

UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES EN MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ENTORNOS MIXTOS DE APRENDIZAJE

Paula Andrea Rendón-Mesa, Juan Fernando Molina-Toro, Yadira Marcela Mesa, Jhony Alexander Villa-Ochoa

Universidad de Antioquia (Colombia)

paula.rendon@udea.edu.co, juan.molinat@udea.edu.co, yadira.mesa@udea.edu.co, jhony.villa@udea.edu.co

Palabras clave: modelación matemática, formación de profesores, entornos mixtos de aprendizaje

Key words: mathematics modeling, mathematics teacher training, blended-learning

RESUMEN: En este documento se analiza un episodio que se deriva de la experiencia de formación de profesores en modelación matemática. Los participantes fueron profesores de un programa de maestría en Educación (Matemática) quienes cursaron un Seminario que se diseñó a partir de algunas características de un entorno Blended-Learning. El episodio que se analizó refuerza la necesidad que los profesores que se inician en el estudio de la modelación matemática, conozcan estrategias y maneras de hacer modelación, pero, sobre todo, participen en experiencias a través de las cuales ellos mismos desarrollen proyectos de modelación matemática. El diseño, ejecución y validación de este tipo de modelación requiere de un acompañamiento y confrontación continua. Para ello, los entornos Blended Learning se constituyeron en medios que trascienden usos meramente divulgativos y se convirtieron en escenarios de discusión y reflexión para el desarrollo de los proyectos de modelación.

ABSTRACT: In this paper we discuss an episode derived from experience of teacher training to mathematical modelling. The participants were teachers of a master in Mathematics Education who were enrolled a seminar developed on blended learning environment. The episode reinforces the need for teachers who are new to the study of mathematical modeling should know strategies and ways of doing modeling, but above all, must participate in experiences through which to develop projects themselves mathematical modelling. The design, implementation and validation of this type of modeling requires support and continuous confrontation, for it, blended learning environments constitutes means that transcend purely informative purposes and become the stage for discussion and reflection for the development of projects modeling.

■ INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas ha aumentado el número de países que proponen que sus currículos vayan más allá de los aspectos conceptuales y procedimentales de las matemáticas para promover el desarrollo de habilidades/capacidades, a través de las cuales los estudiantes puedan usarlas en “contextos reales” (NCTM, 2000; MEN, 2006; SEP, 2011; MEP, 2013). La articulación con estos propósitos curriculares implica la convergencia de al menos dos acciones. La primera se asocia con las estrategias, recursos y epistemologías que sean afines a los usos académicos, sociales y culturales de las matemáticas; y la segunda, con la formación de profesores (y de otros actores educativos) para que aporten a la integración de tales aspectos en las aulas de clase.

La modelación matemática, como dominio de investigación, se ocupa de generar reflexiones y acciones que den sentido a las matemáticas escolares a través del estudio de fenómenos propios de otras ciencias (incluyendo las matemáticas), la sociedad y la cultura. A pesar de que existen líneas de investigación en modelación/aplicaciones, la formación de profesores y la conjunción de ambas; se reconoce en la literatura la complejidad a la que se enfrentan tales líneas, principalmente para integrar la modelación en las aulas de clase (Kaiser y Maaß, 2007; Villa-Ochoa y López, 2011; Villa-Ochoa, 2015).

La formación de profesores de matemáticas en y para la modelación matemática es un tema que ocupa el interés de investigadores a nivel internacional. Algunos trabajos muestran la importancia de reconocer las creencias y concepciones de los profesores acerca de la modelación (Frejd, 2012), otros presentan aportes en relación con el conocimiento necesario para que el profesor pueda implementarla en el aula de clase (Kaiser y Maaß, 2007) y otros, consideran algunas experiencias que se deben posibilitar a los profesores para dinamizar la cultura alrededor de la modelación matemática (Villa-Ochoa y López, 2011).

Como una manera de atender a las necesidades de formación de los profesores en modelación matemática, se diseñó un Seminario en el marco de un programa de maestría en Educación (Matemática) en el cual, los participantes (profesores de matemáticas en ejercicio) estudiaron alternativas para mediar el uso de la modelación matemática en las aulas de clase. Al mismo tiempo, el Seminario promovió acciones para que los profesores *vivieran* experiencias de modelación matemática, entre ellas, la modelación a través de proyectos.

Por lo anterior, en este documento presentamos y analizamos algunos resultados de una experiencia de modelación con profesores de matemáticas pertenecientes a un programa de maestría en Educación Matemática. La experiencia se desarrolló en un ambiente *Blended-Learning*, en el cual utilizamos conferencias *online*, videos, laboratorios y un grupo cerrado de Facebook para lograr los propósitos del Seminario. En particular, analizamos el desempeño de uno de los participantes en la elaboración del proyecto de modelación.

■ REFERENTES TEÓRICOS

La formación de profesores y la modelación matemática

Nuestra visión de formación de profesores, parte de la necesidad de que los profesores de matemáticas tomen conciencia de la importancia del saber y la experiencia con diversas temáticas en el momento de plantear sus prácticas didácticas. Conforme Silveira y Caldeira (2012) informan, en la literatura se demuestra que los obstáculos y resistencias de la integración de la modelación

matemática en las aulas de clase apuntan hacia las dificultades en los ámbitos constitutivos del trabajo docente, como: preparación de clases, relación con los estudiantes y sus respectivas familias, estructura administrativa y pedagógica de las escuelas, currículo y cuestiones personales (e.g. inseguridad frente a los nuevos desafíos). A nivel local, Villa-Ochoa y López (2011) reportaron la necesidad de que los profesores desarrollen un *sentido de realidad*, es decir, cierta sensibilidad para reconocer situaciones en el marco de las ciencias, la sociedad y la cultura que sean susceptibles de ser matematizados en las aulas de clase. En el mismo contexto, se reportó la necesidad de buscar estrategias para que los profesores superen la visión de los enunciados verbales estereotipados, como la única manera de hacer modelación matemática en las aulas de clase (Villa-Ochoa, 2015).

Como otra necesidad de formación, la literatura también reporta el desarrollo de un conocimiento del profesor. En cuanto a ello, pueden distinguirse tres características que se interrelacionan, a saber: (a) una comprensión del contenido matemático, (b) una comprensión de la multiplicidad de maneras en que se puede desarrollar el pensamiento de los estudiantes, y (c) un conocimiento de las estrategias pedagógicas que se pueden extraer en diferentes contextos para apoyar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Para Doerr y Lesh (2011) estas características en sí mismas no captan plenamente la distinción más fundamental en la naturaleza de los conocimientos de los profesores, entre las acciones que los maestros tienen en sus prácticas y las maneras en que ellos ven e interpretan sus prácticas. Tales investigadores señalan que una característica distintiva de una excelente enseñanza se refleja en la riqueza de maneras en las que el profesor interpreta su práctica, no sólo en las acciones que ella toma. Las necesidades de formación que se presentaron, se consideran en el diseño de programas de formación de profesores y se articulan a las maneras, metodologías y ambientes en los que esos programas han de desarrollarse. El Seminario que describimos en este artículo, debía atender a profesores en diversas regiones aisladas entre sí, por ello, pensamos en una metodología *Blended-Learning*, es decir, un ambiente en el que se usaron estrategias presenciales y *online* para desarrollar el currículo propuesto. En el siguiente apartado presentaremos algunos aspectos relativos a esta metodología de aprendizaje.

El ambiente de aprendizaje

En este espacio de formación pretendíamos que se reconocieran los principales elementos referentes a la modelación matemática como un recurso en el aula de clase y como una posibilidad para desarrollar investigación educativa. Bajo estas intenciones, se analizaron algunas situaciones en diversos contextos, a la luz de la modelación matemática y en ellas se reconocieron elementos fundamentales, principales significados, tendencias y perspectivas en la investigación en modelación matemática. Se identificaron las diferentes maneras en que se puede plantear la modelación en el aula de clase con el fin de promover la creación de estrategias e integrarla con las prácticas de los profesores de matemáticas. Al considerar tales dinámicas de actuación estructuramos el Seminario en cuatro ejes temáticos que se mencionan más adelante, los cuales se desarrollaron en un ambiente mixto de aprendizaje *Blended-Learning*.

Blended-Learning es un término que no admite una comprensión homogénea en educación. Graham (2006) señala que en la investigación internacional se encuentra diversidad de interpretaciones relacionadas frente a los componentes que se combinan. Así, este autor señala ambientes en los que el término (*blended*) mixto se refiere a (i) la combinación de medios y

modalidades de formación, (ii) la combinación de métodos y (iii) la combinación de ambientes presenciales (*face-to-face*) y *online*. Para el autor, las dos primeras acepciones están imbricadas en la discusión sobre el rol de los medios y de los métodos en el aprendizaje. Por su parte, de acuerdo con la tercera acepción, Grahan ofrece una definición en la que busca una integración de dos modelos de enseñanza que históricamente permanecen separados, a saber los sistemas de enseñanza tradicional y los sistemas de aprendizaje distribuidos y enfatiza en el rol central de las tecnologías digitales en dicho ambiente.

Güзера y Canera (2014) argumentan que los entornos *Blended-Learning* se perciben útiles, agradables, de apoyo, flexibles y motivadores para los alumnos; pero, estos factores son insuficientes para garantizar el éxito del aprendizaje. Para ello, se hace necesario que los profesores motiven a los estudiantes para una mayor participación en el entorno y encuentren maneras de crear la interacción social a través de una mayor colaboración. Según los autores, la combinación de metodologías presenciales (*face-to-face*) y *online* se debe planificar con precisión con el fin de beneficiarse de este enfoque. Para estos investigadores la pregunta por la manera en que se deben combinar los ambientes y los recursos sigue abierta. En el siguiente apartado describimos el ambiente del Seminario y la manera en que articulamos los recursos presenciales y *online* para atender a los propósitos de formación.

La estructura del Seminario

El Seminario se consolidó en cuatro ejes temáticos que dan fundamento teórico y metodológico a la modelación matemática. El primer eje temático se denominó ***Modelación matemática. Perspectivas, tendencias y desafíos para la educación matemática***, la discusión se centró en conocer las perspectivas que existen en la investigación y en las prácticas docentes, así como las implicaciones para el aula de clase.

Un segundo eje temático se denominó ***Contextos y problemas en el aula de clase*** y se realizaron precisiones frente al significado de “lo auténtico”, cercano o situado y cómo el contexto cumple un papel relevante a la hora de definir la manera de hacer modelación en el aula de clase.

Un tercer eje temático hizo referencia a las diferentes concepciones que puede tomar la modelación matemática. En este sentido se plantearon ideas acerca de la ***Modelación como proceso, actividad, competencia, estrategia didáctica, método de investigación escolar, ambiente de aprendizaje y práctica pedagógica***. La discusión en este eje temático permitió que los profesores ampliaran el panorama acerca de la manera de proponer la modelación en el aula de clase de acuerdo con la intencionalidad que plantearan para la misma. Además, de generar una toma de conciencia de los modos de concebirla y desarrollarla.

Un cuarto y último eje relacionó ***la modelación con la tecnología en el aula de clase***. Este momento permitió que los maestros se acercaran al uso de programas como *Tracker* y *Modellus* para considerar las potencialidades que ofrecen los software dinámicos en la construcción de relaciones entre el mundo real y las matemáticas y por tanto, reconocer el papel de la tecnología en un proceso de modelación matemática escolar. Los cuatro ejes temáticos descritos se desarrollaron con una metodología particular, la cual describimos a continuación.

Metodología del Seminario

Dado el carácter teórico y práctico de los objetos de estudio en este espacio de formación y de su denominación, adoptamos la metodología del Seminario Investigativo; es decir, los estudiantes

realizaron lecturas previas, desarrollaron talleres y participaron de las discusiones con base en la bibliografía sugerida. También, participaron de sesiones de trabajo con otras comunidades académicas, entre ellas el Seminario GEMAD- UNIANDÉS; Seminario Repensar las Matemáticas-México, Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe-REDUMATE, Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática-RECOMEM con las cuales se discutieron temas en relación con el objeto de estudio de este Seminario.

Para darle sentido al trabajo conjunto y lograr que los estudiantes tuvieran diálogos con los demás profesores y colegas, se dispuso un espacio en Facebook (<https://www.facebook.com/groups/778551425553750/>) donde fue activa la participación por medio del chat, comentarios, entre otros.

Las actividades allí dispuestas se programaron en periodos de tiempo específico, correspondiente al desarrollo de cada eje temático. Una vez los estudiantes abordaron las discusiones y los aspectos metodológicos acerca de este tipo de estrategia, identificaron una situación/fenómeno/problema susceptible de ser modelado, formularon su proyecto e hicieron entregas parciales de sus avances. Posteriormente hicieron una presentación pública de sus resultados por medio de un video.

La evaluación del Seminario

La evaluación se consideró como un proceso de formación que se lleva a cabo de forma integral y continua. En este sentido, consideramos las elaboraciones conceptuales, reflexiones, críticas, propuestas y argumentos de los estudiantes a medida que profundizaron en el estudio de la temática. Por lo tanto, se tuvo en cuenta para el proceso evaluativo: seguimientos para cada eje temático, profundidad de las discusiones en el grupo de Facebook, asistencia y participación en las sesiones sincrónicas.

El proyecto de modelación que se desarrolló a lo largo del semestre, consideró diversos momentos, a saber: creación, ejecución y entrega final. En esta actividad se evaluó la profundidad, calidad e innovación del proyecto, la claridad de la exposición, la capacidad para responder preguntas, la profundidad en los análisis y la capacidad de síntesis. Se dio relevancia a la descripción de la situación o tema objeto de modelación, la precisión frente al cómo y de dónde surge el interés de estudiar el fenómeno a modelar, el plan de trabajo en el que se declara la pertinencia del fenómeno, las maneras en que se recolectaron los datos y cómo se analizaron, la confrontación entre los resultados, la construcción matemática y la situación, las reflexiones y consideraciones frente a la experiencia modeladora.

La modelación a través de proyectos. Una estrategia.

Como indicamos hasta el momento, este espacio para la formación de profesores involucró diversidad de componentes epistemológicos y metodológicos de la modelación, también se ocupó de que los participantes se involucraran en la realización de un proyecto de modelación matemática alrededor de un tema libre. Dicho proyecto posibilitó que los estudiantes vivieran la integración de las matemáticas con otras disciplinas y encontraran aplicaciones a su propia vida. Además, la modelación matemática por proyectos permitió que los profesores en formación consideraran la necesidad de resolver situaciones/fenómenos/problemas y en tanto, un sentido crítico de las matemáticas para la situación particular que cada uno de ellos estudió. En correspondencia con lo anterior, los maestros en formación comprendieron conceptos y procedimientos matemáticos,

puesto que analizaron el comportamiento de situaciones/fenómenos/problemas para alcanzar una posible solución.

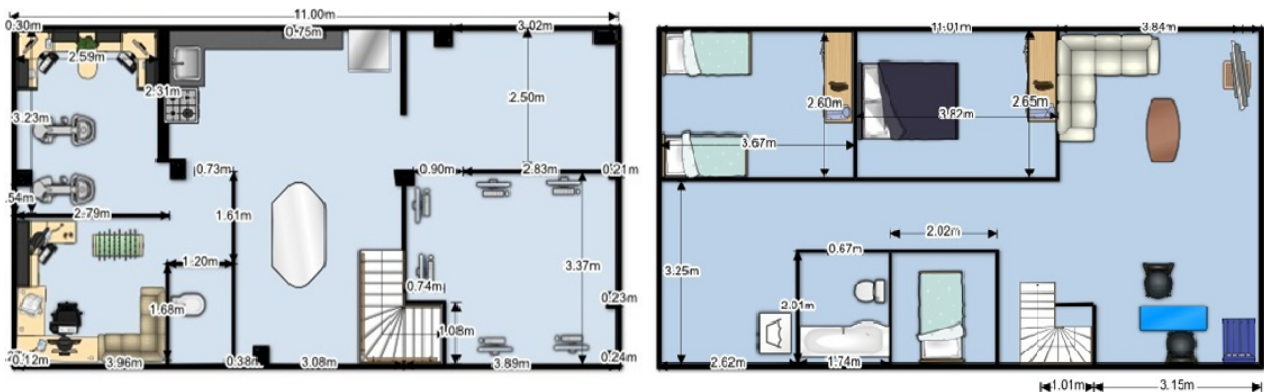
■ ALGUNOS RESULTADOS

Como indicamos en el apartado anterior, los estudiantes se enfrentaron a la elaboración de los proyectos de modelación. Dichos proyectos tuvieron su génesis en los situaciones/fenómenos/problemas que los profesores consideraron relevantes en sus experiencias sociales, como se evidencia en las temáticas que seleccionaron, las cuales fueron: *tiempos escolares, actividad de un mensajero, recursos naturales, solución de problemas financieros, promociones de productos para el hogar, empaques de los productos, el ritmo cardiaco, relación entre el ángulo de inclinación de un terreno y la superficie real para la construcción, descuentos, la redistribución espacial de una vivienda y la adecuación de espacio en una zona escolar.*

A manera de ejemplo, analizamos el caso del profesor Carlos (Seudónimo) quien aprovechó la realización del proyecto para dedicarse a estudiar la redistribución espacial de su vivienda. Esta idea se presentó al colectivo de formadores y demás estudiantes. Dicho diálogo permitió a Carlos cuestionarse frente a la naturaleza de su objeto de estudio, el plan para la recolección de datos y análisis frente a los alcances que él esperaba en su proyecto. A partir de esta presentación, en el colectivo de trabajo, se ofrecieron recomendaciones para el desarrollo del proyecto.

En la recolección de los datos, el profesor tomó las medidas de los diferentes espacios de su casa y generó un modelo que le permitió esquematizar y sistematizar los datos que se asociaron al rediseño general. Apoyó su trabajo en programas disponibles en la web como lo son el software *Google Sketchup* para realizar modelos 3D y la página web <http://floorplanner.com/> como lo ilustra la Figura 1.

Figura 1. Propuesta de diseños



Por medio de los modelos gráficos de la redistribución espacial, el profesor en formación, hizo visible las ideas alrededor de su diseño para posteriormente, comparar las dimensiones de algunos espacios como lo indica la Figura 2.

Figura 2. Comparación de las propuestas por el profesor para su vivienda

Diseño actual	Área	Diseño propuesto	Área
Piso 1			
Negocio de internet.	8.89m ²	Negocio de internet.	12.34m ²
Sala piso 1.	12.85m ²	Local piso 1	9.75m ²
Cocina.	7.48m ²	Cocina y comedor	17.705
Habitación niños.	9.7m ²		
Habitación principal.	8.36m ²	Biblioteca y gimnasio	8.36m ²
Lavadero.	7.34m ²	Sala de entretenimiento	7.34m ²

Diseño actual	Área	Diseño propuesto	Área
Piso 2			
Sala	18.64m ²	Sala	21.64m ²
Habitación 1	10.14m ²	Habitación Ppal	10.11m ²
Habitación 2	8.11m ²	Habitación niños	8.08m ²
Cocina	4m ²	Habitación niña	4m ²
Baño	3.43m ²	Baño	3.43m ²
Lavadero.	6.76m ²	Lavadero.	6.43m ²
Balcón	NA		

El profesor en formación discutió los avances en sus producciones con una de las profesoras del Seminario. Para estas discusiones se usaron principalmente correo electrónico, encuentros virtuales en Skype y el chat de Facebook. Una vez Carlos definió los planos y argumentó su elección, entró en contacto con un ingeniero civil, quien analizó la propuesta y realizó sugerencias acerca de las medidas mínimas de los espacios. Con base en dichas sugerencias, Carlos refinó el bosquejo que diseñó en el software y definió un modelo final. Para divulgar los resultados finales, Carlos realizó un video, lo cargó en YouTube y lo agregó al Grupo de Facebook con el fin de dar a conocer entre sus compañeros el trabajo. Al finalizar su proyecto Carlos expresó:

A nivel académico me ha permitido explorar otras áreas del conocimiento, en lo que tiene que ver con el campo de la construcción de viviendas y el diseño de planos en computador aunque sea en nivel básico. Ha posibilitado ver que en el diseño actual de la vivienda se puede mejorar y aunque sea poco el espacio en área que se aumenta o disminuye, es mucho lo que se aporta al bienestar familiar. En el modelo obtenido se muestra en detalle la cantidad de área que se reorganiza. Quedan abiertas las posibilidades a nivel personal de seguir indagando por el proyecto, que con el fin de convertirlo en realidad.

En estas reflexiones de Carlos es posible observar una valoración positiva de su experiencia sobre la modelación matemática, puesto que, el profesor en formación valoró no solo la posibilidad de trascender el carácter procedimental de la matemática, sino que también valoró su experiencia a través de la cual usó la geometría para comprender una problemática familiar y proponer alternativas para solucionarla.

■ ALGUNAS REFLEXIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Los proyectos planteados por los profesores participantes de este programa de formación se relacionaron con temas derivados de sus experiencias y necesidades personales. En tales temáticas los profesores reconocieron la modelación matemática más que una tarea clásica que se propone en los *word problems*. El desarrollo de proyectos, como los descritos en este artículo, proporcionaron a los profesores experiencias a través de las cuales identificaron maneras de matematizar fenómenos sociales, para que las matemáticas escolares y algunos fenómenos puedan articularse a través de procesos de modelación matemática.

La realización de un proyecto de modelación requiere de un acompañamiento continuo por parte de los formadores y de una confrontación con los diferentes actores en proceso educativo. Las redes sociales, videoconferencias y el correo electrónico se constituyeron en medios fundamentales para

atender a estos requerimientos; más allá de ser mecanismos de divulgación, se convirtieron en medios para la discusión académica, la problematización y la confrontación a través de las cuales se logra una compenetración con el fenómeno que se estudia a través de la matemática.

El proyecto que desarrolló Carlos se convierte en evidencia de la existencia de profesores para quienes la modelación matemática se constituye como una oportunidad para comprender situaciones/fenómenos/problemas inherentes a su cotidianidad, reconocer en ellos problemáticas que pueden estudiarse a través de las matemáticas. Este episodio ratifica nuestra visión de la modelación matemática como una práctica pedagógica en la cual los estudiantes (en este caso profesores) se involucran como protagonistas y sujetos productores del saber con respecto a la misma.

Agradecimientos al Departamento Administrativo de Ciencias, Tecnología e Innovación-COLCIENCIAS y al Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior-CAPES (Brasil) por la financiación del proyecto “La formación posgraduada de profesores de Matemáticas en un ambiente online” contrato 282-2014.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Doerr, H. M., & Lesh, R. (2011). Models and Modelling Perspectives on Teaching and Learning Mathematics in the Twenty-First Century In G. Kaiser, Werner, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 247-268). New York: Springer.
- Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 17-40
- Graham, C.R. (2006). Blended learning systems: Definitions, current trends and future directions. En C. J. Bonk, & C. R. Graham (Eds.), *The Handbook of blended learning: Global perspectives, local designs* (pp. 3-21). San Francisco: Pfeiffer.
- Kaiser, G., y Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary classrooms—Problems and chances. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & N. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). New York: Springer.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Magisterio
- MEP-Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013). *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Distribución de conocimientos en la implementación de los programas de Matemáticas para la Enseñanza Primaria*. Algunas sugerencias. San José, Costa Rica: MEP.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica* (2011th ed. pp. 1–157). México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

- Silveira, E., y Caldeira, A. D. (2012). Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. *Bolema*, 26(43), 1021-1047.
- Villa-Ochoa, J. A. y López, C. M. (2011). Sense of Reality through mathematical modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling –ICTMA14*. (pp. 701-711) New York: Springer.
- Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación Matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16). Doi: 10.11144/Javeriana.M8-16.MMPE