Profesor: En relación a la Figura A, porque dices que el haz de secantes no se



estabiliza en ese punto.

Alumno: Porque, al trazar secantes por la derecha y por la izquierda del punto, no se estabilizan en una sola recta.

Profesor: ¿Y que problema hay?, ¿será que no pueden ser dos tangentes?

Alumno: No profe, porque el haz de secantes debe estabilizarse en una sola recta... y esta es la tangente. Además, como esto es una especie de límite, debe acercarse por la derecha y por la izquierda a la misma recta, lo cual no sucede en este caso.

Profesor: En relación a la Figura B, porque dices que el haz de secantes no se estabiliza en este punto.

Alumno: Mire profe, usted recuerda que una de las actividades que se hizo con el profesor de EAFIT, teníamos la misma curva y lo que pasaba era que no se determinaba ni siquiera la dirección de la tangente... eso salían rectas para todos lados y no tendían a parar en una sola.

Profesor: Uhmm... y que es eso de la dirección.

Alumno: Ah, es si la recta tangente es horizontal, vertical o Oblicua.

Profesor: Bueno E_1, te quedamos muy agradecidos por el comportamiento y la sinceridad en las respuestas.

Alumno: Con gusto profe.

B.2. Entrevista 2

Profesor: Buenos días, ¿cuál es tu nombre?

Alumno: Buenos días, mi nombre es E_2.

Profesor: ¿Cuál es la carrera que realizas actualmente?, ¿en qué semestre te encuentras?

Alumno: Soy estudiante de Ingeniería Electrónica y voy para el segundo semestre.

Profesor: En relación al área de matemáticas, ¿qué materias cursaste, en el semestre que acabas de concluir?

Alumno: Geometría Euclidiana, Matemáticas Operativas y Cálculo I

Profesor: Diga el nombre del profesor de Cálculo I

Alumno: Edison Vasco.

Profesor: Haz participado, en proyectos de investigación que involucren algún concepto del cálculo.

Alumno: Sí, el semestre que pasó.

Profesor: ¿Cuál concepto?

Alumno: El de recta tangente.

Profesor: Podrías especificar más acerca del concepto estudiado.

Alumno: No entiendo profesor,... pero si usted quiere yo se lo defino.

Profesor: Esta bien, $\mathbf{E}_2$. Defínelo.

Alumno: La recta tangente a una curva en un punto sobre ella, es la recta donde se estabiliza el haz de secantes.

Profesor: $\mathbf{E}_2$, todas las curvas tienen tangente.

Alumno: Profe, eso depende del punto de la curva.

Profesor: Como asi...

Alumno: Pues si la curva termina en pico, ahí no hay tangente y si no puedo identificar el punto, como cuando hay oscilaciones muy repetidas, tampoco.

Profesor: Puedes representar estas situaciones

Alumno: Claro, profe.

Profesor: Pero por favor marca cada grafica y ubica el punto donde no hay tangente...

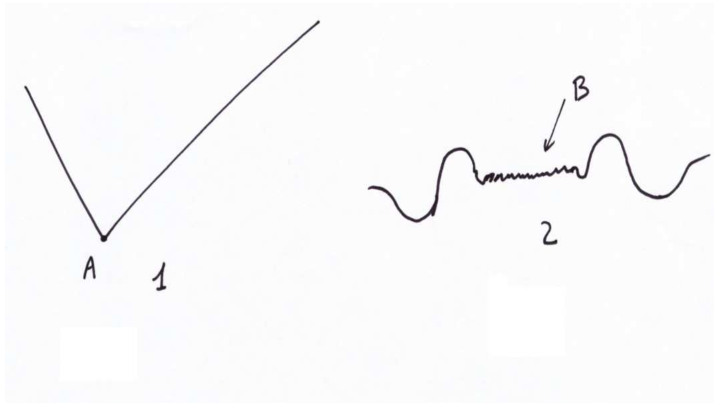
Alumno: Listo.

Profesor: En relación a la gráfica 1, porque dices que el haz de secantes no se estabiliza en ese punto.

Alumno: Mire profe que si aplico el mecanismo por la derecha se estabiliza en otra línea diferente a si aplico el mecanismo por la izquierda.

Profesor: ¿Y que problema hay?

Alumno: Como así que problema hay profe, recuerde que la tangente es única.



Profesor: ¿Y porque es única?

Alumno: Profe como se lo acabe de decir el haz de secantes se estabilza en una sola recta y está es la tangente.

Profesor: En relación a la gráfica 2, porque dices que el haz de secantes no se estabiliza en este punto.

Alumno: Lo que esta pasando profe es que... Mire y vera que estas oscilaciones no permiten, identificar los puntos cada vez más cercanos y por lo tanto no puedo aplicar el mecanismo.

Profesor: Bueno E_2, te agradecemos que nos permitieras entrevistarte.

Alumno: Con gusto profe. Que estén bien.

B.3. Entrevista 3

Profesor: Buenos días, ¿cuál es tu nombre?

Alumno: Buen día profesor, mi nombre es E_3.

Profesor: ¿Cuál es la carrera que realizas actualmente?, ¿en qué semestre te encuentras?

Alumno: Estoy estudiando, Ingeniería Industrial y voy a comenzar el segundo semestre.

Profesor: En relación al área de matemáticas, ¿qué materias cursaste, en el semestre que acabas de concluir?

Alumno: Geometría Euclidiana, Matemáticas Operativas y Cálculo I

Profesor: Diga el nombre del profesor de Cálculo I

Alumno: Edison Darío Vasco Agudelo.

Profesor: Haz participado en proyectos de investigación, que involucren algún concepto del cálculo.

Alumno: No, pero usted me pidio que respondiera un test, con relación al cálculo.

Profesor: Recuerdas el nombre del test y en que fecha se te aplico.

Alumno: No profe, yo recuerdo que me lo aplicó al inicio y al final del semestre, y que contenia preguntas sobre las tangentes, las curvas y otras figuras ahí..

Profesor: Específicamente, que recuerdas que se te pregunto acerca del concepto de tangente.

Alumno: No profe, no recuerdo que me preguntaban acerca de eso.

Profesor: E_3, de acuerdo a lo vivido en el curso de Cálculo I. Define lo que es una recta tangente a una curva.

Alumno: Haber profe, yo recuerdo de que eso lo vimos cuando empezamos Derivadas y usted lo definio como un límite.

Profesor: Pero aún no diste respuesta a mi pregunta. Por favor define con tus propias palabras lo que es una recta tangente a una curva.

Alumno: Profe, es la recta que puede tocar o cortar a la curva en un punto o en varios puntos y a la recta en infinitos puntos.

Profesor: ¿Y porque puedes afirmar que la recta tangente toca a la línea recta en infinitos puntos?

Alumno: Profe, por que tienen la misma pendiente.

Profesor: Explicate mejor.

Alumno: Haber,..., usted sabe que la ecuación de la recta es $y = mx + b$ y que la derivada de esta es $y' = m$ y como pasan por un punto de la recta, por la ecuación punto pendiente son la misma recta.

Profesor: Conoces algún método, con el que puedas comprobar que la afirmación anterior es cierta.

Alumno: No profe, no conozco y no creo que halla ninguno, pues usted nos lo hubiera enseñado.

Profesor: Uhmm...De acuerdo a lo anterior que necesitarias para comprobar que una recta es tangente a una curva o otra recta.

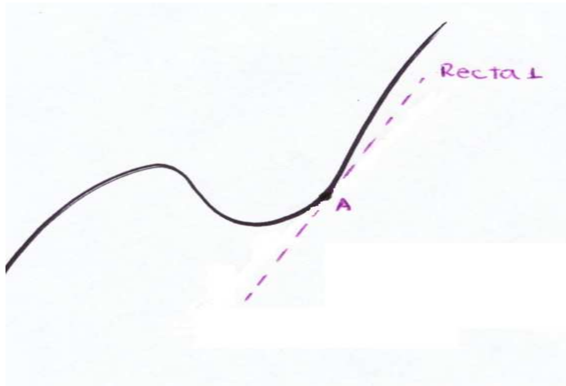
Alumno: Lo que yo necesito, es la ecuación y un punto.

Profesor: E_3, observa la curva que te va a mostrar el profesor Jorge.

Alumno: Listo, profe.

Profesor: Crees que la recta 1 es tangente a la curva, en ese punto

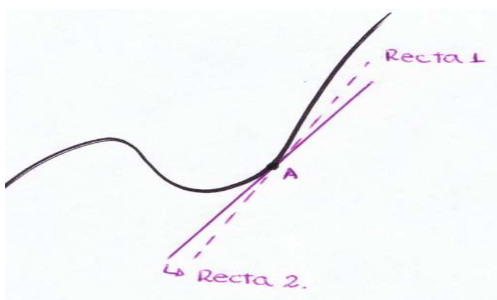
Alumno: Sí, profe.



Profesor: Porqué estas tan seguro.

Alumno: Porque uno ve.

Profesor: E_3, ahora el profesor Jorge le va a trazar otra recta a la misma curva.... Observala por favor.



Alumno: Listo, profe.

Profesor: ¿Cuál de las dos rectas es la tangente a la curva?, ¿será qué las dos rectas son tangentes a la curva?

Alumno: Profe, como no conozco la ecuación, ni las coordenadas, no puedo hacer nada, y usted nos dijo que la tangente era única, entonces...

Profesor: Entonces que...

Alumno: No profe, no le puedo decir nada, yo no se cual es.

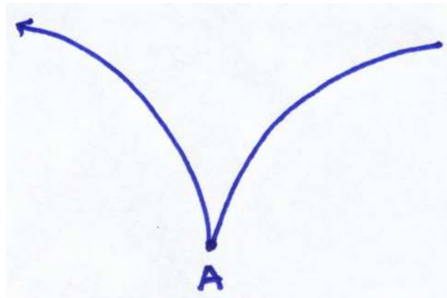
Profesor: Esta bien E_3, ahora observa, esta otra figura.

Alumno: Aja..

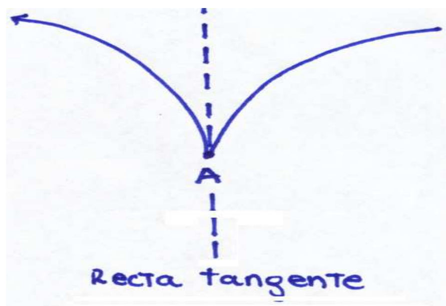
Profesor: Puedes trazar la recta tangente a esa curva en el punto indicado.

Alumno: No profe, ya le indique que no se como hacerlo.

Profesor: Vuelve a observar la figura, en el mismo punto y observa que el profesor



Jorge te ha trazado una recta, y le coloca el rótulo de tangente. ¿Crees que eso puede ser cierto?



Alumno: Profe, no lo se, ya que la recta parece ser vertical y estas rectas tienen pendiente indefinida, Uhmm..., no, no no es la tangente.

Profesor: Bueno E_3, te agradecemos que nos permitieras entrevistarte.

Alumno: De nada profe.

B.4. Entrevista 4

Profesor: Buenos días, ¿cuál es tu nombre?

Alumno: Buenos días profesor, mi nombre es E_4.

Profesor: E_4, en relación al área de matemáticas, ¿qué materias cursaste, en el semestre que acabas de concluir?

Alumno: Geometría Euclidiana, Matemáticas Operativas y Cálculo I

Profesor: ¿Cómo se llama el profesor de Cálculo I?

Alumno: Edison Vasco.

Profesor: Has participado en proyectos de investigación, que involucren algún concepto del cálculo.

Alumno: No, profe.

Profesor: Has resuelto algún tipo de test, que involucre algunos de los conceptos vistos en el curso de Cálculo I.

Alumno: Si profe, uno que usted nos hizo.

Profesor: Que conceptos, de los que tú te acuerdas, intervenian en dicho test.

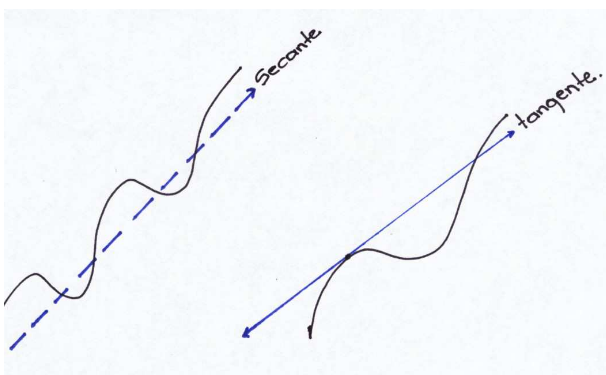
Alumno: Yo recuerdo, que se habla de la tangente, de una forma para hallarla, de curvas, de secantes, Uhmm..., listo.

Profesor: ¿Cómo diferenciarias una recta secante de una tangente?

Alumno: Es que la secante, corta a la curva en al menos dos puntos, y la tangente la toca en uno o en infinitos puntos.

Profesor: Podrías respresentarlo.

Alumno: Présteme una hoja de papel, y le muestro...



Profesor: Ahora E_4, de acuerdo a lo que acabas de graficar, en la figura que representa la tangente, ¿cómo estas seguro de que esa y no es otra?

Alumno: Profe, por la forma en que yo la grafique, creo que es la tangente, pero no tengo forma de probarlo.

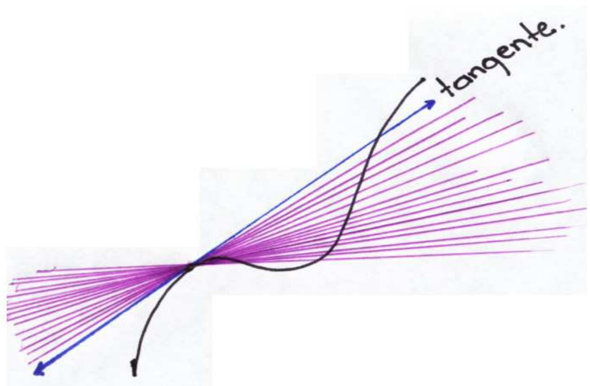
Profesor: E_4, anteriormente, me dijiste que en un test que habias desarrollado, hay un método para hallar la tangente. ¿Cuál era? y ¿te podrá ayudar con la pregunta anterior?

Alumno: Si estoy bien, se llama haz de secantes y depronto me puede ayudar, porque con el test se puede deducir que cuando el haz de secantes se va... juntando, o se estabiliza en una recta, esta es la tangente.

Profesor: Ahora E_4, de nuevo, ¿cómo estas seguro de que esa es la recta tangente y no es otra?

Alumno: Profe, présteme la gráfica un momento...

Comentario: El estudiante, comienza con la construcción del haz de secantes, para tratar de deducir si era la recta tangente o no. Y muestra la siguiente figura.



Alumno: Profe, así esta bien.

Profesor: E_4, qué buscabas con esto.

Alumno: Profe, es que yo me acuerdo que en el test, utilizaban este proceso, cuando hablaban de la tangente, y usted lo utilizo cuando empezamos derivadas... pero no me acuerdo si sigo hasta el punto o no.

Me podrías indicar, se debo seguir el proceso.

Profesor: César, debes trazar secantes que pasen por puntos cada vez más cercanos al punto que tú marcaste.

Alumno: Listo profe, me presta otra hoja por favor...

Comentario: El profesor Jorge Bedoya, realiza una copia fiel de la curva que el estudiante hizo, para que él mostrara su forma de razonar nuevamente el problema con la indicación dada.

Alumno: Profe, listo..., así esta bien.

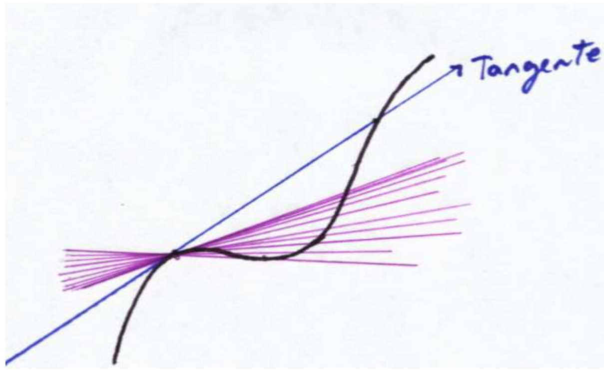
Profesor: Muy bien E_4, pero, ¿qué me quieres indicar con esto?

Alumno: Profe, esa no era la tangente.

Profesor: Y ¿porqué?

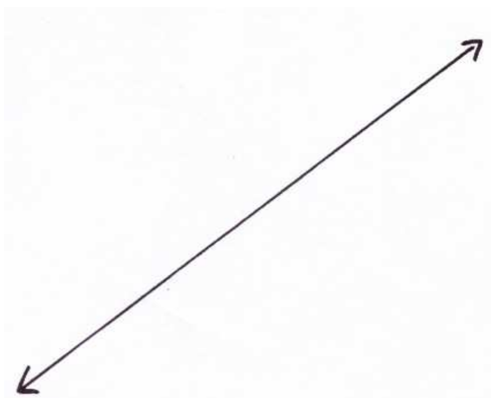
Alumno: Las secantes no se estabilizaron en ella.

Profesor: Qué más puedes concluir a través de esto que acabas de realizar.



Alumno: Que para saber si una recta es tangente, las secantes de deben estabilizar ahí.

Profesor: Y bueno E_4, que pasa con la tangente a la siguiente curva.



Alumno: Uff, esa es muy fácil profe, porque la tangente es ella misma... no ve que la recta y la tangente tienen la misma pendiente y pasan por los mismos puntos.

Profesor: E_4 muchas gracias.

Alumno: Con gusto.

B.5. Entrevista 5

Profesor: Buenos días, ¿cuál es tu nombre?

Alumno: Buenos días, Mi nombre es E_5.

Profesor: ¿Cuál es la carrera que realizas actualmente?, ¿en que semestre te encuentras?

Alumno: Ingeniería de Materiales, y voy para el segundo semestre

Profesor: En relación al área de matemáticas, ¿qué materias cursaste, en el semestre que acabas de concluir?

Alumno: Geometría Euclidiana

Profesor: Haz participado, en proyectos de investigación que involucren algún concepto del cálculo.

Alumno: No, no he participado en ninguno.

Profesor: ¿Qué entiendes o como defines un punto?

Alumno: Es la huella que deja un lápiz sobre el papel cuando se deja caer, pero en el curso de Geometría concluimos que un punto es un punto y punto.

Profesor: A partir de las dimensiones ancho, largo y alto, ¿cuál(es) crees que posee el punto?

Alumno: Puede poseer ancho y largo según su forma

Profesor: Entonces, ¿qué forma le asignarías al punto?

Alumno: Profe, puede ser un círculo o un cuadrado.

Profesor: Bueno, a partir de la definición que diste de punto, que entiendes o más como defines una línea recta.

Alumno: Ah, es la unión de muchos puntos colineales.

Profesor: ¿Y que es una curva?

Alumno: No sabría como definirla, pero se puede imaginar como una carretera en forma de zig-zag.

Profesor: ¿Crees que la recta es un caso especial de la curva?

Alumno: ¡Por supuesto que no profe!, no ve que la recta es colineal y la curva no.

Profesor: Bueno E_5, en la hoja de papel que se te entrego, dibuja una curva, cualquiera y una línea recta.

Alumno: Listo profe...

Profesor: Ahora, ubica un punto sobre cada una de ellas.

Alumno: Listo

Profesor: Dibuja la recta que consideres, es la tangente a cada una de esas curvas en el punto que indicastes.

Alumno: Listo.

Profesor: Con base a las rectas, que consideras que son las tangentes a las curvas que tú dibujaste. Define que es la recta tangente.

Alumno: Profe, la tangente es la recta toca a la grafica en un solo punto.

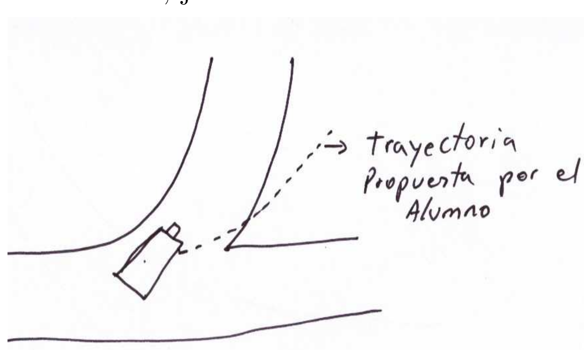
Profesor: E_5, ¿cuándo una recta toca a una grafica?.

Alumno: Cuando ellas se cortan en un solo punto.

Profesor: Entonces, que la recta toque o corte a una gráfica, significa lo mismo

Alumno: Uhmm..., eso depende de la curva Profe. Por que si es un circulo lo toca solamente y cualquier otra la corta y la toca.

Profesor: En la hoja que te va a mostrar el profesor Jorge, se representa una situación donde se puede observar como un automóvil, toma a gran velocidad una curva. Si la puerta derecha del automóvil se encuentra abierta, dibuja la trayectoria de un objeto que se sale del vehículo, justo en este momento. Justifica tu respuesta.



Alumno: Profe, eso depende de la velocidad, de la forma del objeto, del peso. Pero, creo que la trayectoria podría ser esta (Señala en la figura).

Profesor: Encuentras algún tipo de relación de este movimiento, con lo discutido hasta ahora.

Alumno: Profe, que tiene que ver esto con lo que usted me esta preguntando, yo no le veo ninguna relación.

Profesor: Tranquila E_5. Ahora, te vamos a mostrar otra figura, en donde se te representa una curva y dos rectas que parecen ser tangentes. ¿Cuál de las dos es la recta tangente?, ¿será que las dos son tangentes?

Alumno: Profe, me parece que las dos son tangentes.

Profesor: ¿Por qué?

Alumno: Por que ambas la tocan en un solo punto.

Profesor: Bueno E_5, te agradecemos que nos permitieras entrevistarte.

Alumno: Con gusto profe.

Análisis de las entrevistas

Como se indicó al inicio del Anexo, las entrevistas están enfocadas en mostrar las diferencias entre los diferentes grupos de alumnos, frente aspectos como el lenguaje, la aplicación del concepto y la estructura de las definiciones. Para cumplir con este propósito se realiza el siguiente análisis:

Entrevistas 1 y 2: Estas fueron realizadas a dos de los alumnos participantes del proyecto de investigación, y en ellas se observa claramente la ratificación de los resultados obtenidos durante el análisis correspondiente al grupo de alumnos que progreso al Nivel III de razonamiento, pero de ellas se la propiedad con la que los alumnos entregan las definiciones, ya que, aún con la rapidez y estructuración de la entrevista, no recurren a errores conceptuales para dar respuesta a las preguntas planteadas, mostrando un manejo integro del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

Entrevista 3: Esta entrevista fue realizada a un alumno, que originalmente fue ubicado en el Nivel II de razonamiento, no participó en el proyecto de investigación y después de volver a aplicar el test permaneció en dicho nivel.

De esta entrevista se resalta el hecho, que el alumno aunque ha sido sometido a la aplicación del test “Curvas y Tangentes”, no ha mejorado su forma de razonar frente al concepto objeto de estudio, esto lo evidencia en el momento en el que el docente le pide que defina la recta tangente a una curva, este recurra a las expresiones algebraicas para tratar de definirla a través del concepto de derivada y así mismo, como no conoce la ecuación de la expresión no es capaz de determinar si una recta es tangente a una curva o no, y tampoco es capaz de comprobar su unicidad, además, cuando se le presentan algunas curvas patológicas no reconoce sobre ellas la dirección de la recta tangente. Así mismo, este alumno continúa manteniendo imágenes conceptuales que impiden el progreso hacia un nivel superior de razonamiento.

Entrevista 4: Esta entrevista fue realizada a un alumno, que originalmente fue ubicado en el Nivel II de razonamiento, no participó en el proyecto de investigación y después de volver a aplicar el tets, resulto que progresó en su nivel de razonamiento frente al concepto objeto de estudio.

De esta entrevista se resalta el hecho, que el alumno aunque no participó de la investigación, acepta algunos de los procesos de razonamiento infinito, ya que en sí mismos los test escritos son un gran aporte de información, pero no tiene formado de una manera concreta en su estructura cognitiva una red completa de relaciones bien establecida frente a este concepto.

Además, aunque el alumno conoce el mecanismo del haz de secantes y sabe lo que puede determinar la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, y bajo una somera orientación trata de implementar este mecanismo para determinar una recta tangente, y comprobar si en realidad una recta es tangente o no, realmente de acuerdo con su forma de expresarse, este alumno no lo siente la necesidad de verificar que la sola apariencia no describe el concepto de tangente y que la ésta debe de cumplir una propiedad adicional, que es la que realmente la caracteriza, que es ser el final de un proceso de aproximación, y en este mismo sentido no reconoce la necesidad de llevar a cabo el proceso para distinguir aquellas rectas que son tangentes a una curva en un punto dado, de las que no lo son. Es importante, realizar una comparación entre los alumnos de las entrevistas tres (3) y cuatro (4), ya que el primero no revelo haber utilizado el test aplicado como una experiencia de aprendizaje, mientras que el segundo si lo hizo.

Así mismo, se observa que hay una seria diferencia entre un alumno que ha progresado al Nivel III por medio de la aplicación del módulo de instrucción del que solo está ubicado en este Nivel, solamente a través de la aplicación se test. Esta idea se refuerza en el Capítulo 5 (p. 129).

Entrevista 5: Esta entrevista fue realizada a un alumno, que no había realizado un curso de cálculo diferencial, no participó en el proyecto de investigación y tampoco fue sometido a la aplicación del test "Curvas y Tangentes".

Esta información se hace relevante, en el sentido de que todos los resultados obtenidos a través de ella, son la muestra de la forma de razonar que tiene un alumno acerca de los procesos de razonamiento infinito, solo son la instrucción dada en el último año de bachillerato. A partir de esto, se observa que mantiene la concepción Euclidea de recta tangente a una circunferencia [1] y además de esto, no posee en su estructura cognitiva un mecanismo para determinar si una recta es tangente o no.

A modo personal, los investigadores creemos que es preocupante la forma de explicación de esos conceptos en la interfase bachillerato - universidad, colocando de manifiesto un grave problema metodológico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los fundamentos del Análisis Matemático en esta instancia.

[1] La definición dada por Euclides acerca de una recta tangente a un círculo es: "Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta" ([13], p. 750).

Apéndice C

Material en medio magnético

Para dar cumplimiento a uno de los objetivos propuestos en la fase 3 de aprendizaje (Ver Capítulo 3, sección 3.3.3, p. 72), se utiliza una metodología desarrollada por Esteban y Pérez Carreras ([59]), en la cual, para enseñar el concepto de aproximacion local en su manifestacion de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, se utiliza la visualizacion que se obtiene a través del mecanismo del haz de secantes, a partir de la implementación del asistente matematico DERIVE®.

Cabe resaltar que esta metodología es apropiada, especificamente en esta etapa del proceso, pues su implementación no requiere de manipulaciones algebraicas que puedan entorpecer el razonamiento que los alumnos deben desarrollar y exhibir a lo largo de la aplicación del módulo de instrucción.

Apéndice D

Módulo de instrucción

D.1. EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE FASE 1: INFORMACIÓN

Nombre:______________________________ **CC o TI:**____________

Objeto de estudio:

- Informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que se va a trabajar, el tipo de problemas que se van a plantear, los materiales se van a utilizar. Además, los estudiantes aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles relacionados con el objeto de estudio.

Materiales:

- Un lápiz.
- Una regla sin marcas.
- Cuatro plantillas diferentes, marcadas con los nombres Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5 y Actividad 6, con la representación de 11 curvas seleccionadas previamente por el grupo de investigación.

INSTRUCCIONES.

Cada una de las actividades de la que está compuesta la experiencia de aprendizaje, debe realizarse completamente, no se debe dejar ninguna actividad en blanco, es decir, no se debe quedar ninguna actividad sin resolver.

En cada una de las actividades, contarás con el material necesario para la elaboración de la experiencia de aprendizaje, sí en algún momento necesitas más material o este no es entregado por favor remitirse al docente y solicitarlo para realizar la actividad.

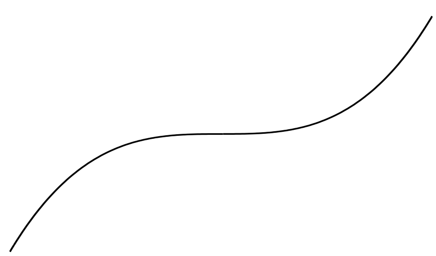
Las actividades marcadas como 1 y 2 para ésta fase, ya se elaboraron. En esta parte de la experiencia debes comenzar con la actividad 3.

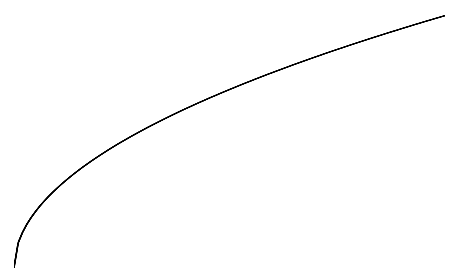
Actividad 1. En la hoja marcada con el nombre de “mapa conceptual”, elabora un mapa conceptual con los siguientes términos: punto, curva, recta y tangente.

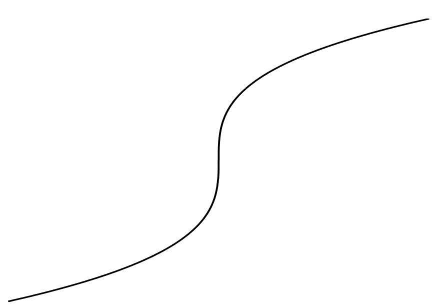
Actividad 2. Realiza el test marcado con el nombre de “Exploración de la idea de punto”.

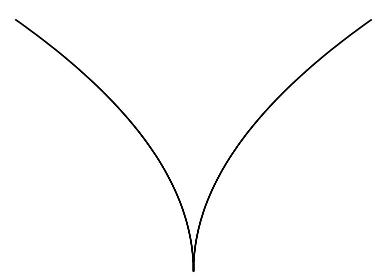
Actividad 3.

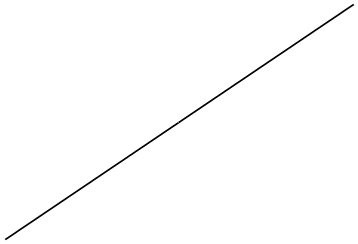
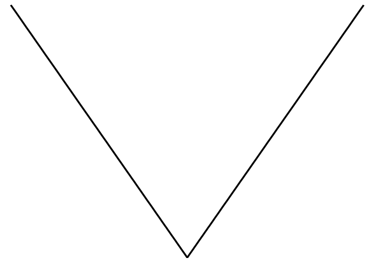
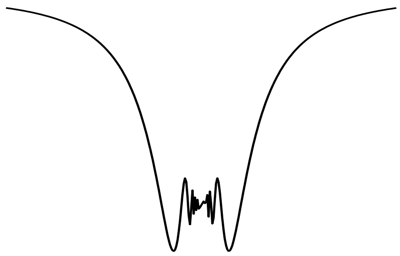
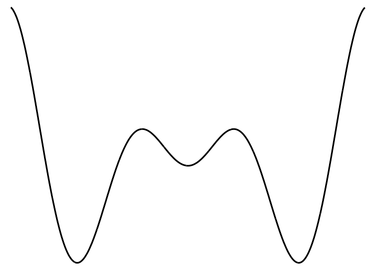
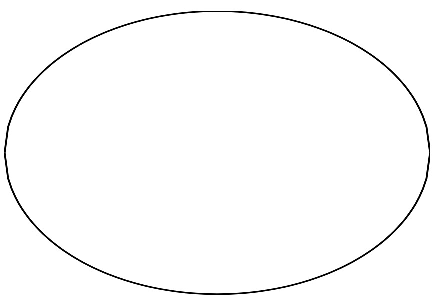
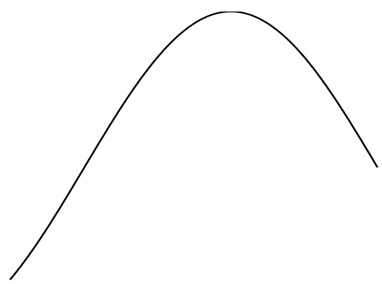
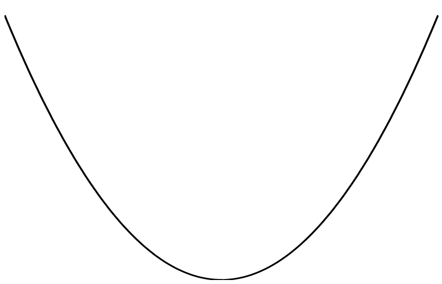
- Marca sobre cada una de las curvas dadas, los puntos que consideres necesario para describir la forma de la curva. Donde creas conveniente puedes escribir un comentario sobre esta Actividad a la derecha de la curva.









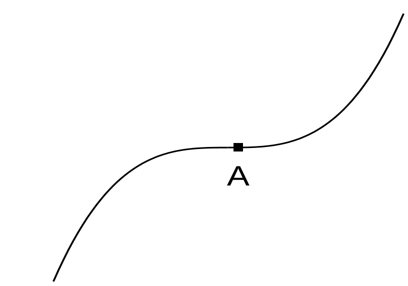








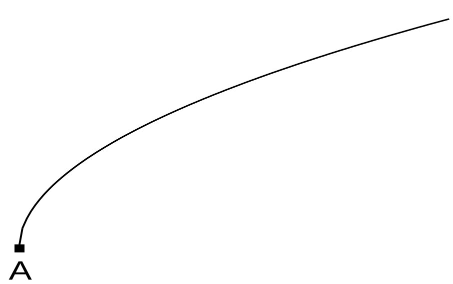
- Describe con tus propias palabras la actividad que acabas de realizar.

Actividad 4.

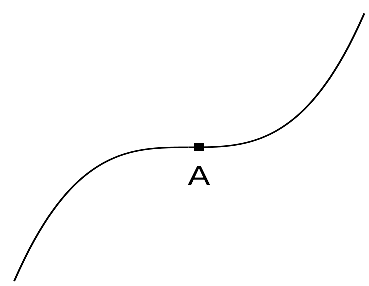
- Para cada una de las curvas ubicadas en la columna izquierda, cuando sea posible, marca un punto B, sobre ella, a la derecha de A. Partiendo de B marca puntos cada vez más cercanos a A pero sin sobrepasarlo.
- Para cada una de las curvas ubicadas en la columna derecha, cuando sea posible, marca un punto C, sobre ella, a la izquierda de A. Partiendo de C marca puntos cada vez más cercanos a A pero sin sobrepasarlo.
- Donde creas necesario puedes escribir un comentario sobre esta actividad a la derecha de la curva.

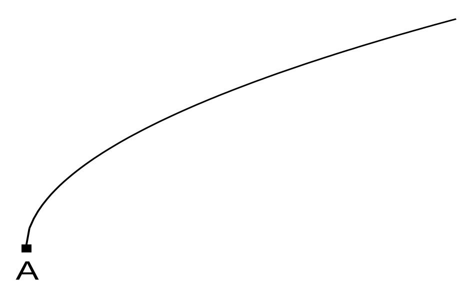
Columna izquierda

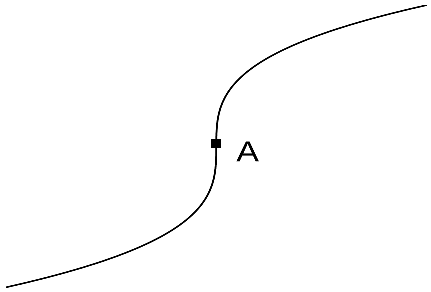


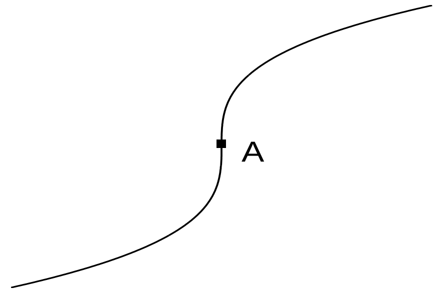


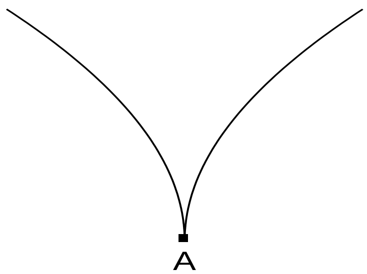
Columna derecha

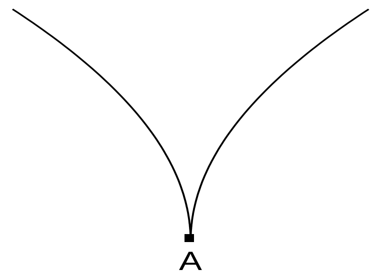


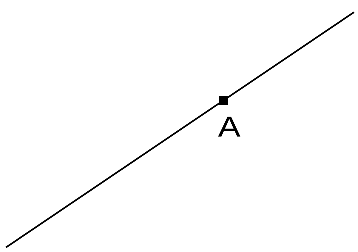


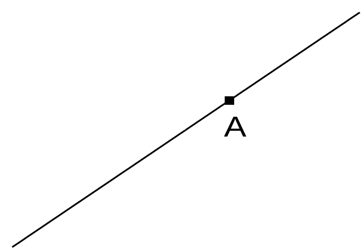

A

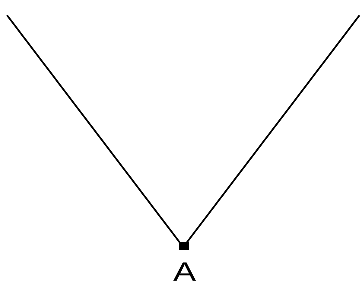

A

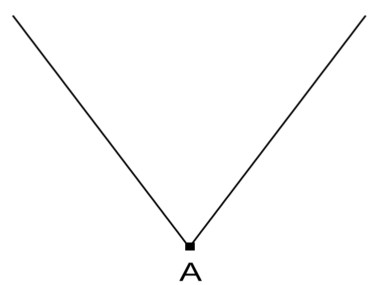

A

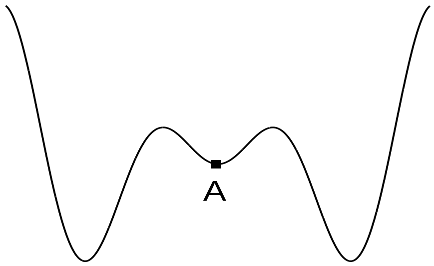

A

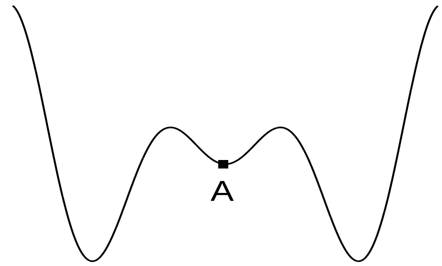

A

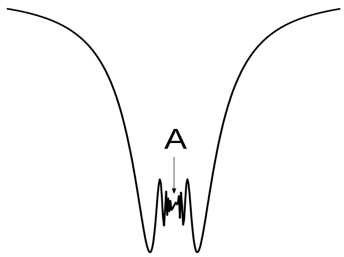

A

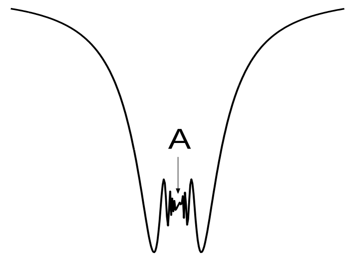

A

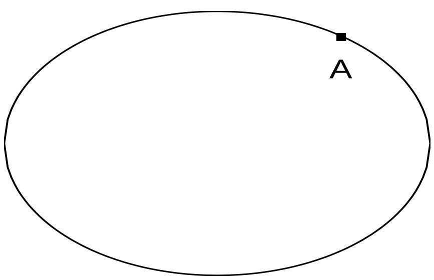

A

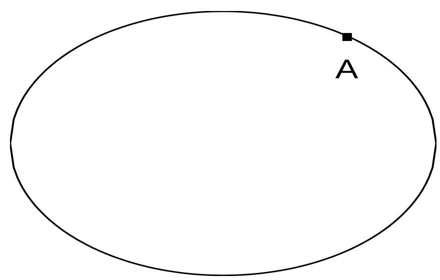

A

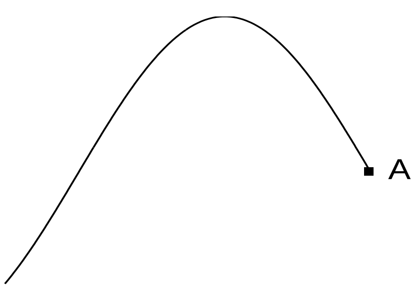

A

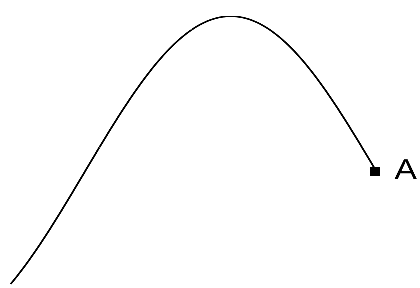

A

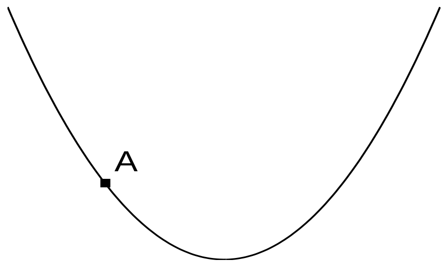

A

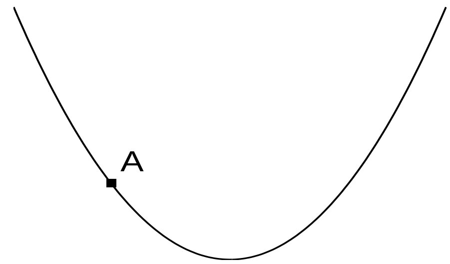

A


A


A


A





- Con tus propias palabras, describe el proceso de marcar puntos sobre una curva cada vez más cercanos a un punto dado. ¿Para todas las curvas el proceso es el mismo?

Actividad 5.

Para cada una de las cuvas:

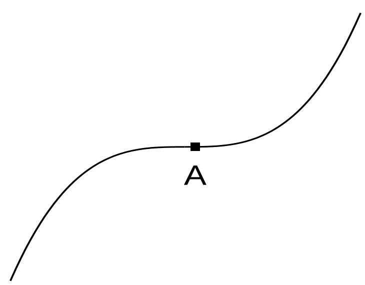
a. Repite la experiencia anterior.

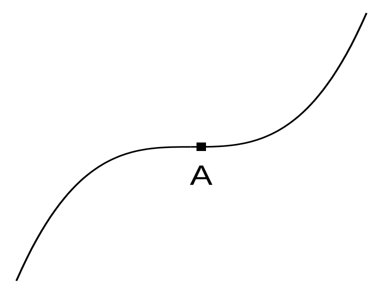
b. Luego, con la regla traza rectas que pasen por el punto A y por cada uno de los puntos marcados sobre la curva cada vez más cercanos a A, (rectas secantes)

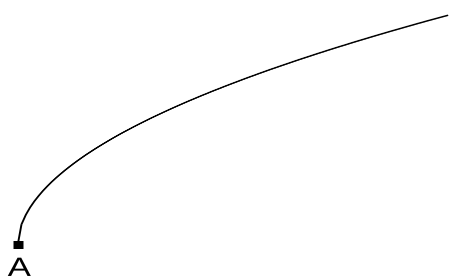
c. Donde consideres necesario escribe un comentario sobre la actividad a la derecha de la curva.

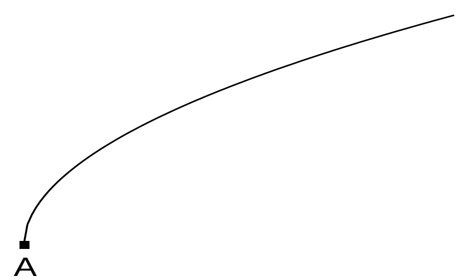
Puntos sobre la izquierda de A

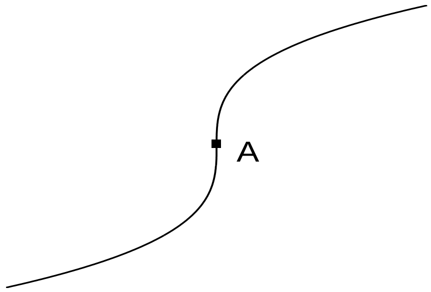
Puntos sobre la derecha de A

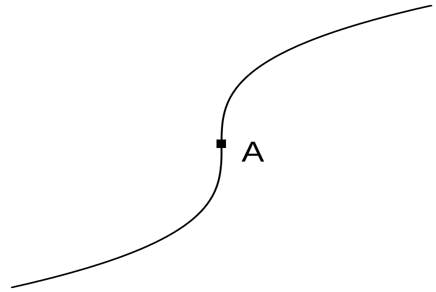


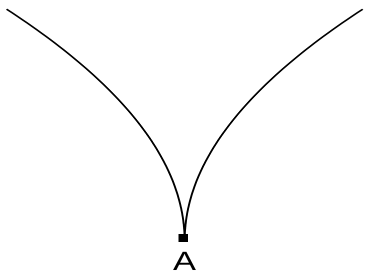


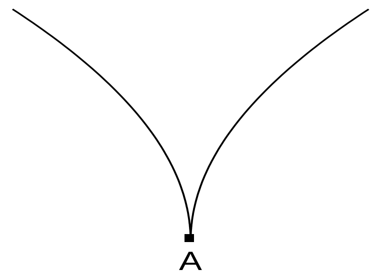


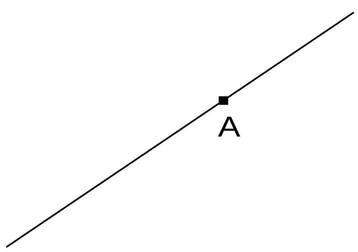


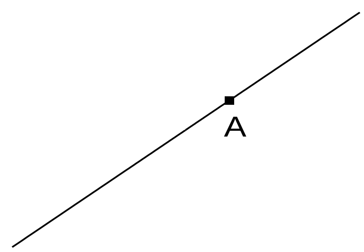

A

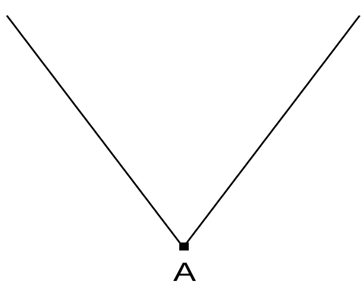

A

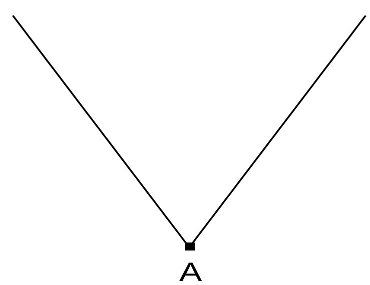

A

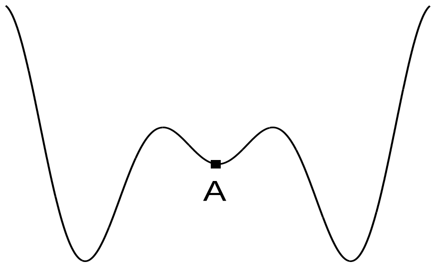

A

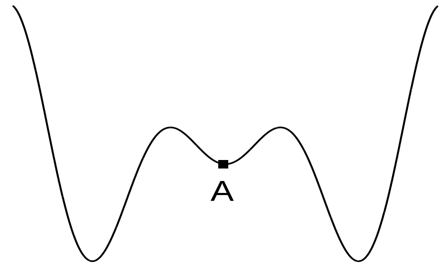

A

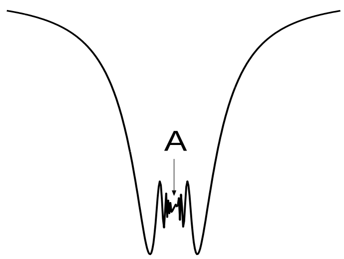

A

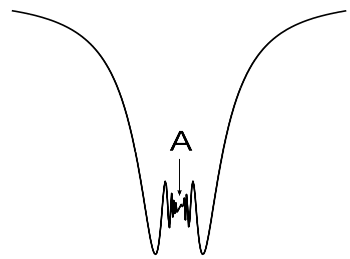

A

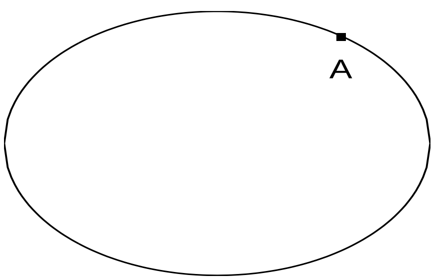

A

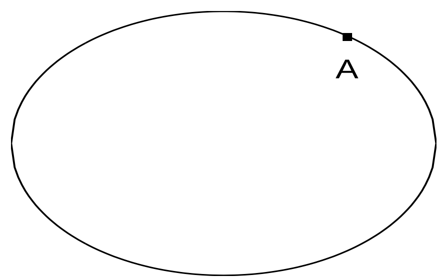

A

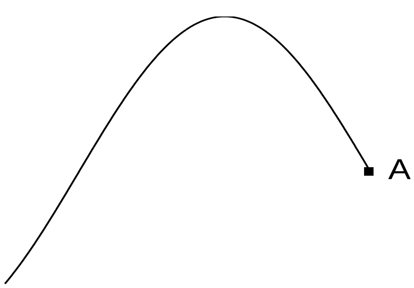

A

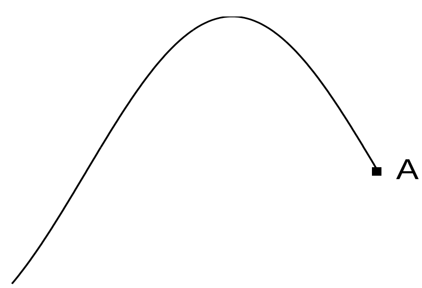

A

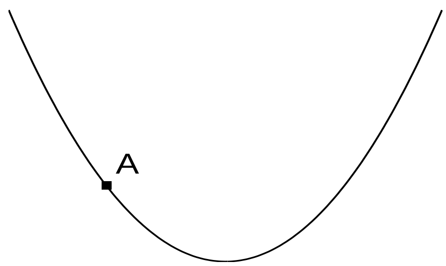

A

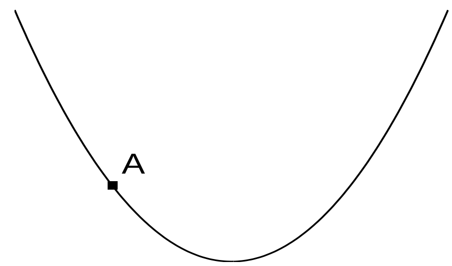

A


A


A


A





Responde las siguientes preguntas

a. ¿Qué le sucede a las rectas secantes cuándo se trazan por puntos cada vez más cercanos a A?

b. Como pudiste notar, en cada caso las curvas a izquierda y a derecha son las mismas y está marcado sobre ella el mismo punto. Sí huieras hecho el proceso de marcar los puntos a izquierda y a derecha sobre la misma curva ¿A qué conclusiones se podría llegar?

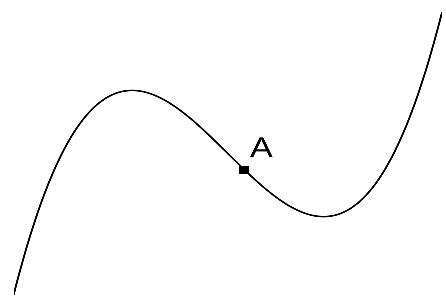
Actividad 6. Recapitulación

En la siguiente curva, se presenta, como en casos anteriores, una curva y un punto ubicado sobre la misma. En ella debes realizar el siguiente proceso:

a. Marca puntos muy proximos tanto a la derecha como a la izquierda de A.

b. Traza las rectas secantes que pasan por A y por los puntos muy proximos a A.

c. Al trazar secantes que pasen sobre la curva, a uno y otro lado del punto dado. ¿Qué observaste? ¿Qué conclusiones puedes obtener?



D.2. EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Nombre:______________________________ **CC o TI:**____________

Objeto de estudio:

- En esta fase las experiencias buscan que los alumnos descubran, comprendan y aprendan los conceptos, relaciones y propiedades de los elementos con que se van a trabajar. Con ellas, se construirán los elementos básicos de la red de relaciones para el nuevo nivel.

Materiales:

- Un lápiz.
- Una regla sin marcas.
- Un cuadernillo
- Un trozo de cuerda
- Un instrumento para cortar: Tijeras o Bisturí.

INSTRUCCIONES.

Cada una de las actividades de la que está compuesta la experiencia de aprendizaje, debe realizarse completamente, no se debe dejar ninguna actividad en blanco, es decir, no se debe quedar ninguna actividad sin resolver.

En cada una de las actividades, contarás con el material necesario para la elaboración de la experiencia de aprendizaje, sí en algún momento necesitas más material o este no es entregado por favor remitirse al docente y solicitarlo para realizar la actividad.

Actividad 1.

- Divide el trozo de cuerda que se te ha entregado por la mitad, toma uno de los dos trozos resultantes y divídelo por la mitad nuevamente, continua este proceso hasta donde consideres que se puede realizar.

Preguntas.

- ¿Cuántos cortes pudiste realizar?

- ¿La cantidad de cortes que realizaste depende del instrumento de corte utilizado? ¿Depende del material?

- Si la respuesta anterior es afirmativa. ¿Cuántos cortes más crees que puedes hacer, si tuvieras el material más apropiado para realizar la actividad? Justifica tu respuesta.

- Este proceso puede parar. Justifica tu respuesta.

- ¿Qué resultaría si volvieras a unir los trozos cortados?

Actividad 2.

- Para el segmento de recta dado

Dividelo por la mitad, sombrea uno de los dos segmentos resultantes. El trozo sin sombrear, divídelo nuevamente a la mitad. Repite el proceso anterior. Continua este proceso hasta cuando consideres que se puede realizar con los instrumentos utilizados.

Preguntas.

- ¿Cuántas divisiones pudiste realizar aplicando éste proceso?

- ¿Consideras que la cantidad de divisiones hechas depende de la longitud del segmento? Justifica tu respuesta.

- ¿Consideras que este proceso puede terminar?

- ¿Qué pasa con la región sombreada?

- Imaginate un segmento, ¿si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar?, ¿qué sucedería con la región sombreada?

Actividad 3.

- Para el segmento de recta dado

  Dividelo en tres partes iguales, sombrea la parte de la izquierda y la de la derecha del segmento resultante. Con el segmento que quedo sin sombrear, repite el proceso descrito anteriormente. Continúa este proceso hasta donde consideres que se puede realizar con los instrumentos utilizados.

Preguntas.

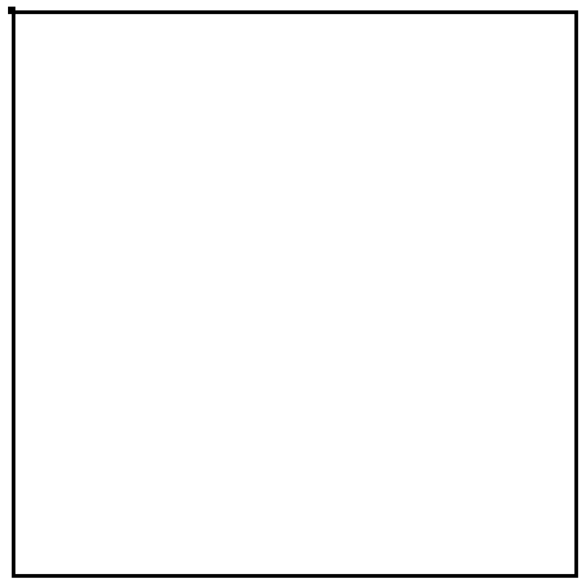
- Consideras que este proceso puede terminar.

- ¿Qué pasa con la región sombreada?

- Imaginate un segmento, ¿Si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar?, ¿qué sucedería con la región sombreada?

Actividad 4.

- El siguiente cuadrado



Dividelo en dos partes iguales, sombrea una de ellas. A la parte del cuadrado que quedo sin sombrear divídela nuevamente en dos partes iguales y de nuevo sombrea una de ellas. Continua este proceso hasta cuando consideres que se puede realizar con la ayuda de los instrumentos utilizados.

Preguntas.

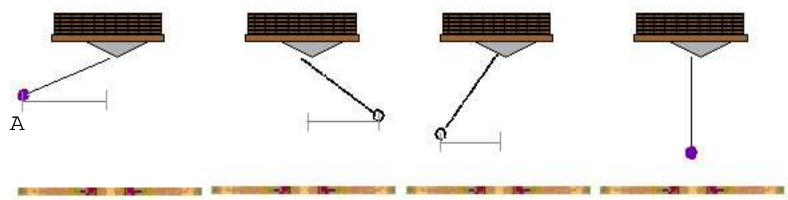
- El proceso realizado, ¿puede terminar?

- ¿Qué pasa con la región sombreada?

- Imaginate un cuadrado ¿Si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que éste podría terminar? ¿Qué sucedería con la región sombreada?

Actividad 5.

- Un péndulo se suelta de la posición A, se deja oscilar libremente sujeto a la fuerza de la gravedad y a la fricción del aire. Progresivamente, se observa la desviación, hacia la derecha o hacia la izquierda, desde la vertical que pasa por el pivote hasta el extremo del péndulo, como lo indican las marcas horizontales. Esta acción será ilustrada por el docente en el aula de clase, mostrando un péndulo oscilando.



Preguntas.

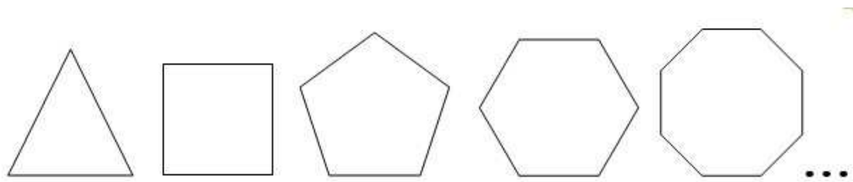
- Consideras que este proceso puede terminar.

- Describe con tus propias palabras, ¿qué observa con el movimiento del péndulo?

- Puedes relacionar este movimiento con alguna de las actividades realizadas anteriormente. Si tu respuesta es afirmativa escribe el número de la actividad y representa o describe la similitud entre ellas.

Actividad 6.

- Observa la siguiente secuencia de figuras...



Preguntas.

- Consideras que este proceso puede terminar.

- Describe con tus propias palabras ¿Qué pasa con la secuencia de figuras?

- Puedes relacionar este movimiento con alguna de las actividades realizadas anteriormente. Si tu respuesta es afirmativa escribe el número de la actividad y representa o describe la similitud entre ellas.

Actividad 7. Mapa Conceptual

- Elabora un mapa conceptual con los términos: Punto, Curva, Recta, Tangente, Aproximación y Haz de secantes.

D.3. EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE FASE 3: EXPLICITACIÓN

Nombre:________________________________ **CC o TI:**____________

Objeto de estudio:

- Los estudiantes deben intercambiar sus experiencias, comentando las regularidades observadas. Además se debe hacer una revisión global del trabajo hecho en las dos primeras fases, buscando el manejo correcto y bien entendido del mecanismo y, de practica y perfeccionamiento en la forma de expresarse (manejo del lenguaje).

INSTRUCCIONES.

Es importante recalcar que esta no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho anteriormente. Debido a esto las 3 actividades propuestas para esta experiencia de aprendizaje son:

Actividad 1. Recapitulación de todo el trabajo realizado en las dos fases anteriores, mediante una experiencia con el asistente matemático DERIVE ®, de forma participativa por parte de los alumnos.

Actividad 2. Discusión y puesta en común de todo el proceso. Se hará énfasis en la forma de expresarse de los estudiantes y, de las relaciones y propiedades establecidas o creadas durante el transcurso del trabajo.

Actividad 3. Elaborar dos mapas conceptuales, el primero de ellos será diseñado por grupos de tres alumnos con los conceptos: punto, recta, curva, tangente, aproximación y haz de secantes. El segundo mapa conceptual se hará en forma grupal y tendrá como eje los mismos conceptos trabajados anteriormente.

Actividad 4. A continuación se presentan dos columnas, en cada una de ellas realiza el proceso que se indica:

En esta columna, realiza la gráfica de curvas con las cuales no se hayan trabajado anteriormente y que consideres, se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado sobre ella.	En esta columa, realiza la gráfica de curvas con las cuales no se hayan trabajado anteriormente y que consideres, **no** se les pueda aplicar el mecanismo del haz de secantes para encontrar la recta tangente en un punto dado sobre ella. Además de realizar las gráficas, marca el punto o el sitio donde el mecanismo del haz de secantes no se puede aplicar y describe con tus propias palabras el porqué de este hecho.

D.4. EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE

Nombre:______________________________ **CC o TI:**____________

Objeto de estudio:

- En esta fase los estudiantes deberán completar la red de relaciones que empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

Materiales:

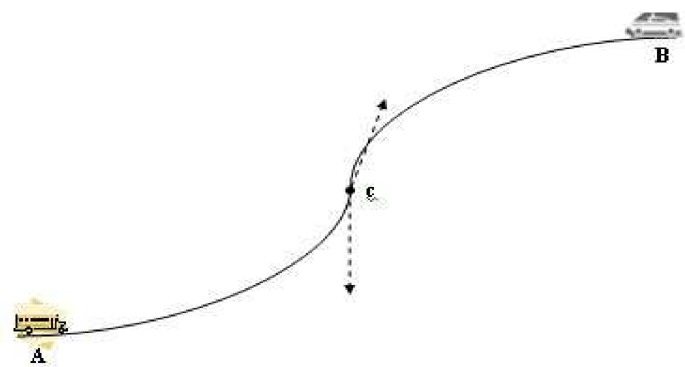
- Un lápiz.
- Una regla sin marcas.
- Un cuadernillo.

INSTRUCCIONES.

Cada una de las actividades de la que está compuesta la experiencia de aprendizaje, debe realizarse completamente, no se debe dejar ninguna actividad en blanco, es decir, no se debe quedar ninguna actividad sin resolver.

En cada una de las actividades, contarás con el material necesario para la elaboración de la experiencia de aprendizaje, sí en algún momento necesitas más material o este no es entregado por favor remitirse al docente y solicitarlo para realizar la actividad.

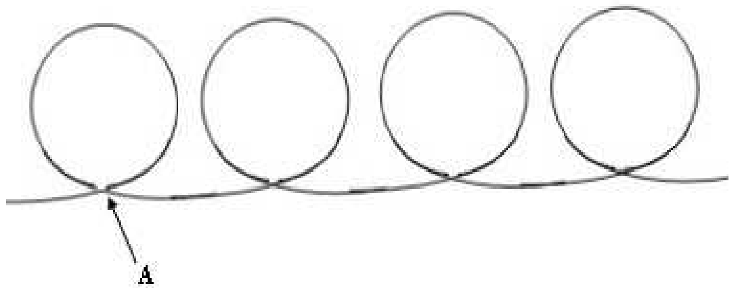
Actividad 1. En el siguiente croquis,



Se observan dos carros situados sobre una misma vía. El vehículo situado en la posición **A**, debido a un descuido del conductor, se sale de la vía en el punto **C**. Lo mismo le sucede al vehículo situado en la posición **B**. Las investigaciones del caso, realizadas por un ente policial, arrojan como resultado que ambos carros se salieron en forma tangencial en el punto indicado. Uno de los abogados defensores, alega que el argumento presentado anteriormente es falso.

- Si de alguna manera, en forma contundente, pudieras ayudar al abogado que alega que el argumento presentado es falso, ¿de que forma lo harías?
- Si fuera el caso que alguno de los dos carros, no se hubiera salido de la carretera en forma tangencial, ¿cómo probarías cual de los dos carros es? y ¿cómo podrías garantizar que el método empleado anteriormente, es el correcto?

Actividad 2. Observa la siguiente figura.

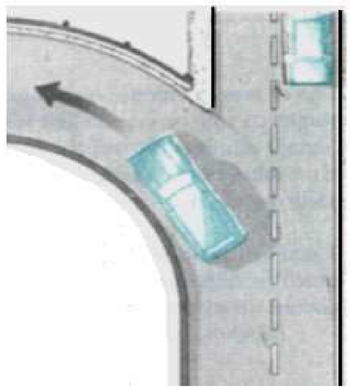


¿Es posible encontrar la recta tangente a esta curva en el punto indicado? Justifica tu respuesta.

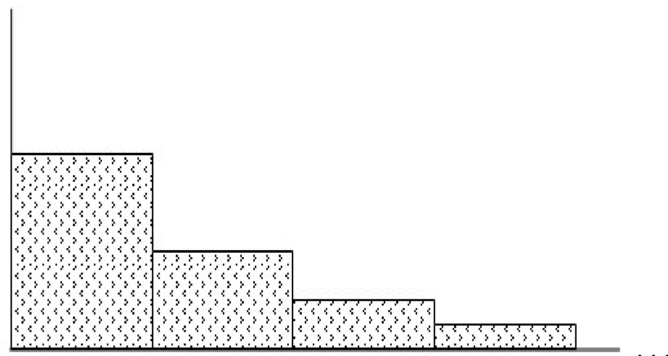
¿Si no es posible, describe que pasa con la curva en ese punto?

¿Si lo pudieras relacionar con alguna otra de las actividades realizadas, con cual lo harías y porqué?

Actividad 3. En la siguiente figura se puede observar como un automóvil, toma a gran velocidad una curva. Si la puerta derecha del automóvil se encuentra abierta, ¿Qué movimiento describirá un objeto ubicado en dicha puerta, en el preciso instante que el automóvil comience a describir la curva? Justifica tu respuesta.



Actividad 4. La imagen que se muestra a continuación, describe el siguiente proceso: se toma un rectángulo y con igual base, pero con la mitad de su altura se construye el siguiente, y así sucesivamente se continúa con el proceso.



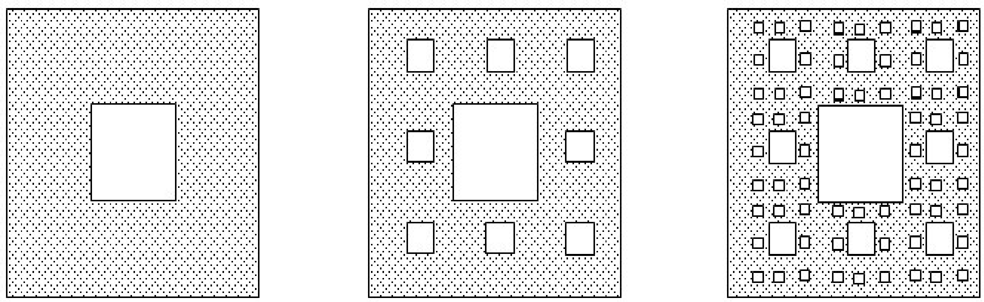
¿Qué pasa con el área de los rectángulos? Justifica tu respuesta.

¿Puedes graficar este proceso indefinidamente?

Si tu respuesta anterior es NO, ¿De qué manera puedes representar esta figura?

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna de las actividades realizadas anteriormente con cual lo harías y porqué?

Actividad 5. La carpeta de Sierpinski, se forma quitando la novena parte central de un cuadrado de lado 1. Después se suprimen los centros de los ocho cuadrados restantes, que son más pequeños, y así sucesivamente. La figura anexa muestra los tres primeros pasos de este procedimiento.



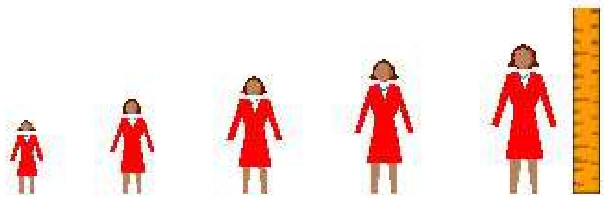
Según el proceso descrito anteriormente

¿Qué podrías decir acerca de la suma de las áreas de los cuadrados que se quitaron?

¿Qué pasa con al área de la carpeta de Sierpinski?

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna otra de las actividades realizadas con cual lo harías y porqué?

Actividad 6. Observa la siguiente imagen



Se supone que el crecimiento de una persona depende de la edad y se interpreta este fenómeno como un proceso continuo, ¿qué pasa con este fenómeno. . . para, sigue, se estabiliza?

¿Puedes afirmar categóricamente cuál es la estatura de una persona? Justifica tu respuesta.

¿Si pudieras relacionar esta actividad, con alguna de las actividades realizadas anteriormente, con cuál lo harías y porqué?

Actividad 7. A partir de tus propias experiencias (fenómenos, objetos, hechos, etc.), construya o cite ejemplos como los anteriores. Además, realiza una interpretación de la situación descrita y, cómo y porqué se relaciona con el objeto de estudio trabajado hasta el momento.

D.5. EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE FASE 5: INTEGRACIÓN

Nombre:______________________________ **CC o TI:**____________

Objeto de estudio:

- En esta fase los estudiantes deberán realizar un mapa conceptual, que permita verificar la incorporación del lenguaje propio del nuevo nivel.

Materiales:

- Un lápiz.
- Un cuadernillo.

INSTRUCCIONES.

En esta actividad, debes elaborar un mapa conceptual que contenga la mayor parte de los conceptos trabajados durante el proceso. Realízalo con la mayor precisión posible en el manejo del lenguaje, para que así obtengas la mayor cantidad de relaciones válidas posibles.

Actividad 1. En la hoja anexa, elabora un mapa conceptual relacionando los términos, punto, curva, recta, tangente, haz de secantes y aproximación local.

Apéndice E

Participación en Eventos

En este Apéndice, se presenta una descripción de los artículos realizados durante el proceso de la elaboración del trabajo de grado, tanto de aquellos que fueron publicados, como de aquellos que están en proceso de revisón a la fecha de la culminación de la misma. Además de esto, se muestra cada una de las ponencias realizadas en el mismo periodo, las cuales muestran los avances que se iban obteniendo durante el proceso.

E.1. Artículos

Durante el proceso de investigación se realizaron cuatro artículos, de los cuales uno fue publicado, el otro fue revisado, aceptado y está en proceso de publicación y los otros dos están en proceso de revisión.

E.1.1. Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele

Pedro Vicente Esteban Duarte, Universidad Eafit, Colombia
Edison Darío Vasco Agudelo, Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Alberto Bedoya Beltrán, Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia

Resumen: Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones, facilitando el análisis del lenguaje empleado en su construcción y poniendo de manifiesto la integración que los aprendices tienen entre los conceptos empleados para su elaboración. En el modelo educativo de

van Hiele, es considerado el lenguaje como una de sus características fundamentales en el proceso de aprendizaje de un concepto geométrico o matemático y es uno de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual un alumno se encuentra. El modelo de van Hiele está compuesto por cinco (5) niveles de razonamiento, cinco (5) fases de aprendizaje y el *insight*. A partir del análisis del lenguaje se pueden diseñar experiencias de aprendizaje significativas para potenciar el progreso de un alumno a través de los niveles de razonamiento postulados por dicho modelo.

En este artículo, nos proponemos mostrar como la implementación de los mapas conceptúales dentro del modelo educativo de van Hiele, ayuda a detectar con claridad el lenguaje empleado por los alumnos, y así, poder propender no solo por el fortalecimiento del mismo, sino por el avance en el nivel de razonamiento del alumno, respecto al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

Estado: Publicado

Revista: Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First International Conference on Concept Mapping.

Volumen: 2

Codigo ISBN: 84–9769–065–6

Lugar: Pamplona, España

Año: 2004

Editores: J. D. Novak, A. J. Cañas, F. M. González.

E.1.2. Los mapas conceptuales como estrategia para desarrollar y evaluar competencias

Pedro Vicente Esteban Duarte, Universidad Eafit, Colombia
Edison Darío Vasco Agudelo, Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Alberto Bedoya Beltrán, Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia

Resumen: Los mapas conceptuales son una herramienta que permite representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Éstos mapas se basan en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, y sirven para indagar por los saberes previos de los alumnos frente a un concepto específico, por la forma como lo relacionan con otros y por el lenguaje empleado en su elaboración; permiten entonces realizar un análisis del grado de comprensión que los estudiantes poseen del concepto, con el fin de diseñar experiencias de aprendizaje que le ayuden a integrar, ampliar y modificar la red de relaciones de su estructura cognitiva.

En este artículo se presenta una experiencia de aprendizaje, en la cual se implementaron los mapas conceptuales en un curso de matemáticas del primer semestre, en el INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO (Medellín, Colombia), con el fin de estudiar los tipos de relaciones que los alumnos hacen de algunos conceptos básicos de geometría, promoviendo con su elaboración las competencias de pensamiento, conocimiento e interacción social, entre otras.

Estado: Revisado y aceptado para publicación.

Revista: Tecnológicas.

Codigo ISBN: Se presenta con la revista

Lugar: Medellín , Colombia

E.1.3. Los mapas conceptuales: una herramienta de exploración del lenguaje empleado por los estudiantes a la luz del modelo educativo de van Hiele

Pedro Vicente Esteban Duarte, Universidad Eafit, Colombia
Edison Darío Vasco Agudelo, Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Alberto Bedoya Beltrán, Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia

Resumen: El modelo educativo de van Hiele considera al lenguaje como una de sus características fundamentales en el proceso de aprendizaje de un concepto geométrico o matemático y es uno de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual un alumno se encuentra. A partir del análisis del lenguaje se pueden diseñar experiencias de aprendizaje significativas para potenciar el progreso a través de los niveles de razonamiento postulados por dicho modelo. En este articulo se muestra una

metodología de trabajo, que tiene como base el empleo de los mapas conceptuales, para estructurar la instrucción que se debe presentar a los alumnos en las fases de aprendizaje para que progresen en su nivel de razonamiento respecto del concepto de aproximación local en su manifestación de tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella

Modalidad de participación: Reporte de investigación / innovación.

Estado: Publicado.

Revista: Asocolme.

Codigo ISBN: 958-97495-1-8

Lugar: Medellín , Colombia

E.1.4. Los mapas conceptuales como herramienta de indagación e integración en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele

Pedro Vicente Esteban Duarte, Universidad Eafit, Colombia
Edison Darío Vasco Agudelo, Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Alberto Bedoya Beltrán, Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia

Resumen: . El modelo educativo de van Hiele se compone de tres partes: los niveles de razonamiento, el *insight* y las fases de aprendizaje. De acuerdo con las características de dicho modelo, el propósito de estos niveles es ayudar a los estudiantes a desarrollar la percepción (insigth), y los denotaron Nivel 0, predescriptivo; Nivel I, de reconocimiento visual; Nivel II, de análisis; Nivel III, de clasificación y relación, Nivel IV, de deducción formal. Para lograr este desarrollo se establecieron algunas características que debían cumplir, entre ellas que los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuénciales, además formularon como el docente debe impartir la instrucción correspondiente a los alumnos y para ello proponen cinco fases de aprendizaje, que se clasifican como: indagación, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración, al final de las cuales el estudiante habría alcanzado un nuevo nivel de razonamiento.

En este artículo pretendemos mostrar el lenguaje como elemento esencial para detectar el nivel de razonamiento en el cual se encuentra un estudiante y a partir de su análisis diseñar experiencias significativas de aprendizaje para potenciar el

progreso entre los niveles de razonamiento. Tomando como base el objeto de los mapas conceptuales presentado por ((1),p. 33) que es representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones". Estos permiten el análisis del lenguaje empleado en su construcción y colocan de manifiesto el grado de integración entre los conceptos estudiados, es en este sentido, que la elaboración de mapas conceptuales prueban que son un recurso valioso para regular la instrucción que se debe dar a los estudiantes en la adquisición e integración de un concepto a su estructura mental, ayudando a mejorar su nivel de razonamiento.

Estado: Revisado, aceptado y en proceso de publicación.

Revista: Universidad Pontificia Bolivariana.

Codigo ISBN: Se presenta con la revista

Lugar: Medellín , Colombia

E.2. Ponencias

A continuación se hará una relación de las ponencias, que nos permitieron socializar los avances del trabajo de grado, estas se realizaron en encuentros, congresos y seminarios, tanto a nivel internacional, nacional, regional y local.

1. "Propuesta para la construcción y análisis del concepto de límite a través de los mapas conceptuales". I Encuentro Científico Estudiantil de maestros en formación de Matemáticas y Física. Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Octubre de 2002.

2. "Un mapa conceptual de la noción de límite y el empleo del Cmap Tool para su elaboración". Primer encuentro de Educación Matemática ERM. Universidad del Quindío. Noviembre de 2002.

3. "Aplicación de los mapas conceptuales como técnica para potenciar las fases de aprendizaje, en el contexto del modelo de van Hiele, en la noción de límite". I Jornada de Talleres de Didáctica de las Matemáticas y la Física. Universidad de Antioquia. Febrero de 2003.

4. “Propuesta para la construcción y análisis del concepto de límite a través de los mapas conceptuales”. II Jornada de talleres de didáctica de las matemáticas y la Física. Universidad de Antioquia. 29 y 30 de Julio de 2003.

5. “Propuesta para la construcción y análisis del concepto de límite a través de los mapas conceptuales” - Taller - IV Encuentro de enseñanza de las ciencias. Universidad de Antioquia. Agosto 28 y 29 de 2003.

6. “El concepto de límite desde el punto de vista de control de errores”. IX Encuentro regional de matemáticas. ERM. Universidad Surcolombiana, Neiva, 15 al 19 de Septiembre de 2003.

7. “Aspectos de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite”. - Cursillo -, IX Encuentro regional de matemáticas. ERM. Universidad Surcolombiana, Neiva, 15 al 19 de Septiembre de 2003.

8. “Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”. Expositor - Expouniversidad 2003. Pabellón científico - Universidad de Antioquia.

9. “El concepto de límite desde el punto de vista del control de errores”. II Encuentro Científico Estudiantil de maestros en formación de Matemáticas y Física. Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Marzo de 2004.

10. “Los mapas conceptuales como herramienta de indagación en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele”. X Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas. Universidad de Medellín. Medellín, 12 al 16 de Julio de 2004.

11. Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele. Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc.of the First International Conference on Concept Mapping. Universidad Pública de Navarra, Pamplona - España, 14 - 17 de Septiembre de 2004.

12. “Construcción y análisis del concepto de límite a través de los mapas conceptuales”. Sexto encuentro colombiano de matemática educativa. Universidad de Antioquia. Medellín, 7 al 9 de Octubre de 2004.

13. “Los mapas conceptuales como herramienta de indagación e integración en las fases de aprendizaje del modelo de van hiele”. VI Jornadas del maestro investigador. Universidad Pontificia Bolivariana. Medellín, 8 de Octubre de 2004.

14. “Los mapas conceptuales como herramienta de exploración e integración de conceptos matemáticos”. XI Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas. Universidad del Valle, Facultad de Ciencias Exactas. 27 de Junio al 1 de Julio de 2005.

15. "Aplicación del módulo de instrucción, diseñado para el concepto de aproximación local, en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele". XI Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas. Universidad del Valle, Facultad de Ciencias Exactas. 27 de Junio al 1 de Julio de 2005.

Apéndice F

Artículo

En este Apéndice, se presenta uno de los resultados obtenidos dentro del trabajo de investigación. Este consiste en un artículo publicado en España en el marco del "Primer encuentro internacional sobre mapas conceptuales", realizado en la Universidad Pública de Navarra (Pamplona – España) y publicado en las memorias del encuentro, en el año 2004.

Es importante mencionar, que uno de los miembros del comité editorial del evento es el doctor Joseph D. Novak, pues es él quien lidera, los principales trabajos de investigación en la aplicación de los mapas conceptuales a nivel mundial. Lo anterior, resalta la importancia y el mérito de nuestro trabajo, que permitió validar uno de los supuestos, que es: "los mapas conceptuales, permite explorar el lenguaje utilizado por un alumno frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, en el marco de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele".

Apéndice G

Test: Curvas y Tangentes

La aplicación el test “Curvas y Tangentes”, diseñado y validado por Esteban ([12]), en su tesis doctoral, es una tarea central en esta investigación, pues permite observar la evolución del pensamiento de un alumno en relación con el concepto objeto de estudio y clasificarlo en un determinado nivel de razonamiento de acuerdo con el modelo educativo de van Hiele.

Debido al formato empleado para que los alumnos puedan dar su respuesta[1], no es posible que el análisis de una sola de ellas de forma aislada permita determinar el nivel de razonamiento en el cual se encuentra un alumno, es por ello que este análisis hay que efectuarlo en relación con el conjunto de repuestas que se obtengan para una prueba en particular, ya que una misma repuesta puede tener distintos significados para los distintos niveles de razonamiento, incluso para un nivel especifico, pues un alumno puede estar en un nivel intermedio y algunas de sus respuestas no son características de un determinado nivel.

Teniendo en cuenta los anteriores planteamientos, se aplicó el test tanto al inicio como al final del proceso, de tal forma que fuesen en si misma una experiencia de aprendizaje, orientada a la detección de los niveles y a provocar el progreso en los mismos, esto no quiere decir que el objetivo fuese conseguir el progreso hacia el Nivel III con solo la realización de estas pruebas, ya que el progreso en los niveles de razonamiento siempre supone una acumulación de experiencias de aprendizaje y el test escrito es sólo una de ellas.

[1]El formato empleado por Esteban es el de selección múltiple con una solo escogencia.