LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL EN EL CONTEXTO DE VAN HIELE

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

2011

LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL EN EL CONTEXTO DE VAN HIELE

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación, en la línea de Educación Matemática.

Asesor

Ph. D. CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

Profesor Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
2011

"Lo que se oye, se olvida...

Lo que se ve, se recuerda...

Lo que se hace, se aprende..."

Proverbio chino.

A mis padres Luz y Fernando;

Y a mis dos hermanos Alyssa e Iván.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se reunieron por Videoconferencia los profesores Carlos Mario Jaramillo López (Presidente del jurado), y los profesores María Ángeles Navarro Domínguez y Elgar Gualdrón Pinto, en calidad de Jurado del Trabajo de Investigación: "La Elipse como lugar Geométrico a través de la Geometría del Doblado de Papel en el Contexto de Van Hiele" presentada por la estudiante **ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ,** de la Sexta Cohorte de la Maestría en Educación. línea Educación Matemática. quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO,** por unanimidad, luego el profesor Juan Felipe Garcés Gómez, miembro del Comité de Maestría dio a conocer el resultado.

Al trabajo de investigación que mereciere ser destacado, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Meritorio:
Sobresaliente: ✓

Medellín, 5 de mayo de 2011

Elgar Gualdrón Pinto

CARLOS MARIO JARAMILLO L.
Presidente del Jurado

ELGAR GUALDRÓN PINTO
Jurado

JUAN FELIPE GARCÉS GÓMEZ
Representante del Comité de Maestría

Ciudad Universitaria: Calle 67 No. 53-108 – Bloque 9, oficina 119
Conmutador: 219 83 32 Ext. 5725 Teléfono: 219 57 25 – Fax: 219 5726
Pagina web: http://ayura.udea.edu.co
Medellín - Colombia

AGRADECIMIENTOS

Culminar este trabajo de investigación, representa para mi, un gran logro académico, profesional y personal. Pero esta meta no la alcancé sola, sino que fueron muchísimas las personas que de una u otra forma, me ayudaron para lograr este objetivo. A todas, e incluso a las que no nombre, muchas gracias.

En especial, quiero agradecer al Doctor Carlos Mario Jaramillo López, por su acompañamiento como asesor en este arduo proceso. Él, no solamente me brindó sus conocimientos, sino que me acogió como un padre a su hija. Su constancia, esmero, dedicación y responsabilidad, permitieron que culmináramos con éxito este trabajo de investigación.

Deseo darle las gracias al Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia, en especial a los profesores Pedro Vicente Esteban Duarte, Jhony Alexánder Villa Ochoa, René Alejandro Londoño Cano, Leonardo Ceballos Urrego, y a mis actuales compañeros de la Maestría, por su invaluables aportes para el mejoramiento continuo del trabajo de investigación.

Quiero también dar un especial agradecimiento a los cinco estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Guillermo Valencia, que participaron de manera voluntaria en este estudio y fueron quienes realmente aportaron la información necesaria para cumplir el objetivo general del trabajo y responder la pregunta de investigación. Sin ellos, no habría sido posible el desarrollo de esta investigación.

Por último, y no siendo menos importante, quiero agradecerle a mi querida familia, por su apoyo incondicional y su comprensión en todo el tiempo que invertí en las materias de la maestría y en el propio trabajo de investigación. Sin su apoyo, no habría podido alcanzar este logro.

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA DE CONTENIDO

1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se pretende hacer un análisis de la literatura, con respecto a algunos desarrollos sobre la enseñanza actual de la geometría, las grandes teorías de aprendizaje, la geometría del doblado de papel y el modelo de Van Hiele.

1.1 REVISIÓN DE LA LITERATURA

1.1.1. Sobre la enseñanza de la geometría

1.1.1.1 Algunos aspectos de la enseñanza actual de la geometría.

La enseñanza de la geometría, tanto a nivel secundario como a nivel universitario, ha tenido ciertas dificultades por su tendencia tradicional y expositiva: tablero, tiza y libro. De hecho, la serie documentos del MEN menciona que, la geometría "se ha utilizado en el campo educativo como terreno natural para la introducción de la deducción" (MEN, 2004, p. 8). Esto nos lleva a pensar que en ciertas instituciones se realiza un acercamiento a ella de una manera formal, abstracta y descontextualizada; es decir, se aborda su proceso de enseñanza y aprendizaje de una manera formal, aspecto bastante positivo, que no es posible lograrlo en muchos de los casos, dado que exige del estudiante un avanzado nivel de razonamiento. A veces no se tiene en cuenta que la geometría es la rama de las matemáticas más cercana a los estudiantes desde el punto de vista intuitivo, porque puede ser construida a partir de procesos de visualización y de experimentación con objetos tangibles, particularidad que puede ser aprovechada para generar verdaderos procesos de razonamiento, previos a la formalización conceptual de la geometría.

Algunas investigaciones recientes han contribuido al proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, a partir de la utilización de herramientas informáticas como el *Cabri Géomètre*[1], el cual permite crear y recrear ambientes interactivos y de

[1] Nos remitimos al documento presentado por el Ministerio de Educación Nacional en el año 2004: "Pensamiento geométrico y Tecnologías computacionales".

simulación para el análisis de ciertos conceptos geométricos y su respectiva representación algebraica. Teniendo en cuenta que estas tecnologías podrían facilitar el aprendizaje gracias a su grado de interactividad y "experimentación virtual", es necesario mencionar que algunos programas requieren licencias, que suelen ser costosas para las instituciones educativas; aunque se encuentran en la red muchísimos applets gratuitos y software educativos que pueden facilitar los procesos en el aula de clase. La elección finalmente queda en manos del profesor y/o del grupo de profesores de matemáticas de la institución educativa.

La enseñanza de la geometría debe propiciar una buena formación para la vida en cuanto a exploración, manipulación, visualización, justificación, experimentación, argumentación, procesos de razonamiento, entre otros. Esto es,

> "la enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones, buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos." (MEN, 2004, p. 2)

Por lo tanto, se deben diseñar estrategias que posibiliten la enseñanza de la geometría, de tal manera que éstas permitan al estudiante vincularse a los procesos de abstraer, experimentar, explorar, clasificar, sintetizar, conjeturar, representar, generalizar, inferir conclusiones y finalmente demostrar y probar. Es decir, que él desarrolle un razonamiento de tipo espacial. Sin embargo,

> "para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar

bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida." (p. 3)

Una de esas estrategias es el doblado de papel, pues con este medio es posible lograr procesos de visualización. La visualización, según Clements y Battista (1992) "integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones" (citado por MEN, 2004, p. 10). Por lo tanto, a partir de la manipulación de una hoja de papel, el estudiante puede reflexionar geométricamente sobre los dobleces hechos y tomar una posición crítica frente a la información que le brinda la construcción. De hecho, como los procesos de visualización son la base de la actividad cognitiva, el estudiante "debe ir evolucionando en la "forma de mirar" los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización" (p. 10). De ahí que, en general, el doblado de papel le permite al estudiante: observar; comparar y ordenar propiedades y construcciones; lograr clasificaciones lógicas; hacer representaciones; retener y recuperar información; interpretar geométricamente lo que hace cuando dobla el papel; hacer inferencias y transferencias de las construcciones con doblado de papel para lograr abstracciones y finalmente, evaluar sus conocimientos. Todos estos aspectos contribuyen al mejoramiento del nivel de razonamiento del estudiante.

1.1.1.2 El modelo de Van Hiele

En los lineamientos curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional se menciona que el modelo de Van Hiele es una propuesta que describe con mucha precisión el proceso de evolución del pensamiento geométrico de los estudiantes (MEN, 1998).

En este sentido, teniendo en cuenta los lineamientos curriculares, Van Hiele propone "cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría" (MEN, 1998, p. 38). Estos niveles son los siguientes:

Nivel I: De reconocimiento visual. El estudiante reconoce las figuras como un todo, es decir, se le dificulta encontrar partes constitutivas de los objetos (MEN, 1998); se limita a describirlos de manera general en su forma física (Jaime y Gutiérrez, 1990): el color, la forma, entre otros.

Por ejemplo, un estudiante de seis años puede reproducir un cuadrado, un rombo y un rectángulo; puede memorizar sus nombres, pero los recuerda como unidades, como tres figuras distintas (MEN, 1998). El estudiante no percibe partes constitutivas ni propiedades, no percibe que el cuadrado es un tipo especial de rombo o de rectángulo. Si se le pregunta por la diferencia, probablemente se base en el tamaño, la forma, e incluso, el color (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Nivel II: De análisis. El estudiante es capaz de determinar las partes constitutivas de los objetos; es capaz de encontrar propiedades, pero todavía no cuenta con las capacidades suficientes para relacionar unas propiedades con otras, o hacer clasificaciones correctas (Jaime y Gutiérrez, 1990). En este nivel, "los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras" (MEN, 1998, p. 39).

Por ejemplo, para un estudiante que razone en este nivel, un rectángulo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, ángulos rectos, lados opuestos iguales, etc. (Jaime y Gutiérrez, 1990). Sin embargo, él todavía no percibe que unas propiedades se relacionan con otras y no percibe que el rectángulo es un tipo particular de paralelogramo.

Nivel III: De clasificación. El estudiante es capaz de relacionar unas propiedades con otras; de hecho puede establecer que unas propiedades se deducen de otras; es capaz de hacer clasificaciones lógicas correctas. En este nivel, el estudiante empieza a comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es capaz de seguir demostraciones, pero todavía se le dificulta hacerlas sin una correspondiente ayuda (Jaime y Gutiérrez, 1990). De hecho, "los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras" (MEN, 1998, p. 39).

Un estudiante que razone en este nivel, en el caso de los cuadriláteros, puede entender que la igualdad de ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados o que la igualdad de lados implica la perpendicularidad de las diagonales (Jaime y Gutiérrez, 1990). El estudiante en este nivel, puede realizar clasificaciones lógicas, por ejemplo, puede establecer, de acuerdo a la definición, que un cuadrado es un rombo y un rectángulo.

Nivel IV: De razonamiento deductivo. En este nivel, el estudiante entiende el sentido de los axiomas, los teoremas y las demostraciones, pero aún se le dificulta "hacer razonamientos abstractos" (MEN, 1998, p. 39), ni entiende totalmente "el significado del rigor en las demostraciones" (p. 39).

Nivel V: De rigor. El estudiante comprende la estructura axiomática de las matemáticas (Jaime y Gutiérrez, 1990) y es capaz de realizar demostraciones de propiedades, que antes había abordado de manera informal.

Un estudiante en este nivel, puede hacer demostraciones formales y rigurosas de las propiedades de los cuadriláteros, que había demostrado informalmente en niveles anteriores. Incluso, puede hacer demostraciones de otras propiedades más complejas.

En el capítulo 2 se abordarán estos niveles nuevamente, teniendo en cuenta otra nomenclatura.

1.1.1.3 Sobre la visualización en geometría

Clements y Battista (1992) asumen que la visualización "integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones" (citados por MEN, 2004, p. 10). En este sentido, con el doblado de papel y su axiomática, es posible que el estudiante logre procesos de visualización en las construcciones que se le proponen y pueda llegar a conclusiones veraces.

Es importante resaltar que la visualización "está en la base de la actividad cognitiva en geometría" (MEN, 2004, p. 10) y le permite al estudiante pasar de un proceso inicial de sólo mirar la figura a un proceso más complejo, donde puede deducir propiedades de las figuras y llegar incluso, a conceptos matemáticos y/o geométricos. Por lo tanto, el doblado de papel hace parte de la tendencia que busca "hacer del razonamiento visual una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje" (Figueiras y Deulofeu, 2005, p. 217).

Por otro lado, Figueiras y Deulofeu (2005) asumen que la visualización se relaciona con "las representaciones intuitivas y geométricas que pueden presentar las ideas y los conceptos matemáticos, que permiten al estudiante la exploración de un problema y, al menos, una primera aproximación a su solución" (p. 218). Arcavi (2003) menciona que este proceso tiene tres roles fundamentales para el estudiante de matemáticas: "actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos; resolver el conflicto entre soluciones correctas simbólicas e intuiciones incorrectas; reorganizar ciertas características de los conceptos, muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales" (citado por Figueiras y Deulofeu, 2005, p. 218). Sin embargo, Figueiras y Deulofeu (2005) añaden otro nuevo rol a la visualización y es "potenciar un cambio de concepción respecto a la matemática" (p. 218).

A continuación, se mencionarán tres niveles de la visualización, que se relacionan estrechamente con los propuestos por Duval (1998) (citado por MEN, 2004) y se hará una breve comparación con los niveles de Van Hiele:

Nivel global de percepción visual: Este es el nivel más elemental de visualización. En él se encuentra la percepción global de las imágenes (forma total de la imagen) que permite asociar figuras a objetos físicos. Esto es,

> “en un contexto matemático, la percepción global actúa para reconocer formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas. En la percepción de estas formas prototípicas predominan aspectos no matemáticos como la posición (boca arriba, boca abajo) o el tipo de trazo (grueso, delgado). Por esta razón, este nivel debe dar paso, en la enseñanza de la geometría, a una mirada matemática de las figuras que active la mente hacia la búsqueda de objetos geométricos y sus relaciones” (p. 10).

Este primer nivel se puede relacionar con el primer nivel de razonamiento de Van Hiele, reconocimiento visual, en la medida que el estudiante reconoce las figuras por su apariencia general, es decir, describe los objetos en su forma física: el color, la forma, el tamaño. Además, reconoce la figuras geométricas como un todo y se le dificulta encontrar partes constitutivas de los objetos o encontrar propiedades matemáticas que los caracterizan.

Nivel de percepción de elementos constitutivos: Este es un nivel posterior de visualización en el que ya no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe la imagen constituida por elementos de su misma dimensión o de inferiores (MEN, 2004).

> “Desde el punto de vista matemático, lo relevante para construir conceptos y relaciones geométricas, es la identificación de esos elementos constitutivos de la figura y las relaciones entre ellos. En este nivel se rompe con el esquema de imágenes prototípicas, pues la orientación o tamaño de las formas dejan de ser relevantes, para considerar en primer plano, las relaciones entre los elementos constitutivos” (p. 11)

De acuerdo a lo anterior, lo que se pretende con la construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel y su respectiva axiomática, a la luz de la teoría de los Van Hiele, es que en un primer momento, el estudiante perciba la imagen como un todo y posteriormente, con base en ciertas preguntas pueda identificar algunas relaciones importantes y pueda llegar a comprender los conceptos de cada una de las secciones cónicas como lugares geométricos.

Este segundo nivel de visualización, se relaciona con el segundo nivel de Van Hiele, el de análisis, puesto que el estudiante es capaz de determinar las partes constitutivas de las figuras; es capaz de encontrar algunas propiedades matemáticas de las figuras, pero todavía no cuenta con las capacidades suficientes para relacionar unas propiedades con otras, o hacer clasificaciones correctas; puede extraer otras propiedades por la observación de las partes constitutivas, e incluso puede hacer algunas generalizaciones de propiedades a figuras de la misma clase.

Nivel operatorio de percepción visual: Es en este nivel donde se puede operar sobre las figuras, realizando transformaciones visuales que no necesariamente están atravesadas por el discurso (MEN, 2004). En este caso, "ya no se trata únicamente de la percepción de características de una configuración, sino de una manipulación mental de las subconfiguraciones, para obtener otra disposición significativa y útil" (p. 13). Por lo tanto, en este nivel el estudiante reorganiza los elementos constitutivos de una figura y logra una configuración más compleja e importante para la solución de su problema inicial.

Este nivel se relaciona con el tercer nivel de razonamiento de Van Hiele, de clasificación, porque el estudiante en este nivel es capaz de relacionar unas propiedades con otras; de hecho puede establecer que unas propiedades se deducen de otras y es capaz de hacer clasificaciones lógicas correctas.

Como vimos en párrafos anteriores, los niveles de la visualización mencionados por el MEN (2004) se relacionan con los niveles de razonamiento de Van Hiele. Sin embargo, el modelo de Van Hiele tiene otros aspectos importantes que no se perciben en esta caracterización de la visualización dada por Duval (1998). Por ejemplo, el modelo incluye tres tópicos fundamentales, que se mencionarán en el capítulo 2: los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y el insight. Además, establece que el paso de un nivel al siguiente se produce cuando se crea una nueva red de relaciones que incorpora a la anterior nuevos conceptos o nuevas relaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990), lo cual no se observa en los niveles de la visualización.

1.1.1.4 Investigaciones realizadas en el contexto del Modelo de Van Hiele.

Desde el año 1982 se han desarrollado algunos proyectos de investigación, cuyo objetivo fue realizar una revisión curricular, principalmente en geometría, aplicando las directrices del modelo educativo de Van Hiele. En Estados Unidos se desarrollaron, en particular, tres proyectos que tuvieron mucha difusión: el proyecto Chicago, el proyecto Oregon y el proyecto Brooklyn (Jaramillo, 2003).

Proyecto Chicago: "Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry"

Este proyecto fue dirigido por Zalman Usiskin y su propósito principal fue "analizar la habilidad de la teoría de Van Hiele para describir y predecir el resultado de los estudiantes de geometría de la escuela secundaria" (Usiskin, 1982, p. 8).

Los resultados más importantes de este proyecto fueron:

- El quinto nivel de razonamiento de Van Hiele no puede ser detectado (Jaramillo, 2000). Es importante tener en cuenta que la nomenclatura de los niveles de razonamiento depende de cada autor.

- Usiskin (1982) propuso la propiedad de "secuencia fija" de los niveles de razonamiento.

- "Decisiones arbitrarias respecto al número de respuestas correctas necesarias para obtener un nivel pueden afectar al nivel asignado a muchos estudiantes" (Usiskin, 1982, p. 80).

– Los niveles de Van Hiele "son un buen predictor de los resultados actuales en geometría y un razonable buen predictor de resultados posteriores" (Usiskin, 1982, pp. 82, 89).

Proyecto Oregon: "Assessing children's intellectual growth in geometry"

Este proyecto fue dirigido por William Burger, de la Universidad del Estado de Oregon. El estudio se centró básicamente en las siguientes tres preguntas:

> "¿Son los niveles de Van Hiele útiles para describir el proceso de pensamiento de los estudiantes en las tareas de geometría? ¿Pueden los niveles ser caracterizados operacionalmente por la conducta de los estudiantes? ¿Puede un procedimiento de entrevista ser desarrollado para revelar los niveles predominantes en el razonamiento en una específica tarea de geometría?" (Burger y Shaughnessy, 1986).

Después de llevado a cabo, el proyecto de investigación respondió afirmativamente los anteriores interrogantes, y obtuvo otros resultados importantes como:

- La entrevista escrita y el formulario de análisis, son útiles para detectar los niveles de razonamiento pre-encontrados.

- Burger y Shaughnessy (1986) afirmaron que: "los niveles aparentan ser estructuras complejas envolviendo el desarrollo de conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchos ambientes de tareas" (citado por Jaramillo, 2003, p. 27). Además, afirmaron también que: "la oscilación entre niveles de razonamiento pre-encontrados en un estudiante, presumiblemente entre un período de transición entre un nivel y el siguiente, indica que los niveles son más bien dinámicos que estáticos, como teorizó Van Hiele" (p. 27).

Proyecto Brooklyn: "Geometric thinking among adolescents in inner city schools".

El proyecto fue dirigido por Davis Fuys y Dorothy Geddes de Brooklyn College, y se centró en las siguientes cuatro tareas:

> "La traducción de los materiales del trabajo de los Van Hiele, del alemán al inglés, y el desarrollo de documentación más detallada sobre la versión conductista de los niveles.
>
> El desarrollo de tres módulos de evaluación-instrucción para ser usados con sujetos en entrevistas clínicas.
>
> Entrevistas con alumnos participantes del proyecto.
>
> Análisis de los niveles de razonamiento sobre material de geometría en tres series de libros de textos de EE.UU" (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 63).

Los resultados más importantes de este proyecto fueron:

- El cuarto nivel de razonamiento de Van Hiele puede ser caracterizado operacionalmente por la conducta (Jaramillo, 2003).

- Existen períodos de transición entre los niveles, es decir, un estudiante estará fluctuando entre el nivel n – 1 y el nivel n de razonamiento (Jaramillo, 2003).

- Burger y Shaughnessy (1986) afirmaron que "… Los niveles parecen ser complejas estructuras que envuelven los desarrollos de ambos, conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchas de las tareas" (Citado por Jaramillo, 2003, p. 28).

1.1.2 Algunas teorías de aprendizaje.

1.1.2.1 Modelo de Pirie y Kieren

El modelo de Pirie y Kieren es una teoría de aprendizaje creada por Susan Pirie y Thomas Kieren en el año 1994. Basados en la definición de comprensión de Glasersfeld (1987), establecieron su posición teórica frente a este concepto de la siguiente manera: "es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación…" (Meel, 2003, p. 235). De acuerdo a su definición, conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión en matemáticas y establecen ocho niveles o estratos: conocimiento primitivo (llamado por otros autores como conocimiento intuitivo, situado, previo o informal), creación de imagen, comprensión de la imagen, observación de la propiedad, formalización, observación, estructuración e invención.

Cada uno de los estratos, exceptuando el de conocimiento primitivo y el de invención, poseen una complementariedad de forma y proceso. Las acciones orientadas a la forma buscan determinar el estrato en el que un estudiante determinado está operando. Sin embargo, según los autores, si no se presenta la acción complementaria entonces no se puede garantizar que el estudiante esté trabajando en un estrato particular.

Para Pirie y Kieren (citados por Meel, 2003), los elementos complementarios para cada estrato son:

> "El estrato de creación de la imagen está compuesto por los elementos complementarios llamados realización de la imagen y análisis de la imagen [...]. El estrato de comprensión de una imagen tiene dos elementos complementarios: visualización de una imagen y expresión de una imagen [...]. En el estrato de observación de la propiedad, las dos complementariedades son la predicción de la propiedad y el registro de la propiedad [...]. En el estrato de la formalización, la aplicación del método y la justificación del método son dos elementos complementarios; mientras que el estrato de observación contiene las

complementariedades de la identificación de las características y descripción de las características. El último estrato que contiene complementariedades es el estrato de estructuración y contiene la conjetura de un teorema y la demostración de un teorema" (p. 241).

Para Pirie y Kieren (Meel, 2003), la comprensión matemática se puede definir "como estable pero no lineal" (p. 235). Ellos consideran la comprensión en la línea de Schoenfeld (1989) como "un elemento orgánico inestable y retrogresivo, como un proceso de crecimiento interminable, completo, dinámico y estratificado, rechazan la noción del crecimiento de la comprensión como una función monótona creciente y la consideran como un proceso dinámico de organización y reorganización (Pirie y Kieren 1992b, 1994b)" (Citado por Meel, 2003, p. 235). Es decir, comprender no se limita sólo a creer que se posee el saber sobre algo, es un proceso que nos permite reestructurar y organizar las ideas.

El Modelo de Van Hiele y el Modelo de Pirie y Kieren son cognitivistas, pero el primero es un modelo de enseñanza, mientras que el segundo es una teoría de aprendizaje. Además, el modelo de Van Hiele propiamente dicho, está enfocado en la enseñanza de la Geometría Euclidiana (existen investigaciones que aplican el modelo en otras ramas de la matemática, como las de Llorens (1994), Campillo (1999), Esteban (2003), Jaramillo (2003), entre otras) y el modelo de Pirie y Kieren está enfocado en la comprensión en matemáticas a nivel general.

1.1.2.2 Constructivismo: Piaget y Vigotski.

Jean Piaget fue un biólogo, filósofo y psicólogo suizo; él sitúa su trabajo específicamente en la formación y desarrollo del conocimiento en los seres humanos (Rosas y Sebastián, 2004). Su epistemología propuesta y desarrollada se basa en la "convicción de que todas las estructuras que conforman la cognición humana tienen una génesis a partir de alguna estructura anterior: por medio de procesos de transformación constructiva, las estructuras más simples van siendo incorporadas en otras de orden superior" (p. 12).

De acuerdo con Brainerd (1978), “es posible articular la teoría piagetiana sobre la base de tres grandes ejes conceptuales: estructura cognitiva, función cognitiva y contenidos de la cognición” (Citado por Rosas y Sebastián, 2004, p. 12).

Según Piaget, las estructuras cognitivas son abstractas y no pueden ser medidas directamente, sino a partir de la observación de diversas conductas; él sostiene que las estructuras son sistemas de transformaciones de un estado a otro, unidades caracterizadas por “leyes de transformación que le permiten expresarse y reconstruirse en elementos particulares” (Rosas y Sebastián, 2004, p. 13 – 16). Piaget distingue dos tipos de estructuras cognitivas: los esquemas y las operaciones. Los esquemas, en particular, corresponden a las “unidades básicas de la estructura cognitiva humana” (p. 16), es decir, son una serie de contenidos cognitivos: “acciones inteligentes específicas, tales como percepciones, recuerdos, conceptos, símbolos, acciones motoras” (p. 17). Por su parte, las operaciones cognitivas corresponden a “coordinaciones de acciones interiorizadas, reversibles, agrupadas en sistemas de conjunto con leyes de totalidad” (p. 18). Las operaciones concretas son aquellas en las que las acciones interiorizadas tienen como objeto imágenes de objetos materiales; las operaciones formales corresponden a acciones interiorizadas que operan sobre otras acciones interiorizadas más básicas (p. 18 – 19).

Piaget propone dos invariantes funcionales a la base de la cognición humana:

> “la organización, que trata de responder al problema de la conservación de la identidad a lo largo de la ontogenia, y la adaptación, que trata de responder al problema de cómo es posible la transformación del organismo en su interacción con el medio, con conservación de la organización” (p. 20).

El dinamismo del desarrollo cognitivo, según este autor, se explica a través de un “constante proceso de equilibración entre las dos fuerzas que permiten la adaptación: la asimilación y la acomodación” (p. 23). La asimilación tiene que ver con la incorporación de un nuevo elemento a una estructura preestablecida y la acomodación, con la modificación de la estructura para ajustarse a las características del nuevo elemento (Rosas y Sebastián, 2004).

Los contenidos de la cognición, según Piaget, son:

> "aquellos elementos que se han referido anteriormente como los que, organizados de acuerdo a ciertas relaciones, encarnan en la práctica las estructuras cognitivas de todo tipo. Entre estos elementos, se cuenta a percepciones, recuerdos, conceptos, operaciones e incluso estructuras o un 'objeto cualquiera' de matemáticas o lógica, desde los niveles de la acción humana más ligados al mundo material hasta las más refinadas abstracciones producto del conocimiento sistemático de una cultura" (p. 27).

En general, el paso de una etapa del desarrollo a la siguiente se caracteriza por un cambio de nivel entre estructura y contenido. Según Vuyk (1984), "la estructura equilibrada de la etapa anterior se ve superada e integrada en la etapa posterior, pasando a convertirse en contenido de la etapa de nivel superior" (Citado por Rosas y Sebastián, 2004, p. 27).

En este sentido, las cuatro etapas del desarrollo planteadas por Piaget, son:

Etapa sensoriomotriz (0 – 2 años): El máximo logro del niño en esta etapa, es "la adquisición de la función simbólica o capacidad de representar el mundo externo por medio de símbolos" (p. 27).

Etapa preoperacional (2 – 7 años): El máximo logro del niño en esta etapa es la "preparación, a partir del ejercicio activo del uso de símbolos, para la adquisición de las 'operaciones mentales'" (p. 27), que son las estructuras cognitivas que le permiten al sujeto operar de manera lógica y reversible.

Etapa de las operaciones concretas (7 – 12 años): En esta etapa, el niño utiliza la lógica en su acción con los objetos de su entorno (Rosas y Sebastián, 2004).

Etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años): El individuo, en esta etapa, tiene la posibilidad de operar en su ambiente de manera "hipotético-deductiva, aún en ausencia de experimentación práctica" (p. 28).

Por otro lado, el ruso Liev Vigotski, nacido en 1896, en su teoría histórico-cultural, asume un enfoque materialista del estudio de la psicología humana en todos sus niveles. Para él,

> "la situación de progreso del ser humano actual sería el producto de una línea de desarrollo que no es la biológica, sino una cualitativamente distinta, a saber, la histórico cultural, inaugurada por la creación de herramientas materiales y sociales ligadas a la organización del trabajo humano" (Van der Veer y Valsiner, 1991, citados por Rosas y Sebastián, 2004, p. 31).

La primera línea de desarrollo, la natural, corresponde a actos o procesos psicológicos que son compartidos con otros animales; la segunda línea, la artificial, implica acciones y procesos de tipo instrumental y se caracteriza por "la incorporación de signos desarrollados histórico-culturalmente, los cuales cambian por completo la naturaleza y expresión de los procesos psicológicos elementales antes desarrollados, dando pie a la aparición de procesos psicológicos superiores" (p. 31 – 32).

Para Vigotski, los recursos ofrecidos por la cultura son elementos de mediación, son signos utilizados por los individuos en su proceso de desarrollo ontogenético, el cual tiene tres etapas principales: primera, predominio de funciones psicológicas elementales que posibilitan asociaciones directas y, elementos de mediación como objetos materiales, para poder recordar, pero que son utilizadas de forma ineficaz por parte del niño; segunda, los sujetos utilizan los elementos disponibles de forma externa y tercera, el individuo utiliza signos internos, en vez de elementos concretos externos (Rosas y Sebastián, 2004).

En el siguiente cuadro, presentado por Rosas y Sebastián (2004) en su obra, se resumen las diferencias y semejanzas entre las teorías de Piaget y Vigotski.

Tabla 1: Contrapunto de Piaget y Vigotski (p. 80)

Características	**Piaget**	**Vigotski**
¿Quién construye?	Cuatro sujetos diferentes, dependiendo del nivel de desarrollo cognitivo.	Un sujeto mediado semióticamente.
¿Qué se construye?	Estructuras generales del conocimiento científico.	Sentido y funciones psicológicas superiores.
¿Cómo se construye?	Por abstracción reflexiva autorregulada (equilibración).	Por internalización de la actividad social (procesos interpsíquicos convertidos en intrapsíquicos).
Modelo de hombre	Guiado por el imperativo categórico: deducción de principios morales a partir de principios trascendentes.	Guiado por la noción de progreso: principios morales racionales, pero históricamente situados.
Fin último de la educación	Desarrollo de las operaciones formales: pensamiento científico y juicio moral.	Internalización de herramientas semióticas, compartir comunidad de sentido.
¿Cuál es su concepción de aprendizaje?	Aprendizaje por descubrimiento: a partir de modificación de estructuras determinada por principios dialécticos del aprendizaje.	Aprendizaje mediado: apropiación de herramientas culturales que culminen en la internalización del mediador.
Dominio de interacciones para el aprendizaje	Principalmente mundo de objetos físicos.	Principalmente mundo social.
¿Qué rol juega el educador en el aprendizaje?	Planificador de instancias de aprendizaje por descubrimiento.	Diagnosticador dinámico de ZDP y mediador en la disminución de errores.

Para Piaget, el aprendizaje se da por descubrimiento y es una función del desarrollo; para Vigotski el aprendizaje es mediado por la actividad social; para Van Hiele el paso de un nivel al siguiente se produce cuando se crea una nueva red de relaciones que surge de la incorporación de nuevos conceptos o de nuevas relaciones y es una función del aprendizaje. En particular, este último relaciona la comprensión de un concepto con el avance en los niveles, gracias a su razonamiento; mientras que Piaget lo relaciona sólo con su desarrollo cognitivo y Vigotski, sólo con la apropiación de herramientas culturales. El interés de nuestra investigación es la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, a través del razonamiento sobre figuras hechas mediante el doblado de papel, en el contexto de Van Hiele.

1.1.3 Secciones cónicas.

1.1.3.1 Las secciones cónicas a través de la historia

Uno de los principales hechos paradigmáticos que posibilitaron el descubrimiento de algunos lugares geométricos, fue el abordaje de los tres problemas clásicos de la antigüedad: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. De hecho,

> "muchos sabios y filósofos se ocuparon de la resolución de los tres problemas clásicos y, aunque sin demostrarlo rigurosamente, pronto se dieron cuenta que la solución era imposible utilizando sólo la regla y el compás en un número finito de etapas. Abandonada esta condición, el intento de hallar soluciones condujo al descubrimiento de algunos lugares geométricos…" (Del Río, 1996, p. 12).

Cuando los sabios se dieron cuenta que no era posible solucionar esos problemas con una regla no graduada y un compás, decidieron buscar otras soluciones alternativas con otros métodos. Menecmo, por ejemplo, descubrió que al seccionar un cono con un plano podía resolver el problema de la duplicación del cubo (Del Río, 1996).

Posteriormente, "Menecmo descubrió también la elipse y la hipérbola, seccionando conos acutángulos y obtusángulos respectivamente con planos perpendiculares a una de sus generatrices…" (p. 14). Por lo tanto, este matemático podía obtener tres tipos de curvas diferentes "a partir de conos rectos de tres tipos distintos, según que el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso, y siempre tomando secciones perpendiculares a una generatriz" (p. 22).

Más adelante, Apolonio de Perga, llamado "el gran geómetra" obtuvo las mismas tres curvas pero utilizando un solo cono circular cualquiera. Por lo tanto, él fue el primero en

> "observar y demostrar que los tres tipos de secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) podían obtenerse como secciones de un mismo cono circular recto (e incluso de un cono circular no recto) sin más que cambiar la posición del plano que genera la sección" (Ibáñez, 2002, p. 12).

Parece ser que tanto Apolonio como Euclides, en su época, conocían "las propiedades focales de las cónicas" (p. 12), pero fue en el libro *Colección Matemática* de *Pappus de Alejandría* (290 - 350 d.c.) donde aparece por primera vez un tratamiento de las propiedades foco – directriz de las tres secciones cónicas en cuestión (Ibáñez, 2002).

Aunque Apolonio estudió con profundidad las secciones cónicas, hasta el punto de escribir un tratado sobre las mismas llamado "Sobre las secciones cónicas", no se preocupó de su utilidad (Boll, 1981). De la misma manera, la construcción con doblado de papel de cada una de las secciones cónicas, permite definirlas como lugares geométricos, sin mostrar explícitamente sus aplicaciones en la solución de problemas prácticos. Sin embargo, se considera fundamental que el estudiante primero "reconozca y describa curvas o lugares geométricos" (MEN, 2003, p. 21) antes de "resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica" (p. 20). Por lo tanto, en este trabajo de investigación prevalecerá el reconocimiento e identificación de lugares geométricos, sin demeritar su parte algebraica, que se considera un tema de gran importancia para un trabajo de investigación posterior.

Después de ese exhaustivo estudio de las secciones cónicas por parte de los matemáticos griegos, éstas permanecieron olvidadas hasta el renacimiento, cuando algunos científicos de gran reconocimiento encontraron aplicaciones importantes de las cónicas y las utilizaron para resolver problemas prácticos (Ibáñez, 2002). Galileo, por ejemplo, encontró que el movimiento de un proyectil se relacionaba con una parábola; Kepler y Newton relacionaron la trayectoria de los planetas al derredor del sol con una elipse (Boll, 1981). El hecho de encontrar las aplicaciones de estas curvas en la vida cotidiana, nos hace pensar en un segundo hecho paradigmático de gran trascendencia, que logró que tomaran su verdadero lugar en las matemáticas.

A comienzos del siglo XVII, se inician las primeras ideas sobre un método para orientar los problemas geométricos de forma algebraica. Sus principales precursores fueron "René Descartes y Pierre Fermat, [que] no fueron precisamente matemáticos profesionales…" (Del Río, 1996, p. 38). Según Collette (1985),

> "ni descartes ni Fermat inventaron el uso de las coordenadas o de métodos analíticos, y ni uno ni otro fueron los primeros en aplicar el álgebra a la geometría o en representar gráficamente las variables. La contribución independiente de cada uno reposa esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Además, si se añaden a esto los métodos algorítmicos desarrollados por cada uno para unir estrechamente la ecuación y la curva correspondiente, todo ello bastará para atribuirles el mérito de ser los fundadores de la geometría analítica" (citado por Del Río, 1996, p. 38).

Por lo tanto, la geometría analítica "amplió el concepto de lugar geométrico al incluir bajo su dominio, con pleno derecho, las ecuaciones algebraicas de dos variables, es decir, las llamadas curvas algebraicas. Un ente algebraico tomó, de este modo, naturaleza geométrica" (p. 40).

Por otro lado, en nuestro trabajo de investigación se van a utilizar las siguientes definiciones de cada una de las secciones cónicas, como lugares geométricos:

i) la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante; ii) la parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (foco), y de una recta fija (directriz); iii) la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante" (Ibáñez, 2002, p. 12).

1.1.3.2 ¿Por qué elegir la elipse?

El conocimiento de las tres secciones cónicas elipse, hipérbola y parábola, se ha revelado indispensable en el estudio de la trayectoria de los planetas alrededor del sol (elipse), en el movimiento de proyectiles (parábola) o en el diagrama de motores términos (hipérbola) (Boll, 1981). Todas tres tienen sus aplicaciones bien definidas en la física o en el cálculo. Sin embargo, en nuestro trabajo de investigación, hemos optado por dirigir nuestros esfuerzos en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en primer lugar, por su importancia en el movimiento de los cuerpos celestes, y en segundo lugar, porque su comprensión, de acuerdo con nuestra propuesta, trae consigo la comprensión de otros conceptos geométricos como el de mediatriz o de circunferencia.

Movimiento de los cuerpos celestes.

Uno de los fenómenos que más ha intrigado al hombre desde sus comienzos ha sido sin lugar a dudas, el movimiento de los cuerpos celestes. Por mera observación, los antiguos pudieron determinar que el sol, la luna y las estrellas "describían arcos circulares sobre el cielo con un movimiento regular" (Del Río, 1996, p. 58). Sin embargo, había otros cuerpos (los planetas) que no se comportaban de manera similar, pues se desplazaban lentamente o en algunas ocasiones, retrocedían. Este fue precisamente el problema que se planteó Platón (IV a. C): "¿Qué tipo de movimiento es el de los planetas que los hace moverse de un modo tan distinto a las estrellas?" (p. 58).

Platón, Eudoxio y Aristóteles propusieron entonces, un modelo geocéntrico del universo en el que la tierra, inmóvil, se ubicaría en el centro y los demás cuerpos girarían en torno a ella, cada uno en una esfera cristalina concéntrica con la tierra (Del Río, 1996). Pero este modelo no explicaba tampoco el movimiento de los planetas. En el siglo II d. C, el astrónomo de Alejandría Ptolomeo perfeccionó este sistema geocéntrico, involucrando epicicloides. Según él, "el planeta describe con movimiento uniforme un círculo denominado epiciclo, cuyo centro a su vez se desplaza en un círculo mayor, concéntrico con la tierra, llamado deferente" (p. 59). Esta explicación fue aceptada y defendida durante muchos siglos, porque estaba de acuerdo con las ideas filosóficas, políticas y religiosas de la época: el carácter egocéntrico del hombre, que lo convertía en el centro del universo y de la creación, creado a imagen y semejanza de su Dios.

En el siglo XVI, el polaco Nicolás Copérnico, se atrevió a defender de forma cuantitativa, ante una sociedad totalmente geocéntrica, que la tierra y los demás planetas giraban alrededor del sol (inmóvil) en órbitas circulares. Pero como tampoco explicaba correctamente el movimiento de los planetas, no fue capaz de anular la teoría de Ptolomeo y se abrió "un agrio debate entre astrónomos copernicanos y ptolemaicos que continuó durante todo el siglo XVII" (p. 59).

A principios del siglo XVII, Kepler enunció y demostró empíricamente sus tres famosas leyes, "la primera de las cuales afirma que todos los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al sol en uno de los focos" (p. 59). Con este hecho, Kepler hizo evidente la presencia "en la naturaleza de un lugar geométrico que había nacido en la más pura especulación teórica de los matemáticos griegos" (p. 59). De ahí la importancia de su comprensión como lugar geométrico.

Comprensión de otros conceptos geométricos.

Las construcciones de las secciones cónicas (elipse, hipérbola y parábola) mediante el doblado de papel se basan en la construcción de la mediatriz. Por lo tanto, la definición de cada una de ellas usa el concepto de mediatriz como lugar geométrico.

Tanto la elipse como la hipérbola involucran también en su construcción el concepto de circunferencia como lugar geométrico. Por eso, nos inclinamos en elegir una de estas dos. Sin embargo, nuestra experiencia como docentes de cálculo y como investigadores en la didáctica del doblado de papel, nos ha permitido concluir que el estudiante primero debería comprender el concepto de elipse como lugar geométrico y la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a éste y, después, el concepto de hipérbola. Se torna más sencillo para los estudiantes del grado décimo visualizar una suma de segmentos mediante el doblado de papel, que una diferencia de segmentos. Por eso nos inclinamos en caracterizar el nivel de razonamiento necesario para la comprensión del concepto de elipse. Pero, además, nos atrevemos a afirmar, no siendo este nuestro propósito, que siguiendo nuestra propuesta, el estudiante podría lograr una mayor comprensión de otros conceptos geométricos, entre ellos el de la hipérbola.

La construcción de la elipse mediante el doblado de papel y su definición posterior como lugar geométrico, se basan netamente en la construcción de mediatrices, que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto determinado ubicado en la región limitada por esta. Por eso precisamente es que se torna indispensable el conocimiento de la mediatriz y de la circunferencia, antes de abordar el concepto propiamente de elipse. Por lo tanto, nuestro trabajo no sólo centra los esfuerzos en la comprensión de la elipse, sino que el estudiante debe involucrar también en su red de relaciones[2] conceptos como el de mediatriz, equidistancia, circunferencia y lugar geométrico.

1.1.3.3 Secciones cónicas y currículo colombiano

Los estándares básicos de Matemáticas (2003), promulgan la idea de una matemática para la vida, de tal manera que los estudiantes, al desarrollar un pensamiento racional, puedan constituirse en buenos ciudadanos, situándose de una manera crítica y diligente frente a las situaciones sociales, políticas y culturales de la sociedad. Según estos estándares, su enseñanza debe impartirse así:

[2] Este concepto se aborda en el capítulo 2.

> “mediante una adecuada orientación que implique una permanente interacción entre el maestro y sus alumnos y entre éstos y sus compañeros, de modo que sean capaces, a través de la exploración, de la abstracción, de clasificaciones, mediciones y estimaciones, de llegar a resultados que les permitan comunicarse, hacer interpretaciones y representaciones; en fin, descubrir que la matemática está íntimamente relacionada con la realidad y con las situaciones que los rodean, no solamente en su institución educativa, sino también en la vida fuera de ella” (MEN, 2003, p. 3)

Los estándares se han organizado en cinco grandes pensamientos que conllevan a cinco grandes sistemas: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En nuestro trabajo de investigación, nos centraremos básicamente en el pensamiento espacial y en los sistemas geométricos. La idea fundamental es que el estudiante pueda analizar definiciones y propiedades de lugares geométricos con base en construcciones físicas que pueden realizarse mediante el doblado de papel. Con esto se busca presentar una alternativa para subsanar la necesidad de volver a recuperar “el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría” (MEN, 1998, p. 37).

Si se utiliza el doblado de papel, como un medio para la enseñanza de la geometría, ésta se podría ver como:

> “un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación; un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas o como una vía para desarrollar pensamiento y comprensión” (MEN, 2004, p. 1)

La temática de secciones cónicas se propone, de acuerdo con los estándares de matemáticas, para los grados décimo y undécimo. Acorde con esto, se establecen los siguientes estándares:

"Identificar las propiedades de las curvas en los bordes obtenidos mediante cortes (longitudinal y transversal) en un cono y un cilindro" (MEN, 2006, p. 20).

"Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica" (p. 20).

"Reconocer y describir curvas o lugares geométricos" (p. 21).

Nuestro trabajo de investigación, como se había mencionado en párrafos anteriores, da prelación al reconocimiento e identificación de la elipse como lugar geométrico y la comprensión de los conceptos necesarios que involucran su definición, dejando de lado la parte algebraica y su aplicación en problemas de la vida cotidiana, que aunque se considera de gran importancia, afirmamos sin lugar a dudas que debe ser abordado después de que el estudiante comprenda cada uno de los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos.

1.1.4 Doblado de papel y origami

1.1.4.1 Breve historia del origami

El origami es un antiquísimo arte japonés que tiene que ver con el doblado del papel. De hecho, su raíz *ori* significa doblez y gami o kami significa papel (Gallo, sitio web).

En su forma más pura, el origami puede ser definido como el arte de manipular una hoja de papel de forma cuadrada sin que sea cortada, añadida, pegada, decorada o mutilada de forma alguna; sólo puede ser doblada. Esta regla tan estricta, hace que el origami sea la más refinada de las artes que se refieren al doblado del papel. Éste precisamente constituye el secreto de su belleza y atractivo.

Las primeras figuras de papel se remontan al período Heian (794 – 1183), se cree que en Japón, porque no hay pruebas que determinen que este arte haya iniciado en China.

> "La historia de la papiroflexia comienza junto con la del papel, en China, allá por el siglo I ó II, y llega a Japón en el siglo VI. En un principio, era un divertimento de las clases altas, pues eran las únicas que podían conseguir papel, que constituía un artículo de lujo. Los guerreros *Samurai* intercambiaban regalos adornados con *noshi*, trozos de papel doblados en abanicos de variadas formas, sujetos con cintas de carne seca". (Royo, 2002, p. 1)

Más adelante, en el Período Muromachi (1338 – 1573), el papel era un producto más accesible y los adornos elaborados revelaban la clase social de cada persona. Sin embargo, finalizado este período este arte fue transmitido de generación en generación de madres a hijos (Royo, 2002).

En el período Tokugawa (1603 – 1867) se dio una gran explosión cultural al democratizarse la papiroflexia; apareció la base pájaro, que es la más popular en Japón y surgieron dos textos que recogen las instrucciones más importantes del doblado: "*Sembazuru Orikata* (Cómo plegar mil grullas) y *Kan No Mado* (Ventana abierta a la estación de invierno)" (p. 2)

No solamente los japoneses doblaron papel, los musulmanes también practicaron este arte, pero no tuvo mucha repercusión en nuestros días a causa de personajes como los Reyes Católicos y el Cardenal Cisneros (Royo, 2002).

Miguel de Unamuno fue uno de los grandes impulsores de la papiroflexia a principios del siglo XVII; con base en su afición de doblar pajaritas, nombrada por él *cocotología*, creó su propia escuela de doblado (Royo, 2002). Según Royo (2002), el padre de la papiroflexia moderna es el japonés Akira Yoshizawa; él es el creador de la simbología actual y de las instrucciones de doblado de modelos, algunos creados por él. Éste creador considera que el origami es una relación dialógica entre artista y papel.

Royo (2002) afirma que en las últimas décadas, el origami ha experimentado una gran explosión de creatividad. Incluso, se han desarrollado dos escuelas: la japonesa, integrada por artistas no científicos, cuya filosofía consiste en "expresar, sugerir, captar la esencia de lo que se quiere representar con un mínimo de pliegues, aunque la figura resultante no sea anatómicamente perfecta" (p. 3). La segunda escuela es la occidental, conformada por matemáticos, físicos e ingenieros; su propósito es la "exactitud anatómica" (p. 3) de los objetos o animales que diseñan. Para lograrlo, se valen de métodos matemáticos, algunos de ellos de gran complejidad (Royo, 2002).

En 1893, el hindú Sundara Row escribió el libro "Geometric exercises in paper folding", un tratado que combina el doblado de papel y la geometría euclidiana. Contiene 14 temáticas como el cuadrado, el triángulo equilátero, polígonos, secciones cónicas, entre otras. Este libro, fuente de consulta, se ha convertido en una excelente guía para promover la enseñanza de algunos conceptos geométricos y realizar construcciones geométricas complejas.

En la actualidad, el origami o papiroflexia, como se le ha denominado en España, es una técnica que no sólo se utiliza para la creación de figuras, sino también para la enseñanza de la matemática. En el Seminario de Investigación de Geometría y doblado de papel, del grupo Educación Matemática e Historia (Udea – Eafit), hemos tomado la determinación de diferenciar origami y doblado de papel. Por origami, entendemos la creación de figuras con fines artísticos; por doblado de papel, entendemos la realización de dobleces y/o figuras con fines educativos, es decir, para facilitar la visualización geométrica. Esto ha permitido proponer y desarrollar talleres de capacitación, en los cuales el doblado de papel se convierte en una alternativa metodológica para la enseñanza de la geometría.

1.1.4.2 Doblado de papel

El doblado de papel es una propuesta metodológica útil y funcional, con la que se podría garantizar tanto interactividad con conceptos geométricos como su visualización, de una manera sencilla y expedita, con el fin de facilitar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría. Al respecto, Royo (2002) menciona "el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel" (p. 186).

Elegir el doblado de papel, como herramienta para facilitar la comprensión del concepto de elipse, surgió gracias a las contribuciones de Monsalve y Jaramillo (2003), quienes argumentan que "el arte del origami es una disciplina que permite desarrollar aspectos como: memoria visual geométrica, memoria a corto y mediano plazo, coordinación visomotora, destreza manual, discriminaciones multisensoriales de tipo grueso, fino y refinado (psicomotricidad)" (p. 11)

También, los autores afirman que,

> "el Origami nos enseña a hacer cosas con las manos desarrollando la capacidad de operar, resolver, crear, sintetizar, resumir, realzar, expresar y decir símbolos con menos palabras. Enseña así mismo el arte de construir para ser capaz luego de razonar y de deducir, relacionando, en suma, la teoría con la práctica. Y lo más importante, nos desarrolla la creatividad, entrenando la mente y el espíritu para, a partir de cero, saber ver de una manera nueva. DOBLAR es tener la oportunidad de modificar y adaptar la forma, promoviendo la capacidad de crear" (p. 11).

Por otro lado, dice Geretschläger (1995) que la conexión entre geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras, podemos mencionar entre ellas a Friedrich Fröebel, el origami se puede utilizar para enseñar conceptos elementales de geometría. La trisección de un ángulo, es un problema soluble utilizando métodos como doblado de papel, pero insoluble para la geometría euclidiana (donde se usa una regla no graduada y un compás) (p. 357).

Igualmente, Royo (2002) afirma que:

> "la mejor manera de darse cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial: aparece ante

> nuestros ojos un complejo de cicatrices que no es sino un grafo que cumple ciertas características. Intuitivamente, hay unas "matemáticas del origami" funcionando cuando plegamos un modelo" (p. 186).

Por lo tanto, con la papiroflexia modular es posible representar poliedros y figuras geométricas; además relacionar la geometría euclidiana con la geometría propia del origami, como también el diseño de figuras a nivel artístico ayudando a la creación papirofléctica. En este sentido, se puede argumentar que, el doblado de papel, puede convertirse en una alternativa de enseñanza de la geometría, bastante útil para el docente, es decir, descubrir su utilidad didáctica. Al respecto se encuentra que: "la utilidad didáctica del doblado de papel radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica" (Monsalve y Jaramillo, 2003, p. 11). Además,

> "cuando aplicamos el doblado de papel como herramienta alterna para la solución de problemas, es sorprendente el interés y el entusiasmo con que los estudiantes enfrentan la solución de ciertos ejercicios propuestos en los libros clásicos de la enseñanza del cálculo." (p. 11)

Asimismo, el origami se ha venido desarrollando en la actualidad, como un medio de representación de objetos netamente matemáticos. Esto también lo menciona Larios (2001):

> "Por ejemplo se ha estudiado la relación entre el origami y la topología; la relación entre los poliedros hechos con origami y las geodésicas (estructuras basadas en los diseños de Buckminster Fuller); se han formulado listas de axiomas para el origami; el físico Jun Maekawa ha descubierto teoremas relacionados con el origami, usándolos para diseñar modelos; el matemático Toshikazu Kawasaki ha estudiado teoremas del origami en cuatro dimensiones; Robert Lang de California ha desarrollado una manera de algoritmizar el proceso de diseño para usar una computadora en la invención de modelos complejos; el educador Shuzo Fujimoto

> y el artista Chris Palmer han descubierto paralelismo entre origami y los teselados; Peter Engel ha relacionado el origami, incluso el artístico, y la teoría del caos (en particular con los fractales); el matemático Roger Alperin ha establecido una relación entre las construcciones de origami y los números (llamados "números construibles")" (p. 1).

Otro autor quien ha trabajado la relación entre el doblado de papel y las matemáticas es Johnson (1975). Él afirma que todo profesor de matemáticas debe estar interesado por mejorar la comprensión de sus estudiantes; una de las formas de cumplir con esta tarea es utilizando los sistemas de doblado de papel. Por lo tanto, este autor establece que "el plegado de papel no sólo simplifica el aprendizaje de las matemáticas, sino que mejora también la comprensión y la apreciación" (p. 7).

Propone, además una serie de postulados y/o suposiciones para el doblado de papel, con los cuales es posible realizar todas las construcciones planas de la geometría euclidiana (Johnson, 1975). Estos son:

- "Puede plegarse el papel de modo que el pliegue formado sea una línea recta;
- puede plegarse el papel de modo que el pliegue pase por uno o dos puntos dados;
- puede plegarse el papel de modo que un punto pueda superponerse a otro punto de la misma hoja;
- puede plegarse el papel de forma que un punto del mismo pueda superponerse a una línea de la misma hoja y que el pliegue resultante pase a través de un segundo punto dado;
- puede plegarse el papel de modo que una línea recta pueda superponerse a otra línea recta de la misma hoja;

- se dice que las líneas y los ángulos son iguales si coinciden cuando pueden superponerse al plegar el papel" (p. 8)

De hecho, el interés reciente por desarrollar una nueva geometría, basada en el doblado de papel, ha sido tan enorme, que ya se cuenta con una axiomática propia. El ítalo – japonés Humiaki Huzita presentó en el "First International Meeting of Origami, Science and Technology" seis axiomas para la Geometría del doblado de papel. Posteriormente, en 2002 el japonés Koshiro Hatori presentó un séptimo axioma y el californiano Robert Lang, demostró un año después que el sistema axiomático Huzita-Hatori era completo.

Por otro lado, es importante mencionar que con el origami, el estudiante tiene la oportunidad de desarrollar algún tipo de proceso cognitivo. Esto es: "relacionar el origami con la matemática es encontrar la oportunidad de estimular el desarrollo de los procesos cognitivos del estudiante para que pueda articular conceptos abstractos y operaciones concretas en el análisis, planteamiento y solución de problemas" (Monsalve y Jaramillo, 2003, p. 23).

De esta manera el doblado de papel se convierte en un medio que puede facilitar:

- El desarrollo de la motricidad.

- La creatividad e invención.

- El desarrollo de la visualización y la justificación.

- Facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

- El aumento de la autoestima y la paciencia.

Sin embargo, al trabajar con doblado de papel en un aula de clase, se pueden presentar serios problemas, que deben ser tenidos en cuenta para análisis posteriores. Como investigadores en la línea de la didáctica del doblado de papel, usada en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, podemos mencionar algunas dificultades tales como:

- El trabajo con el doblado de papel es un compromiso personal. La experiencia nos ha mostrado que, explicar el proceso del doblado de una figura a más de 15 estudiantes reunidos en un aula de clase, es desastroso. La mayoría no logran terminar las figuras y realizar el ensamblaje correspondiente; en el caso de las figuras modulares, estas no se logran culminar.

- Realizar cualquier figura, sea con fines artísticos o con fines educativos, requiere de muchísima paciencia tanto del docente como del estudiante. Algunos de éstos presentan dificultades para comprender la secuencia de dobleces respectivos, por lo tanto esto les causa un fuerte desespero, luego adoptan la actitud de darse por vencidos e interrumpen su proceso de aprendizaje.

- Para lograr una figura, es necesario tener algún nivel de motricidad fina. Muchos estudiantes también se rinden al ver que sus figuras quedan deformes; esto hace que al final no logren comprender ni mucho menos generalizar los conceptos matemáticos que se están estudiando mediante el doblado de papel. Esto lleva a que se descuide el aspecto del aprendizaje, dado que se hace más énfasis en la estética del doblado.

- El tiempo es un factor crucial a la hora de realizar alguna figura. De hecho, la paciencia y la reflexión, son dos valores determinantes en su proceso de elaboración.

- Sabemos que el factor tiempo es lo que escasea en las escuelas y colegios de nuestro país. Se supone y es exigencia del gobierno, que los planes de área sean abarcados en su totalidad y más, en áreas tan fundamentales como la Matemática. Es por eso que se torna tan complicado llevar a cabo propuestas en las cuales se utilice el doblado de papel.

- Muchos estudiantes, e incluso maestros, directivos, matemáticos e investigadores, han criticado el doblado de papel porque creen que no hay una trascendencia al conocimiento; es decir, que éste se queda en la parte lúdica. Los que trabajamos en esta línea, hemos experimentado que sí es posible enseñar conceptos matemáticos con el doblado de papel, cuidándonos de evitar la confusión entre el simple juego y el aprendizaje. Además, es importante resaltar que la lúdica es un factor motivante para el aprendizaje de una disciplina, en nuestro caso de la geometría.

1.1.4.3 Secciones cónicas y doblado de papel

Con el doblado de papel es posible construir las secciones cónicas y definirlas como lugares geométricos. Así lo mencionan diferentes autores como Row (1966), Johnson (1975), Del Río (1996), Ibañez (2002), Czwienczek (2009), entre otros.

Elipse:

> "Recorte un círculo de papel de cualquier radio e indique el centro del mismo. Marque en el interior de dicho círculo un punto P que sea distinto de su centro O. Doble el círculo de manera que la circunferencia pase por el punto P, como se indica en la figura. Realice varios dobleces, siempre haciendo coincidir puntos de la circunferencia con el punto P, hacer esto en variadas direcciones" (Czwienczek, 2009, p. 151)

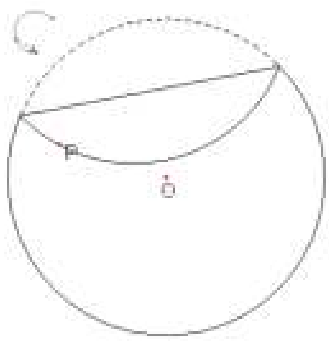


Figura 1: Construcción de la elipse con doblado de papel (Czwienczek, 2009, p.151)

Parábola:

Para construir la parábola con doblado de papel, "hay que partir de una recta y un punto exterior doblando de modo que este punto pase por todos los puntos de la recta" (Del Río, 1996, p. 156).

Hipérbola:

Dibuje una circunferencia sobre una hoja de papel y señale en ella de 20 a 25 puntos, "más próximos entre sí los que están más cerca de un punto B exterior a ella" (p. 154). Doble y desdoble el papel de manera que el punto B "pase por todos los señalados en la circunferencia" (p. 154)

Es importante observar que las anteriores construcciones no tuvieron en cuenta la axiomática establecida para el doblado de papel. Una de las contribuciones de nuestro trabajo de investigación (capítulo 3) es precisamente construir cada una de estas secciones cónicas con doblado de papel y definirlas como lugares geométricos con base en dicha axiomática; además de observar el avanzado nivel de razonamiento que los estudiantes logran cuando realizan construcciones complejas con base en la geometría del doblado.

1.1.5 Otras investigaciones desarrolladas en el marco del Modelo de Van Hiele.

A continuación, se mencionarán brevemente algunas tesis de doctorado y de maestría, que se han desarrollado en el contexto del modelo educativo de Van Hiele, pero en conceptos del análisis matemático, y que han permitido la extensión del mismo.

Memoria para optar al grado de Doctora presentada por Judy Land.

Judy Land presentó en el año 1991 su memoria: "Apropiatness of the Van Hiele Model for describing Students Cognitive Processes on algebra task as typified by College

Students Learning of Functions" para optar al título de Doctora en la Universidad de Boston.

Los objetivos de Land (1991) fueron:

> "Definir operacionalmente la conducta de los estudiantes en cada nivel usando el modelo de Van Hiele para el tema de las funciones exponenciales y logarítmicas.
>
> Determinar si las respuestas de los estudiantes a una entrevista escrita pueden ser caracterizadas de acuerdo con los niveles.
>
> Formular unos descriptores de niveles que describan el conocimiento y el meta conocimiento.
>
> Explorar el uso de fases para facilitar el recorrido de los estudiantes desde un nivel a otro" (Citada por Jaramillo, 2003, p. 29).

Este trabajo perseguía finalmente, el diseño de un instrumento para una evaluación clínica del nivel de razonamiento de los estudiantes, en una temática concreta del álgebra, además, proponía los descriptores de niveles para cada materia del álgebra (Jaramillo, 2003). Lo más importante de este trabajo, fue el hecho de utilizar el modelo de Van Hiele en un área diferente a la geometría, pues sirvió de base para otros estudios posteriores, como el de Llorens (1994).

Memoria para optar al grado de Doctor presentada por José L. Llorens.

José L. Llorens presentó en el año 1994 su memoria: "Aplicación del modelo de Van Hiele al Concepto de Aproximación Local" para optar al título de Doctor. Este trabajo abrió las puertas para nuevas investigaciones en el análisis matemático, que contribuyeron finalmente a extender el modelo en esta línea. Algunos de sus objetivos principales fueron:

“Caracterizar, mediante los descriptores de los niveles I, II y III, la aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local en su contexto de concepto de recta tangente en una curva en un punto del plano.

Diseñar un modelo-guión para una entrevista semiestructurada que permita la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento descritos.

Comprobar, mediante la administración de una prueba adecuada y el oportuno tratamiento estadístico, que es posible detectar esos niveles en ciertas muestras de estudiantes, al mismo tiempo que se automatiza la adscripción de esos estudiantes en su correspondiente nivel de razonamiento” (Llorens, 1994, p. 126).

Memoria para optar al grado de Doctor presentada Carlos M. Jaramillo.

Carlos M. Jaramillo presentó en el año 2000 su memoria “La noción de serie convergente desde la óptica de los Niveles de Van Hiele” para optar al título de Doctor, en la Universidad Politécnica de Valencia (España).

Sus objetivos principales fueron:

“Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento de la noción de serie convergente en concordancia con el modelo de Van Hiele y visualizado a través de la imagen de longitud de curvas planas (zig-zags)

Diseñar un modelo guión para una entrevista semiestructurada que permita la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento que proponemos.

Comprobar, mediante una prueba escrita y el oportuno tratamiento estadístico que es posible la detección de estos niveles y que coincide con los descritos, al mismo tiempo, que se automatiza la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel.

> Una nueva propuesta metodológica para la asimilación de una primera fase en la comprensión del concepto de convergencia de una serie" (Jaramillo, 2003, p. 58).

Esta investigación no solamente logró los objetivos anteriores, sino que también logró la validación de "una metodología de análisis para estudios de la misma naturaleza, en los que predominan las variables cualitativas" (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 66).

Memoria para optar al grado de Doctor presentada por Pedro V. Esteban.

Pedro V. Esteban presentó en el año 2000 su memoria "Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de Van Hiele" para optar al título de Doctor, en la Universidad Politécnica de Valencia (España). Uno de sus objetivos principales fue "analizar el concepto objeto de estudio a partir de la visualización que se obtiene por medio de los mecanismos del zoom y del haz de secantes" (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 67).

En general, él formuló y confirmó los descriptores de los niveles I, II y III del concepto de aproximación local; por lo tanto, corroboró la aplicación del modelo de Van Hiele en este concepto. Para ello, utilizó entrevistas clínicas semiestructuradas de carácter socrático, cuyo mecanismo fue el haz de secantes, para definir la recta tangente a una curva plana en un punto determinado (Esteban, 2003).

Memoria para optar al grado de Doctora presentada por María A. Navarro.

María Angelines Navarro presentó en el año 2003 su memoria "Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica" para optar al título de Doctora en la Universidad de Sevilla, España. Ella "utilizó 'una nube de puntos' como un conjunto de puntos en el plano, cuya visualización le permite al estudiante la formación de un concepto imagen apropiado del proceso de convergencia de una sucesión" (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 61).

En su investigación, utilizó la entrevista de carácter socrático para determinar los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación al concepto de convergencia de una sucesión. Su guión de entrevista preliminar se fue refinando a medida que avanzaba en las entrevistas con los estudiantes y de esta manera, logró también refinar sus descriptores de nivel, para caracterizar adecuadamente su proceso de comprensión del concepto objeto de estudio.

Memoria para optar al título de Magíster en Educación presentada por Flor M. Jurado y René A. Londoño.

Flor M. Jurado y René A. Londoño presentaron en el año 2005, el trabajo de investigación: "Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas" para optar al título de Magísteres en Educación, en la Universidad de Antioquia.

Su objetivo general fue "diseñar una entrevista de carácter socrático en el marco del modelo educativo de Van Hiele, para determinar los niveles de razonamiento sobre el concepto de suma de una serie de términos positivos, vía áreas de figuras planas" (Jurado y Londoño, 2005, p. 1).

Sus objetivos específicos fueron:

> "Señalar las características de una entrevista de carácter socrático para el razonamiento y comprensión de un concepto matemático en particular, basadas en lo que se infiere del diálogo entre Sócrates y el esclavo en "El Menón" y enmarcadas en el modelo educativo de van-Hiele.
>
> Diseñar una entrevista semi-estructurada de carácter socrático para el concepto de suma de una serie de términos positivos, a través de áreas de escaleras.
>
> Aplicar la entrevista para:
> Mejorar el contenido y estructura del guión-entrevista;

Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento sobre el concepto de suma de una serie de términos positivos, vía áreas de figuras planas;

Clasificar al entrevistado en uno de los niveles de razonamiento" (Jurado y Londoño, 2005, 2).

En conclusión, este trabajo de investigación permitió una extensión del modelo de Van Hiele a conceptos del análisis matemático y demostró que el diseño de una entrevista de carácter socrático es pertinente como propuesta metodológica para lograr un avanzado nivel de razonamiento en el respectivo concepto objeto de estudio.

Memoria para optar al título de Magíster en Educación presentada por Alfonso López.

Alfonso López presentó en el año 2007, el trabajo de investigación: "Las fases de Van Hiele para el teorema de Pitágoras" para optar al título de Magíster en Educación, en la Universidad de Antioquia. Esta investigación planteó los siguientes dos objetivos generales:

"Identificar el grado de entendimiento y el correspondiente nivel de razonamiento, a la luz del Modelo de Van Hiele, que en relación con el Teorema de Pitágoras poseen los estudiantes de grados 8º y 9º, en una institución de educación media.

Generar la promoción a niveles de razonamiento superior, en relación con el teorema de Pitágoras, a estudiantes de grados 8º y 9º de una institución de educación media, a través de una metodología mayéutica hermenéutica fundamentada en el modelo educativo de Van Hiele" (López, 2007, p. 70).

Para lograr los objetivos, López (2007) diseñó descriptores hipotéticos para cada una de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y con base en estos, diseñó actividades respectivamente para cada fase, que permitieran que el estudiante avanzara en su nivel de razonamiento, en relación al teorema de Pitágoras. Posteriormente, elaboró un test que se aplicó a una gran cantidad de estudiantes y obtuvo la validación del mismo desde el punto de vista estadístico.

Memoria para optar al título de Magíster en Educación presentada por Sandra Zapata y Edison Sucerquia.

Sandra Zapata y Edison Sucerquia presentaron en el año 2009, el trabajo de investigación: "Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos" para optar al título de Magísteres en Educación, en la Universidad de Antioquia.

Su objetivo general fue:

> "Favorecer el progreso de los estudiantes ubicados en el nivel II de razonamiento al nivel III, mediante la implementación de un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje), diseñado en el marco de las Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, frente al concepto de convergencia de una serie infinita vía áreas de figuras planas" (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 4).

Basados en el trabajo de Jurado y Londoño (2005), Zapata y Sucerquia (2009) diseñaron un guión de entrevista preliminar, que fue mejorado y corregido durante el trabajo de campo. Éste también les permitió revisar y refinar los descriptores hipotéticos de fase, que se plantearon al principio de la investigación. Posteriormente, ellos diseñaron un test, que se derivó del modulo de aprendizaje y lo validaron con un exhaustivo tratamiento estadístico.

Uno de los principales aportes de este trabajo de investigación a la Educación Matemática, fue la creación de un módulo de aprendizaje, que se constituyó en una experiencia de aprendizaje para los estudiantes, pues favoreció la construcción de conceptos matemáticos.

1.1.6 Pertinencia del Modelo de Van Hiele

La comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, se puede lograr con base en el modelo educativo de Van Hiele, no sólo porque es un modelo diseñado inicialmente para la geometría, sino por su carácter visual geométrico que facilita la comprensión de definiciones formales a partir del reconocimiento visual, el análisis y la clasificación. Además,

> "el doblado de papel le da sentido a expresiones matemáticas como las identidades algebraicas; hace más entendible el significado matemático a partir de la manipulación de objetos concretos; es una estrategia de visualización geométrica que enriquece el Nivel 0[3] de razonamiento. En este nivel, el alumno juzga el mosaico por su apariencia y no alcanza a detectar las propiedades matemáticas de las figuras geométricas, porque carece de la experiencia necesaria para describir las construcciones e implicaciones geométricas inherentes a las figuras" (Jaramillo, Monsalve y Esteban, sf, p. 3).

Por otro lado, el doblado de papel es una herramienta útil y funcional que brinda la posibilidad al sujeto de interactuar con una hoja de papel para visualizar conceptos y facilitar así el aprendizaje de la geometría. Se relaciona con el modelo porque es una estrategia de visualización geométrica que enriquece el nivel I[4] de razonamiento y al mismo tiempo contribuye con una componente de tipo experimental (Jaramillo y Esteban, 2006). De hecho, autores como Jaramillo, Monsalve y Esteban (sf) afirman que:

> "el doblado de papel puede transformar las estructuras geométricas que el alumno posee, en otras nuevas y más complejas que le posibilitan avanzar en su Nivel de razonamiento. Estas estructuras se representan como una "red de relaciones"; según Van Hiele, el paso de un nivel a otro se produce mediante la creación de una

[3] Este concepto se abordará en el capítulo 2, donde se considerará otra nomenclatura para los niveles de razonamiento.
[4] En el capítulo 2 se tendrá en cuenta otra nomenclatura para los niveles de razonamiento.

nueva red de relaciones obtenida al incorporar a la anterior, nuevos conceptos y nuevas relaciones. La importancia del doblado radica en suministrarle al alumno nuevos métodos y herramientas de razonamiento, mientras estudia los elementos de la geometría presentes en el mosaico de pliegues y así puede extender su estructura visual geométrica, a partir de la comprensión de un patrón básico" (p. 3).

En nuestra búsqueda general sobre secciones cónicas y doblado de papel, al parecer, no encontramos estudios que se ocupen de indagar por la comprensión en particular del concepto de elipse como lugar geométrico, en el marco del modelo educativo de Van Hiele a través del doblado de papel. Hemos encontrado artículos y trabajos que involucran la construcción de las secciones cónicas con papel, pero no mencionan la axiomática propia para el doblado. También hemos encontrado una tesis de pregrado titulada "Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría euclidiana en el nivel medio básico" cuyo objetivo fue el de:

> "determinar la influencia que ejercen los apoyos didácticos del doblado de papel (origami) y la microcomputadora en el desarrollo y construcción de los conceptos referentes a cuadriláteros en un nivel medio básico. Así como determinar, en menor medida, el grado de eficacia de dichos apoyos didácticos en su aplicación a la enseñanza de la geometría euclidiana en el nivel medio básico" (Larios y González, 1994, p. 9).

1.1.7 Entrevista de carácter socrático

Algunas tesis doctorales como las de J. L. Llorens, P. Campillo, A. de la Torre, C. Jaramillo y P. Esteban, han probado que un buen diseño de entrevista de carácter socrático en el contexto de Van Hiele, permite revelar el nivel de razonamiento de un estudiante frente a un concepto matemático determinado (Jaramillo y Campillo, 2001). Es decir,

> “el propósito que se persigue con la entrevista socrática es que el aprendiz reflexione no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos” (De la Torre, 2003, 116).

En este sentido, el proceso a través de una entrevista socrática se convierte no sólo en una herramienta para que el investigador observe la evolución del razonamiento de los estudiantes, sino también, se constituye en una experiencia de aprendizaje para estos últimos, porque les permite avanzar en su nivel de razonamiento (Jaramillo y Campillo, 2001). De hecho, el camino hacia el conocimiento es un proceso que se da de forma gradual, con etapas intermedias como la opinión y la creencia. Por lo tanto, el aprendiz participa activamente en su proceso, que finaliza cuando éste inventa o descubre la respuesta pertinente a una pregunta bien elaborada, manifestando además, su nivel de pensamiento con respecto al concepto estudiado (De la Torre, 2003).

Por su parte, el entrevistador “debe poner especial cuidado en el vocabulario empleado por el aprendiz, quien, a lo largo de la entrevista, va elaborando su propio lenguaje con precisión cada vez mayor” (De la Torre, 2003, 116).

El proceso de investigación sobre el modelo educativo de Van Hiele, “tiene una particular metodología en espiral: se utiliza la entrevista socrática para formular los descriptores de los niveles y para mejorar a su vez, la herramienta de trabajo que representa esta clase de entrevista” (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 67). En nuestro proceso de investigación, diseñamos en primer lugar unos descriptores hipotéticos, en correspondencia con los descriptores generales de los niveles de razonamiento de Van Hiele. Con base en estos descriptores, diseñamos un guión de entrevista de carácter socrático preliminar, que nos permitirá analizar el proceso de comprensión de la elipse como lugar geométrico en los estudiantes de nuestro estudio de casos. Posteriormente, realizamos entrevistas individuales, que nos permitirán refinar tanto el instrumento como los descriptores. Este proceso finaliza cuando se dé la saturación, es decir, cuando el guión y los descriptores no se puedan refinar más.

Según Jurado y Londoño (2005) un diálogo de carácter socrático cumple con las siguientes diez características:

Intencionalidad de la entrevista.

El entrevistador debe conocer muy bien los objetivos que debe lograr el estudiante en el desarrollo de la entrevista, para poder determinar su nivel de razonamiento (p. 86). Además, debe tener conocimientos claros sobre algunos conceptos relacionados con el objeto de estudio, aunque es posible que no haya necesidad de explicitarlos porque podrían obstaculizar el proceso de la entrevista. Lo más importante es que el estudiante pueda dar respuestas espontáneas, que surgen de su razonamiento crítico y reflexivo (p. 86) y pueda lograr una amplia comprensión del concepto objeto de estudio.

El lenguaje.

El entrevistador debe manejar un lenguaje acorde con el vocabulario común del estudiante. Incluso, debe utilizar palabras que motiven al estudiante a responder de forma espontánea, sin miedo a equivocarse. En todo momento, el diálogo entre entrevistador y entrevistado debe fluir con mucha naturalidad, generando una atmósfera de confianza entre ambos (p. 87).

Es importante tener en cuenta que el lenguaje utilizado por el estudiante es un factor determinante para detectar su nivel de razonamiento. Incluso, es una de las características de los niveles de razonamiento, pues el estudiante a medida que va avanzado en su nivel de comprensión, va reestructurando su red de relaciones y su lenguaje se hace más preciso y refinado.

Los conceptos básicos.

Las preguntas iniciales que el entrevistador formule, tienen el propósito de indagar por los conceptos básicos (p. 87) indispensables para la comprensión del concepto objeto de estudio. Es decir, estas preguntas permiten saber si el estudiante supera las habilidades, características y conocimientos del nivel 0[5] de razonamiento.

Las experiencias previas del entrevistado.

La entrevista debe contener preguntas "inquisitivas" o preguntas intencionadas que conduzcan a la búsqueda de lo que se quiere conocer (p. 88). Este tipo de preguntas le brindan la posibilidad al estudiante de "reflexionar y responder, aflorando en su mente todas las ideas que tenga alrededor del concepto" (p. 88) o simplemente responder lo que él cree saber, de acuerdo con sus conocimientos previos y sus experiencias anteriores, pues no se puede negar el carácter histórico del estudiante.

Diálogo inquisitivo.

El diálogo inquisitivo es una interacción entre entrevistador y entrevistado, que le permite a este último, a través de un pensamiento discursivo, descubrir, encontrar soluciones y comprender el concepto objeto de estudio, ampliando su red de relaciones (Jurado y Londoño, 2005). El estudiante puede percibir relaciones nuevas o conceptos que no veía antes e involucrarlos en su red, ampliándola o modificándola. Es importante aclarar, que "el entrevistador no le enseña nada al entrevistado, sólo lo conduce mediante la indagación y el razonamiento" (p. 88).

Pensamiento discursivo.

En la entrevista, se hace necesario realizar una misma pregunta varias veces y en diferentes instantes. En un primer momento, se hace para que el estudiante informe lo que sabe al respecto. En un segundo o posterior momento, se hace para que el estudiante tenga la posibilidad de dar respuestas más elaboradas, pues ha logrado ampliar o modificar su red de relaciones.

---

[5] Este concepto se abordará en el capítulo 2, donde se considerará otra nomenclatura para los niveles de razonamiento.

El aporte de información.

Algunas de las preguntas de la entrevista, brindan la información necesaria para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto, con base en sus reflexiones y razonamientos. Estos aportes pueden aparecer como "definición de nuevos conceptos, relaciones con otras ideas afines o ampliación del vocabulario" (p. 90). La información suministrada por el entrevistador no debe "sugerir enseñanza ni explicación alguna" (p. 90).

La problematización con las ideas.

Hay preguntas en la entrevista, que logran que el estudiante se sienta consciente y enriquezca su propio saber. Mientras que hay otras, que logran que el estudiante explicite "sus carencias o dificultades" (p. 90). En este caso, el entrevistado entra en un estado de "contradicción, de problematización, de conflicto interno, de confrontación con sus ideas" (p. 90). Las ansias de hallar la verdad, lo pueden llevar a cambiar totalmente la estructura de pensamiento que tenía acerca del concepto o requerir la ayuda del entrevistador para elaborar, modificar o extender su red de relaciones. En una situación como estas, el entrevistador debe parecerse a un pez torpedo para "obtener del entrevistado un conocimiento racionalizado y más elaborado" (p. 91).

El paso por los tres momentos.

Durante la entrevista, el estudiante pasa por tres momentos:

> "creer saber la respuesta a la pregunta, luego, a través de las mismas preguntas darse cuenta que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto" (p. 91).

La red de relaciones.

Las preguntas de la entrevista deben estar formuladas y distribuidas, de tal manera que el entrevistado pueda construir una red de relaciones alrededor del concepto objeto de estudio, con base en los elementos, procesos y procedimientos que le proporciona la misma entrevista para razonar y reflexionar: mecanismos visual-geométricos, verbales o escritos (p. 92).

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La tesis de pregrado, "Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características" (Santa, Bedoya y Jiménez, 2007), realizó una serie de pruebas y entrevistas a estudiantes y profesores de ciertas instituciones públicas de la ciudad de Medellín. Una de las conclusiones de este estudio es que, la geometría analítica, todavía se viene enseñando de una forma tradicional y bastante lineal en los respectivos contextos institucionales, sin lograr los propósitos respectivos. Es decir, la metodología empleada es construir las secciones cónicas en papel milimetrado y después desarrollar, de manera algorítmica, algunos ejercicios para esbozar sus ecuaciones algebraicas generales y canónicas y, posteriormente, evaluar la búsqueda procedimental de los elementos de cada sección cónica. Desde nuestra experiencia docente a nivel universitario, observamos que algunos estudiantes de los primeros semestres tienen habilidades algorítmicas para determinar dichas ecuaciones, pero no razonan sobre el concepto como lugar geométrico, propio de cada una de las secciones cónicas. Además, otros estudiantes no reconocen las ecuaciones ni los conceptos correspondientes. Al respecto, Cruz y Mariño (1999) afirman que: "dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas" (p. 15). Y argumentan, además, que:

> "en los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una

de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el por qué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen" (p. 15).

De acuerdo con las ideas anteriores, una de las grandes dificultades que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas y en particular de la geometría, es la desarticulación entre conceptos y procedimientos, como se detectó en el caso de las secciones cónicas. En este sentido, muchos estudiantes, de la interfase bachillerato – universidad, tienen dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que se les facilita la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones. Además, no abundan trabajos que den cuenta de la comprensión de los estudiantes de dicha temática a partir del doblado de papel. Luego, se pretende responder a la pregunta de investigación ¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele? Por esta razón, nuestro objeto de estudio es, precisamente, la comprensión del concepto de elipse mediante el doblado de papel, e incluso, la comprensión de los conceptos estrechamente relacionados con este para poder lograr nuestro propósito.

De acuerdo con la pregunta y el objeto, nuestra investigación intenta, mediante un estudio de casos cualitativo, analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en estudiantes de los últimos grados de secundaria, con la geometría del doblado de papel, en el marco del modelo educativo de Van Hiele.

Basados en la experiencia docente y en la articulación entre el modelo teórico y la temática particular (concepto de elipse), surgen unos descriptores hipotéticos de los niveles de razonamiento de Van Hiele; a su vez, en correspondencia con estos descriptores, se construye un guión de entrevista hipotético de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel. La entrevista con cada uno de los estudiantes, se hace con el fin de analizar su nivel de razonamiento y refinar tanto el guión entrevista como los descriptores. Por lo tanto, de las interacciones con las participantes, las cuales se reflejan en sus comentarios, intereses, necesidades, preguntas, escritos, entre otros, se establecen como tal los descriptores de nivel y el guión de entrevista correspondiente, que permita finalmente, caracterizar el nivel en el que está razonando un estudiante determinado. Este guión de entrevista refinado y estructurado, de carácter socrático, el cual es una propuesta metodológica de aprendizaje, se constituye a su vez en una experiencia de aprendizaje para el estudiante, permitiéndole avanzar en su nivel de razonamiento en la conceptualización objeto de estudio.

1.3 OBJETIVOS DEL PROYECTO

1.3.1 General:

Analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele, utilizando la geometría del doblado de papel, con los estudiantes del grado décimo de una I.E de la ciudad de Medellín o con estudiantes universitarios de primeros semestres de cursos de matemáticas básicas.

1.3.2 Específicos:

- Diseñar y evaluar un guión de entrevista de carácter socrático, basado en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel, que permita detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico y que, igualmente, se convierta en una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento.

- Determinar los descriptores para ubicar a un estudiante en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación al concepto de elipse, utilizando la geometría del doblado de papel.

- Plantear una propuesta metodológica alternativa, que surge del guión de entrevista, para lograr una adecuada comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico en el aula de clase.

2 MARCO TEÓRICO: MODELO DE VAN HIELE

En este capítulo se abordan las principales características del modelo educativo de Van Hiele: el concepto de comprensión e insight, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, articulados al objeto de investigación.

2.1 GENERALIDADES

El modelo educativo de Van Hiele es una teoría que describe el proceso de enseñanza de la geometría euclidiana. Fue creado en Holanda por los esposos Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Marie Van Hiele, profesores de matemática, quienes se encontraron con el problema de que muchos de sus estudiantes no poseían el nivel de razonamiento adecuado a la hora de abordar un problema geométrico con sus correspondientes conceptos.

El propio Pierre Van Hiele (1986) explica, en la siguiente cita, la manera cómo surgió su interés por este tema:

> "Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me di cuenta que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los estudiantes no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban al máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: "No es tan difícil, pero ¿por qué nos los explicó usted de forma tan complicada?" En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y

considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento.” (Citado por Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 304).

La formulación primitiva del modelo, que trata de explicar el comportamiento de los estudiantes, fue dada también por Pierre Van Hiele (1955):

“Primero presenté mi descubrimiento de la siguiente forma:

Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aún así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el estudiante alcance un nivel superior de pensamiento.

Se puede ver mi intento por librarme a mí mismo de no ser capaz de dar suficiente instrucción; también se puede ver la solución: una adecuada serie de ejercicios: En realidad, se ha puesto de manifiesto que al cambiar los libros de texto todas las dificultades podían desaparecer. Así que mi introducción a los niveles no era sólo una afirmación sino también un programa.” (Citado por Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 304).

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) el modelo, tal como se conoce actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

“(1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas;

(2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento;

(3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela;

(4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma" (p. 305).

De acuerdo a lo anterior, el modelo no sólo brinda una descripción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, sino que muestra una relación entre ambos procesos. Por eso, este modelo está compuesto por tres aspectos fundamentales: la percepción o *Insight*, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

Autores como Jaramillo, Monsalve y Esteban (sf), sustentan que:

"La percepción se logra cuando una persona es capaz de actuar en una situación no familiar; ejecuta de forma competente (correcta y adecuadamente) las acciones requeridas por la situación y emplea intencional (deliberada y conscientemente) un método que resuelve la situación. Se logra la percepción cuando los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen; además, pueden aplicar su conocimiento a la resolución de nuevos problemas no rutinarios". (p. 2)

El segundo aspecto del modelo, los niveles de razonamiento, es de tipo descriptivo, puesto que identifica una estratificación del razonamiento humano en niveles jerarquizados, a través de los cuales "progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo" (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 305).

El tercer aspecto del modelo, las fases de aprendizaje, es de tipo prescriptivo, porque brinda una serie de directrices a los profesores para que puedan ayudarle a sus estudiantes a pasar de un nivel de razonamiento al inmediatamente siguiente.

2.2 CONCEPTO DE COMPRENSIÓN.

Los esposos Van Hiele han tratado el concepto de comprensión con mucho recato. Sin embargo, el propio Pierre (1990) afirma que:

> "un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes" (p. 4)

El mismo autor proporciona igualmente, un procedimiento de detección de la comprensión: "dos puntos clave de la comprensión [son] el actuar de forma adecuada y la novedad de la situación" (p. 5). Con respecto al segundo punto, afirma que "sólo podemos saber si hay o no hay comprensión si estamos seguros de que la situación en la que se coloca al sujeto es lo suficientemente nueva para él" (p. 5).

Un concepto fuertemente relacionado con la comprensión desde esta teoría, es el *Insight*, dado que un estudiante lo posee cuando es capaz de resolver un problema no familiar, de forma deliberada y consciente; es decir, actúa de forma adecuada ante situaciones nuevas; puntos clave de la comprensión según Van Hiele. Por lo tanto, para estos autores, la comprensión es sinónimos de *Insight.*

2.3 ESTRUCTURA E INSIGHT

La estructura, según Van Hiele (1986), es un fenómeno de gran importancia porque "capacita al hombre y al animal para actuar en situaciones que no son exactamente las mismas que conocieron antes" (p. 24). Es decir, les permite ahorrar una vida de prueba y error, porque los capacita para comprender ciertas cosas (Van Hiele, 1986). Según Piaget (1968) la estructura tiene tres características principales: "tiene totalidad, es llevada a cabo por transformaciones y es autorregulada" (citado por Van Hiele, 1986, p. 27). Por su parte, la psicología de la Gestalt propone cuatro características de la estructura:

- se puede extender;
- puede ser parte de otra estructura más fina;
- puede ser parte de una estructura más inclusive y
- puede ser isomorfa con otra estructura (p. 28).

Para la psicología Gestalt, una persona o animal posee Insight, "cuando encuentra una conclusión a causa de una estructura mental" (p. 24). Paralelamente, Van Hiele afirma que el Insight existe cuando una persona "actúa" ante una situación nueva, de forma competente y con intención. Ambas descripciones de Insight apuntan a lo mismo, pero con expresiones diferentes.

Por otro lado, Van Hiele (1986) menciona cinco estructuras: la realidad, la mente humana, la mente de la humanidad, el lenguaje y la acción humana (p. 33).

El aprendizaje es un proceso propio de la estructura mental humana y se relaciona directamente con "las modificaciones que se producen en las estructuras mentales de una persona durante el proceso que la lleva de un nivel de razonamiento al siguiente" (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 324). Esas modificaciones tienen que ver con la "transformación de las estructuras mentales actuales en otras nuevas, más complejas, que absorberán las anteriores" (p. 324).

Las estructuras mentales se pueden representar como "redes de relaciones", en las cuales los vértices son los conceptos principales asimilados y las líneas de conexión, son las relaciones que se establecen entre dichos conceptos. Por lo tanto, para Van Hiele, el paso de un nivel al siguiente se produce cuando se crea una nueva red de relaciones al incorporar a la anterior, nuevos conceptos y nuevas relaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Por ejemplo, en el nivel I de reconocimiento visual, la red es muy simple porque está formada por nombres sin conexiones entre ellos. El estudiante logra varias subredes independientes.

En el nivel II de análisis, “se amplían las subredes anteriores (que siguen siendo independientes) gracias al surgimiento de los conceptos correspondientes a los elementos y sus propiedades” (p. 325).

En el nivel III de clasificación, el estudiante puede integrar varias subredes en una sola, porque ya es capaz de deducir algunas propiedades de otras y se le facilita la clasificación de los objetos.

En el nivel IV de deducción formal, el estudiante logra conexiones más formales y abstractas, que las logradas en el nivel III, que eran lógicas pero informales (Jaime y Gutiérrez, 1990).

2.4 DIFERENCIAS ENTRE EL MODELO DE VAN HIELE Y LA TEORÍA DE JEAN PIAGET

Muchas de las ideas de Van Hiele tienen sus raíces en la teoría de Piaget. Sin embargo, es fundamental para nuestra investigación, mencionar sus principales diferencias.

(1) Piaget argumentaba que el paso de una etapa a la siguiente dependía del desarrollo; mientras que Van Hiele afirmaba que el paso de un nivel de razonamiento al siguiente está en función del aprendizaje. Jaramillo (2000) explica la diferencia de la siguiente manera:

> “Piaget creía que el paso de un nivel de pensamiento al siguiente era una función del desarrollo, Van Hiele considera que es del aprendizaje. Entonces se plantea el problema de cómo estimular a los niños para que progresen de un nivel al siguiente en el contexto de Van Hiele, no de Piaget” (p. 17)

(2) Para Piaget no era importante el lenguaje para lograr avanzar de una etapa de desarrollo a la siguiente; mientras que para Van Hiele, esta es una de las propiedades de los niveles de razonamiento: el lenguaje con el que el estudiante se expresa, es una manifestación del nivel en el que está razonando. El propio Van Hiele (1986) expresó:

> "Piaget no veía importante el papel del lenguaje para el movimiento desde un nivel al siguiente, ocasionalmente se le sugirió a él que los niños no entendían sus preguntas. Él siempre preguntó que es lo que no entendían, él podía leer sus acciones. Pero, aunque las acciones pueden ser adecuadas, tú no puedes leer cuál es el nivel en que los niños pueden razonar" (p. 5).

(3) Piaget no consideraba que el alcance de una etapa superior se debía a la reestructuración de una etapa inferior, mientras que Van Hiele sí consideraba que el progreso de un nivel al siguiente se produce cuando se logra una nueva estructura de pensamiento más compleja, al transformar las estructuras logradas en niveles anteriores. Así lo expresa el mismo Van Hiele (1986):

> ""Piaget no veía las estructuras de un nivel más alto como el resultado del estudio de un nivel mas bajo". En la teoría de Van Hiele el nivel más alto es alcanzado si las reglas que gobiernan la estructura más baja se han hecho explícitas y estudiadas, por lo tanto se convierten en una nueva estructura" (p. 5).

2.5 NIVELES DE RAZONAMIENTO.

Los esposos Van Hiele enunciaron originalmente su modelo describiendo cinco niveles de razonamiento: básico o nivel 0 y niveles I, II, III y IV. Posteriormente ellos y otros autores han ido evolucionando la forma de enumerar estos niveles. Por ejemplo, el propio Pierre Van Hiele (1986) en uno de sus trabajos, enfatiza la importancia de los tres primeros niveles, a los que se refiere como "básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo, tercer nivel o nivel teórico" (Jaramillo, 2000, p. 18). En el mismo trabajo, él afirma que los niveles superiores a estos son difíciles de discernir y que por eso sólo son de interés teórico.

Jaime y Gutiérrez (1990) distinguen cuatro niveles: nivel 1 (de reconocimiento), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación) y nivel 4 (de deducción formal). Land (1991) habla de cuatro niveles también: nivel 0 (básico, visual o predescriptivo), nivel I (descriptivo), nivel II (teórico) y nivel III (deductivo). Finalmente, J. Llorens (1994) distingue cinco niveles: nivel 0 o predescriptivo, nivel I o de reconocimiento visual, nivel II o de análisis, nivel III o de clasificación y nivel IV o de deducción formal.

Los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, siguiendo la nomenclatura dada por J. Llorens (1994), son:

Nivel 0: Predescriptivo.

Es el nivel básico. Describe el conjunto de conocimientos previos que debe tener un estudiante para comprender un concepto particular.

Nivel I: De reconocimiento visual.

- El estudiante reconoce las figuras por su apariencia general, es decir, describe los objetos en su forma física: el color, la forma, el tamaño.

- Reconoce la figuras geométricas como un todo. Se le dificulta encontrar partes constitutivas de los objetos o encontrar propiedades matemáticas que los caracterizan.

- Percibe que las figuras son “objetos individuales” (Jurado y Londoño, 2005, p. 9) y se le dificulta abstraer propiedades para relacionarlas con las propiedades de figuras del mismo tipo.

- El estudiante hace descripciones basadas en semejanzas con otros objetos que le son cotidianos.

Con respecto a la temática general secciones cónicas, el estudiante en este nivel puede describir, en la visualización de las construcciones realizadas mediante el doblado de papel, cada una de estas secciones de manera global: por su forma, su tamaño, incluso su posición en la hoja; se le dificulta establecer las propiedades matemáticas que les corresponden y reconocer partes constitutivas. Además, hace descripciones basadas en semejanzas con objetos conocidos como óvalos, círculos achatados, antenas, equis (X), etc.

Nivel II: De análisis.

- El estudiante es capaz de determinar las partes constitutivas de las figuras.

- Es capaz de encontrar algunas propiedades matemáticas de las figuras, pero todavía no cuenta con las capacidades suficientes para relacionar unas propiedades con otras, o hacer clasificaciones correctas.

- Puede extraer otras propiedades por la observación de las partes constitutivas, e incluso puede hacer algunas generalizaciones de propiedades a figuras de la misma clase.

- La deducción de las propiedades y la generalización, se hace de manera informal con base en la experiencia y la manipulación.

Con respecto al tema de secciones cónicas, el estudiante está en el nivel II de análisis, si reconoce, en la visualización de las construcciones hechas en papel, que cada una de las secciones está compuesta por ciertas partes constitutivas como: mediatrices, puntos interiores fijos, directriz y foco (de manera incubierta). Incluso, puede describir la cónica como una figura envuelta por un conjunto de mediatrices.

Nivel III: De clasificación.

- El estudiante es capaz de relacionar unas propiedades con otras; de hecho puede establecer que unas propiedades se deducen de otras y es capaz de hacer clasificaciones lógicas correctas.

- En este nivel, el estudiante empieza a comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es capaz de seguir demostraciones, pero todavía se le dificulta hacerlas sin una correspondiente ayuda. Aún no tiene la necesidad del rigor y sus argumentaciones se basan en la experiencia.

- Es capaz de establecer la definición de un concepto geométrico de manera formal.

Con respecto al tema de secciones cónicas, un estudiante está en el nivel III de clasificación si identifica, en la visualización de las construcciones hechas mediante el doblado de papel, la propiedad que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer al lugar geométrico respectivo de cada sección cónica. En este nivel, el estudiante puede manifestar la necesidad de llegar a la definición de cada una de las secciones cónicas como lugares geométricos.

Nivel IV: De deducción formal.

- El estudiante en este nivel, logra comprender la estructura axiomática de las matemáticas.

- Es capaz de realizar demostraciones formales sin ninguna ayuda.

- Conoce y aplica las propiedades de un sistema deductivo como la consistencia, la independencia y la completitud (Jaramillo, 2000).

- Puede llegar a las mismas conclusiones partiendo de diferentes premisas.

- Utiliza un vocabulario especializado, propio del rigor matemático.

Para Van Hiele, este nivel de razonamiento es de tipo teórico porque es mucho más difícil de discernir que los niveles anteriores (Van Hiele, 1986, p. 47). Por lo tanto, en este trabajo de investigación, no se realizarán los descriptores propios de este nivel para el concepto de elipse como lugar geométrico.

2.6 PROPIEDADES DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

La parte descriptiva del modelo de Van Hiele, los niveles de razonamiento, comparten ciertas características comunes, según Jaime y Gutiérrez (1990): la jerarquización y secuencialidad, relación entre el lenguaje y los niveles y, la continuidad del paso por los niveles.

Jerarquización y secuencialidad: Como cada uno de los niveles representa un grado de sofisticación en el razonamiento matemático, entonces es válido afirmar que, cada nivel, se apoya en el inmediatamente anterior. Luego, "no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel anterior" (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 312). Esto es importante en la medida en que se puede recurrir a los conceptos y definiciones desarrollados en un nivel anterior.

Relación entre el lenguaje y los niveles: La capacidad de razonamiento de cada uno de los niveles no sólo tiene relación con la resolución de problemas sino también con la manera de expresarse y con la forma de utilizar cierto vocabulario. Luego, "a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico… y dos personas que razonan (y que interpretan los argumentos del otro) en diferentes niveles no podrán comprenderse" (p. 315).

Continuidad en el paso por los niveles: El paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua. Esto es, en palabras de Jaime y Gutiérrez (1990), "el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro" (p. 319). Esto implica que los estudiantes podrán mostrar rasgos en sus procedimientos y razonamientos que corresponden a un estado de transición entre dos niveles.

Siguiendo a otros autores, los niveles de razonamiento de Van Hiele, deben cumplir unas propiedades específicas, para que puedan caracterizar el proceso de comprensión de un estudiante, de un concepto determinado. De acuerdo con la nomenclatura de Usiskin (1982), estas propiedades son:

Propiedad 1: Secuencialidad fija. "Un estudiante no puede estar en un nivel n de Van Hiele sin haber superado el nivel n – 1" (Usiskin, 1982, p. 5). Esto es, cada estudiante debe progresar en los niveles de razonamiento siguiendo una secuencia fija.

Propiedad 2: Adyacencia. Según Mayberry (1981) "El objeto de percepción del nivel n – 1, se convierte en el objeto de pensamiento del nivel n" (Citado por Jaramillo, 2000, p. 22). Es decir, los niveles de razonamiento tienen una "estructura recursiva" (p. 22), puesto que en el nivel inferior hay muchas características o cualidades del pensamiento que se utilizan de forma implícita y que se hacen explícitas en el nivel inmediatamente superior. En la tabla 2 (p. 71) se representa la estructura recursiva de los niveles de razonamiento, de acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990).

Propiedad 3: Distinción. "El nivel n requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel n – 1, esto es la percepción de una nueva estructura" (Jaramillo, 2003, p. 22).

Propiedad 4: Separación. Van Hiele propuso esta propiedad como una hipótesis, pero fue Mayberry (1981) quien confirmó que "dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático" (Citado por Jaramillo, 2003, p. 22).

Tabla 2: Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele (p. 312).

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras.
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras.	Implicaciones entre propiedades.
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades.	Deducción formal de teoremas.
Nivel 4	Deducción formal de teoremas.	

Propiedad 5: Cada nivel tiene su lenguaje. "Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles hasta el punto que cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico" (p. 22). Según la forma en que el estudiante se expresa y el vocabulario que utiliza, manifiesta el nivel en que está razonando frente a un concepto determinado. Cuando el estudiante involucra en su red de relaciones los nuevos conocimientos y logra una modificación o ampliación de esta, logra respuestas más elaboradas. Esto es mostrado por el estudiante gracias al lenguaje que utiliza.

Es importante que no se confunda un avanzado nivel de razonamiento con la habilidad para resolver ejercicios o contestar preguntas. En muchos casos, los estudiantes aprenden a resolver ciertos ejercicios de forma rutinaria y mecánica, reproduciendo algunos que ya sabían realizar; o aprenden definiciones de forma memorística, sin manifestar una comprensión real del concepto.

Propiedad 6: Consecución. "El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual" (Jaramillo, 2003, p. 23). Las habilidades, características o conocimientos de un nivel de razonamiento determinado no se logran de forma simultánea, es decir, las cualidades del pensamiento que permiten el razonamiento en un nivel específico, no se producen en un instante determinado. Debe haber un período de transición en el que el estudiante manifieste simultáneamente habilidades de niveles consecutivos. Se han realizado algunos estudios que indican "el carácter regresivo que puede manifestarse en el nivel de razonamiento, sobre todo cuando todavía no se ha adquirido plenamente un nivel" (p. 24), es decir, el estudiante por lo general, para responder una pregunta de forma segura, se refugia en el nivel de razonamiento anterior, que ya tenía plenamente adquirido.

2.7 FASES DE APRENDIZAJE

Las fases de aprendizaje propuestas por los esposos Van Hiele son cinco:

I. Información: Es la fase en la que los estudiantes tienen la oportunidad de conocer el tipo de trabajo que van a hacer y los profesores, de descubrir el nivel de razonamiento en el que están esos estudiantes en un tema particular.

II. Orientación dirigida: Es la fase en la que los estudiantes construirán los elementos fundamentales de la red de relaciones del nuevo nivel, es decir, "descubren, comprenden y aprenden" (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 334) los conceptos y propiedades principales de la temática que están estudiando.

III. Explicitación: Es la fase en la que los estudiantes revisan, socializan y comparan el trabajo. Es una puesta en escena de los conocimientos obtenidos hasta entonces para perfeccionar el lenguaje y la forma de expresar las ideas.

IV. Orientación libre: En esta fase, los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en las fases anteriores en otras investigaciones, temas o áreas.

V. Integración: En esta fase, el estudiante debe condensar los conocimientos que ha construido hasta entonces en un todo; es decir, acumula, integra y compara todos los conocimientos para estructurar su red de relaciones final. (Jaime y Gutiérrez, 1990).

3 GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL Y SU APLICACIÓN A LAS SECCIONES CÓNICAS

En este capítulo se pretende formalizar los conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel, fundamentar su axiomática y con base en esta, construir y definir cada una de las secciones cónicas.

3.1 AXIOMÁTICA DEL DOBLADO DE PAPEL

3.1.1 Introducción

El doblado de papel se ha convertido en una excelente estrategia de visualización, que permite la comprensión de conceptos matemáticos y, en particular, geométricos. Así lo afirman Santa y Jaramillo (2010):

> "En el campo educativo, el doblado de papel se ha consolidado como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular la hoja de papel con unos dobleces determinados, sino también visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático" (p. 340).

En la misma línea, Royo (2002) también afirmó que: "el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel" (p. 186).

Gracias a que el doblado de papel permite realizar construcciones tan precisas como las que se logran con regla y compás, en los últimos años, se ha venido desarrollando un "sistema axiomático, paralelo al de la geometría euclidiana, que permite justificar las construcciones hechas con papel" (Santa y Jaramillo, 2010, p. 340). Esta geometría, denominada "geometría del doblado de papel" (p. 340), se fundamenta en los seis axiomas presentados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita en el "First International Meeting of Origami Science and Technology" llevado a cabo en el año 1989, y en el séptimo axioma propuesto por el japonés Koshiro Hatori (Santa y Jaramillo, 2010).

Según Santa y Jaramillo (2010), el sistema axiomático del doblado de papel, es "consistente, coherente y plausible desde el punto de vista matemático" (p. 341), de acuerdo con las tres condiciones dadas por Cardozo y Elejalde (2001):

> "Suficiencia: Deben explicitarse las definiciones, postulados y teoremas básicos que permitan deducir nuevos hechos geométricos.
>
> Independencia: Ningún postulado, en este caso axioma, se debe deducir de otro.
>
> Compatibilidad: Dos axiomas no deben llevar a deducciones contradictorias" (p. 341)

De acuerdo con dichas condiciones, Santa y Jaramillo (2010) proponen:

> "unos conceptos básicos o primitivos en correspondencia con los axiomas de Huzita – Hatori para poder así, garantizar la existencia del sistema axiomático de la *geometría del doblado de papel* y fundamentar del rigor geométrico correspondiente, las construcciones realizadas mediante el doblado" (p. 341).

3.1.2 Conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel

Los conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel son "el doblez, el punto y la hoja de papel" (p. 341), de manera análoga a los conceptos primitivos de la geometría euclidiana: la recta, el punto y el plano, respectivamente.

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010), estos conceptos se definirán de la siguiente manera:

> "Doblez: de manera análoga a la recta, hecho en un pedazo de papel que aparece tanto al anverso como al reverso de este, se considerará como un concepto primitivo no definido, el cual está estrechamente relacionado con un segmento de línea recta, porque un pedazo de papel es limitado; pero se enfatizará que este doblez representa de manera abstracta una línea recta" (p. 341).

> "Punto: es un concepto no definido. Sin embargo, se establece una relación directa de manera natural con la intersección de dos dobleces o con las esquinas (ángulos) de la hoja de papel. Sin pérdida de generalidad, en algunos casos, los puntos se van a asumir de manera intuitiva como la marca más pequeña que se puede dibujar con un lápiz. Es decir, un punto puede ser dibujado o construido en la hoja de papel" (p. 342).

> "Hoja de papel: Una cara de la hoja de papel se puede tomar como una porción del plano. Por lo tanto, tiene límites y es finito, pero puede ser una representación abstracta de un plano infinito" (p. 342).

A partir de una hoja de papel, de puntos y segmentos de recta, se pueden hacer muchísimas construcciones, como por ejemplo: rectas perpendiculares a otras, la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento, infinitos segmentos de recta que pasen por un punto, la trisección de un ángulo agudo, algunos productos notables, el teorema de Pitágoras, la media y extrema razón, polígonos regulares, etc. Con base en la visualización de estas construcciones, un estudiante podría alcanzar la comprensión de muchos conceptos geométricos, e incluso de algunos procedimientos algebraicos.

3.1.3 Axiomas o postulados de la geometría del doblado de papel[6].

Santa y Jaramillo (2010) afirmaron que los seis axiomas postulados por Huzita (1989) y el séptimo postulado por Hatori (2003), tienen "restricciones importantes" (p. 342) que no se mencionaron en su formulación inicial, y que son necesarias para poder

[6] Las construcciones que se presentan en este trabajo, fueron elaboradas en el asistente geométrico RyC, con el fin de facilitar la visualización de los hechos geométricos, dado que simulan el mosaico de pliegues producto del doblado de papel.

“establecer que el sistema axiomático de la geometría del doblado de papel, cumpla con las tres condiciones: suficiencia, independencia y compatibilidad” (p. 342).

Por lo tanto, Santa y Jaramillo (2010) reformularon el sistema axiomático de la geometría del doblado de papel, teniendo como referencia los axiomas presentados por Huzita y Hatori y en correspondencia con sus conceptos primitivos mencionados, de la siguiente manera:

*“*Axioma 1: Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos (Lang, 1996 – 2003, p. 38)” (Citado por Santa y Jaramillo, 2010, p. 343).

Este axioma es equivalente al primer axioma de Euclides “por dos puntos pasa una única recta”.

Además, de acuerdo con el concepto primitivo *doblez*, es único el doblez resultante, a pesar de que se pueda observar tanto al anverso como al reverso de la hoja de papel (Santa y Jaramillo, 2010). Luego, Santa y Jaramillo (2010) enuncian el axioma 1 de la siguiente forma: “Dados dos puntos distintos P_1 y P_2, existe un único doblez que pasa a través de ellos” (p. 343).

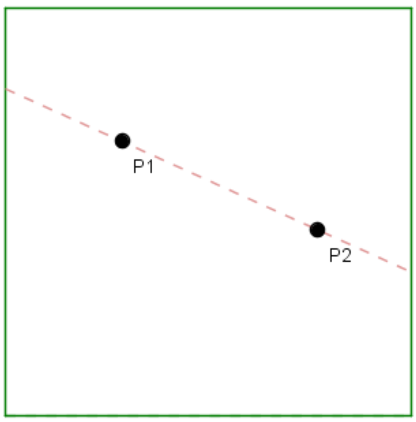


Figura 2: Doblez resultante consecuencia del axioma 1.

“Axioma 2: Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2 (Lang, 1996 – 2003, p. 38)” (Citado por Santa y Jaramillo, 2010, p. 343).

Según Santa y Jaramillo (2010), este axioma se relaciona directamente con la construcción del lugar geométrico de una mediatriz con regla y compás, dado que el doblez resultante es una perpendicular que corta al segmento $\overline{P_1P_2}$ en su punto medio. Como el doblez también es único, y los dos puntos P_1 y P_2 deben ser distintos, entonces estos autores reformulan el axioma 2 de la siguiente forma: “Dados dos puntos distintos P_1 y P_2, existe un único doblez que lleva a P_1 sobre P_2” (p. 343).

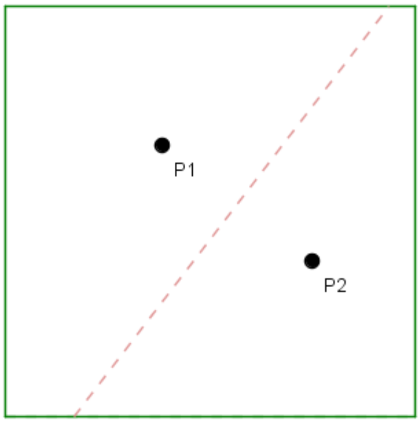


Figura 3: Doblez resultante consecuencia del axioma 2.

“Axioma 3: Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre l_2 (Lang, 1996 – 2003, p. 38)” (p. 344).

Según Santa y Jaramillo (2010), este axioma se relaciona directamente con la construcción del lugar geométrico de una bisectriz con regla y compás, dado que el doblez resultante divide el ángulo que forman los dos dobleces al intersecarse, en dos ángulos congruentes. Por lo tanto, según estos autores, se cumple que:

> “Si l_1 es paralela a l_2, entonces se hace referencia a una paralela que equidista de los dos dobleces. El doblez en este caso sería único.

Si l_1 no es paralela a l_2, entonces se hace referencia a la bisectriz del ángulo que forman los respectivos dobleces al intersecarse. Si estos se intersecan en la hoja de papel, se pueden encontrar dos dobleces. Si estos no se intersecan, existen los dos dobleces, pero uno de ellos está por fuera del plano determinado por la hoja de papel" (p. 344).

De acuerdo con las restricciones anteriores y teniendo en cuenta que los dos dobleces deben ser diferentes, Santa y Jaramillo (2010) reformulan el axioma 3 de la siguiente forma: "Dados dos dobleces distintos l_1 y l_2, existen dos dobleces o un doblez que pone a l_1 exactamente sobre l_2" (p. 344).

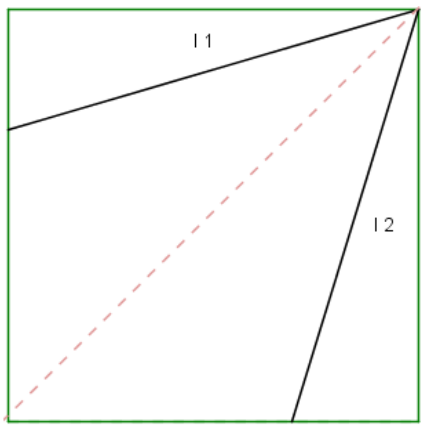


Figura 4: Doblez resultante consecuencia del axioma 3.

"Axioma 4: Dado un punto P_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1 (Lang, 1996 – 2003, p. 38)" (p. 345).

Según Santa y Jaramillo (2010), este axioma se relaciona directamente con la construcción de una perpendicular a una recta que pasa por un punto exterior a esta, o que pertenece a esta, con regla y compás. Teniendo en cuenta que el doblez es único, estos autores reformulan el axioma 4 de la siguiente forma: "Dado un doblez l_1 y un punto P_1, existe un único doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1" (p. 345).

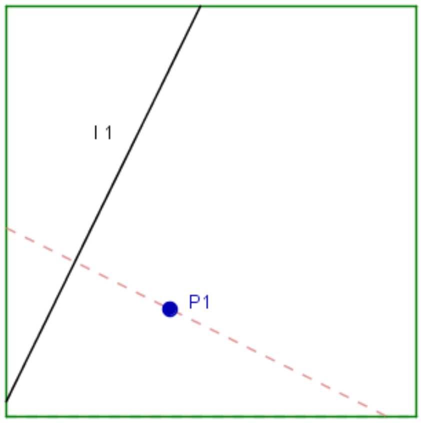


Figura 5: Doblez consecuencia del axioma 4.

“Axioma 5: Dados dos puntos P_1 y P_2, y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2 (Lang, 1996 – 2003, p. 38)” (p. 346).

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010):

> “el punto P_2 se mantiene fijo, mientras que P_1 debe recorrer una trayectoria circular hasta coincidir con un punto que pertenezca a l_1; luego, P_2 es el centro de una circunferencia hipotética de radio $\overline{P_1P_2}$. En la búsqueda del doblez, se presentan entonces tres posibilidades: dos soluciones, una solución o ninguna, de acuerdo con las posiciones relativas de la circunferencia hipotética y el doblez l_1: que el doblez sea secante, sea tangente o que simplemente no corte la circunferencia.” (p. 346).

Por lo tanto, ellos reformulan el enunciado del axioma 5 de la siguiente forma:

“Dados un doblez l_1 y dos puntos P_1 y P_2, se puede encontrar un doblez, dos dobleces o ningún doblez, si se lleva el punto P_1 sobre l_1 y se garantiza que el doblez pase por P_2” (p. 346).

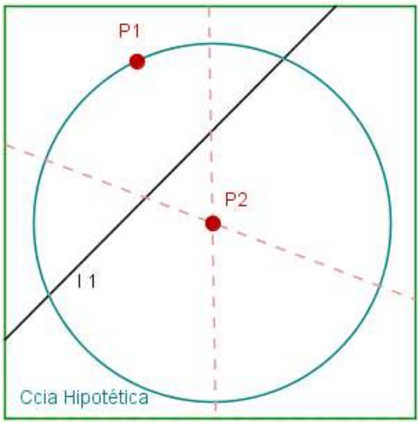


Figura 6: Dobleces resultantes de la aplicación del axioma 5.

"Axioma 6: Dados dos puntos P_1 y P_2, y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2 (Lang, 1996 – 2003, p. 38)" (p. 346).

La aplicación de este axioma, según Huzita (1989), se relaciona con "la solución de un problema de cálculo, el cual consiste en encontrar una recta tangente a dos curvas, en este caso a dos parábolas" (p. 346). De hecho, según Geretschläger (1995), "la aplicación sucesiva del axioma 2 con un doblez l_1 y un punto exterior, genera el lugar geométrico de la parábola" (Citado por Santa y Jaramillo, 2010, p. 346).

Luego, el axioma 6, según Santa y Jaramillo (2010), tendría varias restricciones importantes, que se mencionan en la tabla 3, de acuerdo con las posiciones relativas de los puntos y de los dobleces. Así:

Tabla 3: "Existencia de dobleces al aplicar el axioma 6" (pp. 347 - 348)

Puntos P_1 y P_2 / Dobleces l_1 y l_2	Exteriores a la región que determinan los dobleces	Interiores a la región que determinan los dobleces	Exterior e interior
Paralelos	Hay dos soluciones. Con estas condiciones sucede algo muy curioso: las dos soluciones, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1'P_2'}$[7], $\overline{P_1''P_2''}$[8] convergen en un mismo punto.	No hay solución si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es menor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2. Si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es igual o mayor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2, hay una solución.	No hay solución si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es menor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2. Si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es igual o mayor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2, puede ocurrir: si el eje focal es igual, hay dos soluciones; si el eje focal es diferente, hay dos soluciones, una de las cuales es posible que quede por fuera del plano (hoja de papel).
No paralelos	Hay tres soluciones. Es posible que en la hoja no se pueda visualizar que un punto queda sobre el doblez, porque ocurre por fuera del plano determinado por dicha hoja.	Hay una solución, que puede estar dentro o fuera del plano determinado por la hoja de papel.	Hay dos soluciones. Es posible que en la hoja no se pueda visualizar que un punto queda sobre el doblez, porque ocurre por fuera del plano (hoja de papel).

[7] Los puntos P_1' y P_2' son los puntos donde se ponen P_1 y P_2 cuando se encuentra el primer doblez solución del axioma 6.

[8] Los puntos P_1'' y P_2'' son los puntos donde se ponen P_1 y P_2 cuando se encuentra el segundo doblez solución del axioma 6.

Además de las restricciones mencionadas en la tabla anterior, el punto P_1 debe ser exterior al doblez l_1, asimismo el punto P_2 debe ser exterior al doblez l_2, para garantizar la existencia de las dos parábolas (Santa y Jaramillo, 2010).

Con las restricciones señaladas anteriormente, Santa y Jaramillo (2010) reformulan el enunciado del axioma 6 de la siguiente forma:

> "Dados dos dobleces l_1 y l_2 y dos puntos P_1 y P_2 exteriores a l_1 y l_2 respectivamente, se puede encontrar un doblez, dos dobleces, tres dobleces o ningún doblez, si se pone el punto P_1 sobre el doblez l_1 y a su vez, el punto P_2 sobre el doblez l_2" (p. 348).

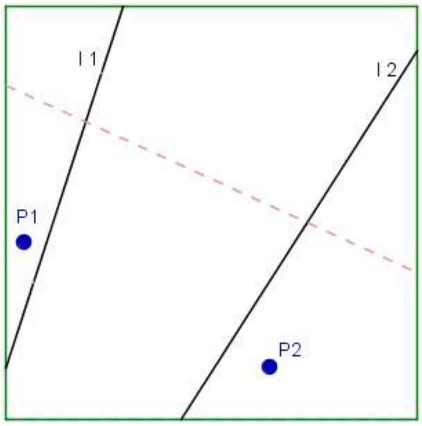


Figura 7: Doblez consecuencia del axioma 6.

"Axioma 7: Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1 (Lang, 1996 – 2003, p. 39)" (Citado por Santa y Jaramillo, 2010, p. 349).

Según Santa y Jaramillo (2010), "este axioma consiste en encontrar un doblez que sea tangente a la parábola cuya directriz es l_1 y cuyo foco es P_1, y a su vez, sea perpendicular a la recta que determina el doblez l_2" (p. 349). De acuerdo con Lang (1996 – 2003), este axioma se relaciona directamente con la solución de una ecuación de segundo grado y debería tener dos soluciones reales distintas, dos soluciones reales iguales, o no tener solución en los reales. Por lo tanto, Santa y Jaramillo (2010) determinaron las siguientes restricciones:

> "Si los dobleces l_1 y l_2 son paralelos, no es posible encontrar el doblez, dado que cualquier perpendicular a l_2 es secante de la parábola con foco P_1 y directriz l_1 (no hay solución en los reales);
>
> Si los dobleces l_1 y l_2 no son paralelos, existe un único doblez (dos soluciones reales iguales);
>
> El punto P_1 debe ser exterior al doblez l_1, de lo contrario, no se podría hablar del lugar geométrico de la parábola" (p. 349).

Con las restricciones señaladas anteriormente, Santa y Jaramillo (2010) reformulan el enunciado del axioma 7 de la siguiente forma: "Dados dos dobleces l_1 y l_2 y un punto P_1 exterior a l_1, se puede encontrar un doblez o ningún doblez, que sea perpendicular a l_2 y que ponga el punto P_1 sobre el doblez l_1" (p. 350).

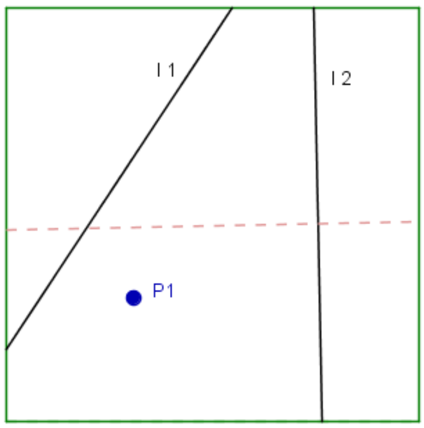


Figura 8: Doblez consecuencia del axioma 7.

De acuerdo con lo anterior, los autores Santa y Jaramillo (2010) consideran que "los axiomas de Huzita – Hatori cumplen con las condiciones de independencia y compatibilidad, puesto que un axioma no puede inferirse del otro y no llevan a deducciones contradictorias" (p. 350). Incluso, Robert Lang (1996 – 2003) "demuestra que este conjunto de axiomas es completo y que son todas las posibles combinaciones que definen un único doblez por la alineación de puntos con segmentos de recta finitos" (Citado por Santa y Jaramillo, 2010, p. 350).

Por lo tanto, Santa y Jaramillo (2010) determinan que:

> "Para que la geometría del doblado de papel sea verdaderamente un sistema axiomático, se debe cumplir con la condición de suficiencia. Aún hace falta establecer una serie de teoremas que permitan deducir nuevos hechos geométricos, y hasta el momento, estos al parecer, todavía no han sido estudiados, dado que apenas las investigaciones en esta área, están iniciando" (p. 350).

3.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS MEDIANTE EL DOBLADO DE PAPEL

A continuación, se propone la construcción de cada una de las secciones cónicas mediante el doblado de papel y su definición como lugar geométrico, con base en la reformulación de la axiomática establecida para la geometría del doblado. Con esto, se busca demostrar la importancia de dicha axiomática para la deducción de nuevos hechos geométricos y se abre la posibilidad de establecer teoremas para que la geometría del doblado de papel sea realmente un sistema axiomático completo.

3.2.1 Circunferencia:

Según Row (1966), "no es posible construir, de manera directa, una circunferencia con el doblado de papel" (Citado por Santa y Jaramillo, 2010, p. 351), pero sí es posible encontrar puntos discretos de la misma y con base en la visualización de esta construcción, definirla como lugar geométrico.

Para tener una primera aproximación de la noción de circunferencia, se propone la construcción de puntos discretos, a partir de un proceso de traslación de puntos, que conserven la misma distancia al punto específico O. Para ello, es necesario tener una hoja de papel de forma cuadrada.

Con el axioma 2, se construyen sus dos diagonales; luego, se aplica el axioma 3 "con cada par de lados paralelos de dicho cuadrado, es decir, se construyen paralelas que equidisten de los lados opuestos respectivamente" (Santa y Jaramillo, 2010, p. 351). Por lo tanto, se generaron cuatro dobleces que convergen en el punto O.

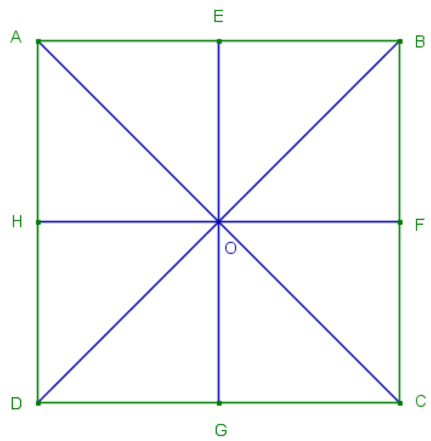


Figura 9: Construcción de puntos discretos de una circunferencia (p. 351).

Posteriormente, se aplica el axioma 3 llevando el doblez $\overline{AC}$ sobre el doblez $\overline{EG}$, para bisecar los ángulos $\angle AOE$ y $\angle GOC$. Usando el mismo procedimiento, se bisecan todos los demás ángulos interiores (Santa y Jaramillo, 2010).

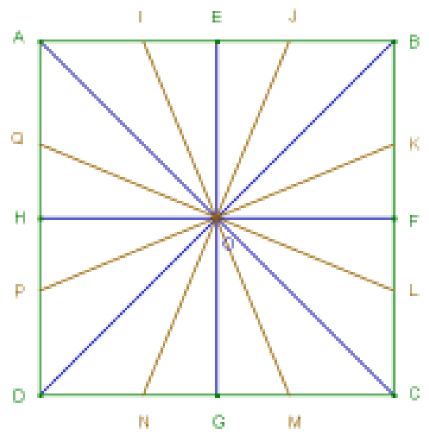


Figura 10: Construcción de puntos discretos de una circunferencia (p. 352).

Luego, se aplica otra vez el axioma 3 con dos dobleces consecutivos, para bisecar los 16 ángulos interiores que se formaron en el punto O (Santa y Jaramillo, 2010).

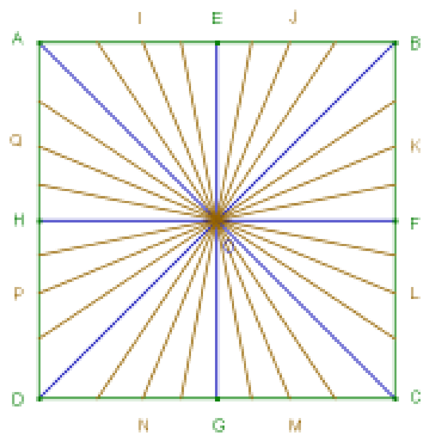


Figura 11: Construcción de puntos discretos de una circunferencia (p. 352).

Se dibuja un punto P en uno de los dobleces (diferente del punto O) cerca al borde de la hoja y se traslada a los dobleces siguientes. Este proceso de traslación de dicho punto a los dobleces consecutivos, garantiza que se conserva la misma distancia al punto O.

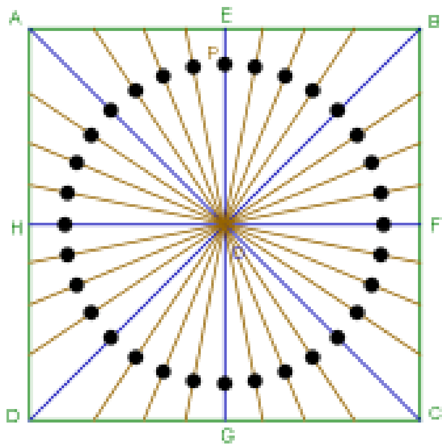


Figura 12: Construcción de puntos discretos de una circunferencia.

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010):

> "este conjunto de puntos discretos permite intuir la noción de circunferencia, círculo, diámetro y radio. Por lo tanto, a partir de esta construcción, se puede definir el lugar geométrico circunferencia como: el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro" (p. 353).

Cuando el estudiante ya comprende la noción de circunferencia, se le puede plantear otra forma de construir una circunferencia concéntrica a otra, mediante el doblado de papel. Se dibuja una circunferencia con centro O y radio r en una hoja de papel. Se llevan varios puntos de esta circunferencia sobre su centro y el conjunto de mediatrices envuelve una segunda circunferencia con centro O y radio $r/2$. En este caso, el estudiante puede determinar y argumentar si la figura envuelta por las mediatrices es una circunferencia, con base en su definición como lugar geométrico.

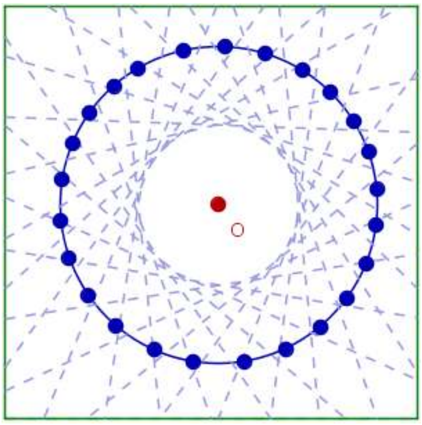


Figura 13: Construcción circunferencia envuelta por mediatrices.

La comprensión del concepto de circunferencia es el primer paso para poder lograr la definición de la elipse y de la hipérbola como lugares geométricos, pues ambas construcciones con doblado de papel, se basan en dicho concepto.

3.2.2 Elipse:

La construcción de la elipse inicia con el dibujo de una circunferencia (Ibáñez, 2002) con centro O y radio r, en una hoja de papel de forma rectangular. Posteriormente, se ubica un punto P, diferente de O, en la región delimitada por dicha circunferencia y se realizan dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre el punto P (aplicación sucesiva del axioma 2).

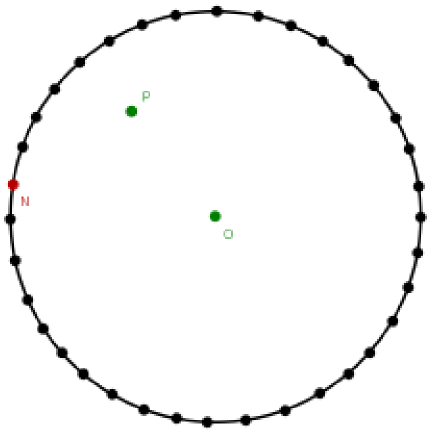


Figura 14: Elementos iniciales para la construcción de una elipse.

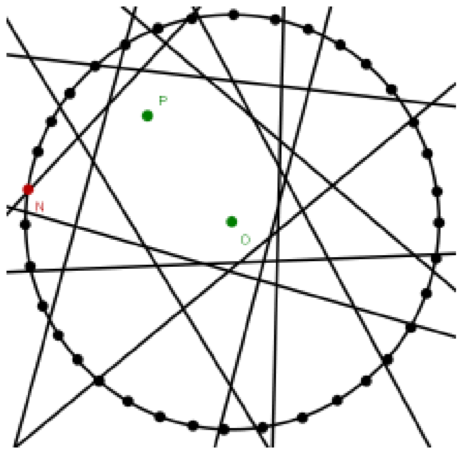


Figura 15: Construcción de una elipse.

Cuando se finalizan todos los dobleces, Ibáñez (2002) afirma que la elipse se forma como la "envolvente de una familia de rectas" (p. 22). Así:

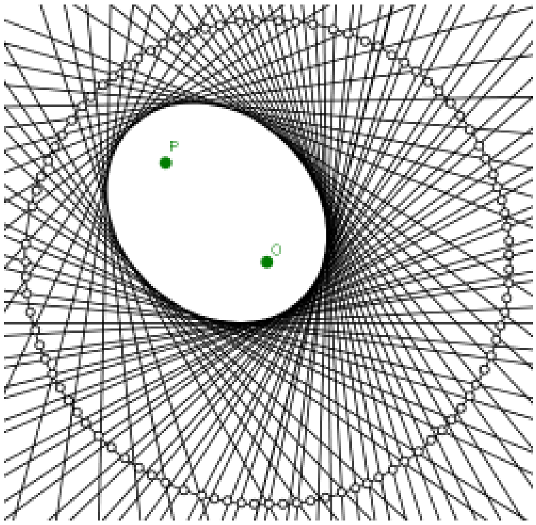


Figura 16: Construcción de una elipse.

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010), la anterior construcción permite llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico, de la siguiente forma:

> “Suponga que O y P son los focos de la elipse, y N uno de los puntos de la circunferencia. Sea M el punto donde se intersecan el radio $\overline{NO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{NP}$ (axioma 2). Nótese que $\overline{MP}$ es congruente con $\overline{NM}$ como consecuencia del segundo axioma” (p. 355).

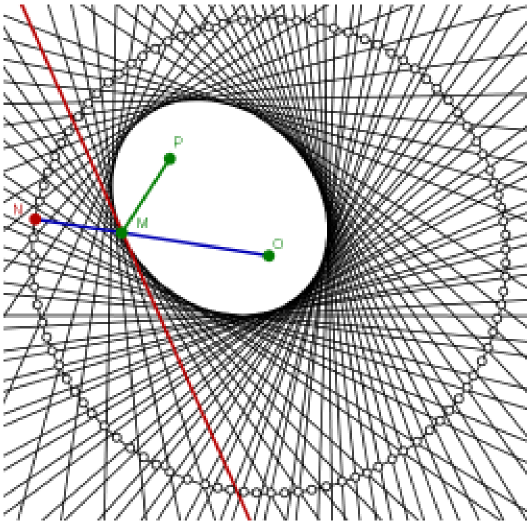


Figura 17: Definición de la elipse.

Con base en la visualización de la figura, sumar $\overline{OM}+\overline{MP}$ sería lo mismo que sumar $\overline{OM}+\overline{MN}$ y el resultado sería r, donde r es el radio de la circunferencia inicial con la que se empezó la construcción. Luego, se puede afirmar que la elipse "es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante" (Zill y Dewar, 1992, p. 494).

3.2.3 Hipérbola:

La construcción de la hipérbola inicia con el dibujo de una circunferencia (Ibáñez, 2002) con centro O y radio r, en una hoja de papel de forma rectangular. Posteriormente, se ubica un punto P, diferente de O, exterior a dicha circunferencia y se realizan dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre el punto P (aplicación sucesiva del axioma 2).

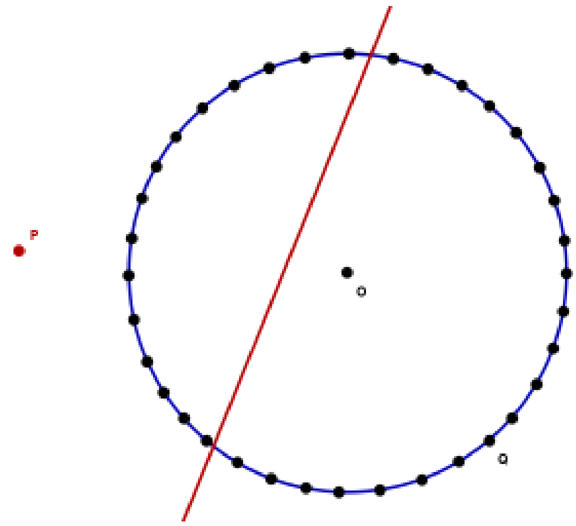


Figura 18: Elementos iniciales para la construcción de una hipérbola.

Cuando se finalizan todos los dobleces, Ibáñez (2002) afirma que la hipérbola se forma como la "envolvente de una familia de rectas tangentes" (p. 34). Así:

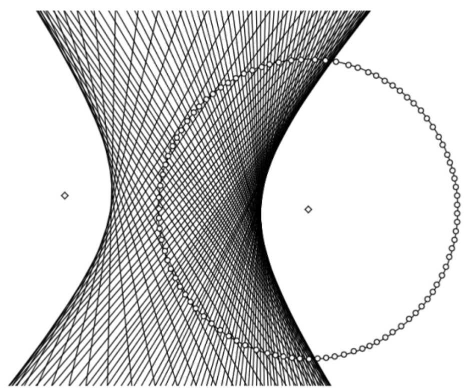


Figura 19: Construcción de una hipérbola (Santa y Jaramillo, 2010, p. 357).

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010), la anterior construcción permite llegar a la definición de la hipérbola como lugar geométrico, de la siguiente forma:

> "Suponga que P y O son los focos de la hipérbola y Q, un punto de la circunferencia. Sea M el punto donde se intersecan el diámetro que pasa por el

segmento $\overline{QO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ (doblez formado por la aplicación del axioma 2)" (p. 357).

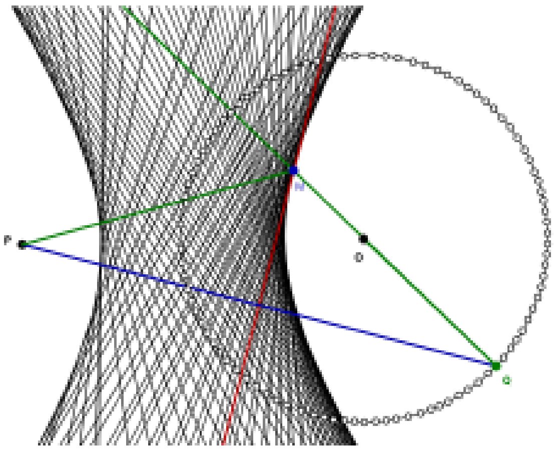


Figura 20: Definición de la hipérbola.

Con base en la visualización de la figura, realizar la operación $\overline{QM} - \overline{MO}$ sería lo mismo que realizar la operación $\overline{PM} - \overline{MO}$, dado que $\overline{PM}$ es congruente con $\overline{QM}$, por el segundo axioma. El resultado sería r, donde r es el radio de la circunferencia inicial con la que se empezó la construcción. Luego, se puede afirmar que la hipérbola es "el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos llamados focos es constante" (Zill y Dewar, 1992, p. 502).

3.2.4 Parábola:

Su construcción inicia con la realización de un doblez L, como consecuencia de la aplicación del axioma 1, y de la ubicación de un punto P, exterior a este. Posteriormente, se realizan dobleces que surgen de llevar puntos de la recta sobre el punto P (aplicación sucesiva del axioma 2).

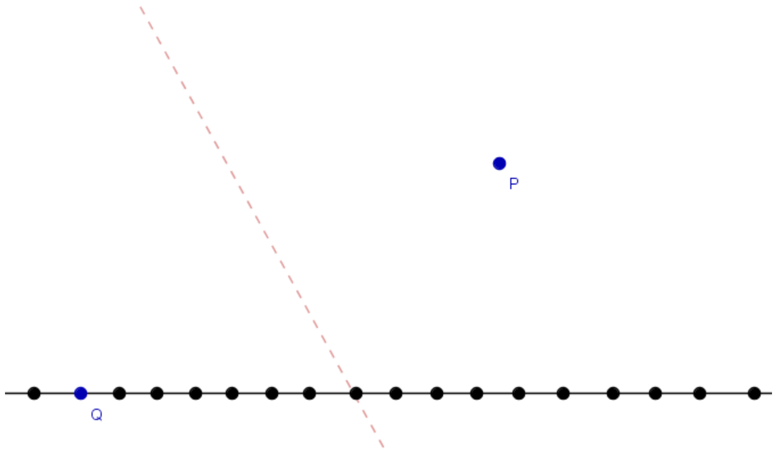


Figura 21: Elementos iniciales para la construcción de una parábola.

Cuando se finalizan todos los dobleces, Ibáñez (2002) afirma que la parábola se forma como la "envolvente de una familia de rectas tangentes" (p. 26). Así:

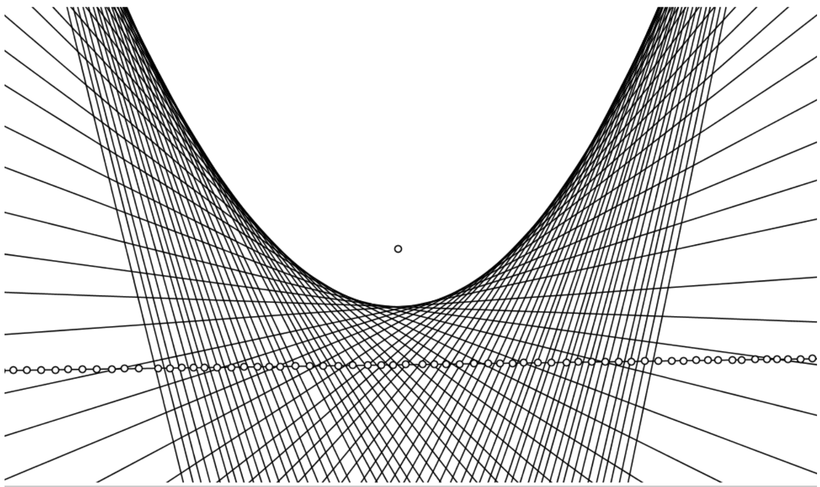


Figura 22: Construcción de una parábola (Santa y Jaramillo, 2010, p. 359).

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010), la anterior construcción permite llegar a la definición de la parábola como lugar geométrico, de la siguiente forma:

> "Suponga que P es el foco de la parábola y L su directriz. Sea K el doblez que se formó cuando se aplicó el axioma 2. Al aplicar el axioma 4, se puede hacer un doblez perpendicular a L y que pase por el punto Q. Este doblez se corta con el

doblez K en el punto R. Note que el segmento $\overline{PR}$ es congruente con el segmento $\overline{RQ}$ (por ser K la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, axioma 2)" (p. 359).

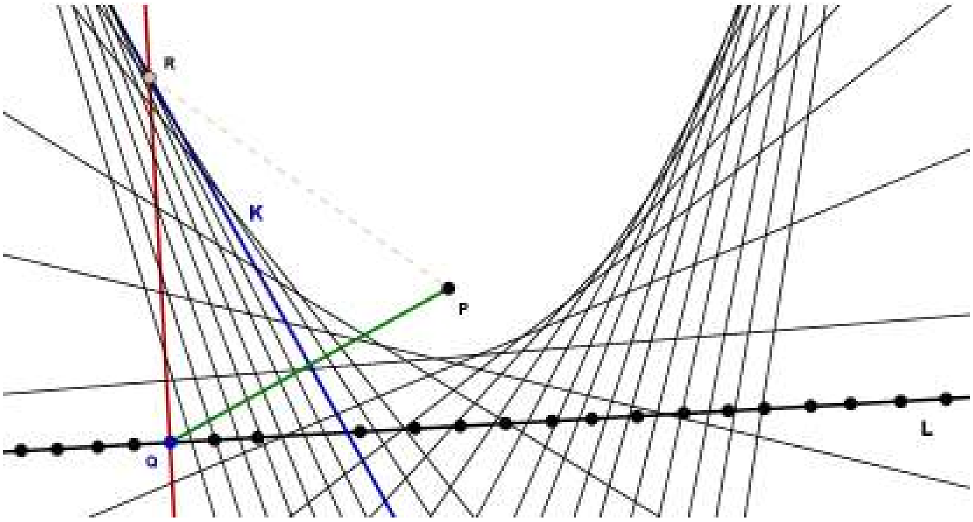


Figura 23: Definición de la parábola.

Luego, se puede afirmar que la parábola es "el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una línea recta llamada directriz" (Zill y Dewar, 1992, p. 486).

4 MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe la forma como se llevó a cabo el estudio: sus características generales, los métodos de recolección de la información y el análisis de la información.

4.1 PARADIGMA.

Esta investigación estuvo orientada bajo una metodología de corte cualitativo. Las actividades que surgieron de esta, fueron relativas, es decir, dependieron del contexto del cual se extrajeron los datos, pues el guión de entrevista final y los descriptores finales de los niveles de razonamiento surgieron de observaciones, de los materiales de los estudiantes y de las entrevistas individuales y grupales con ellos. Las entrevistas individuales, en particular, sirvieron para analizar su proceso de comprensión de acuerdo con los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación con el concepto de elipse como lugar geométrico, utilizando la geometría del doblado de papel.

En este sentido, se consideró fundamental el aspecto subjetivo de la realidad de los estudiantes. Por lo tanto, la información que se recolectó fue en forma de textos (encuestas), imágenes (material de los estudiantes), observaciones, entrevistas, análisis documentales (material de los estudiantes), entre otros.

Luego, el conocimiento se construyó gracias a las interacciones entre investigado e investigador, que permitieron a este último, en particular, comprender la realidad tanto en su lógica interna como en su especificidad (Sandoval, 2002).

4.1.1 Tipo de estudio.

De acuerdo al paradigma cualitativo, el tipo de estudio que abordó esta investigación fue un “estudio de casos” múltiple (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) de estudiantes de cierta Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estaban próximos a abordar la temática relacionada con las secciones cónicas.

Las razones por las cuales se optó por un estudio de casos, son las siguientes:

- Según Chetty (1996, citado por Martínez, 2006), permite estudiar un tema determinado (el concepto de elipse como lugar geométrico) donde la teoría existente (Modelo de Van Hiele) no aplica todavía.
- Según Chetty (1996, citado por Martínez, 2006), permite estudiar el fenómeno desde muchas perspectivas (razonamiento en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico) y no desde una sola variable.
- Según Yin (1989, citado por Martínez, 2006), se utilizan varias fuentes de datos como las observaciones, las entrevistas, las encuestas y el análisis de textos bibliográficos.
- Según Yin (1989, citado por Martínez, 2006), se puede estudiar tanto un caso único como múltiples casos. En esta investigación se estudiaron cinco casos.
- Con base en Eisenhardt (1989, citado por Martínez, 2006), los participantes se eligen de una manera teórica, esto es, "el objetivo de la muestra teórica es elegir casos que probablemente pueden replicar o extender la teoría emergente..." (p. 19). En este sentido, se eligieron cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estuvieran próximos a estudiar el tema de secciones cónicas y que manifestaran gusto por el doblado de papel y tuvieran algunos conceptos previos sobre geometría euclidiana.
- Además de tratar de encontrar patrones entre los diferentes casos, también se pretendió profundizar en el plano individual, al analizar el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico de cada estudiante. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006)
- Al analizar varios casos, los primeros van a funcionar como "casos pilotos" para refinar las actividades propuestas y los descriptores hipotéticos de nivel. Es decir, el proceso de confrontación en el trabajo de campo, permite refinar las actividades del guión de entrevista de carácter socrático.

Por lo tanto, nuestra investigación se centró en el análisis del proceso de comprensión de cinco estudiantes, del concepto específico de elipse como lugar geométrico. Estos estudiantes, que fueron invitados para hacer parte de la investigación, se seleccionaron porque demostraron habilidades especiales para el doblado de papel. El análisis individual de la comprensión se hizo triangulando tres fuentes principales de información: encuesta, entrevista y material del estudiante. Nuestras primeras entrevistas nos permitieron refinar el guión de entrevista y a su vez, los descriptores de nivel. Posteriormente, se hizo una triangulación del análisis de los cinco casos, con el marco teórico y las observaciones del investigador, para tratar de encontrar patrones en los diferentes casos.

4.2 PARTICIPANTES.

Este trabajo estaba dirigido a estudiantes de la interfase bachillerato – universidad (grados décimo, undécimo o primeros semestres de universidad). En particular, se realizó con cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estuvieran próximos a abordar la temática relacionada con las secciones cónicas.

Esta institución está ubicada en la comuna 16, en el barrio Belén. Cuenta con dos jornadas, una en la mañana y otra en la tarde. En la jornada de la mañana estudian los estudiantes de primaria y los de 6°, 7° y 8°. En la jornada de la tarde, los estudiantes de los grados 9°, 10° y 11°. La mayoría de sus estudiantes son de estrato 2 y 3, y viven en sectores como Altavista, Belén Rincón, las Violetas, los Alpes, la Gloria, Aguas frías, entre otros (ver página web de la Institución). En total, hay 17 grupos, con aproximadamente 30 estudiantes cada uno.

La planta física cuenta con 10 aulas de clase, 2 aulas de informática, un laboratorio de física y/o biología (obsoleto), una biblioteca, un comedor y una cafetería. Hay dos patios, uno de los cuales hace las veces de cancha.

Los cinco estudiantes fueron elegidos en una actividad previa que se hizo con todo el grupo 10°1 de dicha institución, en el mes de mayo. Con esta actividad, se buscaba que los estudiantes manifestaran algunos conceptos previos relacionados con la geometría euclidiana y con la geometría del doblado de papel. También, la actividad tenía una parte lúdica, sobre origami modular, para observar tanto las actitudes como las aptitudes que mostraban los estudiantes frente al doblado de papel. De este proceso, se pudieron elegir cinco estudiantes que manifestaron agrado por el doblado de papel y que pudieron percibir algunas relaciones importantes de la geometría euclidiana a través de la visualización del doblado. Se eligieron finalmente, tres mujeres: Rosi, Leti y Laura, y dos hombres: Jhon y Carlos[9]. La elección de estos estudiantes también estuvo atravesada por mi subjetividad, pues yo era la docente de la asignatura de geometría, desde hacía aproximadamente un mes, y coincidió que los cinco estudiantes, además de tener las aptitudes adecuadas, su rendimiento académico era bueno, les gustaba participar en clase, e incluso realizaron con agrado las actividades que se les proponían en el momento indicado.

4.3 MÉTODOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN:

La información se recolectó de varias maneras:

4.3.1 Observaciones.

Se realizó una observación de los estudiantes del grupo elegido cuando se llevó a cabo la primera actividad sobre la geometría del doblado de papel. El objetivo era identificar a aquellos estudiantes que desarrollaron correctamente dichas actividades, es decir, que mostraran mayor precisión en la elaboración de los dobleces y comprensión de algunos postulados importantes de la geometría del doblado.

Estuve presente en el lugar como guía de la actividad inicial e interactué y me relacioné con los estudiantes (Hernández Fernández y Baptista, 2006). Esta primera

[9] Los nombres de los cinco participantes que aparecen en esta investigación son seudónimos.

observación fue grabada en audio y video, con previa autorización de los participantes.

Se realizó una segunda observación de una de las entrevistas grupales, que se hicieron sobre los conceptos básicos necesarios para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Es decir, para garantizar que los estudiantes del estudio de casos comprendieran los conceptos básicos propios del nivel 0 de razonamiento: predescriptivo. Esta actividad también fue grabada en audio y video, con previa autorización de los participantes.

4.3.2 Encuesta.

Se realizó una encuesta a los cinco estudiantes del estudio de casos para identificar los conocimientos previos que tenían sobre la geometría euclidiana: punto, recta, plano, rectas perpendiculares, algunas relaciones entre la geometría euclidiana y la geometría del doblado de papel, rectas tangentes, rectas secantes y circunferencia.

4.3.3 Entrevistas grupales.

Se realizaron dos entrevistas grupales de carácter socrático que buscaban fortalecer algunos conceptos básicos que se requerían para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante la geometría del doblado de papel: construcción de rectas perpendiculares, construcción de la mediatriz, construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia y de rectas tangentes y secantes a la circunferencia.

Incluso, con estas entrevistas grupales se buscaba fortalecer la estructura mental de los estudiantes, al familiarizarlos con el doblado de papel, para que lograran establecer asociaciones entre los elementos primitivos de la geometría euclidiana y la geometría del doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2010).

4.3.4 Revisión del material.

Se recolectó y se analizó el material de los cinco estudiantes que surgió tanto de la encuesta como de las entrevistas grupales.

4.3.5 Entrevistas individuales.

Se realizó una entrevista individual de carácter socrático a cada uno de los cinco estudiantes para analizar su proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico; durante el desarrollo de estas entrevistas se les propuso una serie de preguntas con base en la visualización que permite el doblado de papel. Esta entrevista tuvo como objetivo caracterizar el proceso de comprensión de cada uno de los estudiantes ubicándolo en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele con respecto al concepto de elipse como lugar geométrico; además se pretendió que el paso por la entrevista, le permitiera al estudiante avanzar en su nivel de razonamiento.

4.4 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.4.1 Estrategias para analizar la información

El análisis de la información se hizo de la siguiente manera:

1. Transcripción, lectura y análisis de la observación de la actividad inicial que se realizó con el grupo 10°1 y que tenía como único objetivo elegir a los estudiantes del estudio de casos.

2. Revisión del material de los estudiantes que surgió de las dos entrevistas grupales que se realizaron para garantizar algunos conceptos básicos indispensables para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

3. Transcripción, lectura, análisis e interpretación de las entrevistas individuales de manera independiente y a la par con la recolección de la información. Cada caso fue analizado antes de tomar otro, con el fin de refinar las actividades y de contrastar los descriptores hipotéticos con el proceso de razonamiento del estudiante. Las categorías que emergieron de dicho proceso de razonamiento fueron comparadas con los descriptores hipotéticos establecidos antes de la recolección de información. Al finalizar, se lograron dos productos de gran importancia para la investigación: Guión de entrevista de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de algunas construcciones hechas mediante el doblado de papel, que permitiera en primer lugar, ayudarle al estudiante a avanzar en su nivel de razonamiento, y en segundo lugar, ubicarlo en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, de acuerdo a un conjunto de respuestas que estén en concordancia con los descriptores del nivel correspondiente. El segundo producto fueron los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento.

   En particular, el guión de entrevista pasó por un exhaustivo proceso de refinamiento. Se hicieron varios pilotajes de la misma y se pidió asesoría a varios profesores expertos en el tema. Incluso, el desarrollo de algunos talleres con maestros y/o estudiantes en el marco de encuentros regionales y nacionales (X Encuentro de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Medellín, 2010; II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, 2010; ASOCOLME, Pasto, 2009) nos permitió modificar el guión y al mismo tiempo, los descriptores de nivel.

   El proceso de transcripción de las entrevistas individuales fue arduo, dado que cada una de estas tuvo una duración de 50 minutos aproximadamente. Sin embargo, era necesario realizarlo para poder analizar la comprensión del concepto de elipse, de cada uno de los estudiantes.

4. Análisis de casos de manera conjunta para extraer conclusiones generales y poder establecer cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar

geométrico, mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele.

4.4.2 Camino Metodológico.

1. Actividad inicial con el grupo elegido (grado décimo de una I. E. de la ciudad de Medellín). Esta actividad consistió en el reconocimiento de algunos postulados básicos de la geometría del doblado de papel, como por ejemplo, "por dos puntos pasa un doblez", "se puede encontrar un doblez único si se lleva un punto exactamente sobre otro punto" o "se puede encontrar un doblez único si se lleva un doblez sobre si mismo y pasa por un punto P determinado". Posteriormente, se realizó una figura modular con el fin de motivar a los estudiantes con esta propuesta metodológica.

2. Una vez elegidos los cinco estudiantes, se les propuso la realización de una encuesta individual, con preguntas abiertas, para conocer los conceptos previos que tenían sobre la geometría euclidiana. El análisis de esta encuesta se hizo a la par con los materiales y con las entrevistas individuales, con el fin de hacer una triangulación sobre el proceso general de razonamiento de los estudiantes.

3. Se realizaron dos entrevistas grupales, de carácter socrático, para fortalecer algunos conceptos básicos necesarios para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Los conceptos abordados en dichas entrevistas fueron: construcción de perpendiculares mediante el doblado, construcción de la mediatriz mediante el doblado, construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia mediante el doblado. Sólo los materiales producidos por los estudiantes fueron los que se tuvieron en cuenta para el análisis de su comprensión.

4. Se realizó una entrevista individual, de carácter socrático, a cada uno de los cinco estudiantes del estudio de casos, en la cual se les proponían preguntas basadas en la visualización de algunas construcciones elaboradas mediante el doblado de papel.

Al finalizar, se pudo percibir que cada uno de ellos, pudo avanzar en su nivel de razonamiento con respecto al concepto de elipse como lugar geométrico.

5. A medida que se iban entrevistando los estudiantes, se iban refinando cada vez más las actividades y las preguntas del guión de entrevista, de manera que se pudiera determinar el nivel de razonamiento del estudiante y, a la vez, permitirle avanzar en su comprensión sobre el concepto de elipse como lugar geométrico.

6. Este proceso de interacción con los estudiantes también permitió establecer, con precisión y coherencia, los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele.

7. Se hizo finalmente, un proceso de triangulación entre el análisis del proceso de razonamiento de los estudiantes, el marco teórico y las vivencias del investigador, para extraer conclusiones generales y responder a la pregunta de investigación.

Según Hernández, Fernández y Baptista (2006), el camino a seguir para un estudio de casos múltiple, es el que se muestra en la siguiente gráfica, que corresponde al camino metodológico descrito en líneas anteriores:

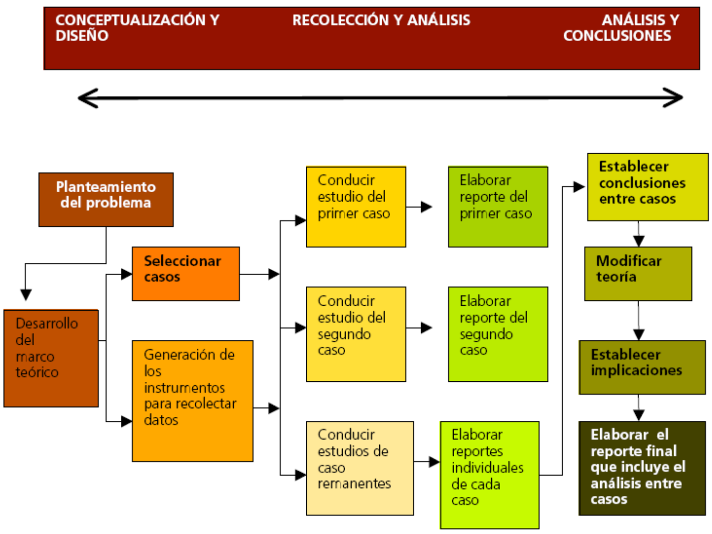


Figura 24: Estudio de casos múltiple (p. 10)

4.4.3 Análisis de la primera observación

Categorización.

Con el fin de analizar la observación hecha a los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que aún no han abordado el tema de secciones cónicas, se inició con el proceso de codificación en el asistente ATLAS.ti. De los 42 códigos que se encontraron en la observación, surgieron algunas familias de códigos, que serán la base para las categorías. Dichas familias son:

Descripción de los objetos y personajes del salón de clase (4): descripción del tablero, descripción del vestuario de los estudiantes, elementos del salón de clase y salón de clase. Dificultades con las preguntas de la primera actividad (4): dificultades en las preguntas 4, 5, 6 y 7, dudas sobre la pregunta 4, explicación de las preguntas 1 y 2, poco entendimiento de las preguntas de la guía. Dificultades con los conocimientos básicos de geometría (2): no se reconocen los conceptos de mediatriz y bisectriz, pocos conocimientos básicos de geometría. Motivación con el doblado de papel (4): facilidad para realizar los dobleces, motivación con el doblado de papel, realización de octaedro esqueleto con doblado de papel, todos los estudiantes trabajaron la figura modular. Mucha asesoría del profesor durante la actividad (3): asesoría del profesor, los estudiantes requerían la ayuda del asesor, pocos estudiantes terminaron sin ayuda la figura. Relaciones básicas de la geometría encontradas por los estudiantes (4): por dos puntos pasa un único doblez, por un punto pasan 4 o más dobleces, por un punto pasan infinitos dobleces, un doblez se relaciona con un segmento de línea recta. Situaciones que afectan el ambiente de trabajo (6): charlas y chistes durante el desarrollo de la actividad, desorden, el salón no tiene buena iluminación, escuchar música durante el desarrollo de la actividad, pocos estudiantes para iniciar, situaciones que interrumpen la clase. Sólo la figura modular (4): dificultades con el ensamblaje de la figura modular, realización de la segunda actividad dejando de lado la primera, realización de octaedro esqueleto con doblado de papel, todos los estudiantes trabajaron la figura modular.

De las familias de códigos descritas anteriormente, surgieron las siguientes categorías:

Dificultades con los conocimientos básicos de la geometría euclidiana: que contiene las familias de códigos "Dificultades con las preguntas de la primera actividad", "Dificultades con los conocimientos básicos de geometría" y "Mucha asesoría del profesor durante la actividad". Estas tres familias se relacionan porque si los estudiantes tienen dificultades con conceptos tan básicos como rectas paralelas, rectas perpendiculares, mediatrices y bisectrices, entonces van a tener dificultades con las preguntas de la primera actividad que tienen que ver de manera implícita con estos lugares geométricos. Y si los estudiantes tienen dificultades con las preguntas de la guía, entonces van a requerir mucha asesoría por parte del docente para llegar a una respuesta satisfactoria. Esta categoría se puede evidenciar en los siguientes fragmentos: "*En el grupo 5, conformado por tres estudiantes mujeres, me pidieron varias veces asesorías para responder las preguntas 4, 5, 6 y 7*" y "*Las preguntas 4, 5, 6 y 7 de la guía generaron muchos interrogantes en los estudiantes, e incluso mucha ansiedad*".

Relaciones básicas de la geometría encontradas por los estudiantes: Que contiene la familia de códigos que lleva su mismo nombre. Los estudiantes pudieron establecer algunas relaciones importantes de la geometría a partir del doblado de papel. Algunas de ellas, son por ejemplo, "por dos puntos pasa un único doblez", "por un punto pasan muchos dobleces", "un doblez se relaciona con un segmento de línea recta". Esta categoría se puede evidenciar en el siguiente fragmento de la observación: "*muchos grupos llegaron a la conclusión de que por un punto pasan muchos dobleces. Con respecto a la tercera pregunta, muchos estudiantes concluyeron que por dos puntos pasa un único doblez; incluso algunos me lo mostraron en la hoja de papel*".

Importancia de la parte artística: Que contiene la familia de códigos sólo la figura modular. Muchos estudiantes del grado décimo dejaron de lado la primera actividad que tenía que ver con algunos postulados de la geometría del doblado de papel y se centraron en la parte artística, es decir, en la realización de una figura de origami modular. Esta categoría se puede percibir en el siguiente extracto: "*pude percibir que* *algunos estudiantes prefirieron pasar esta primera parte de la actividad de forma rápida y centrarse en la parte artística, que era la segunda parte de la guía*".

Motivación con el doblado de papel: Que contiene la familia de códigos que lleva su mismo nombre. Esta categoría se relaciona mucho con la anterior pues hubo muchos estudiantes interesados con la parte artística del doblado de papel. Sin embargo, también encontré estudiantes que respondieron las preguntas de la guía con base en dobleces y que tenían ciertas habilidades para la realización de los mismos. Incluso, en la observación se menciona: "*Pude percibir unos cinco estudiantes que tenían facilidad para los dobleces y, aunque tenían dificultades con los conceptos geométricos, parece que les motiva el trabajo con el doblado de papel. Incluso, a algunos les pregunté si les gustaba realizar actividades utilizando el doblado de papel, y me respondieron que les agradaba*".

Ambiente de clase: Esta categoría tiene que ver con todas las situaciones que de una u otra forma, afectaron el ambiente de trabajo; además, también se ubica en esta categoría el salón de clase, con todos los objetos que hacen parte de este. La actividad que se llevó a cabo en el grado décimo estuvo atravesada por múltiples situaciones como la entrega del refrigerio, la llegada tarde de los estudiantes, la no entrega del consentimiento firmado por los padres, escuchar música, las charlas durante el desarrollo del taller, los hechos que se desarrollaron por fuera del salón de clase, …

Interpretación de la información.

El análisis de esta observación, nos permitió inferir que con el doblado de papel sí se pueden enseñar algunas relaciones y conceptos de la geometría elemental plana. De hecho, la categoría *relaciones básicas de la geometría encontradas por los estudiantes* muestra que se pueden enseñar conceptos geométricos con esta herramienta. Incluso, Royo (2002) también lo reitera cuando afirma que "el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel" (p. 186)".

Los estudiantes también mostraron mucho interés y motivación al desarrollar las actividades, aunque algunos hayan desarrollado sólo la parte artística. Es importante tener en cuenta que ese grupo es uno de los más difíciles de controlar en dicha institución educativa. Podemos comparar esta situación encontrada en el análisis de la observación, con las afirmaciones de Monsalve y Jaramillo (2003), "cuando aplicamos el doblado de papel como herramienta alterna para la solución de problemas, es sorprendente el interés y el entusiasmo con que los estudiantes enfrentan la solución de ciertos ejercicios propuestos en los libros clásicos…" (p. 11).

4.4.4 Análisis del proceso de razonamiento de los estudiantes.

4.4.4.1 Análisis del proceso de razonamiento de Rosi.

La estudiante, cuyo seudónimo es Rosi, es del grado décimo de una Institución Educativa, de carácter público, de la ciudad de Medellín. Fue invitada a participar del trabajo, por su agrado por el doblado de papel y por su responsabilidad frente a las actividades que se realizaban en la clase de geometría. Ella se caracteriza por ser una estudiante atenta y reflexiva, por ser responsable en el cumplimiento de sus deberes y por participar activamente en las actividades que se programan en las diferentes asignaturas. Es una niña que tiene buenas habilidades comunicativas, dado que le gusta participar con preguntas, aportes o explicaciones del tema.

Análisis individual del proceso de comprensión: Triangulación entre encuesta, entrevista individual y material.

A Rosi se le propuso que respondiera una encuesta para conocer a fondo los conocimientos previos que tenía sobre la geometría euclidiana. Esta encuesta tenía que ver con los conceptos primitivos punto, recta y plano, con las relaciones con el doblado de papel y con algunos conceptos como: perpendicular, mediatriz, circunferencia, recta tangente, recta secante. Ella también participó en una entrevista individual, de carácter socrático, que tenía que ver con la manifestación del concepto de elipse como lugar geométrico. Las preguntas de esta entrevista están en correspondencia con los descriptores de los niveles de razonamiento, que se fueron modificando gracias a las interacciones con los estudiantes participantes en la investigación y a otros que voluntariamente participaron y que no se tuvieron en cuenta para el análisis, sino para refinar el instrumento de indagación.

De las entrevistas grupales surgieron algunos materiales, elaborados por Rosi, que se involucraron dentro del análisis individual de su proceso de comprensión. Algunos de ellos, los mostramos a continuación:

Figura 25: Material de Rosi 1.

Figura 26: Material de Rosi 2.

Figura 27: Material de Rosi 3.

Figura 28: Material de Rosi 4.

Figura 29: Material de Rosi 5.

Por lo tanto, para realizar el análisis individual del proceso de comprensión de Rosi, se tuvo en cuenta tres fuentes de información: las respuestas escritas de la encuesta, la elaboración de sus materiales de apoyo y las respuestas verbales brindadas en el transcurso de la entrevista individual.

Paso de Rosi por los niveles de razonamiento de Van Hiele.

El análisis de los descriptores de los niveles de razonamiento se hizo en el programa Atlas.ti, que es un software especializado para el análisis de información cualitativa.

Nivel predescriptivo.

0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: "Por dos puntos pasa una única recta".

En la encuesta, Rosi respondió que por dos puntos pasa una única recta y un solo doblez. Sin embargo, cuando se le preguntó en la entrevista individual sobre ¿cuántos dobleces pasan por dos puntos? Ella respondió sin pensar, que infinitos dobleces. Después de que se le presentó otra actividad para que comprendiera que el doblez debía pasar por los dos puntos a la vez, ella respondió que por dos puntos pasa un solo doblez. Posteriormente, dijo que por dos puntos pasa una sola recta.

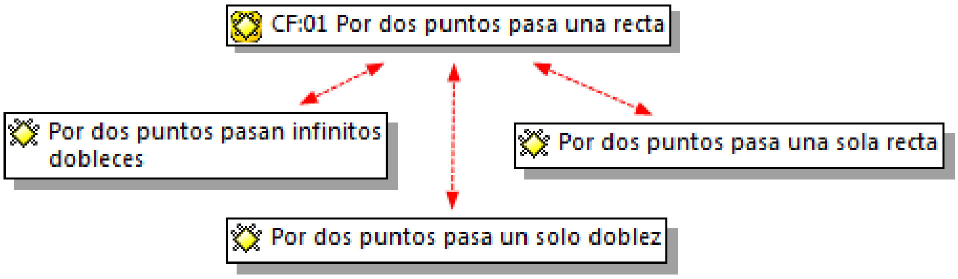


Figura 30: Descriptor 0.1 para Rosi.

0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, tangente, entre otras.

Un punto, Rosi lo relaciona con un punto ubicado en el plano cartesiano, es decir, con una ubicación espacial. De hecho, plano lo relaciona con un plano cartesiano, donde se hacen gráficas de varios puntos. Ella parece estar muy influenciada por la geometría analítica. Mientras que la recta la considera como una “línea que no tiene continuo fin”. La forma como lo escribió en la encuesta, nos muestra que tiene el concepto, pero que le es difícil expresarlo con palabras, pues utiliza erróneamente dos términos importantes de la recta: continua y sin fin.

Rosi logra establecer que por dos puntos pasa una única recta (o un único doblez) y un único segmento conecta dichos puntos. Además, establece que por un punto pueden pasar infinitas rectas (o infinitos dobleces). Sin embargo, cuando se le pregunta que cuántos puntos puede dibujar en un doblez, ella dice que uno nada más. Eso nos lleva a afirmar que tiene algunas dificultades con el razonamiento infinito que se debe tener para comprender que un segmento contiene infinitos puntos.

Cuando a Rosi se le pregunta por rectas perpendiculares en la encuesta, ella afirma que “por más que dos líneas rectas se extiendan no se unen”. Por lo tanto, confunde rectas paralelas con rectas perpendiculares. Después de su paso por las entrevistas grupales, Rosi logra construir rectas perpendiculares mediante el doblado de papel. Cuando se le pregunta en la entrevista individual sobre estas rectas, ella tartamudea diciendo "**Diferencia entre paralelo y perpendicular…**" Pero posteriormente, lo recuerda y dice que son perpendiculares si forman ángulos de 90°.

Rosi también desconocía el concepto de circunferencia antes de pasar por el proceso. Pero después, en la entrevista individual, pudo incluso determinar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a ella.

El paso de Rosi por las entrevistas grupales, le permitió comprender dos conceptos que también desconocía: rectas tangentes y rectas secantes. Pero finalmente, no fue necesario utilizarlos para comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

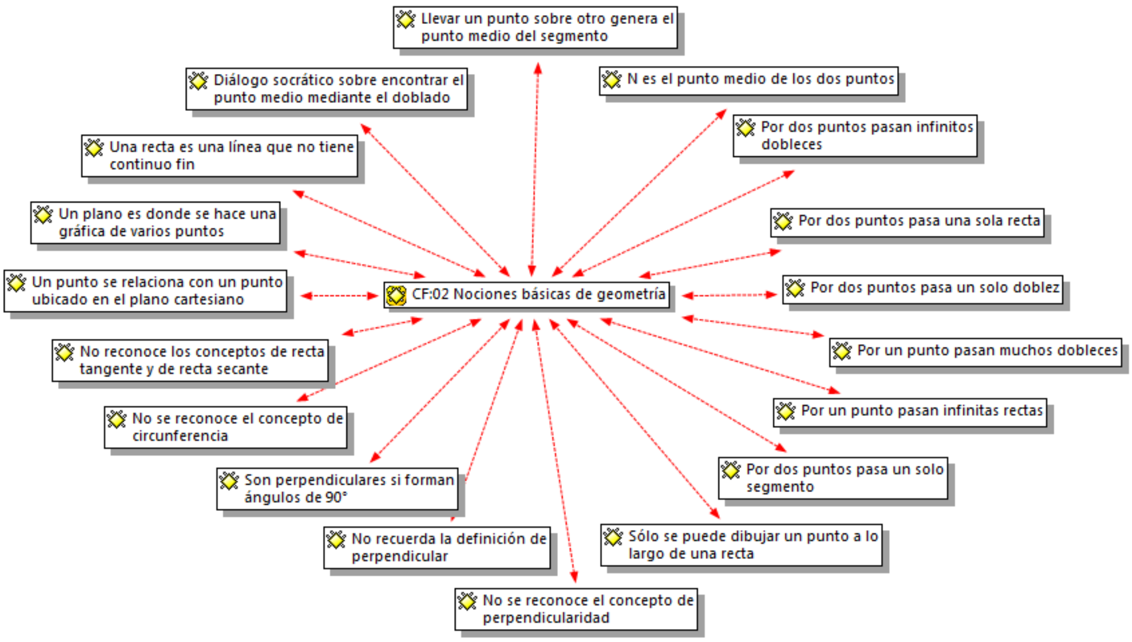


Figura 31: Descriptor 0.2 para Rosi.

0.3 El estudiante relaciona un doblez con un segmento de línea recta.

Rosi, en la encuesta, no logra percibir explícitamente la relación entre un doblez y un segmento de línea recta. Sin embargo, se puede afirmar intuye tal relación, ya que en la entrevista individual, logra establecer que por dos puntos pasa una sola recta o un solo doblez, y que por un punto pasan infinitas rectas y muchos dobleces. Eso nos lleva a afirmar que la estudiante logró establecer una analogía entre doblez y recta y empieza a percibir el infinito.

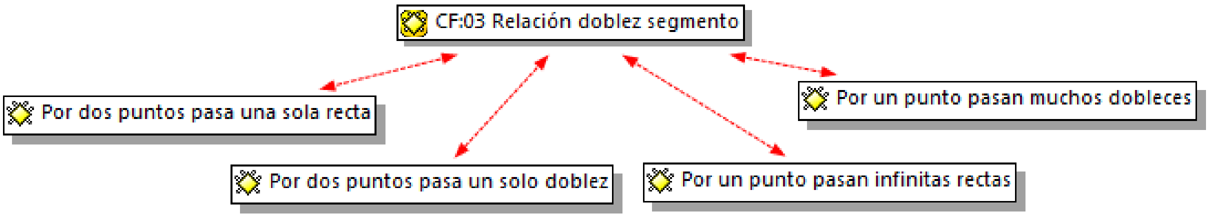


Figura 32: Descriptor 0.3 para Rosi.

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.

Rosi no logró establecer que dos segmentos son congruentes de forma explícita, pero sí logró determinar la igualdad de los segmentos. Por ejemplo, Rosi pudo encontrar el punto medio de un segmento, llevando un punto extremo de un segmento sobre su otro punto extremo. Ella pudo establecer que los dos puntos "**están como a la misma distancia**" del punto medio. Eso nos permite inferir que Rosi comprende cuándo dos segmentos tienen la misma medida. Y eso es suficiente para poder comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

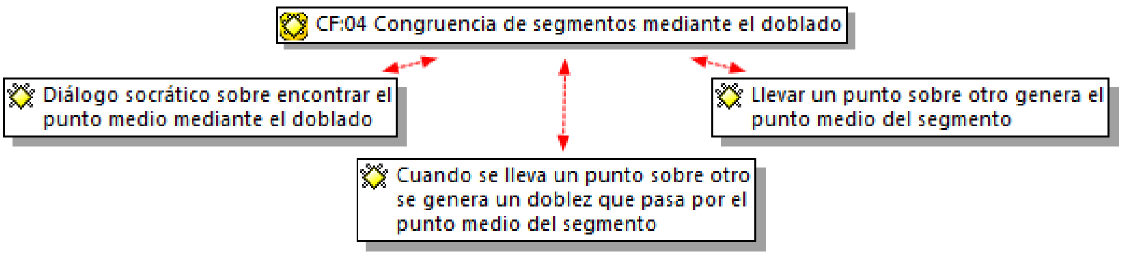


Figura 33: Descriptor 0.4 para Rosi.

0.5 Construye rectas perpendiculares.

En la encuesta, Rosi no reconoce el concepto de perpendicular, pues cuando habla de ellas, hace alusión a la definición de rectas paralelas. Sin embargo, en una de las entrevistas grupales, Rosi pudo encontrar la manera de construir rectas perpendiculares y mostrarlo mediante el mismo doblado. Ella, durante la entrevista individual, argumentó que dos dobleces son perpendiculares si forman ángulos de 90 grados, pero no lo comprobó. Rosi también pudo determinar que cuando se lleva un punto sobre otro, se genera un doblez perpendicular al segmento determinado por dichos puntos, pero tampoco lo comprobó. En la entrevista hace falta preguntarle al estudiante por la forma de comprobar el aspecto de la perpendicularidad.

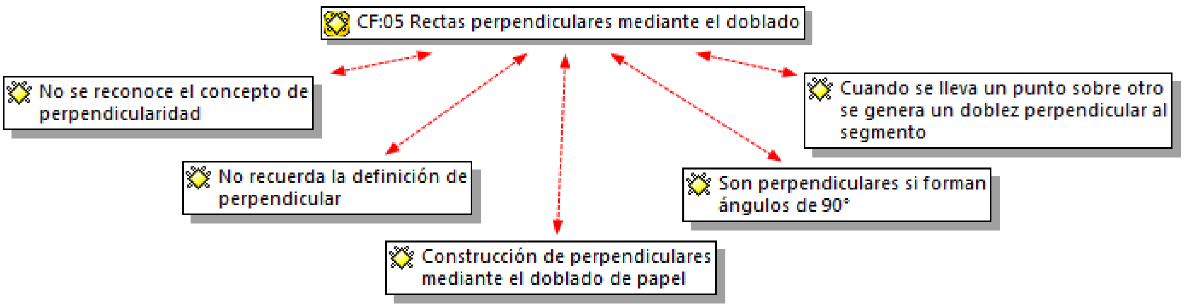


Figura 34: Descriptor 0.5 para Rosi.

0.6 Visualiza la suma de segmentos.

La estudiante pudo percibir mediante el doblado de papel, la suma de segmentos. Al principio, pudo visualizar que la suma de dos segmentos determinados $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$ daba la constante r. Posteriormente, ella pudo visualizar, con base en la información suministrada y en una conversación de carácter socrático, la suma determinada de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$.

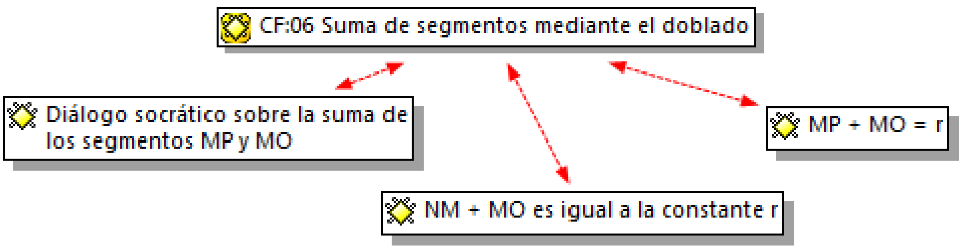


Figura 35: Descriptor 0.6 para Rosi.

Nivel I: De reconocimiento visual.

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.

La estudiante logró encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel y a su vez, con dicha construcción, pudo establecer la mediatriz de un segmento. Ella afirmó en dos momentos distintos que cuando se lleva un punto sobre otro punto, primero, se genera un doblez que pasa por el punto medio del segmento y segundo, se genera un doblez que es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos. Aunque tuvo que pasar por algunas preguntas inquisitivas, para llegar a esta última conclusión, pues ella consideraba que cuando se lleva un punto sobre otro, no se generaba un doblez perpendicular. Finalmente, ella logró comprender que la mediatriz era una perpendicular que pasaba por el punto medio de un segmento.

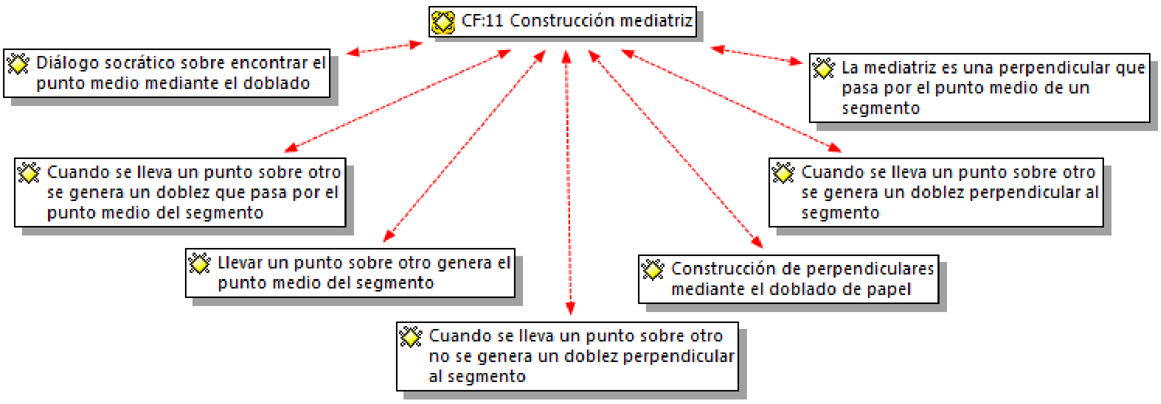


Figura 36: Descriptor 1.1 para Rosi.

1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.

Rosi, en la encuesta, muestra que no reconoce el concepto de circunferencia. Pero después, en la entrevista individual, realizó la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia, a través de un proceso de traslación de puntos que conservaran su distancia a un punto determinado O, mediante el doblado de papel. Ella pudo afirmar que se podía continuar con el proceso de traslación de manera indefinida, pero no dio una explicación contundente de esta afirmación. Además, pudo determinar que todos los puntos trasladados equidistaban de O, así: “**sí, estarían a la misma distancia**”.

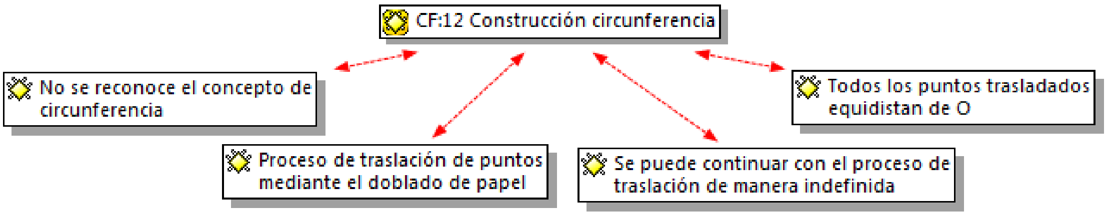


Figura 37: Descriptor 1.2 para Rosi.

1.3 Realiza la construcción de una elipse.

Cuando a Rosi se le presentó por primera vez el proceso de construcción de la elipse (aún no se le había nombrado la figura): se construyen dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que está en la región limitada por esta, creyó que se generaba un hexágono. Posteriormente, cuando se le mostró la figura formada, explicó que no era una circunferencia, pero no mencionó a qué figura se le parecía.

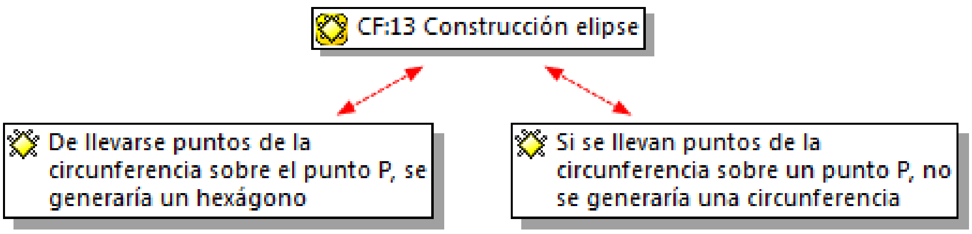


Figura 38: Descriptor 1.3 para Rosi.

1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Rosi no reconoció que el lugar geométrico que se construyó cuando se realizaron dobleces que surgieron de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que estaba en la región limitada por esta, era una elipse. Incluso, ella mencionó, en primer lugar, que si se realizara la construcción surgiría un hexágono y posteriormente, cuando se realizó la construcción, determinó que no era una circunferencia y no mencionó sus propiedades, ni mucho menos si la relacionaba con una figura conocida.

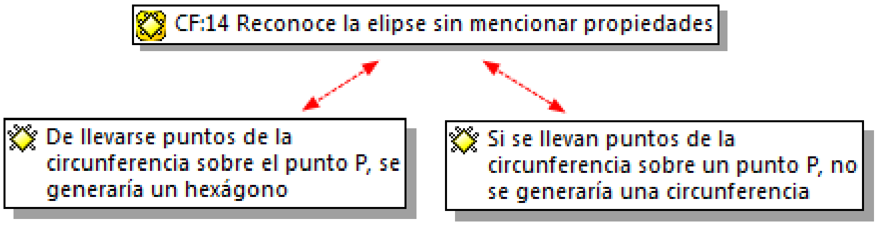


Figura 39: Descriptor 1.4 para Rosi.

1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

La estudiante mencionó que de realizarse la construcción de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región limitada por esta, se formaría un hexágono. Posteriormente, cuando se realizó la construcción y visualizó la figura, afirmó y argumentó que no era una circunferencia; ella se centró en su forma como un todo, pero no señaló partes constitutivas ni mencionó si se le parecía a una figura conocida.

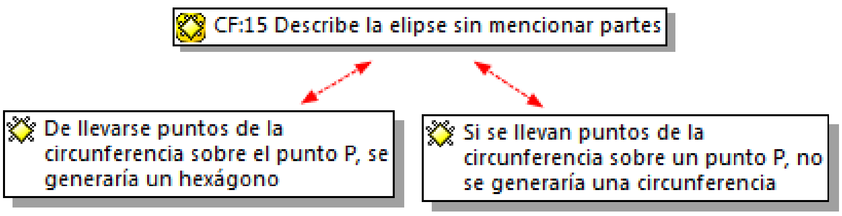


Figura 40: Descriptor 1.5 para Rosi.

Nivel II: De análisis.

2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

Rosi reconoce, en dos momentos distintos, que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se realiza un doblez que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos. Cuando a Rosi se le dice que es la mediatriz, sigue utilizando el concepto, pero con algunas dificultades, pues en algunas partes de la entrevista dice que la mediatriz es un punto M, así: "**M es la mediatriz…**", dado que M es un punto que pertenece a la mediatriz. Rosi también logró afirmar que si se coloca un punto sobre otro, se construye la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

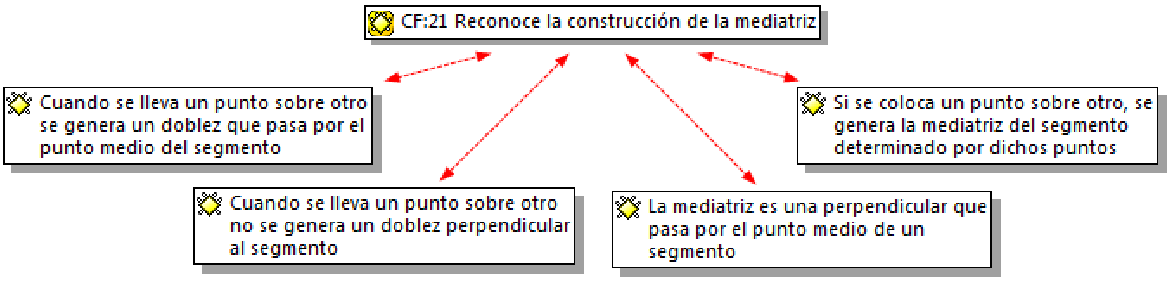


Figura 41: Descriptor 2.1 para Rosi.

2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

En el transcurso del diálogo socrático, Rosi logró establecer en primer lugar, que si se ubica un punto sobre la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, este estará a la misma distancia de P y de Q. Posteriormente, logró afirmar que los puntos de la mediatriz tienen que estar a igual distancia de los extremos del segmento y, finalmente, afirma que un punto está sobre la mediatriz si equidista de los extremos del segmento. Con esto, estaba a un paso de decir que la mediatriz era un lugar geométrico, pero en este momento del proceso, aún no conocía el concepto de lugar geométrico.

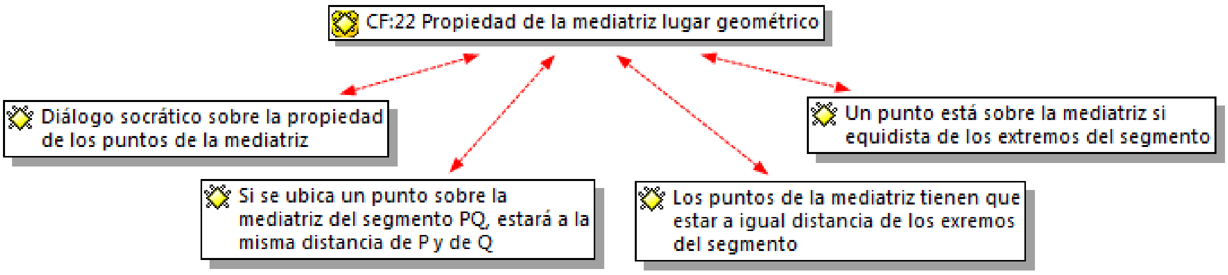


Figura 42: Descriptor 2.2 para Rosi.

2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.

Rosi afirmó, en la construcción de los puntos discretos de la circunferencia, que todos los puntos trasladados equidistan del punto O. Luego, logró establecer que los puntos de una circunferencia deben estar a la misma distancia del centro. Esto es un gran avance para definir la circunferencia como lugar geométrico, pero en este momento del proceso no se le hizo la pregunta alusiva a ser lugar geométrico.

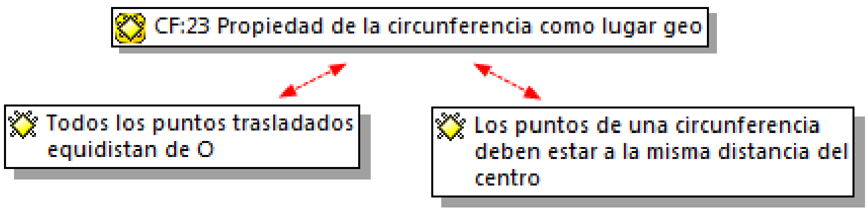


Figura 43: Descriptor 2.3 para Rosi.

2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

Cuando a Rosi se le presentó la construcción de una circunferencia envuelta que resulta de hacer dobleces que surgían de llevar puntos de la circunferencia sobre su centro, no dudó en afirmar que era una circunferencia. Sin embargo, no justificó tal afirmación y no se le insistió en que lo hiciera.

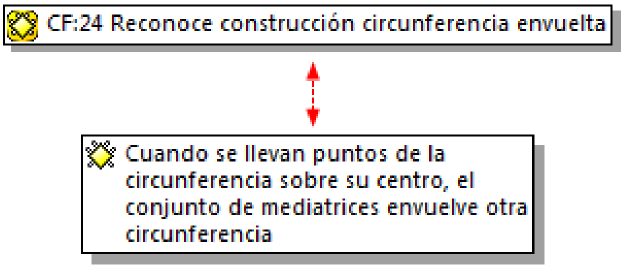


Figura 44: Descriptor 2.4 para Rosi.

2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.

Rosi estableció que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico porque un punto está sobre esta si equidista de los extremos del segmento. Para el caso de la circunferencia, la estudiante logró afirmar que los puntos de una circunferencia deben estar a la misma distancia del centro; posteriormente, estableció que la circunferencia es un lugar geométrico porque todos los puntos están a igual distancia del centro.

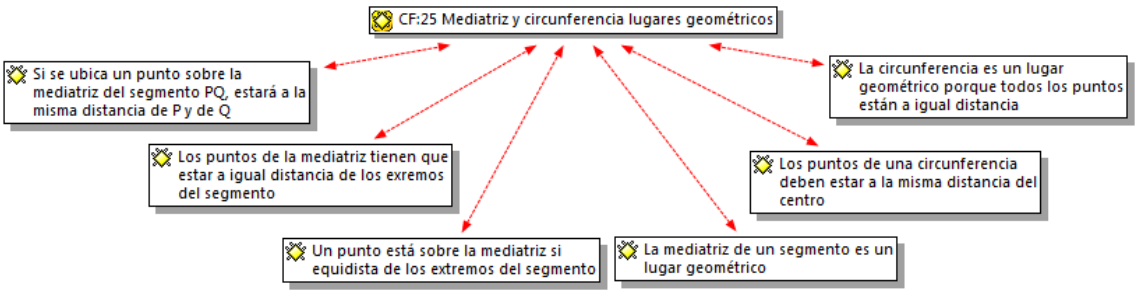


Figura 45: Descriptor 2.5 para Rosi.

2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.

Cuando a Rosi se le presenta la construcción de la elipse mediante el doblado de papel, explica que no es una circunferencia y no menciona propiedades ni partes constitutivas. Posteriormente, con base en el diálogo inquisitivo, la estudiante logra establecer que la figura está envuelta por mediatrices, pero no logra determinar que hay dos puntos fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia inicial y el otro, es un punto fijo que se ubica al iniciar la construcción. Ella también visualiza que hay unos puntos, denominados M, que pertenecen al contorno de la figura.

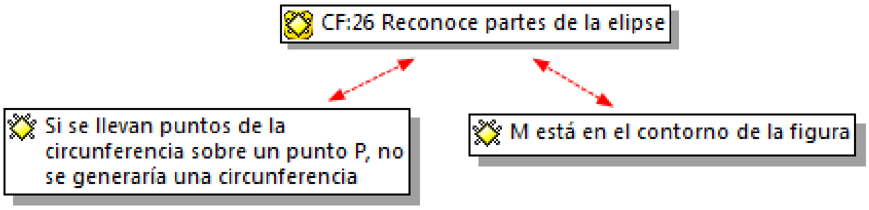


Figura 46: Descriptor 2.6 para Rosi.

2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Cuando a Rosi se le presentó la construcción de la elipse, ella explicó que no era una circunferencia y no mencionó propiedades o partes constitutivas. Sin embargo, después de ciertos aportes de información y de responder varias preguntas intencionadas, ella logró establecer que si se ubica un punto P en cualquier parte de la región limitada por una circunferencia y se llevan los puntos de esta sobre el punto P, se formaría otra elipse. Por lo tanto, ella reconoce la construcción de una elipse mediante el doblado de papel.

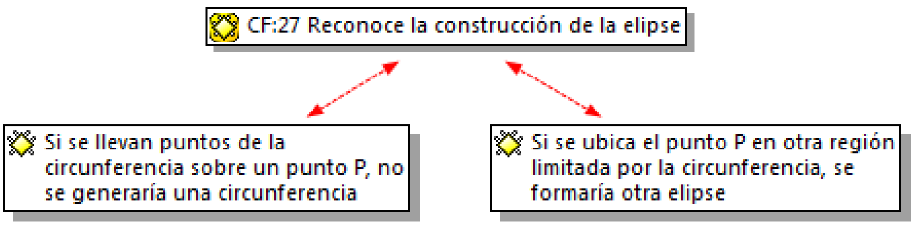


Figura 47: Descriptor 2.7 para Rosi.

2.8 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

Con base en el diálogo socrático y aportes de información, Rosi logra establecer que la suma de dos segmentos determinados $\left(\overline{MP}+\overline{MO}\right)$ es igual a r, el radio de la circunferencia. Incluso logra establecerlo para varios puntos M del contorno de la figura, pero apoyada también en diálogos socráticos, porque le dio cierta dificultad encontrar este hecho, dado que esta suma requiere que el estudiante reconozca la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y de un proceso de transitividad.

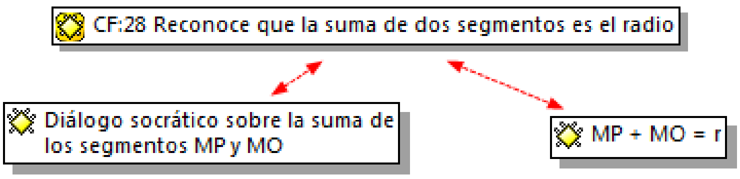


Figura 48: Descriptor 2.8 para Rosi.

Nivel III: De clasificación.

3.1 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

Llegando al final de la entrevista individual, Rosi logra establecer, utilizando el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que la propiedad que cumplen los puntos de la figura envuelta es "**al sumar PM y MO… que la suma nos de r**".

Ella afirma que si M "**está sobre el contorno**" la suma de $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es: "**r, es constante**". Por lo tanto logra concluir que para cualquier punto M de la figura, $\overline{MP}+\overline{MO}$ es r, el radio de la circunferencia y es una constante.

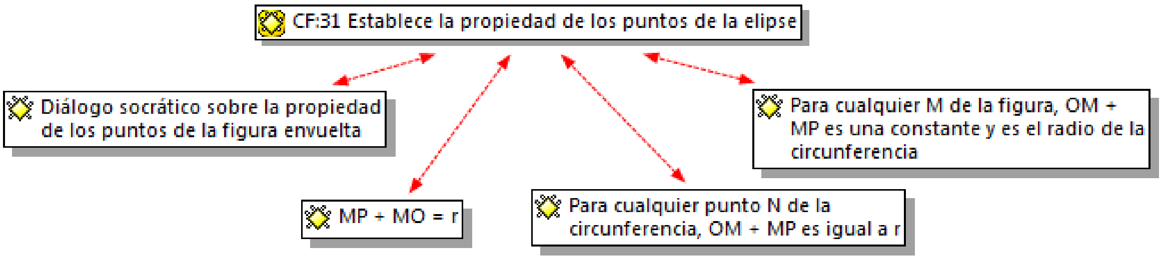


Figura 49: Descriptor 3.1 para Rosi.

3.2 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Rosi manifiesta la necesidad de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico. Ella afirma que la elipse es un lugar geométrico porque los puntos cumplen una condición particular: "**que la suma nos de, o sea como r**". Es decir, ella dice que: OM "**más MP, o sea si pongo cualquier otro punto sobre esa… Eso, me va a dar la… elipse**" Ella no llega a la definición formal como tal, pero con esto demuestra que ha comprendido el concepto de elipse como lugar geométrico.

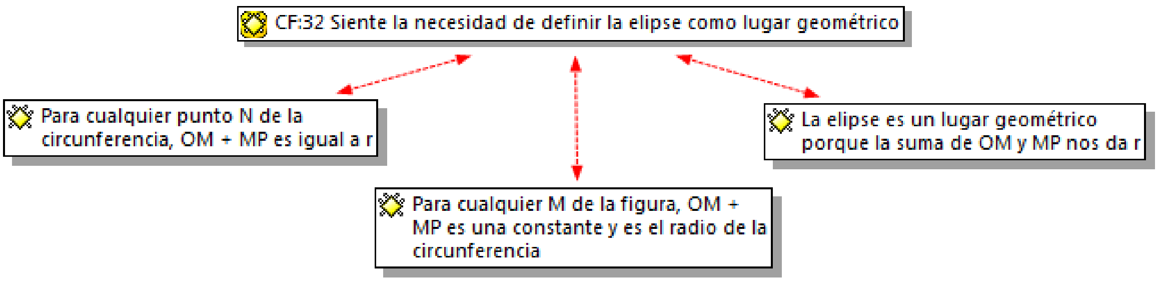


Figura 50: Descriptor 3.2 para Rosi.

3.3 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto exterior a esta, se genera otro lugar geométrico diferente a los abordados.

Cuando a Rosi se le pregunta por la figura que se forma cuando se llevan puntos de la circunferencia sobre un punto P exterior a esta, ella manifiesta que no se le viene nada a la cabeza. Incluso, en el transcurso de la entrevista no se le dan elementos suficientes para que la estudiante logre establecer que se forma un lugar geométrico diferente a los abordados. Por lo tanto, la pregunta y el descriptor no son pertinentes.

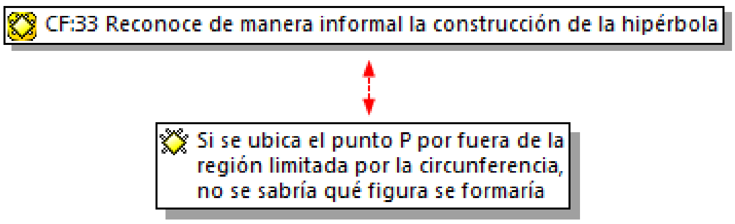


Figura 51: Descriptor 3.3 para Rosi.

Con base en el análisis anterior, podemos ubicar finalmente a Rosi en el nivel III de razonamiento, pues ella comprendió el concepto de elipse como lugar geométrico. La entrevista individual no solamente sirvió para ubicarla en uno de los niveles de razonamiento, sino que le permitió avanzar en éstos y lograr, mediante el diálogo inquisitivo, un avanzado nivel, que es el más alto en nuestra caracterización de la comprensión.

Propiedades de los niveles de razonamiento.

Propiedad 1: Secuencialidad fija. Un estudiante no puede estar en un nivel de razonamiento inmediatamente superior sin haber superado el nivel anterior. Rosi, por ejemplo, fue avanzando en su nivel de razonamiento hasta llegar al nivel III de clasificación, pero siempre superando las características, habilidades y conocimientos del nivel anterior. Ella, en el nivel I pudo identificar y reconocer las construcciones de la mediatriz, la circunferencia y la elipse mediante el doblado de papel. Posteriormente, en el nivel II, pudo reconocer que tanto la mediatriz como la circunferencia eran lugares geométricos y logró establecer las condiciones para que un conjunto de puntos pertenezca a estos lugares geométricos. En el nivel III, pudo reconocer que la elipse también era un lugar geométrico y logró determinar la propiedad que cumplían los puntos para pertenecer a esta.

Propiedad 2: Adyacencia. Lo que se convierte en el objeto de pensamiento en el nivel inmediatamente superior, es percibido en el nivel anterior. Es decir, el estudiante tiene algunas cualidades del pensamiento implícitas en el nivel anterior y las debe hacer explícitas en el nivel inmediatamente superior. En este caso, Rosi manifestó haber percibido ciertas relaciones en el nivel anterior, pero que no se hicieron explícitas hasta no alcanzar el nivel inmediatamente superior. Por ejemplo, ella logró establecer que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ era el radio de la circunferencia, para varios puntos M del contorno de la figura, pero todavía no había asociado este hecho con la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la figura envuelta. En el caso de la circunferencia, Rosi, en el nivel I, pudo afirmar que todos los puntos trasladados equidistaban del punto O, pero todavía no había establecido que esta era la propiedad que cumplían los puntos para pertenecer a una circunferencia, conocimiento que logró en el nivel II, cuando dijo que la circunferencia era un lugar geométrico.

Propiedad 3: Distinción. El nivel inmediatamente superior requiere de una reorganización del conocimiento adquirido en el nivel anterior. Rosi, para poder avanzar en su nivel de razonamiento, debía reorganizar su red de relaciones modificándola o extendiéndola, al relacionar o involucrar los nuevos conceptos comprendidos. Por ejemplo, ella en el nivel I, pudo establecer en primer lugar, que si se lleva un punto extremo de un segmento sobre el otro punto extremo se encuentra el punto medio de dicho segmento. Posteriormente, en el mismo nivel, pudo establecer que ese doblez era perpendicular al segmento. Ya en el nivel II, reorganizando sus ideas y con base en un aporte de información sobre la mediatriz, logró establecer que siempre que se lleve un punto extremo de un segmento sobre el otro punto extremo, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos. Es decir, ella reconoce e identifica la construcción de la mediatriz de un segmento cualquiera mediante el doblado de papel. En el caso de la circunferencia, por ejemplo, ella en el nivel 0 no reconocía el concepto de circunferencia; en el nivel I, podía realizar la construcción de algunos puntos discretos de la misma con base en un proceso de traslación de puntos y en el nivel II, pudo establecer la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la circunferencia como lugar geométrico.

Propiedad 4: Separación. Dos personas que razonen en diferentes niveles de razonamiento, en relación a la temática abordada, no podrán entenderse. Rosi, a través de la entrevista individual, pudo llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Probablemente, si estableciera una conversación con un compañero que esté en un nivel inferior, con respecto a dicha temática, no podrían entenderse, dado que Rosi pudo establecer la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la elipse y la reconoce como lugar geométrico, mientras que un compañero de un nivel inferior, sólo podría hablarle de la mediatriz o de la circunferencia como lugares geométricos, si está en el nivel II; o hablarle sólo de las construcciones de estos elementos, si está en el nivel I; o no hablarle ni de circunferencia, ni de mediatriz, si está en el nivel 0.

Propiedad 5: Lenguaje. Cada nivel de razonamiento tiene un tipo de lenguaje específico. Rosi, a medida que iba avanzando en su nivel de razonamiento, iba refinando y "puliendo" su lenguaje, pues iba involucrando los nuevos conceptos y los iba relacionando en su red de relaciones. Por ejemplo, cuando comprendió el concepto de mediatriz, lo siguió utilizando, con algunos errores conceptuales, que se fueron corrigiendo a medida que avanzaba. Los conceptos de circunferencia y equidistancia, también fueron utilizados por la estudiante con más confianza. El concepto de lugar geométrico, lo utilizó de forma errónea en dos ocasiones, pues le dio más importancia a la idea "los puntos del plano… forman un lugar geométrico" que a "los puntos del plano que satisfacen cierta condición forman un lugar geométrico". Sólo recordó "puntos del plano", pero olvidó lo más importante. Sin embargo, cuando se le preguntó que si la elipse era un lugar geométrico (por tercera vez), ella recordó el concepto. Eso nos dice que sí lo pudo involucrar en su red de relaciones.

Propiedad 6: Consecución. El paso de un nivel al siguiente se da de forma gradual. Rosi tuvo que pasar por un proceso lento y gradual para poder avanzar en su nivel de razonamiento. Ella iba logrando las habilidades y los conocimientos de cada nivel de forma progresiva. Por ejemplo, la no comprensión del concepto de circunferencia, la ubicaba en el nivel 0. Cuando pudo hacer la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia y garantizar que los puntos trasladados estaban a la misma distancia del punto O, la ubicaba en el nivel I. Cuando pudo establecer que la circunferencia era un lugar geométrico y que el conjunto de puntos que pertenecían a esta equidistaban del centro, la ubicaba en el nivel II y cuando pudo determinar, con base en todo el proceso, que la elipse también era un lugar geométrico y que sus puntos cumplían una suma determinada, la ubicaba finalmente en el nivel III. Sin embargo, este proceso no se dio en un instante. Fue un proceso largo y gradual.

Diálogo socrático. Características de la entrevista individual de Rosi.

Nuestras entrevistas grupales e individuales tuvieron un tinte de carácter socrático. Es decir, tenían ciertas características que las hacían diferentes, únicas y especiales. Estas características (Jurado y Londoño, 2007) son:

Intencionalidad de la entrevista: Nuestra entrevista individual tenía una doble intencionalidad: por un lado nos permitía ubicar al estudiante en uno de los niveles de razonamiento y de otro lado, se convertía en una experiencia de aprendizaje que les permitía a los estudiantes mejorar su nivel de razonamiento. En el caso de Rosi, ambas intenciones se lograron, dado que nos permitió finalmente, ubicarla en el nivel III de clasificación, dado que la joven pudo manifestar que comprendió el concepto de elipse como lugar geométrico. Por lo tanto, su paso por la entrevista individual le ayudó a avanzar en su nivel de razonamiento.

El lenguaje: El lenguaje utilizado por el estudiante es un factor determinante para detectar el nivel en el que está razonando. Por ejemplo, Rosi iba refinando su lenguaje a medida que avanzaba en su nivel de razonamiento, dado que ella iba incorporando los nuevos conceptos a su red de relaciones y los iba utilizando con mayor confianza, a medida que los iba comprendiendo. Rosi pudo comprender los conceptos de mediatriz y de circunferencia como lugares geométricos y posteriormente, tuvo que utilizarlos para establecer que la elipse no era una circunferencia y para establecer la propiedad que debían cumplir los puntos de la elipse para pertenecer a esta, a través de la mediatriz.

Los conceptos básicos: Algunas preguntas de la entrevista individual hacían alusión a los conceptos básicos, que son indispensables para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Por ejemplo, Rosi estableció que por dos puntos pasa una única recta y un solo doblez; mostró algunas dificultades con los conceptos primitivos de la geometría euclidiana, porque los relacionó con la geometría analítica; manifestó la comprensión de los conceptos de distancia y segmento. De manera implícita, Rosi relacionó una recta con un doblez, pero no logró establecer la relación entre doblez y segmento. No utiliza el término congruencia, pero manifestó ser capaz de encontrar que dos segmentos tienen la misma medida mediante el doblado de papel. Al principio, no reconocía el concepto de perpendicularidad, pero después pudo recordarlo y relacionarlo con la formación de ángulos de 90°, aunque no comprobó esta relación mediante el doblado de papel. Finalmente, Rosi pudo visualizar la suma de algunos segmentos mediante el doblado de papel. Esto nos lleva a inferir que Rosi logró superar el nivel 0 con estas preguntas alusivas a los conceptos básicos y con los diálogos que se establecieron con ella a raíz de dichos conceptos básicos en cuestión.

Las experiencias previas del entrevistado: Las preguntas inquisidoras de nuestra entrevista le permiten al estudiante reflexionar y responder con base en sus conocimientos previos y en las experiencias que ha tenido a lo largo de su vida. Rosi, en todo momento, trataba de relacionar lo que había comprendido y vivido en las entrevistas grupales y en las clases de matemáticas o geometría, con las preguntas que se le hacían para poder dar una respuesta satisfactoria. Por ejemplo, ella antes de empezar el proceso, no reconocía el concepto de rectas perpendiculares. Posteriormente, en la entrevista grupal pudo establecer la forma de construir rectas perpendiculares mediante el doblado de papel y en la entrevista individual, aunque tuvo un momento de confusión, pudo recordar que dos rectas eran perpendiculares si al cruzarse formaban ángulos de 90°.

Diálogo inquisitivo: Nuestras entrevistas se caracterizan por brindarle al estudiante diálogos socráticos con preguntas intencionadas y aportes de información, para que pueda descubrir ciertas relaciones y lograr la comprensión de un concepto determinado. Con Rosi, se desarrollaron varios diálogos inquisitivos: uno, sobre la construcción del punto medio de un segmento mediante el doblado, dado que ella no entendía lo que le estaban preguntado; otro, sobre la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz para pertenecer a esta como lugar geométrico, dado que la estudiante no había comprendido bien el concepto de lugar geométrico y no percibía que la mediatriz era uno de estos; otro, sobre la suma de dos segmentos determinados para que Rosi pudiera visualizar que esa suma era el radio de la circunferencia y finalmente, otro, sobre la propiedad que debían cumplir los puntos para pertenecer a la figura envuelta (elipse), dado que ella le dio dificultad percibir esta propiedad cuando se le preguntó por primera vez.

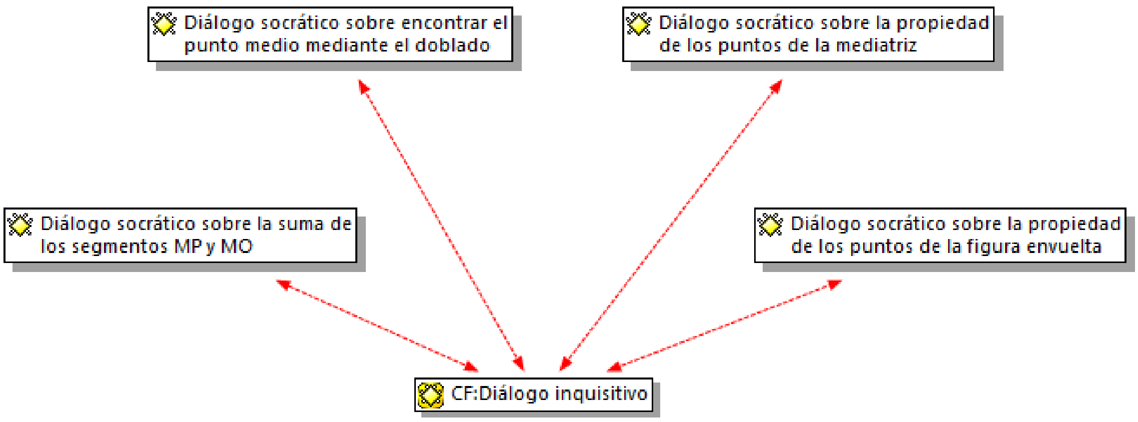


Figura 52: Diálogo inquisitivo para Rosi.

Pensamiento discursivo: Algunas preguntas de nuestra entrevista se hicieron varias veces, para verificar que el estudiante había logrado respuestas más elaboradas, porque había extendido su red de relaciones. Cuando se le preguntó por primera vez por la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$, le dio cierta dificultad llegar a que era la constante r, pero pudo determinarlo gracias a un diálogo socrático que se estableció con ella. Posteriormente, se le preguntó una segunda vez por esta suma de segmentos, pero en una situación diferente y rápidamente llegó a la respuesta correcta. En las otras cuatro situaciones, también pudo determinar que la suma era r, el radio de la circunferencia, con la que se había iniciado la construcción de la figura envuelta.

Aportes de información: Nuestra entrevista tiene varios aportes de información, que son indispensables para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Por ejemplo, Rosi recibió aportes sobre mediatriz, equidistancia, lugar geométrico, proceso sobre la figura construida y elipse. En el caso de la mediatriz, se le dijo la definición: "Se llama **mediatriz** a la recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular al mismo". En el caso de equidistancia, se le aportó: "Un punto equidista de otros dos puntos si está a una misma distancia de estos". En el caso de lugar geométrico se le informó que: "Los puntos del plano que satisfacen una cierta condición forman un lugar geométrico y todo punto que pertenece a ese lugar geométrico satisface la condición". En el caso del proceso sobre la figura construida, se le informó sobre un procedimiento que se debía seguir en la figura que se construyó para poder establecer una suma de segmentos determinada. Y en el caso de la elipse, se le dijo: "La figura que acabas de construir con el doblado de papel, se llama elipse". De acuerdo con el proceso vivido por Rosi, hubo la necesidad de refinar algunos de estos aportes de información, pues les generaba algunas inquietudes a los estudiantes, que no permitían que se comprendiera fácilmente el concepto de elipse como lugar geométrico.

Problematización con las ideas: Algunas preguntas de nuestra entrevista pueden provocar que el entrevistado entre en un estado de contradicción interna o de confrontación con las ideas que ya tenía y las nuevas que le llegan. Rosi vivió momentos en los que se sintió realmente confundida e incluso, lo manifestó. Por ejemplo, cuando se le preguntó si la mediatriz era un lugar geométrico, ella iba tratando de hilar las respuestas de las preguntas inquisitivas que se le hacían en el diálogo socrático que se entabló con ella, pero hubo un momento en el que se sintió confundida y exclamó: "**Hay… Me confundí…**". Cuando se le pregunta por primera vez por la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ y después de entablar con ella un diálogo inquisitivo, ella expresa confundida: "**Hay Dios…**". Y cuando ella logró establecer que la suma de dichos segmentos era r, el radio de la circunferencia, dijo: "**es que no sé cómo explicarlo…**". Ella misma afrontó que se sentía confundida y fue necesario acudir a los diálogos socráticos, con aportes de información y preguntas intencionadas, para que pudiera salir bien librada de sus dificultades conceptuales.

El paso por los tres momentos: En algunas situaciones de la entrevista, el entrevistado pasa por tres momentos: creer saber la respuesta, darse cuenta que no sabe y por último, al estar en un conflicto interno siente la necesidad de encontrar la verdad. Rosi, también vivió en algunos momentos de la entrevista esos tres momentos. Por ejemplo, en la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$, que era el radio, llegó a la conclusión que era la medida del segmento $\overline{OP}$, que era el tercer lado del triángulo formado por los puntos M, P y O. Posteriormente, se dio cuenta que no sabía y se siente confundida; incluso lanza la expresión: "**Hay Dios…**" y finalmente, con la ayuda de algunas preguntas inquisitivas, logra llegar a la respuesta: "**Que me suma, pues r… Porque si este está a la misma distancia que este, y al sumar este y este me da la constante r, y… entonces al sumar este y este… da r también**".

La red de relaciones: Las preguntas de nuestras entrevistas se diseñaron de tal modo que el estudiante pudiera construir una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante las construcciones con doblado de papel y los conceptos concretos de mediatriz y de circunferencia. Por ejemplo, Rosi, en el transcurso de la entrevista, exhibió un lenguaje más refinado y se evidenció, de acuerdo a las respuestas brindadas, que había logrado involucrar los conceptos de mediatriz, circunferencia, lugar geométrico y elipse a su red de relaciones. Cuando se le preguntó por la propiedad que deben cumplir los puntos para pertenecer a una circunferencia, ella respondió: "**Para pertenecer a una circunferencia… Que estén a la misma distancia del centro…**". O cuando se le preguntó por segunda vez la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$, ella respondió: "**OM y MP, pues igual vuelve y me da r, porque si esto es la mediatriz, sería igual distancia, y esto está a igual distancia de este…**" Más adelante, también mencionó: "**Exacto, es un punto de la mediatriz y O es el centro de la circunferencia, entonces sería r al sumarlo…**"

Dificultades.

En el proceso de la entrevista individual, Rosi tuvo momentos de alegría, dado que sabía las respuestas de algunas preguntas. También, se mostró confusa porque dudaba de algunas respuestas o porque realmente no entendía lo que se le estaba preguntando. Además, hubo momentos en los que ella presentó serias dificultades con el lenguaje geométrico. Por ejemplo, manifestó dificultades con los conceptos primitivos de la geometría euclidiana, pues los relacionaba con los conceptos de la geometría analítica. También demostró tener ciertos problemas en algunos procesos de razonamiento infinito, pues creyó que sólo era posible dibujar un punto a lo largo de un doblez o que por dos puntos podían pasar muchos dobleces. Sin embargo, esta última conclusión la pudo corregir cuando se le hicieron otras preguntas, en el transcurso de la entrevista.

Rosi presentó dificultades con el concepto de perpendicular al iniciar el proceso, e incluso durante la entrevista individual, mostró cierta inseguridad, pero finalmente, pudo lograr su comprensión. También, desconocía los conceptos de rectas tangentes y de rectas secantes; pero también logró comprenderlos durante una de las entrevistas grupales. Sin embargo, no hubo necesidad de retomarlos en la entrevista individual y en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

El concepto de circunferencia era desconocido por esta estudiante, antes de iniciar el proceso, pero después de su paso por la entrevista individual, pudo, incluso, comprender que la circunferencia es un lugar geométrico y establecer la propiedad que cumplen sus puntos para pertenecer a esta.

Cuando se le preguntó a Rosi por la figura que podría resultar después de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región limitada por esta, dijo que se formaría un hexágono. Posteriormente, cuando observó la figura, explicó que no era una circunferencia. Y finalmente, con base en un aporte de información, pudo reconocer que esta construcción siempre formaría una elipse. Y cuando se le preguntó por la figura que podría resultar después de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P exterior a esta, dijo que no sabría qué figura se formaría. Incluso, la misma entrevista no aporta elementos suficientes para determinar que la figura formada no es ninguno de los lugares geométricos abordados: mediatriz, circunferencia o elipse.

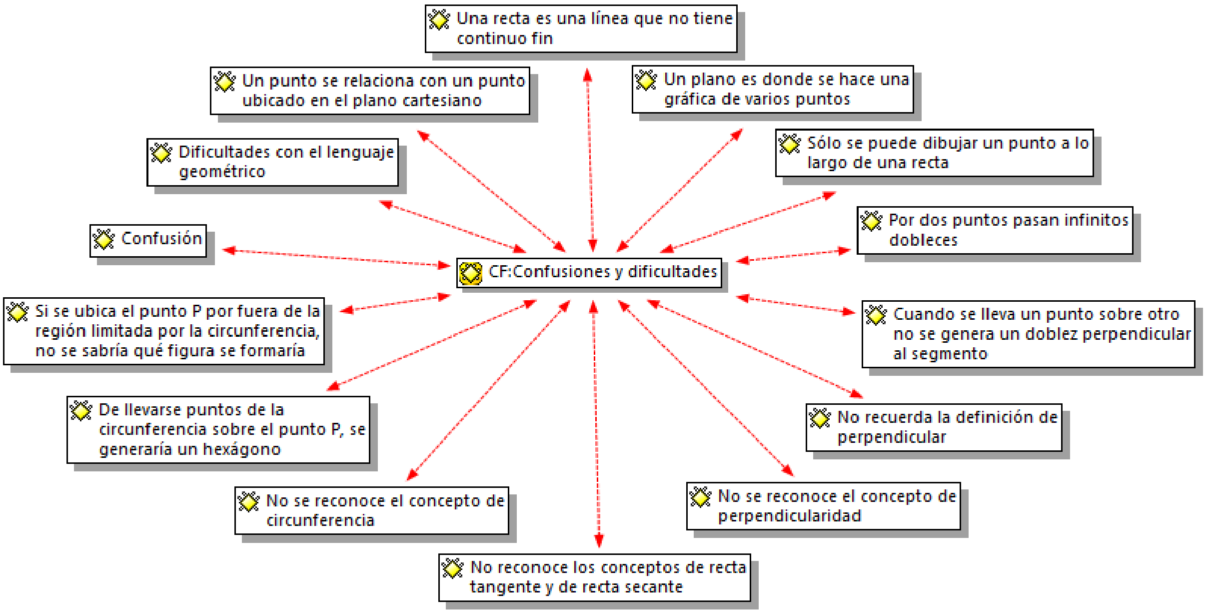


Figura 53: Confusiones y dificultades en el proceso de Rosi.

4.4.4.2 Análisis del proceso de razonamiento de Leti.

La estudiante, cuyo seudónimo es Leti, es del grado décimo de una Institución Educativa, de carácter público, de la ciudad de Medellín. Fue invitada a participar del trabajo, por su motivación por el doblado de papel y por sus conocimientos previos frente a la geometría euclidiana. Estas dos características las demostró en la actividad previa que se hizo con el grupo, antes de elegir los estudiantes que iban a ser parte del estudio de casos.

Ella se caracteriza por su buen desempeño académico, por ser responsable en el cumplimiento de sus deberes y por participar activamente en las actividades que se programan en las diferentes asignaturas. Es una estudiante que tiene buenas habilidades comunicativas.

Análisis individual del proceso de comprensión: Triangulación entre encuesta, entrevista individual y material.

Cuando Leti fue invitada a participar del trabajo de investigación, se le propuso que respondiera una encuesta para conocer a fondo los conocimientos previos que tenía sobre la geometría euclidiana. Leti también participó en la entrevista individual, de carácter socrático, que tenía que ver con la manifestación del concepto de elipse como lugar geométrico.

De las entrevistas grupales surgieron algunos materiales, elaborados por Leti, que se involucraron dentro del análisis individual de su proceso de comprensión. Algunos de ellos, los mostramos a continuación:

Figura 54: Material de Leti 1.

Figura 55: Material de Leti 2.

Figura 56: Material de Leti 3.

Figura 57: Material de Leti 4.

Figura 58: Material de Leti 5.

Figura 59: Material de Leti 6.

Figura 60: Material de Leti 7.

Por lo tanto, para realizar el análisis individual del proceso de comprensión de Leti, se tuvo en cuenta tres fuentes de información: las respuestas escritas de la encuesta, la elaboración de sus materiales de apoyo y las respuestas verbales brindadas en el transcurso de la entrevista individual.

Paso de Leti por los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Nivel predescriptivo.

0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: "Por dos puntos pasa una única recta".

Leti, desde el principio (tanto en la encuesta, como en sus materiales y en la entrevista) reconoció que por dos puntos pasa una única recta. Incluso, también afirmó rotundamente que por dos puntos pasa un único doblez.

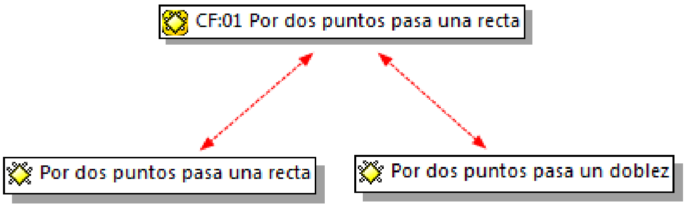


Figura 61: Descriptor 0.1 para Leti.

0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, tangente, entre otras.

Leti reconoce que un punto es un símbolo, aunque lo relaciona también con un objeto concreto (cuerpo o partícula); aún se le dificulta percibirlo como un ente abstracto. Sin embargo, para ella una recta sí tiene longitud ilimitada porque dice que es una línea que se extiende indefinidamente. Leti presenta dificultades con el concepto de plano euclidiano, pues lo relaciona con un plano cartesiano o con un espacio llano. También lo relaciona con un objeto concreto.

Leti argumenta que una hoja de papel se relaciona con un plano, porque los dobleces harían las veces de líneas rectas y los trazos serían más precisos en la hoja de papel, a pesar de que no se requiera de una regla.

Leti establece que por dos puntos pasa una única recta (o un único doblez). Además, establece que por un punto pueden pasar infinitas rectas (o infinitos dobleces) y que una recta está formada por muchos puntos. Cuando se le pregunta que cuántos segmentos pasan por dos puntos, ella asegura que tres. Sin embargo, cuando se le aclara que debe conectar los dos a la vez, afirma que sólo pasa uno. Leti relaciona la palabra equidistar con la palabra congruencia y en ocasiones los utiliza erróneamente. Sobre esto, se estableció una conversación de carácter socrático para que ella pudiera diferenciar ambos conceptos.

Para Leti, es común hablar de perpendicularidad. Ella lo relaciona con la formación de ángulos de 90° y logra establecer que dos rectas son perpendiculares haciendo la comparación con una hoja cuadrada.

Leti inicialmente relaciona la palabra circunferencia con el borde de un círculo. Posteriormente logra determinar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a una circunferencia. Antes de pasar por las entrevistas grupales, Leti desconocía los conceptos de rectas tangentes y de rectas secantes. Luego de pasar por ese proceso, pudo establecer cuándo una recta es tangente a una curva o cuándo es secante.

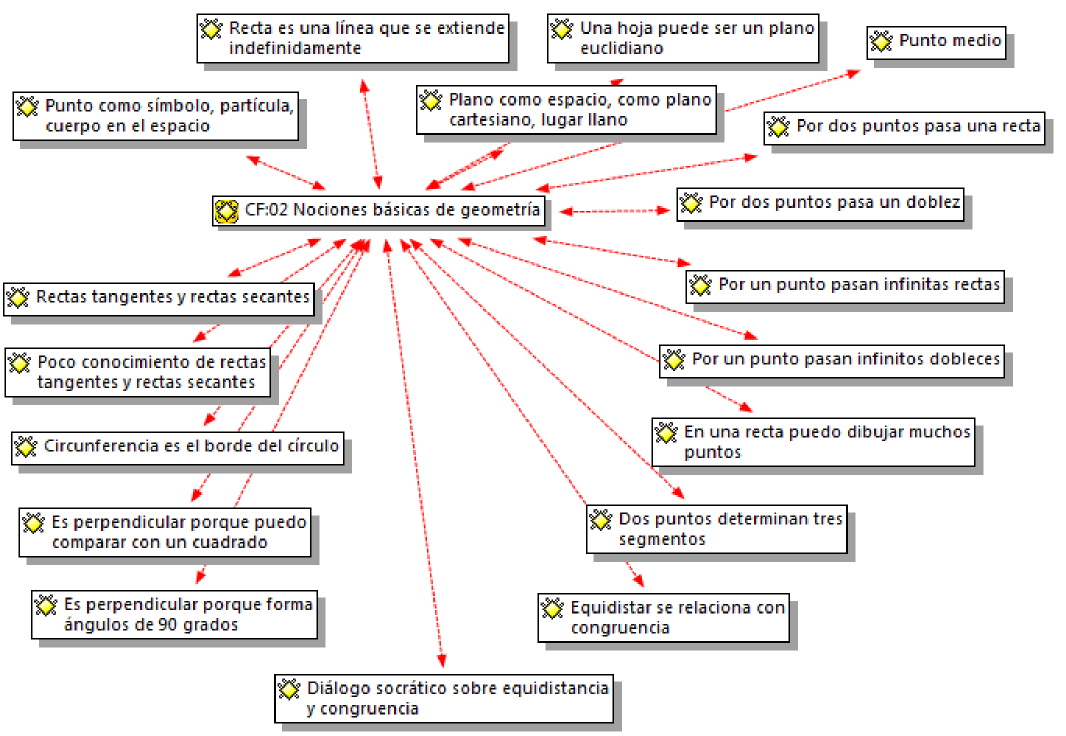


Figura 62: Descriptor 0.2 para Leti.

0.3 El estudiante relaciona un doblez con un segmento de línea recta.

Leti logró establecer que un segmento de recta se relaciona con un doblez. Incluso, pudo determinar que por dos puntos pasa una recta y por dos puntos pasa un doblez, estableciendo finalmente la analogía entre recta y doblez

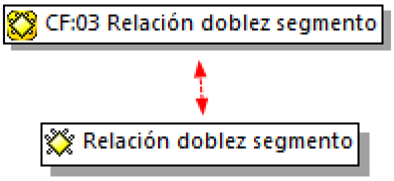


Figura 63: Descriptor 0.3 para Leti.

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.

Para Leti es muy común hablar de segmentos congruentes. Este término lo aprendió en una de las entrevistas grupales que se desarrollaron. En algún momento de la entrevista individual, Leti logró establecer que el punto medio divide el segmento en dos segmentos congruentes. También hizo la analogía entre equidistancia y congruencia, y afirmó que cuando un punto equidista de otros dos se forman segmentos congruentes; sin embargo, en algunas situaciones los utilizó de forma errónea.

Figura 64: Descriptor 0.4 para Leti.

0.5 Construye rectas perpendiculares.

En una de las entrevistas grupales, Leti pudo encontrar la manera de construir rectas perpendiculares y mostrarlo mediante el mismo doblado. Ella, durante la entrevista individual, argumentó que dos dobleces son perpendiculares si forman ángulos de 90 grados y lo comprobó comparando con una hoja de papel de forma cuadrada, afirmando que la hoja ya tenía ángulos de 90°. Leti también pudo determinar que cuando se lleva un punto sobre otro, se genera un doblez perpendicular al segmento determinado por dichos puntos.

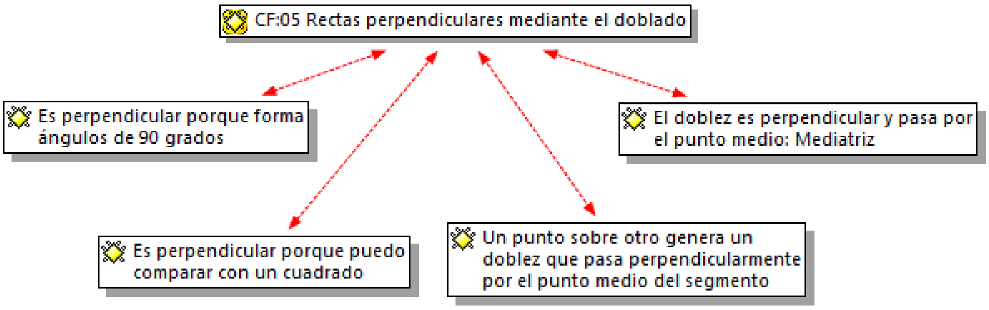


Figura 65: Descriptor 0.5 para Leti.

0.6 Visualiza la suma de segmentos.

La joven pudo percibir mediante el doblado de papel, la suma de segmentos. Al principio, pudo visualizar que la suma de dos segmentos determinados $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$ daba la constante r. Posteriormente, ella pudo visualizar, con base en la información suministrada y en el transcurso del diálogo socrático, la suma determinada de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$.

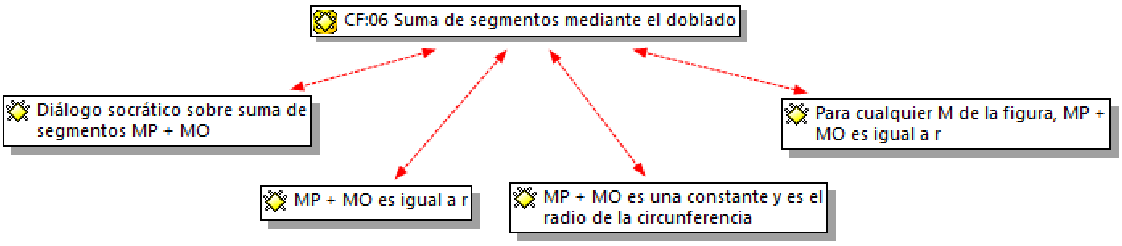


Figura 66: Descriptor 0.6 para Leti.

Nivel I: De reconocimiento visual.

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.

La estudiante logró encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel y a su vez, con dicha construcción, pudo establecer la mediatriz de un segmento. Ella afirmó que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se genera un doblez que es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos y pasa por su punto medio.

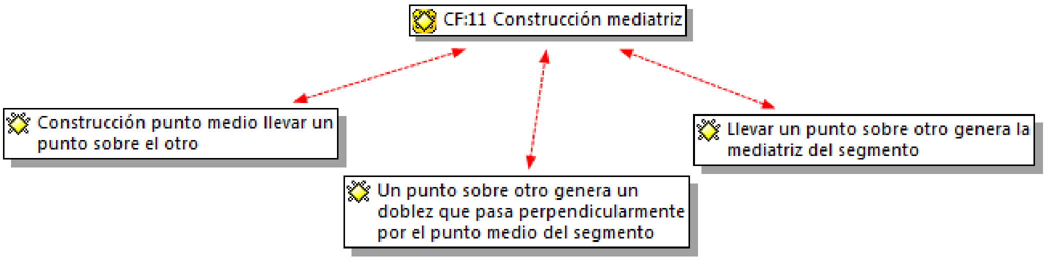


Figura 67: Descriptor 1.1 para Leti.

1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.

Leti realizó la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia, a través de un proceso de traslación de puntos, mediante el doblado de papel. Ella pudo afirmar que se podían encontrar (trasladar) muchos más puntos, hasta que la hoja de papel lo permitiera. Los puntos que se trasladaron debían estar a la misma distancia del centro. También se le preguntó si se llevan los puntos de una circunferencia sobre su centro, qué figura se formaba y ella respondió que una circunferencia concéntrica y logró mostrarlo de manera directa sin ninguna vacilación.

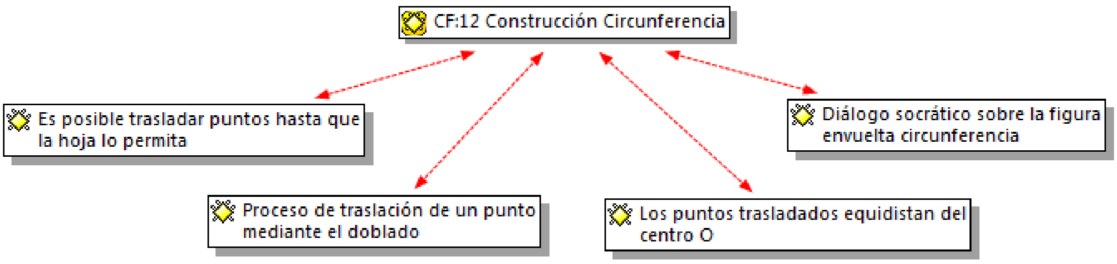


Figura 68: Descriptor 1.2 para Leti.

1.3 Realiza la construcción de una elipse.

Cuando a Leti se le presentó por primera vez la construcción de la elipse (aún no se le había nombrado la figura): se construyen dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que está en la región limitada por esta, creyó que se generaba una circunferencia. Posteriormente, cuando se le mostró la figura formada, explicó que no era una circunferencia, sino que era un óvalo.

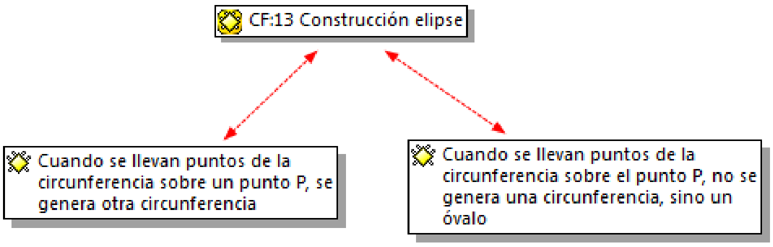


Figura 69: Descriptor 1.3 para Leti.

1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Leti no reconoció que el lugar geométrico que se construyó, cuando se realizaron dobleces que surgieron de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que estaba en la región limitada por esta, era una elipse. Incluso, ella mencionó, en primer lugar, que de acuerdo con las indicaciones de la construcción, surgiría una circunferencia y luego de finalizada la construcción, determinó que era un óvalo, sin mencionar sus propiedades.

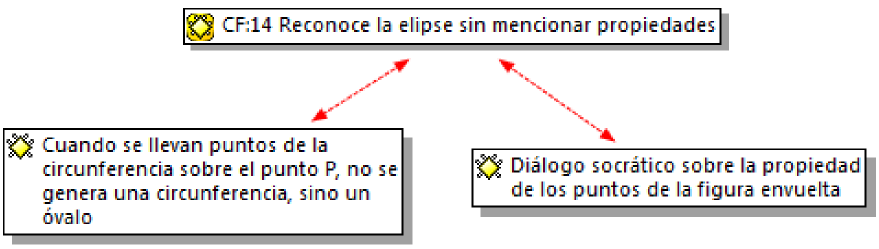


Figura 70: Descriptor 1.4 para Leti.

1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

Leti manifestó que de realizarse la construcción de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región limitada por esta, se formaría otra circunferencia. Posteriormente, finalizada la construcción, ella visualizó la figura construida y afirmó que era un óvalo, se centró en su forma como un todo, pero no señaló partes constitutivas de esta.

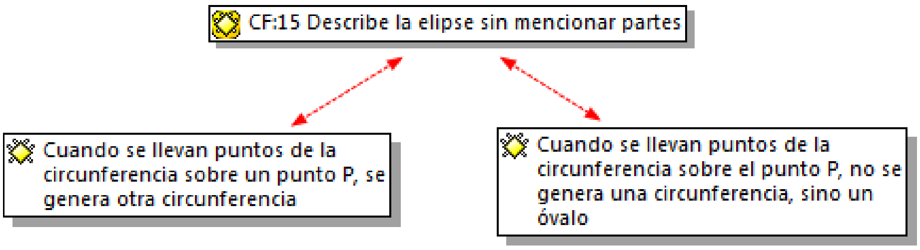


Figura 71: Descriptor 1.5 para Leti.

Nivel II: De análisis.

2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

Leti reconoce que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se realiza un doblez que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos. Mediante un aporte de información, Leti comprende el concepto de mediatriz como lugar geométrico, luego lo utiliza correctamente sin dificultades. Incluso, afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro, se construye la mediatriz del segmento.

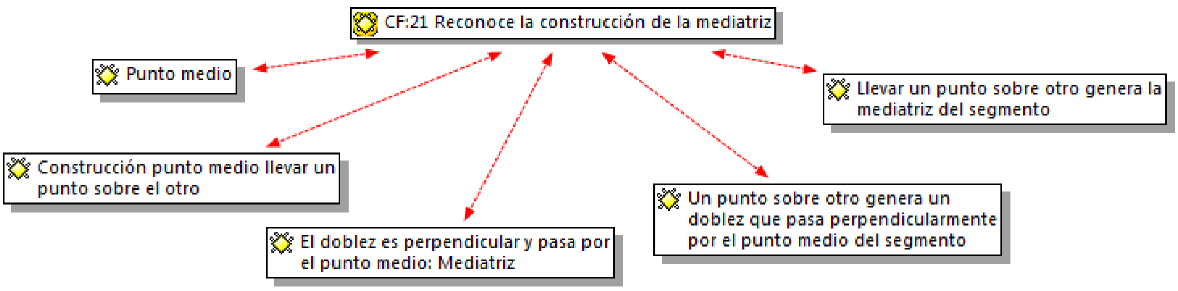


Figura 72: Descriptor 2.1 para Leti.

2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

Leti logró establecer que un punto sobre la mediatriz tiene la misma distancia a los extremos del segmento, o sea que los segmentos formados por el punto de la mediatriz y los extremos del segmento son congruentes. Posteriormente, ella logró razonar sobre el hecho de que un punto sobre la mediatriz equidista de los extremos y luego, lo generalizó para todos los puntos de la mediatriz, lo cual es un razonamiento infinito. Con esto, estaba a un paso de decir que la mediatriz era un lugar geométrico, pero en este momento del proceso, aún no conocía el concepto de lugar geométrico.

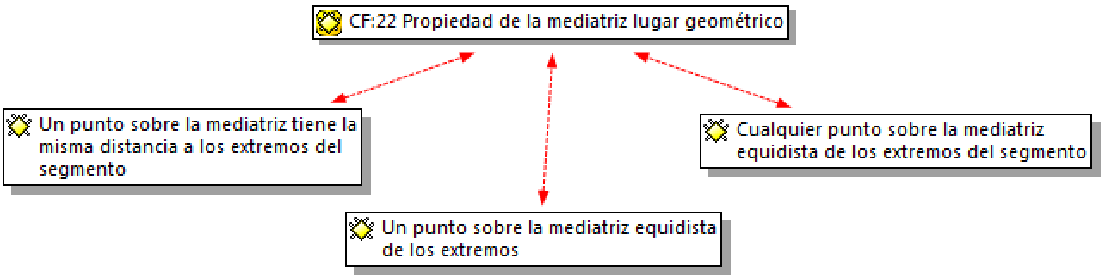


Figura 73: Descriptor 2.2 para Leti.

2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.

La estudiante afirmó, en la construcción de los puntos discretos de la circunferencia, que dichos puntos trasladados equidistan del centro. Luego, logró establecer que todos los puntos de una circunferencia estaban a una misma distancia del centro, es decir, equidistaban del centro. Esto es un gran avance para definir la circunferencia como lugar geométrico, pero no se le preguntó y ella por sí sola, no logró determinarlo.

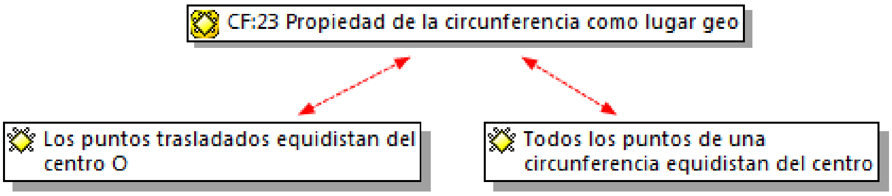


Figura 74: Descriptor 2.3 para Leti.

2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

Cuando a Leti se le presentó la construcción de una circunferencia envuelta que resulta de hacer dobleces que surgían de llevar puntos de la circunferencia sobre su centro, no dudó en afirmar que era una circunferencia. Sin embargo, tuvo algunas dificultades para justificar tal afirmación. Con base en ciertas preguntas intencionadas, se logró que Leti pudiera determinar que era una circunferencia porque todos sus puntos equidistaban del centro y la distancia era la mitad del radio de la circunferencia con la que se inició la construcción.

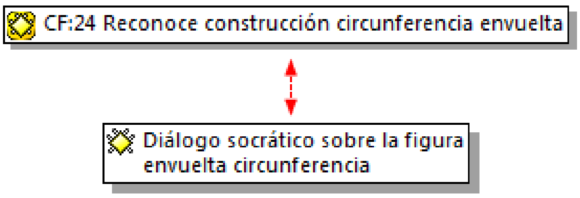


Figura 75: Descriptor 2.4 para Leti.

2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.

Leti establece que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico porque cualquier punto que pertenezca a ella, equidista de los extremos del segmento. Para el caso de la circunferencia, ella logró afirmar que todos los puntos pertenecen a una circunferencia si equidistan del centro; sin embargo, no se le preguntó si era un lugar geométrico y ella tampoco lo determinó por sí sola.

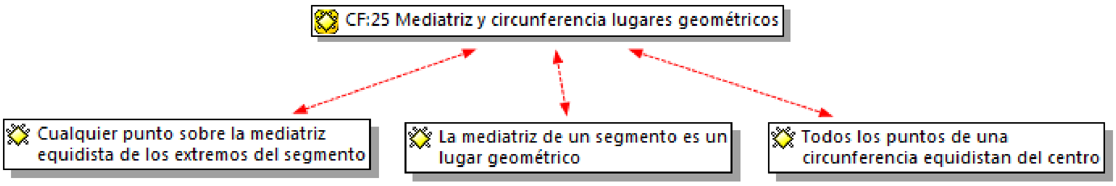


Figura 76: Descriptor 2.5 para Leti.

2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.

Cuando a Leti se le presenta la construcción de la elipse mediante el doblado de papel, afirma que es un óvalo y no menciona propiedades ni partes constitutivas. Posteriormente, con base en preguntas intencionadas, la estudiante logra establecer que hay dos puntos fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia inicial y el otro, es un punto fijo que se ubica al iniciar la construcción. Ella también visualiza que hay unos puntos, denominados M, que pertenecen al contorno de la figura. Además, insinúa que la figura está formada por mediatrices.

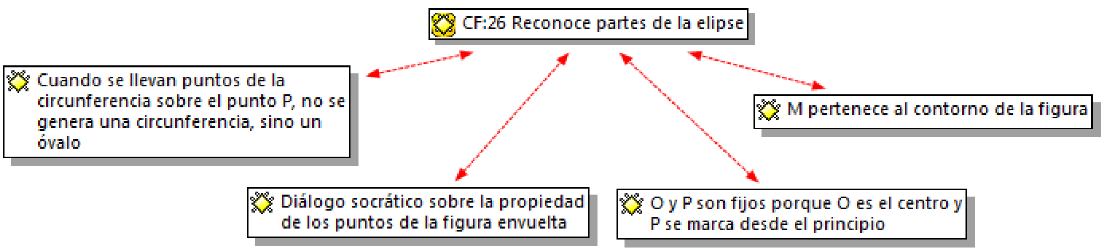


Figura 77: Descriptor 2.6 para Leti.

2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Cuando a Leti se le presentó la construcción de la elipse, ella se aventuró a decir que era un óvalo y no mencionó propiedades o partes constitutivas. Sin embargo, después de ciertos aportes de información y de responder varias preguntas intencionadas, ella logró establecer que si se ubica un punto P en cualquier parte de la región limitada por una circunferencia y se llevan los puntos de esta sobre el punto P, se formaría otra elipse. Ella reconoce la construcción de una elipse mediante el doblado de papel.

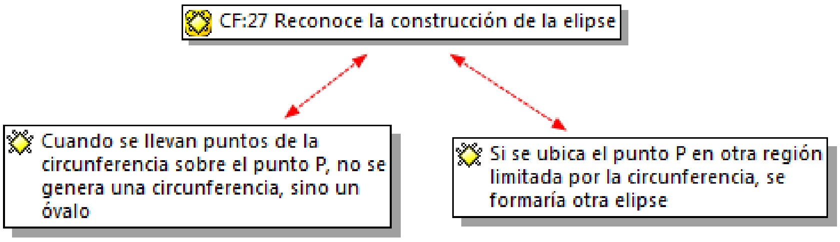


Figura 78: Descriptor 2.7 para Leti.

2.8 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

Con base en un diálogo de tipo socrático con aportes de información y preguntas intencionadas, Leti logra establecer que la suma de dos segmentos determinados $\left(\overline{MP} + \overline{MO}\right)$ es igual al radio de la circunferencia. Incluso logra establecerlo para varios puntos M del contorno de la figura. Al principio, le dio un poco de dificultad, pues esta suma requiere que el estudiante reconozca la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y de un proceso de transitividad, que se logra con base el diálogo socrático.

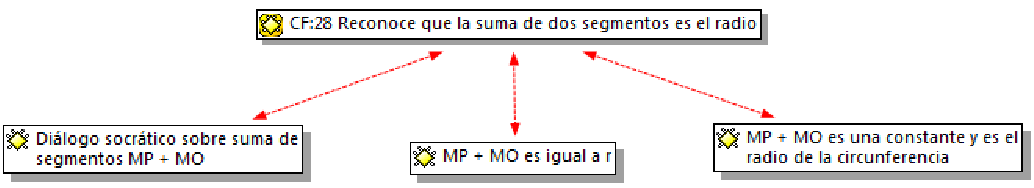


Figura 79: Descriptor 2.8 para Leti.

Nivel III: De clasificación.

3.1 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

En el proceso final de la entrevista individual, la estudiante logra establecer, utilizando el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que "**por ser una mediatriz genera que la suma, pues de los dos segmentos sea el radio**". Ella afirma que: "**cualquier punto, pues cierto, en este caso M, la suma de MP más MO va a dar el radio de la circunferencia**". Por lo tanto, ella logra concluir que para cualquier punto M de la figura, $\overline{MP}+\overline{MO}$ es r, el radio de la circunferencia y es una constante.

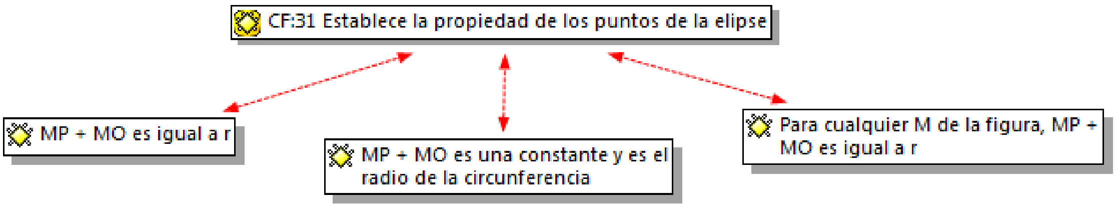


Figura 80: Descriptor 3.1 para Leti.

3.2 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Leti manifiesta la necesidad de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico. Ella afirma que la elipse es un lugar geométrico porque los puntos cumplen con una propiedad particular: cualquier punto M cumple que $\overline{MP}+\overline{MO}$ es equivalente al radio de la circunferencia.

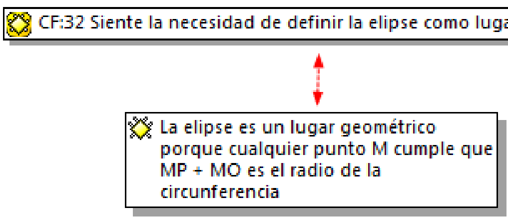


Figura 81: Descriptor 3.2 para Leti.

Con base en el análisis anterior, podemos ubicar finalmente a Leti en el nivel III de razonamiento, pues ella comprendió el concepto de elipse como lugar geométrico. La entrevista individual no solamente sirvió para ubicarla en uno de los niveles de razonamiento, sino que le ayudó a avanzar en éstos y lograr el nivel III de clasificación, que es el más alto en nuestra caracterización de la comprensión con respecto al concepto en cuestión.

Propiedades de los niveles de razonamiento.

Propiedad 1: Secuencialidad fija. Leti fue avanzando en su nivel de razonamiento hasta llegar al nivel III de clasificación, pero siempre superando las características, habilidades y conocimientos del nivel anterior. Ella primero tuvo que reconocer que la mediatriz es un lugar geométrico, posteriormente reconoció la propiedad que cumplen los puntos de una circunferencia para pertenecer a ella y finalmente, pudo determinar que la elipse también era un lugar geométrico y logró establecer la propiedad que cumplían los puntos para pertenecer a esta.

Propiedad 2: Adyacencia. Leti lograba percibir ciertas relaciones en el nivel anterior, pero aún no se habían convertido en objeto de pensamiento, hasta no lograr el nivel inmediatamente superior. Por ejemplo, ella en el nivel II logró establecer que la suma de dos segmentos determinados era el radio de una circunferencia, pero todavía no había asociado este hecho a la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la elipse como lugar geométrico. También, en el nivel I, ella pudo establecer que la mediatriz era una recta que pasa perpendicularmente por el punto medio de un segmento, pero aún no había establecido la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a ella como lugar geométrico, que es una característica del nivel II.

Propiedad 3: Distinción. Leti tuvo que reorganizar sus ideas a medida que iba avanzando en el nivel de razonamiento. Por ejemplo, en el nivel I, ella sabía que la mediatriz era una perpendicular que pasaba por el punto medio de un segmento. En el nivel II, debía reorganizar sus ideas, pues debía establecer que la mediatriz de un segmento era un lugar geométrico, porque los puntos que pertenecen a ella cumplen que equidistan de los extremos del segmento. En el nivel 0, ella dijo que la circunferencia era el borde del círculo; en el nivel I, la construyó a partir de un proceso de traslación de puntos y en el nivel II, determinó que los puntos equidistaban del centro. Así mismo sucedió con la elipse: en el nivel I, ella estableció que la figura formada por el conjunto de mediatrices, era un óvalo; en el nivel II, logró una suma de segmentos determinados en la figura y en el nivel III, logró generalizar esta propiedad para todos los puntos de la elipse.

Propiedad 4: Separación. Dos personas que razonen en diferentes niveles de razonamiento, en relación a la temática abordada, no podrán entenderse. Leti, por ejemplo, pudo llegar al nivel III de razonamiento porque logró comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Sin embargo, si establece una conversación con alguien que esté en un nivel inferior, no podrían llegar a entenderse, pues este último no alcanzó a determinar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la elipse. Incluso, probablemente no alcanzó a visualizar que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ era el radio de la circunferencia inicial, con la que se inició la construcción.

Propiedad 5: Lenguaje. Leti, por ejemplo, a medida que avanza en su nivel de razonamiento, va refinando su vocabulario y utilizando los conceptos comprendidos en los niveles anteriores. Por ejemplo, utiliza el concepto de mediatriz, circunferencia, radio, congruencia, equidistancia, lugar geométrico, elipse a medida que los va comprendiendo.

Propiedad 6: Consecución. Leti no saltó de un nivel al siguiente en un tiempo determinado. Ella iba alcanzando gradualmente las habilidades, las características y los conocimientos de cada nivel. Por ejemplo, la comprensión de perpendicular (nivel 0), mediatriz como perpendicular (nivel I) y mediatriz como lugar geométrico (nivel II) no se dio en un instante. Se hicieron aportes de información y preguntas intencionadas, para que ella pudiera razonar y así comprender el concepto de mediatriz como lugar geométrico.

Diálogo socrático. Características de la entrevista individual de Leti.

Nuestras entrevistas grupales e individuales tuvieron un tinte de carácter socrático. Es decir, tenían ciertas características que las hacían diferentes, únicas y especiales. Estas características (Jurado y Londoño, 2007) son:

Intencionalidad de la entrevista: En el caso de Leti, la intención de las entrevistas se cumplió. Ella pudo, mediante un pensamiento discursivo sobre cada una de las preguntas, comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Además, la ubicamos en el nivel III de clasificación, de acuerdo con nuestros descriptores de los niveles del modelo de Van Hiele.

El lenguaje: A medida que Leti pasaba por cada uno de los niveles de razonamiento, iba refinando su vocabulario, utilizaba con más confianza los conceptos que se habían trabajado anteriormente y su lenguaje era más preciso, más riguroso y matemáticamente adecuado.

Los conceptos básicos: Leti ya había superado el nivel 0 de razonamiento, pues ya había adquirido las habilidades, las características y los conocimientos de este nivel. Ella no tuvo problema en relacionar un segmento de recta con un doblez, pudo determinar que por dos puntos pasa un único doblez, además, recordó algunos conceptos básicos como punto, recta, plano, perpendicular, segmento. Y pudo reconocer, con base en el doblado de papel, congruencia de segmentos, suma de segmentos y rectas perpendiculares.

Las experiencias previas del entrevistado: Leti trataba de relacionar experiencias vividas en la entrevista grupal o en la clase de geometría, para poder responder las preguntas que se le hacían. Por ejemplo, relacionó la figura envuelta por el conjunto de mediatrices cuando se lleva un punto de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región limitada por esta, con un óvalo, figura que tal vez conocía de su experiencia en clases de geometría.

Diálogo inquisitivo: Se realizaron varios diálogos con Leti, para que lograra percibir las relaciones que por sí sola no había podido lograr, cuando se le hacían las preguntas por primera vez. Por ejemplo, se desarrolló un diálogo relacionado con la suma de dos segmentos determinados para que Leti pudiera visualizar que esa suma era el radio de la circunferencia. La mayor dificultad se presentó cuando debió hacer una transitividad para poder establecer esa suma. Luego, sin ningún tropiezo, la visualizó en todos los casos donde se hacía alusión a esta.

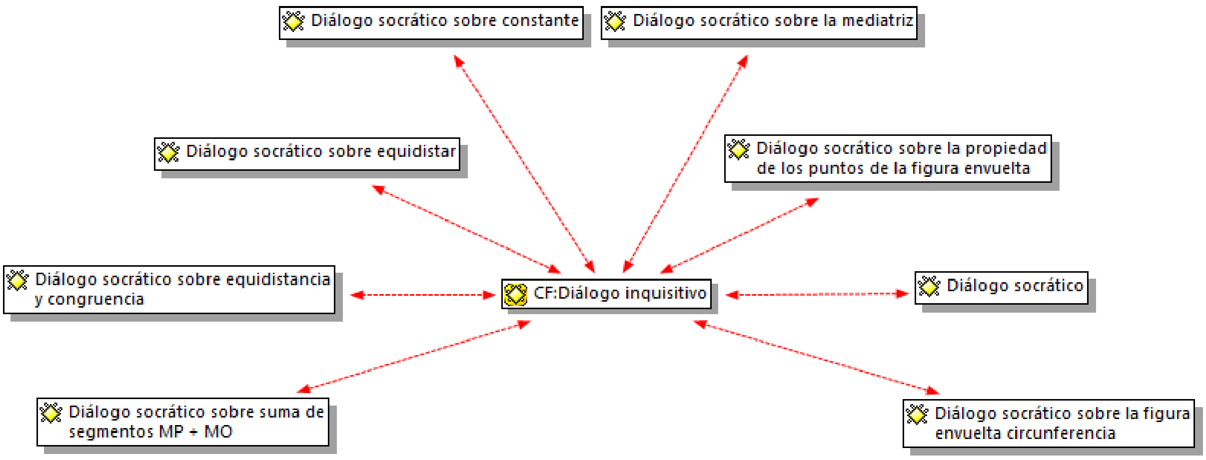


Figura 82: Diálogo inquisitivo para Leti.

Pensamiento discursivo: En el caso de Leti, ella habló en un primer momento de la mediatriz como perpendicular que corta al segmento en su punto medio. En un segundo momento, dijo que la mediatriz de un segmento era un lugar geométrico porque sus puntos equidistaban de los extremos del segmento. Posteriormente utilizó el concepto como perpendicular para establecer que los puntos de una circunferencia envuelta concéntrica equidistan del centro y después, utilizó el concepto como lugar geométrico, para establecer que la elipse era un lugar geométrico también.

Aportes de información: Leti recibió aportes de información sobre mediatriz, equidistancia, lugar geométrico y elipse. Esta información era necesaria para que ella pudiera comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Esta estudiante posee la cualidad de tener una memoria excepcional y recordó muy bien los aportes de información que se le habían dado durante la entrevista, porque es importante resaltar que estos aportes, en transcurso de la entrevista, se suministraban solo una sola vez,. La idea era que ella los comprendiera y, en caso de olvidarlos, con base en las preguntas inquisitivas, los volviera a recordar, en el momento en que se necesitaran utilizar nuevamente.

Problematización con las ideas: Leti enfrentó momentos en los que estaba realmente confundida. Por ejemplo, cuando se le pregunta por primera vez por la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$, ella se siente confundida y lanza expresiones como: "**Humm… pues, pero no sé, no encuentro como la relación entre MP.**" Después se le pregunta nuevamente y establece la siguiente relación errónea: "**¿Cuál es el resultado?, el diámetro… Pues, sería sumar este más este, daría el diámetro.**" Luego, se le hace una pregunta similar, pero en otra situación y ella responde que: "**pues pero lo que a mi me confunde es, porque es OM, y entonces ya sería como, de esa figura ahí adentro… ya sería…**". Ella misma afronta que se siente confundida, que no sabe por qué se hace la suma con respecto a ese segmento. Ella finalmente, requiere de mi ayuda y de ciertas preguntas intencionadas para poder salir del escollo.

El paso por los tres momentos: Leti, en la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$, que era el radio, llegó a la conclusión que era el diámetro (creía saber la respuesta). Se le insinuó que visualizara el radio en la figura y se le notó un poco confundida. Posteriormente, se le hicieron un par de preguntas intencionadas sobre la figura y se le preguntó nuevamente sobre la suma. Ella finalmente razonó sobre la situación propuesta y obtuvo la respuesta correcta.

La red de relaciones: Cuando a Leti se le preguntó si la figura formada por el conjunto de mediatrices era una circunferencia, ella afirmó que no y explicó lo siguiente: "**No, ¿por qué? Porque… pues yo digo que no porque no es del todo redonda, pues a simple vista, cierto, es lo que uno puede decir, y más que por eso porque, los… pues o sea, las mediatrices que resultaron y los puntos pues que marcarían la supuesta circunferencia no estarían a la misma distancia del centro al punto fijo,**

como o sea la figura es como más alargada, darían puntos más largos del centro a…". Este razonamiento nos muestra que Leti involucró en su red de relaciones, los conceptos de mediatriz y de circunferencia como lugares geométricos, pues ambos son utilizados de forma correcta y sin inseguridades por parte de la estudiante.

Dificultades.

Durante el proceso de la entrevista, la estudiante tuvo momentos de motivación, pues sabía las respuestas de las preguntas; tuvo momentos de confusión, dado que no tenía las respuestas o sabía que tenía dificultades o carencias; tuvo momentos en los que lanzó afirmaciones erróneas, por ejemplo, en algún momento de la entrevista dijo que un punto era congruente con otro punto, o que la figura formada por el conjunto de mediatrices podría ser una circunferencia. Ella se sintió confundida, básicamente cuando se le presentó por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, y después cuando la suma se hacía con segmentos solapados. En general, su proceso de razonamiento fue satisfactorio.

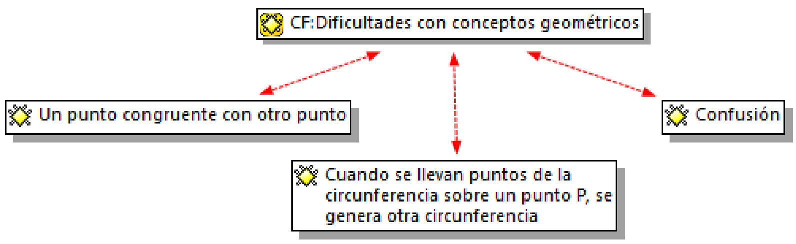


Figura 83: Dificultades en conceptos geométricos en el proceso de Leti.

4.4.4.3 Análisis del proceso de razonamiento de Jhon.

El estudiante, cuyo seudónimo es Jhon, es del grado décimo de una Institución Educativa, de carácter público, de la ciudad de Medellín. Fue invitado a participar del trabajo, por su agrado por el doblado de papel y por sus conocimientos previos frente a la geometría euclidiana. Estas dos características las demostró en la actividad previa que se hizo con el grupo, antes de elegir los estudiantes que iban a ser parte del estudio de casos.

Él se caracteriza por ser un estudiante juicioso y responsable en el cumplimiento de sus deberes académicos. Es un joven más bien callado, aunque ha mostrado tener buenas habilidades comunicativas.

Análisis individual del proceso de comprensión: Triangulación entre encuesta, entrevista individual y material.

Cuando Jhon fue invitado a participar del trabajo de investigación, se le propuso que respondiera una encuesta para conocer a explorar los conocimientos previos que tenía sobre la geometría euclidiana. Él también participó en una entrevista individual, de carácter socrático, que tenía que ver con la manifestación del concepto de elipse como lugar geométrico.

De las entrevistas grupales surgieron algunos materiales elaborados por Jhon, que se involucraron dentro del análisis individual de su proceso de comprensión. Algunos de ellos, los mostramos a continuación:

Figura 84: Material de Jhon 1.

Figura 85: Material de Jhon 2.

Figura 86: Material de Jhon 3.

Figura 87: Material de Jhon 4.

Figura 88: Material de Jhon 5.

Figura 89: Material de Jhon 6.

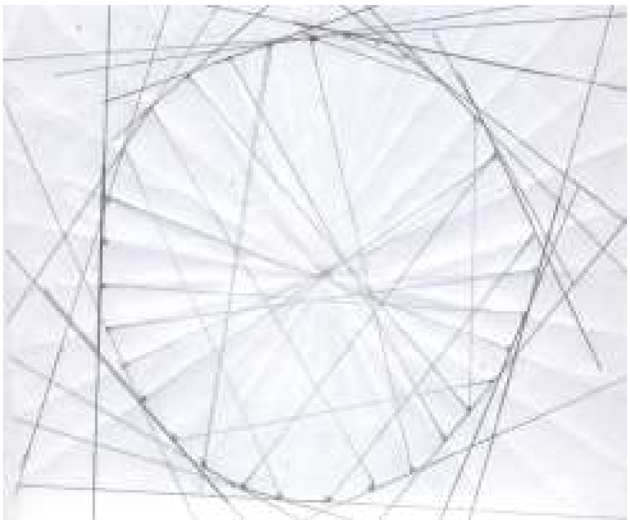


Figura 90: Material de Jhon 7.

Por lo tanto, para realizar el análisis individual del proceso de comprensión de Jhon, se tuvo en cuenta tres fuentes de información: las respuestas escritas de la encuesta, la elaboración de sus materiales de apoyo y las respuestas verbales brindadas en el transcurso de la entrevista individual.

Paso de Jhon por los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Nivel predescriptivo.

0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: “Por dos puntos pasa una única recta”.

Jhon reconoció desde el principio que por dos puntos pasaba una única recta. Sin embargo, cuando se le preguntó, en la entrevista individual, cuántos dobleces pasaban por dos puntos, respondió inmediatamente que dos, a pesar de que en la encuesta había respondido que uno solo. Después de responder un par de preguntas inquisitivas, pudo llegar a que por dos puntos pasa un único doblez.

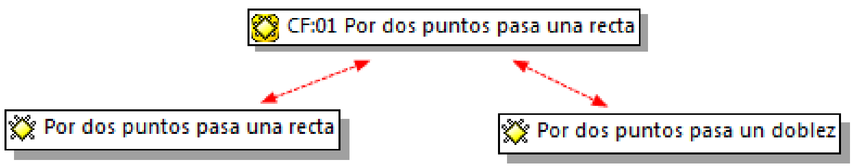


Figura 91: Descriptor 0.1 para Jhon.

0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, tangente, entre otras.

Jhon presenta serias dificultades en algunas nociones básicas de geometría euclidiana. Por ejemplo:

Él considera un punto como “la mitad de una recta horizontal y una vertical”, es decir, lo relaciona con el origen de un plano cartesiano. Aún no lo percibe como un ente abstracto.

Una recta, “es una línea paralela infinita”. Es claro que para él, una recta tiene longitud ilimitada, pero le antepone la palabra paralela, convirtiendo su afirmación en una proposición falsa.

Un plano es “la unión de varias líneas unidas”. En este sentido, no es claro para nosotros el concepto de plano. Quizás lo estaba relacionando con plano cartesiano o con la representación física de un plano euclidiano: un paralelogramo, aunque parece que aún lo relaciona con un objeto concreto y no con un ente abstracto. De hecho, para Jhon no es claro que una hoja de papel se asemeje a una porción del plano euclidiano.

Este estudiante asegura que un segmento es una parte de una recta, pero no menciona nada más acerca del concepto. Pero, fue capaz de hacer un doblez que llevara un punto del segmento sobre el otro punto, para encontrar su punto medio. Lo que indica que sí reconocía el concepto de segmento.

Jhon establece finalmente en la entrevista, que por dos puntos pasa una única recta (o un único doblez). Además, establece que por un punto pueden pasar infinitas rectas (o infinitos dobleces). Sin embargo, afirma que en una recta se pueden dibujar sólo dos puntos, como si hiciera la relación con el número de puntos que determinan una única recta. Al igual que Leti, cuando se le pregunta que cuántos segmentos pasan por dos puntos, él asegura que tres. Sin embargo, cuando se le aclara que debe conectar los dos a la vez, también afirma que sólo pasa uno.

Para este estudiante, el concepto de equidistancia fue difícil de comprender, e incluso de memorizar. En toda la entrevista lo olvidó y se le debían hacer preguntas intencionadas para que pudiera recordarlo. De hecho, en algunos apartes suministrados en la entrevista, los utilizó de forma errónea.

Cuando se le preguntó por primera vez en la encuesta sobre el concepto de perpendicularidad, el estudiante sólo afirmó que eran dos rectas que se cruzan, sin mencionar nada más. Después las entrevistas grupales y durante la entrevista individual, el estudiante pudo determinar que dos rectas son perpendiculares, cuando al cruzarse forman ángulos de 90 grados y logra establecer esto, haciendo la comparación con una hoja cuadrada, tal y como lo hizo Leti.

Jhon inicialmente, afirma que una circunferencia es un círculo. Confunde los dos conceptos. Posteriormente, con algunas ayudas visuales y preguntas inquisitivas, logra determinar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a una circunferencia. Antes de pasar por las entrevistas grupales, Jhon también desconocía los conceptos de rectas tangentes y de rectas secantes. Luego de pasar por ese proceso, pudo establecer cuándo una recta es tangente a una curva o cuándo es secante. Sin embargo, eso no fue mencionado en la entrevista individual, porque no hubo la necesidad de retomar dichos conceptos.

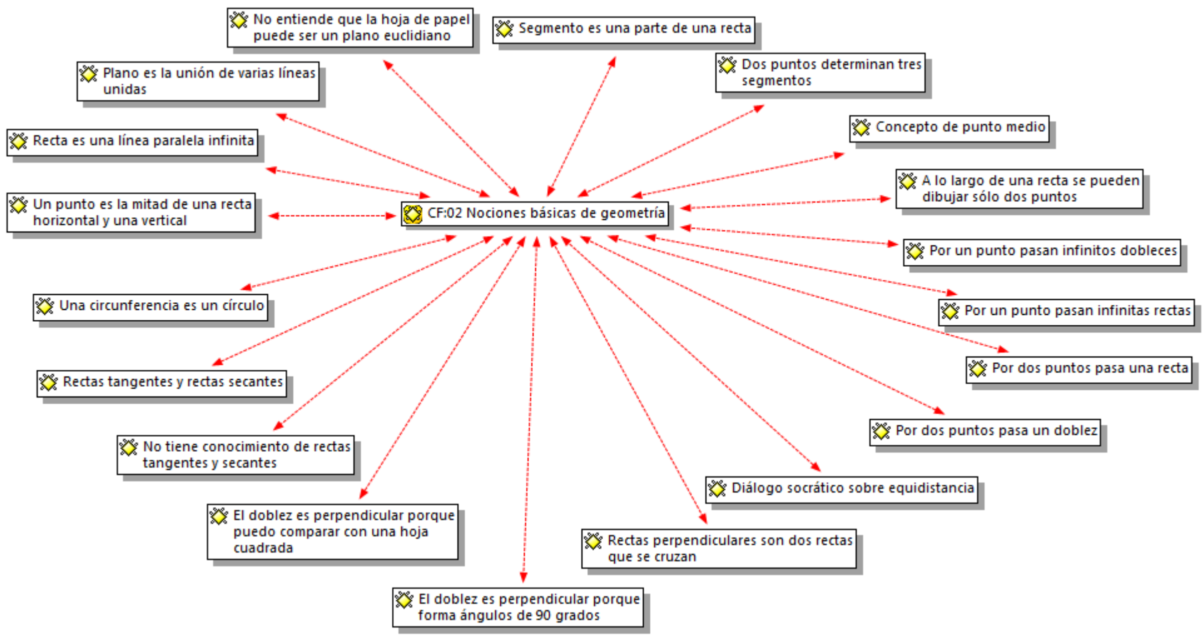


Figura 92: Descriptor 0.2 para Jhon.

0.3 El estudiante relaciona un doblez con un segmento de línea recta.

Jhon estableció una relación directa entre segmento y doblez, al afirmar que se puede construir un segmento en una hoja de papel, "**doblando en cualquier ángulo**". Además, pudo determinar que por dos puntos pasa una recta y por dos puntos pasa un doblez, estableciendo implícitamente una analogía entre recta y doblez. Incluso, tal analogía también se percibió cuando afirmó que por un punto pasan infinitas rectas o infinitos dobleces.

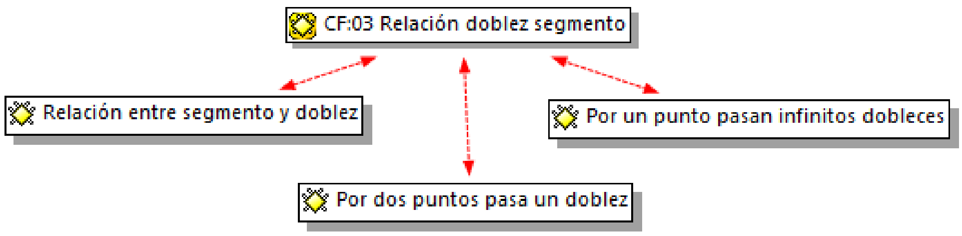


Figura 93: Descriptor 0.3 para Jhon.

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.

Para Jhon no es muy común hablar de segmentos congruentes. De hecho, en la entrevista individual no se hizo alusión al concepto, porque no se vio la necesidad de utilizarlo. Este estudiante puede establecer mediante el doblado, que dos segmentos tienen la misma medida, pero no logra establecer que son congruentes. Incluso, tiene dificultades con el concepto de equidistancia, pues no logra involucrarlo en su red de relaciones.

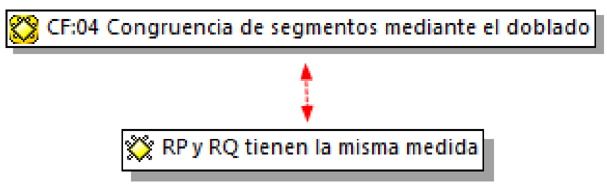


Figura 94: Descriptor 0.4 para Jhon.

0.5 Construye rectas perpendiculares.

Cuando se le preguntó en la encuesta por el concepto de perpendicular, el estudiante aseguró que eran dos rectas que se cruzaban, pero no logró establecer más relaciones entre ellas. Posteriormente, en una de las entrevistas grupales, Jhon pudo encontrar la manera de construir rectas perpendiculares y mostrarlo mediante el mismo doblado. Él, durante la entrevista individual, argumentó que dos dobleces eran perpendiculares si formaban ángulos de 90 grados y lo comprobó comparando con una hoja de papel de forma cuadrada. Esta forma de comprobar perpendicularidad no la recordó rápidamente, por lo tanto, se le tuvieron que hacer algunas preguntas intencionadas, para que lo pudiera recordar. Jhon también pudo determinar que cuando se lleva un punto sobre otro, se genera un doblez perpendicular al segmento determinado por dichos puntos.

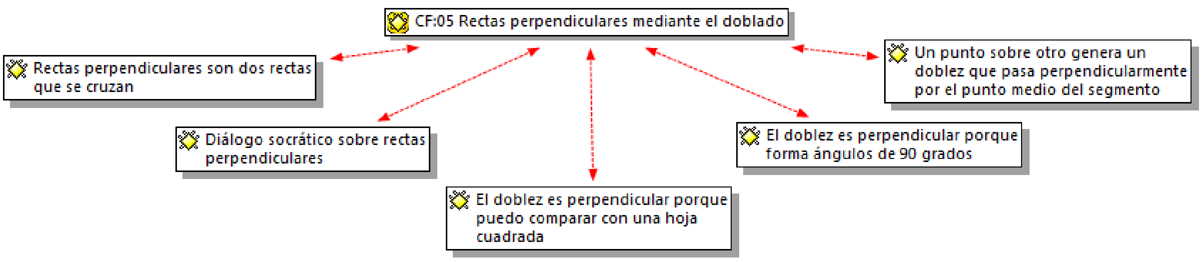


Figura 95: Descriptor 0.5 para Jhon.

0.6 Visualiza la suma de segmentos.

El estudiante pudo percibir mediante el doblado de papel, la suma de segmentos. Al principio, pudo visualizar que la suma de dos segmentos determinados $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$ daba la constante r, por ser un aporte de información. Posteriormente, él pudo visualizar y establecer, con base en la información suministrada, la suma determinada de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$. Aunque le generó algunos estados de contradicción, que se reflejaron en su razonamiento.

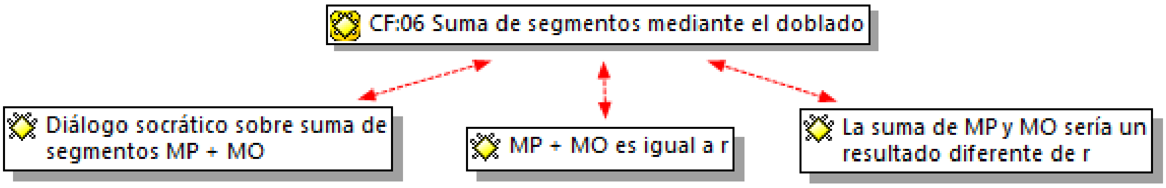


Figura 96: Descriptor 0.6 para Jhon.

Este estudiante logra superar las habilidades, las características y los conceptos del nivel 0 de razonamiento.

Nivel I: De reconocimiento visual.

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.

El estudiante logró encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel y a su vez, con dicha construcción, pudo establecer la mediatriz de un segmento. Él aseguró que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se genera un doblez que es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos y a la vez pasa por su punto medio.

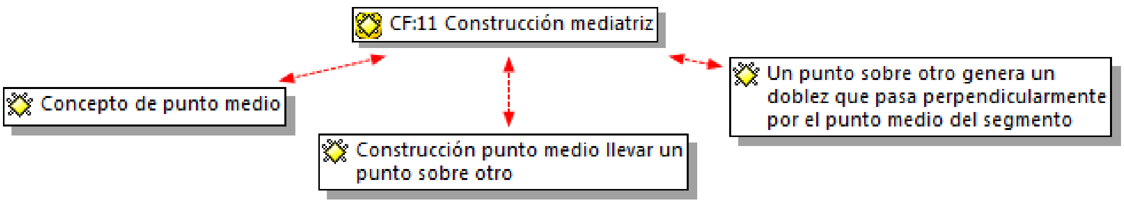


Figura 97: Descriptor 1.1 para Jhon.

1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.

Cuando a Jhon se le mostraron algunos dobleces que pasaban por un punto O, se le pidió que trasladara un punto diferente de este, a los demás dobleces, con la única condición que se conservara su distancia a O y él afirmó que no era posible realizar ese proceso de traslación en una hoja de papel. Después de algunas preguntas intencionadas, el estudiante pudo determinar la forma de trasladar ese punto, conservando su distancia al punto O. Luego, pudo afirmar sin dificultad, que era posible continuar con el proceso de traslación, si se encontraban más dobleces.

También, se le preguntó al estudiante que si se llevan los puntos de una circunferencia sobre su centro, qué figura se formaba y él respondió que una circunferencia, pero no pudo explicar dicha afirmación, a pesar de que en el transcurso de la construcción, logró confirmar su conjetura.

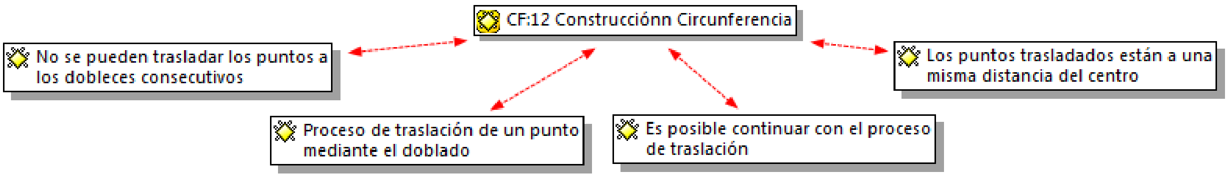


Figura 98: Descriptor 1.2 para Jhon.

1.3 Realiza la construcción de una elipse.

Cuando a Jhon se le presentó por primera vez la construcción de la elipse (aún no se le había nombrado la figura): se construyen dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que está en la región limitada por esta, creyó que se generaba una circunferencia. Posteriormente, cuando se le mostró la figura formada, explicó que no era una circunferencia, sino que era una figura con forma de huevo.

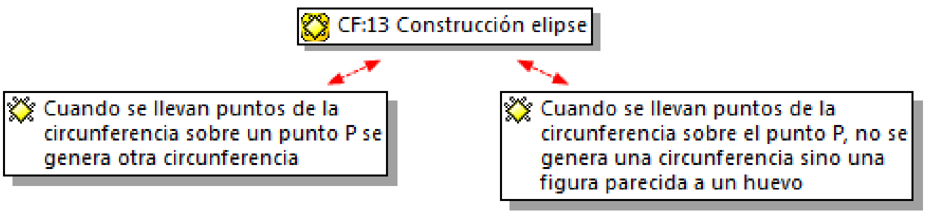


Figura 99: Descriptor 1.3 para Jhon.

1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Jhon no reconoció que el lugar geométrico que se construyó cuando se realizaron dobleces que surgieron de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que estaba en la región limitada por esta, era una elipse. Incluso, parece que no conocía este nombre. Él manifestó, en primer lugar, que si se realizara la construcción surgiría una circunferencia y posteriormente, cuando se realizó la construcción, determinó que era una figura parecida a un "huevito", sin mencionar sus propiedades.

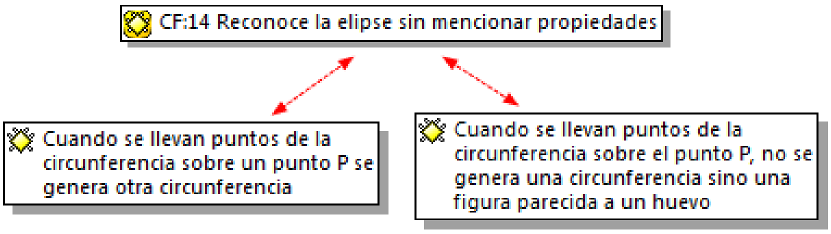


Figura 100: Descriptor 1.4 para Jhon.

1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

El estudiante mencionó que de realizarse la construcción de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región limitada por esta, se formaría otra circunferencia. Posteriormente, cuando se realizó la construcción y vio la figura, afirmó que se parecía a un "huevito". Él se centró en su forma como un todo y relacionó la figura con objetos de su cotidianidad.

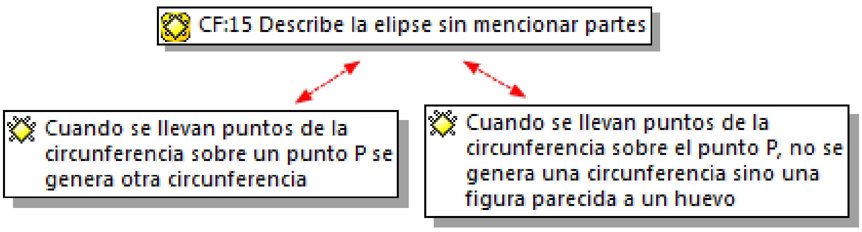


Figura 101: Descriptor 1.5 para Jhon.

El estudiante logró superar las habilidades, las características y los conceptos del nivel I de razonamiento. Es importante mencionar, que tuvo serias dificultades con el concepto de equidistancia, pues no fue posible que lo involucrara en su red de relaciones.

Nivel II: De análisis.

2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

Jhon reconoce que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se realiza un doblez que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos. Cuando a Jhon se le dice que es la mediatriz, sigue utilizando el concepto, con algunas dificultades en ciertas situaciones. Sin embargo, afirma que cuando se lleva un punto sobre otro, se construye la mediatriz del segmento.

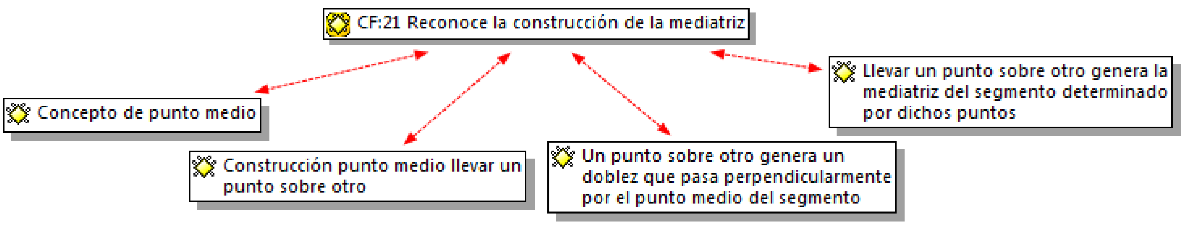


Figura 102: Descriptor 2.1 para Jhon.

2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

Jhon tuvo muchas dificultades con la comprensión del concepto de equidistancia. Por eso, sólo logró establecer que un punto sobre la mediatriz tiene la misma distancia a los extremos del segmento. En el transcurso de la entrevista, pudo establecer que la mediatriz era un lugar geométrico y que sus puntos equidistaban de los extremos del segmento. Aún así, el estudiante continuó presentando ciertas dificultades con el concepto en cuestión. Posteriormente se refirió a la mediatriz, como el conjunto de puntos que están a una misma distancia de los extremos del segmento.

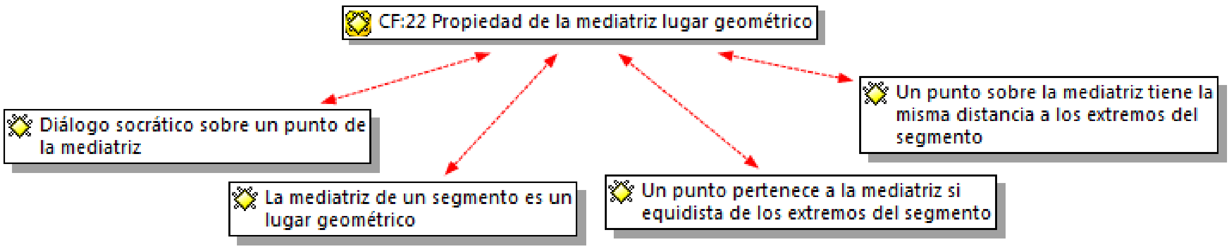


Figura 103: Descriptor 2.2 para Jhon.

2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.

El estudiante afirmó, en la construcción de los puntos discretos de la circunferencia, que dichos puntos trasladados estaban a una misma distancia del centro. Luego, logró establecer que los puntos de una circunferencia estaban a una misma distancia del centro. Mediante el diálogo inquisitivo, el estudiante pudo determinar que los puntos equidistaban del centro. Esto es un buen avance para definir la circunferencia como lugar geométrico.

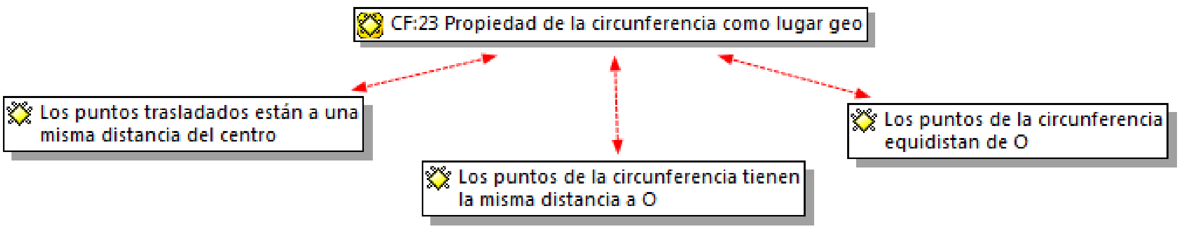


Figura 104: Descriptor 2.3 para Jhon.

2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

Cuando a Jhon se le presentó la construcción de una circunferencia envuelta que resulta de hacer dobleces que surgían de llevar puntos de la circunferencia sobre su centro, no dudó en afirmar que era un círculo. Con base en ciertas preguntas inquisitivas, se le sugirió el concepto de circunferencia y él pudo establecer que el conjunto de mediatrices envolvían una circunferencia. Sin embargo, tuvo muchas dificultades para justificar tal afirmación. Se le hicieron preguntas inquisitivas para que el estudiante pudiera hacer un esfuerzo en su razonamiento y justificar que la figura construida era una circunferencia, pero no fue posible. Sólo logró decir que era una circunferencia porque los puntos tenían la misma distancia al centro, pero no pudo establecer qué tipo de distancia y por qué. Él presentó el siguiente error conceptual: "Es una circunferencia porque es una circunferencia que se limita con la otra".

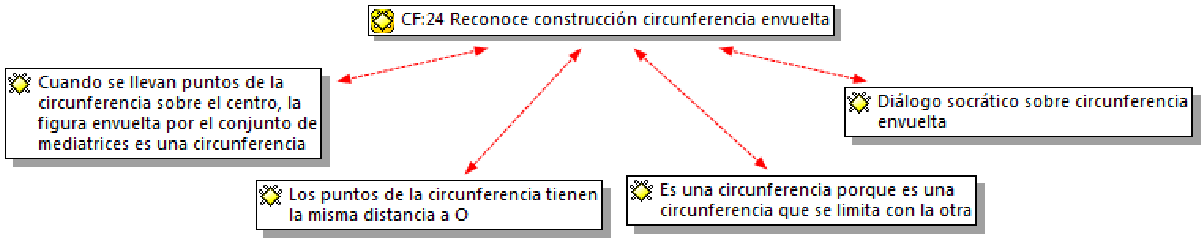


Figura 105: Descriptor 2.4 para Jhon.

2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.

El estudiante pudo establecer que la mediatriz de un segmento era un lugar geométrico, porque sus puntos tienen la misma distancia a los extremos del segmento. Se le dificultó determinar que cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos, pero en un momento dado, lo pudo hacer. Aunque, posteriormente no utilizó la expresión "equidistar", porque no logró involucrar esta idea en su red de relaciones. Incluso, en todo momento de la entrevista, se le tuvo que recordar esta situación, o se le hicieron preguntas intencionadas para que lo intentara recordar.

Para el caso de la circunferencia, el estudiante logró afirmar que todos los puntos pertenecen a una circunferencia si están a una misma distancia del centro; sin embargo, no se le preguntó si era un lugar geométrico y él tampoco lo determinó por sí solo.

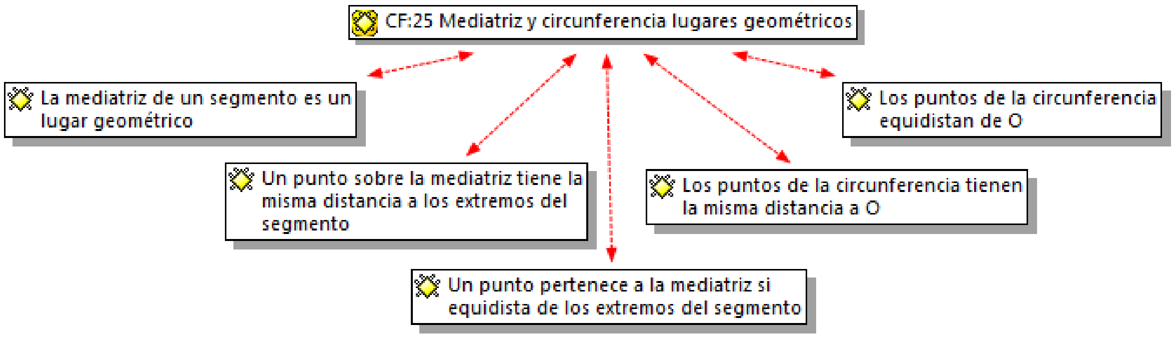


Figura 106: Descriptor 2.5 para Jhon.

2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.

Cuando a Jhon se le presenta la construcción de la elipse mediante el doblado de papel, afirma que es una figura parecida a un huevo y no menciona propiedades ni partes constitutivas. Posteriormente, con base en preguntas intencionadas, el estudiante logra establecer que hay dos puntos fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia inicial y el otro, es un punto fijo que se ubica al iniciar la construcción. Él también visualiza que hay unos puntos, denominados M, que pertenecen al contorno de la figura. En ningún momento de la entrevista, insinúa que la figura está formada por un conjunto de mediatrices.

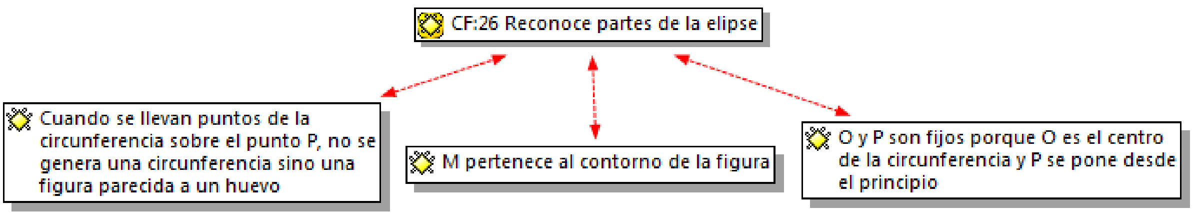


Figura 107: Descriptor 2.6 para Jhon.

2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Cuando a Jhon se le presentó la construcción de la elipse, él afirmó que era una figura parecida a un huevo y no mencionó propiedades o partes constitutivas. Sin embargo, después de ciertos aportes de información y de responder varias preguntas intencionadas, él logró establecer que si se ubica un punto P en cualquier parte de la región limitada por una circunferencia y se llevan los puntos de esta sobre el punto P, se formaría otra elipse. Él reconoce la construcción de una elipse mediante el doblado de papel.

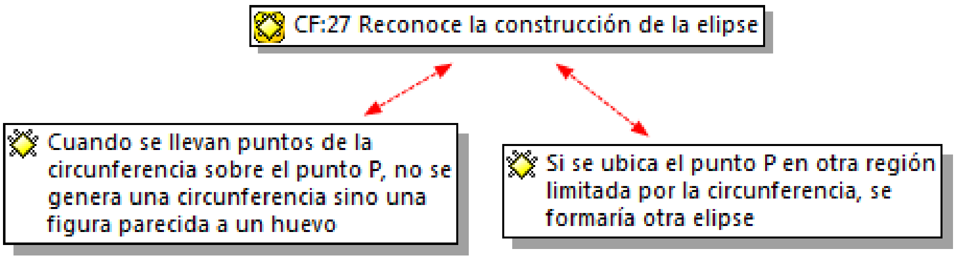


Figura 108: Descriptor 2.7 para Jhon.

2.8 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

A Jhon se le hicieron unas seis preguntas relacionadas con la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$; en todas, llegaba a la conclusión que era un resultado diferente de r. En las primeras veces que se le presentó el problema, se le dieron aportes de información y se le hicieron preguntas inquisitivas para que lograra salir del embrollo, pero no lograba visualizar la solución. Después de estimular su razonamiento, en un momento dado de la entrevista, pudo determinar que era una constante y que era el radio de la circunferencia. Sin embargo, aunque se suponía que el estudiante ya lo había comprendido porque lo había visto en dos o tres situaciones, en todas las preguntas relacionadas con la suma se vio la necesidad de hacerle preguntas y de recordarle información suministrada anteriormente. Fue realmente difícil que el estudiante visualizara esta suma de segmentos. Incluso, cuando pudo hacerlo, lo olvidaba rápidamente o se sentía inseguro de sus conocimientos. El estudiante presentó dificultades en comprender que la suma de estos segmentos era el radio de la circunferencia.

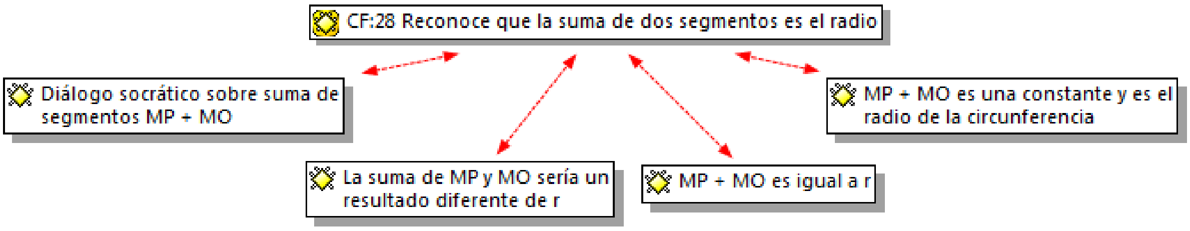


Figura 109: Descriptor 2.8 para Jhon.

Nivel III: De clasificación.

3.1 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

Llegando al final de la entrevista, el estudiante, mediante el diálogo inquisitivo, logró el siguiente razonamiento: que para todos los casos, la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ es el radio de la circunferencia. Sin embargo, tuvo muchas dificultades para llegar a esa conclusión. Se vio la necesidad estimular su razonamiento con preguntas y aportes de información. El estudiante logra establecer, con algunas dificultades, que un punto pertenece a la elipse si la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$ es una constante y es el radio de la circunferencia.

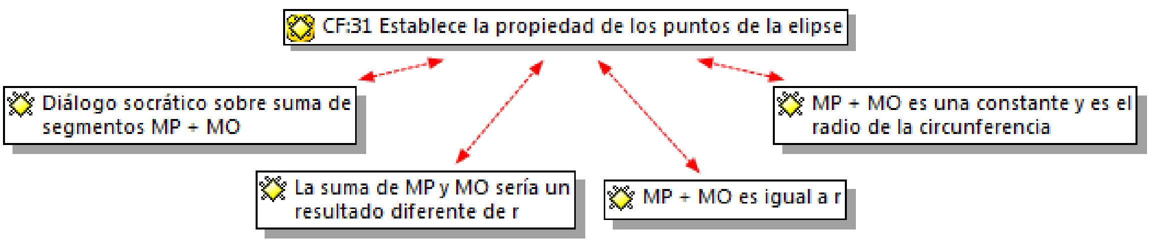


Figura 110: Descriptor 3.1 para Jhon.

3.2 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Jhon no manifiesta la necesidad de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico. Él afirma que la elipse es un lugar geométrico porque "ocupa un lugar en el espacio". Después de muchos aportes y de preguntas intencionadas, logra establecer que un punto M de la elipse cumple que la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$ es el radio de la circunferencia. El estudiante presentó serias dificultades para llegar a esta conclusión. Él no logra demostrar que ha comprendido el concepto de elipse como lugar geométrico.

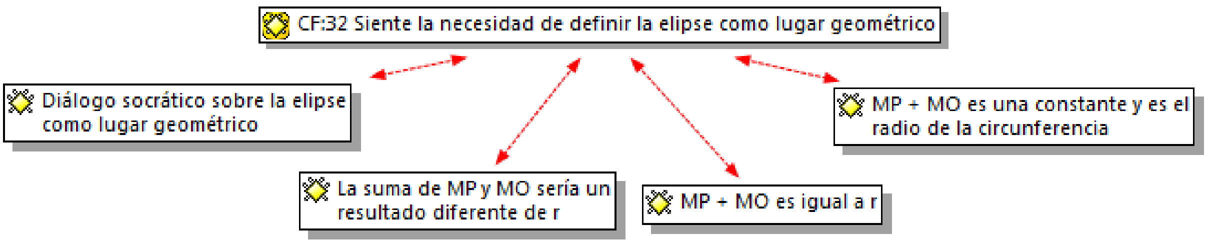


Figura 111: Descriptor 3.2 para Jhon.

Con base en el análisis anterior, podemos ubicar finalmente a Jhon en el nivel II de razonamiento, debido a que no logra comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. La entrevista individual no solamente sirvió para ubicarlo en uno de los niveles de razonamiento, sino que le permitió avanzar en su razonamiento, así no haya logrado el objetivo propuesto.

Propiedades de los niveles de razonamiento.

Propiedad 1: Secuencialidad fija. Jhon fue avanzando en su nivel de razonamiento hasta llegar al nivel II, superando las características, habilidades y conocimientos del nivel anterior. Él, en su proceso de razonamiento, pudo reconocer que la mediatriz de un segmento era un lugar geométrico porque los puntos están a una misma distancia de los extremos del segmento. Posteriormente, pudo determinar la propiedad que cumplen los puntos de una circunferencia para pertenecer a ella y finalmente, además, pudo reconocer que la elipse era un lugar geométrico, pero se le dificultó enormemente encontrar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a ella.

Propiedad 2: Adyacencia. Tanto en el nivel I como en el nivel II, Jhon hacía explícitas ciertas cualidades del pensamiento, que se habían percibido en el nivel anterior. Es decir, lograba percibir ciertas relaciones en el nivel anterior, pero aún no se habían convertido en objeto de pensamiento, hasta no lograr el nivel inmediatamente superior. Por ejemplo, el estudiante no tuvo dificultad alguna en relacionar un doblez que surge de llevar un punto sobre otro, con la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos. Sin embargo, aún no tenía clara la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a dicho lugar geométrico, que es una característica del nivel II. También, en el nivel 0, el estudiante creía que una circunferencia era un círculo. Posteriormente, en el nivel I, pudo realizar un proceso de traslación de puntos conservando su distancia al punto O y en el nivel II, pudo establecer que este conjunto de puntos era una circunferencia, porque estaba a una misma distancia del centro.

Propiedad 3: Distinción. Jhon tuvo la necesidad de reorganizar sus ideas para poder avanzar en su nivel de razonamiento. En el nivel O, por ejemplo, el estudiante suponía que una circunferencia era un círculo, es decir, no establecía ninguna diferencia entre ambos conceptos. En el nivel I, pudo realizar la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia, a través de un proceso de traslación de puntos conservando su distancia al punto O. Mientras que en el nivel II, pudo determinar que una circunferencia estaba formada por un conjunto de puntos que están a una misma distancia del centro. En el caso de la mediatriz, sucedió una situación similar. El estudiante pudo determinar que la mediatriz era una perpendicular que pasaba por el punto medio de un segmento en el nivel I y en el siguiente nivel, pudo determinar que los puntos que pertenecen a la mediatriz tienen la misma distancia a los extremos del segmento.

Propiedad 4: Separación. Jhon, por estar en el nivel II de razonamiento, podrá razonar sobre la mediatriz y la circunferencia sin ninguna dificultad. Pero no podrá razonar sobre la elipse de la misma manera como razona un estudiante que esté en el nivel III. A Jhon le dio mucha dificultad visualizar la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$ y generalizarla para todos los puntos de la elipse. Mientras que un estudiante del nivel III, pudo comprender la suma y comprender la elipse como lugar geométrico.

Propiedad 5: Lenguaje. Como cada nivel de razonamiento tiene un tipo de lenguaje específico, Jhon, a medida que avanzaba en su nivel de razonamiento, iba tratando de precisar su lenguaje. Sin embargo, en todo el proceso notamos que el estudiante tenía dificultades con ciertas palabras. Por ejemplo, el concepto de equidistancia no lo pudo involucrar en su red de relaciones y no lo pudo comprender. Mientras que los conceptos de mediatriz y de circunferencia los iba utilizando con más regularidad, porque había alcanzado su comprensión. El concepto de elipse como lugar geométrico no lo pudo comprender tampoco, pues le dio mucha dificultad visualizar la suma de determinados segmentos y esto lo llevó a no superar el nivel III de razonamiento.

Propiedad 6: Consecución. El paso de un nivel al siguiente se da de forma gradual. Jhon no saltó de un nivel al siguiente en un tiempo determinado. Él tuvo que alcanzar las habilidades, las características y los conocimientos de cada nivel. Por ejemplo, la comprensión del concepto de circunferencia no se dio en un instante, el estudiante tuvo que pasar por un proceso: primero, creer que la circunferencia es un círculo, característica del nivel 0; segundo, reconocer la construcción de algunos puntos de la circunferencia, característica del nivel I y tercero, establecer la propiedad que cumplen los puntos de la circunferencia para pertenecer a esta, característica del nivel II.

Diálogo socrático. Características de la entrevista individual de Jhon.

Intencionalidad de la entrevista: En el caso de Jhon, la entrevista le ayudó a ubicarse en el nivel II de análisis, dado que no le brindó los elementos que él necesitaba para comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Sin embargo, sí le ayudo a comprender algunos conceptos como el de mediatriz y circunferencia, como lugares geométricos.

El lenguaje: A medida que Jhon avanzaba en su nivel de razonamiento, intentaba refinar su vocabulario, utilizaba con más confianza algunos de los conceptos que se habían trabajado anteriormente (mediatriz y circunferencia) y su lenguaje era un poco más matemático. Este estudiante presentó serias dificultades con el concepto de equidistancia, pues no logró comprenderlo. Además, tuvo dificultades en visualizar una suma de segmentos, que era la base para reconocer que la elipse era un lugar geométrico.

Los conceptos básicos: Desde el principio, Jhon mostró dificultades con ciertos conceptos geométricos. Por ejemplo, los conceptos primitivos punto, recta y plano, los concibió como entes concretos. Incluso, tiene todavía dificultades conceptuales con respecto a estos tres elementos. También, dijo que la circunferencia era un círculo, pero posteriormente pudo establecer la propiedad que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a esta. Sin embargo, también tuvo aciertos conceptuales en las primeras preguntas sobre conceptos básicos: él no tuvo problema en relacionar un segmento de recta con un doblez, pudo determinar que por dos puntos pasa un único doblez, además pudo reconocer la igualdad de segmentos mediante el doblado, una suma sencilla de segmentos y el concepto de rectas perpendiculares.

Las experiencias previas del entrevistado: Jhon, en todo momento, trataba de relacionar experiencias vividas en la entrevista grupal o en la clase de geometría, para poder responder las preguntas que se le hacían. Por ejemplo, para responder una pregunta de la entrevista individual, trató de recordar un procedimiento que se hizo en la entrevista grupal. También, relacionó la construcción de la elipse, con una figura parecida a un huevo, es decir, lo relacionó con algo de su cotidianidad.

Diálogo inquisitivo: En el caso particular de Jhon, tuvimos que ampliar el diálogo inquisitivo, con preguntas intencionadas y aportes de información, para que pudiera alcanzar la comprensión de determinado concepto. Por ejemplo, se plantearon varias preguntas similares, para que lograra razonar y comprender que la suma de un par de segmentos determinados era el radio de una circunferencia. Sin embargo, notamos que el estudiante quedó inseguro con ese conocimiento y por eso llegamos a la determinación de que no lo había comprendido completamente. También se desarrolló un diálogo muy extenso con el estudiante, sobre el concepto de equidistancia, pues presentó dificultades en su comprensión. Jhon tampoco pudo explicar que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices, cuando se lleva un punto de la circunferencia sobre su centro, era otra circunferencia. Incluso, después de ciertas preguntas y de ciertos aportes, no logró visualizarlo. Este estudiante, finalmente, tuvo dificultades con la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, que era nuestro objeto de estudio, a pesar de haber pasado por entrevistas grupales de carácter socrático y por las 28 preguntas anteriores de la entrevista individual, también de carácter socrático

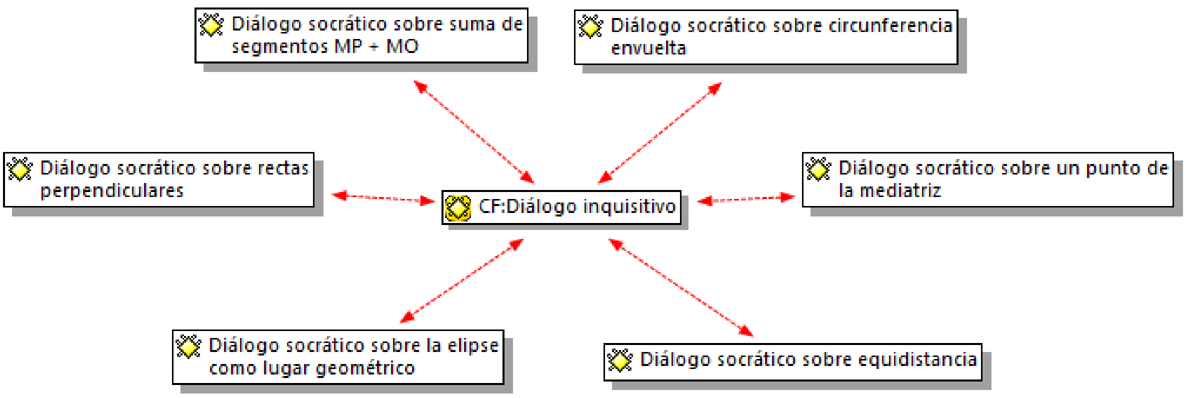


Figura 112: Diálogo inquisitivo para Jhon.

Pensamiento discursivo: En nuestra entrevista individual se hace la misma pregunta varias veces y en diferentes situaciones, para que el estudiante demuestre su comprensión, al dar respuestas más elaboradas porque pudo ampliar o modificar su red de relaciones. En el caso de Jhon, como se ha venido diciendo desde el principio, tuvo dificultades con el concepto de equidistancia y con una suma de dos segmentos determinados. En este último caso, al estudiante se le presentaron seis preguntas similares en circunstancias diferentes, y en casi todos los casos, hubo necesidad de preguntas intencionadas y aportes de información, para que pudiera llegar a la comprensión de dicha suma. Cuando él lograba visualizar la suma, pensábamos que ya lo había comprendido, pero llegaba la siguiente pregunta y no brindaba respuestas adecuadas y coherentes con respecto a lo que se le estaba preguntando. No pudo lograr ampliar su red de relaciones con respecto al concepto de equidistancia y a la operación suma de segmentos. Esto no le permitió lograr avanzar en su razonamiento, porque sin la comprensión de estos conceptos, no era posible que él pudiera establecer la propiedad que cumple un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse.

Aportes de información: Jhon recibió aportes de información sobre mediatriz, equidistancia, lugar geométrico y elipse. El concepto de mediatriz fue comprendido y utilizado correctamente en situaciones posteriores. El concepto de equidistancia no fue involucrado en la red de relaciones del estudiante, porque no pudo alcanzar su comprensión. El concepto de lugar geométrico fue alcanzado en el caso de la mediatriz, pero olvidado y mal utilizado en el caso de la elipse. Con la ayuda de ciertas preguntas, el estudiante y con ciertas dificultades además, pudo decir que la elipse era un lugar geométrico y pudo establecer la propiedad. Pero notamos que estaba inseguro y que fue conducido a esta respuesta.

Problematización con las ideas: Jhon tuvo muchos momentos en los que estaba realmente confundido. Por ejemplo, cuando se le pregunta al estudiante que cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento, ¿qué propiedad cumple? El estudiante responde: "**Eh de, ¿cómo así…?**" También, cuando se le pregunta al estudiante por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$, él responde: "**¿Qué podría afirmar, que…? ¿Cómo así hombre? Qué le digo, pues ¿Cómo le explico?**" O por ejemplo, cuando se está hablando de que un punto equidista de otros dos, a él se le pregunta la relación entre esos dos segmentos y él responde: "**Este segmento ¿cómo es con respecto a este? Ah, ¿cómo le digo a eso?**" Después de que el estudiante había determinado la propiedad que cumplen los puntos de la circunferencia, se le dijo que explicara por qué la figura formada por un conjunto de mediatrices era otra circunferencia y él respondió: "**Ahí sí me corchó.**" En la cuarta pregunta relacionada con la suma de los segmentos, después de dialogar con el estudiante, él confirma: "**OM más… ya me enredé…**" En fin, el estudiante, en muchos momentos de la entrevista, necesitó de mi ayuda y de ciertas preguntas intencionadas para poder salir de sus dificultades conceptuales.

El paso por los tres momentos: En algunas momentos de la entrevista, Jhon pasó por tres momentos: creer saber la respuesta, darse cuenta que no sabía y por último, al estar en un conflicto interno sintió la necesidad de encontrar la verdad. Por ejemplo, cuando se le preguntó por primera vez por la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$, el estudiante respondió que la suma era una r también, que no necesariamente igual a la r del radio. Creyó saber la respuesta. Posteriormente, se le pidió que lo explicara y se dio cuenta que no sabía la respuesta y que estaba enredado. Luego, se le hicieron varias preguntas intencionadas sobre la figura y se le preguntó nuevamente sobre la suma. Él seguía empeñado en que la suma daba r u otro número. Después de un extenso diálogo sobre la figura, pudo visualizar y explicar que la suma era r. Sin embargo, el estudiante llegó a esa conclusión inducido por las preguntas.

La red de relaciones: Jhon pudo involucrar en su red de relaciones, algunos conceptos como el de mediatriz y circunferencia. Sin embargo, tuvo dificultades con los conceptos de equidistancia y lugar geométrico. Además, se le dificultó enormemente visualizar la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$, que era el radio de la circunferencia. Él, de forma muy insegura e inducido por las preguntas, pudo determinar que los puntos de la elipse cumplían una suma determinada… Pero, dudamos mucho de estas relaciones, pues en todo momento mostró su incomprensión frente a la famosa suma. Si el estudiante no lograba establecerla, no era posible que avanzara al nivel III de razonamiento.

Dificultades.

Durante el proceso de la entrevista, el estudiante tuvo algunos momentos de motivación, pues sabía las respuestas de las preguntas; pero también, tuvo muchos momentos de confusión, dado que se le dificultaba responder o reflexionaba sobre sus carencias; tuvo momentos en los que lanzó afirmaciones erróneas, por ejemplo, dijo que: "un punto es la mitad de una recta horizontal y de una vertical; que una recta es una línea paralela…; que un plano es la unión de varias rectas; dos puntos determinan tres segmentos; es una circunferencia porque es una circunferencia que se limita con la otra; la suma de $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ sería un resultado diferente de r", entre otras afirmaciones. El estudiante no sólo tuvo problemas con algunos conceptos geométricos, sino algunas dificultades con el lenguaje y con su memoria. Se le dificultó memorizar el concepto de equidistancia y tuvo dificultad para visualizar una suma de segmentos. Se enfrentó a muchos conflictos internos, porque se confundía, se enredaba o no tenía claros algunos conceptos.

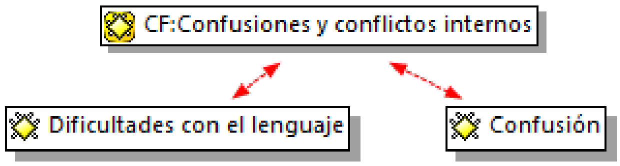


Figura 113: Confusiones y conflictos internos en el proceso de Jhon.

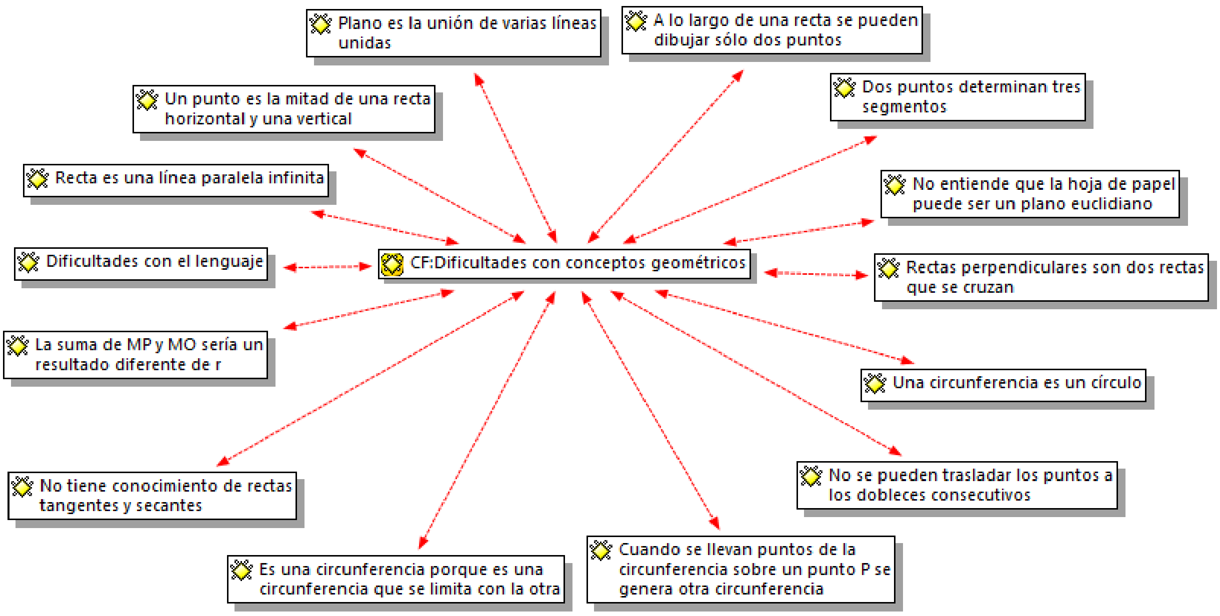


Figura 114: Dificultades con conceptos geométricos en el proceso de Jhon

4.4.4.4 Análisis del proceso de razonamiento de Laura.

La estudiante, cuyo seudónimo es Laura, es del grado décimo de una Institución Educativa, de carácter público, de la ciudad de Medellín. Fue invitada a participar del trabajo, por su agrado por el doblado de papel. Ella se caracteriza por ser una estudiante juiciosa y por participar activamente en las actividades que se programan en las diferentes asignaturas. Es una niña que tiene buenas habilidades comunicativas.

Análisis individual del proceso de comprensión: Triangulación entre encuesta, entrevista individual y material.

Cuando Laura fue invitada a participar del trabajo de investigación, se le propuso que respondiera una encuesta para conocer a fondo los conocimientos previos que tenía sobre la geometría euclidiana. Laura también participó en una entrevista individual, de carácter socrático, que tenía que ver con la manifestación del concepto de elipse como lugar geométrico.

De las entrevistas grupales surgieron algunos materiales, hechos por Laura, que se involucraron dentro del análisis individual de su proceso de comprensión. A continuación, mostramos algunos:

Figura 115: Material de Laura 1.

Figura 116: Material de Laura 2.

Figura 117: Material de Laura 3.

Figura 118: Material de Laura 4.

Figura 119: Material de Laura 5.

Por lo tanto, para realizar el análisis individual del proceso de comprensión de Laura, se tuvo en cuenta tres fuentes de información: las respuestas escritas de la encuesta, la elaboración de sus materiales de apoyo y las respuestas verbales brindadas en el transcurso de la entrevista individual.

Paso de Laura por los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Nivel predescriptivo.

0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: "Por dos puntos pasa una única recta".

Cuando a Laura se le preguntó por primera vez cuántas rectas pasaban por dos puntos, ella respondió inmediatamente que muchas rectas. Sin embargo, después de algunas preguntas inquisitivas, pudo determinar que por dos puntos pasa una recta. Además, también pudo establecer que por dos puntos pasa un único doblez.

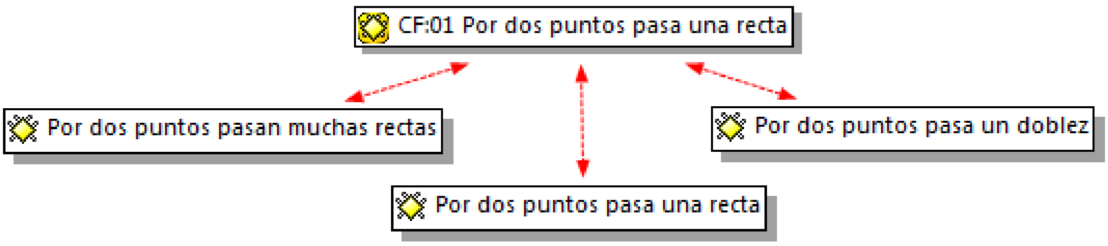


Figura 120: Descriptor 0.1 para Laura.

0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, tangente, entre otras.

Laura tiene algunas dificultades con los conceptos primitivos punto, recta y plano, pues los considera como objetos concretos. Por ejemplo, afirma que un punto "es donde inicia algo y donde termina". Dice que una recta es "una línea derecha" y un plano lo relaciona con un plano cartesiano, con un plano de arquitectura o con una superficie plana. Ella todavía no logra percibir que estos conceptos primitivos son ideas o abstracciones.

Laura logra establecer, después de un diálogo inquisitivo, que por dos puntos pasa una única recta (o un único doblez). Además, establece que por un punto pueden pasar muchas rectas (o muchos dobleces). Laura presenta algunas deficiencias para establecer la igualdad entre dos segmentos y por eso, se hace necesario estimular su razonamiento para que pueda superarlas. En el transcurso de la entrevista, se le aportó información sobre el concepto de equidistancia y le dio cierta dificultad aprender a utilizar la palabra, pues se le olvidaba con frecuencia. Sin embargo, demostró que la había comprendido, pues realmente la incorporó en su red de relaciones.

Para Laura, no es muy común hablar de perpendicularidad. Cuando se le preguntó por primera vez por rectas perpendiculares, dijo que "son aquellas que por más que se extiendan nunca se van a cruzar". Las confundió con rectas paralelas. Después de un diálogo inquisitivo, ella pudo establecer que dos rectas son perpendiculares si al cruzarse forman ángulos de 90°. Ella también desconoce los conceptos de rectas tangentes y de rectas secantes.

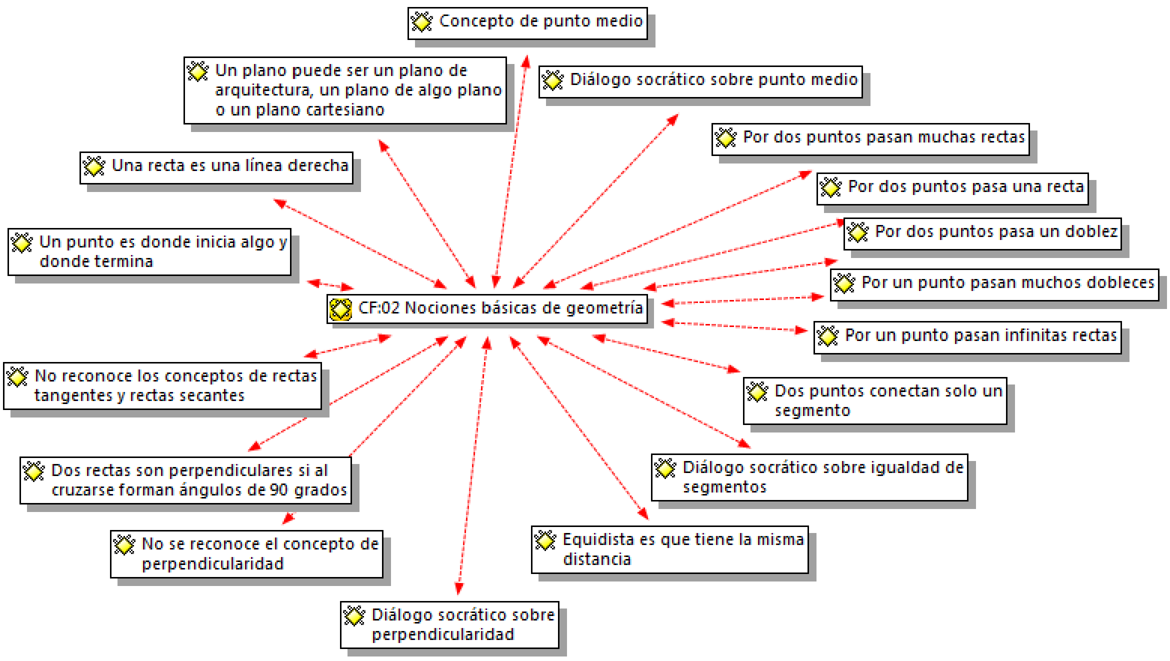


Figura 121: Descriptor 0.2 para Laura.

0.3 El estudiante relaciona un doblez con un segmento de línea recta.

Laura, después de un diálogo inquisitivo, logró establecer que un segmento de recta se relaciona con un doblez. Incluso, pudo determinar que por dos puntos pasa una recta y por dos puntos pasa un doblez, estableciendo finalmente la analogía entre recta y doblez

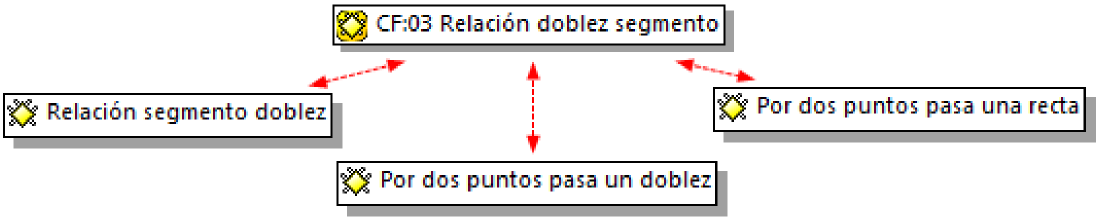


Figura 122: Descriptor 0.3 para Laura.

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.

A Laura le dio un poco de dificultad determinar la igualdad de dos segmentos mediante el doblado, pues no lograba visualizarla. Luego, en el transcurso de la entrevista, ella pudo establecer la igualdad entre dos segmentos. Por ejemplo, pudo establecer que si R es el punto medio del segmento $\overline{NP}$ entonces las medidas de los segmentos $\overline{RN}$ y $\overline{RP}$ son iguales. Además también pudo determinar que los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ tienen la misma medida.

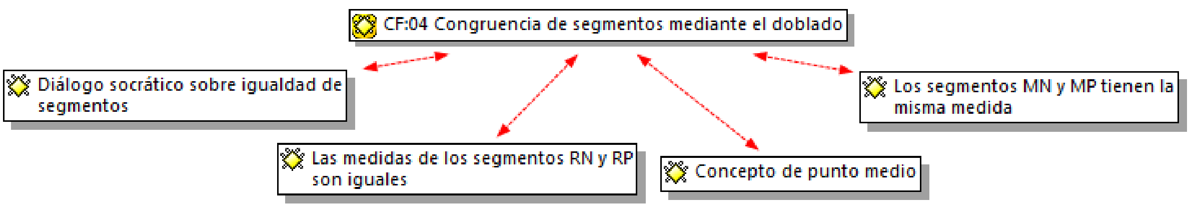


Figura 123: Descriptor 0.4 para Laura.

0.5 Construye rectas perpendiculares.

En la encuesta, Laura manifestó que dos rectas eran perpendiculares si no se cruzaban por más que se extendieran. Ella no reconocía el concepto de perpendicularidad. Sin embargo, después de ciertos aportes de información y del diálogo inquisitivo, pudo afirmar que dos rectas son perpendiculares si al cruzarse forman ángulos de 90°.

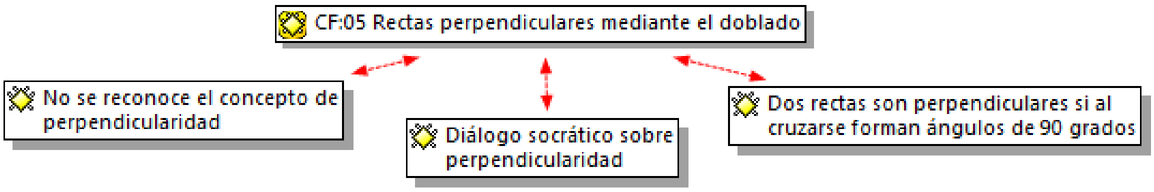


Figura 124: Descriptor 0.5 para Laura.

0.6 Visualiza la suma de segmentos.

Al principio, la joven pudo visualizar que de la suma de dos segmentos determinados $\overline{\text{NM}}$ y $\overline{\text{MO}}$ se obtuvo la constante r. Posteriormente, y con un poco de dificultad, ella pudo visualizar, con base en la información suministrada y mediante el diálogo inquisitivo, el resultado de la suma determinada de los segmentos $\overline{\text{MP}}$ y $\overline{\text{MO}}$.

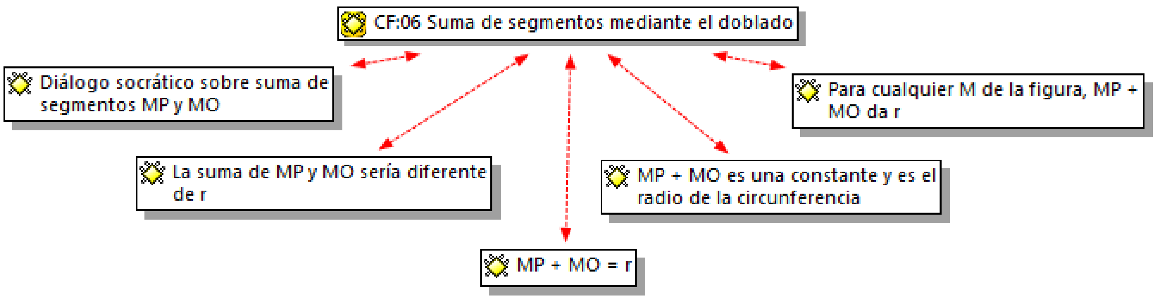


Figura 125: Descriptor 0.6 para Laura.

Nivel I: De reconocimiento visual.

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.

La estudiante logró encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel y, a su vez, con dicha construcción, pudo establecer la mediatriz de un segmento. Cuando se le preguntó por primera vez la relación entre el doblez realizado y el segmento, cuando se lleva un punto sobre otro, ella afirmó que se generaba un doblez que pasaba por el punto medio y no pudo visualizar la perpendicularidad. Posteriormente, con un aporte de información, ella pudo reconocer que la mediatriz es una recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

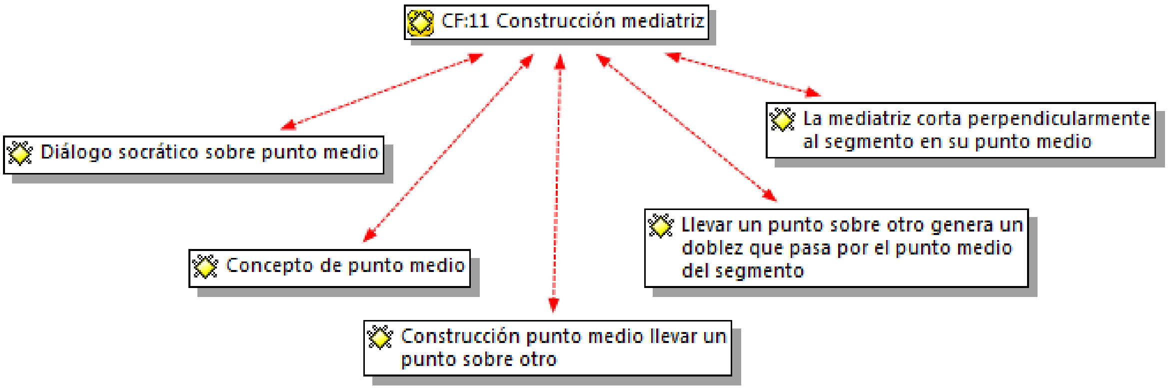


Figura 126: Descriptor 1.1 para Laura.

1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.

A Laura se le presentó cierta dificultad al realizar la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia, a través de un proceso de traslación de puntos, mediante el doblado de papel, dado que ella creía inicialmente que no era posible, porque los puntos no quedaban a la misma distancia del punto O. Posteriormente, ella pudo afirmar que se podían encontrar (trasladar) muchos más puntos, de manera infinita, de tal manera que estuvieran a la misma distancia del centro.

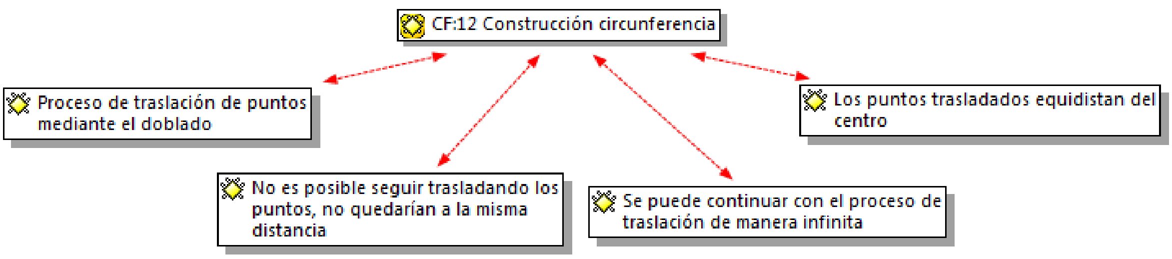


Figura 127: Descriptor 1.2 para Laura.

1.3 Realiza la construcción de una elipse.

Cuando a Laura se le presentó por primera vez la construcción de la elipse (aún no se le había nombrado la figura): se construyen dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que está en la región limitada por esta, dijo que no tenía la más mínima idea. Posteriormente, cuando se le mostró la figura formada, explicó que no era una circunferencia porque los puntos no tenían la misma distancia al centro, y afirmó que era un óvalo.

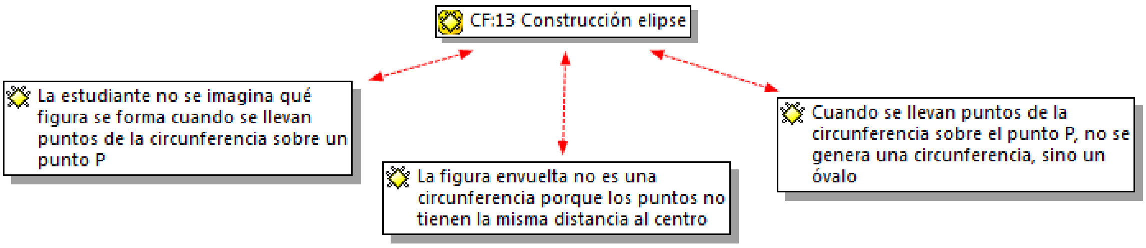


Figura 128: Descriptor 1.3 para Laura.

1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Laura no reconoció que el lugar geométrico construido, cuando se realizaron dobleces que surgieron de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que estaba en la región limitada por esta, era una elipse. Incluso, ella mencionó que la figura no era una circunferencia porque los puntos no tenían la misma distancia al centro y determinó que era un óvalo, sin mencionar sus propiedades.

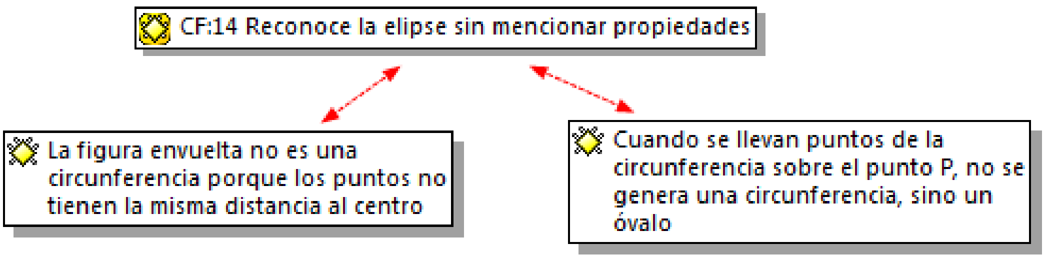


Figura 129: Descriptor 1.4 para Laura.

1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

Laura cuando observó la construcción de la elipse y visualizó la figura, afirmó que era un óvalo y se centró en su forma como un todo, pero no señaló partes constitutivas. Sólo argumentó que no era una circunferencia porque los puntos no estaban a la misma distancia del centro.

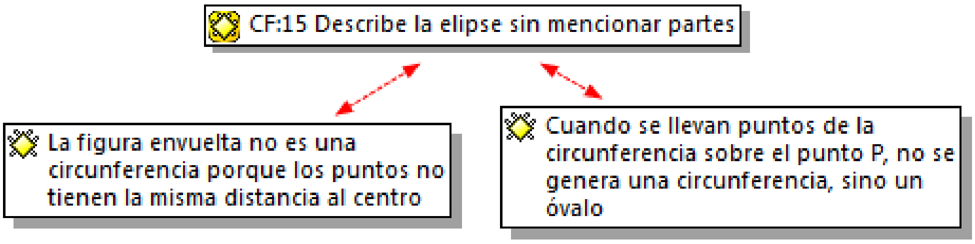


Figura 130: Descriptor 1.5 para Laura.

Nivel II: De análisis.

2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos. Laura logró establecer que si se pone un punto sobre otro punto, se construye un doblez que pasa por el punto medio del segmento determinado por estos puntos. Sin embargo, no logra percibir que el doblez y el segmento son perpendiculares. Posteriormente, logra determinar que si se lleva un punto sobre otro, se genera la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos. Ella continúa utilizando el concepto de mediatriz correctamente sin dificultades, en el transcurso de la entrevista.

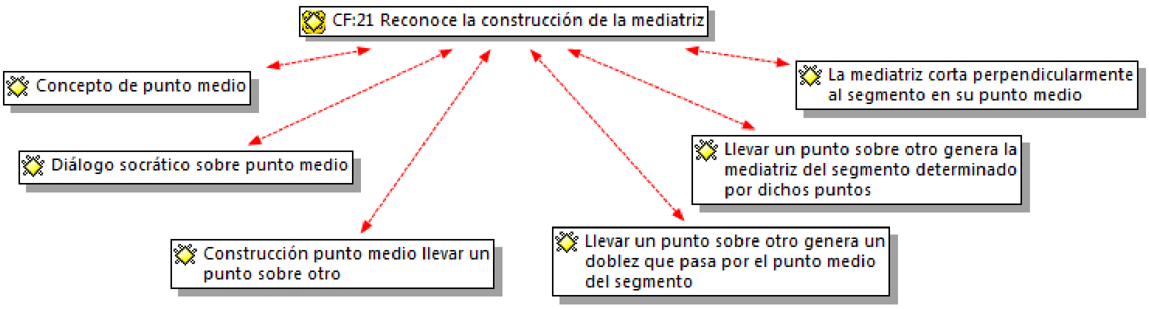


Figura 131: Descriptor 2.1 para Laura.

2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

Laura logró establecer que un punto sobre la mediatriz tiene la misma distancia a los extremos del segmento, y luego pudo generalizarlo para cualquier punto de la mediatriz. Posteriormente, ella logró afirmar que un punto sobre la mediatriz equidista de los extremos del segmento. Esta conclusión fue utilizada por la estudiante correctamente, cuando tuvo que justificar la igualdad de los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$. Con esto, estaba a un paso de decir que la mediatriz era un lugar geométrico, pero en este momento del proceso, aún no conocía el concepto de lugar geométrico.

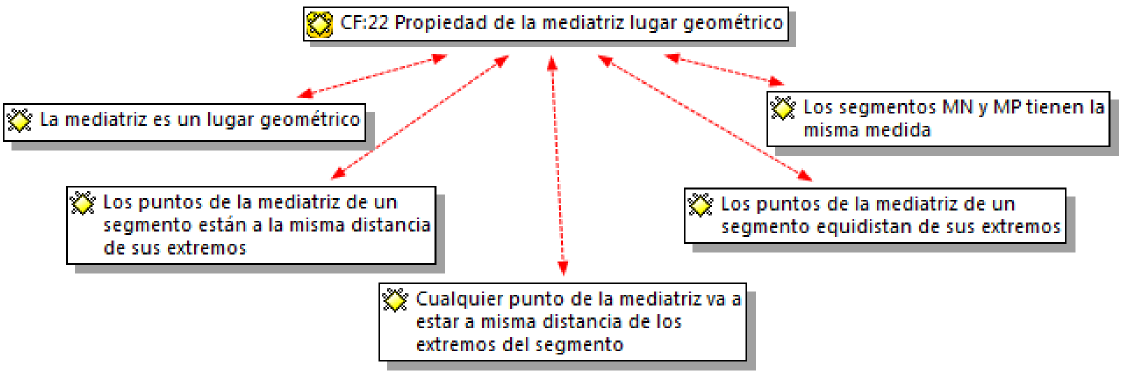


Figura 132: Descriptor 2.2 para Laura.

2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.

La estudiante afirmó, en la construcción de los puntos discretos de la circunferencia, que dichos puntos trasladados equidistan del centro. Luego, logró establecer que todos los puntos de una circunferencia estaban a una misma distancia del centro, es decir, equidistaban del centro. Esto es un gran avance para definir la circunferencia como lugar geométrico.

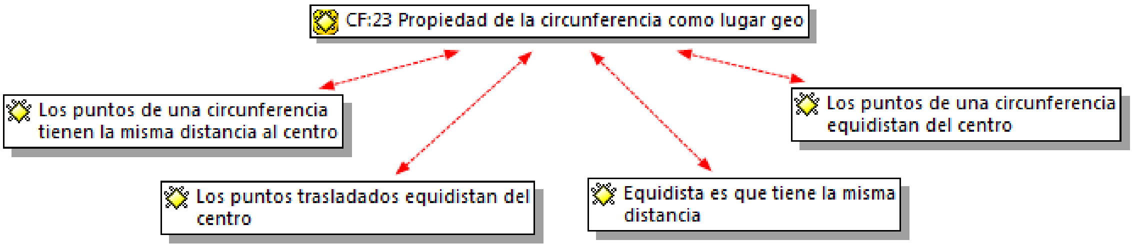


Figura 133: Descriptor 2.3 para Laura.

2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

Cuando a Laura se le presentó la construcción de una circunferencia envuelta por líneas rectas que resultan de hacer dobleces que surgían de llevar puntos de la circunferencia sobre su centro, no dudó en afirmar que era un círculo. Todavía presentaba dificultades en diferenciar círculo de circunferencia. Posteriormente, afirmó que era una circunferencia, pero también tuvo algunas dificultades para justificar tal afirmación. Mediante el diálogo inquisitivo, se logró que Laura pudiera determinar que era una circunferencia porque todos sus puntos equidistaban del centro y la distancia era la mitad del radio de la circunferencia con la que se inició la construcción. Ella, pudo llegar a esta conclusión, manifestando: "**Eso está muy teso**"…

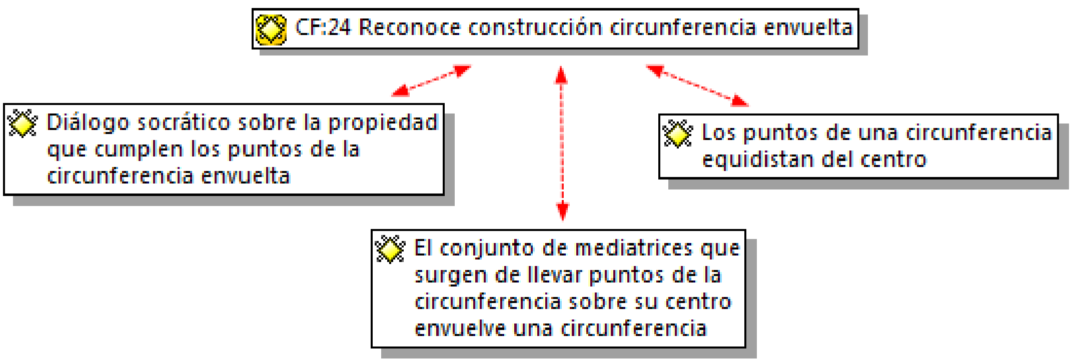


Figura 134: Descriptor 2.4 para Laura.

2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.

La joven establece que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico porque cualquier punto que pertenezca a ella, equidista de los extremos del segmento. Para el caso de la circunferencia, la estudiante logró afirmar que todos los puntos pertenecen a una circunferencia si equidistan del centro; sin embargo, no se le preguntó si era un lugar geométrico y ella tampoco lo determinó por sí sola.

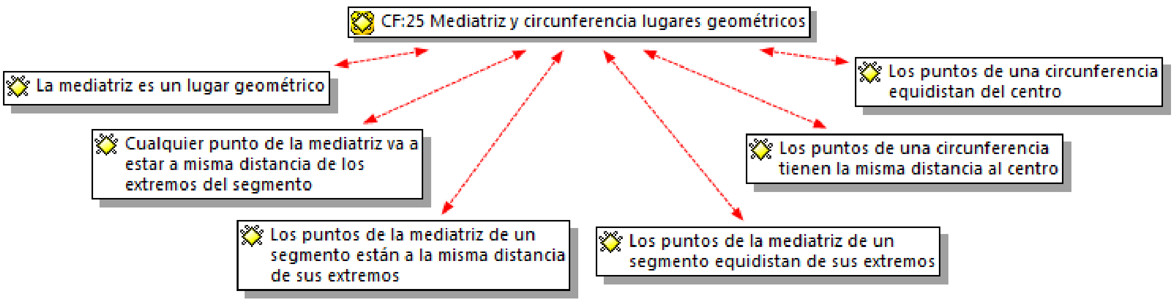


Figura 135: Descriptor 2.5 para Laura.

2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.

Cuando a Laura se le presenta la construcción de la elipse, mediante el doblado de papel, afirma que es un óvalo y no menciona propiedades ni partes constitutivas. Posteriormente, con base en preguntas intencionadas, la estudiante logra establecer que hay dos puntos fijos, pero no dice nada alrededor de estos puntos. Ella también visualiza que hay unos puntos, denominados M, que pertenecen al contorno de la figura.

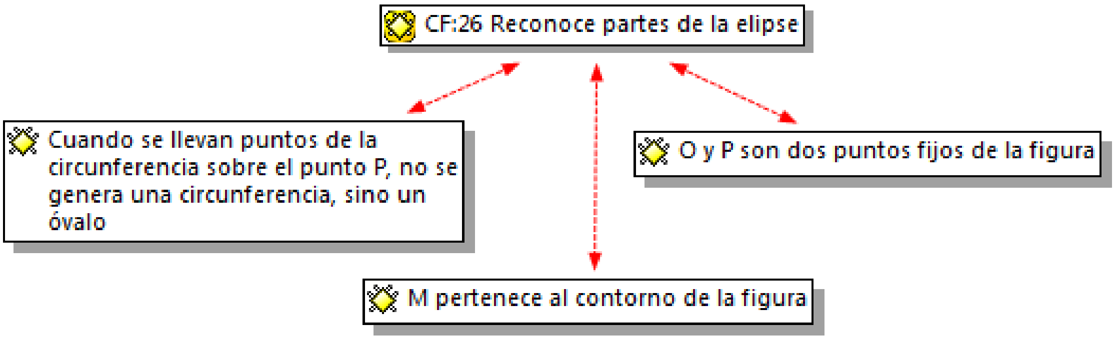


Figura 136: Descriptor 2.6 para Laura.

2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Cuando a Laura se le presentó la construcción de la elipse, ella se aventuró a decir que era un óvalo y no mencionó propiedades o partes constitutivas. Sólo afirmó que no era una circunferencia porque los puntos no tenían la misma distancia al centro. En el transcurso de la entrevista, ella logró establecer que si se ubica un punto P en cualquier parte de la región limitada por una circunferencia y se llevan los puntos de esta sobre el punto P, se formaría otra elipse.

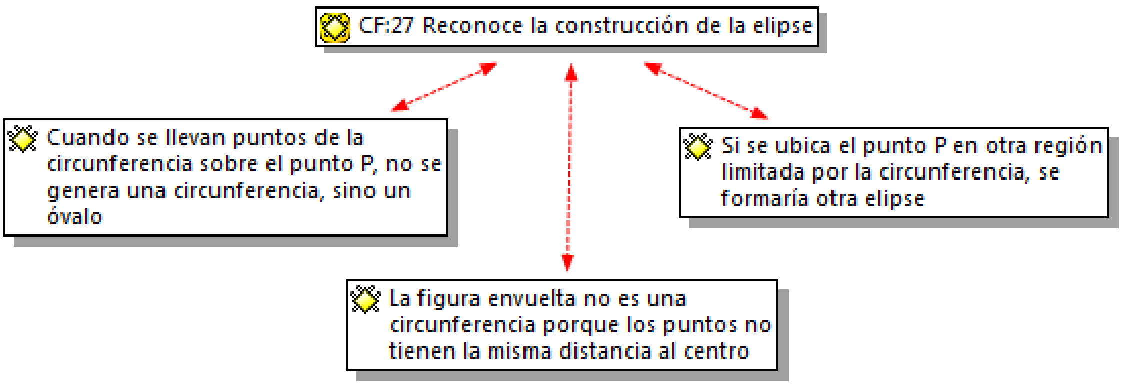


Figura 137: Descriptor 2.7 para Laura.

2.8 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

Cuando a Laura se le preguntó por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, afirmó que la suma era r porque era el dato que le habían dado, además lo dijo de manera intuitiva, dado que no había logrado visualizar este hecho. Luego, dijo que era un valor diferente de r, y tampoco pudo justificar tal afirmación. Ella presentó dificultad en concluir que esta suma era realmente r, pues no había logrado realizar una transitividad entre dos segmentos de la misma medida. Después de diálogo inquisitivo y con aportes de información, Laura logra establecer que la suma de dos segmentos determinados $\left(\overline{MP}+\overline{MO}\right)$ es una constante y es igual al radio de la circunferencia. Incluso, logra establecerlo para varios puntos M del contorno de la figura.

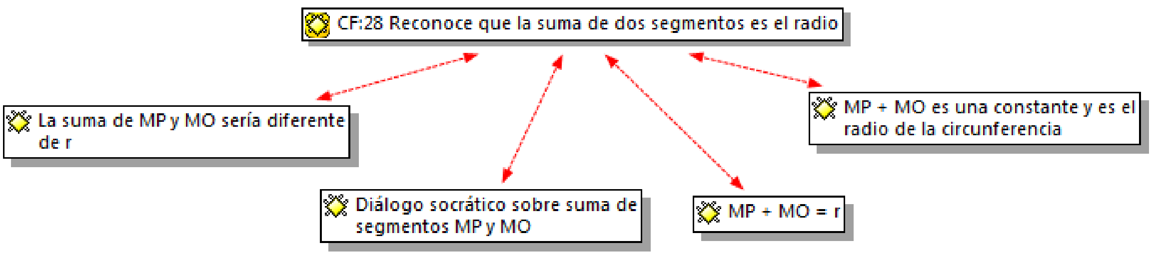


Figura 138: Descriptor 2.8 para Laura.

Nivel III: De clasificación.

3.1 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

En el transcurso final de la entrevista individual, la estudiante logra establecer, utilizando el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ "**si M está dentro de la figura nos dará r**". Ella afirma que: "**la suma de MP y de MO da r**" para un punto M de la figura. Por lo tanto, logra concluir que para cualquier punto M de la figura, $\overline{MP}+\overline{MO}$ es r, el radio de la circunferencia y que es una constante.

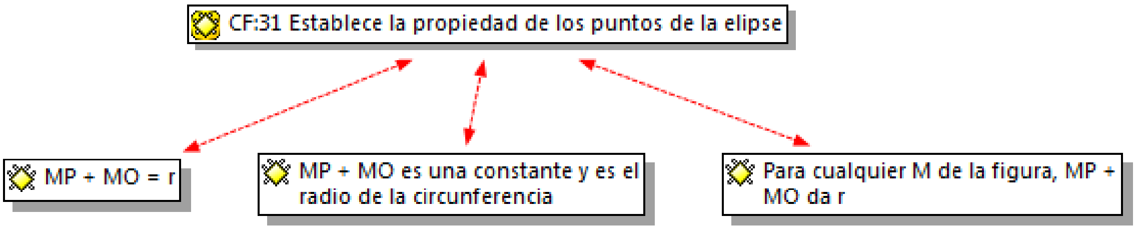


Figura 139: Descriptor 3.1 para Laura.

3.2 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Laura manifiesta la necesidad de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico. Ella afirma que la elipse es un lugar geométrico porque cumple una propiedad y lo dice inocentemente "**elipse, la r de la elipse…**", es decir, ella afirma que la suma de "**M y a O y a M y a P, queda r**" y concluye diciendo que "**una suma que da r y r es una constante**", lo cual muestra que ha comprendido el concepto de elipse como lugar geométrico.

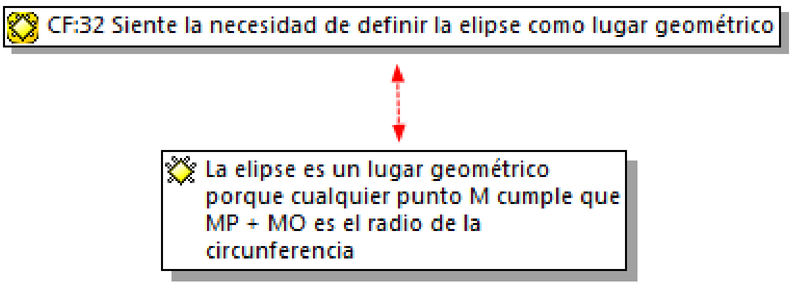


Figura 140: Descriptor 3.2 para Laura.

Con base en el análisis anterior, podemos ubicar finalmente a Laura en el nivel III de razonamiento, pues ella comprendió el concepto de elipse como lugar geométrico. La entrevista individual no solamente sirvió para ubicarla en uno de los niveles de razonamiento, sino que le permitió lograr un avanzado nivel de razonamiento.

Propiedades de los niveles de razonamiento.

Propiedad 1: Secuencialidad fija. Laura, en el transcurso de la entrevista, fue avanzando en su nivel de razonamiento hasta llegar al nivel III de clasificación, pero siempre superando las características, habilidades y conocimientos del nivel anterior. Ella primero tuvo que reconocer que la mediatriz es un lugar geométrico, posteriormente reconoció la propiedad que cumplen los puntos de una circunferencia para pertenecer a ella y finalmente, pudo determinar que la elipse también era un lugar geométrico y logró establecer la propiedad que cumplían los puntos para pertenecer a esta.

Propiedad 2: Adyacencia. Laura lograba percibir ciertas relaciones en el nivel anterior, pero aún no se habían convertido en objeto de pensamiento, hasta no lograr el nivel inmediatamente superior. Por ejemplo, ella en el nivel I pudo establecer que la mediatriz de un segmento es una perpendicular que pasa por su punto medio. Sin embargo, todavía no había determinado la propiedad que cumple un conjunto de puntos para pertenecer a ella, que es una habilidad que se logra en el nivel II. En el caso de la circunferencia, sucedió una situación similar. La estudiante pudo establecer en el nivel I la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia, dado que en el proceso de traslación, debía garantizar la misma distancia al punto O. Luego, en el nivel II, ella logra establecer que los puntos de una circunferencia equidistaban del centro.

Propiedad 3: Distinción. Laura tuvo que reorganizar sus ideas y refinar su lenguaje a medida que iba avanzando en su nivel de razonamiento. Por ejemplo, en el nivel I ella sabía que la mediatriz era una perpendicular que pasaba por el punto medio de un segmento. En el nivel II, debía reorganizar sus ideas, pues debía establecer que la mediatriz de un segmento era un lugar geométrico, porque los puntos que pertenecen a ella cumplen la propiedad de que equidistan de los extremos del segmento. Así mismo sucedió con la elipse: en el nivel I, ella estableció que la figura formada por el conjunto de mediatrices, era un óvalo; en el nivel II, logró una suma de segmentos determinados en la figura y en el nivel III, logró generalizar esta propiedad para todos los puntos de la elipse.

Propiedad 4: Separación. Laura pudo llegar en su proceso de razonamiento al nivel III de clasificación. Jhon, por ejemplo, pudo llegar al nivel II, de análisis. Estas dos personas, probablemente no podrán entenderse si establecen un diálogo alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, porque ella logró involucrarlo en su red de relaciones, mientras que Jhon no lo pudo lograr.

Propiedad 5: Lenguaje. A medida que Laura avanzaba en su nivel de razonamiento, su lenguaje se volvía más refinado y podía involucrar conceptos que había comprendido en preguntas anteriores, porque había logrado extender o modificar su red de relaciones. Ella iba utilizando los conceptos de mediatriz, circunferencia, equidistancia, lugar geométrico y elipse a medida que los iba relacionando y anexando en su red.

Propiedad 6: Consecución. Laura fue logrando de forma gradual el nivel III, superando lentamente los procesos, habilidades, características y conocimientos del nivel II. Ella por ejemplo, logró comprender el concepto de perpendicularidad, que es una característica del nivel 0. Luego, comprendió el concepto de mediatriz como perpendicular, que es una característica del nivel I. Posteriormente, logró comprender el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que es una característica del nivel II y finalmente, logró comprender el concepto de elipse, con base en el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que es una característica del nivel III. Este proceso de evolución del razonamiento de Laura fue pausado y progresivo.

Diálogo socrático. Características de la entrevista individual de Laura.

Nuestras entrevistas grupales e individuales tuvieron un tinte de carácter socrático. Es decir, tenían ciertas características que las hacían diferentes, únicas y especiales. Estas características (Jurado y Londoño, 2007) son:

Intencionalidad de la entrevista: La intención de nuestra entrevista individual, en el caso de Laura, se cumplió, dado que nos permitió, a nosotros como investigadores, ubicarla en el nivel III de razonamiento después de un extensivo análisis de su proceso de comprensión y le permitió, a ella, comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Por lo tanto, la intencionalidad de nuestra entrevista es doble: nos permite caracterizar el proceso de comprensión de un estudiante y, a la vez, se convierte en una experiencia de aprendizaje para el estudiante, que le permite avanzar en su nivel de razonamiento, con respecto al concepto objeto de estudio.

El lenguaje: La forma cómo se expresaba Laura, sus gestos, el uso del nuevo vocabulario, fueron factores determinantes para caracterizar su proceso de comprensión. A medida que ella avanzaba en su nivel, iba refinando su vocabulario, utilizaba con más confianza los conceptos que se habían trabajado anteriormente y su lenguaje era más preciso y de carácter matemático.

Los conceptos básicos: Las primeras preguntas de nuestra entrevista se relacionaban con los conceptos básicos que necesitaban los estudiantes para avanzar en su nivel de comprensión, es decir, para saber si el estudiante había superado el nivel 0. Laura, por ejemplo exhibió ciertas dificultades con algunos conceptos, que nos llevaron a suponer que no lo había superado, pero mediante el diálogo inquisitivo, ella logró superar este nivel predescriptivo. Por ejemplo, presentó algunas deficiencias con el concepto de rectas perpendiculares. Laura también mostró algunas dificultades con los conceptos primitivos punto, recta y plano, pero pensamos que no venía al caso, al inicio de la entrevista, insistir demasiado en estas ideas o abstracciones, porque en el transcurso de la prueba debería razonar sobre ellas.

Las experiencias previas del entrevistado: En todo momento de la entrevista individual, Laura trató de relacionar experiencias vividas en la entrevista grupal o en la clase de geometría, para poder responder las preguntas que se le hacían. Por ejemplo, cuando se le pidió que describiera la figura formada por el conjunto de mediatrices cuando se llevaban puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región determinada por esta, ella dijo que se le parecía a un óvalo, es decir, hizo una analogía con un figura conocida.

Diálogo inquisitivo: En todo momento de nuestra entrevista, hubo un diálogo entre entrevistador y entrevistado, con preguntas direccionadas que permitían que el estudiante llegara al conocimiento deseado. Por ejemplo, se logró que ciertos conceptos que ella no comprendía bien o que desconocía, los articulara a su red de relaciones: punto medio, igualdad de segmentos, equidistancia, perpendicularidad, propiedad de los puntos de la circunferencia envuelta, suma de dos segmentos determinados. Lo que le dio más dificultad, fue comprender la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, porque era necesario hacer una transitividad entre dos segmentos congruentes. Sin embargo, lo pudo lograr. También exhibió dificultad en justificar por qué la figura envuelta por el conjunto de mediatrices cuando se llevan puntos de la circunferencia sobre su centro, era una circunferencia concéntrica.

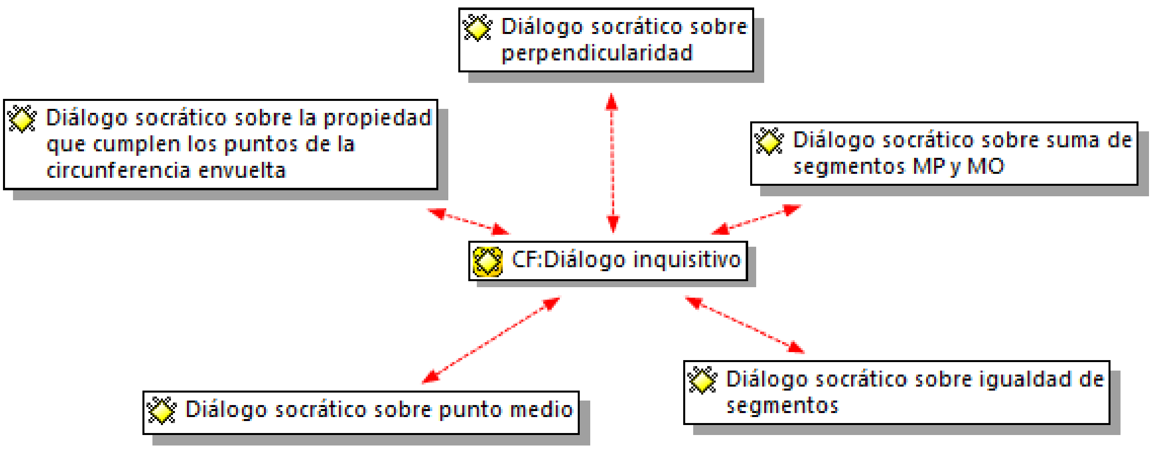


Figura 141: Diálogo inquisitivo para Laura.

Pensamiento discursivo: En la entrevista individual se presentaba una pregunta varias veces, para saber si el estudiante había logrado ampliar su red de relaciones, cuando daba respuestas más elaboradas. La primera vez que se le preguntó a Laura sobre la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, ella no entendía realmente lo que se le estaba preguntando y respondía al azar. Incluso, ella misma lo admitió diciendo "**no, no estoy segura, estoy adivinando**". Después de que ella pudo visualizar la suma y concluir que daba el radio en esta primera pregunta, se le hizo una pregunta similar en una situación diferente y ella lo vio con más claridad. De hecho, lo afirmó así: "**hay tan fácil no, y yo toda embolatada…**".

Aportes de información: Laura recibió aportes de información sobre mediatriz, equidistancia, lugar geométrico y elipse. Esta información era necesaria para que ella pudiera comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. En un momento dado, ella olvidó el concepto de equidistancia y se presentó la necesidad de estimular su razonamiento.

Problematización con las ideas: En muchos momentos de la entrevista, Laura se sintió realmente confundida. Por ejemplo, cuando se le preguntó ¿cuántos segmentos conectan los dos puntos marcados en la hoja de papel? Ella se confundió y respondió así: "**Un segmento conecta otro segmento. Pues se conecta un segmento, que se conecta… Huy no sé…**". Cuando se le pregunta sobre rectas perpendiculares, la estudiante no logra reconocer ángulos rectos y empieza a responder lo primero que se le viene a la cabeza: "**Yo digo que si, pues al cruzarse acá, ¿no? Ay no profe no sé, estoy adivinando.**" Cuando se le pregunta por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, ella responde en un momento del diálogo, que no entiende: "**r r, no sé profe, es que no entiendo, pues MP con MO son diferentes, eso es lo que me están preguntando…**". Laura manifiesta que no entiende y que se siente realmente confundida, luego mediante el diálogo inquisitivo, se logra que razone y pueda superar estas dificultades conceptuales.

El paso por los tres momentos: En varios momentos de la entrevista, Laura pasó por tres momentos: creer saber la respuesta, darse cuenta que no sabía la respuesta y mostrar la necesidad de encontrar la verdad. Por ejemplo, en la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$, ella respondió sin pensar que era r, pero no sabía explicar por qué; sólo lo asumió porque era el único dato que el problema brindaba. Posteriormente, ella se confundió tanto, que llegó a suponer que tal suma era un número diferente de r. En transcurso de la entrevista, ella logró determinar y explicar que la suma realmente era r.

La red de relaciones: Laura pudo ampliar su red de relaciones con respecto al concepto de elipse como lugar geométrico. Ella pudo articular los conceptos de lugar geométrico, mediatriz, circunferencia y elipse porque pudo comprenderlos realmente. Por ejemplo, cuando se le preguntó por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, ella recordó en un momento dado lo que tenía de la figura: "**Esto vale r, M con N y M con O, esta es la mediatriz que esta con el punto. El punto M está sobre la mediatriz, esto mide lo mismo, es la misma distancia, M con N y M con P, pero me están pidiendo cuanto suman M con P y M con O**". Al final de la entrevista, pudo concluir muy segura que: "**La suma de MP y de MO da r**".

Dificultades.

Durante el proceso de la entrevista, la estudiante se mostró motivada, pues comprendía bien las preguntas; también presentó momentos de confusión, dado que no tenía las respuestas o era consciente de sus carencias; hubo momentos en los que hizo manifestaciones erróneas de conceptos geométricos, por ejemplo, en algún momento de la entrevista dijo que un punto mide lo mismo que otro punto: "**M con O mide lo mismo**", o para hablar de equidistancia mencionó la palabra "**emperatriz**". La estudiante mostró algunas dificultades con los conceptos abstractos: punto, recta y plano, porque los concibe como objetos concretos. Cuando se le preguntó: por dos puntos, ¿cuántas rectas pasan? Ella respondió sin pensar que muchas rectas. Sin embargo, logró corregir su error. También, cuando se le preguntó por primera vez por rectas perpendiculares, las relacionó con rectas paralelas o con rectas con la misma medida. Posteriormente, logró establecer que dos rectas eran perpendiculares si al cruzarse formaban ángulos de 90°. Laura también tuvo dificultades cuando se le presentó por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, y después cuando la suma se hacía con segmentos solapados, porque, en ambos casos, llegaba a la conclusión de que la suma era un número diferente de r.

En general, Laura superó carencias conceptuales y logró comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

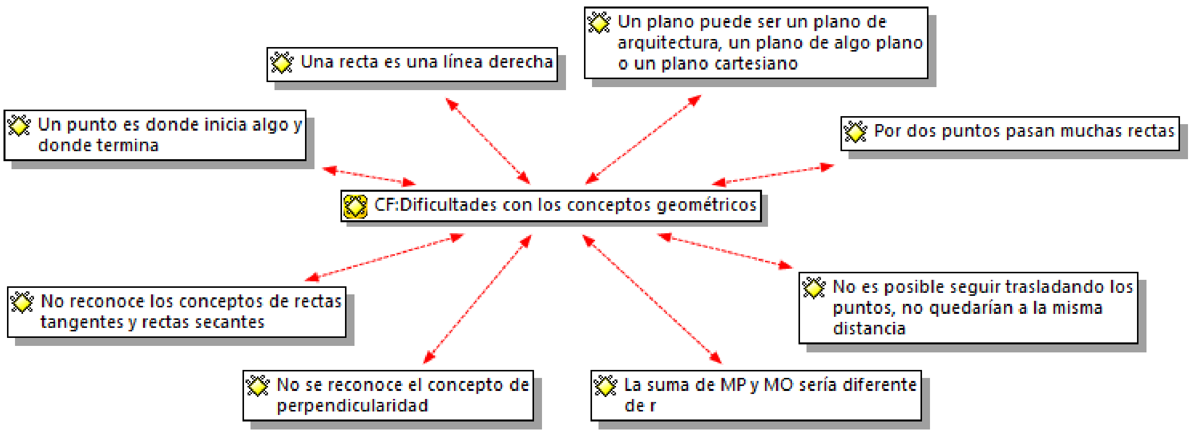


Figura 142: Dificultades en conceptos geométricos en el proceso de Laura.

4.4.4.5 Análisis del proceso de razonamiento de Carlos.

El estudiante, cuyo seudónimo es Carlos, es del grado décimo de una Institución Educativa, de carácter público, de la ciudad de Medellín. Fue invitado a participar del trabajo, por su motivación por el doblado de papel y por la responsabilidad que asumió cuando se realizó la actividad previa para elegir los estudiantes que iban a ser parte del estudio de casos. Se caracteriza por ser de pocas palabras, aunque posee ciertas habilidades comunicativas.

Análisis individual del proceso de comprensión: Triangulación entre encuesta, entrevista individual y material.

Cuando Carlos fue invitado a participar del trabajo de investigación, se le propuso que respondiera una encuesta para conocer a fondo los conocimientos previos que tenía sobre la geometría euclidiana.

A continuación, mostramos algunos materiales hechos por Carlos, los cuales involucramos dentro del análisis individual de su proceso de comprensión:

Figura 143: Material de Carlos 1.

Figura 144: Material de Carlos 2.

Figura 145: Material de Carlos 3.

Figura 146: Material de Carlos 4.

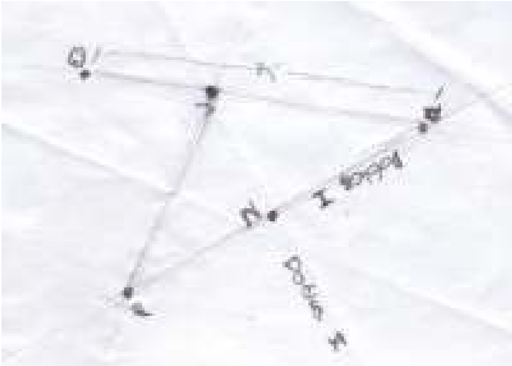


Figura 147: Material de Carlos 5.

Figura 148: Material de Carlos 6.

Por lo tanto, para realizar el análisis individual del proceso de comprensión de Carlos, se tuvo en cuenta tres fuentes de información: las respuestas escritas de la encuesta, la elaboración de sus materiales de apoyo y las respuestas verbales brindadas en el transcurso de la entrevista individual.

Paso de Carlos por los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Nivel predescriptivo.

0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: "Por dos puntos pasa una única recta".

Carlos, desde el principio (tanto en la encuesta, como en sus materiales y en la entrevista individual), reconoció que por dos puntos pasa una única recta. Además, encontró también que por dos puntos pasa un único doblez.

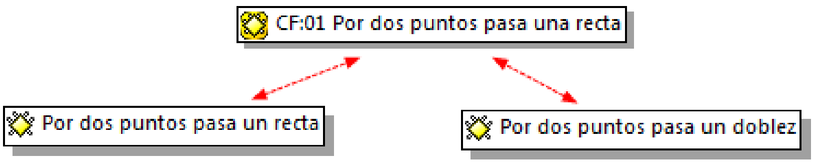


Figura 149: Descriptor 0.1 para Carlos.

0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, tangente, entre otras.

Para Carlos un punto es un objeto concreto, pues lo relaciona con "el final de algo"; de hecho, él afirma que un punto "señala algo o hace notar algo". Todavía se le dificulta verlo como una idea o abstracción. Además, él percibe una recta como "una línea con dos lados sin terminación". También, intenta establecer que una recta tiene longitud ilimitada, pero tiene dificultades cuando lo intenta expresar. Por otro lado, un plano lo relaciona con "un plano cartesiano o con una superficie donde se hacen figuras". También lo considera como un objeto concreto. Todavía no ha logrado ver los conceptos primitivos punto, recta y plano como entes abstractos.

Carlos pudo afirmar que por dos puntos pasa una única recta o un único doblez. Además, aseguró que por un punto pasan infinitas rectas o infinitos dobleces. Aunque no pudo determinar que en un doblez se pueden dibujar muchos puntos, dado que él estableció que sólo se podían dibujar dos. Ese proceso de razonamiento abstracto lo percibe en el transcurso de la entrevista.

Cuando a Carlos se le pregunta por primera vez por segmento, él no recuerda el concepto. Sin embargo, después de un par de preguntas inquisitivas, logra recordarlo para poder establecer que dos puntos en una hoja de papel conectan sólo un segmento, a pesar de que al principio había insinuado que tres segmentos podían conectar los dos puntos de la hoja.

Este estudiante presentó algunas dificultades al comprender el concepto de equidistancia y se dio la necesidad de establecer un diálogo de tipo socrático, con aportes de información y preguntas intencionadas, para que lo lograra interiorizar. También tuvo cierta dificultad en visualizar la igualdad de un par de segmentos mediante el doblado. Pero cuando lo pudo lograr, se notó que lo comprendió, pues en otro momento de la entrevista relacionó este procedimiento.

Cuando a Carlos se le preguntó por primera vez por rectas perpendiculares, afirmó que "eran líneas que se cruzan una encima de otra". Él no tiene claridad en el concepto de perpendicularidad. Sin embargo, en la entrevista individual logra establecer que dos rectas son perpendiculares si al cruzarse forman ángulos de 90°; además logra demostrar este hecho utilizando la comparación con una hoja de papel de forma cuadrada.

Carlos, inicialmente muestra algunas deficiencias en el concepto de circunferencia, dado que lo relaciona simplemente con "una forma circular". Pero, posteriormente, en la entrevista individual, logra determinar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a una circunferencia. Antes de pasar por las entrevistas grupales, Carlos desconocía los conceptos de rectas tangentes y de rectas secantes. Luego de pasar por ese proceso, pudo establecer cuándo una recta es tangente a una curva o cuándo es secante.

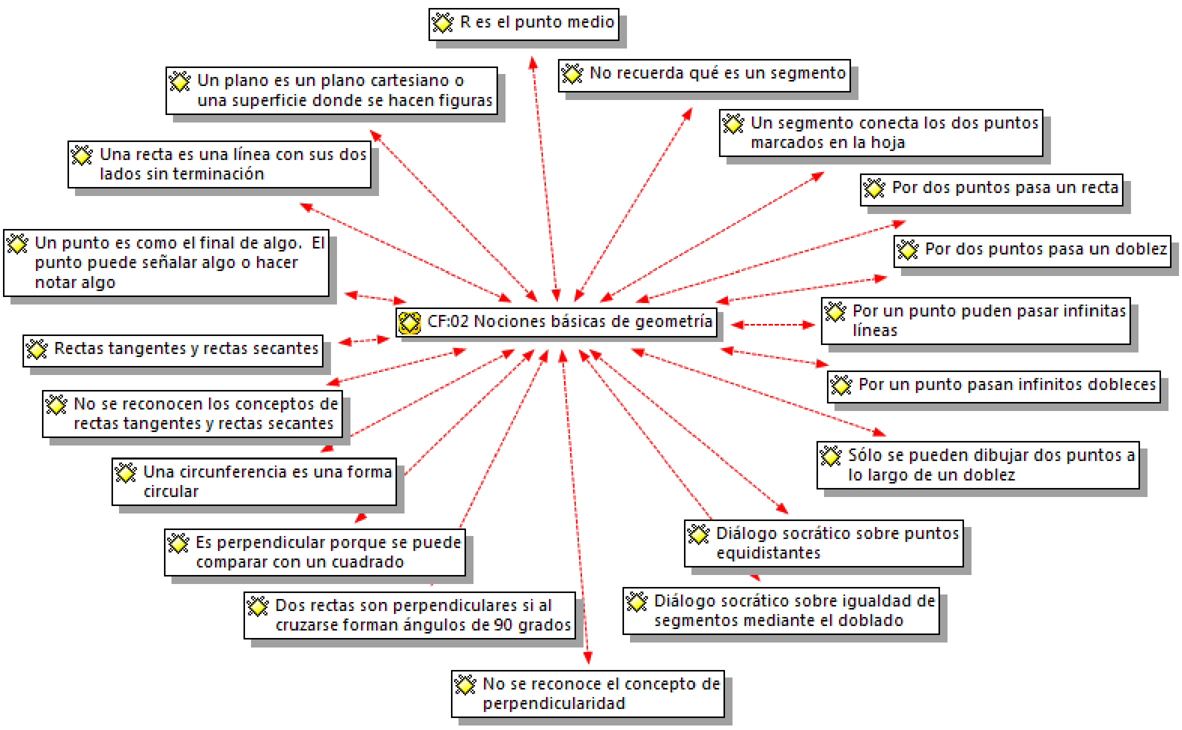


Figura 150: Descriptor 0.2 para Carlos.

0.3 El estudiante relaciona un doblez con un segmento de línea recta.

Carlos logró establecer que un segmento de recta se relaciona con un doblez, cuando afirmó que se puede encontrar un segmento de recta doblando la hoja en cualquier lugar. Incluso, pudo determinar que por dos puntos pasa una recta y por dos puntos pasa un doblez; o que por un punto pasan muchas rectas o muchos dobleces, estableciendo finalmente la analogía entre recta y doblez.

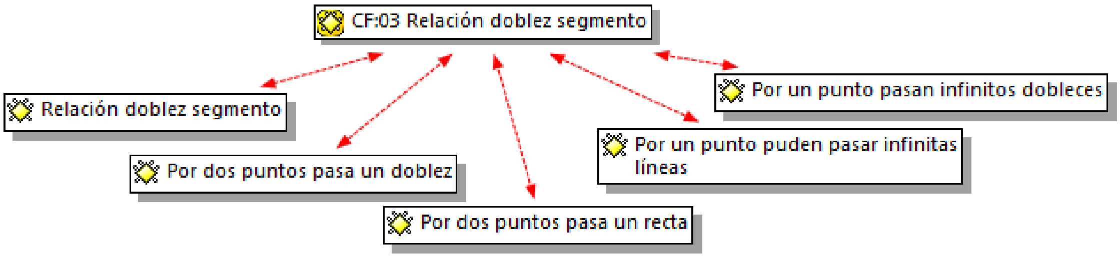


Figura 151: Descriptor 0.3 para Carlos.

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.

A Carlos le dio un poco de dificultad establecer la igualdad de dos segmentos mediante el doblado de papel. Sin embargo, después de unas preguntas inquisitivas, pudo visualizarla e, incluso, utilizarla posteriormente para responder otras preguntas de la entrevista individual. Cuando pudo determinar la forma de encontrar el punto medio de un segmento, logró inmediatamente establecer la igualdad de los dos segmentos mediante el doblado de papel y garantizar que R sí era el punto medio del segmento.

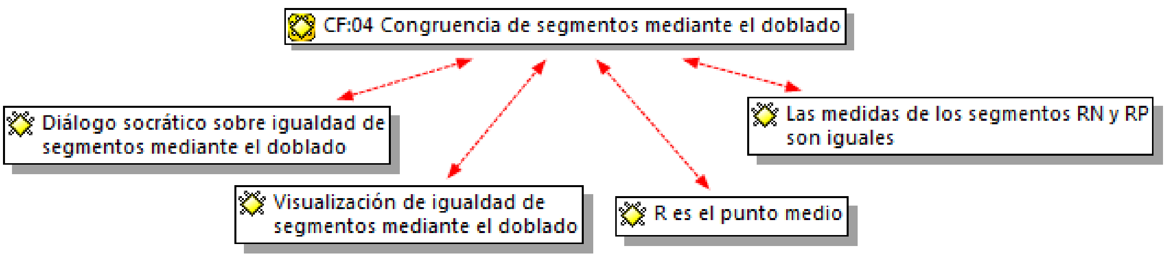


Figura 152: Descriptor 0.4 para Carlos.

0.5 Construye rectas perpendiculares.

Cuando se inició el trabajo con los estudiantes, Carlos tenía dificultades con el concepto de perpendicularidad. Pero, en una de las entrevistas grupales, él pudo encontrar la manera de construir rectas perpendiculares y mostrarlo mediante el mismo doblado. El estudiante, durante la entrevista individual, argumentó que dos dobleces son perpendiculares si forman ángulos de 90 grados y lo comprobó comparando con una hoja de papel de forma cuadrada. Carlos también pudo determinar que cuando se lleva un punto sobre otro, se genera un doblez perpendicular al segmento determinado por dichos puntos.

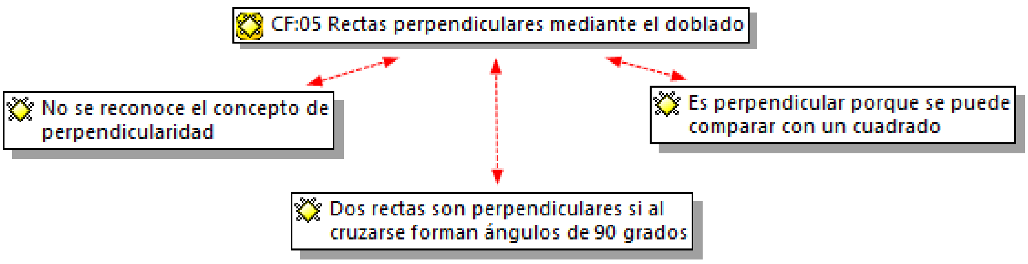


Figura 153: Descriptor 0.5 para Carlos.

0.6 Visualiza la suma de segmentos.

Carlos pudo percibir, mediante el doblado de papel, la suma de segmentos. Al principio, pudo visualizar que la suma de dos segmentos determinados $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$ daba la constante r. Posteriormente, pudo visualizar, con base en la información suministrada y en una conversación de carácter socrático, la suma determinada de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$. A pesar de que en algunos instantes se sintió realmente confundido y dijo que esta suma era diferente de r.

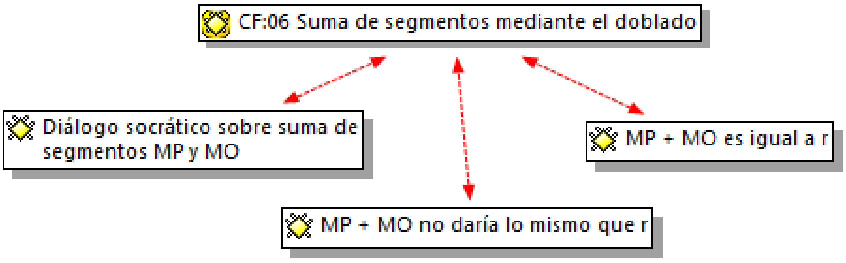


Figura 154: Descriptor 0.6 para Carlos.

Nivel I: De reconocimiento visual.

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.

El estudiante logró encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel, llevando un punto exactamente sobre el otro punto de un segmento y, a su vez, con dicha construcción, pudo establecer la mediatriz de un segmento. Él afirmó que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se genera un doblez que es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos y pasa por la mitad de este.

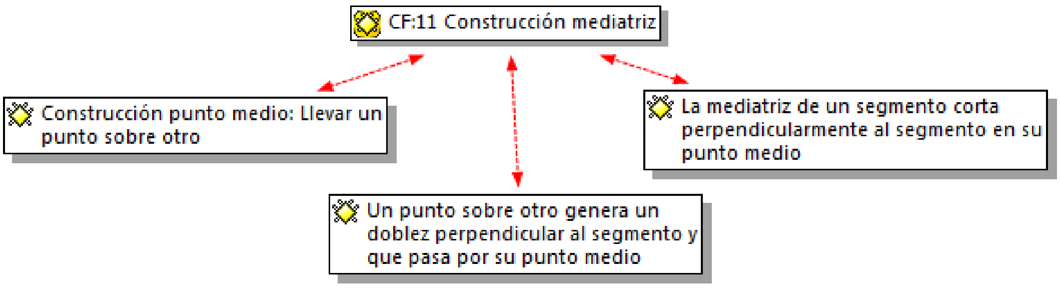


Figura 155: Descriptor 1.1 para Carlos.

1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.

Carlos realizó la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia, a través de un proceso de traslación de puntos, mediante el doblado de papel, con la única condición de que los puntos debían estar a la misma distancia del punto O. Él pudo afirmar que se podían encontrar (trasladar) muchos más puntos, hasta que la hoja de papel lo permitiera. Después de esto, pudo concluir que todos los puntos trasladados tenían igual distancia al punto O.

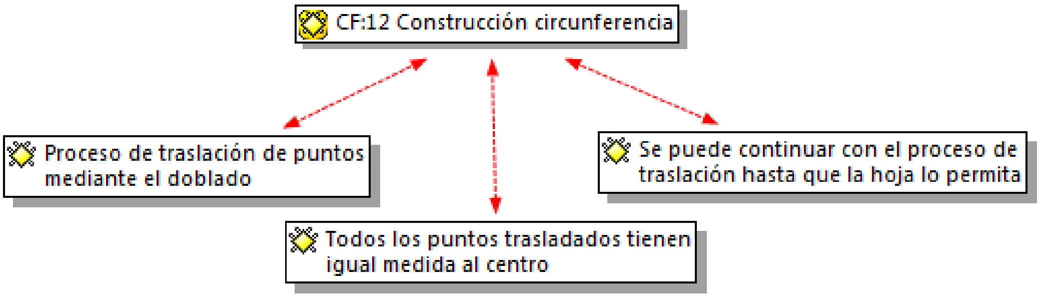


Figura 156: Descriptor 1.2 para Carlos.

1.3 Realiza la construcción de una elipse.

Cuando a Carlos se le presentó por primera vez la construcción de la elipse (aún no se le había nombrado la figura): “se construyen dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que está en la región limitada por esta”, creyó que se generaba una circunferencia. Posteriormente, cuando se le mostró la figura formada, continuaba con la idea de que podía ser una circunferencia, a pesar de ser una figura parecida a un huevo. En el transcurso de la entrevista, él pudo concluir que en realidad no era una circunferencia y lo expresó así: “**Pues no porque como se parece a un huevo y desde acá hasta acá no hay igual distancia que de ahí…**”

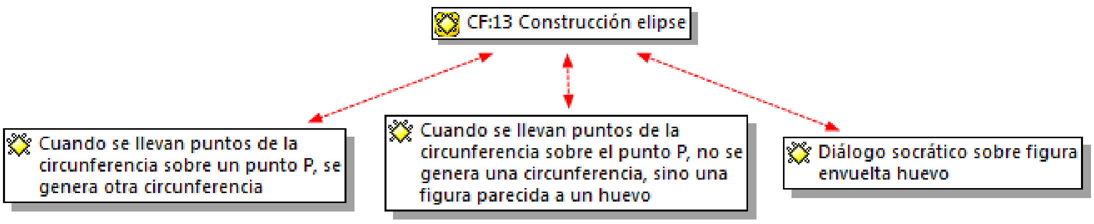


Figura 157: Descriptor 1.3 para Carlos.

1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Carlos no reconoció que el lugar geométrico construido, cuando se realizaron dobleces que surgieron de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que estaba en la región limitada por esta, era una elipse. Incluso, él mencionó, en primer lugar, que si se realizara la construcción surgiría una circunferencia y posteriormente, cuando se realizó la construcción, determinó que era una figura parecida a un huevo, que podría ser una circunferencia, pero no mencionó sus propiedades. Sólo, con base en un diálogo de tipo socrático, pudo establecer que no era una circunferencia.

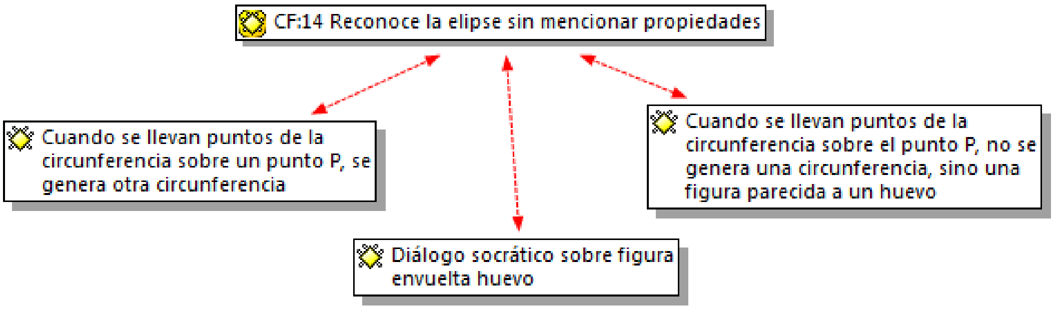


Figura 158: Descriptor 1.4 para Carlos.

1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

El estudiante mencionó que de realizarse la construcción de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región limitada por esta, se formaría otra circunferencia. Posteriormente, cuando se realizó la construcción y visualizó la figura, afirmó que era una figura parecida a un huevo y que podría ser una circunferencia. Poco después, pudo explicar que no era una circunferencia. Él se centró en su forma como un todo, pero no señaló partes constitutivas.

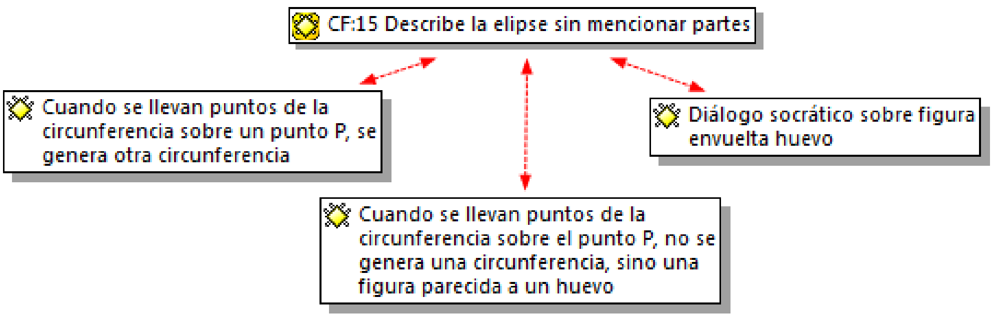


Figura 159: Descriptor 1.5 para Carlos.

Nivel II: De análisis.

2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

Carlos reconoce que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se realiza un doblez que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos. Cuando a Carlos se le dice que es la mediatriz, sigue utilizando el concepto, pero con ciertas dificultades, pues a veces cree que un punto M sobre la mediatriz, es la mediatriz. Posteriormente, él manifiesta que si se lleva un punto sobre otro, se construye la mediatriz del segmento.

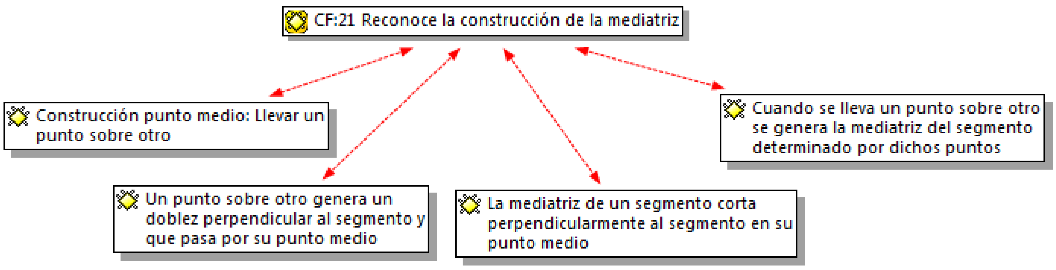


Figura 160: Descriptor 2.1 para Carlos.

2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

Carlos pudo establecer, con base en un diálogo socrático con aportes de información y preguntas inquisitivas, que un punto sobre la mediatriz tiene la misma distancia a los puntos N y P (extremos del segmento $\overline{NP}$). Posteriormente, él logró afirmar, mediante el diálogo inquisitivo, que un punto sobre la mediatriz equidista de estos dos puntos y luego, lo generalizó para cualquier punto de la mediatriz, demostrándolo con el mismo doblado "**porque con el doblado se dice que si es verdad, se demuestra que si es verdad…**". Con esto, estaba a un paso de decir que la mediatriz era un lugar geométrico, pero en este momento del proceso, aún no conocía el concepto de lugar geométrico.

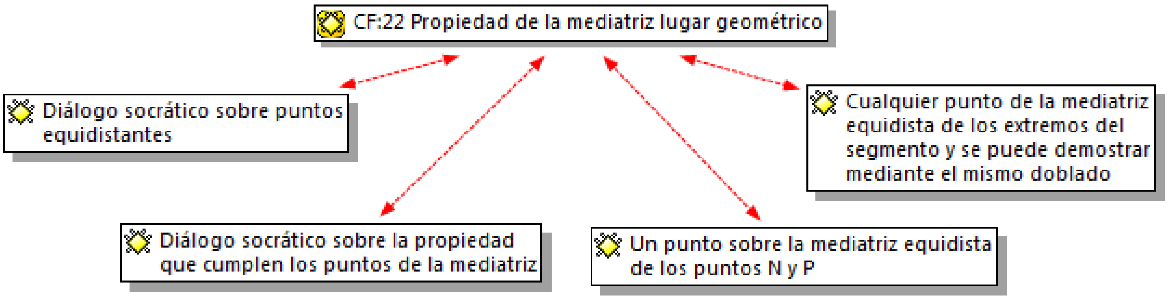


Figura 161: Descriptor 2.2 para Carlos.

2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.

En la construcción de los puntos discretos de la circunferencia, él afirma que dichos puntos trasladados tienen igual medida al centro. Luego, logró establecer que todos los puntos de una circunferencia estaban a una misma distancia del centro, es decir, equidistaban del centro. Esto es un gran avance para definir la circunferencia como lugar geométrico, pero no se le preguntó y él por sí solo, no logró determinarlo.

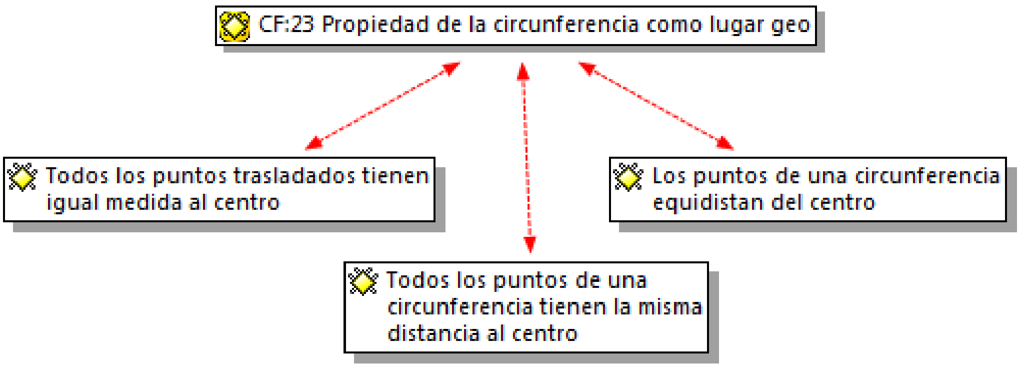


Figura 162: Descriptor 2.3 para Carlos.

2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

Cuando a Carlos se le presentó la construcción de una circunferencia envuelta que resulta de hacer dobleces que surgían de llevar puntos de la circunferencia sobre su centro, afirmó inicialmente que se formaba un octágono, pero posteriormente dijo que era una circunferencia. Sin embargo, tuvo algunas dificultades para justificar tal afirmación, dado el razonamiento abstracto necesario. Con base en ciertas preguntas intencionadas, se logró que Carlos pudiera determinar que era una circunferencia, porque todos sus puntos tenían la misma distancia al centro y la distancia era la mitad del radio de la circunferencia con la que se inició la construcción.

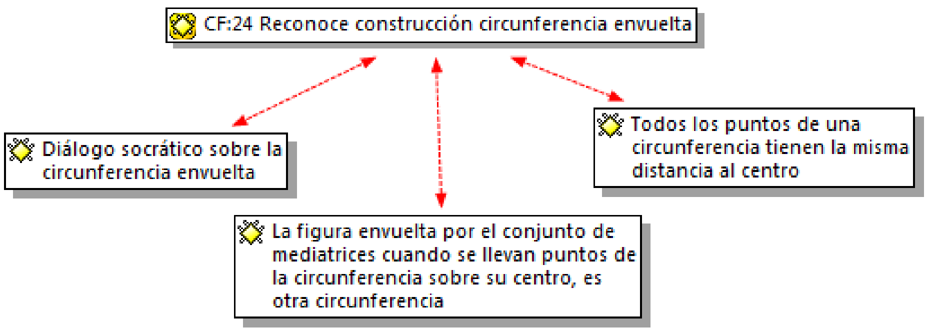


Figura 163: Descriptor 2.4 para Carlos.

2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.

Carlos estableció que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico porque cualquier punto que pertenezca a ella, equidista de los extremos del segmento y lo demostró mediante el mismo doblado. Para el caso de la circunferencia, él logró afirmar que todos los puntos pertenecen a una circunferencia si tienen la misma distancia al centro o equidistan del centro; sin embargo, no se le preguntó si era un lugar geométrico y él tampoco lo determinó por sí solo.

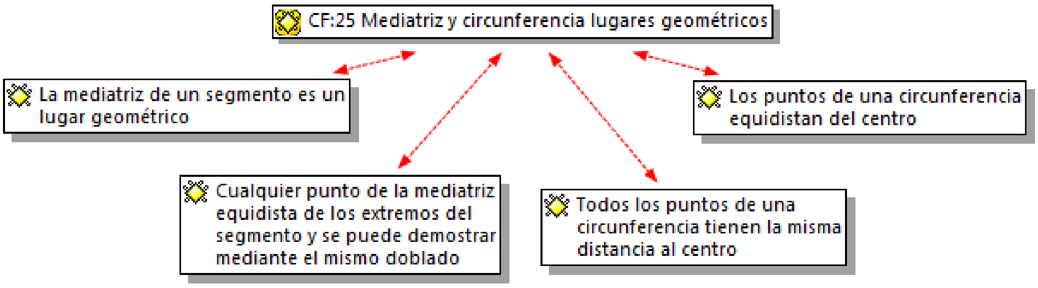


Figura 164: Descriptor 2.5 para Carlos.

2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia. Cuando a Carlos se le presenta la construcción de la elipse mediante el doblado de papel, afirma que es una figura parecida a un huevo y que tal vez podría ser una circunferencia, pero poco después pudo justificar que no era una circunferencia. Él, en este instante del proceso, no menciona propiedades (sólo por qué no es una circunferencia) ni partes constitutivas. Posteriormente, con base en preguntas intencionadas, logra establecer que hay dos puntos fijos, pero no menciona nada más acerca de estos. Él también visualiza que hay unos puntos, denominados M, que pertenecen al contorno de la figura. El estudiante no insinúa que la figura está formada por mediatrices.

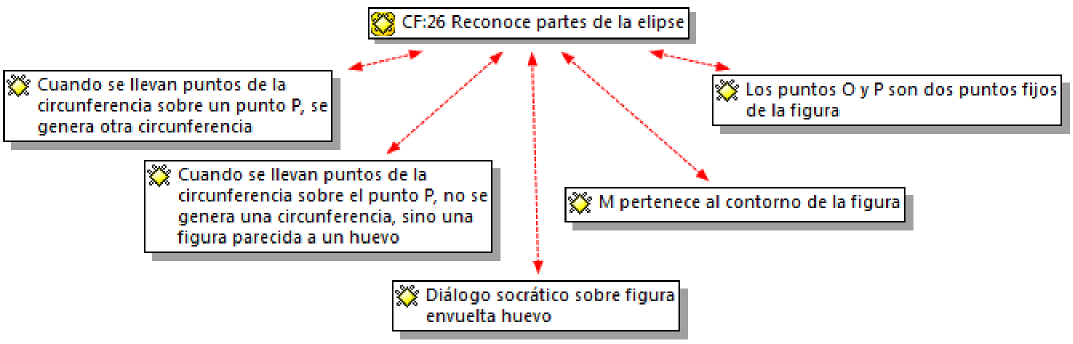


Figura 165: Descriptor 2.6 para Carlos.

2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Cuando a Carlos se le presentó la construcción de la elipse, él afirmó que era una figura parecida a un huevo y que tal vez podría ser una circunferencia, pero luego se retractó y explicó que no era una circunferencia. En su proceso de razonamiento, él no mencionó propiedades o partes constitutivas. Sin embargo, después de ciertos aportes de información y de responder varias preguntas intencionadas, él logró establecer que si se ubica un punto P en cualquier parte de la región limitada por una circunferencia y se llevan los puntos de esta sobre el punto P, se formaría otra elipse. Él finalmente, logra reconocer la construcción de una elipse mediante el doblado de papel.

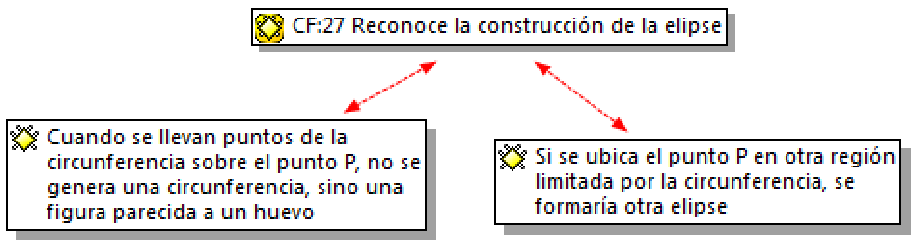


Figura 166: Descriptor 2.7 para Carlos.

2.8 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

Cuando a Carlos se le presenta por primera vez la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, en medio de su confusión, él dice que no daría lo mismo que r, sino que puede tener cualquier valor. En el transcurso de la entrevista, él logra establecer que la suma de dos segmentos determinados $\left(\overline{MP}+\overline{MO}\right)$ es igual al radio de la circunferencia. Incluso logra establecerlo para varios puntos M del contorno de la figura. Al principio, le dio un poco de dificultad, pues esta suma requiere que el estudiante reconozca la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y de un proceso de transitividad, el cual se logra en el transcurso del diálogo inquisitivo.

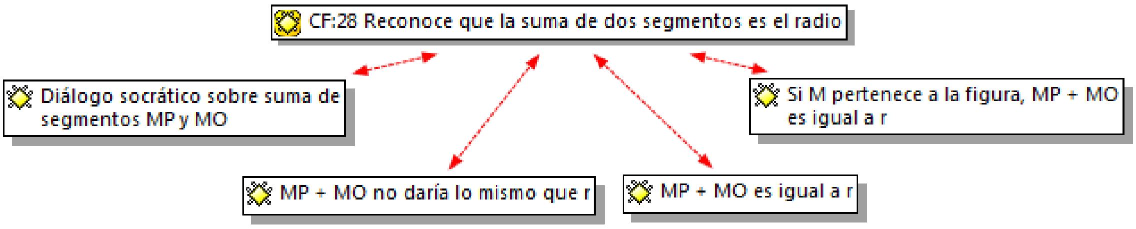


Figura 167: Descriptor 2.8 para Carlos.

Nivel III: De clasificación.

3.1 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

Llegando al final de la entrevista individual, el estudiante logra razonar, utilizando el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ es igual a r y lo afirma así: "**¿PM y MO? Lo que suman, MN y MO… r, ¿no?**". Posteriormente, él afirma que si M es un punto que pertenece a la figura, la suma de sus distancias a los puntos O y P da siempre: "**r**". Por lo tanto, logra concluir que para cualquier punto M de la figura, $\overline{MP} + \overline{MO}$ es r, el radio de la circunferencia y es una constante.

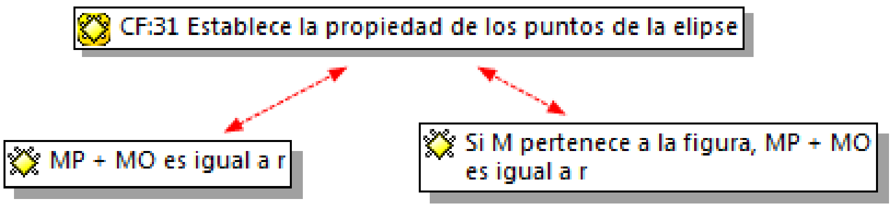


Figura 168: Descriptor 3.1 para Carlos.

3.2 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Carlos manifiesta la necesidad de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico. En este proceso, él afirma: "**Que por ejemplo si pasamos M acá…**

Que es igual a este y a este… Pues que debe sumar igual esto a esto… Debe sumar igual a… r". Carlos presenta algunas dificultades en su lenguaje, pero logra afirmar, mediante un diálogo socrático, que la elipse es un lugar geométrico "**Pues porque todas las medidas son iguales… MO + MP… De MO y MP todas son iguales… a r…**"

De acuerdo al diálogo inquisitivo en el transcurso de la entrevista, se puede afirmar que Carlos ha comprendido el concepto de elipse como lugar geométrico. Por lo tanto, podemos ubicar finalmente a Carlos en el nivel III de razonamiento.

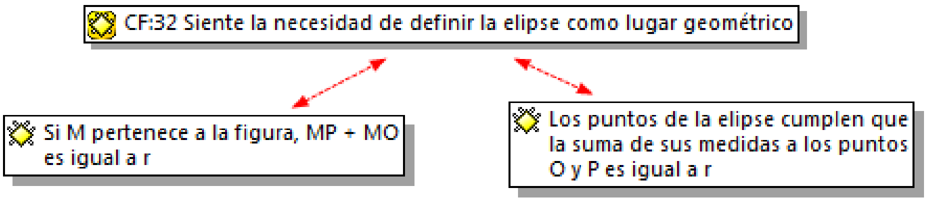


Figura 169: Descriptor 3.2 para Carlos.

La entrevista individual no solamente sirvió para ubicarlo en uno de los niveles de razonamiento, sino que le permitió avanzar en estos y lograr el nivel III, el cual es el más alto en nuestra caracterización de la comprensión.

Propiedades de los niveles de razonamiento.

Propiedad 1: Secuencialidad fija. Carlos fue avanzando en su nivel de razonamiento hasta llegar al nivel III de clasificación, logró superar las características, habilidades y conocimientos del nivel anterior, dado el razonamiento exhibido en el transcurso de la entrevista. Él primero debió reconocer que la mediatriz era un lugar geométrico, posteriormente reconoció la propiedad que cumplen los puntos de una circunferencia para pertenecer a ella y, finalmente, pudo determinar que la elipse también era un lugar geométrico y logró establecer la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a esta.

Propiedad 2: Adyacencia. Carlos pudo mostrar, con sus gestos y su lenguaje, que había logrado percibir ciertas relaciones en el nivel anterior que se hicieron explícitas en el nivel inmediatamente siguiente. Él, por ejemplo, cuando pudo lograr un proceso de traslación mediante el doblado de papel, pudo percibir que todos los puntos trasladados estaban a una misma distancia del centro, pero aún no se había percatado de que esta era la propiedad que debía cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la circunferencia. Esto sólo lo hizo explícito en el nivel II, cuando pudo establecer que los puntos de una circunferencia equidistan del centro. Carlos también logró establecer que la suma de dos segmentos determinados era el radio de una circunferencia, pero todavía no había asociado este hecho con la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la elipse como lugar geométrico.

Propiedad 3: Distinción. Carlos, al igual que Leti, Jhon y Laura, tuvo que reorganizar sus ideas a medida que iba avanzando en el nivel de razonamiento. Por ejemplo, en el nivel I se pudo percatar que la mediatriz es una recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio. En el nivel II, tuvo que refinar sus ideas y por lo tanto logró establecer que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico, dado que sus puntos equidistan de los extremos del segmento. Con respecto a la circunferencia, en el nivel 0, Carlos afirmó que la circunferencia es una forma circular. En el nivel I, pudo realizar su construcción a partir de un proceso de traslación de puntos y en el nivel II, pudo establecer la propiedad que cumple un conjunto de puntos para pertenecer a ella. Con respecto a la elipse, en el niel I, Carlos afirmó que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices tenía forma de huevo y que podría ser una circunferencia. En el nivel II, pudo razonar adecuadamente sobre la suma de segmentos determinados, relacionados con la figura envuelta y en el nivel III, pudo establecer que esta suma era la propiedad que cumplían los puntos para pertenecer a la elipse como lugar geométrico.

Propiedad 4: Separación. El proceso de comprensión de Carlos culminó cuando logró su avance al nivel III de razonamiento. Probablemente si entabla una conversación con un estudiante que esté en un nivel inferior, con respecto al tema abordado, no podrán llegar a entenderse o a ponerse de acuerdo, pues Carlos logró la comprensión de la elipse como lugar geométrico, mientras que un estudiante de un nivel menos avanzado no logró involucrar este concepto a su red de relaciones.

Propiedad 5: Lenguaje. A pesar de que Carlos tuvo ciertas dificultades en su lenguaje, en tanto que cometió varios errores conceptuales durante la entrevista, pero se pudo observar que fue refinando su vocabulario a medida que avanzaba en su nivel de razonamiento. Utilizaba con más confianza los conceptos de mediatriz, circunferencia, perpendicular, equidistancia y elipse.

Propiedad 6: Consecución. Carlos debió someterse a un proceso gradual de diálogo inquisitivo para poder avanzar en su nivel de razonamiento; lentamente, él fue ampliando o modificando su red de relaciones, involucrando nuevos conceptos y construyendo mentalmente nuevas relaciones. Debió razonar sobre el concepto de perpendicular (nivel 0) para comprender la mediatriz como una perpendicular (nivel I) y finalmente comprender la mediatriz como un lugar geométrico (nivel II).

Diálogo socrático. Características de la entrevista individual de Carlos.

Nuestras entrevistas grupales e individuales tuvieron el tinte de carácter socrático respectivo. Es decir, tenían ciertas características que las hacían diferentes, únicas y especiales. Estas características (Jurado y Londoño, 2007) son:

Intencionalidad de la entrevista: La entrevista individual tenía una doble intención: caracterizar el proceso de comprensión de un estudiante y estimularlo, a su vez, a avanzar en su nivel de razonamiento. En el caso de Carlos, ambas intenciones se cumplieron, pues la entrevista nos ayudó a ubicarlo en el nivel III de razonamiento y además de eso, le permitió avanzar en su nivel de razonamiento, estimulando su razonamiento a crear o a modificar una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico.

El lenguaje: A medida que Carlos avanzan en su nivel de razonamiento, muestra un refinamiento en su lenguaje, pues se observó que recurría, con más confianza, a algunos conceptos aprendidos, como mediatriz, equidistancia, circunferencia, perpendicular o elipse. Por lo tanto, se esforzó en mejorar su lenguaje, en cuanto que las palabras utilizadas eran más precisas y de carácter matemático.

Los conceptos básicos: En su encuesta y en su entrevista individual, Carlos exhibió que no tenía claros algunos conceptos básicos importantes para comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Inicialmente, tuvo algunas dificultades con el concepto de perpendicularidad, pero pudo superarlas, dado que pudo recordar que dos rectas son perpendiculares si al cruzarse forman ángulos de 90°. Posteriormente, olvidó el concepto de segmento; sin embargo, no tuvo mayores dificultades en recordarlo y en establecer que dos puntos conectan un solo segmento. Carlos presentó algunas deficiencias para mostrar que dos segmentos tienen la misma medida, mediante el doblado de papel, incluso lo expresó en estos términos: "**¿Sin medirlo con una regla? A no, ya se me olvidó**". Además, Carlos presentó ciertas dificultades en los conceptos primitivos punto, recta y plano, por considerarlos objetos concretos, pero inicialmente no hubo necesidad de intervenir en su razonamiento. Además, Carlos no presentó dificultades con relacionar un segmento de recta con un doblez, que dos puntos determinan una única recta y que es posible lograr una suma de segmentos mediante la visualización en el doblado.

Las experiencias previas del entrevistado: En todo momento de la entrevista individual, Carlos trataba de recordar sus experiencias vividas en la entrevista grupal o en las clases de geometría, e incluso, trataba de recurrir a experiencias personales de su vida, para poder reflexionar y responder las preguntas. Por ejemplo, cuando se le presentó por primera vez la construcción de la elipse mediante el doblado de papel, él afirmó que era una figura parecida a un huevo, que tal vez podría ser una circunferencia. Él acudió a sus conocimientos y a su experiencia, para hacer esta asociación.

Diálogo inquisitivo: La idea de la entrevista socrática es no enseñarle nada al estudiante, sino conducirlo mediante la indagación y la reflexión a la comprensión de algún concepto. Con Carlos, se trabajaron varios diálogos socráticos, cuando él no lograba percibir las relaciones o cuando no lograba comprender el concepto trabajado.

Por ejemplo, cuando Carlos tuvo dificultades con la visualización de la igualdad de segmentos mediante el doblado, se le hicieron un par de preguntas inquisitivas y pudo percibirla. Posteriormente, tuvo dificultades con el término equidistar y también pudo comprenderlo, gracias al diálogo socrático que se entabló con él. De la misma manera ocurrió con la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, pues evidenció algunos problemas en su visualización. Sin embargo, en el transcurso del diálogo inquisitivo, pudo establecer que la suma era r, el radio de la circunferencia y lo pudo generalizar para todos los puntos M de la figura envuelta.

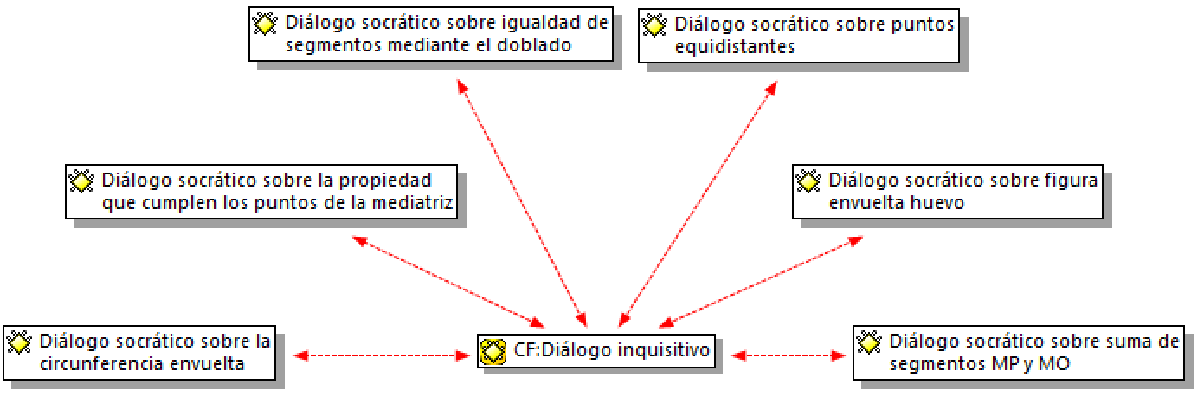


Figura 170: Diálogo inquisitivo en el proceso de Carlos.

Pensamiento discursivo: En nuestra entrevista individual, se hizo necesario hacer una misma pregunta varias veces, para que el estudiante en un primer momento exhibiera lo que sabía al respecto y en un segundo o tercer momento, diera respuestas más elaboradas, porque había logrado ampliar o modificar su red de relaciones. Carlos, por ejemplo, cuando se le preguntó por primera vez por la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, estableció que era cualquier número diferente de r. Después de un diálogo inquisitivo, pudo visualizar que la suma era r. Este resultado lo utilizó adecuadamente cuando se le hizo la misma pregunta, pero en situaciones diferentes. El estudiante dio respuestas más elaboradas cuando la pregunta se le hizo en un segundo o tercer momento. Incluso, pudo generalizarlo para todos los puntos M de la figura envuelta.

Aportes de información: Carlos recibió aportes de información sobre mediatriz, equidistancia, lugar geométrico y elipse. Esta información era necesaria para que él pudiera comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. A medida que los iba comprendiendo, los iba involucrando en su red de relaciones. Al principio, tuvo ciertas dificultades con el concepto de equidistancia, pues nunca había escuchado la palabra. Posteriormente, la fue utilizando con más confianza. Cuando se le preguntó si la elipse era un lugar geométrico, él no recordó el concepto, sabiendo que se había trabajado antes en el caso de la mediatriz. Él afirmó que era "**el lugar entre todos los puntos**" o el conjunto de puntos que cumplen "**la misma medida**". Fue necesario forzarlo a razonar sobre este hecho para que pudiera establecer si la elipse era o no un lugar geométrico.

Problematización con las ideas: Carlos tuvo momentos en los que estaba realmente confundido. Por ejemplo, cuando se le pregunta por primera vez por la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$, él se siente confundido y lanza expresiones como: "**La suma de esto qué vale... ¿Cuánto me dijo que vale? Pues puede valer cualquiera…**". Después se le pregunta sobre la propiedad que deben cumplir los puntos para pertenecer a la circunferencia y dice lo siguiente: "**¿Qué propiedad? Pues una… ¿qué propiedad? ¿Como así? ¿Que qué propiedad?**" Él no entendía lo que le estaban preguntando. Además, por medio de sus interrogantes, corroboró que se sentía confundido. Para superar sus dificultades conceptuales, fue necesario el diálogo inquisitivo, con preguntas intencionadas y aportes de información.

El paso por los tres momentos: En algunos momentos de la entrevista individual, Carlos pasó por tres momentos: primero, creer que sabía la respuesta; segundo, darse cuenta que no sabía y tercero, sentir la necesidad de encontrar la verdad. Por ejemplo, en la suma de los segmentos $\overline{MP}+\overline{MO}$, que era el radio, Carlos llegó a la conclusión de que "**¿MP y MO? Que suman igual…**", es decir, creyó que los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tenían la misma medida. Posteriormente, creyó que sumaban r y afirmó: "**porque si de acá a acá es la misma distancia, hay r, de acá a acá también debe haber r…**". Él creía que eran iguales, pero no sabía justificarlo. Posteriormente, dijo que la suma era diferente de r y lo dijo así: “**pues puede valer cualquiera…**”. En este momento de la entrevista el estudiante estaba realmente confundido y comprendió que no sabía. Después de un par de preguntas intencionadas, el estudiante cayó en la cuenta que la suma era r y dio la explicación pertinente. Pudo encontrar la verdad.

La red de relaciones: A medida que el estudiante avanzaba en su nivel de razonamiento, iba incorporando a su red los nuevos conceptos y la iba ampliando o modificando de acuerdo a su comprensión. Carlos pudo incorporar a su red, algunos conceptos como mediatriz, circunferencia, equidistancia y elipse. Cuando se le preguntó por la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a una circunferencia, él respondió: “**No pues que la distancia, eso debe ser una propiedad que la distancia de acá a acá sea igual porque si no, no sería una circunferencia**”. Cuando se le preguntó por la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$, Carlos dijo que era r y explicó lo siguiente: “**porque igual, como se le sacó la mediatriz a esto, acá debe estar el punto, acá parte, mide igual acá acá y igual acá, entonces si se mide, si aquí mide r, o sea que sumar esto es lo mismo que sumar esto…**”. Es importante decir que Carlos es poco expresivo y respondía sólo lo necesario. Sus explicaciones y sus razonamientos fueron mejorando lentamente, e incluso su lenguaje se fue modificando y lo fue utilizando con más confianza, esto se pudo confirmar cuando utilizó algunos conceptos de manera adecuada.

Dificultades.

Durante el proceso de la entrevista individual, el estudiante tuvo momentos de motivación, pues sabía las respuestas de las preguntas. Por ejemplo, en algunas ocasiones lanzaba la expresión: “**Está fácil, está fácil**”. Tuvo momentos de confusión, dado que no tenía las respuestas o sabía que tenía dificultades o carencias. También presentó momentos en los que lanzó afirmaciones erróneas, esto mostraba que tenía ciertas dificultades con algunos conceptos geométricos; por ejemplo, en algún momento de la entrevista dijo que dos puntos N y P deberían medir lo mismo o que M (que es un punto) es la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. En otro momento dijo que M era una constante, sabiendo que era un punto que variaba en la figura envuelta. O dijo que la elipse era una bolita. Él también presentó algunas dificultades por el desconocimiento que tenía de algunos conceptos. Por ejemplo, no recordaba qué era un segmento o tenía confusión con el concepto de perpendicularidad. Carlos presentó, incluso presenta, dificultades con los conceptos primitivos de punto, recta y plano, pues aún los considera como objetos concretos.

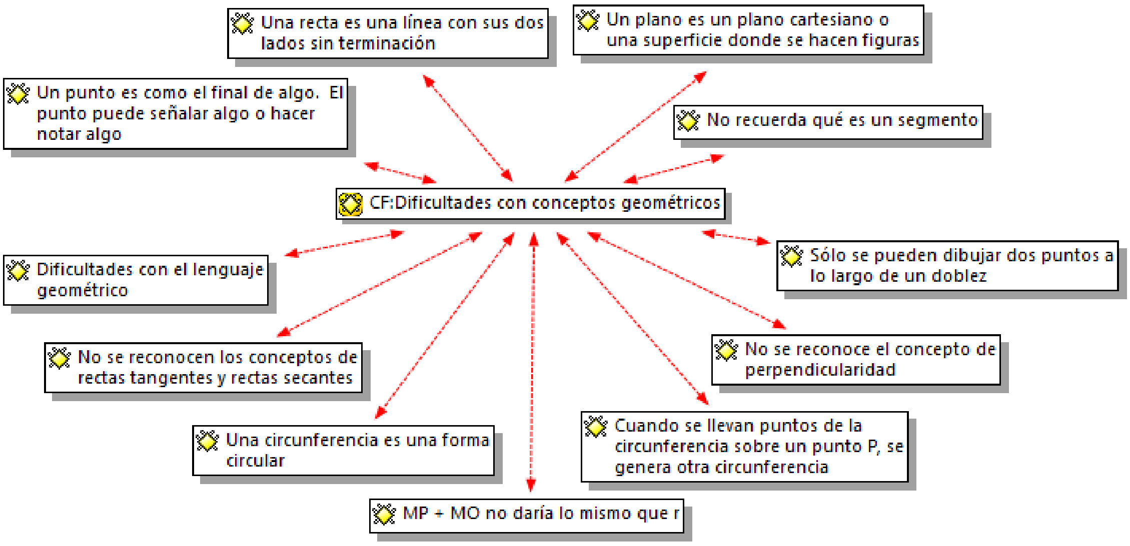


Figura 171: Dificultades en conceptos geométricos en el proceso de Carlos.

5 LA ENTREVISTA

En este capítulo se hace una compilación de los análisis de los procesos de razonamiento de los cinco estudiantes del estudio de casos, para establecer finalmente tanto los descriptores de los niveles de razonamiento del concepto de elipse como lugar geométrico, como el guión de entrevista refinado, que permiten caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes.

5.1 DESCRIPTORES FINALES DE NIVEL.

A continuación presentamos los descriptores de nivel que surgieron de todo el trabajo de campo desarrollado y, los cuales, nos permitieron caracterizar de manera adecuada cada uno de los niveles de razonamiento sobre la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

Es importante mencionar que el descriptor "utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia", que hacía parte del nivel II, lo ubicamos finalmente en el nivel III de razonamiento, porque era necesario que el estudiante relacionara propiedades encontradas en niveles anteriores (nivel I y nivel II). Pudimos percibir que llegar a esta conclusión requería de un gran esfuerzo por parte del estudiante, en cuanto necesitaba primero, reconocer muy bien la mediatriz como lugar geométrico; segundo, realizar un proceso de transitividad, que no es muy común para estudiantes de bachillerato y que en todos los casos sólo se logró mediante un diálogo inquisitivo y, tercero, relacionar ambas propiedades para llegar a que la suma era una constante determinada. Las dificultades presentadas por los estudiantes en esta parte del proceso, fueron un indicador fundamental para determinar que el descriptor en cuestión, realmente debía hacer parte del nivel III de razonamiento.

En esta memoria se entenderá como *descriptor de separación*, aquella cualidad del pensamiento que se utiliza implícitamente en el nivel $n - 1$ y que se hace explícita en el nivel n. Por lo tanto, el estudiante debe hacer explícita esta habilidad en el nivel inmediatamente superior.

Nivel 0: Predescriptivo

En este nivel se identifica el conjunto de conocimientos previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: “Por dos puntos pasa una única recta”.
0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, entre otras.
0.3 El estudiante relaciona un doblez con un segmento de línea recta.

Utilizando la geometría del doblado, el estudiante:

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.
0.5 Construye rectas perpendiculares.
0.6 Visualiza la suma de segmentos.

Descriptor de separación:

Se le dificulta construir la mediatriz de un segmento mediante la geometría del doblado.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante utiliza la geometría del doblado de papel para construir la mediatriz, la circunferencia y la elipse.

Mediante la geometría del doblado, el estudiante:

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.
1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.
1.3 Realiza la construcción de una elipse.
1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.
1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

Descriptores de separación:

Al estudiante se le dificulta establecer las condiciones que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la mediatriz o a la circunferencia.

Finalizado el proceso de construcción de la elipse, el estudiante se le dificulta percibir los elementos fundamentales propios que la caracterizan.

Nivel II: De análisis.

En este nivel, el estudiante reconoce la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos y, con base en estos, identifica los elementos propios de la elipse.

2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.
2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.
2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.
2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.
2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.
2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Descriptor de separación:

Se le dificulta emplear el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia inicial.

Nivel III: De clasificación.

En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse; además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

3.1 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.
3.2 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.
3.3 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

Es importante aclarar que nuestro trabajo no pretendió enunciar los descriptores del nivel IV de razonamiento, pues el mismo Van Hiele establece que es difícil de detectar y que se considera de carácter teórico.

5.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO.

Como nuestro estudio está enmarcado en el Modelo Educativo de Van Hiele, es importante que nuestros descriptores cumplan con las características propias de cada uno de los niveles de razonamiento. De acuerdo con la nomenclatura de Usiskin (1982), estas propiedades son:

Propiedad 1: Secuencialidad fija. En nuestro estudio esta propiedad la analizamos de la siguiente manera:

Nivel 0: El razonamiento geométrico se centró en los conceptos previos y básicos que son necesarios para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. El estudiante debe reconocer los conceptos de punto, recta, segmento, doblez, distancia, perpendicular y relacionarlos con la geometría del doblado de papel; debe establecer que por dos puntos pasa una única recta o un único doblez, debe visualizar mediante el doblado de papel la igualdad de dos segmentos, la perpendicularidad entre dos segmentos de recta y la suma de segmentos.

Nivel I: El razonamiento geométrico se basó en la visualización de las construcciones hechas mediante el doblado de papel, de la mediatriz, la circunferencia y la elipse. Los estudiantes lograron establecer que llevando un punto extremo de un segmento sobre su otro punto extremo, se lograba construir una recta que cortaba perpendicularmente a este segmento en su punto medio. También pudieron encontrar puntos discretos de la circunferencia a través de un proceso de traslación de puntos que conservaran la misma distancia a un punto O dado. Y, finalmente, pudieron visualizar la figura formada cuando se llevan puntos de la circunferencia sobre un punto P ubicado en la región delimitada por esta. Los cinco estudiantes la relacionaron con un óvalo o con un huevo, sin mencionar propiedades o partes constitutivas.

Nivel II: El razonamiento geométrico se basó en determinar las propiedades que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz o a la circunferencia. En este nivel, los estudiantes pudieron comprender que la mediatriz era un lugar geométrico y mencionar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a ella. También comprendieron la propiedad que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la circunferencia, pero sin determinar de manera explícita que la circunferencia también es un lugar geométrico. Con respecto a la elipse, los estudiantes lograron determinar algunas partes constitutivas como dos puntos fijos o estar envuelta por un conjunto de mediatrices. Además, pudieron reflexionar, reconocer e identificar su construcción mediante el doblado de papel.

Nivel III: En este nivel, el razonamiento del estudiante se centra en buscar la propiedad que cumple un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse con base en la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos. Cuatro de los cinco estudiantes lograron visualizar una suma geométrica de segmentos determinada y, comprendido este hecho, lograron establecer que la elipse es un lugar geométrico y pudieron establecer la propiedad que cumplen sus puntos.

Propiedad 2: Adyacencia. El estudiante tiene algunas cualidades del pensamiento implícitas en el nivel anterior y las debe hacer explícitas en el nivel inmediatamente superior.

Nivel 0: Los objetos de percepción del nivel 0 son los conceptos básicos de punto, recta, segmento, distancia y sus relaciones con la geometría del doblado de papel. Además, el estudiante percibe la igualdad de segmentos, la suma geométrica de segmentos y la perpendicularidad mediante el doblado.

Nivel I: El objeto de percepción del nivel 0 se convierte en objeto de pensamiento del nivel I cuando el estudiante utiliza los conceptos básicos para construir una mediatriz o puntos discretos de una circunferencia. El estudiante, en este nivel, logra percibir que la mediatriz es una recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio y logra realizar un proceso de traslación de puntos percibiendo que se conserva su distancia a un punto particular O.

Nivel II: Los objetos de percepción del nivel I: la mediatriz como perpendicular y la conservación de la distancia, se convierte en objeto de pensamiento del nivel II, cuando el estudiante logra comprender tanto que la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos. El estudiante en este nivel, percibe con seguridad que la figura formada por el conjunto de mediatrices cuando se llevan puntos de la circunferencia sobre el punto P ubicado en la región limitada por esta, no es una circunferencia y percibe que una suma de dos segmentos particulares es la constante r.

Nivel III: Los objetos de percepción del nivel II: la figura formada no es una circunferencia y la suma de dos segmentos particulares es r, se convierte en objeto de pensamiento cuando el estudiante logra establecer que esa suma determinada de segmentos, que es el radio de la circunferencia, se cumple para todos los puntos M de la figura y comprende que esta suma precisamente, es la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la elipse. Uno de los cinco estudiantes analizados presentó dificultades para comprender esta propiedad.

Propiedad 3: Distinción. En nuestro estudio esta propiedad la analizamos de la siguiente manera:

Nivel 0: Reconocimiento de conceptos básicos de la geometría euclidiana y relaciones con la geometría del doblado de papel.

Nivel I: Se obtiene una nueva estructura cuando se logra establecer que la mediatriz es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento y que es posible construir algunos puntos de la circunferencia al trasladar puntos que conserven su distancia a un punto O particular.

Nivel II: El estudiante reinterpreta el concepto de mediatriz al establecer que es un lugar geométrico porque sus puntos equidistan de los extremos del segmento. Además, establece que un conjunto de puntos pertenece a una circunferencia si equidista del centro. En este nivel, el estudiante advierte que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices no es una circunferencia y que está formada por un conjunto de mediatrices y dos puntos interiores fijos O y P.

Nivel III: El estudiante, mediante el proceso de razonamiento a que fue sometido, refina sus ideas y logra comprender, utilizando la mediatriz como lugar geométrico, que para todos los puntos M de la figura, la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia con la que se inició la construcción y finalmente afirmar rotundamente que la elipse es un lugar geométrico.

Propiedad 4: Separación. En nuestro estudio esta propiedad la analizamos de la siguiente manera:

Entre Nivel 0 y Nivel I: Un estudiante en el nivel 0 comprende algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y los relaciona con la geometría del doblado de papel. Sin embargo, no es capaz de realizar la construcción de la mediatriz o de la circunferencia mediante el doblado de papel. Por lo tanto, no podría entender el razonamiento de un estudiante del nivel I, cuyos objetos de pensamiento son precisamente las construcciones de estos dos elementos.

Entre el Nivel I y Nivel II: Si un estudiante está en el nivel I de razonamiento podrá comprender que la mediatriz es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento, pero no la reconocerá como un lugar geométrico. Mientras que el estudiante del nivel II, podrá reconocer la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz. Estas dos personas probablemente no se entenderán con respecto al objeto de estudio, la mediatriz, porque la conciben diferente, aunque el del nivel II comprenda también la mediatriz como una perpendicular. Lo mismo sucede en el caso de la circunferencia. Un estudiante del nivel I, podrá realizar la traslación de algunos puntos, conservando su distancia al punto O, pero no podrá establecer la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la circunferencia. Cosa que el estudiante del nivel II, sí podrá realizar.

Entre el Nivel II y el Nivel III: Un estudiante del nivel II podrá establecer las propiedades que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz o a la circunferencia, pero no podrá comprender la propiedad que cumple un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse. Este hecho será objeto de razonamiento del nivel III cuando haya logrado generalizar que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es r, el radio de la circunferencia, y que esta propiedad la cumplen todos los puntos M de la elipse.

Propiedad 5: Cada nivel de razonamiento tiene un tipo de lenguaje específico. En nuestro estudio esta propiedad la analizamos de la siguiente manera:

Nivel 0: El estudiante utiliza algunos conceptos básicos como punto, recta, segmento, doblez, distancia, perpendicular y es capaz de establecer una analogía con la geometría del doblado de papel. Sin embargo, aún no utiliza conceptos como mediatriz o circunferencia.

Nivel I: El estudiante en este nivel, puede realizar la construcción de la mediatriz y de algunos puntos de la circunferencia mediante el doblado de papel. Él puede determinar que a la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio se le llama mediatriz y puede establecer que los puntos trasladados están a una misma distancia del punto específico O. En este nivel, el estudiante no utiliza todavía las palabras lugar geométrico o equidistancia.

Nivel II: Para el estudiante en este nivel, la mediatriz de un segmento se convierte en un lugar geométrico porque sus puntos equidistan de los extremos del segmento. Y, además, logra establecer que los puntos de una circunferencia equidistan del centro. En este nivel, aún no se utiliza el concepto de elipse

Nivel III: En este nivel, el estudiante logra establecer que la elipse se forma por la envoltura de un conjunto de mediatrices y, el concepto de mediatriz, permite que logre comprender la propiedad que deben cumplir los puntos para pertenecer al lugar geométrico elipse.

Propiedad 6: Consecución. Nuestros descriptores de nivel nos mostraron que algunos estudiantes, en ciertos momentos de la entrevista, presentaron ciertas habilidades de un nivel de razonamiento, pero que no habían superado otras; esto nos llevó a suponer que estaban en un período de transición entre el nivel inferior y el nivel inmediatamente superior.

Nivel 0: Algunos de nuestros estudiantes mostraron ciertas dificultades con los conceptos primitivos de la geometría euclidiana y con el concepto de perpendicularidad. Otros, presentaron problemas en el uso del lenguaje geométrico. A medida que iban avanzando en la entrevista razonaban sobre los conceptos respectivos, para así lograr comprender las condiciones necesarias que se deben cumplir para definir la elipse como lugar geométrico.

Nivel I: La mayoría de nuestros estudiantes lograron realizar la construcción del punto medio de un segmento mediante el doblado de papel. Además, pudieron relacionar esta construcción con la construcción de un doblez perpendicular al segmento que pase por su punto medio, que era la mediatriz de dicho segmento. También realizaron un proceso de traslación de puntos conservando su distancia al punto específico O. Algunos de nuestros estudiantes presentaron dificultad en verbalizar y justificar la relación de perpendicularidad entre la mediatriz y su segmento asociado.

Nivel II: Nuestros estudiantes lograron determinar la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz: equidistancia a los extremos del segmento. Esto les permitió afirmar que la mediatriz es un lugar geométrico. También, comprendieron la condición que cumple un conjunto de puntos para pertenecer a la circunferencia: equidistancia al centro. Dos de los cinco estudiantes analizados presentaron dificultades para comprender la propiedad de equidistancia y el concepto de lugar geométrico.

Nivel III: Cuatro de los cinco estudiantes lograron avanzar a este nivel de razonamiento. Este nivel lo lograron aquellos estudiantes que establecieron que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es r, el radio de la circunferencia para todos los puntos M de la figura. Además, utilizaron este hecho como la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la elipse y lograron afirmar que la elipse era un lugar geométrico.

5.3 GUIÓN DE ENTREVISTA REFINADO.

Nuestro primer guión de entrevista preliminar contaba con 70 preguntas y abarcaba toda la temática de secciones cónicas. Pasó posteriormente por un proceso de refinamiento con base en nuestra experiencia y la asesoría de otros investigadores, entre ellos el investigador en el tema, Doctor Pedro Pérez Carreras, experto en la extensión del modelo de Van Hiele a conceptos del análisis matemático. Estas asesorías y las primeras entrevistas grupales nos permitieron llegar a la conclusión de que no era posible hacer un guión de entrevista para que un estudiante pudiera comprender los conceptos de las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola), mediante la geometría del doblado de papel en un tiempo mínimo de dos horas. Se necesitaba más tiempo y más esfuerzo por parte del estudiante. Por lo tanto, se llegó a la conclusión de que el guión debía abarcar sólo el concepto de elipse como lugar geométrico.

El guión preliminar objeto de experimentación, luego de ser depurado, contó con 64 preguntas. Posteriormente, pasó por otros procesos de revisión (7 aproximadamente) para poder establecer la correspondencia con los descriptores hipotéticos de nivel y, así finalmente, basados en la discusión y experimentación, lograr un total de 39 preguntas. Se hicieron seis pruebas piloto de esta entrevista con seis estudiantes de un curso de Cálculo I de una seccional de una Universidad pública, con sede principal en la ciudad de Medellín. Este proceso fue válido porque, en primer lugar, los estudiantes no habían visto propiamente la temática relacionada con secciones cónicas; en segundo lugar, porque Van Hiele afirma que el proceso de comprensión de una persona, de un concepto determinado, no depende de la edad o del grado que esté cursando, sino de la experiencia propia: “La adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 330). Incluso, menciona que “… no es ilógico encontrar esa diversidad de niveles de razonamiento, ya que el desarrollo de la capacidad de razonamiento de una persona se logra fundamentalmente gracias a la experiencia”. De hecho, estos estudiantes, manifestaron algunas dificultades con conceptos de la geometría euclidiana y con algunos procesos de razonamiento infinito. Sólo uno de ellos estableció que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices cuando se realiza la construcción de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P, ubicado en la región encerrada por esta, es una elipse; pero no explicitó las partes constitutivas, ni mucho menos estableció sus propiedades. Aún no había llegado a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, habilidad que logró después, gracias al sometimiento del proceso de razonamiento de la entrevista. Estas seis entrevistas nos permitieron mejorar la redacción de algunas preguntas y establecer un nuevo orden.

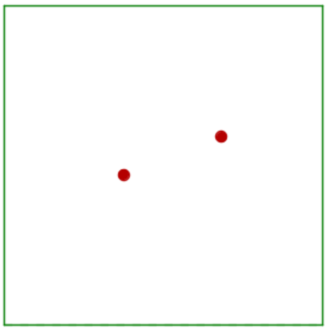
El guión contaba con 39 preguntas y cinco aportes de información. Después de llevar a cabo el proceso con Rosi, nos dimos cuenta que había que mejorar algunos aportes de información y que era necesario mejorar algunas preguntas, cambiarle el orden a otras y, definitivamente, suprimir otras preguntas. En este momento del trabajo de campo, se revisó nuevamente el guión entrevista con otros investigadores expertos en el tema, entre ellos están el Doctor Pedro Vicente Esteban Duarte y el candidato a Doctor René Alejandro Londoño Cano.

Después de este nuevo refinamiento, el guión quedó con 32 preguntas. Posteriormente, se realizó el análisis del proceso de razonamiento de Leti y el guión no sufrió ninguna modificación. Luego de haber entrevistado a Jhon, se vio la necesidad de mejorar la redacción de algunas preguntas y mejorar algunas gráficas. Finalmente, después de haber entrevistado a Laura y Carlos se decidió suprimir una de las preguntas.

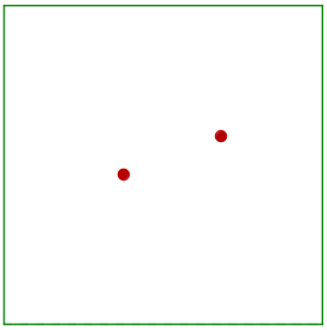
Es importante mencionar que nuestra entrevista no es de carácter lineal, sino de carácter espiral, dado que es necesario retomar los conceptos y las habilidades logradas en preguntas anteriores. Además, la respuesta correcta a una pregunta no determina el nivel en el que está razonando un estudiante. Es el conjunto de preguntas el que nos permite llegar a esta conclusión.

Por lo tanto, a continuación presentamos el guión de entrevista final:

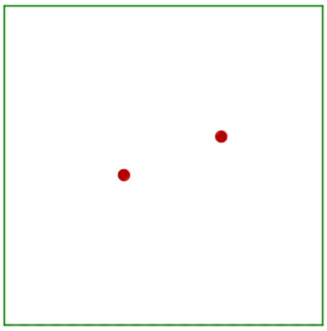
1. Considera dos puntos en una hoja de papel, ¿cuántas rectas crees que pasan por dichos puntos?



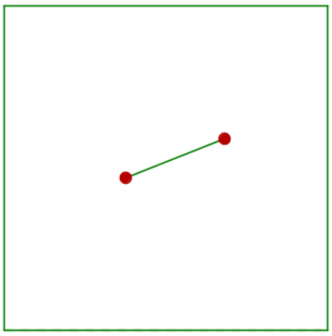
2. Considera dos puntos en una hoja de papel, ¿cuántos dobleces crees que pasan por dichos puntos?



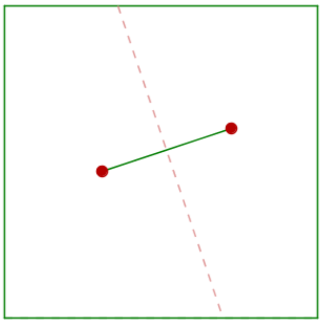
3. ¿Cuántos segmentos crees que conectan los dos puntos marcados en la hoja de papel?



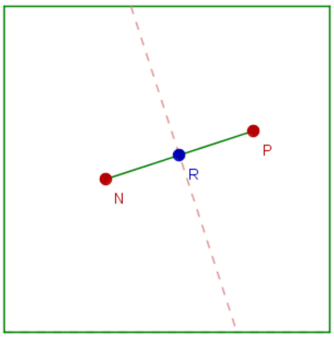
4. Mediante el doblado de papel, ¿cómo determinarías el punto medio del segmento trazado en la hoja?



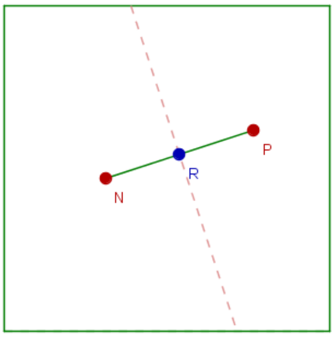
5. Se marcan dos puntos en una hoja de papel. Si se lleva un punto exactamente sobre el otro punto, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento que une los dos puntos?



6. De acuerdo con la figura, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{RN}$ y $\overline{RP}$? ¿Por qué?



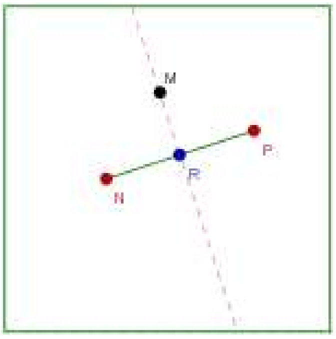
7. ¿Crees que el doblez que se hace cuando se lleva el punto N sobre el punto P es perpendicular al segmento $\overline{NP}$? ¿Por qué?



Aporte de información:

Se llama **mediatriz** a la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

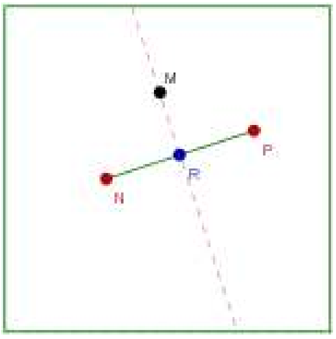
8. Considera un punto M, diferente del punto medio R, sobre la mediatriz del segmento $\overline{NP}$, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$? ¿Por qué?



Aporte de información:

Un punto equidista de otros dos puntos si está a una misma distancia de estos.

9. ¿Cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos? ¿Por qué?

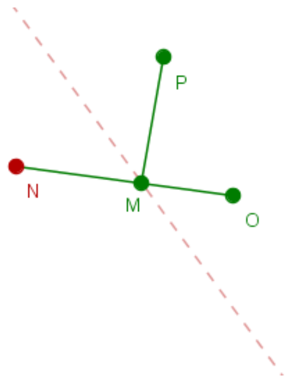


Aporte de información:

Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad.

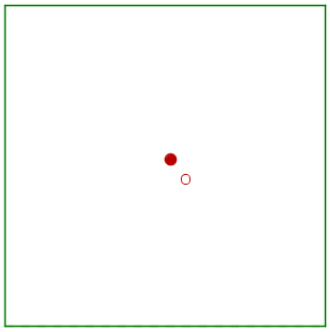
10. ¿Es la mediatriz de un segmento cualquiera, un lugar geométrico? En caso afirmativo, ¿cuál es la propiedad que cumple el conjunto de puntos para pertenecer a este lugar geométrico?

11. Considera tres puntos N, P y O cualesquiera en una hoja de papel y se construye la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Luego, considera el punto M como la intersección del segmento $\overline{NO}$ con la mediatriz.

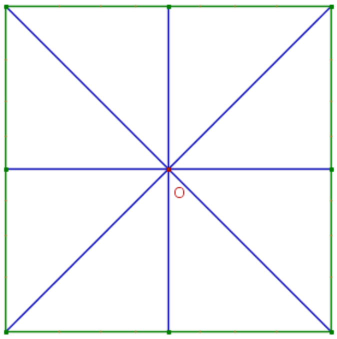


Sea r la medida del segmento $\overline{NO}$, que es igual a la suma de las medidas de los segmentos $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$, ¿qué podrías afirmar acerca de la suma de las medidas de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$?

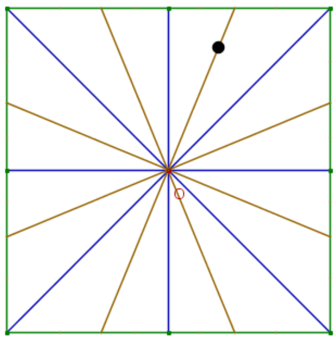
12. ¿Cuántos dobleces crees que pueden pasar por un punto marcado sobre una hoja de papel?



13. Se realizan dobleces que pasen por el punto O como se muestra en la figura.

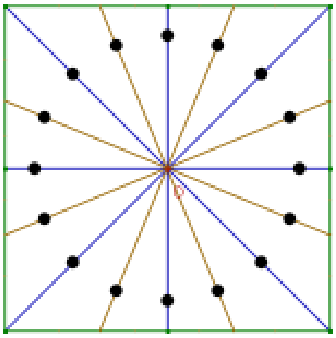


Posteriormente, se lleva un doblez exactamente sobre el doblez consecutivo. Después, se marca un punto diferente de O en un doblez cualquiera.

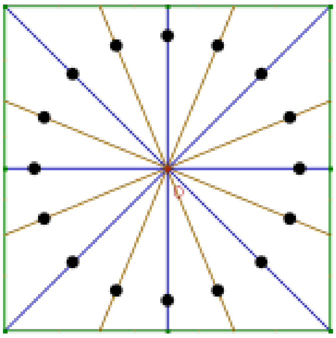


¿Es posible trasladar este punto a los demás dobleces conservando su distancia al punto O? En caso afirmativo, ¿cómo harías este proceso de traslación?

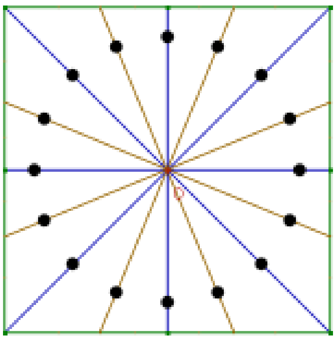
14. Después de haber trasladado el punto, ¿se puede afirmar que todos los puntos equidistan del punto O? ¿Por qué?



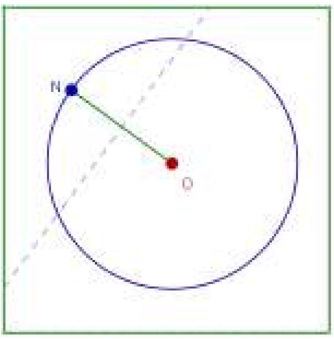
15. ¿Es posible continuar con este proceso de traslación de manera infinita? ¿Por qué?



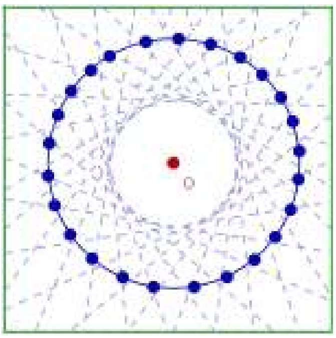
16. Este conjunto de puntos permite intuir la noción de circunferencia, ¿qué propiedad cumplen estos puntos?



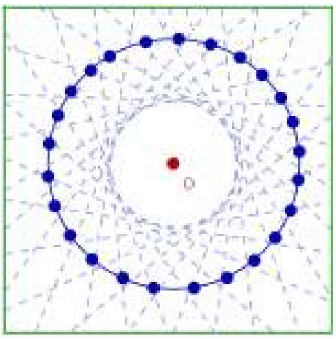
17. Se marca un punto N sobre una circunferencia y se lleva sobre el punto O. ¿Qué relación existe entre el doblez resultante y el segmento que une ambos puntos?



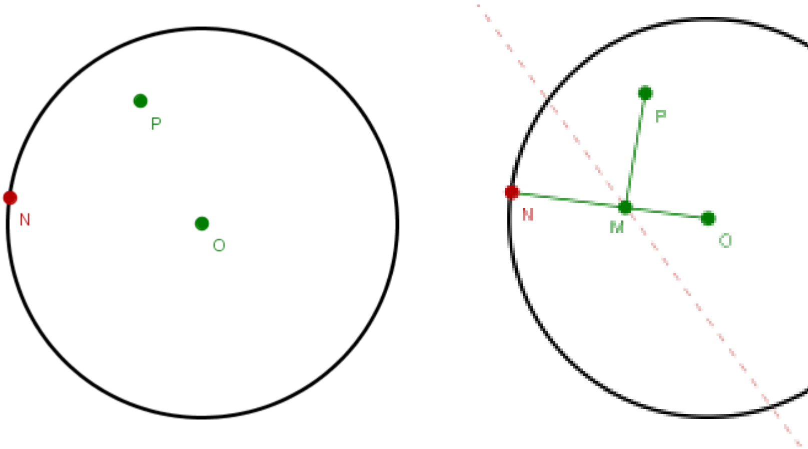
18. Se marcan otros puntos sobre la circunferencia y se llevan sobre el punto O. ¿Son los dobleces resultantes mediatrices de los segmentos respectivos? ¿Por qué?



19. Si se pudiera llevar cada uno de los puntos de una circunferencia sobre su centro, ¿qué figura envuelve el conjunto de mediatrices así construido? ¿Por qué?

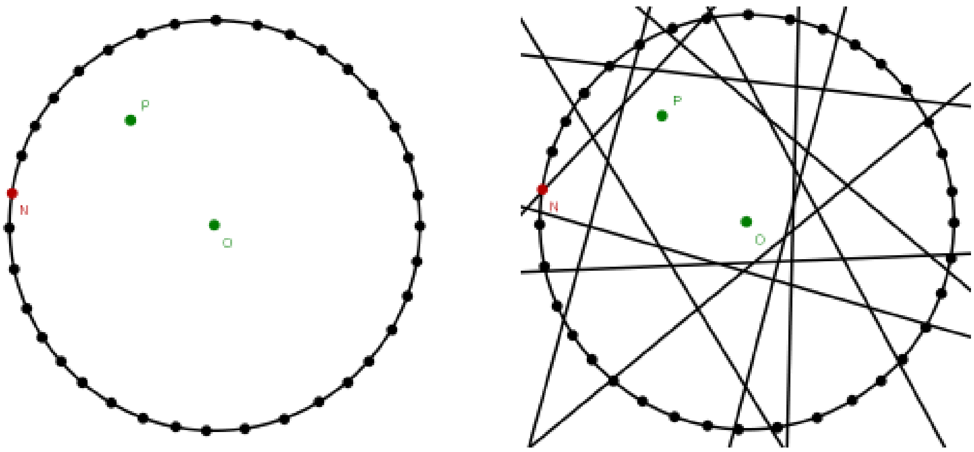


20. Considera una circunferencia con centro O y radio r. Sea N un punto cualquiera de la circunferencia y P un punto que está en la región limitada por la circunferencia. Se obtiene M como la intersección de la mediatriz de $\overline{NP}$ con el segmento $\overline{NO}$.

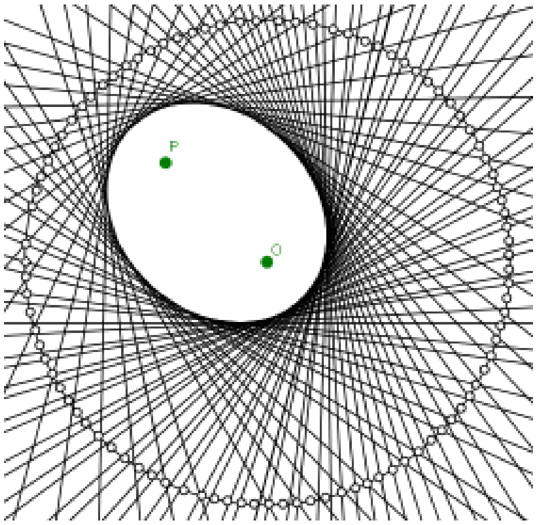


¿Cuál es la relación que existe entre el radio de la circunferencia y la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MO}$? ¿Por qué?

21. Se marcan más puntos sobre la circunferencia y se construyen dobleces que surgen de llevar los puntos de la circunferencia sobre el punto P. Describe la figura que crees que envuelve el conjunto de mediatrices así construido.

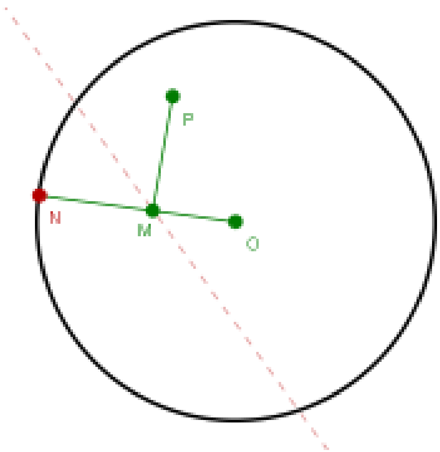


22. La siguiente figura es el resultado de construir dobleces que surgen de llevar los puntos de la circunferencia sobre el punto P. ¿Crees que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices es una circunferencia? ¿Por qué?

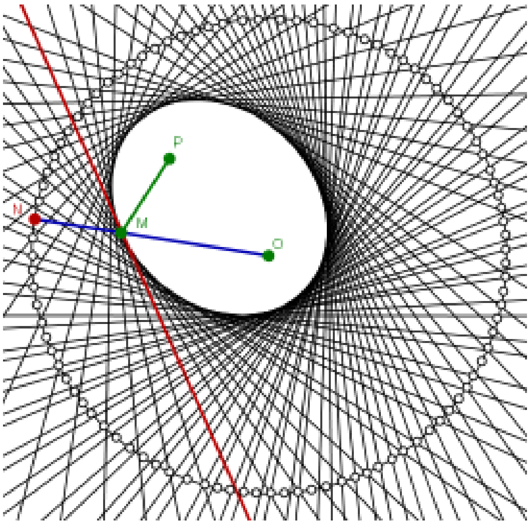


23. Considere una circunferencia con centro O, radio r y un punto P que está en la región limitada por dicha circunferencia. En esta se realiza el siguiente proceso:

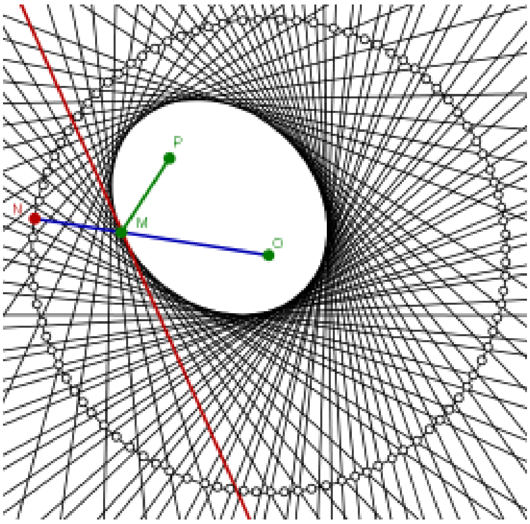
- Se ubica cualquier punto N de la circunferencia.
- Se resalta el doblez que se forma cuando se pone el punto N sobre el punto P.
- Se traza el segmento $\overline{NO}$ y se nombra M al punto de intersección entre $\overline{NO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{NP}$.
- Se traza el segmento $\overline{MP}$.



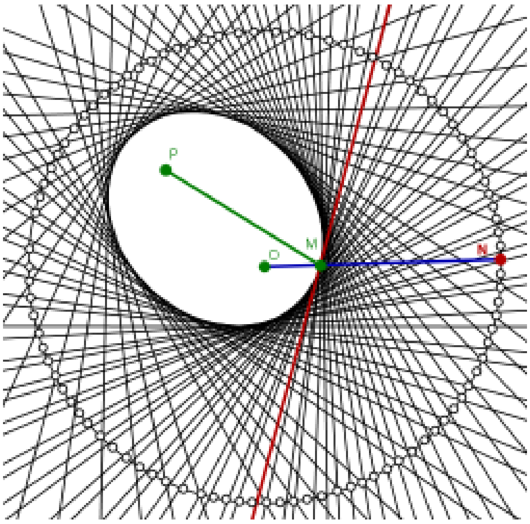
Si se realiza este proceso en la figura construida anteriormente, ¿se podría afirmar que el punto M pertenece a la figura envuelta por las mediatrices? ¿Por qué?



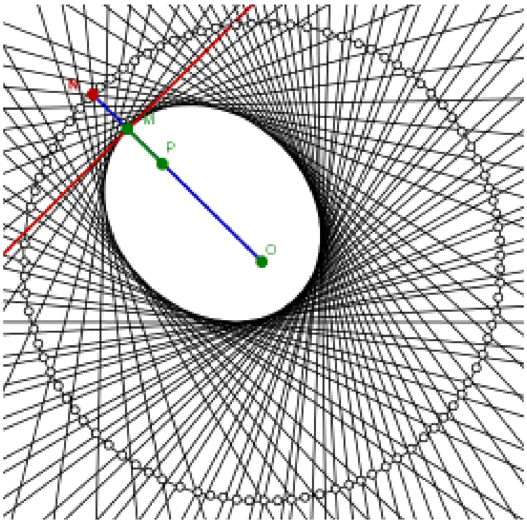
24. Sabiendo que r es el radio de la circunferencia ¿cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$? ¿Por qué?



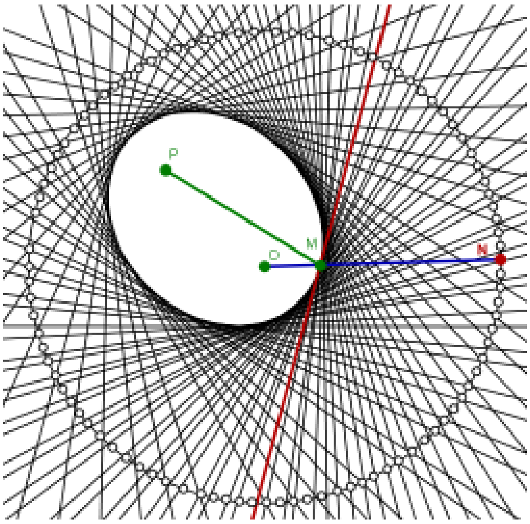
25. Se marca otro punto N de la circunferencia y se realiza el proceso mencionado anteriormente. ¿Cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$?



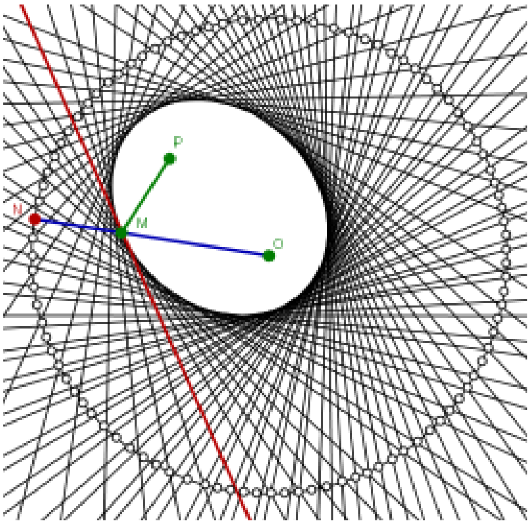
26. De nuevo se marca otro punto N de la circunferencia, tal que N, P y O estén sobre una misma recta y se realiza el proceso mencionado anteriormente. ¿Cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$?



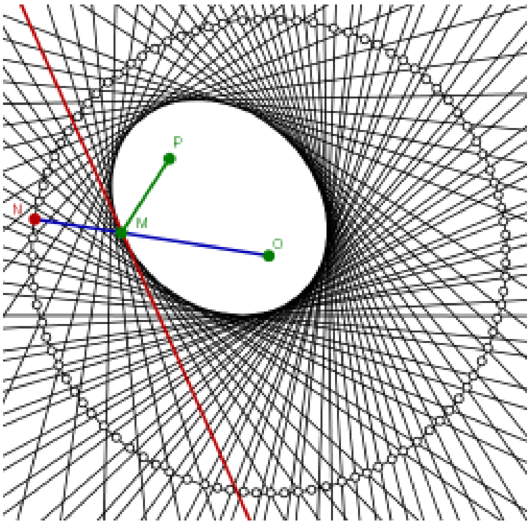
27. Si se marca un punto cualquiera N sobre la circunferencia y se realiza de nuevo el proceso, ¿es posible afirmar que el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia? ¿Por qué?



28. Si M es un punto que pertenece al contorno de la figura, ¿es posible afirmar que la suma de sus distancias a los puntos específicos O y P es una constante? ¿Por qué?



29. ¿Cuál es la propiedad que cumplen los puntos de la figura formada?



Aporte de información:
La figura envuelta por el conjunto de mediatrices construido, recibe el nombre de elipse.

30. ¿Es la elipse un lugar geométrico? ¿Por qué?

31. Si se realiza otra vez la figura, pero ubicando el punto P en otro lugar de la región limitada por la circunferencia ¿cómo crees que quedaría la figura? Descríbela.

5.4 CARACTERÍSTICAS DE NUESTRO GUIÓN DE ENTREVISTA DESPUÉS DEL PROCESO VIVIDO POR LOS CINCO ESTUDIANTES DEL ESTUDIO DE CASOS.

Después de analizar el proceso de razonamiento de los cinco estudiantes del estudio de casos, nuestro guión de entrevista refinado de carácter socrático, cumple con las siguientes diez características:

Intencionalidad de la entrevista: Nuestra entrevista individual tuvo una doble intención: caracterizar la comprensión de los estudiantes y motivarlos a avanzar en su nivel de razonamiento frente al concepto de elipse como lugar geométrico. El paso por la entrevista permitió clasificar cuatro estudiantes en el nivel III de razonamiento y a uno, en el nivel II.

Además, el entrevistador, en todo momento, tuvo muy claro cuáles eran los conceptos que debían permanecer encubiertos y cuáles debían ser explicitados por el estudiante.

El lenguaje: Nuestra entrevista individual se diseñó y se refinó con un vocabulario común, de acuerdo con el grado de escolaridad de nuestros estudiantes. La idea siempre fue motivarlos para que respondieran las preguntas de forma espontánea, con confianza y sin temor a equivocarse. Además, en todo momento, se tuvo en cuenta que el lenguaje utilizado por el estudiante era un factor determinante para descubrir el nivel en el que estaba razonando. La forma como el estudiante se expresaba, el tipo de vocabulario que utilizaba y sus gestos, nos permitieron descubrir finalmente el nivel en el que estaba razonando.

Los conceptos básicos: Las primeras preguntas de nuestra entrevista apuntaban a los conceptos previos que debían tener los estudiantes para poder avanzar en su nivel de razonamiento, es decir, estas preguntas nos permitían saber si el estudiante había superado el nivel 0 de razonamiento. Las preguntas 1, 2, 3, 4 y 12 estaban relacionadas con los conceptos básicos que se requerían para que el estudiante pudiera llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Algunos de nuestros estudiantes manifestaron tener dificultades con los conceptos primitivos de la geometría euclidiana. Sin embargo, aunque es importante que los estudiantes los comprendieran, no se enfatizó mucho en mejorar su comprensión porque no los percibían como entes abstractos. Por lo tanto, nuestra entrevista tiene preguntas alusivas a los conceptos básicos indispensables para la comprensión del concepto de elipse.

Las experiencias previas del entrevistado: Las preguntas de nuestra entrevista son preguntas "inquisitivas", es decir, preguntas intencionadas que conducen a la búsqueda de lo que se quiere llegar a conocer. Estas les brindaron la posibilidad a los estudiantes de reflexionar y de responder de acuerdo con sus experiencias vividas y con los conocimientos que habían adquirido a lo largo de su vida. Nuestros cinco estudiantes intentaron responder las preguntas basados en sus experiencias, en las entrevistas grupales y en las clases de geometría o en experiencias de su vida cotidiana en general. Por ejemplo, dos de los estudiantes relacionaron la figura envuelta por el conjunto de mediatrices con un óvalo; otros dos la relacionaron con la forma de un huevo y otra, no mencionó ninguna relación, sólo explicó que no era una circunferencia. Uno de los aspectos fundamentales del guion entrevista fue que tuvo en cuenta las experiencias previas vividas por los estudiantes.

Diálogo inquisitivo: Nuestra entrevista individual se caracterizaba porque el entrevistador no enseñaba nada al entrevistado, sino que estimulaba el razonamiento del entrevistado mediante la indagación y el pensamiento discursivo. La idea era que el estudiante descubriera relaciones, manifestara soluciones y pudiera llegar a la comprensión del concepto, con base en su propia reflexión y razonamiento. Nuestros cinco estudiantes pasaron por varios diálogos socráticos, con aportes de información y preguntas intencionadas, para que pudieran llegar a la comprensión de algunos conceptos o procedimientos indispensables para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Por ejemplo, todos tuvieron que pasar por un diálogo inquisitivo cuando se les preguntó por primera vez sobre la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$. Incluso, la mayoría de los estudiantes tuvo que pasar por un segundo diálogo socrático, cuando se les hizo la misma pregunta en una situación similar.

Pensamiento discursivo: En nuestra entrevista individual, se hizo necesario hacer una misma pregunta varias veces, para que el estudiante en un primer momento diera a conocer lo que sabía al respecto y, en un segundo o tercer momento, diera respuestas más elaboradas, porque había logrado ampliar o modificar su red de relaciones. Por ejemplo, las preguntas 11, 20, 24, 25 y 26 se refieren a la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$, que es la constante r, en diferentes situaciones similares. Los cinco estudiantes tuvieron dificultad cuando se les presentó la pregunta 11, pero con la ayuda de un diálogo socrático, pudieron llegar a la respuesta. En la pregunta 20, cuatro de los estudiantes lograron relacionarla con la pregunta 11 y obtuvieran rápidamente la respuesta. En las otras tres preguntas, los estudiantes dieron respuestas más elaboradas, excepto uno, que tuvo dificultades en visualizar la suma de esos segmentos en las cinco preguntas alusivas a este procedimiento. Por eso, no pudo avanzar al nivel III de razonamiento. Por lo tanto, nuestra entrevista cumple con esta característica.

Aportes de información: Durante la entrevista se dieron cuatro aportes de información, sobre el concepto de mediatriz, de equidistancia, de lugar geométrico y de elipse. Estos aportes fueron realmente importantes para que los estudiantes pudieran razonar y llegar a la comprensión del concepto objeto de estudio. Cuatro de los cinco estudiantes pudieron llegar a la comprensión de la elipse como lugar geométrico, con base en las relaciones que lograron establecer con estos aportes de información. Estos también fueron refinados en su escritura o suprimidos si no eran realmente necesarios, pues se requería que fueran fáciles de comprender y que en realidad contribuyeran con el razonamiento del estudiante.

Problematización con las ideas: Algunas de las preguntas de nuestra entrevista individual provocaron que los estudiantes se sintieran realmente confundidos o manifestaran un estado de contradicción interna o un estado de confrontación entre las ideas que ya tenían y las ideas que les llegaban nuevas. Por ejemplo, los cinco estudiantes se sintieron confundidos cuando se les preguntó por primera o segunda vez, por la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$. Hubo necesidad de que el entrevistador les ayudara con diálogos inquisitivos para que elaboraran, ampliaran o modificaran su red de relaciones. Algunos de los estudiantes también se sintieron confundidos cuando se les preguntó por la propiedad que cumplen los puntos de la figura envuelta por el conjunto de mediatrices (elipse), pues no habían hecho la asociación entre la suma de segmentos y la figura envuelta.

El paso por los tres momentos: En algunos instantes de nuestra entrevista, los estudiantes pasaron por tres momentos cruciales: primero, creían saber la respuesta; segundo, se dieron cuenta que no sabían la respuesta y por último, al permanecer en un estado de contradicción interna, sintieron la necesidad de hallar la verdad. Los cinco estudiantes pasaron por los tres momentos cuando se les preguntó por primera o segunda vez, por la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$.

La red de relaciones: Nuestra entrevista individual se diseñó de tal manera que el estudiante pudiera construir una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, con base en la visualización que permite el doblado de papel y en los conceptos de mediatriz y de circunferencia como lugares geométricos. De hecho, los estudiantes debieron comprender el concepto de mediatriz y circunferencia como lugares geométricos y finalmente, con base en estos dos conceptos, establecer que la elipse también es un lugar geométrico. Cuatro de los cinco estudiantes lograron construir una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, involucrando los conceptos de mediatriz, circunferencia, equidistancia, suma de dos segmentos determinados, entre otros. Uno de ellos, no pudo establecer las relaciones suficientes para determinar la propiedad que cumple el conjunto de puntos para pertenecer a la elipse como un lugar geométrico, por eso no pudo avanzar al nivel III.

Nuestra entrevista cumplió con las diez características de una entrevista semiestructurada de carácter socrático.

5.5 ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS DEL GUIÓN A LA LUZ DE LOS DESCRIPTORES Y DEL TIPO DE PREGUNTA.

El aspecto socrático de la prueba y su articulación con los descriptores de nivel, permitieron caracterizar el razonamiento de los estudiantes. La estructura de las preguntas inquisidoras está articulada a la red de relaciones que un estudiante debe lograr al final de la entrevista, alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, con base en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel.

El mecanismo utilizado en la entrevista para que el estudiante llegue a la comprensión del concepto elipse como lugar geométrico, es a través de la comprensión primero de la mediatriz y, segundo, de la circunferencia como lugares geométricos. Es importante resaltar la red de relaciones que se construye alrededor, con conceptos como mediatriz, lugar geométrico, equidistancia, circunferencia, entre otros.

Pregunta 1 y 2: Son preguntas que pretenden darle confianza al estudiante, con el propósito de que no pierda la motivación y continúe su razonamiento a lo largo de la entrevista. Estas dos preguntas se relacionan directamente con el descriptor 0.1, e implícitamente con el descriptor 0.3. La idea es que el estudiante pueda determinar que por dos puntos pasa una única recta y un único doblez.

Pregunta 3: También es una pregunta inicial que busca garantizar el nivel 0 de razonamiento, en cuanto que plantea un "caso fácil" (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 78) para aquellos estudiantes que tienen claro el concepto de segmento. Además, se relaciona directamente con el descriptor 0.2 y de manera implícita con el descriptor 0.3.

Pregunta 4: Pregunta que dentro del contexto del socratismo, "plantea un caso fácil" (p. 78), para que el estudiante no pierda la motivación de continuar con la entrevista. Sin embargo, para algunos de los estudiantes la respuesta no fue inmediata, dado que tuvieron que realizar varios dobleces para poder determinar el punto medio del segmento. Esta pregunta se relaciona indirectamente con el descriptor 0.2. Además, es el primer paso para que el estudiante reconozca la mediatriz de un segmento como una perpendicular que pasa por el punto medio de dicho segmento. Incluso, con la construcción del punto medio, el estudiante puede reconocer la congruencia de segmentos y construir rectas perpendiculares (descriptores 0.4 y 0.5).

Pregunta 5: Es una pregunta clave porque nos sirve para marcar la separación entre el nivel 0 y el nivel I de reconocimiento visual. Esta pregunta se relaciona directamente con el descriptor 1.1. Dos de nuestros estudiantes percibieron que el doblez pasaba por el punto medio, pero no lograron visualizar que el doblez y el segmento eran perpendiculares. Los otros tres estudiantes pudieron percibir que el doblez pasaba por el punto medio y que era perpendicular al segmento.

Pregunta 6: Es una pregunta que comprueba un hecho fundamental acerca de la mediatriz de un segmento. Es necesario realizar otras preguntas para descubrir el nivel de razonamiento. Para la mayoría de los estudiantes fue claro que R era el punto medio del segmento. Esta pregunta se relaciona directamente con los descriptores 0.4 y 1.1.

Pregunta 7: Es una pregunta que se formula de una forma no comprometedora para el estudiante, pero que es coherente con las demás. Es una pregunta que maneja información de forma explícita. Tres de los cinco estudiantes pudieron percibir que hay una relación de perpendicularidad, y lo justificaron comparando con una hoja de papel de forma cuadrada. Los otros dos tuvieron que pasar por un diálogo socrático para poder recordar el concepto de perpendicularidad. Esta pregunta se relaciona directamente con los descriptores 0.5 y 1.1.

Aporte de información 1: Este aporte de información es muy importante porque le fija al estudiante una información que se ha venido trabajando de manera enmascarada en las preguntas 6 y 7 sobre el concepto de mediatriz, como la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio. Este aporte sintetiza y corrobora las respuestas de las preguntas 6 y 7, con el fin de que el estudiante logre una mayor comprensión. Después de este aporte, algunos de nuestros estudiantes comprendieron que el doblez que permite llevar un punto extremo de un segmento sobre el otro punto extremo, es la mediatriz del segmento y lo mostraron en la construcción.

Pregunta 8: Es una pregunta que comprueba hechos fundamentales acerca de la mediatriz de un segmento, pero es necesario realizar otras preguntas para poder determinar el nivel en el que está razonando un estudiante. Esta pregunta se relaciona indirectamente con los descriptores 1.1 y 2.2, dado que el estudiante ya reconoce la construcción de la mediatriz, pero todavía no sabe cuál es la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a esta. Sólo logra establecer en esta pregunta que un punto determinado de la mediatriz está a una misma distancia de los extremos del segmento.

Aporte de información 2: Con este aporte de información, el estudiante puede comprender que cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. Sin embargo, tres de nuestros estudiantes presentaron dificultades con el concepto porque se les olvidaba este hecho o lo utilizaban de forma errónea.

Pregunta 9: Pregunta clave que marca la separación entre el nivel I y el nivel II. Además, es una pregunta base que obliga a que el estudiante se exprese con términos precisos y coherentes. Esta pregunta se relaciona directamente con el descriptor 2.2. La respuesta a esta pregunta es el primer paso para determinar que la mediatriz es un lugar geométrico. Pero en este momento del proceso, los estudiantes aún desconocen este concepto. Algunos de nuestros estudiantes presentaron dificultad para comprender esta generalización, pues no percibían el concepto de equidistancia y por lo tanto, debieron hacer un esfuerzo para explicar, mediante el doblado, la igualdad de las distancias a los extremos del segmento.

Aporte de información 3: Este aporte de información es fundamental, en cuanto el estudiante logra comprender que, tanto la mediatriz como la elipse, son lugares geométricos.

Pregunta 10: Es una pregunta que crea situaciones incómodas que requieren mayor reflexión por parte del estudiante. Algunos de nuestros estudiantes se sintieron confundidos, pues no habían logrado establecer la relación entre la pregunta 9 y la pregunta 10. Incluso, algunos de ellos tuvieron que pasar por un diálogo socrático con preguntas inquisitivas, para que pudieran determinar la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y poderla definir como lugar geométrico. Esta pregunta se relaciona directamente con los descriptores 2.2 y 2.5.

Pregunta 11: Se relaciona directamente con el descriptor 3.1. Es una pregunta que rompe con un esquema de oposición. De hecho, es una pregunta que genera situaciones incómodas en el estudiante, pues necesita de mayor reflexión dado que es la suma de dos segmentos que no son colineales. La respuesta a esta pregunta necesita del conocimiento de la mediatriz como lugar geométrico y de un proceso de transitividad, que es difícil de percibir. Nuestros cinco estudiantes presentaron ciertos conflictos con esta pregunta, porque se les dificultó relacionar esa suma con la constante r; incluso tuvieron problemas en establecer la relación entre varias situaciones: la mediatriz como lugar geométrico, la suma de dos segmentos no colineales y la transitividad entre dos segmentos con igual medida. Eso la convierte en una pregunta de quiebre con la que el estudiante pasa por los tres momentos: creer saber la respuesta, darse cuenta que no la sabe y sentirse tan confundido que siente la necesidad de hallar la respuesta correcta.

Pregunta 12: Pregunta que podría plantear un caso fácil para el estudiante. Aunque indaga por un proceso de razonamiento infinito. Incluso, el propósito es determinar si el estudiante reconoce adecuadamente los conceptos básicos necesarios que hacen parte del nivel 0 de razonamiento. Se relaciona directamente con el descriptor 0.2 y de manera implícita con el descriptor 0.3.

Pregunta 13: Pregunta que maneja cierta información explícita. El estudiante debe utilizar esta información para sacar a relucir sus ideas acerca de la forma de trasladar un punto, conservando su distancia al punto particular O. Además, es una pregunta que se formula de una forma no necesariamente comprometedora para el estudiante. Esta pregunta está directamente relacionada con el descriptor 1.2.

Pregunta 14: Pregunta que comprueba un hecho fundamental acerca de la circunferencia. Es necesario realizar preguntas para poder detectar el nivel en el que está razonando el estudiante. Según la respuesta del estudiante, es posible percibir que se quedó en la construcción concreta con el doblado o que avanzó en la confirmación de que todos los puntos trasladados equidistan del centro. Esta pregunta también es una pregunta clave, pues marca la separación entre el nivel I y el nivel II, ya que se relaciona directamente con el descriptor 1.2 y el descriptor 2.3.

Pregunta 15: Es una pregunta coherente con las demás. Su respuesta requiere de reflexión por parte del estudiante, pues se está indagando por un proceso de razonamiento infinito. Se relaciona directamente con el descriptor 1.2.

Pregunta 16: Es una pregunta clave que marca la separación entre el nivel I y el nivel II. Además, es una pregunta base que obliga a que el estudiante se exprese con términos más precisos y determinar si su razonamiento es coherente con respuestas a preguntas similares, por ejemplo la pregunta 14, cuyo propósito es indagar por la misma idea pero a otro nivel de pensamiento. Se relaciona directamente con los descriptores 2.3 y 2.5.

Pregunta 17: Es una pregunta de fijación sobre el concepto de mediatriz y su construcción mediante el doblado de papel. Es importante que el estudiante reconozca la construcción de llevar un punto sobre otro y generar la mediatriz del segmento. Se relaciona directamente con el descriptor 2.1

Pregunta 18: Es una pregunta de fijación sobre el concepto de mediatriz como lugar geométrico. Además, es una pregunta que necesita cierta reflexión, pues requiere un proceso de razonamiento infinito. Se relaciona directamente con el descriptor 2.1.

Pregunta 19: Es una pregunta que podría crear situaciones incómodas en el estudiante, pues requiere de mayor reflexión y de un proceso de razonamiento infinito. La mayoría de nuestros estudiantes lograron visualizar que se formó una circunferencia, pero les dio cierta dificultad justificar tal afirmación. Algunos de ellos dijeron que era una circunferencia porque sus puntos equidistaban del centro, pero no lograron percibir cuál era la distancia y por qué los puntos en realidad sí equidistaban del centro. Esta pregunta se relaciona directamente con el descriptor 2.4.

Pregunta 20: Es una pregunta de fijación, pues ya se había trabajado una situación similar en la pregunta 11. Pero sigue siendo una pregunta problemática que generó contradicciones internas en algunos de nuestros estudiantes, pues todavía manifestaron dificultades en establecer las relaciones necesarias para llegar a la respuesta correcta. Se relaciona indirectamente con el descriptor 3.1.

Pregunta 21: Es una pregunta con un mensaje subliminal que busca estimular al estudiante a que saque a relucir sus ideas y que “muestre su razonamiento y se comprometa con los juicios que manifiesta" (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 78). Tres de nuestros cinco estudiantes: Leti, Jhon y Carlos se aventuraron a decir que de la construcción surgiría una circunferencia. Laura dijo que no tenía la más mínima idea y Rosi, afirmó que se formaría un hexágono. Esta pregunta se relaciona indirectamente con el descriptor 1.3.

Pregunta 22: Es una pregunta que crea situaciones incómodas para el estudiante, dado que requiere de mayor reflexión. "Pone el esquema mental de los estudiantes en crisis" (p. 78), porque ninguno de ellos se imaginó que quedaría una figura como esa. Incluso, todos nuestros estudiantes se sorprendieron con la figura que resultaba de la construcción realizada. Ninguno de ellos dio el nombre correcto: dos de ellos pensaron que era un óvalo, otros dos pensaron que tenía forma de huevo y una, no mencionó la forma. Con esta pregunta, los estudiantes debían comprobar y justificar que el concepto de circunferencia como lugar geométrico se cumplía o no se cumplía en la figura construida. La mayoría de nuestros estudiantes explicaron que no era una circunferencia, pero no señalaron propiedades ni partes constitutivas de la figura. Se relaciona con los descriptores 1.5 y 2.3.

Pregunta 23: Esta pregunta plantea un "caso fácil" (p. 78) para que no se pierda la motivación de continuar con la entrevista. Pregunta que se basa en la visualización de la figura construida. Se relaciona indirectamente con el descriptor 1.3.

Preguntas 24, 25 y 26: Son preguntas cuyo carácter es de fijación. Sin embargo, también se convierten en preguntas clave que marca la separación entre el nivel II y el nivel III. Estas preguntas siguen siendo problemáticas, dado que todavía hay estudiantes que se confunden y se hace necesario el diálogo inquisitivo para confrontar sus dificultades conceptuales. La pregunta 26 requiere de mayor reflexión, dado que hay segmentos que se traslapan y esto genera una situación incómoda para el estudiante. Se relacionan directamente con el descriptor 3.1.

Pregunta 27: Es una pregunta que invita a la reflexión sobre lo tratado hasta el momento. Es una pregunta resumen de las tres anteriores. De hecho, indaga por un proceso de razonamiento infinito. Se relaciona directamente con el descriptor 3.1.

Preguntas 28 y 29: Son preguntas base porque le brindan a los estudiantes la oportunidad de expresarse en términos más precisos y más rigurosos. Nos permiten, a nosotros como investigadores, indagar si el estudiante ya está empezando a razonar en el nivel III de razonamiento. Durante las entrevistas, observamos que eran preguntas que creaban situaciones incómodas en los estudiantes, porque sus respuestas requerían de mayor reflexión, pues debían relacionar información que se había manejado de manera implícita en las cuatro preguntas anteriores 24, 25, 26 y 27. Ambas se relacionan directamente con los descriptores 3.1 y 3.2. En particular, la pregunta 29 es una pregunta que comprueba un "hecho fundamental" (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 78) sobre la propiedad que cumplen los puntos de la figura envuelta. Nos permite confirmar si el estudiante realmente está razonando en el nivel III.

Aporte de información 4: Se pretende informar al estudiante el nombre de la figura envuelta por el conjunto de mediatrices, cuando se llevan puntos de la circunferencia sobre un punto P, ubicado en la región limitada por esta.

Pregunta 30: Crea situaciones incómodas para el estudiante, pues requiere de mayor reflexión. Es una pregunta base en cuanto le brinda la oportunidad al estudiante de expresarse con un lenguaje matemático. De hecho, es una pregunta que se formula con un lenguaje característico del nivel III, en cuanto sus respuestas requieren la asociación de ciertas propiedades trabajadas en preguntas anteriores, tales como: la suma de dos segmentos determinados que era el radio de la circunferencia, r es una constante, la mediatriz como lugar geométrico, los puntos M como puntos pertenecientes al contorno de la elipse y puntos fijos O y P. Dicha asociación confirma que es una pregunta que invita a la reflexión sobre lo tratado hasta el momento, incluso, se formularon sin ninguna imagen. Se relaciona directamente con los descriptores 3.2 y 3.3.

Pregunta 31: Comprueba hechos fundamentales sobre la construcción de la elipse mediante el doblado de papel. Se relaciona directamente con el descriptor 2.7.

5.6 ANÁLISIS ESTADÍSTICO.

5.6.1 Descripción y estructura del test escrito.

Nuestro objetivo en este trabajo de investigación fue el diseño de una entrevista semiestructurada de carácter socrático, que nos permitiera caracterizar el proceso de comprensión de un estudiante del concepto de elipse como lugar geométrico y, a su vez, le permitiera a dicho estudiante, avanzar en su nivel de razonamiento. Debido a que la entrevista individual requería de tanto tiempo y de diálogos inquisitivos para que éste pudiera alcanzar la comprensión del concepto objeto de estudio, no fue posible su aplicación a un gran número de estudiantes para lograr alguna generalización. Además, por su carácter semiestructurado, la entrevista también dependía de la subjetividad del entrevistador, dado que era él quien evaluaba y analizaba el proceso de comprensión de cada estudiante, de acuerdo con unos descriptores establecidos.

Aunque, dentro de nuestros objetivos no se encontraba la aplicación de la entrevista a una muestra numerosa de estudiantes, se elaboró un test como aporte adicional al trabajo de investigación, para lograr sistematizar los resultados de la entrevista y, de esta manera, poder caracterizar el proceso de comprensión de una gran cantidad de estudiantes y ubicarlos en uno de los niveles de razonamiento. Este test contó con 31 preguntas, cada una de estas con cinco opciones de respuesta. Cuatro de estas opciones se relacionaban con las respuestas más representativas que surgieron en la aplicación de la entrevista a los cinco estudiantes del estudio de casos. La otra opción de respuesta era abierta para darle la oportunidad al estudiante de responder de acuerdo con su proceso de razonamiento.

A cada estudiante se le dio una hoja de respuestas, donde debían ingresar una información básica e indispensable para nuestro análisis: institución, grado o semestre, edad y sexo. También se les ofrecieron unas instrucciones específicas para que tuvieran en cuenta en el discurrir de la prueba (Ver las instrucciones en el Anexo B). Entre las instrucciones, se les dijo que sólo debían elegir una de las cinco opciones dadas (a, b, c, d, e). Además, se les advirtió que la respuesta e, en todas las preguntas, equivalía a ninguna de las anteriores y, en caso de ser elegida, debían escribir la respuesta que ellos consideraban pertinente. Se les pidió también que no pasaran a la pregunta siguiente sin haber respondido la anterior y que bajo ninguna circunstancia se devolvieran a preguntas ya abordadas.

Cada una de las preguntas del test se ubica en uno de tres bloques de preguntas que corresponden a los niveles I, II y III, de acuerdo con los descriptores de nivel que surgieron del trabajo de campo. Esto con el fin de caracterizar la comprensión de cada estudiante que responda el test y descubrir el nivel en el que está razonando. Estos bloques de preguntas son:

Bloque 1: Preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 21, 23 (11 preguntas). Estas preguntas se relacionan con los descriptores de los niveles 0 y I. El estudiante debe realizar y reconocer las construcciones de la mediatriz, la circunferencia y la elipse, mediante el doblado de papel. Además, algunas preguntas se relacionan con los conceptos básicos que se requieren para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Es importante resaltar que hay preguntas que se centran en estimular procesos de razonamiento infinito.

Bloque 2: Preguntas 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 31 (11 preguntas). Estas preguntas se relacionan directamente con los descriptores del nivel II. El estudiante debe comprender que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos y debe establecer las propiedades que deben cumplir los puntos para pertenecer a esos lugares. Además, de acuerdo con la construcción de la elipse, debe identificar algunas propiedades o partes de esta, como estar envuelta por un conjunto de mediatrices, tener en el interior dos puntos fijos o, incluso, explicar por qué no es una circunferencia. Estas preguntas, en general, pretenden que el entrevistado pase por los tres momentos mencionados en el decálogo de una entrevista de carácter socrático:

creer saber la respuesta, darse cuenta que no sabe la respuesta y, por último, al estar en un conflicto interno, manifiesta la necesidad de llegar a la respuesta correcta.

Bloque 3: Preguntas 11, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 (9 preguntas). Estas preguntas se relacionan directamente con los descriptores del nivel III. El estudiante debe establecer la condición para que un conjunto de puntos pertenezca a la elipse. Para ello, debe visualizar y justificar una suma específica de dos segmentos y relacionarla con el radio de la circunferencia con la que se inició la construcción. Este es el primer paso para establecer que la elipse es un lugar geométrico y manifestar la necesidad de llegar a la definición de la misma. Por lo tanto, con estas preguntas se pretende que el estudiante comprenda el concepto de elipse como lugar geométrico.

La siguiente tabla muestra las respuestas más precisas, desde el punto de vista geométrico, a las 31 preguntas del test:

Tabla 4: Mejores opciones de respuesta del test.

Pregunta	**Mejor opción de respuesta**	**Pregunta**	**Mejor opción de respuesta**	**Pregunta**	**Mejor opción de respuesta**
1	C	12	A	23	B
2	D	13	C	24	D
3	B	14	C	25	D
4	C	15	D	26	D
5	D	16	B	27	D
6	A	17	D	28	C
7	C	18	D	29	C
8	A	19	B	30	D
9	C	20	A	31	A
10	D	21	B		
11	B	22	D		

5.6.2 Participantes.

El objetivo de nuestra investigación no era la realización de un análisis estadístico, dado que estaba orientada bajo un paradigma cualitativo y nuestro análisis de la comprensión se centró sólo en cinco estudiantes. Sin embargo, como un aporte adicional, quisimos realizar un test para caracterizar la comprensión del concepto de elipse de un gran número de estudiantes y ubicarlos en uno de los niveles de acuerdo a su razonamiento. Este test se aplicó a un grupo piloto de 70 estudiantes, de los cuales 23 eran estudiantes universitarios y los demás, estudiantes de décimo grado de un colegio privado de la ciudad de Medellín.

La siguiente tabla resume las principales características de los grupos y subgrupos:

Tabla 5: Características de los grupos y de los subgrupos que respondieron el test.

Grupos	Subgrupos	Características	Total estudiantes
Universitarios de una Universidad pública de la ciudad de Medellín.	Un grupo de Cálculo I del programa Microbiología Industrial y Ambiental.	Edades entre 18 y 26 años. Semestre: 2 en el primer semestre; 14 en el segundo semestre; 3 en el tercer semestre; 2 en el cuarto semestre y 2 en el quinto semestre. Hay 17 mujeres y 6 hombres.	23
Estudiantes de secundaria de un Colegio Privado de la ciudad de Medellín.	Décimo A	Edades entre 15 y 17 años. Hay 14 mujeres y 16 hombres.	30
	Décimo B	Edades entre 15 y 16 años. Hay 5 mujeres y 12 hombres.	17

Total	70

Las siguientes gráficas nos muestran las características principales de los participantes, de acuerdo a su grupo, a su edad y a su género.

Tabla 6: Gráfica del porcentaje de los estudiantes que participaron en el test, según el grupo al que pertenecen.

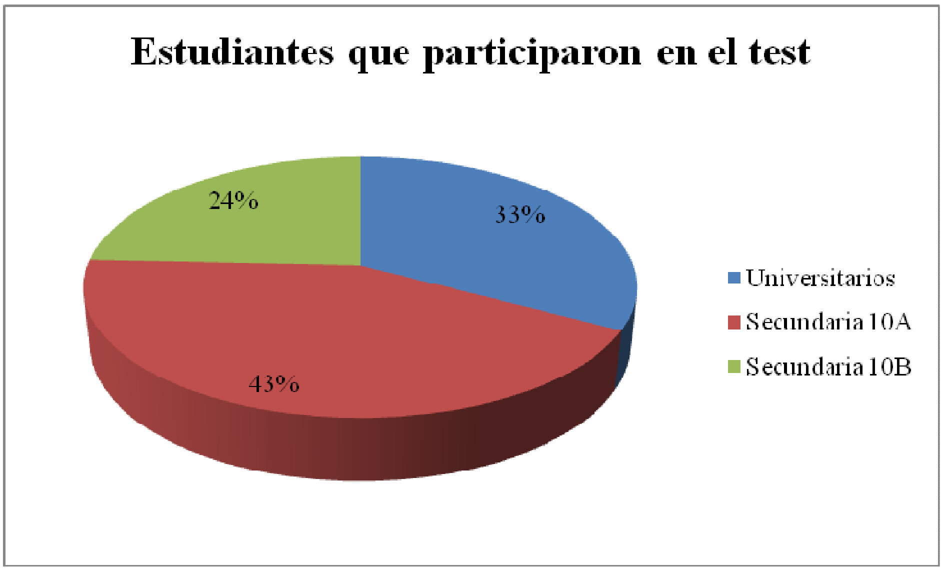


Tabla 7: Frecuencia de la edad de los estudiantes que participaron en el test.

Edad	Frecuencia
15	13
16	31
17	2
18	5
19	7
20	6
21	3
25	1
26	1
NR	1
Total general	**70**

Tabla 8: Número de estudiantes que participaron en el test de acuerdo a su edad.

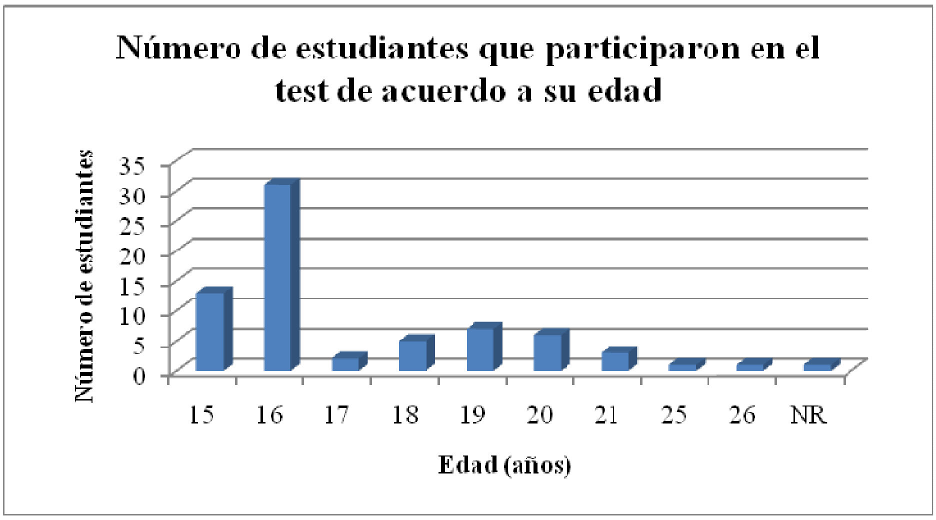
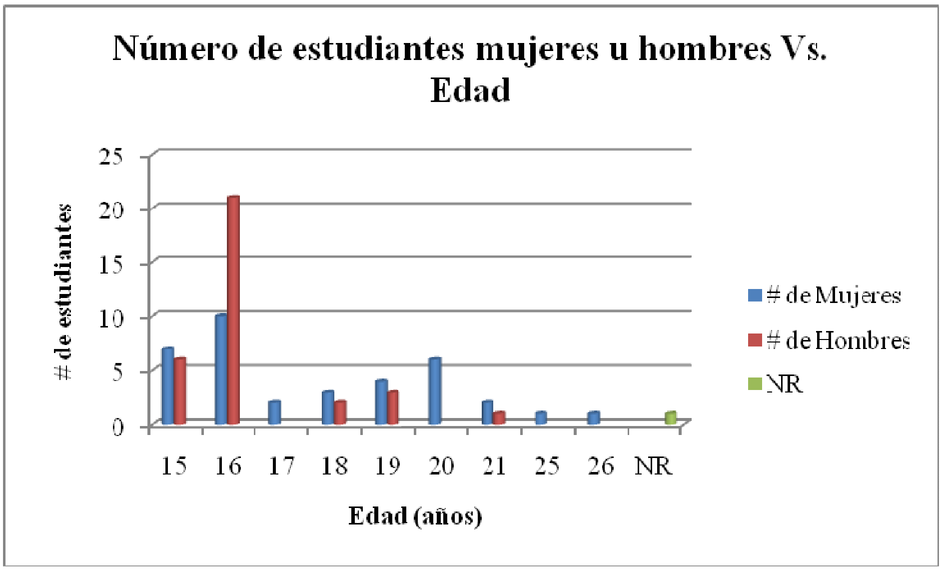


Tabla 9: Relación entre la edad y el género de los estudiantes que participaron en el test.

Edad	# de Mujeres	# de Hombres	NR	Total
15	7	6		13
16	10	21		31
17	2			2
18	3	2		5
19	4	3		7
20	6			6
21	2	1		3
25	1			1
26	1			1
NR			1	1
Total general	**36**	**33**	**1**	**70**

Tabla 10: Gráfica de número de estudiantes según su género Vs. edad.



5.6.3 Análisis de las respuestas de los estudiantes por bloques de preguntas.

A continuación se presenta un breve análisis de las respuestas correctas de los estudiantes por bloques de preguntas. Es importante tener en cuenta que el análisis estadístico de cada pregunta se presenta en el anexo D.

Bloque 1:

La siguiente tabla nos muestra la frecuencia y el porcentaje respectivo de respuestas correctas de los estudiantes en las preguntas del bloque 1:

Tabla 11: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas del bloque 1.

Bloque 1	Frecuencia (# de estudiantes)	Porcentaje
P1	55	78,6%
P2	46	65,7%
P3	51	72,9%
P4	51	72,9%
P5	28	40,0%
P6	38	54,3%

P7	52	74,3%
P12	43	61,4%
P13	41	58,6%
P21	57	81,4%
P23	52	74,3%
Promedio	**47**	**66,8%**

Se puede observar que entre el 60% y el 70% de los estudiantes están razonando en el nivel I o en niveles superiores, porque han logrado superar las habilidades, conocimientos o características de niveles inmediatamente anteriores.

Bloque 2:

La siguiente tabla nos muestra la frecuencia y el porcentaje respectivo de respuestas correctas de los estudiantes en las preguntas del bloque 2:

Tabla 12: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas del bloque 2.

Bloque 2	**Frecuencia (# de estudiantes)**	**Porcentaje**
P8	22	31,4%
P9	29	41,4%
P10	29	41,4%
P14	49	70,0%
P15	43	61,4%
P16	61	87,1%
P17	28	40,0%
P18	29	41,4%
P19	30	42,9%
P22	51	72,9%
P31	46	65,7%
Promedio	**38**	**54,2%**

El bloque 2 se relaciona directamente con el nivel II de razonamiento. Se puede percibir que los porcentajes más altos, en cada una de estas preguntas, se relacionan con la respuesta correcta. Parece ser que entre el 50% y el 60% de los estudiantes ya están razonando en el nivel II de análisis.

Bloque 3:

La siguiente tabla nos muestra la frecuencia y el porcentaje respectivo de respuestas correctas de los estudiantes en las preguntas del bloque 3:

Tabla 13: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas del bloque 3.

Bloque 3	Frecuencia	Porcentaje
P11	35	50,0%
P20	36	51,4%
P24	27	38,6%
P25	21	30,0%
P26	50	71,4%
P27	46	65,7%
P28	49	70,0%
P29	53	75,7%
P30	60	85,7%
Promedio	**42**	**59,8%**

Las preguntas del bloque 3 se relacionan directamente con los descriptores del nivel III de razonamiento. Se puede percibir que aproximadamente entre el 50% y el 60% de los estudiantes respondieron acertadamente estas preguntas y, tal vez, pudieron alcanzar los conocimientos, las habilidades y las características del nivel III de razonamiento.

El anterior análisis se hizo de manera grupal y no nos dice mucho acerca del avance en el nivel de razonamiento de un estudiante determinado, dado que la comprensión es individual. Para ello, se hace necesario utilizar otras herramientas estadísticas que nos permitan ubicar realmente a un estudiante en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele.

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan los principales resultados que se obtuvieron en el estudio. En particular, se responde la pregunta de investigación y se plantean otras propuestas que podrían ser futuras líneas de investigación.

6.1 CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS.

6.1.1 Objetivo general.

El objetivo general que nos propusimos en este estudio, fue "*analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele, utilizando la geometría del doblado de papel, con los estudiantes del grado décimo de una I.E de la ciudad de Medellín o con estudiantes universitarios de primeros semestres de cursos de matemáticas básicas*". Para la consecución de este objetivo, realizamos las siguientes actividades:

Planteamos unos descriptores hipotéticos de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, basados en los postulados del modelo de Van Hiele, en la temática particular y en la experiencia docente en la enseñanza de la elipse. Estos descriptores se fueron refinando a medida que se avanzaba en el trabajo de campo.

Diseñamos un guión de entrevista preliminar de carácter socrático, con preguntas inquisitivas basadas en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel y con aportes de información, para que nos permitiera caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes frente al concepto de elipse como lugar geométrico. Este guión de entrevista estaba diseñado de tal manera que las preguntas correspondieran con los descriptores hipotéticos antes planteados. Tanto la entrevista, como los descriptores fueron corregidos, ampliados o mejorados durante la fase de experimentación con los estudiantes del estudio de casos.

Realizamos entrevistas individuales, con cada uno de los cinco estudiantes del estudio de casos, para analizar su comprensión del concepto de elipse y caracterizar su proceso de razonamiento a la luz de los descriptores. Entre los factores determinantes para detectar el nivel en el que estaba razonando, se encuentran la forma como el estudiante se expresaba, es decir, el lenguaje utilizado, la ampliación o modificación de su vocabulario, sus gestos y la forma en que salía de sus estados de conflicto interno.

Esto permitió caracterizar su comprensión y ubicarlo en uno de los niveles, de acuerdo con nuestros descriptores propuestos para tal fin. El paso del estudiante por nuestra entrevista, no sólo nos permitió detectar su nivel, sino que se convirtió en una experiencia de aprendizaje para el estudiante, pues le ayudó a avanzar en su nivel de razonamiento.

El estudio de casos se llevó a cabo con cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín. No se tuvieron estudiantes de los primeros semestres universitarios, porque creemos que la comprensión de estos conceptos, desde su componente geométrica, debe darse en los últimos grados de bachillerato.

Las preguntas del guión de entrevista se basaron en la visualización de construcciones geométricas mediante el doblado de papel. Es decir, el estudiante podía llegar a la comprensión del concepto gracias a un mecanismo visual – geométrico que le brindaban las construcciones hechas en papel.

Por lo tanto, se puede afirmar que el objetivo de nuestro trabajo se cumplió. El capítulo cuatro contiene el análisis de la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, de cada uno de los cinco estudiantes del estudio de casos, y el análisis del desempeño de los estudiantes de acuerdo a cada uno de los descriptores de nivel. Finalmente, se trianguló toda la información y en el capítulo 5, se mostró que los descriptores finales cumplían con las propiedades secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, lenguaje y consecución. Además, la entrevista cumplió con las diez características: intencionalidad, lenguaje, conceptos básicos, experiencias previas, diálogo inquisitivo, pensamiento discursivo, aportes de información, problematización con las ideas, paso por los tres momentos y construcción de la red de relaciones respectiva.

6.1.2 Objetivos específicos.

Los objetivos específicos que nos planteamos en esta investigación, fueron:

Diseñar y evaluar un guión de entrevista de carácter socrático, con preguntas basadas en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel, que permita detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico y que, igualmente, se convierta en una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento.

Determinar los descriptores para ubicar a un estudiante en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación al concepto de elipse, utilizando la geometría del doblado de papel.

Plantear una propuesta metodológica alternativa, que surge del guión de entrevista, para lograr una adecuada comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico en el aula de clase.

En efecto, se diseñó, se evalúo y se refinó un guión de entrevista de carácter socrático con preguntas inquisitivas que se basaban en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel. El paso del estudiante por la entrevista se convirtió en una experiencia de aprendizaje, pues corroboramos que todos los estudiantes pudieron avanzar en su nivel de razonamiento. Además, el guión nos permitió caracterizar y analizar el proceso de comprensión de cada uno de nuestros estudiantes del estudio de casos. Cuatro de ellos quedaron en el nivel III y uno, en el nivel II. Por lo tanto el guión de entrevista se convierte en una propuesta metodológica para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

En el proceso que llevamos a cabo para dar consecución al objetivo general, diseñamos, evaluamos y refinamos unos descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. Estos descriptores se plantearon inicialmente como hipotéticos, pero se fueron refinando a medida que se desarrollaba el trabajo de campo. Finalmente, pudimos corroborar que con estos descriptores sí se caracterizó el proceso de comprensión del concepto objeto de estudio, de los cinco estudiantes, porque se refinaron en el contexto particular gracias a la interacción entre estudiante y entrevistador.

Aunque el diseño de un test no estaba dentro de los objetivos específicos de nuestra investigación, decidimos hacer una generalización que nos permitiera extender nuestra entrevista a un gran número de estudiantes y poder validarla con cierta rigurosidad a través de un análisis estadístico descriptivo. Sin embargo, el análisis que logramos del test no nos permitió ubicar a cada uno de los participantes en uno de los niveles de razonamiento, pues se hizo una descripción de carácter grupal por bloques de preguntas. Esto nos permitió hacer una interpretación del comportamiento del grupo piloto en los bloques de preguntas que se relacionan directamente con los niveles I, II y III.

6.2 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.

La pregunta de investigación que nos planteamos en el presente estudio fue: *¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele?*

Los descriptores finales nos permitieron caracterizar el proceso de comprensión de los cinco estudiantes del estudio de casos y descubrir el nivel en el que estaban razonando. Estos descriptores refinados, cumplieron con las seis propiedades propias de los niveles de Van Hiele, y su ubicación correcta en dichos niveles, permitió establecer las principales características del razonamiento en cada uno de estos niveles, con respecto al concepto de elipse como lugar geométrico. El paso del estudiante por el guión de entrevista de carácter socrático, le permitió avanzar en su nivel de razonamiento, y a nosotros como investigadores, detectar el nivel en el que estaba razonando, con base en los descriptores.

Las propiedades de los niveles de razonamiento, con relación a nuestros descriptores, nos permitieron explicar cómo comprenden finalmente los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico: los estudiantes no podían avanzar al nivel inmediatamente superior si no habían superado el nivel anterior, es decir, ellos iban perfeccionando la forma de razonar a medida que avanzaban en su nivel; los estudiantes percibían ciertas relaciones en un nivel inferior y las hacían explícitas en el nivel inmediatamente superior; para avanzar al nivel inmediatamente superior, los estudiantes debían reorganizar y reinterpretar los conocimientos que tenían en el nivel anterior; dos estudiantes que razonaban en diferentes niveles no podían comprenderse en lo que se refiere al concepto objeto de estudio; los estudiantes exhibían un lenguaje específico, de acuerdo con el nivel en el que estaban razonando, y, cabe resaltar, que el progreso de un nivel al siguiente fue un proceso gradual y progresivo.

De acuerdo con Van Hiele, se tuvo presente la forma cómo se expresaban los estudiantes, sus gestos, su lenguaje, su vocabulario, en las respuestas de la encuesta, en sus materiales y en la entrevista individual de carácter socrático. Esto nos ayudó notablemente a analizar su comprensión. La idea siempre fue que, por medio de preguntas y diálogos inquisitivos, exhibieran su proceso de comprensión y nos permitieran, de acuerdo con nuestros descriptores, caracterizar dichos procesos de manera individual.

Las situaciones que les planteamos a los estudiantes en el guión de entrevista estuvieron basadas en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel, es decir, el razonamiento de los estudiantes se basaba en la componente visual – geométrica que brinda la geometría del doblado de papel. Estas situaciones fueron nuevas para los estudiantes y con base en ciertos aportes de información, lograron llegar a conclusiones realmente sorprendentes (como llegar al hecho de que tanto la mediatriz como la circunferencia eran lugares geométricos), que finalmente les permitieron comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Luego, el uso de la geometría del doblado y el uso de las directrices del modelo de Van Hiele, nos responden la segunda parte de la pregunta: "*mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele*".

6.3 APORTES A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

El concepto de elipse es de gran importancia para la física y la matemática, pues en el caso de la primera, los planetas giran en órbitas elípticas alrededor de un sol ubicado en uno de los focos y, en el caso de la segunda, por sus aplicaciones en el cálculo y la geometría. Por eso, nuestro trabajo enfatizó en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante la geometría del doblado de papel. Sin embargo, es importante tener en cuenta que para la mayoría de estudiantes, suele ser muy fácil comprender el concepto de elipse a través del dibujo de su contorno con un lápiz, utilizando una cuerda amarrada con dos clavos. Teniendo en cuenta lo anterior, nuestro trabajo es novedoso, porque no sólo se logra la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, sino que se logra también la comprensión de conceptos como mediatriz y circunferencia como lugares geométricos, el mismo concepto de lugar geométrico se aborda en nuestra entrevista y el concepto de equidistancia.

Son muchos los conceptos, propiedades y relaciones de la geometría euclidiana que se logran mediante la geometría del doblado de papel y que están inmersos en nuestra entrevista: por un punto pasan infinitas rectas e infinitos dobleces; por dos puntos pasa una sola recta o un solo doblez; relación doblez segmento de recta; segmentos congruentes mediante el doblado; construcción de rectas perpendiculares mediante el doblado; la visualización de suma de segmentos también mediante el doblado; las construcciones de la mediatriz, la circunferencia y la elipse mediante el doblado. De hecho, abordar las construcciones de la circunferencia o de la elipse, mediante el doblado de papel, como envolventes de mediatrices, es el primer paso para hablar de haz de tangentes y de cálculo infinitesimal. Por lo tanto, esta forma de abordar la elipse trae muchos beneficios académicos para el estudiante.

Nuestro guión de entrevista de carácter socrático, es un aporte a la Educación Matemática, porque no sólo le permitió al estudiante avanzar en su nivel de razonamiento frente al concepto de elipse como lugar geométrico, sino que a nosotros como investigadores, nos permitió descubrir el nivel en el que estaba razonando.

En este estudio, hemos comprobado que los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos con base en la visualización de construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel. Incluso, nuestro aporte a la Educación Matemática en este sentido, se centra en el establecimiento de los conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel, la reformulación de su axiomática y su aplicación a las secciones cónicas que logramos en el capítulo 3.

En otras palabras, pudimos comprobar que el doblado de papel enriquece el modelo educativo de Van Hiele, a causa de la componente visual – geométrica de sus construcciones, que permite en un primer momento, el reconocimiento visual y, en un segundo momento, el establecimiento de propiedades y la asociación de las mismas. Además, le aporta una componente de tipo experimental, pues el estudiante puede realizar y visualizar sus propias construcciones y, con base en ellas, llegar a la comprensión de un concepto.

6.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

Nuestro trabajo de investigación deja abiertas varias líneas futuras de investigación. Entre ellas, están:

- La realización de un módulo de instrucción que esté en correspondencia con las fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele, para lograr que un estudiante avance de un nivel al siguiente en la comprensión de concepto de elipse como lugar geométrico.

- El diseño de entrevistas de carácter socrático para la comprensión del concepto de hipérbola o de parábola mediante la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. Además, del diseño de los descriptores de los niveles de razonamiento correspondientes para cada concepto respectivo.

- La realización de un guión de entrevista de carácter socrático para la comprensión de la axiomática de la geometría del doblado de papel, también en el contexto de Van Hiele.

- La realización de investigaciones sobre la comprensión de otros conceptos geométricos o matemáticos mediante la geometría del doblado de papel.

- Investigaciones teóricas que permitan demostrar que la geometría del doblado de papel si es un sistema axiomático. Para cumplir con la condición de suficiencia hacen falta establecer teoremas que permitan deducir nuevos hechos geométricos.

BIBLIOGRAFÍA

- Boll, M. (1981). *Historia de las Matemáticas*. México: Editorial Diana.

- Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17(1), 31 – 48.

- Cruz, L., y Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Educación*, 97, 14 – 21.

- Cardozo, C., Elejalde, R., y López, G. (2001). *De la lógica a las funciones*. Colombia: Universidad Pontificia Bolivariana.

- Czwienczek, F. (2009). Estudio de la Elipse con Plegado de Papel. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (18), 150 – 155.

- De la Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas,* 24, 99 – 121.

- Del Río, J. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. España: Síntesis S.A.

- Esteban, P. (2003). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de Van Hiele*. Tesis doctoral. Publicada. España: Universidad Politécnica de Valencia.

- Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 217 – 226.

- Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine*, 5, 357–371.

- Gallo, Patricia. *Origami.* La Plata – Argentina. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.netverk.com.ar/~halgall/origami1.htm

- Guba, E. y Lincoln Y. (2000). Paradigmatic, controversies, contradictions, and emerging confluences. En: *The sage handbook of qualitative research* (pp. 191 – 216). California: Sage Publications, Inc.

- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

- Hatori, Koshiro (2003). *Origami Construction*. Buscado: Enero 30, 2010, del sitio web: http://origami.ousaan.com/library/conste.html

- Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, 143-158.

- Ibáñez, R. (2002). Secciones cónicas. *Sigma: Revista de Matemáticas*, (20), 12 – 38.

- Johnson, D. (1975). *Matemáticas más fáciles doblando papel*. España: Distein.

- Jaime, A y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez (eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. España: Alfar, p. 295 – 384.

- Jaramillo, C. (2003). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele*. Tesis doctoral. España: Universidad Politécnica de Valencia.

- Jaramillo, C y Campillo, P. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del Modelo de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9 (1), 65 – 84.

- Jaramillo, C., y Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía*, vol XVIII, 109 - 118.

- Jaramillo, C., Monsalve, O., y Esteban, P. (sf). *El Modelo de Van Hiele y el Doblado de Papel*. Documento sin editar.

- Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas.* Trabajo de investigación para optar al título de Magíster de Docencia de las Matemáticas. Universidad de Antioquia, Medellín.

- Lang, R. (1996 – 2003). *Origami and Geometric Constructions.* Buscado: Junio 4, 2006, de: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

- Lang, R. (2004 – 2010). *Huzita Axioms*. Buscado: Enero 30, 2010, de: http://www.langorigami.com/science/hha/hha.php4

- Larios, V., y González, N. (1994). *Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría euclidiana en el nivel medio básico*. Tesis de pregrado, Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera", México.

- Larios, V. (2001). *Taller Polígonos con papel*. II Congreso Regional del Noroeste de la Enseñanza de las Matemáticas A.N.P.M., La Paz, B.C.S. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html

- Llorens, J. (1994). *Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local*. Tesis doctoral. Valencia, España.

- López, A. (2007). *Las fases de Van Hiele para el teorema de Pitágoras*. Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Docencia de las Matemáticas. Universidad de Antioquia, Medellín.

- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. En: *Pensamiento y Gestión # 20*. Universidad del Norte. p. 165 – 193.

- Meel, D. E. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. En: *Relime*, vol. 6, Núm. 3, pp. 221 – 271.

- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas. Bogotá*. Versión digital en pdf.

- -------- (2004). *Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

- -------- (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá. Versión digital en pdf.

- Monsalve, O., y Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía,* Vol. XV, 35, 11 – 25.

- Platón (1996). *Diálogos*. México: Porrúa.

- Rosas, R. y Sebastián, C. (2004). *Piaget, Vigotski y Maturana. Constructivismo a tres voces*. Argentina: Aique Grupo Editor.

- Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas, 21, 175 – 192.*

- Row, S. (1966). *Geometric Exercises in Paper Folding.* New York: Dover Publications.

- Sandoval, C (2002). *Investigación Cualitativa*. Colombia: ARFO Editores e impresores Ltda (composición electrónica).

- Santa, Z., Bedoya, D., y Jiménez, O. (2007). *Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características.* Tesis de grado. Universidad de Antioquia: Facultad de Educación.

- Santa, Z. y Jaramillo, C. (2009). Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele. *Memorias del X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Colombia: Universidad de Nariño.

- -------- (2010). Comprensión de las secciones cónicas como lugares geométricos mediante la axiomática del doblado de papel. *Formación y Modelación en Ciencias Básicas*. Colombia: Universidad de Medellín, p. 26.

- Santa Ramírez, Z. M. y Jaramillo López, C. M. (2010, septiembre-diciembre). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado de:http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

- Stewart, J., y otros. (2001). *Precálculo*. Colombia: International Thomson Editores S.A.

- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievements in Secondary School Geometry*. University of Chicago: CRRSSG Report.

- Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

- Van Hiele, P. (1990). *El problema de la comprensión*. (A. Gutiérrez, traducción). Proyecto de investigación: Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. (Tesis doctoral presentada en 1957).

- Zapata, S. y Sucerquia, E. (2009). *Módulo de Instrucción en el Marco del Modelo Educativo de Van Hiele para el concepto de convergencia de una serie infinita".* Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación con énfasis en Docencia de las Matemáticas. Universidad de Antioquia, Medellín.

- Zill, D., y Dewar, J. (1992). *Álgebra y Trigonometría*. México: McGraw-Hill.

ANEXOS

ANEXO A: ENCUESTA

GENERALIDADES DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Apreciado estudiante:

Te solicito responder todas las preguntas que se presentan a continuación con toda la sinceridad posible, de acuerdo con los conocimientos que tengas sobre geometría. Es importante que escribas todo lo que se te ocurra. En caso de no responder la pregunta, escribe el motivo, dado que es una gran ayuda para mi trabajo de investigación. De antemano, muchas gracias por tu valiosa colaboración.

1. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por punto.

2. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por recta.

3. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por plano.

4. Por un punto, ¿cuántas rectas crees que pasen? Ilustra la situación.

5. Por dos puntos, ¿cuántas rectas crees que pasen? Ilustra la situación.

6. ¿Puedes construir un segmento de recta en una hoja de papel? ¿Cómo lo hiciste?

7. ¿Cuántos puntos puedes dibujar sobre el doblez que construiste en la hoja de papel?

8. ¿Es posible construir un punto en una hoja de papel, sin hacer marcas con un lápiz? ¿Cómo lo harías?

9. ¿Cuántos dobleces pasan por un punto? Ilustra la situación en una hoja.

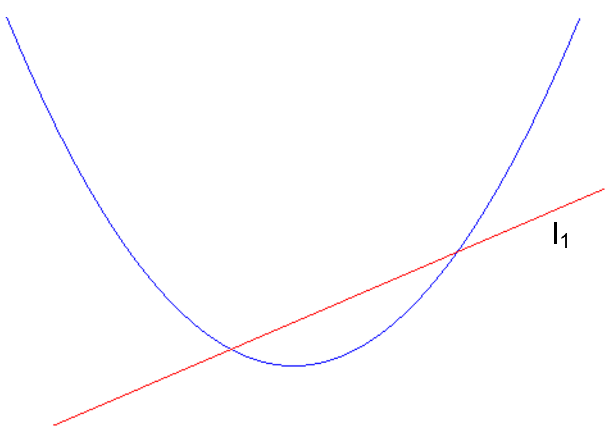
10. ¿Cuántos dobleces pasan por dos puntos? Ilustra la situación en una hoja.

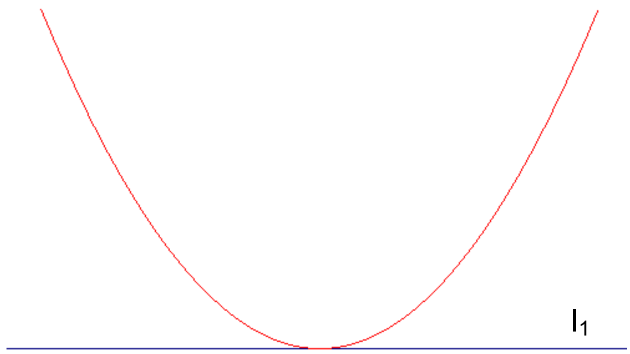
11. ¿Es posible considerar una hoja de papel como un análogo al plano geométrico euclidiano? Justifica tu respuesta.

12. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por recta tangente.

13. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por recta secante.

14. ¿En cuál de las siguientes curvas, la recta l_1 es tangente y en cuál es secante? Justifica tu respuesta.





15. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por rectas perpendiculares.

16. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por recta mediatriz.

17. Escribe tus ideas acerca de lo que entiendes por circunferencia.

ANEXO B: TEST

IDENTIFICACIÓN DEL ESTUDIANTE

Institución: ____

Programa: ____

Semestre: ____

Edad: ____

Sexo: ____

En cada una de las siguientes preguntas, marca con un X la opción que consideres correcta. Si eliges la opción e, por favor escribe la respuesta que consideres adecuada.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

INSTRUCCIONES

Para las siguientes preguntas, debes elegir la opción que consideres correcta, dentro de las cinco posibilidades dadas (a, b, c, d, e). Sólo debes elegir una respuesta. Por favor, no dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar

La opción e, equivale a "*ninguna de las anteriores*". Esta opción sólo la debes elegir cuando no entiendas la pregunta o cuando creas que la respuesta correcta no está en las opciones a, b, c, d. En este caso, escribe la respuesta que consideres adecuada en la hoja de respuestas.

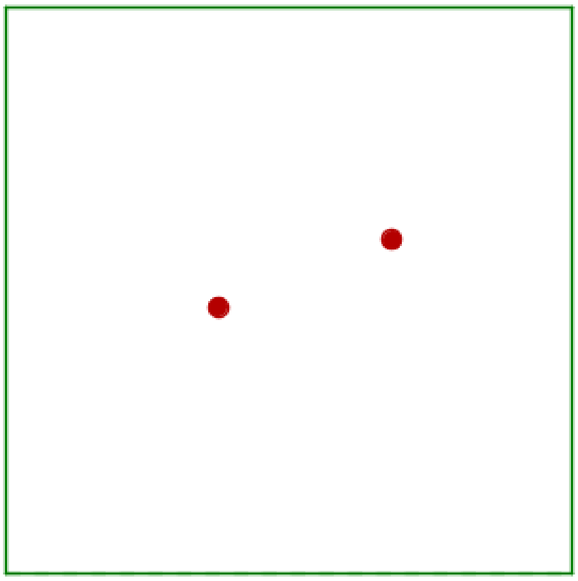
Es posible que en algunas preguntas, creas que hay dos opciones de respuesta. En este caso, elije la opción que te parezca más precisa desde el punto de vista geométrico.

No pases a la pregunta siguiente sin haber respondido la anterior y no te devuelvas a preguntas abordadas anteriormente.

Es fundamental que tengas muy presente los aportes de información que te dan, porque se van a utilizar en preguntas posteriores.

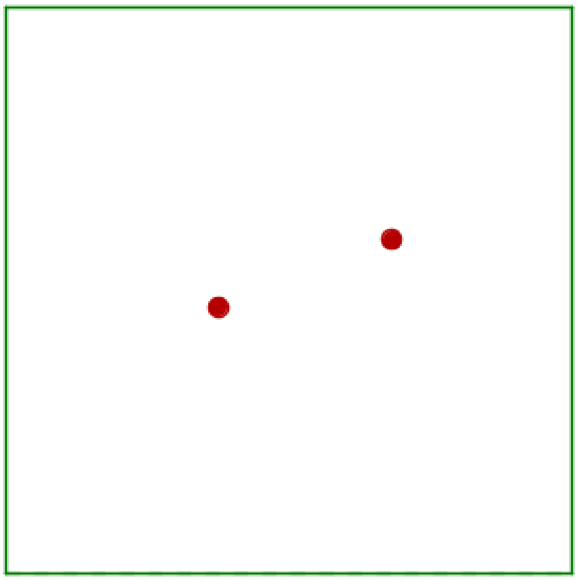
Muchas gracias por tu colaboración.

1. Considera dos puntos en una hoja de papel, ¿cuántas rectas crees que pasan por dichos puntos?



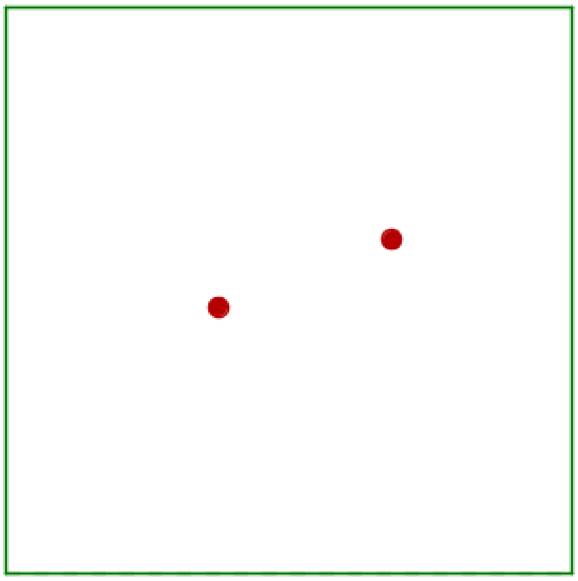
a. Muchas rectas.
b. Dos rectas.
c. Solo una recta.
d. Infinitas rectas.
e. Ninguna de las anteriores.

2. Considera dos puntos en una hoja de papel, ¿cuántos dobleces crees que pasan por dichos puntos?



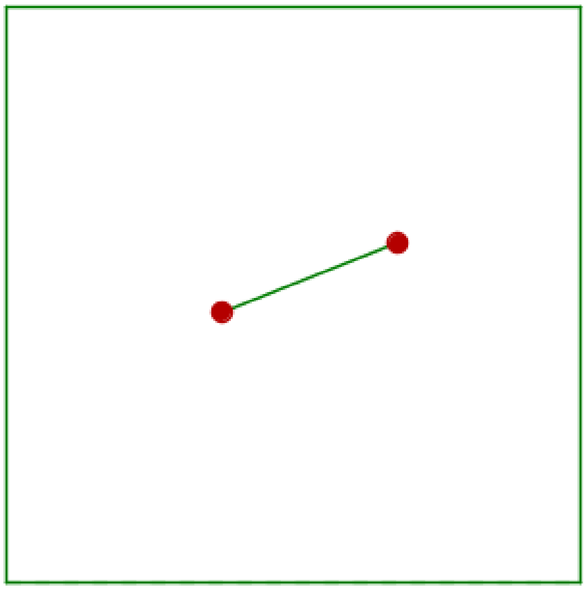
a. Infinitos dobleces.
b. Dos dobleces.
c. Muchos dobleces.
d. Un solo doblez.
e. Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuántos segmentos crees que conectan los dos puntos marcados en la hoja de papel?



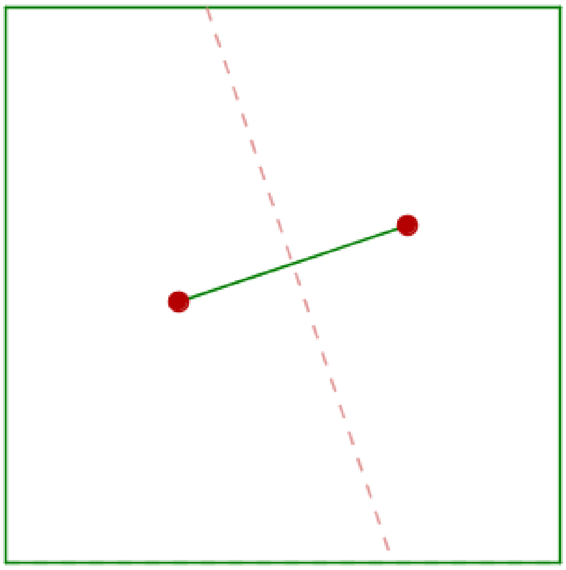
a. Tres segmentos, si al menos uno de esos puntos es un extremo.
b. Si los dos puntos son sus extremos, sólo un segmento.
c. Dos puntos pueden conectar muchos segmentos.
d. Muchos segmentos pasan por esos dos puntos.
e. Ninguna de las anteriores.

4. Mediante el doblado de papel, ¿cómo determinarías el punto medio del segmento trazado en la hoja?



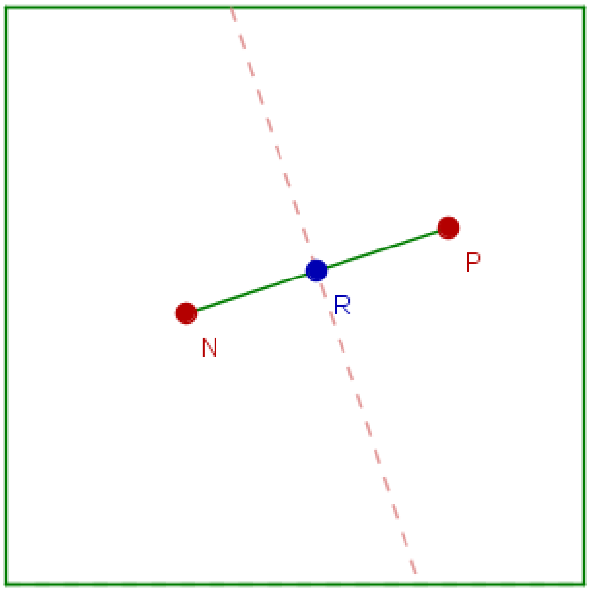
a. Llevando un lado del cuadrado exactamente sobre el otro lado.
b. Sí es posible determinar el punto medio con el doblado de papel, pero no sabría cómo hacerlo.
c. Llevando un punto extremo del segmento exactamente sobre el otro punto extremo.
d. Con el doblado de papel no es posible encontrar el punto medio de un segmento.
e. Ninguna de las anteriores.

5. Se marcan dos puntos en una hoja de papel. Si se lleva un punto exactamente sobre el otro punto, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento que une los dos puntos?



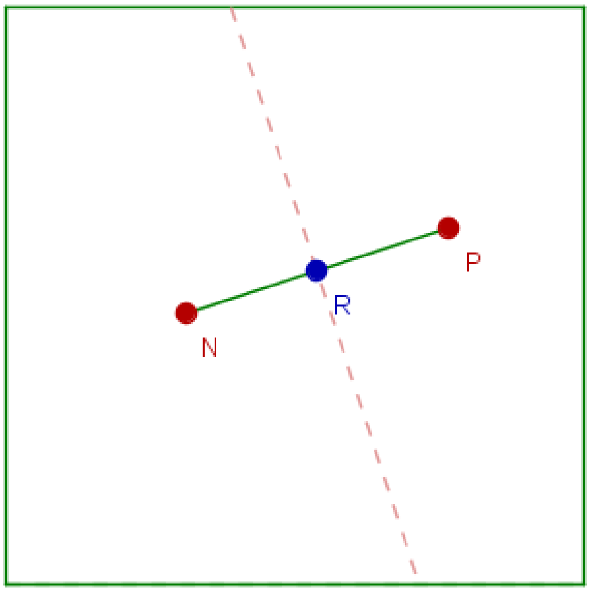
a. El doblez y el segmento se interceptan en un punto.
b. El doblez hecho pasa por el punto medio del segmento.
c. Los extremos del segmento están a igual distancia del doblez hecho.
d. El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento.
e. Ninguna de las anteriores.

6. De acuerdo con la figura, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{RN}$ y $\overline{RP}$? ¿Por qué?



a. Tienen la misma medida porque R es el punto medio del segmento.
b. Tienen medidas diferentes porque sólo se llevó el punto N sobre el punto P.
c. Los puntos N y P están a la misma distancia del punto R.
d. La medida del segmento $\overline{NP}$ se divide en dos partes.
e. Ninguna de las anteriores.

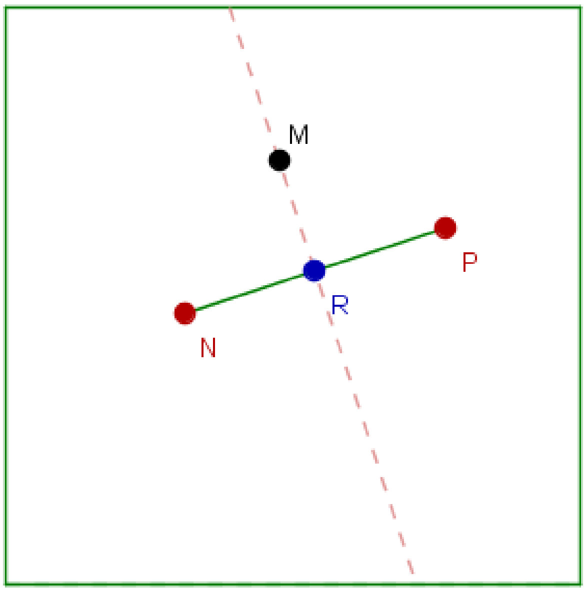
7. ¿Crees que el doblez que se hace cuando se lleva el punto N sobre el punto P es perpendicular al segmento $\overline{NP}$? ¿Por qué?



a. Sí, porque forman entre sí un plano cartesiano.
b. No, porque no forman ángulos de 90°.
c. Sí, porque al intersecarse forman ángulos de 90°.
d. No, porque se cortan en el punto medio.
e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:
Se llama **mediatriz** a la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

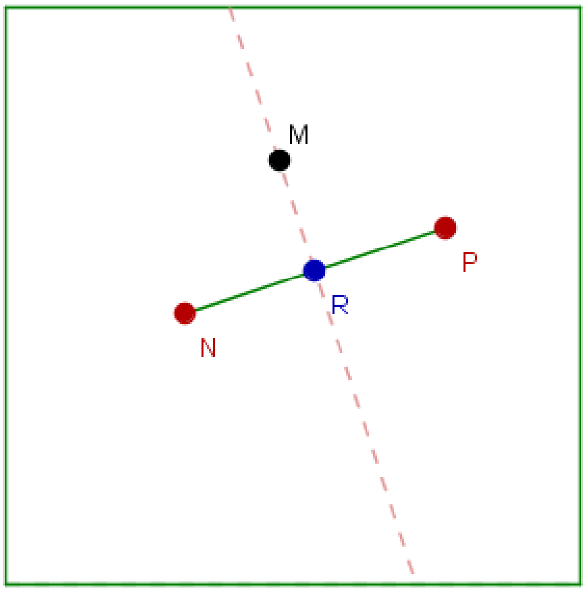
8. Considera un punto M, diferente del punto medio R, sobre la mediatriz del segmento $\overline{NP}$, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$? ¿Por qué?



- **a.** Son iguales, porque cuando llevo el punto N sobre el punto P, coinciden.
- **b.** El punto M siempre está a la misma distancia del punto medio R.
- **c.** Son iguales porque el punto M está en la mitad del segmento $\overline{NP}$.
- **d.** Son iguales porque siempre se forma un triángulo.
- **e.** Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:
Un punto equidista de otros dos puntos si está a una misma distancia de estos.

9. ¿Cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos? ¿Por qué?



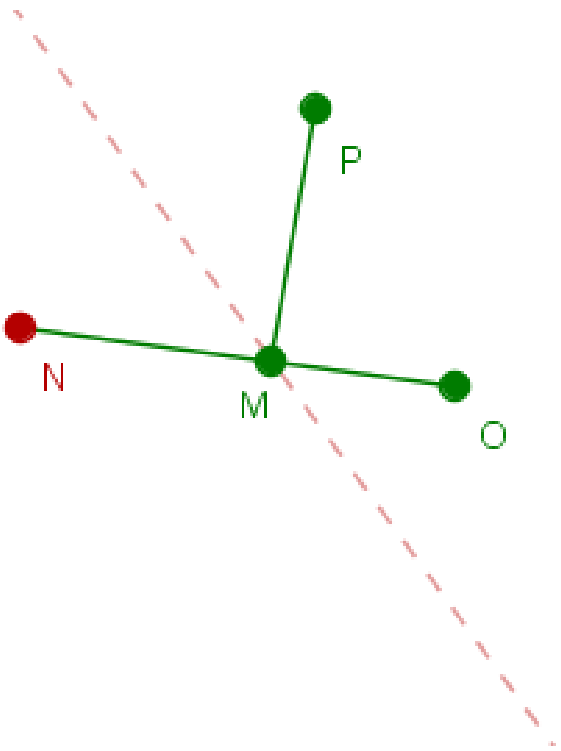
a. Sí, porque siempre se forma un triángulo.
b. No, sólo algunos puntos equidistan de los extremos del segmento.
c. Sí, porque las distancias, desde los extremos del segmento a un punto cualquiera de la mediatriz, son iguales.
d. Sí, porque es un punto que pertenece a la mediatriz y ésta pasa por el punto medio del segmento.
e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:
Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad.

10. ¿Es la mediatriz de un segmento cualquiera, un lugar geométrico? En caso afirmativo, ¿cuál es la propiedad que cumple el conjunto de puntos para pertenecer a este lugar geométrico?

a. Sí, porque la mediatriz pasa por el punto medio del segmento.
b. No, porque el conjunto de puntos no cumple con una propiedad determinada.
c. Sí, porque es un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad.
d. Sí, porque el conjunto de puntos que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.
e. Ninguna de las anteriores.

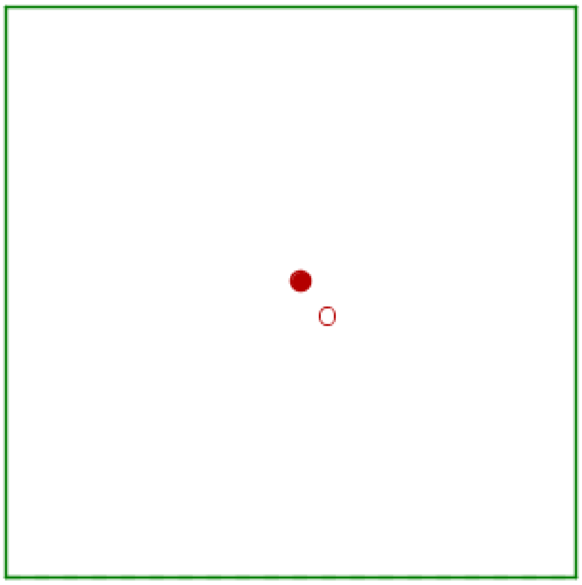
11. Considera tres puntos N, P y O cualesquiera en una hoja de papel y se construye la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Luego, considera el punto M como la intersección del segmento $\overline{NO}$ con la mediatriz.



Sea r la medida del segmento $\overline{NO}$, que es igual a la suma de las medidas de los segmentos $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$, ¿qué podrías afirmar acerca de la suma de las medidas de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$? ¿Por qué?

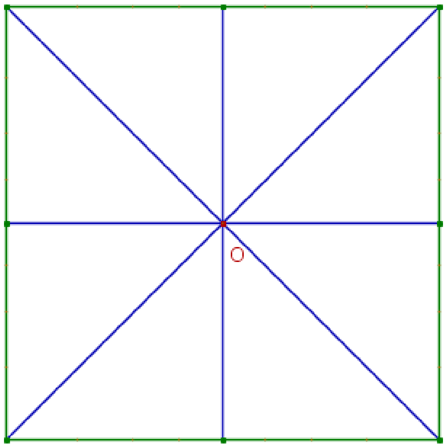
a. La suma de los segmentos es una constante cualquiera, que no es posible determinar.
b. La suma de los segmentos es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N.
c. $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$.
d. La suma de los segmentos es una constante cualquiera, no necesariamente igual a r, porque no se conocen las distancias.
e. Ninguna de las anteriores.

12. ¿Cuántos dobleces crees que pueden pasar por un punto marcado sobre una hoja de papel?

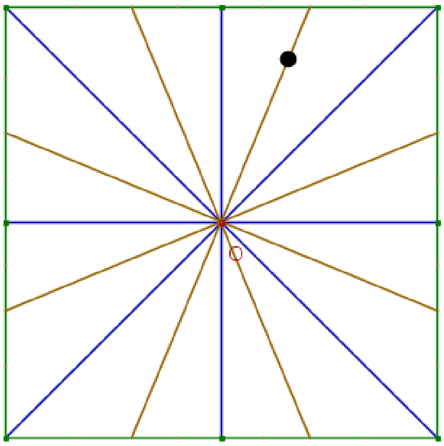


a. Infinitos dobleces.
b. Sólo 4 dobleces.
c. Muchos dobleces.
d. Dos dobleces.
e. Ninguna de las anteriores.

13. Se realizan dobleces que pasen por el punto O como se muestra en la figura.



Posteriormente, se lleva un doblez exactamente sobre el doblez consecutivo. Después, se marca un punto diferente de O en un doblez cualquiera.



¿Es posible trasladar este punto a los demás dobleces conservando su distancia al punto O? En caso afirmativo, ¿cómo harías este proceso de traslación?

a. No es posible, porque no se conserva la distancia al punto O.

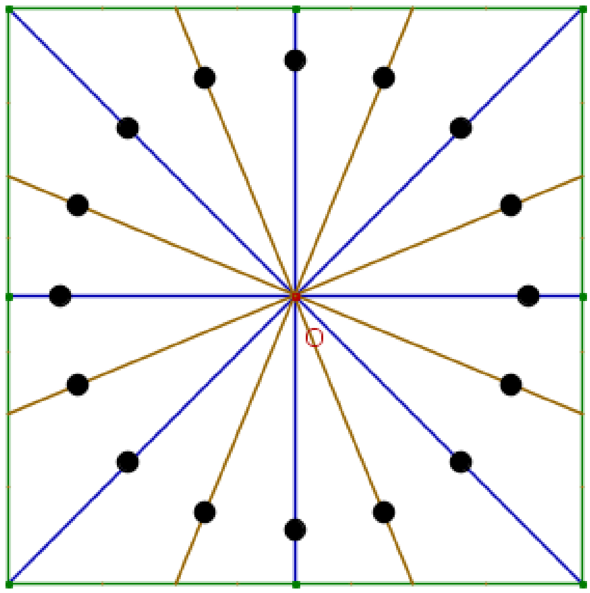
b. Si es posible, doblando la hoja en los dobleces dados y calcando el punto en otro doblez.

c. Si es posible, llevando un doblez sobre el doblez consecutivo y calcando el punto en dicho doblez.

d. Mediante el doblado de papel, no es posible trasladar este punto a los demás dobleces.

e. Ninguna de las anteriores.

14. Después de haber trasladado el punto, ¿se puede afirmar que todos los puntos equidistan del punto O? ¿Por qué?



a. Sí, porque ese fue el proceso de traslación que se hizo.

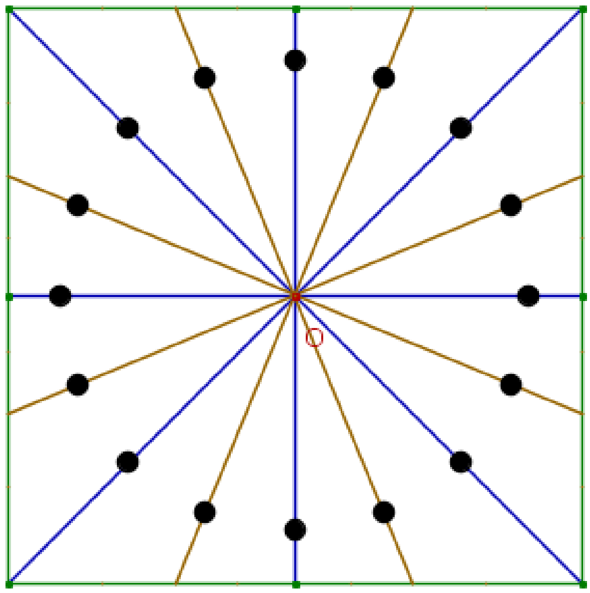
b. No, porque cuando se trasladaron los puntos, algunas distancias quedaron más grandes que otras.

c. Sí, porque cuando se hizo el proceso de traslación, todos los puntos quedaron a una misma distancia del punto O.

d. Sí, porque el punto O es el punto medio.

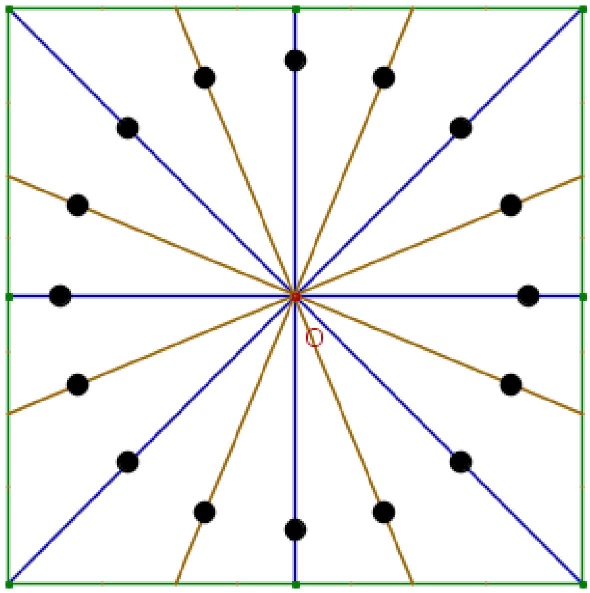
e. Ninguna de las anteriores.

15.¿Es posible continuar con este proceso de traslación de manera infinita? ¿Por qué?



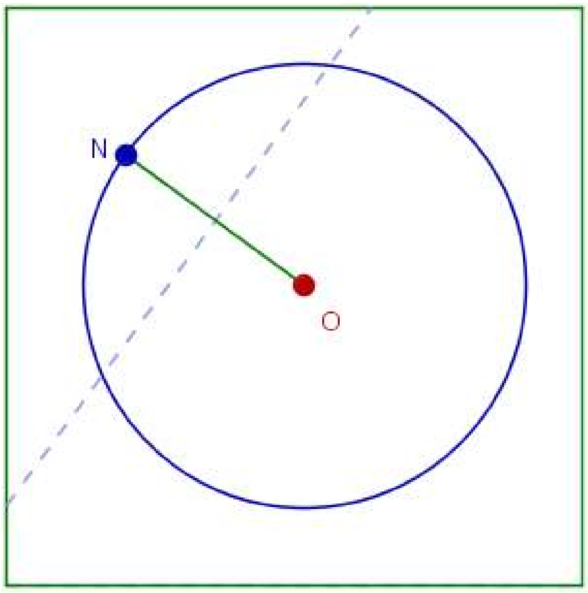
a. No es posible, porque no se pueden encontrar más dobleces.
b. Sí es posible, siempre y cuando el papel lo permita.
c. No es posible, porque la hoja de papel tiene límites.
d. Sí es posible, porque se pueden hacer muchos dobleces que pasen por el punto O.
e. Ninguna de las anteriores.

16. Este conjunto de puntos permite intuir la noción de circunferencia, ¿qué propiedad cumplen estos puntos?



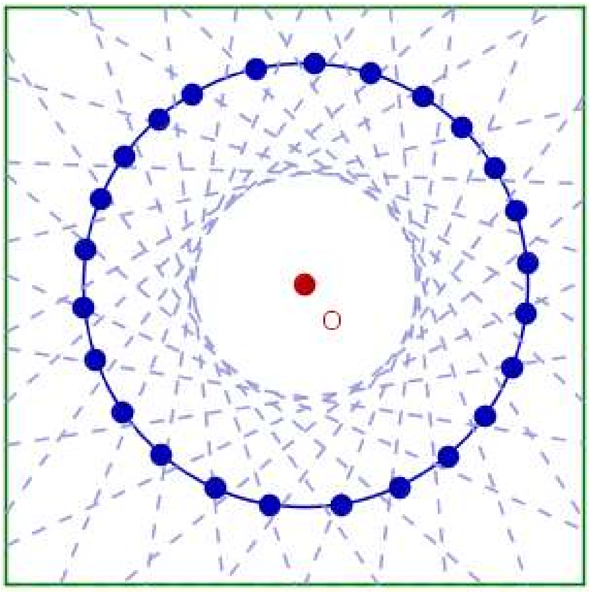
a. Que pertenecen a una circunferencia.
b. Que equidistan del punto O.
c. Que pertenecen a un círculo.
d. Que tienen el mismo radio.
e. Ninguna de las anteriores.

17. Se marca un punto N sobre una circunferencia y se lleva sobre el punto O. ¿Qué relación existe entre el doblez resultante y el segmento que une ambos puntos?



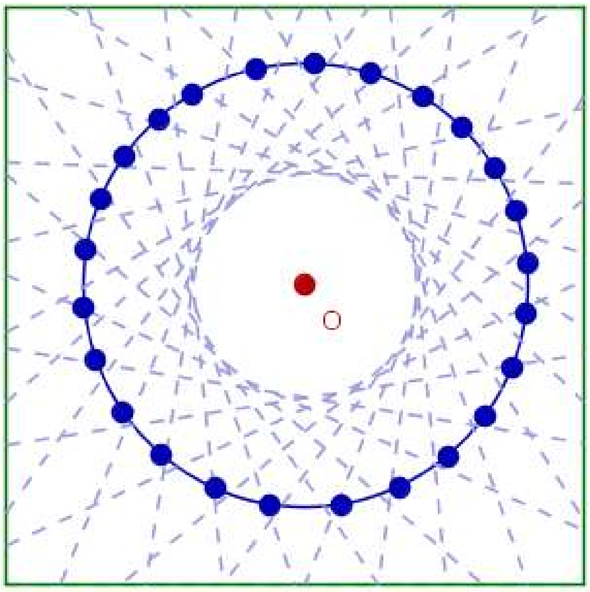
a. El doblez y el segmento $\overline{NO}$ se interceptan en un punto.
b. El doblez hecho pasa por el punto medio del segmento $\overline{NO}$.
c. El segmento $\overline{NO}$ se divide en dos partes iguales.
d. El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{NO}$.
e. Ninguna de las anteriores.

18. Se marcan otros puntos sobre la circunferencia y se llevan sobre el punto O. ¿Son los dobleces resultantes mediatrices de los segmentos respectivos? ¿Por qué?



a. Sí, porque el doblez pasa por el punto medio de cada segmento.
b. No, porque el doblez no pasa por el punto medio de cada segmento.
c. No, porque los dobleces construidos y los segmentos respectivos no son perpendiculares.
d. Sí, porque al llevar un punto sobre otro punto, se está construyendo la mediatriz del segmento que une ambos puntos.
e. Ninguna de las anteriores.

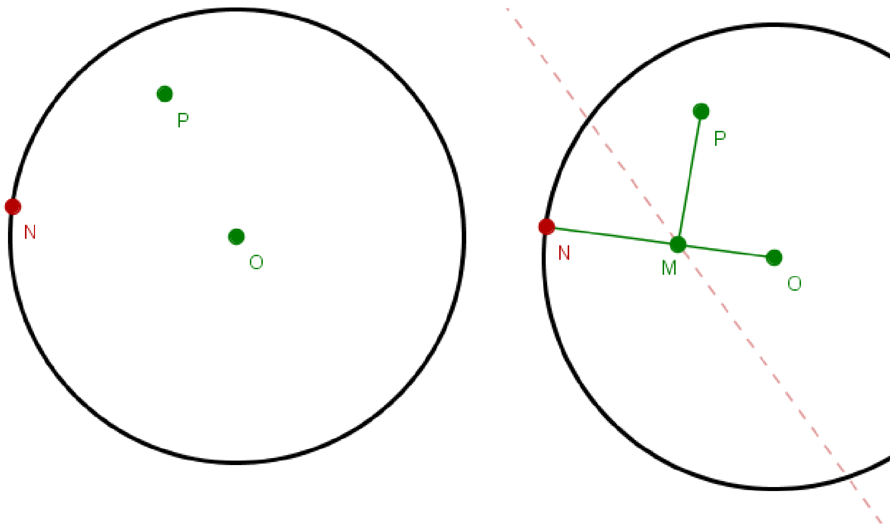
19. Si se pudiera llevar cada uno de los puntos de una circunferencia sobre su centro, ¿qué figura envuelve el conjunto de mediatrices así construido? ¿Por qué?



a. Un círculo, porque los puntos están a una misma distancia del centro.
b. Una circunferencia porque todos los puntos equidistan del centro.
c. Una circunferencia, porque está envuelta por mediatrices.
d. Un círculo, porque tiene forma redonda.
e. Ninguna de las anteriores.

20. Considera una circunferencia con centro O y radio r. Sea N un punto cualquiera de la circunferencia y P un punto que está en la región limitada por la circunferencia.

Se obtiene M como la intersección de la mediatriz de $\overline{NP}$ con el segmento $\overline{NO}$.



¿Cuál es la relación que existe entre el radio de la circunferencia y la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MO}$? ¿Por qué?

a. Son iguales. La suma de las medidas de los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MO}$ es la constante r, porque M equidista de los puntos N y P.

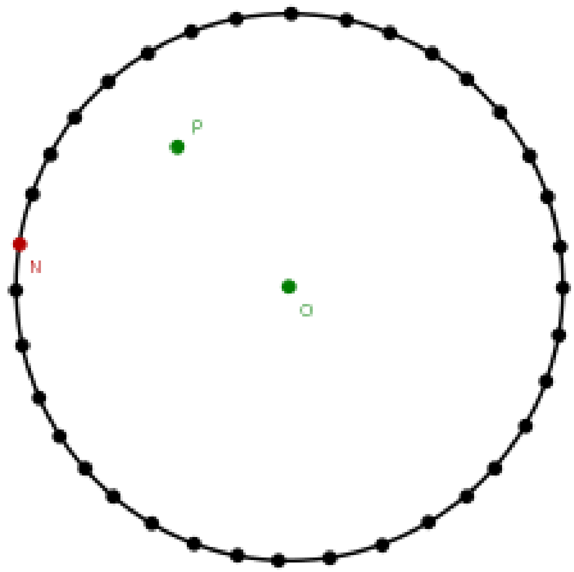
b. Son diferentes, pues la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MO}$ es un número que no es posible determinar.

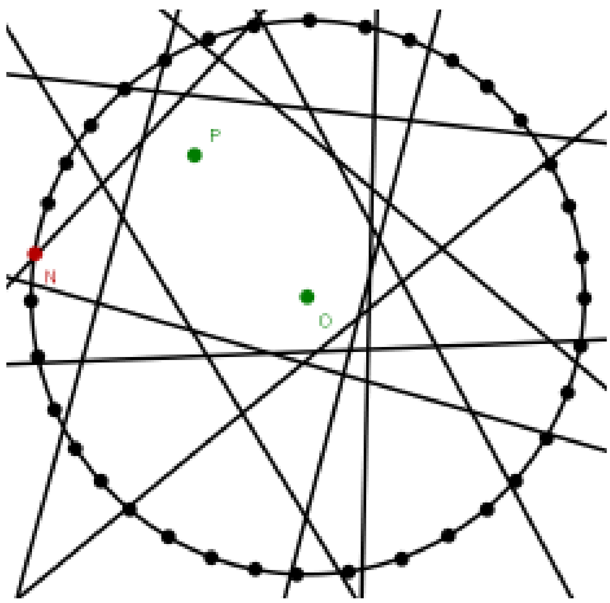
c. $\overline{PM}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Por lo tanto, su suma es igual a r.

d. No se pueden relacionar, porque no se conocen las medidas de los segmentos.

e. Ninguna de las anteriores.

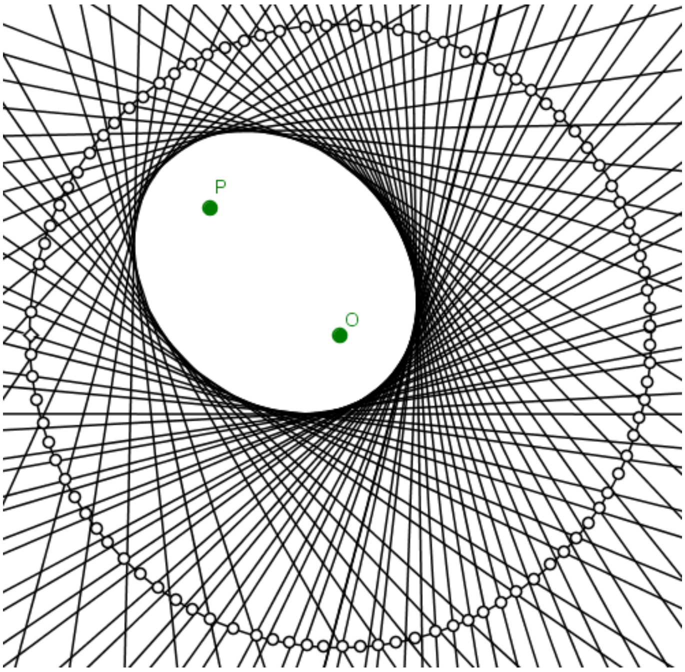
21. Se marcan otros puntos sobre la circunferencia y se construyen dobleces que surgen de llevar los puntos de la circunferencia sobre el punto P. Describe la figura que crees que envuelve el conjunto de mediatrices así construido.





a. Una figura similar a una circunferencia.
b. Una elipse.
c. Una espiral.
d. Un óvalo.
e. Ninguna de las anteriores.

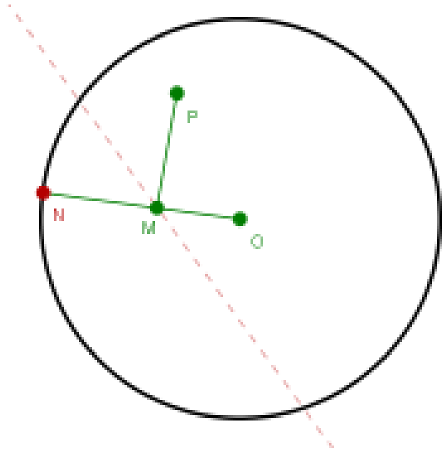
22. La siguiente figura es el resultado de construir dobleces que surgen de llevar los puntos de la circunferencia sobre el punto P. ¿Crees que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices es una circunferencia? ¿Por qué?



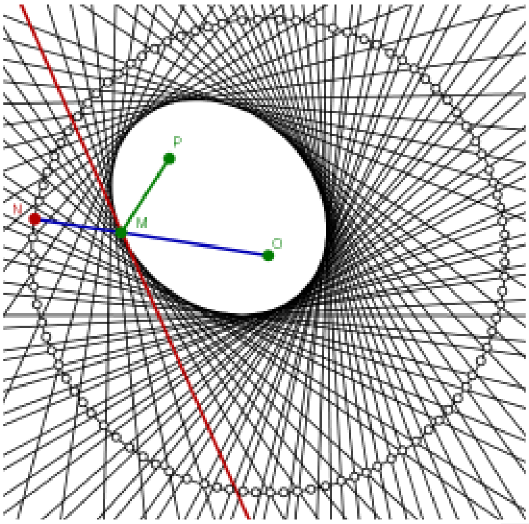
a. Sí, pero más achatada. Todos los puntos tienen la misma distancia a O.
b. Sí, todos los puntos equidistan del punto P.
c. Sí, más corrida hacia la izquierda. Todos los puntos equidistan del centro.
d. No, los puntos de la figura no equidistan de los puntos O y P, ni del centro de la figura.
e. Ninguna de las anteriores.

23. Considere una circunferencia con centro O, radio r y un punto P que está en la región limitada por dicha circunferencia. En esta se realiza el siguiente proceso:

- Se ubica cualquier punto N de la circunferencia.
- Se resalta el doblez que se forma cuando se pone el punto N sobre el punto P.
- Se traza el segmento $\overline{NO}$ y se nombra M al punto de intersección entre $\overline{NO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{NP}$.
- Se traza el segmento $\overline{MP}$.



Si se realiza este proceso en la figura construida anteriormente, ¿se podría afirmar que el punto M pertenece a la figura envuelta por las mediatrices? ¿Por qué?



a. Sí, porque M es el punto de intersección entre $\overline{NO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{NP}$.

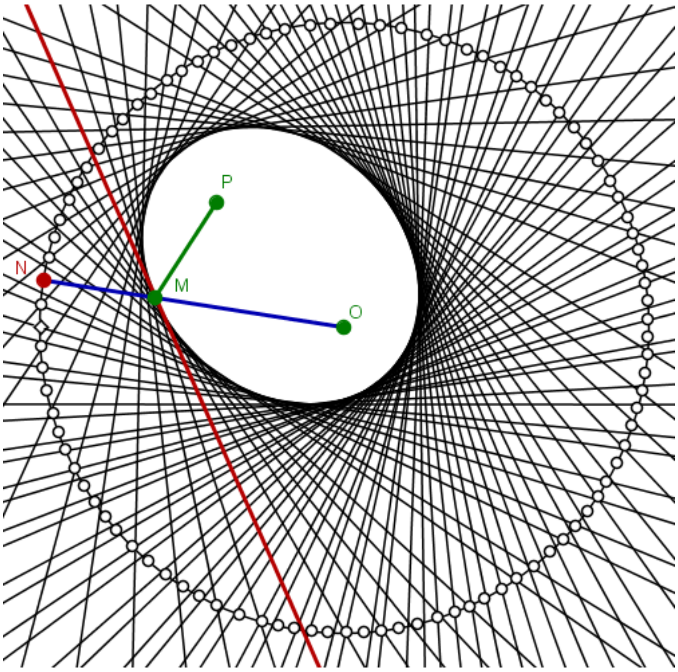
b. Sí, porque en la figura se visualiza que M pertenece al contorno de la figura interior.

c. Sí, porque la suma de las medidas de los segmentos $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$ es el radio de la circunferencia.

d. No, porque la distancia entre los puntos M y O es arbitraria.

e. Ninguna de las anteriores.

24. Sabiendo que r es el radio de la circunferencia ¿cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$? ¿Por qué?



a. Los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Por lo tanto, su suma es r.

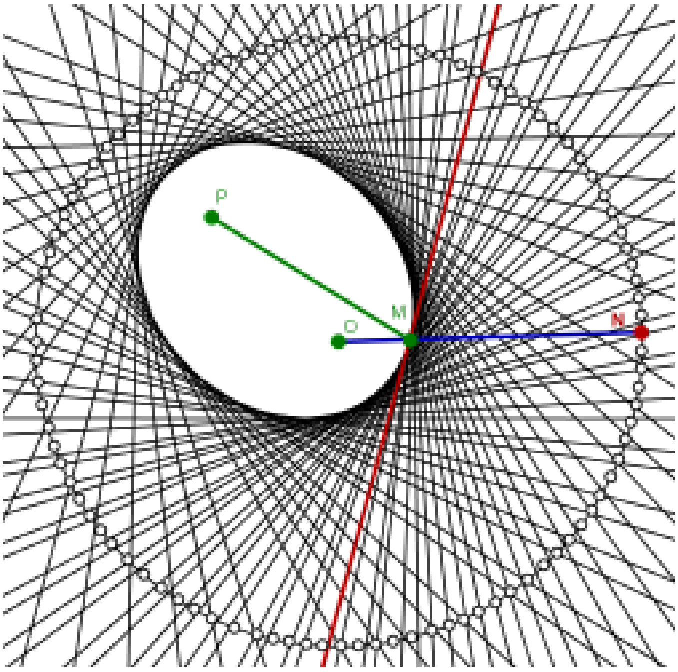
b. La suma es una constante cualquiera mayor que r.

c. La suma es una constante cualquiera, porque no se conocen las distancias.

d. La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ que las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MN}$.

e. Ninguna de las anteriores.

25. Se marca otro punto N de la circunferencia y se realiza el proceso mencionado anteriormente. ¿Cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$?



a. Los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Por lo tanto, su suma es r.

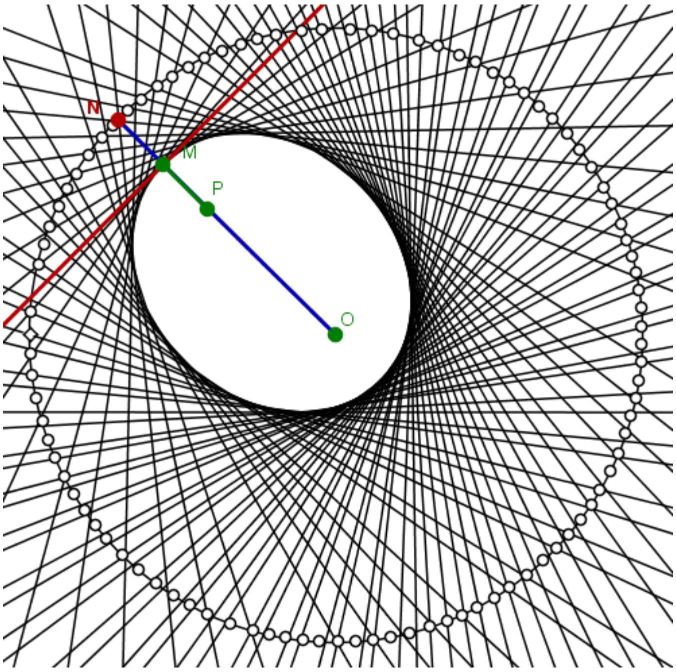
b. La suma es una constante cualquiera mayor que r.

c. La suma es una constante cualquiera, porque no se conocen las distancias.

d. La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ que las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MN}$.

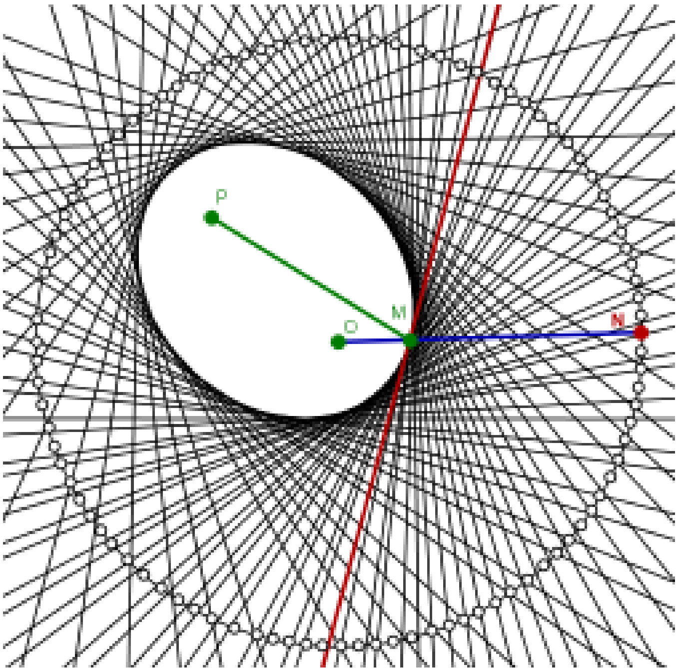
e. Ninguna de las anteriores.

26. De nuevo se marca otro punto N de la circunferencia, tal que N, P y O estén sobre una misma recta y se realiza el proceso mencionado anteriormente. ¿Cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$?



- **a.** Los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Por lo tanto, su suma es r.
- **b.** La suma es una constante cualquiera mayor que r.
- **c.** La suma es una constante cualquiera, porque no se conocen las distancias.
- **d.** La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ que las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MN}$.
- **e.** Ninguna de las anteriores.

27. Si se marca un punto cualquiera N sobre la circunferencia y se realiza de nuevo el proceso, ¿es posible afirmar que el resultado de sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia? ¿Por qué?



a. Sí es posible. $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. Por lo tanto, su suma es r.

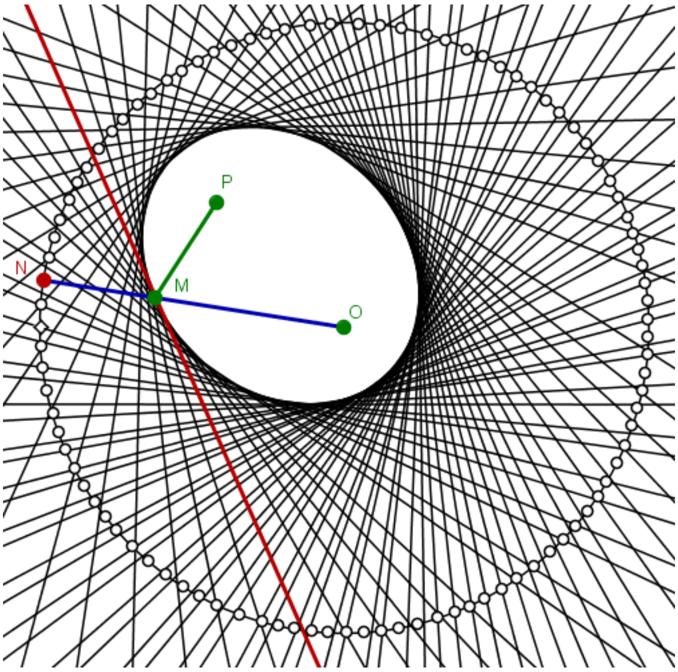
b. No es posible, porque la suma de las medidas de los segmentos es una constante cualquiera, que no es posible determinar.

c. No es posible, porque no se tiene información sobre las medidas de los segmentos respectivos.

d. Sí, siempre suman la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ que las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MN}$.

e. Ninguna de las anteriores.

28. Si M es un punto que pertenece al contorno de la figura, ¿es posible afirmar que la suma de sus distancias a los puntos específicos O y P es una constante? ¿Por qué?



a. No, porque la suma de las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es una constante cualquiera.

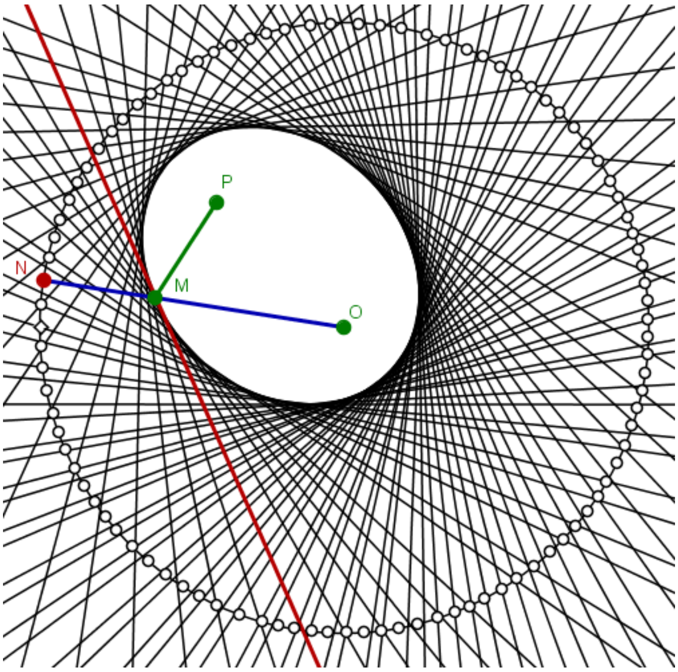
b. No, porque en algunos casos, la suma de las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia.

c. Sí, porque en todos los casos la suma de las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia, que es una constante.

d. Sí, porque $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida en todos los casos.

e. Ninguna de las anteriores.

29.¿Cuál es la propiedad que cumplen los puntos de la figura construida?



a. El conjunto de puntos de la figura equidista de los puntos O y P.

b. El conjunto de puntos de la figura cumple que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante.

c. El conjunto de puntos de la figura cumple que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{\mathrm{OM}}$ y $\overline{\mathrm{MP}}$ es el radio de la circunferencia.

d. El conjunto de puntos de la figura cumple que están a una misma distancia del punto P.

e. Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:
La figura envuelta por el conjunto de mediatrices construido, recibe el nombre de elipse.

30. ¿Es la elipse un lugar geométrico? ¿Por qué?

a. Sí, porque el conjunto de puntos de la elipse equidista del punto O.
b. Sí, porque el conjunto de puntos de la elipse equidista del punto P.
c. Sí, porque el conjunto de puntos de la elipse cumple que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante.
d. Sí, porque el conjunto de puntos de la elipse cumple que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia.
e. Ninguna de las anteriores.

31. Si se ubica un punto P en cualquier lugar de la región limitada por la circunferencia y se realiza el proceso de llevar cada punto de la circunferencia sobre el punto P, ¿cuál figura se obtendría? Descríbela.

a. Otra elipse, pero ubicada en otro lugar de la región.
b. Una circunferencia, con centro diferente de O.
c. Una figura diferente a la elipse y a la circunferencia.
d. Otra elipse, pero ubicada por fuera de la región.
e. Ninguna de las anteriores.

ANEXO C: DIVULGACIÓN DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.

Durante el trabajo de investigación, realizamos socializaciones de los avances en eventos locales, nacionales e internacionales. Además, realizamos talleres con estudiantes y profesores, y se publicaron algunos artículos.

C.1. Artículos y publicaciones.

C.1.1. *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del Modelo Educativo de Van Hiele.*

Zaida Margot Santa Ramírez, Universidad de Antioquia, Colombia.

Carlos Mario Jaramillo López, Universidad de Antioquia, Colombia.

Resumen.

Dado que muchos estudiantes de la interfase bachillerato – universidad presentan dificultades en la comprensión de los conceptos relacionados con las secciones cónicas, se pretende con este trabajo de investigación describir el nivel de razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan con la construcción de las secciones cónicas con la axiomática del doblado de papel. En este proceso de descripción, se espera que el estudiante tenga la posibilidad de avanzar en la conceptualización de dichos lugares geométricos. Para lograrlo, se va a diseñar un guión de entrevista semi estructurado de carácter socrático, que en primer lugar permita detectar el nivel de razonamiento de los estudiantes, y en segundo lugar, se constituya en una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento.

La definición geométrica de cada sección cónica (elipse, hipérbola y parábola) se puede lograr con base en el modelo educativo de Van Hiele, no sólo porque es un modelo diseñado inicialmente para la geometría, sino por su carácter visual

geométrico, que facilita definiciones formales a partir del reconocimiento visual, el análisis y la clasificación.

El doblado de papel es una herramienta útil y funcional que le brinda la posibilidad al sujeto de interactuar con una hoja de papel para visualizar conceptos y así facilitar el aprendizaje de la geometría. Se relaciona con el modelo porque es una estrategia de visualización geométrica que enriquece el nivel I de razonamiento y al mismo tiempo le contribuye con una componente de tipo experimental.

Modalidad de participación: Conferencia.

Estado: Publicado.

Revista: Asocolme.

Código ISBN: 978-958-98732-1-1

Lugar y fecha: Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, 2009.

C.1.2. *Comprensión de las secciones cónicas como lugares geométricos mediante la axiomática del doblado de papel.*

Zaida Margot Santa Ramírez, Universidad de Antioquia, Colombia.

Carlos Mario Jaramillo López, Universidad de Antioquia, Colombia.

Resumen.

Nuestra investigación, mediante un estudio de casos, analiza la comprensión de los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, en el marco del modelo educativo de Van Hiele, utilizando la axiomática del doblado de papel. La propuesta articula el modelo teórico, la temática (secciones cónicas) y el doblado de papel, contribuyendo con el progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes y con la

superación de ciertas crisis existentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como la desarticulación entre conceptos y procedimientos, en el campo de las matemáticas.

Modalidad de participación: Cursillo.

Estado: Publicado.

Revista: Formación y Modelación en Ciencias Básicas.

Código ISBN: 978-958-8348-89-6

Lugar y fecha: Universidad de Medellín, Medellín, 2010.

C.1.3. *Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas.*

Zaida Margot Santa Ramírez, Universidad de Antioquia, Colombia.

Carlos Mario Jaramillo López, Universidad de Antioquia, Colombia.

Resumen.

El doblado de papel permite hacer construcciones tan precisas como las hechas con regla y compás; por eso, en los últimos años, se han venido usando los axiomas propuestos por Humiaki Huzita y Koshiro Hatori, para fundamentar esta nueva geometría del doblado de papel, alterna a la geometría euclidiana. El presente artículo pretende formalizar algunos conceptos primitivos necesarios en las construcciones geométricas mediante el doblado de papel y, a su vez, desarrollar una propuesta alternativa para construir y deducir conceptos correspondientes a las secciones cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Tipo de artículo: Avance corto (avance de investigación).

Estado: Publicado.

Revista: Revista Virtual Universidad Católica del Norte.

Código ISSN: 0124-5821

Fecha de aprobación: 2010-09-01

C.2. Ponencias, talleres o conferencias.

A continuación, se mencionará nuestra participación en ponencias, talleres o conferencias, que nos permitió socializar los avances del trabajo de investigación, y a su vez, diseñar y refinar los descriptores y el guión de entrevista.

1. Taller de origami. Terceras Jornadas de Investigación Ciencia Abierta y Cercana 2008. Organizado por la Vicerrectoría de Investigación. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, noviembre de 2008.

2. Cursillo de Geometría en origami. Olimpíadas Intercolegiales de Matemáticas. Organizadas por la Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia, noviembre de 2008.

3. Taller de Geometría y doblado de papel. III Encuentro de estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Organizado por el Semillero de Investigación de la Licenciatura y el grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA – Eafit). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, diciembre de 2008.

4. Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele. Taller. X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Organizado por ASOCOLME y la Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia, octubre de 2009.

5. Comprensión de las secciones cónicas como lugares geométricos mediante la axiomática del doblado de papel. Cursillo. II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Organizado por la Universidad de Medellín, Medellín, Colombia, mayo de 2010.

6. Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco de Van Hiele. Conferencia. Sixth International Congress of Qualitative Inquiry. Universidad de Illinois, Urbana-Champaign, Estados Unidos, mayo de 2010.

7. Comprensión de las secciones cónicas como lugares geométricos mediante la axiomática del doblado de papel. Taller. X Encuentro de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. Organizado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, octubre de 2010.

8. Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. Conferencia. Seminario Institucional. Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, noviembre de 2010.

9. Comprensión de las secciones cónicas como lugares geométricos mediante la axiomática del doblado de papel. Taller. Réplica del X Encuentro de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. Organizado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Antioquia, Sede Yarumal, Colombia, abril de 2011.

10. La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. Ponencia. III Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Organizado por la Universidad de Medellín, Medellín, Colombia, mayo de 2011.

ANEXO D: ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL TEST POR PREGUNTA

Pregunta 1.

La respuesta correcta de la pregunta 1 es la C: *Por dos puntos pasa sólo una recta*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 1	# de estudiantes
A	1
B	5
C	55
D	8
E	1
Total general	**70**

El 79% de los estudiantes lograron establecer que por dos puntos pasa una sola recta. El 21% restante creyeron que por dos puntos pasan dos rectas (7%), muchas rectas (1%), infinitas rectas (12%) o que la respuesta no estaba entre los literales A, B, C o D (1%). En esta pregunta, la mayoría de los estudiantes respondieron acertadamente.

Pregunta 2.

La respuesta correcta de la pregunta 2 es la D: *Por dos puntos pasa un solo doblez*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 2	# de estudiantes
A	9
B	6
C	7
D	46
E	2
Total general	**70**

El 66% de los estudiantes lograron establecer que por dos puntos pasa un solo doblez. El 34% restante creyeron que por dos puntos pasan dos dobleces (8%), muchos dobleces (10%), infinitos dobleces (13%) o que la respuesta no estaba entre los literales A, B, C o D (3%). En esta pregunta, la mayoría de los estudiantes respondieron acertadamente.

Pregunta 3.

La respuesta correcta de la pregunta 3 es la B: *Si los dos puntos son sus extremos, sólo un segmento*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 3	**# de estudiantes**
A	1
B	51
C	3
D	4
E	11
Total general	**70**

El 73% de los estudiantes lograron establecer que los dos puntos marcados en la hoja de papel conectan sólo un doblez. El 16% creyeron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, porque no se especificaba si el segmento debía contener los dos puntos. El 11% restante creyeron que los dos puntos conectan tres segmentos (1%) o que conectan muchos segmentos (10%). En esta pregunta, la mayoría de los estudiantes respondieron acertadamente.

Pregunta 4:

La respuesta correcta de la pregunta 4 es la C: *Llevando un punto extremo del segmento exactamente sobre el otro punto extremo.*

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 4	# de estudiantes
A	11
B	3
C	51
D	4
E	1
Total general	**70**

El 73% de los estudiantes lograron establecer que si se lleva un punto extremo de un segmento sobre su otro punto extremo mediante el doblado de papel, se puede encontrar el punto medio de dicho segmento. El 16% creyeron que como el segmento parece estar ubicado en la mitad del cuadrado, el punto medio se podía encontrar si se llevaba un lado del cuadrado exactamente sobre el otro lado. El 11% restante creyeron que no era posible encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel (6%), que sí era posible pero que no sabrían cómo hacerlo (4%) o que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D (1%). En esta pregunta, la mayoría de los estudiantes respondieron acertadamente.

Pregunta 5.

La respuesta correcta de la pregunta 5 es la D: *El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 5	# de estudiantes
A	9
B	13
C	20
D	28
Total general	**70**

El 40% de los estudiantes logran relacionar el doblez hecho con una perpendicular que pasa por el punto medio del segmento. El 29% afirman que los extremos del segmento están a igual distancia del doblez, pero no responden qué relación hay entre el doblez hecho y el segmento. El 18% afirman que el doblez hecho pasa por el punto medio del segmento, afirmación que es correcta, pero no hace mención a la perpendicularidad. El 13% restante afirman que el doblez y el segmento se interceptan en un punto, pero no se menciona la relación de perpendicularidad o que el doblez pasa por el punto medio. El porcentaje más alto (40%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 6.

La respuesta correcta de la pregunta 6 es la A: *Tienen la misma medida porque R es el punto medio del segmento*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 6	**# de estudiantes**
A	38
B	3
C	22
D	7
Total general	**70**

El 54% de los estudiantes establecieron que los segmentos $\overline{RN}$ y $\overline{RP}$ tienen la misma medida porque R es el punto medio del segmento. El 32% afirmaron correctamente que los puntos N y P están a la misma distancia del punto medio R, pero no lograron responder de forma explícita la pregunta que se les hacía. El 10% afirmaron que el segmento $\overline{NP}$ se divide en dos partes, pero no lograron establecer si eran iguales. El 4% restante afirmaron que los segmentos $\overline{RN}$ y $\overline{RP}$ tenían medidas diferentes. El porcentaje más alto (54%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 7.

La respuesta correcta de la pregunta 7 es la C*: Sí, porque al intersecarse forman ángulos de 90°.*

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 7	**# de estudiantes**
A	9
B	5
C	52
D	3
E	1
Total general	**70**

El 74% de los estudiantes respondieron que el segmento $\overline{NP}$ y el doblez hecho son perpendiculares porque al intersecarse, forman ángulos de 90 °. El 13% afirman que el doblez y el segmento forman entre sí un plano cartesiano; implícitamente hay una relación de perpendicularidad en un plano cartesiano, pero los estudiantes no la manifiestan. El 13% restante afirman que no hay una relación de perpendicularidad porque no se forman ángulos de 90° (7%), no son perpendiculares porque se cortan en el punto medio (4%) o que la respuesta no se encuentra en los literales A, B, C o D (2%). En general, se percibe que la mayoría de estudiantes acertaron con la respuesta correcta.

Pregunta 8.

La respuesta correcta de la pregunta 8 es la A: *Son iguales, porque cuando llevo el punto N sobre el punto P, coinciden*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 8	# de estudiantes
A	22
B	9
C	20
D	14
E	5
Total general	**70**

El 31% de los estudiantes establecieron que los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ tienen la misma medida porque coinciden cuando se lleva el punto N sobre el punto P. El 29% afirmaron que los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ tienen la misma medida porque el punto M está en la mitad del segmento $\overline{NP}$, afirmación que tiene algunas inconsistencias geométricas. El 20% afirmaron que son iguales porque siempre se forma un triángulo, afirmación que es verdadera, pero hacía falta explicitar que no se formaba cualquier tipo de triángulo, sino un triángulo isósceles. El 13% afirmaron que el punto M siempre estaba a la misma distancia del punto medio R, afirmación que tiene inconsistencias geométricas. El 7% restante, consideraron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D o no entendieron la pregunta. El porcentaje más alto (31%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 9.

La respuesta correcta de la pregunta 9 es la C: *Sí, porque las distancias, desde los extremos del segmento a un punto cualquiera de la mediatriz, son iguales*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 9	# de estudiantes
A	3
B	5
C	29
D	26
E	7
Total general	**70**

El 42% de los estudiantes respondieron correctamente que cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. El 37% también establecieron que un punto de la mediatriz equidista de sus extremos pero explicaron que era porque la mediatriz pasaba por el punto medio. El 10% de los estudiantes no comprendieron la pregunta o consideraron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D. El 11% afirmaron que no todos los puntos equidistaban de los extremos del segmento (7%) o que si era cierto porque siempre se formaba un triángulo, pero ninguno de los estudiantes manifestó que era un triángulo isósceles. El porcentaje más alto (42%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 10.

La respuesta correcta de la pregunta 10 es la D: *Sí, porque el conjunto de puntos que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 10	**# de estudiantes**
A	15
B	4
C	20
D	29
E	2
Total general	**70**

El 41% de los estudiantes lograron determinar correctamente que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico porque todos sus puntos equidistan de sus extremos. El 29% afirmaron que la mediatriz de un segmento era un lugar geométrico, porque sus puntos cumplían con una determinada propiedad, pero no la explicitaron. El 21% establecieron que la mediatriz era un lugar geométrico porque pasa por el punto medio de un segmento; esta explicación no justifica el hecho de ser un lugar geométrico. El 9% restante afirmaron que la mediatriz no era un lugar geométrico porque sus puntos no cumplían con una propiedad específica (6%), que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D o no comprendieron la pregunta (3%). El porcentaje más alto (41%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 11.

La respuesta correcta de la pregunta 11 es la B: *La suma de los segmentos es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N.*

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 11	# de estudiantes
A	3
B	35
C	13
D	16
E	3
Total general	**70**

El 50% de los estudiantes lograron visualizar correctamente que la suma de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. El 23% afirmaron que la suma de dichos segmentos es una constante cualquiera porque no se conocían las distancias. El 19% establecieron de forma incorrecta, que los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ tienen la misma medida porque M pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. El 8% restante afirmaron que la suma era una constante cualquiera que no era posible determinar (4%), que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o no entendieron la pregunta (4%).

Pregunta 12.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 12 es la A: *Infinitos dobleces*. La segunda mejor opción de respuesta es la C.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 12	# de estudiantes
A	33
B	20
C	10
D	7
Total general	**70**

El 47% de los estudiantes respondieron correctamente que por un punto pasan infinitos dobleces. El 14% de los estudiantes se inclinaron por la segunda opción de respuesta, por un punto pasan muchos dobleces. El 29% afirmaron que por un punto pasan sólo cuatro dobleces y el 10% que pasan sólo dos dobleces. El 61% de los estudiantes respondieron la primera o la segunda opción de respuesta.

Pregunta 13.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 13 es la C: *Si es posible, llevando un doblez sobre el doblez consecutivo y calcando el punto en dicho doblez*. La segunda mejor opción de respuesta es la B: *Si es posible, doblando la hoja en los dobleces dados y calcando el punto en otro doblez*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 13	# de estudiantes
A	9
B	14
C	27
D	19
E	1
Total general	**70**

El 39% de los estudiantes lograron determinar correctamente que sí es posible trasladar el punto a los dobleces siguientes, llevando un doblez sobre el doblez consecutivo y calcando el punto en dicho doblez. El 20% de los estudiantes se inclinaron por la segunda opción de respuesta, afirmando que sí es posible trasladar el punto doblando la hoja en los dobleces dados y calcando el punto. El 27% afirmaron que no era posible trasladar el punto a los dobleces consecutivos. El 14% restante afirmaron que no era posible conservando la distancia al punto O (13%), que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendieron la pregunta (1%). El 59% de los estudiantes se inclinaron por las dos mejores opciones de respuesta.

Pregunta 14.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 14 es la C: *Sí, porque cuando se hizo el proceso de traslación, todos los puntos quedaron a una misma distancia del punto O*. La segunda mejor opción de respuesta es la A: *Sí, porque ese fue el proceso de traslación que se hizo*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 14	**# de estudiantes**
A	6
B	5
C	43
D	15
E	1
Total general	**70**

El 62% de los estudiantes afirmaron correctamente que todos los puntos equidistaban del punto O porque todos quedaron a la misma distancia de este punto. El 9% de los estudiantes afirmaron que todos los puntos estaban a la misma distancia del punto O porque ese había sido el proceso realizado. El 21% afirmaron que sí porque O era el punto medio. El 8% restante establecieron que no porque había unas distancias más largas que otras (7%), que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D o no entendieron la pregunta (1%). En general, el 71% de los estudiantes se inclinaron por las dos mejores opciones de respuesta.

Pregunta 15.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 15 es la D: *Sí es posible, porque se pueden hacer muchos dobleces que pasen por el punto O*. La segunda mejor opción de respuesta es la B: *Sí es posible, siempre y cuando el papel lo permita*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 15	**# de estudiantes**
A	4
B	22
C	22
D	21
E	1
Total general	**70**

El 30% de los estudiantes afirmaron correctamente que sí es posible continuar con el proceso de traslación de manera indefinida porque se pueden hacer muchos más dobleces. El 31% se inclinaron por la segunda opción de respuesta y establecieron que sí era posible continuar con el proceso siempre y cuando el papel lo permitiera. El 31% afirmaron que no era posible porque la hoja de papel tiene límites. El 8% restante respondieron que no era posible porque no se podían encontrar más dobleces (6%), que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta (2%). En general, el 61% de los estudiantes se inclinaron por las dos mejores opciones de respuesta.

Pregunta 16.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 16 es la B: *Que equidistan del punto O*. La segunda mejor opción de respuesta es la D: *Que tienen el mismo radio*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 16	**# de estudiantes**
A	3
B	15
C	5
D	46
E	1
Total general	**70**

El 21% de los estudiantes afirmaron correctamente que la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a una circunferencia es equidistar del punto O. El 66% establecieron que la propiedad que cumplen los puntos es tener el mismo radio. El 13% restante afirmaron que la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a una circunferencia es que pertenecen a un círculo (7%), que pertenecen a una circunferencia (4%), que la respuesta no está en los literales A, B, C o D o no entendieron la pregunta (2%). En general, el 87% de los estudiantes se inclinaron por las dos mejores opciones de respuesta, en un porcentaje mayor la segunda mejor opción.

Pregunta 17.

La respuesta correcta de la pregunta 17 es la D: *El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento* $\overline{NO}$. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 17	**# de estudiantes**
A	8
B	25
C	5
D	28
E	4
Total general	**70**

El 40% de los estudiantes respondieron correctamente que el doblez hecho pasaba por el punto medio del segmento. El 37% afirmaron que el doblez hecho pasaba por el punto medio del segmento, pero no mencionaron la relación de perpendicularidad. El 11% establecieron que tanto el doblez como el segmento se intersecaban en un punto, afirmación válida, pero que no explicita la verdadera relación entre el doblez y el segmento. El 7% afirmaron que el segmento $\overline{NO}$ quedaba dividido en dos partes iguales, afirmación que es correcta, pero que no explicita la relación entre el doblez y el segmento. El 6% restante consideraron que la respuesta correcta no estaba en los literales A, B, C o D, o no entendieron la pregunta. El porcentaje más alto (40%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 18.

La respuesta correcta de la pregunta 18 es la D: *Sí, porque al llevar un punto sobre otro punto, se está construyendo la mediatriz del segmento que une ambos puntos*. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 18	**# de estudiantes**
A	16
B	12
C	10
D	29
E	3
Total general	**70**

El 42% de los estudiantes respondieron correctamente que los dobleces resultantes eran mediatrices de los segmentos respectivos porque cuando se lleva un punto sobre otro, se forma la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos. El 23% afirmaron, de forma incompleta, que sí eran mediatrices porque pasaban por el punto medio de cada segmento. El 17% afirmaron que los dobleces no eran mediatrices porque no pasaban por el punto medio de cada segmento. El 14% establecieron que los dobleces no eran mediatrices porque no eran perpendiculares a los segmentos respectivos. El 4% restante, afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta. El porcentaje más alto (42%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 19.

La respuesta correcta de la pregunta 19 es la B: *Una circunferencia porque todos los puntos equidistan del centro*. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 19	**# de estudiantes**
A	8
B	30
C	25
D	6
E	1
Total general	**70**

El 43% de los estudiantes respondieron correctamente que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices era una circunferencia porque todos sus puntos equidistaban del centro. El 36% afirmaron que era una circunferencia porque estaba envuelta por un conjunto de mediatrices, razón que no es suficiente para lanzar tal afirmación. El 11% afirmaron que se formaba un círculo porque todos sus puntos estaban a una misma distancia del centro; sin embargo, hay una inconsistencia conceptual al confundir círculo con circunferencia. El 9% también respondieron que la figura era un círculo porque tenía forma redonda (estos estudiantes aún siguen razonando en el nivel I de razonamiento). El 1% restante afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta. El porcentaje más alto (43%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 20.

La respuesta correcta de la pregunta 20 es la A: *Son iguales. La suma de las medidas de los segmentos* $\overline{\mathrm{PM}}$ *y* $\overline{\mathrm{MO}}$ *es la constante r, porque M equidista de los puntos N y P.* Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 20	**# de estudiantes**
A	36
B	7
C	12
D	7
E	8
Total general	**70**

El 52% de los estudiantes respondieron correctamente que la suma de los segmentos $\overline{\mathrm{PM}}$ y $\overline{\mathrm{MO}}$ era la constante r porque M equidista de los puntos N y P. El 17% afirmaron que los segmentos $\overline{\mathrm{PM}}$ y $\overline{\mathrm{MO}}$ tenían la misma medida, afirmación incorrecta, y que por eso, su suma era la constante r. El 20% establecieron que no era posible determinar la suma de dichos segmentos porque no se conocían los valores concretos de sus medidas. El 11% restante afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendieron la pregunta.

Pregunta 21.

Como la pregunta es básicamente de descripción de una posible figura sin realizar su construcción, hay varias opciones de respuesta. La mejor opción de respuesta es la B: *Una elipse*. La segunda mejor opción de respuesta es la D: *Un óvalo*. Como muchos estudiantes no conocían todavía el término elipse, aceptamos que la opción E también fuera una opción correcta de respuesta.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 21	# de estudiantes
A	4
B	10
C	9
D	36
E	11
Total general	**70**

El 51% de los estudiantes se aventuraron a afirmar que la figura que se formaría si se llegara a realizar dicho proceso de construcción, sería un óvalo. El 14% afirmaron que se formaría una elipse. El 13% establecieron que se formaría una espiral. El 16% afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D o que no entendían la pregunta. El 6% restante afirmaron que se formaría una figura similar a una circunferencia. La mayoría de los estudiantes relacionaron la forma de la figura con un óvalo o con una elipse. Como la pregunta es del bloque 1, que corresponde al nivel I de razonamiento, se puede percibir que la mayoría de estudiantes razonan en este nivel o en uno superior.

Pregunta 22.

La respuesta correcta de la pregunta 22 es la D: *No, los puntos de la figura no equidistan de los puntos O y P, ni del centro de la figura*. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 22	# de estudiantes
A	5
B	2
C	11
D	51
E	1
Total general	**70**

El 73% de los estudiantes respondieron correctamente que la figura no era una circunferencia porque sus puntos no equidistaban del centro de la figura, ni de los puntos O y P. El 16% afirmaron, de forma errónea, que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices era una circunferencia porque sus puntos equidistaban del centro. El 7% concluyeron que era una circunferencia, pero más achatada y que sus puntos equidistaban del centro. El 4% afirmaron que si era una circunferencia porque todos sus puntos equidistaban de P (3%), o que la respuesta no estaba en los literales A, B, C, D o que no entendieron la pregunta (1%).

Pregunta 23.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 23 es la B: *Sí, porque en la figura se visualiza que M pertenece al contorno de la figura interior*. La segunda mejor opción de respuesta es la A: *Sí, porque M es el punto de intersección entre* $\overline{NO}$ *y la mediatriz del segmento* $\overline{NP}$.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 23	# de estudiantes
A	17
B	35
C	6
D	9
E	3
Total general	**70**

El 50% de los estudiantes respondieron correctamente que M pertenece al contorno de la figura, porque así se visualiza en la figura. El 24% afirman que sí pertenece porque es la intersección del segmento $\overline{NO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{NP}$; esta afirmación es correcta, pero los estudiantes aún no logran explicarla. El 13% establecen que no pertenece a la figura porque la distancia entre los puntos M y O es arbitraria. El 9% responden que sí pertenece porque la suma de los segmentos $\overline{NM}$ y $\overline{MO}$ es el radio de la circunferencia. El

4% afirman que la respuesta no está en los literales A, B, C o D, o que no entienden la pregunta. En general, se visualiza que el 74% de los estudiantes se inclinaron por las dos mejores opciones de respuesta.

Pregunta 24.

La respuesta correcta de la pregunta 24 es la D: *La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MP}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MN}$. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 24	**# de estudiantes**
A	7
B	12
C	22
D	27
E	2
Total general	**70**

El 39% de los estudiantes respondieron correctamente que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia. El 31% afirmaron que la suma era cualquier constante porque no se conocían las distancias. El 17% concluyeron que la suma es una constante cualquiera mayor que r. El 10% concluyeron que la suma era r, pero no dieron una razón válida. El 3% restante afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta. El porcentaje más alto (39%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 25.

La respuesta correcta de la pregunta 25 es la D: *La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos* $\overline{\mathrm{OM}}$ *y* $\overline{\mathrm{MP}}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{\mathrm{OM}}$ *y* $\overline{\mathrm{MN}}$. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 25	**# de estudiantes**
A	33
B	8
C	7
D	21
E	1
Total general	**70**

El 30% de los estudiantes respondieron correctamente que la suma de los segmentos $\overline{\mathrm{OM}}$ y $\overline{\mathrm{MP}}$ es el radio de la circunferencia. El 47% concluyeron que la suma era r, pero no dieron una razón válida, pues los segmentos $\overline{\mathrm{MP}}$ y $\overline{\mathrm{MO}}$ no tienen la misma medida. El 12% concluyeron que la suma es una constante cualquiera mayor que r. El 10% afirmaron que la suma era cualquier constante porque no se conocían las distancias. El 1% restante afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta. El porcentaje más alto (47%) no corresponde a la respuesta correcta. Es la primera pregunta en la que el porcentaje de estudiantes que acertaron en la respuesta fue menor. Esto se debe a que es una pregunta del nivel III y solo algunos estudiantes están razonando en este.

Pregunta 26.

La respuesta correcta de la pregunta 26 es la D: *La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos* $\overline{\mathrm{OM}}$ *y*

$\overline{MP}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MN}$. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 26	**# de estudiantes**
A	8
B	4
C	7
D	50
E	1
Total general	**70**

El 72% de los estudiantes respondieron correctamente que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia. El 11% concluyeron que la suma era r, pero no dieron una razón válida, pues los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ no tienen la misma medida. El 10% afirmaron que la suma era cualquier constante porque no se conocían las distancias. El 6% concluyeron que la suma es una constante cualquiera mayor que r. El 1% restante afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta. El porcentaje más alto (72%) corresponde a la respuesta correcta. Se puede percibir que hay una gran diferencia entre la pregunta 25 y la pregunta 26, pues en la anterior, el 70% de los estudiantes respondieron de forma incorrecta y en esta, más del 70% respondieron correctamente. Parece ser que la pregunta 26 rompe con un esquema de oposición y el estudiante debe cambiar de opinión (Jaramillo y Camipillo, 2001).

Pregunta 27.

La respuesta correcta de la pregunta 27 es la D: *La suma es la constante r, porque M equidista de los puntos P y N. Sería lo mismo sumar las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MP}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MN}$. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 27	**# de estudiantes**
A	9
B	9
C	5
D	46
NR	1
Total general	**70**

El 66% de los estudiantes respondieron correctamente que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia. El 13% concluyeron que la suma era r, pero no dieron una razón válida, pues los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{MO}$ no tienen la misma medida. El 13% concluyeron que la suma es una constante cualquiera mayor que r. El 7% afirmaron que la suma era cualquier constante porque no se conocían las distancias. El 1% restante no respondieron la pregunta. El porcentaje más alto (66%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 28.

La respuesta correcta de la pregunta 28 es la C: *Sí, porque en todos los casos la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MP}$ *es el radio de la circunferencia, que es una constante*. Las demás opciones de respuesta son incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 28	**# de estudiantes**
A	5
B	9
C	49
D	6
NR	1
Total general	**70**

El 70% de los estudiantes respondieron correctamente que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia, que es una constante. El 13% afirmaron que la suma de esos segmentos, que es igual a r, no sucedía en todos los casos. El 9% establecieron que la suma sí era una constante, pero dieron una razón incorrecta. El 7% afirmaron que la suma de dichos segmentos era una constante cualquiera. El 1% restante no respondieron la pregunta. El porcentaje más alto (70%) corresponde a la respuesta correcta.

Pregunta 29.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 29, de acuerdo con lo que se ha venido trabajando con los estudiantes, es la C: *El conjunto de puntos de la figura cumple que la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MP}$ *es el radio de la circunferencia*. La segunda opción de respuesta correcta, que es una respuesta muy general y acertada, es la B: *El conjunto de puntos de la figura cumple que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 29	**# de estudiantes**
A	8
B	37
C	16
D	7
E	1
NR	1
Total general	**70**

El 23% de los estudiantes respondieron correctamente que el conjunto de puntos de la figura cumplen que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia. El 53% afirmaron, también correctamente, que el conjunto de puntos cumple que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante. El 12% concluyó incorrectamente que el conjunto de puntos de la figura equidistaba de los puntos O y P. El 2% restante afirmó que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendían la pregunta (1%) o no respondieron (1%). El 76% de los estudiantes se inclinaron por las mejores dos opciones de respuesta, siendo el porcentaje mayor para la segunda mejor opción.

Pregunta 30.

La mejor opción de respuesta de la pregunta 30, de acuerdo con lo que se ha venido trabajando con los estudiantes, es la D: *Sí, porque el conjunto de puntos de la elipse cumple que la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{MP}$ *es el radio de la circunferencia*. La segunda opción de respuesta correcta, que es una respuesta muy general y acertada, es la C: *Sí, porque el conjunto de puntos de la elipse cumple que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante*.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 30	**# de estudiantes**
A	4
B	4
C	19
D	41
E	1
NR	1
Total general	**70**

El 59% de los estudiantes respondieron correctamente que la elipse sí es un lugar geométrico porque el conjunto de puntos cumple que la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el radio de la circunferencia. El 27% concluyeron, también correctamente, que la elipse es un lugar geométrico porque el conjunto de puntos cumple que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante. El 12% afirmaron que la elipse sí era un lugar geométrico porque el conjunto de puntos equidista del punto O (6%) o del punto P (6%). El 2% restante, no respondieron (1%) o afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C o D, o que no entendieron la pregunta (1%). El 86% de los estudiantes se inclinaron por las dos mejores opciones de respuesta, siendo el porcentaje mayor para la primera opción de respuesta.

Pregunta 31.

La respuesta correcta de la pregunta 31 es la A: *Otra elipse, pero ubicada en otro lugar de la región*. Las demás opciones están incompletas o son incorrectas.

La siguiente tabla nos muestra el comportamiento de los participantes en esta pregunta:

Pregunta 31	**# de estudiantes**
A	46
B	9
C	7
D	6
E	1
NR	1
Total general	**70**

El 66% de los estudiantes respondieron acertadamente que si se realiza otra vez la figura, pero ubicando el punto P en otra región limitada por la circunferencia, se forma otra elipse. El 13% respondieron de forma incorrecta, que se forma una circunferencia con centro diferente de O. El 10% respondieron también de forma incorrecta, que se forma otra figura diferente a la elipse y a la circunferencia. El 9% afirmaron que se formaba otra elipse, pero ubicada por fuera de la región limitada por la circunferencia. El 2% restante, no respondieron la pregunta (1%) o afirmaron que la respuesta no estaba en los literales A, B, C, D o que no entendían la pregunta.