

**La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la
Comprensión en estudiantes de Grado 11 de una institución educativa oficial
de Medellín.**

**Trabajo de investigación para optar al título de
Magister en Educación Matemática**

Por:

JHONY MAURICIO CANO GIRALDO

Asesor:

LEONARDO CEBALLOS URREGO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Medellín

2012

*A mi esposa, mi hija,
mi mamá y a toda mi familia que
siempre me apoyaron incondicionalmente.*

Tabla de Contenido

CAPITULO 1. MARCO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN	5
1.1. Contexto histórico del concepto de función	5
1.2. Concepción epistemológica del concepto de función	8
CAPÍTULO 2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	13
2.1. Justificación del problema	13
2.2. Formulación del problema	17
CAPITULO 3.OBJETIVOS	18
3.1. Objetivo General	18
3.2. Objetivos específicos	18
CAPÍTULO 4. MARCO TEÓRICO	19
4.1. El enfoque de la Enseñanza para la Comprensión	19
4.2. Aportes teóricos desde la investigación del concepto de función en Educación Matemática	22
4.2.1. “El rol de las definiciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” de Shlomo Vinner	23
4.2.2. “Sobre la comprensión de la noción de función” de Anna Sierpiska	22
4.2.3. “Funciones y dificultades asociadas a su aprendizaje” de Theodore Eisenberg	24
CAPÍTULO 5. METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	30
5.1. Enfoque de investigación	30
5.2. Instrumentos de recolección de información	30
5.3. Diseño de la unidad curricular	32
5.3.1. Tópico generativo	32
5.3.2. Metas de comprensión	32
5.3.3. Desempeños de Comprensión	34
5.3.4. Valoración continua	36
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE RESULTADOS	38
6.1. Entrevistas iniciales	39
6.1.1. Entrevista inicial estudiante A1	39
6.1.2. Entrevista inicial estudiante A2	40
6.1.3. Entrevista inicial estudiante B1	41
6.1.4. Entrevista inicial estudiante B2	42
6.1.5. Entrevista inicial estudiante C1	43
6.1.6. Entrevista inicial estudiante C2	44

6.2.	Análisis global de las entrevistas iniciales _____	45
6.3.	Análisis de documentos derivados de los desempeños de comprensión _____	46
6.3.1.	Desempeño de exploración No.1. La definición de función y su relación con distintas expresiones coloquiales _____	46
6.3.2.	Desempeño de exploración No. 2. Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función _____	47
6.3.3.	Desempeño de investigación guiada No. 1. La historia de las matemáticas y la evolución del concepto de función _____	48
6.3.4.	Desempeño de investigación guiada No. 2. Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función _____	52
6.4.	Proyecto Final de Síntesis _____	54
6.4.1.	Proyecto Final del Estudiante A1 _____	55
6.4.2.	Proyecto Final del Estudiante A2 _____	56
6.4.3.	Proyecto Final del Estudiante B2 _____	58
6.4.4.	Proyecto Final del Estudiante C1 _____	58
6.5.	Entrevistas finales _____	59
6.5.1.	Entrevista final estudiante A1 _____	59
6.5.2.	Entrevista final estudiante A2 _____	61
6.5.3.	Entrevista final estudiante B1 _____	63
6.5.4.	Entrevista final estudiante B2 _____	64
6.5.5.	Entrevista final estudiante C1 _____	65
6.5.6.	Entrevista final estudiante C2 _____	66
6.6.	Análisis global de las entrevistas finales _____	68
6.7.	Discusión de los resultados _____	69
CAPITULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES _____		74
BIBLIOGRAFÍA _____		77
ANEXO A. DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN _____		79
ANEXO B. ENTREVISTAS _____		99

CAPITULO 1. MARCO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

El presente capítulo pretende llegar a una aproximación acerca del contexto histórico en el cual surgió el concepto de función, siendo éste el objeto de estudio del presente trabajo de investigación. Dicho contexto es importante para el reconocimiento de los obstáculos inherentes a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en la enseñanza escolar. Además, ofrece una sucinta revisión epistemológica del concepto de función, fundamentada en la posición asumida por el autor frente al concepto de función desde la matemática, en general, y desde la enseñanza de las matemáticas, en particular.

1.1. Contexto histórico del concepto de función

Aunque no es posible encontrar una definición explícita del concepto de función hasta finales del siglo XVII, hubo varios antecedentes importantes a considerar en el desarrollo de este importante concepto matemático. El primero de ellos, cronológicamente hablando, es el de las tablas de los astrónomos de Babilonia, quienes, en el siglo V A.C., por medio de datos empíricos, construyeron tablas para describir los movimiento de los cuerpos celestiales, al observar periodicidades en las posiciones de estos cuerpos e interpolar su trayectoria linealmente usando las variaciones periódicas observadas en la velocidad (Freudenthal, 2002).

Más adelante se destaca la figura de Ptolomeo, quién para determinar el lugar ocupado por un cuerpo en el cielo utilizó tablas de cuerdas, en donde la cuerda subtendida es una función del ángulo en el círculo, asemejándose a la función seno pero en un contexto de trigonometría esférica (Freudenthal, 2002). Vemos que estos dos antecedentes del concepto de función comparten un mismo fin, la descripción del movimiento de cuerpos celestiales, así como una

misma forma de representación, por medio de tablas, lo cual debe ser considerado en el diseño de situaciones didácticas para una primera aproximación al concepto de función.

En 1350, Nicolás Oresme desarrolla su investigación de la representación de las leyes naturales, conocida como la teoría de las latitudes de las formas, como leyes que describen una cantidad como dependiente de otra, utilizando por primera vez gráficas en su descripción. Como afirma Youschkevitch (1976):

“Así estas teorías, desarrolladas en el siglo XIV, parecen estar fundadas en un uso consciente de ideas generales de hacer de cantidades, variables dependientes e independientes. (...) Así, en estas teorías, una función es definida por una descripción verbal de su propiedad específica o directamente por una gráfica” (p.46-47).

No obstante los avances anteriores, para finales del siglo XVII aún no se utilizaba ni se había presentado una definición explícita del concepto de función, además de que tampoco dichos autores podían reconocer las tablas o gráficas mencionadas como funciones. Citando a Kleiner (1989), “las principales razones de que el concepto de función no emergiera antes fueron:

- Falta de prerrequisitos algebraicos (...)
- Falta de motivación. ¿Por qué definir una noción abstracta de función a menos que uno tenga muchos ejemplos de los cuales abstraer?” (p.282-283)

No obstante, entre los años 1450 y 1650 se presentaron algunos descubrimientos que subsanaron las carencias mencionadas, entre los cuales están:

- La extensión del concepto de número y la creación del algebra simbólica por Vietá, que remediaron en cierta medida la primera razón enunciada;

- El estudio del movimiento como problema central de la ciencia enunciado por Galileo, lo cual brindó una motivación necesaria para impulsar el estudio de este concepto, además de que Galileo estudió también el concepto de relación entre variables.

Por otro lado, la unión del algebra y la geometría por medio de la geometría analítica, desarrollada por Fermat y Descartes simultáneamente, permitió el uso del plano cartesiano para el estudio gráfico de la relación entre variables, así como la expresión de la relación entre variables por medio de ecuaciones.

Ello constituyó un cambio notable en las matemáticas, pues permitió pasar, según Freudenthal (2002), de expresar relaciones algebraicas geoméricamente, como acostumbraban los matemáticos griegos, a una nueva perspectiva, expresar relaciones geométricas algebraicamente.

A principios del siglo XVIII, con la creación del cálculo por parte de Newton y Leibnitz en forma independiente, se va a dar un impulso definitivo en el desarrollo del concepto de función, a pesar de que ambos trabajaron con curvas geométricas y no con funciones específicamente. En el caso de Newton, su cálculo lo llamó el método de fluxiones, que se aplica a fluentes, no a funciones. Newton llama a sus variables “fluentes”, ya que la imagen es geométrica, de un punto fluyendo a lo largo de una curva. Por su parte, Leibnitz dio la primera enunciación explícita de función en 1692, definiéndola como la tangente asociada a una curva, definición bastante distinta de las que se presentarían más adelante en el mundo matemático de la época, como se muestra a continuación.

La carencia de un término general para representar cantidades dependientes de otras cantidades llevó a J. Bernoulli, en 1718, a la siguiente definición:

“Uno llama función de una variable, una cantidad compuesta en cualquier manera de esta variable y de constantes” (Kleiner, p.284).

Esta definición marcó el inicio de un proceso que, en la primera mitad del siglo XVIII, llevó a la desgeometrización del cálculo, en el cual se reemplazó el concepto de función aplicada a objetos geométricos, como lo enunció Leibnitz, con el concepto de función como fórmula algebraica. En este contexto, en 1748, Euler, con su texto *Introductio in analysin infinitorum*, presenta la siguiente definición:

“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera de esa cantidad variable y números o cantidades constantes” (Jones, 2006, p.4).

Al respecto, afirma Eisenberg (1991), que el excesivo énfasis en la representación analítica, en desmedro de la visual o gráfica como medio para resolver ejercicios u obtener información, tiene su origen en la derrota histórica que durante el período mencionado sufrió la imagen visual del concepto de función, asociándose así prácticamente la función a su expresión analítica.

A pesar de que hubo otros matemáticos destacados, tales como Fourier y Cauchy, que aportaron al desarrollo del concepto de función, cabe destacar finalmente en esta revisión histórica la definición de Dirichlet, de amplio reconocimiento, que afirma:

“y es una función de una variable x , definida en el intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y . También es irrelevante en qué forma esta correspondencia está establecida” (Kleiner, p. 291).

1.2. Concepción epistemológica del concepto de función

Desde la posición asumida para el trabajo de investigación, y teniendo en cuenta el marco teórico desde el cual se realiza, es importante clarificar que se entiende por comprensión, que se

entiende por el concepto de función y bajo qué posición epistemológica se asume su enseñanza. La definición de estos aspectos permitirá sustentar epistemológicamente la realización del trabajo de investigación y dará coherencia al desarrollo de todas las etapas que lo componen.

En este trabajo se asume la comprensión de un concepto desde la perspectiva del desempeño, lo cual implica que “la comprensión incumbe la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera” (Blythe, 1998, p.39). Esta perspectiva se encuentra subsumida en el marco teórico utilizado, que es el de la Enseñanza para la Comprensión, el cual será descrito con precisión mas adelante.

Cabe precisar aquí que este marco teórico fue producto de la reflexión y el trabajo desarrollado por el Grupo Cero de la Facultad de Educación de Harvard, entre cuyos líderes se destacan David Perkins y Howard Gardner, investigadores de gran prestigio en las ciencias de la educación y que se adhieren a una visión cognitiva de la enseñanza y el aprendizaje.

Por otro lado, y a pesar de que la Enseñanza para la Comprensión es principalmente “una herramienta cuyo propósito es diseñar y dirigir las prácticas de aula que promueven la comprensión y reflexionar sobre ellas” (Blythe, 1998, p.14), dicho marco permite una mayor libertad para diseñar, a partir de las cuatro partes que la componen (tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua), las situaciones didácticas por medio de las cuales se espera explorar en la comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes participantes en la investigación.

Producto de esta reflexión es la identificación dentro del concepto de función de algunos elementos determinantes, como son su definición, sus propiedades, sus distintas formas de representación, sus diversas aplicaciones y su contextualización, es decir, su utilización en el

habla cotidiana de manera coloquial. Y aunque en el desarrollo del presente trabajo se pretende explorar la comprensión, en forma global, de este concepto, lo cual implicaría a cada uno de éstos elementos, se enfatizará en el papel que juega la definición en la comprensión de este concepto, mientras que los demás elementos del concepto serán considerados principalmente en tanto su relación con la definición.

Para hacer un poco de claridad al respecto, se hará una breve explicación de cada uno de los elementos incluidos dentro del concepto de función. En primer lugar, la definición que se asumió como base para el trabajo de investigación es la siguiente:

“La característica esencial de una función o aplicación es la dependencia entre dos variables. Una función o aplicación está formada por:

- a) Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
- b) Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.
- c) Regla que asigna a cada elemento del conjunto de salida uno y solo uno del conjunto de llegada.” (Group Zero, 1981; citado en Azcarate y Delofeu, 1996).

Esta definición permite identificar en forma clara algunos de los componentes básicos implícitos en la definición de función, además de que es enunciada por los mismos autores del marco teórico del trabajo de investigación, como lo es el Grupo Cero de la Universidad de Harvard, lo cual le da una mayor consistencia al enfoque asumido en el trabajo de investigación.

En segundo lugar, las propiedades que se asumen dentro del trabajo son:

- La propiedad inyectiva, que implica que cada valor de la variable dependiente es imagen o corresponde a un único valor de la variable dependiente;

- La propiedad sobreyectiva, que afirma que todos los posibles valores de la variable dependiente hacen parte de la función y
- La propiedad biyectiva, o 1-1, que afirma que la función es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva.

Dichas propiedades le permiten al alumno adentrarse en la comprensión de la definición de función, ya que en ellas se hace amplio uso de los aspectos mencionados en la definición dada anteriormente.

En tercer lugar, no obstante que se buscará presentar situaciones de la vida cotidiana que permitan reconocer el papel que juega el concepto de función en la comprensión del entorno social y natural, estas actividades serán encaminadas hacia la reflexión acerca de la definición de función y cómo dichas aplicaciones ayudan a su mejor comprensión.

En cuarto lugar, la utilización de tablas, y en especial de gráficos, así como de descripciones verbales de situaciones funcionales, serán de gran utilidad para que el estudiante profundice en su comprensión del concepto, pero no será objeto de este trabajo el estudiar las dificultades de los alumnos para pasar de una a otra representación del concepto. Se enfatizará, no obstante, en la posibilidad de comprender más fácilmente la definición mediante el uso de las diversas representaciones, clarificando que ninguna de ellas es el concepto expresado en su totalidad.

Finalmente, se desea entrar a comprender la palabra función desde su utilización en diversas situaciones de comunicación, entrando a explorar con los estudiantes los diversos términos asociados al de función, y cómo éstos demuestran como dicho concepto permea e influye en toda clase de aspectos de la vida cotidiana.

Para terminar, es claro que la posición epistemológica asumida desde el trabajo es de carácter cognitivo, ya que se centra en el desarrollo de las competencias de cada alumno para demostrar mediante el desempeño su comprensión del concepto objeto de estudio, y en el cual se asume que la utilización del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión permitirá un adecuado aprendizaje de este concepto matemático. Además, bajo este enfoque no se diferencia entre un estudiante y otro, considerándose que todos tienen las mismas capacidades y el mismo potencial para alcanzar una más profunda comprensión del concepto.

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1. Justificación del problema

El concepto de función ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, especialmente durante las últimas décadas (se destaca en especial el trabajo de Harel, & Dubinsky, (1992), de gran vigencia aún y que presenta aportes de distintos investigadores). Como afirman Carlson y Oehrtman en su interesante artículo: “El concepto de función es central para la matemática previa a la universidad, fundamental para la matemática moderna y esencial en áreas relacionadas de las ciencias” (2005, p.1). Las investigaciones se han visto así estimuladas, en primer lugar, por la importancia de dicho concepto en la Educación Matemática; en segundo lugar, por la persistencia de serias dificultades en la comprensión de éste concepto por parte de los estudiantes de educación media; y en tercer lugar, por la complejidad del concepto de función. Analicemos estas razones un poco más a fondo, tomando en cuenta que ellas están, a su vez, relacionadas unas con otras.

Según Eisenberg, “el concepto de función ha llegado a ser una de las ideas fundamentales de las matemáticas contemporáneas, permeando virtualmente todas las áreas de la materia” (1991, p.140). Así pues, en el campo de la Educación Matemática, se ha llegado a pedir un mayor énfasis en éste en el currículo escolar, llegándose incluso a considerar al concepto de función “como un factor unificador en las matemáticas escolares” (Eisenberg, 1991, p.140), ya que permite unir temas que parecen no tener relación en el currículo escolar, por ejemplo, las operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación pueden ser vistas como casos particulares de funciones en donde a partir de un insumo se aplica una transformación para obtener un producto dado. De la misma forma, las relaciones entre magnitudes directamente o inversamente proporcionales pueden verse como caso particulares de funciones, lo cual lleva a

que se considere la noción de función durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar.

Asimismo, se considera a este concepto como base para la comprensión de conceptos matemáticos más avanzados, en especial en el campo del cálculo. Ello le permite, igualmente, tener un amplio espectro de aplicaciones prácticas en diversos campos de la ciencia, especialmente en el de la física, en donde muchas de sus leyes pueden ser vistas como casos específicos de funciones (Azcárate, C. y Deulofeu, J., 1996).

Por otra parte, se han realizado estudios (por ejemplo, el de Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D., 1992 y el de Ruiz Higuera, 1998) que han demostrado como incluso estudiantes de alto desempeño en matemáticas poseen una débil comprensión del concepto de función, manifestando una concepción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo, que lleva incluso a confundirlo con su representación analítica. Ello asociado a que la dificultad para comprender el concepto de función se ve acrecentado por la complejidad de éste, lo cual se puede apreciar en los estudios que han tratado de delimitar las etapas o niveles por los cuales pasa un estudiante en su proceso de comprensión del concepto de función, tales como el de deMarois y Tall (1996) y el trabajo bajo el marco APOE realizado principalmente por Ed Dubinsky(1991), los cuales mencionaré en forma breve a continuación.

En el primer trabajo mencionado, se analiza la comprensión del concepto de función en dos niveles, uno de ellos el nivel horizontal, que abarca las facetas del concepto de función que son: numérica, usando tablas; geométrica, usando gráficas; simbólica, usando ecuaciones; escrita, verbal, notacional, coloquial y kinestésica. En éste nivel se pretende que el estudiante alcance la habilidad para moverse entre las distintas facetas del concepto. El otro nivel es el vertical, en el cual el alumno atraviesa capas de comprensión, las cuales se asemejan a las de la teoría APOE

que mencionaré luego, y que son las de pre-acción, acción, proceso, objeto y procepto, siendo éste último la fusión de objeto y proceso de un determinado concepto.

Por otro lado, en la teoría APOE, la cual es una teoría del aprendizaje de las matemáticas, se afirma que en la comprensión de todo concepto matemático, el estudiante pasa por una serie de concepciones. Para el caso del concepto de función, de acuerdo a Breidenbach, et al., se distinguen principalmente las siguientes concepciones:

- La concepción de prefunción, en la cual se considera que el sujeto no demuestra un conocimiento siquiera básico del concepto, y que por lo tanto no es útil para el desarrollo de actividades relacionadas con funciones;
- La concepción acción, que es una manipulación física o mental de objetos y en la cual el estudiante se limita a insertar números en una expresión algebraica para calcular valores. Es una concepción estática en que el estudiante piensa en un paso a la vez, es decir, evalúa cada valor de la variable independiente para obtener el valor correspondiente de la variable dependiente y
- La concepción proceso, la cual involucra una transformación dinámica de objetos de acuerdo a algunos medios repetibles los cuales, dado el mismo valor de la variable independiente, producirán siempre el mismo valor en la variable dependiente. Ello significa una interiorización de las acciones, e implica la posibilidad de reversar e incluso combinar procesos;

De lo anterior se puede apreciar la dificultad inherente a la comprensión de este concepto, ya que su estudio requiere de la categorización de las distintas etapas de comprensión alcanzadas así como del reconocimiento de las diversas representaciones en que puede mostrarse. Igualmente se aprecia una dificultad notoria en la comprensión del concepto asociada a su

enseñanza, debido a que al introducirse en forma dispersa o descompuesta, iniciando por la función lineal, luego la función cuadrática, etc., el estudiante puede perder de vista el significado de función al centrarse en dichos tipos específicos de función.

Ahora, la utilización de la Enseñanza para la Comprensión como marco teórico para el presente trabajo de investigación se apoya en los principios que subyacen a ella, partiendo desde su concepción de la comprensión a partir del desempeño, que afirma que ésta es la capacidad de actuar y pensar en forma flexible a partir de lo que se sabe (Wiske, 1999), la cual se puede adaptar a la enseñanza del concepto de función dadas las numerosas aplicaciones que dicho concepto tiene en toda clase de situaciones problemáticas, tanto de otras áreas del conocimiento como de la vida cotidiana, y que exigen del alumno abordar en forma creativa dichas situaciones. Cabe destacar que dicha perspectiva permite superar enfoques centrados en la acción y el conocimiento, que llevarían a limitar el ámbito de la comprensión al simple desarrollo de algoritmos o a la memorización de una definición dada.

De la misma forma, el énfasis que se le da desde la Enseñanza para la Comprensión al desarrollo conceptual fue un factor que motivó su uso, dado que el objetivo que se persigue desde el presente trabajo es la exploración del concepto de función desde su aspecto más esencial, como lo es la definición, y que se pueda pensar y actuar en los distintos elementos del concepto de función a partir de ella.

Por último, la aplicación cuidadosa del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión permite, como se verá en el próximo capítulo, la transformación de las prácticas de aula, ya que mediante los elementos que lo componen (tópico generativo, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua), el docente se ve compelido a reflexionar sobre sus métodos de enseñanza y su rol como docente, lo cual es necesario para comenzar a

superar los obstáculos que permanecen en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes.

2.2. Formulación del problema

¿Cómo comprenden el concepto de función, bajo el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, estudiantes que cursan el último grado de educación media en una institución educativa oficial?

CAPITULO 3. OBJETIVOS

3.1. Objetivo General

Explorar los elementos que evidencian la comprensión del concepto de función bajo el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión en estudiantes de último grado de educación media de una institución educativa oficial de la ciudad de Medellín, enfatizando en su definición.

3.2. Objetivos específicos

- Identificar los elementos que evidencian la comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes.
- Describir la comprensión de la definición del concepto de función en los estudiantes después de la aplicación del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

CAPÍTULO 4. MARCO TEÓRICO

4.1. El enfoque de la Enseñanza para la Comprensión

El enfoque de la Enseñanza para la Comprensión surge de las inquietudes de tres miembros de la Escuela de Graduados de Educación de Harvard, David Perkins, Vito Perrone y Howard Gardner, que en 1988 se empezaron a cuestionar acerca de cómo estimular y desarrollar la comprensión de alumnos de educación primaria y secundaria. De allí nació un proyecto a cinco años, que contó con la colaboración de investigadores y docentes, fruto del cual nació el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, “una herramienta cuyo propósito es diseñar y dirigir las prácticas de aula que promueven la comprensión y reflexionar sobre ellas” (Blythe, 1998, p.14).

Antes de describir las cuatro partes del marco conceptual, es necesario presentar la visión de comprensión a la que llegaron los docentes del proyecto, que fue denominada perspectiva del desempeño, la cual dice que “la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera” (Blythe, 1998, p.39). Esta visión es muy cercana a una de las partes del marco conceptual que se presentan a continuación y que veremos luego.

Las cuatro partes del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión son:

Tópicos generativos: se dirigen a la pregunta: ¿Qué es lo que quiero que los estudiantes comprendan? Deben ser temas que permitan el desarrollo de la comprensión del estudiante, además de que sean interesantes para alumnos y docente, centrales para una o más disciplinas y sean accesibles para el alumno.

Metas de comprensión: afirman lo que el docente espera que lleguen a comprender los alumnos al finalizar una unidad. Se definen de manera más específica, delimitando el tópico generativo, las ideas, procesos y relaciones que los alumnos comprenderán mejor al final de su indagación. Se pretende que sean explícitas y públicas, es decir, que las conozcan los alumnos antes de realizar los desempeños de comprensión. Si abarcan lo que se desea que comprendan sus alumnos en todo el curso, se llaman hilos conductores.

Desempeños de comprensión: constituyen el núcleo del desarrollo de la comprensión, ya que son la expresión más concreta de la visión de comprensión enunciada bajo este enfoque. Responden a la pregunta: ¿Qué pueden hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión? Según Blythe, “son actividades que exigen de sus alumnos usar sus conocimientos previos de otra manera o en situaciones diferentes para construir su comprensión del tópico de la unidad” (Blythe, 1998, p. 95-96). Deben ser públicos, ya que para demostrar su comprensión el estudiante debe llevar a cabo una determinada tarea.

Valoración continúa: se basa en criterios públicos vinculados con las metas de comprensión. Las evaluaciones se hacen a menudo, desde el principio hasta el fin de la secuencia curricular (Realimentación), ya que deben contribuir al aprendizaje. Los alumnos participan activamente en su elaboración y aplicación, lo cual hace que los estudiantes sean más responsables de su propio aprendizaje. En resumen, la evaluación diagnóstica continua consta de dos partes: establecer criterios de evaluación claros, explícitos, públicos y pertinentes, y proporcionar realimentación frecuente, de diversas fuentes distintas al docente y debe informar sobre la planificación de las siguientes actividades.

Al planificar el docente su unidad, éste puede comenzar por cualquiera de las partes del marco conceptual, dado que debe tenerse claro que éste es solo “una guía para mantener el foco centrado en la comprensión, al tiempo que les concede a los docentes un espacio para diseñar unidades y cursos que se adecuen a su estilo de enseñanza y a sus prioridades como profesionales” (Blythe, 1998, p. 49), así que no debe ser tomado en forma rígida y dogmática su aplicación, teniendo en cuenta que la base de su éxito reside en la habilidad y experiencia del docente.

Debe destacarse que el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión cuenta asimismo con un análisis de las dimensiones de la comprensión, es decir, los aspectos que deben tenerse en cuenta para evidenciar la obtención por parte del alumno de una profunda comprensión de un concepto, las cuales son: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación. Éstos son descritos a continuación, de acuerdo a su presentación en Wiske, M.S. (1999):

Contenido: esta dimensión evalúa hasta qué punto los alumnos han superado sus concepciones intuitivas no escolarizadas para avanzar hacia una red conceptual más rica que les permitan moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones. Responde a la pregunta ¿Qué quiero que llegue a comprender el alumno?

Métodos: esta dimensión busca que el alumno tenga un sano escepticismo que además le lleve a elaborar y aplicar métodos que le permitan construir o validar el conocimiento que está adquiriendo. Los argumentos utilizados pueden ser razonados, acertados, justos o bellos. Responde a la pregunta ¿Cómo se comprende?

Propósitos: esta dimensión tiene que ver con el reconocimiento del carácter práctico del conocimiento, es decir, la identificación de los propósitos e intereses que guían la construcción del conocimiento. Además, se pretende que el alumno use el conocimiento en múltiples

situaciones y analice las consecuencias de hacerlo. Responde a la pregunta ¿Para qué se comprende?

Comunicación: en esta dimensión se evalúa el uso de distintos sistemas de símbolos para comunicar lo comprendido, así como la consideración de la forma más apropiada de comunicarlo de acuerdo a los propósitos y la audiencia. Responde a la pregunta ¿De qué forma se comprende?

Este enfoque de la Enseñanza para la Comprensión ayuda a enfocarse en el objetivo esencial de mi investigación, el cual es la comprensión del concepto de función, ya que el marco conceptual permite elaborar una unidad didáctica con el énfasis centrado, en cada uno de los elementos del marco, en la comprensión del alumno, para lo cual es primordial la participación y toma de responsabilidad del estudiante acerca de su propio aprendizaje.

Asimismo, las dimensiones de la comprensión permiten identificar, en forma preliminar, aspectos importantes en la comprensión del concepto de función, como es el caso de las aplicaciones del concepto de función, relacionado con la dimensión de propósitos, así como la capacidad de utilizar las distintas formas de representación de funciones, relacionado con la dimensión de comunicación.

4.2. Aportes teóricos desde la investigación del concepto de función en Educación

Matemática

Para el adecuado análisis de los datos obtenidos en la investigación, será de gran interés la revisión de algunos aportes teóricos importantes en el marco de la investigación en Educación matemática, y más específicamente en torno al concepto de función.

4.2.1. “El rol de las definiciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” de Shlomo Vinner

En el capítulo 5 del libro “Advanced Mathematical Thinking” editado por David Tall, Vinner presenta un interesante marco teórico respecto al papel que juega la definición en el aprendizaje del alumno, el cual es de notoria pertinencia para el presente trabajo, ya que en él, dada la amplitud de elementos que componen el concepto de función, se enfatiza en la definición como aspecto fundamental en la comprensión de éste concepto por parte del estudiante. En éste afirma Vinner que, debido a la costumbre de no tomar en cuenta las definiciones en nuestras acciones de la vida diaria, este comportamiento se traslapará a contextos técnicos, en los que también es de esperar que las personas ignoren las definiciones de los términos con los que trabajan.

Para ello, Vinner llama “imagen del concepto” a lo que es evocado en nuestra memoria por el nombre de un concepto. Dicha imagen puede ser una (o varias) representaciones visuales, impresiones y experiencias asociadas al concepto. Además, afirma que para comprender un concepto se debe tener una imagen del concepto, la cual no necesariamente está asociada a su definición. Es claro que repetir una definición no implica comprender un concepto, pero la definición juega un papel similar a los andamios de un edificio en cuanto a la formación del concepto, es decir, al finalizar la construcción del concepto, los andamios son retirados.

En su análisis del rol de las definiciones, Vinner postula que la situación deseable sería que, ante una situación problema, el estudiante antes de proponer una solución, debe consultar la definición, sea en forma indirecta, después de considerar la imagen del concepto, o en forma directa, considerando primero la definición y luego la imagen del concepto. No obstante, afirma

que, en general, el estudiante propondrá una solución a la situación problema sin consultar su definición, remitiéndose solamente a su “imagen del concepto”.

En el análisis de los datos obtenidos, se espera realizar una cuidadosa reflexión en torno al papel de la definición en la comprensión del concepto de función, basando dicha reflexión en el marco teórico provisto por Vinner en el artículo aquí reseñado.

4.2.2. “Sobre la comprensión de la noción de función” de Anna Sierpinska

Un trabajo fundamental, y de gran importancia en la investigación en educación matemática acerca del concepto de función, es el realizado por Anna Sierpinska. En éste, Sierpinska presenta una investigación histórico-epistemológico acerca del concepto de función, la cual le lleva a hallar los obstáculos epistemológicos que se presentan en la comprensión de dicho concepto, y cuya superación lleva al estudiante a reconocer que, al pasar desde formas anteriores de conocer a nuevas formas, se llega a un acto de comprensión.

El trabajo de Sierpinska se destaca por su solidez teórica, ya que antes de entrar a descubrir los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión del concepto de función, parte de una propuesta teórica acerca de la comprensión en matemáticas en general, para luego particularizar acerca del concepto de función. Así pues, afirma que, al hablar acerca de la comprensión en matemáticas, el análisis debe centrarse en los saltos desde formas antiguas de conocer a nuevas formas de conocer, centrándose así en los actos de comprensión y en los actos de superar los obstáculos. Sierpinska llama obstáculo epistemológico a un obstáculo que no es de unas pocas personas, sino que está ampliamente extendido en algún momento o en alguna cultura, producto de esquemas de pensamiento inconsciente o de creencias ciegas.

Sierpinska habla también de cuatro categorías de actos de comprensión, las cuales son:

- Identificación (de un objeto entre otros objetos), y el resultado de este acto de comprensión es que algo que parecía de poca importancia de repente aparece como el objeto principal del cuadro, siendo percibido como algo de interés y valioso de estudiar.
- Discriminación (entre dos objetos), mediante la cual somos conscientes de la existencia de dos objetos distintos, empezando a notar no solo las diferencias entre ellos sino también sus propiedades relevantes.
- Generalización, la cual lleva a concientizarnos de la posibilidad de extender el rango de aplicaciones.
- Síntesis, la cual es la percepción de relaciones entre hechos antes aislados, lo cual lleva a que hechos, propiedades, relaciones, objetos, etc., sean organizados en sistemas consistentes.

Un aspecto muy importante del trabajo de Sierpinska, y que va a ser tenido muy en cuenta en el análisis de los datos del presente trabajo de investigación, es el análisis que realiza acerca de un método para definir un concepto matemático, en referencia al concepto de función, y el cual citamos textualmente:

“El concepto de función puede ser definido en una forma simbólica formal, casi sin usar palabras. El sentido lógico del concepto está confinado a solo lo que esta definición dice. Está confinado a la estructura de la sentencia definatoria, a la relación de los componentes a otros conceptos y teorías matemáticas. Pero en el mismo momento que la noción es aplicada en un contexto, matemático o matematizado, el lenguaje informal está siendo usado y éste lenguaje informal produce significados que trascienden la mera lógica de la definición. Y yo uso la

palabra significados en plural a propósito, porque hay muchos diferentes significados de la noción dependiendo de los contextos.” (Sierpinska, p. 29)

En el diseño de los desempeños desarrollados en el marco de la unidad curricular se hizo continua referencia a los distintos significados del concepto de función de acuerdo al contexto de la situación planteada, y se estimuló el uso del lenguaje informal para demostrar la comprensión alcanzada del concepto dado.

Por último, cabe citar algunas de los actos de comprensión y los obstáculos epistemológicos que se tomaron en cuenta en el diseño de los desempeños de comprensión, entre los cuales están:

- Acto de comprensión-1: identificación de cambios observados en el mundo que nos rodea como un problema práctico para solucionar.
- Acto de comprensión-2: identificación de regularidades en relaciones entre cambios como una forma de manejar los cambios.
- Obstáculo epistemológico-1: la matemática no tiene que ver con problemas prácticos.
- Acto de comprensión-3: identificación de los sujetos de cambio al estudiar los cambios.
- Acto de comprensión-5: discriminación entre las variables dependiente e independiente.
- Obstáculo epistemológico-5: discutir el orden de las variables como irrelevante.
- Acto de comprensión-15: discriminación entre diferentes medios de representar funciones y las funciones mismas.

4.2.3. “Funciones y dificultades asociadas a su aprendizaje” de Theodore Eisenberg

En el capítulo 9 del libro “Advanced Mathematical Thinking” editado por David Tall, Eisenberg presenta un estudio de gran importancia en el campo de la investigación acerca del concepto de función, partiendo del contexto histórico de la enseñanza de este concepto en las

últimas décadas, pasando por una descripción de algunas teorías del aprendizaje de las matemáticas, para luego analizar algunas de las dificultades más notorias que se dan en el aprendizaje del concepto de función.

Eisenberg afirma que, a pesar de los ingentes recursos utilizados en la investigación en educación matemática para entender cómo se adquieren los conceptos matemáticos, los resultados no han sido los esperados, debido a la creencia errónea de que basta con una adecuada secuencia de tareas para dominar un concepto matemático. En el caso del concepto de función, la tarea es aún más difícil, ya que éste ha mostrado ser uno de los más difíciles de manejar, debido a su complejidad y a las numerosas sub-nociones asociadas al concepto.

Destaca Eisenberg que, “a nivel de la definición, el concepto de función puede ser introducido en una variedad de de formas, como son los diagramas de flechas, tablas, descripción algebraica, como una caja negra de insumo-producto, como pares ordenados, etc.”(p.141). Critica Eisenberg el uso de la aproximación por medio de pares ordenados, ya que ésta produce numerosos problemas e impone severas limitaciones para el uso posterior del concepto en otros contextos. Esto ha llevado a que se utilice una introducción al concepto de función usando múltiples aproximaciones, a pesar de lo cual persisten las dificultades de los estudiantes para aprenderlo.

Más adelante, el autor nos presenta brevemente tres teorías del aprendizaje desde la educación matemática las cuales han sido aplicadas al aprendizaje de función, no sin antes afirmar que no existe ninguna estructura teórica aceptada en forma general. La primera es la teoría de Gagné, que es de corte comportamental. Afirma que el aprendizaje implica un cambio en el comportamiento, y que el camino hacia el aprendizaje está basado en una jerarquía de tareas. La segunda es la de Schoenfeld, et.al., quienes analizan como la comprensión matemática

evoluciona, considerando cuatro niveles de comprensión que van desde la organización macro del conocimiento a un nivel de esquema hasta la comprensión de los conceptos que soportan dicha estructura. Por último, presenta la teoría de Dubinsky, la cual adapta aspectos de la teoría piagetiana a la adquisición de conceptos matemáticos. Conocida como la teoría APOE, ésta afirma que el individuo construye su conocimiento a través del proceso de abstracción reflexiva, en donde un concepto dado pasa a través de unas etapas, que en el caso del concepto de función son las de prefunción, acción, proceso, objeto y esquema, en el que su comprensión del concepto se va profundizando.

A partir de estos esquemas teóricos, que tienen en común la imposibilidad de observar el desarrollo de la comprensión del estudiante más que en términos estáticos sin explicar con precisión como se presenta ésta, Eisenberg pasa a revisar algunos de los problemas fundamentales hallados al trabajar con funciones, de los cuales me centraré en el papel de las gráficas y la visualización en la comprensión del concepto de función.

Eisenberg enfatiza, en buena parte de su texto, en el papel que pueden jugar las gráficas en la resolución de problemas matemáticos y, más específicamente, en la falta del aspecto gráfico como imagen concepto de una función, es decir, que los estudiantes no asocian mentalmente las gráficas al concepto de función. Ello tiene bases históricas en la batalla perdida de la “imagen conceptual visual” para una función con la “caracterización analítica” que prevaleció en los últimos siglos y aún hoy prevalece. Esto último incluso ha permeado al carácter general de las matemáticas, ya que para matemáticos de la talla de Hilbert, a pesar de que es posible partir de una comprensión visual intuitiva de un problema dado, éste solo se considera matemático si se puede expresar en forma analítica.

Por el contrario, Eisenberg expresa que, para los estudiantes, la visualización de las matemáticas es determinante, y lo que requiere ser enseñado es como describir analíticamente sus visualizaciones. Por poner solo un ejemplo, las transformaciones simples deberían ser vistas en forma gráfica para lograr un mayor progreso en los estudiantes. Concluye Eisenberg, y en lo cual coincido plenamente, de la siguiente forma: “Es mi creencia que la presente tendencia a no enseñar en una forma visual necesita ser reversada, a menos, por supuesto, que los matemáticos estén satisfechos con los semi-analfabetas y fóbicos matemáticos producidos por los métodos presentes”(p.148).

CAPÍTULO 5. METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

5.1. Enfoque de investigación

El proyecto de investigación se realizó con tres grupos de estudiantes de grado undécimo de una institución educativa oficial de Medellín, conformados por 40 estudiantes, con edades entre 16 y 19 años, de los cuales se tomaron 2 estudiantes de cada grupo como casos de estudio, para realizar la descripción de la experiencia de implementación del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión para el caso del concepto de función.

El enfoque de investigación es cualitativo, puesto que se pretende realizar una exploración de la comprensión de la definición del concepto de función, siendo este trabajo de investigación la primera aproximación que se realiza a este concepto bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión. Asimismo, se decidió utilizar como método el de estudio de casos, en el que se utilizaron estrategias como la de “descripción densa” y “rastreo de procesos”, con el fin de poder desarrollar en forma adecuada el análisis detallado de cada caso de estudio, el cual es la principal fortaleza de este método de investigación (Blatter, 2008, p. 68), además de que su aplicación permite, a través del análisis profundo de cada unidad, responder al planteamiento del problema (Hernández R., Fernández, C. y Baptista, P., 2006).

5.2. Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos de recolección de datos utilizados en la investigación fueron:

- Los documentos elaborados por los alumnos en el desarrollo de los desempeños de comprensión.
- La realización de entrevistas semi-estructuradas, tanto al inicio como al final del proceso de investigación, a los estudiantes seleccionados como casos de estudio, las cuales dan

cuenta de cómo evolucionó su comprensión del concepto en estudio, producto de la aplicación de la unidad curricular diseñada bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión.

A continuación se describe el objetivo de las entrevistas realizadas y en la siguiente sección se presentará en forma detallada la unidad curricular implementada bajo el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

Entrevista inicial: se realizó con el objetivo de reconocer las preconcepciones que los estudiantes tenían respecto al concepto de función antes de aplicar la unidad curricular. Antes de ello, se trató de determinar cuál era la opinión de los alumnos acerca de las matemáticas, así como su experiencia durante los años anteriores en su aprendizaje de esta área, ya que estos dos aspectos ayudarán a determinar la calidad de la información que se podrá obtener en el resto de la investigación. Ello porque si los estudiantes manifestaban una actitud negativa hacia las matemáticas y/o experiencias negativas en años anteriores en esta área, sus respuestas podrían carecer de la profundidad y amplitud que se requieren para poder obtener resultados valiosos en la investigación. El guión de esta entrevista, así como el de la entrevista final, se incluirán en el anexo B al final del trabajo.

Entrevista final: La entrevista final pretende ahondar en la comprensión alcanzada del concepto de función, enfatizando en aspectos tales como: las imágenes mentales que el estudiante obtiene al escuchar las palabras relación y función, respectivamente, ejemplos de relaciones y funciones, palabras con las que se asocian dichos conceptos, enfatizando en todo momento en las diferencias y similitudes percibidas entre una relación y una función.

Antes de ello se les hicieron dos preguntas de entrada, referentes a su experiencia con la unidad curricular en general, y con cada uno de los desempeños en particular, en especial con el desempeño de la historia del concepto de función.

Finalmente, la entrevista finalizó con dos preguntas de especial relevancia para la investigación, como son la definición personal de función a la que llegó el estudiante al final de la unidad curricular, para identificar el nivel de comprensión alcanzada del concepto, así como el papel que le da el alumno a los distintos elementos del concepto de función en la comprensión del concepto, esperando encontrar un papel relevante de la definición de función en la comprensión del concepto.

5.3. Diseño de la unidad curricular

De acuerdo con el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, la unidad curricular se diseñó atendiendo a los elementos de dicho marco, como se presenta a continuación:

5.3.1. Tópico generativo

En el concepto de función se pueden identificar algunos elementos determinantes, como son su definición, sus propiedades, sus distintas formas de representación, sus diversas aplicaciones y su contextualización. Aunque en el desarrollo del presente trabajo se pretendió analizar la comprensión, en forma global, de este concepto, se hizo énfasis principalmente en su definición, mientras que los demás elementos del concepto fueron considerados principalmente en tanto su relación con la definición de función. Al respecto debe mencionarse que la definición de función que fue asumida en este trabajo de investigación es la que proviene de la escuela conjuntista, una de cuyos enunciados frecuentes se refleja de la siguiente forma:

“La característica esencial de una función o aplicación es la dependencia entre dos variables.

Una función o aplicación está formada por:

- a) Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
- b) Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.
- c) Regla que asigna a cada elemento del conjunto de salida uno y solo uno del conjunto de llegada.” (Group Zero, 1981; citado en Azcarate y Delofeu, 1996)

Cabe destacar que la definición citada es solo una de las distintas formas en que puede expresarse dicha aproximación conjuntista al concepto de función, aunque se puede considerar que enfatiza en los principales aspectos de éste, y para los propósitos del actual trabajo de investigación es pertinente.

Otra aproximación al concepto es la de la escuela formal, la cual se puede relacionar con la definición conjuntista, pero que se caracteriza por su elevado nivel de abstracción. Al respecto, ésta se puede expresar de la siguiente forma:

“Una relación F se llama una función cuando: $(x,y) \in F$, $y, (x,z) \in F$, implique $y=z$

una función es, pues, un conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que siempre que dos pares (x,y) y (x,z) del conjunto tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo.” (Apostol, 1960, I, p.29; citado en Ruiz Higuera, L., 1998)

Cabe destacar como en la primera definición se hace alusión a una regla de asignación, que Freudenthal (1983) prefiere llamar acto de asignación, mientras en esta última acepción se enfatiza en el carácter de relación binaria, dejándose a un lado nociones asociadas al concepto tales como la de dependencia o incluso la de correspondencia, características de la concepción

inicial de función, para adquirir un grado más alto de formalización que, a su vez, lo vuelve un concepto más abstracto.

5.3.2. Metas de comprensión

Con la intención de delimitar el tópico generativo, y además de clarificar los aspectos a tener en cuenta para el análisis de la comprensión del concepto de función, se presentaron algunas metas de comprensión que pretendieron orientar a los alumnos acerca de los elementos que deben dominar para alcanzar una más profunda comprensión del concepto de función. Entre éstas tenemos:

- El estudiante desarrollará comprensión acerca de la definición de función y cómo ésta permite diferenciar al concepto de función como un tipo especial de relación.
- El estudiante desarrollará comprensión acerca de las distintas propiedades derivadas de la definición de función.
- El estudiante desarrollará comprensión para “moverse” con facilidad entre las distintas representaciones del concepto de función (expresión analítica, gráfica, tabla, verbal, entre otras).
- El estudiante desarrollará comprensión acerca de la asociación del concepto de función con diversas expresiones tales como dependencia, causalidad, cambio, transformación, correspondencia, etc., y cómo ello permite aplicar el concepto de función a diversos fenómenos científicos y de la vida real.
- El estudiante desarrollará comprensión acerca de la posibilidad de analizar y comunicar diversas situaciones de la vida real mediante el lenguaje adquirido en la comprensión del concepto de función.

5.3.3. Desempeños de Comprensión

A continuación se nombrarán los desempeños de comprensión preparados para el desarrollo de la unidad curricular, con una breve explicación de cada uno de ellos, teniendo en cuenta que en el anexo A se incluirán en su versión final.

Desempeño de Exploración No. 1. La definición de función y su relación con distintas expresiones coloquiales: en este desempeño, además de presentarles las dos definiciones principales que serán trabajadas durante la unidad curricular, se les animó a que utilizaran diferentes oraciones que ejemplificaran el uso de la palabra función en el lenguaje común y las plasmarán en carteleras a ser exhibidas en el salón de clase. Fue una experiencia particular y novedosa respecto de las actividades comunes en una clase de matemáticas, aunque de carácter muy sencillo al ser el desempeño de introducción al tema.

Desempeño de Exploración No. 2. Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función: en este desempeño se presentaron una serie de 6 situaciones problemas, las cuales abarcaban distintas experiencias con el concepto de función, las cuales requerían su modelación mediante el uso de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, para finalmente llegar a una conclusión personal acerca del papel que juegan dichas aplicaciones en una mejor comprensión del concepto de función. Debo reconocer que, ante las falencias de los alumnos para utilizar los conocimientos adquiridos y aprendidos en años anteriores y la dificultad para plantear una situación problema a partir de una lectura comprensiva de ésta, los resultados obtenidos durante esta actividad no fueron los mejores; no obstante, ello me ayudó a diseñar más adelante un desempeño de comprensión más sencillo en el que se pudiera dar un mayor énfasis en el rol de la utilización de problemas con funciones para la comprensión de dicho concepto, más que a la solución en sí de los problemas.

Desempeño de Investigación Guiada No. 1. La historia de las matemáticas y la evolución del concepto de función: fue éste un desempeño muy importante en el que los estudiantes pudieron conocer los diversos puntos de vista que históricamente se han desarrollado respecto a la definición de función y en el que, a pesar de que era un poco largo y bastante abstracto, su recepción por parte de los estudiantes fue bastante positiva. Además, debe reiterarse como, por medio de este desempeño, los estudiantes pudieron desarrollar su comprensión del concepto a través del reconocimiento de la importancia de la historia de las matemáticas como elemento didáctico que obliga a pensar en los conceptos matemáticos desde un punto de vista diferente.

Desempeño de Investigación Guiada No. 2. Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función: este desempeño se enriqueció del “fracaso” del desempeño de exploración mencionado anteriormente, ya que de éste aprendí que debía presentar problemas un poco más asequibles para mis estudiantes, además de que trate de que fuera menos extenso en cuanto a la cantidad de problemas abordados y más profundo en el análisis de estos y su relación con el concepto de función. Incluso, se les trató de plantear un problema que fuera cercano a su realidad cotidiana, como es la fiesta de promoción que realizan los estudiantes al finalizar sus estudios de educación media, dado que el trabajo de campo se realizó con estudiantes de grado 11 próximos a graduarse.

Proyecto Final de Síntesis: Permitió que los estudiantes desplegaran un trabajo más autónomo e independiente a partir de los elementos adquiridos durante el desarrollo de la unidad curricular. Se les enfatizó en la importancia de que desarrollaran un ensayo final en que pensarán en la comprensión que habían alcanzado del concepto de función desde un punto de vista muy personal y a partir de los desempeños realizados. Una dificultad que se presentó durante este desempeño fue que, al realizarse cerca de la finalización del año escolar, algunos estudiantes no

la realizaron o lo hicieron en forma desprolija teniendo en cuenta que consideraban que ya habían obtenido una nota aprobatoria para el año en el área de matemáticas sin importar la calificación de esta última actividad. No obstante, se recibieron algunos trabajos muy destacados, en los que se apreció el esfuerzo por presentar una aproximación muy personal de la comprensión alcanzada del concepto de función a través del desarrollo de toda la unidad curricular.

5.3.4. Valoración Continua

Acerca de este aspecto, ha sido siempre un aspecto presente en mi enseñanza el brindar retroalimentación constante al alumno durante el desarrollo de las actividades, por lo cual este aspecto del marco conceptual del enfoque de la Enseñanza para la Comprensión.

No obstante, debo reconocer que en algunos desempeños los criterios de valoración no fueron lo suficientemente explícitos, lo cual pudo haber llevado a una incorrecta evaluación de la actividad realizada.

Por otro lado, me parece de gran importancia el haber enfatizado durante toda la unidad curricular en la importancia de reconocer la validez de distintos puntos de vista sobre el mismo tema, para que los estudiantes tengan una visión más amplia acerca de su aprendizaje del concepto de función y se alejen del paradigma de “solo una respuesta es correcta” tan común en la enseñanza de las matemáticas.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los datos obtenidos para la investigación provinieron de tres fuentes: entrevistas iniciales, análisis de documentos entregados por los alumnos en el desarrollo de cada uno de los desempeños de comprensión y entrevistas finales. Con el fin de proteger la identidad de los estudiantes casos de estudio, se asignó un código para cada uno de ellos, así: se usaron los códigos A1 y A2 para los dos estudiantes del primer grupo, B1 y B2 para los del segundo grupo, y C1 y C2 para los del tercer grupo. A continuación se presenta una tabla de resumen del análisis de los casos de estudio presentados en este capítulo.

Tabla 1. Resumen de la presentación del análisis de los resultados.

Tipo de Fuente.	Desarrollo del análisis.
6.1. Entrevistas iniciales.	Se desarrolló el análisis caso por caso y al final un resumen de los principales hallazgos, así: 6.1.1. Entrevista inicial estudiante A1 6.1.2. Entrevista inicial estudiante A2 6.1.3. Entrevista inicial estudiante B1 6.1.4. Entrevista inicial estudiante B2 6.1.5. Entrevista inicial estudiante C1 6.1.6. Entrevista inicial estudiante C2
6.2 Análisis global de las entrevistas iniciales.	
6.3. Análisis de documentos derivados de los desempeños de comprensión.	En este caso se optó por presentar el análisis de cada uno de los desempeños, mostrando los aportes más relevantes para los objetivos del trabajo, así: 6.3.1. Desempeño de exploración No.1: La definición de función y su relación con distintas expresiones coloquiales. 6.3.2. Desempeño de exploración No. 2: Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la

	<p>comprensión del concepto de función.</p> <p>6.3.3. Desempeño de investigación guiada No. 1: La historia de las matemáticas y la evolución del concepto de función.</p> <p>6.3.4. Desempeño de investigación guiada No. 2: Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función.</p>
6.4. Proyecto Final de Síntesis.	En éste, por su importancia, se analizó caso por caso, aunque se debe tener en cuenta que solo cuatro de los seis estudiantes lo llevaron a cabo (A1, A2, B2 y C1).
6.5. Entrevistas finales.	<p>Se presentan caso por caso y al final un cuadro resumen con las respuestas a los interrogantes principales:</p> <p>6.5.1. Entrevista final estudiante A1.</p> <p>6.5.2. Entrevista final estudiante A2.</p> <p>6.5.3. Entrevista final estudiante B1.</p> <p>6.5.4. Entrevista final estudiante B2.</p> <p>6.5.5. Entrevista final estudiante C1.</p> <p>6.5.6. Entrevista final estudiante C2.</p>
6.6 Análisis global de las entrevistas finales.	Resumen de los principales resultados.
6.7. Análisis final de los casos de estudio.	Conclusiones finales acerca de la comprensión del concepto de función alcanzada por el estudiante analizando todo su proceso.

6.1. Entrevistas iniciales

6.1.1. Entrevista inicial estudiante A1.

Al preguntársele al estudiante acerca de su opinión hacia las matemáticas, el alumno se inclinó hacia una definición, recalcando además en la importancia de las matemáticas. Su respuesta fue: “Las matemáticas, en mi opinión, es algo creado por el hombre. Una necesidad, pues, que surgió y ha mejorado nuestras vidas”.

Luego, al preguntarle qué temas le han gustado en matemáticas, se limita a mencionar la trigonometría, que fue el tema visto durante el grado anterior. Asimismo, tampoco recuerda haber estudiado el tema de función en años anteriores, no obstante que en grado noveno se deben presentar nociones básicas acerca del tema, así como ejemplos de los distintos tipos de funciones, como son la función lineal, cuadrática, e incluso la exponencial y logarítmica.

Al pasar a su noción acerca de la palabra función, el estudiante manifiesta que: “Relaciones entre cosas, comparaciones”. Lo anterior denota una noción poco elaborada que se espera evolucione en el desarrollo del trabajo. Al plantearse el ejercicio de aplicación relacionado con función, el alumno manifiesta una clara comprensión de éste, al afirmar que: “Ya que la velocidad es constante, ya la variación viene siendo el tiempo, entre más tiempo más recorre y entre menos tiempo menos recorre”. Cabe destacar su reconocimiento de las dos variables implicadas, así como de la dependencia de una respecto de la otra.

Más adelante, al pedirle que recordara que tipos de funciones había visto en años anteriores, manifestó desconocimiento, pero al decirle si habían utilizado el plano cartesiano para graficar, recordó que: “Eran en el plano cartesiano, casi siempre iban subiendo o iban bajando en forma constante”. Lo anterior denota un reconocimiento de la característica principal de una función lineal. Finalmente, la definición de función que el alumno asume al final de la entrevista es: “Relación entre dos términos que se transforman o se relacionan entre sí”

Entrevista inicial estudiante A2.

En general, la entrevista con este alumno mostró su escaso conocimiento del concepto de función. Al inicio de la entrevista, respecto a su opinión respecto de las matemáticas, el alumno expresó que: “Para mí, las matemáticas podrían ser como didácticas, son como didácticas, como nos ayudan más como a saber más allá de lo que queremos saber”.

Se aprecia algo de confusión, ya que el término “didácticas” se expresa en forma vaga, aunque parece expresar que por medio de las matemáticas aprendemos más. No obstante, cabe destacar el gusto del alumno por las matemáticas, al punto de manifestar su preferencia por el álgebra. A pesar de lo cual afirma no recordar nada acerca del tema de funciones que deberían haber visto en años anteriores.

Por otra parte, cuando se le preguntó por su idea de función, afirmó que: “Es como, como, una función, por ejemplo, como le explico, es como hacer algo, hacer alguna cosa”. La anterior afirmación muestra una rudimentaria noción de función asociada al desarrollo de una acción. En la explicación del ejercicio hubo alguna dificultad en comprenderlo, llegándose a la siguiente afirmación: “El tiempo se duplicó y la distancia también se duplico”.

Finalmente, respecto a la definición personal de función manifestada al final de la entrevista, ésta fue: “Una diferencia, como dos cosas, se necesitan dos cosas para tener una función, para que nos den una función, y un puente, que es la función, el que hace que de un número obtengamos otro número”.

6.1.2. Entrevista inicial estudiante B1.

El estudiante manifiesta, en respuesta a la primera pregunta, su agrado hacia las matemáticas: “A mí las matemáticas, en mi opinión, a mí me gustan mucho, porque son, son a mí me causan una distracción y me siento muy cómoda con ellas, además entiendo los temas muy fácilmente”. Al igual que los demás estudiantes, manifiesta su gusto por la trigonometría y su desconocimiento del tema de funciones que debería haber estudiado en grados anteriores.

Por otro lado, su respuesta respecto a la idea que le surgía ante la palabra función fue: “Pues función, cumplir algo, un cargo que uno desempeña, un cargo específico”, la cual, aunque no es

una respuesta que se destaque por su contenido matemático, si expresa un uso coloquial muy extendido de la palabra función. En cuanto al ejemplo planteado, su confusión fue notable, al final solo pudo expresarse así: “Pues el tiempo, en un determinado tiempo, recorre cierta distancia, si maneja un mismo paso puede recorrer una distancia en el tiempo que se estableció”.

Finalmente, ante la pregunta acerca de la definición personal de función, expresó: “Función es algo que uno desempeña, que en un momento está desempeñando, tiene que desempeñar ciertos pasos para poder llegar a la meta de la función”.

6.1.3. Entrevista inicial estudiante B2.

La respuesta dada por este estudiante a la primera pregunta formulada se caracterizó por su reconocimiento de la importancia de las matemáticas en el estudio de las otras ciencias. Así afirmó él: “A mí me parece que las matemáticas son como la base de todas las ciencias. Porque siempre es necesario medir cuantas cosas hay o que cantidades se presentan, por ejemplo en Química, Física, Arquitectura”.

Luego, en la segunda y tercera pregunta, sus respuestas son similares a los de los demás estudiantes entrevistados, al manifestar su gusto por la trigonometría y su desconocimiento del tema de funciones. Luego, al interrogarle acerca de las ideas que se le vienen a la mente con la palabra función, el alumno expresó lo siguiente: “Función: necesidad, objetivo, razón, eficiencia”, lo cual permite ver los múltiples aspectos desde los cuales se puede analizar la concepción de función en su forma coloquial.

En torno a su respuesta al ejercicio planteado: éste afirma “La relación es que si durante una hora realiza 6 km (...) pues sí, que si su promedio es de 6 km/h, cada 20 minutos él recorre 2, o sea que en 60 minutos el recorre los 6. El tiempo es directamente proporcional al espacio que

recorre”, destacándose el uso apropiado que le da a la proporcionalidad directa presente en el ejercicio, aunque deja a un lado el aspecto de la diferenciación de variables entre independiente y dependiente. Por último, cabe mencionar la definición personal de función asumida por el estudiante al final de la entrevista, en la cual manifestó: “Una función en matemáticas es como la, como lo que hace cierto objetivo, es como su razón de estar ahí”.

6.1.4. Entrevista inicial estudiante C1.

Inicialmente se le consultó al alumno acerca de su interés hacia las matemáticas, manifestando que: “(la matemática es) Muy bacana y muy importante. A mí me parece muy importante, me parece la materia más importante, porque todo es matemáticas, el que está mal en los números esta grave, está llevado en todo”. Asimismo, manifiesta su gusto hacia el álgebra, en específico el tema de factorización, y la trigonometría.

Cuando se pasó al tema concreto de función, preguntándole: “¿qué piensas, cuando escuchas la palabra función?”, el estudiante parece escéptico, respondiendo: “¿La palabra función?”. Lo cual lleva a plantearle la pregunta de nuevo en búsqueda de alguna imagen conceptual acerca del concepto de función, obteniendo de él la siguiente afirmación: “Función. Algo como qué se desarrolla, se desarrolla mediante otras cosas, ¿no? (...) función es algo que actúan muchas cosas para que se lleve a cabo”.

Al plantearse el ejercicio relacionado con funciones, y ante la pregunta acerca de: “¿Cuál es la relación que ves entre el tiempo y la distancia que trota?”, el alumno expresa: “Pues que entre más tiempo gasta como trotando, más distancia recorre”. De ello se aprecia una comprensión de dicha aplicación de función, además de que expresa adecuadamente la relación entre el aumento de una variable y el aumento consiguiente de la otra variable.

Entrevista inicial estudiante C2.

Similar al estudiante B2, este alumno enfatiza en la importancia de las matemáticas desde el punto de vista práctico, al expresar que: “Para mí las matemáticas son una herramienta muy útil, puesto que es una ciencia muy exacta, y se tienen que estar utilizando constantemente en la vida cotidiana. Entonces son muy útiles para cualquier persona porque en todo momento las estamos utilizando”.

Al preguntarle sobre los temas de matemáticas que le gustan, se inclinó por la estadística, debido a su utilidad como instrumento de recolección de información y a que durante el año anterior él se encontraba desarrollando un proyecto para una feria de investigación que se realiza en Medellín. Al igual que los demás alumnos, afirmó desconocer el tema de funciones.

Al pedirle que expresara la idea que se le viene a la mente al escuchar la palabra función, se respuesta fue: “Muchas ideas, porque función puede ser muy sistemático o muy extenso a la vez. Una de las ideas que se me viene a la mente con la palabra función puede ser la forma en que uno procede, matemáticamente o de otra forma. También se puede utilizar mucho en lenguaje de sistemas, en computación porque se trabaja mucho con logaritmo, algoritmo y eso es lo que permite funciones también ahí en el sistema, lo de dar órdenes”. De esta respuesta se pueden extraer varios datos interesantes, como son la noción de proceso implícita, así como también la noción de función como algoritmo que permite dar órdenes o ejecutar acciones en un computador.

En cuanto a la situación planteada en la quinta pregunta, presenta una adecuada comprensión, como lo demuestra su respuesta: “A ver, unos días 20 km y otros días 40 km. Si corre una distancia a una velocidad constante, entre más tiempo corra, más distancia recorrida; entre menos tiempo corra menos distancia recorre, entonces la relación ahí es tiempo-distancia”.

Se aprecia que reconoce claramente las variables, el papel de cada una y el efecto de la variación de una de ellas sobre la otra. Asimismo, es interesante como plantea un ejemplo similar, relacionándolo con el desempeño de un computador, ya que está estudiando actualmente sistemas, de la siguiente forma: “Por ejemplo, relacionado con ese ejemplo, un computador portátil trabajando a alto rendimiento tiene una duración de pila de 1 hora y media y trabajando un rendimiento equilibrado, la duración de la pila es de 2 horas y media. Al mermar el brillo de pantalla, o sea el consumo de energía, dura más la pila”.

Para terminar, su definición personal de función fue: “En matemáticas, funciones, para mí, son las series de cálculos o procesos matemáticos que nos llevan a resolver los ejercicios que estamos viendo”.

6.2. Análisis global de las entrevistas iniciales.

Considero que las respuestas obtenidas permiten reconocer, en general, un marcado desconocimiento del concepto de función, a pesar de ser estudiantes de último año de bachillerato, quienes deben haberlo estudiado en grados anteriores. No obstante, ello servirá de base para el adecuado diseño de los desempeños y como punto de partida para el reconocimiento del avance logrado por los alumnos en la comprensión de la definición de función.

Otro aspecto a considerar es la adecuada disposición de los estudiantes hacia el trabajo, ya que a pesar del aspecto mencionado anteriormente, todos se aventuraron a presentar su visión particular acerca de la definición de función, siendo incluso algunas de ellas válidas de acuerdo al contexto en que se consideren.

Por último, debe preocupar las dificultades que presentaron algunos alumnos en el análisis del ejemplo de aplicación del concepto de función presentado, muestra clara de que sus

conocimientos previos sobre funciones son bastante precarios, no obstante lo cual, trataron de dar una respuesta lo más razonada posible respecto a la situación presentada.

6.3. Análisis de documentos derivados de los desempeños de comprensión.

6.3.1. Desempeño de exploración No.1. La definición de función y su relación con distintas expresiones coloquiales.

En la realización de este desempeño los estudiantes escribieron interesantes ejemplos, los cuales giraban en torno a los múltiples significados, dentro del lenguaje coloquial, del concepto de función, y siendo más específico, de su definición. Por ejemplo, un estudiante expresó la dependencia en el siguiente ejemplo sin hacer referencia explícita a ella:

(A2): “Sin trabajadores no hay producción”

Asimismo, este alumno escribió un ejemplo de dependencia en un doble sentido, el cual recuerda al proceso de función inversa, así:

(A2): “Sin abejas no hay flores, y sin flores no hay abejas”

Por otro lado, un ejemplo de función como correspondencia lo presentó un estudiante al expresar:

(B1): “El doctor corresponde al hospital”

Otro interesante ejemplo que presenta la correspondencia de forma implícita es:

(C1): “Cada carro contiene un motor”

Los ejemplos presentados como transformación tenían una cercana relación con las funciones entendidas como proceso, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

(A1): “La madera tallada se transforma en una silla”

(B1): “La tela se transforma en ropa”

(B2): “Una oruga se transforma en mariposa”

En general, la actividad permitió que los estudiantes desarrollaran comprensión sobre los distintos significados coloquiales que se asocian a la definición de función, a través de los distintos ejemplos presentados. No obstante, a pesar de que se cumplió con la meta de comprensión enunciada para el desempeño, y que el carácter de éste era de exploración, hubo dos aspectos que valdría la pena mejorar para el diseño de un desempeño de comprensión de esta clase, los cuales son:

- Haber pedido a los alumnos que explicarían en forma escrita su ejemplo, relacionándolo con las definiciones de función presentadas.
- Incluir una pregunta de síntesis o cierre de la actividad, en donde el alumno reflexionara sobre su propio aprendizaje y sobre su comprensión de la definición de función en términos coloquiales.

6.3.2. Desempeño de exploración No. 2. Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función.

Este desempeño presentó algunas falencias en su diseño, como ya se mencionó en el capítulo anterior, por lo cual su análisis no produjo los resultados esperados. A pesar de su extensión, las respuestas brindadas por los estudiantes no demuestran profundidad en su comprensión del concepto de función. Este desempeño se destacó por el uso de diferentes formas de representación de los problemas asignados, tales como tablas, gráficas en el plano cartesiano, representaciones icónicas y, en menor medida, expresiones analíticas (fórmulas) de las situaciones dadas.

No obstante, se prestó especial atención al último punto de la actividad, en el cual se pretendía que el estudiante sintetizará lo aprendido en el desempeño y lo relacionara con la definición de función asumida en el trabajo de investigación. Al respecto se destaca la reflexión de uno de los estudiantes, que afirma:

(C1) “Para que se dé una función deben existir dos variables y una siempre va a depender de la otra, cuando en una aumentan los valores en otra también aumentan, o sea directamente proporcional, o también son inversamente proporcional, que consiste en que en una variable aumenta un valor y en la otra variable disminuye. A cada caso le puede corresponder una fórmula que generalice la situación planteada y además de eso se puede expresar también gráficamente en coordenadas x y y o más bien en plano cartesiano. Existen dos variables pero una dependiente y otra variable independiente...”.

Es una respuesta bastante completa, que enfatiza en la necesidad de existencia de las variables y en el papel que juega cada una de ellas.

Las respuestas de los otros alumnos son poco significativas, por su escasa reflexión, e incluso algunos alumnos no respondieron la pregunta. Cabe mencionar la respuesta de uno de ellos, la cual, a pesar de su falta de claridad, refleja el nivel de comprensión predominante en ese momento.

(B1): “Función: En cada ejercicio hay una variable independiente y hay una dependiente, o sea que una es función de la otra”

6.3.3. Desempeño de investigación guiada No. 1. La historia de las matemáticas y la evolución del concepto de función.

Este desempeño significó la oportunidad de que los estudiantes se adentraran en una breve reseña de la historia de las matemáticas, mediante una lectura inicial, para pasar luego a una inmersión en la historia del desarrollo de la definición del concepto de función, enfatizando en cómo se fue pasando por distintas definiciones de éste. En general, los estudiantes mostraron una actitud positiva hacia la actividad y sus respuestas denotan una reflexión concienzuda de cada una de las preguntas planteadas.

En este desempeño se pretendió llevarlos, mediante una serie de preguntas de comprensión de lectura, a que asumieran una posición respecto a la definición de función y como era su comprensión de ésta, teniendo en cuenta el contexto histórico. Por ello, en el análisis enfatiqué en las respuestas finales como expresiones de la comprensión parcial alcanzada de la definición, por lo cual, a continuación presento las respuestas obtenidas en las dos últimas preguntas de cada uno de los estudiantes casos de estudio, referidas a si la definición de función se asocia más a la noción de dependencia o a la de correspondencia, y a como expresan, con sus propias palabras, la definición de función cada alumno al final del desempeño.

Por ejemplo, el primer estudiante expresó de forma algo confusa su posición respecto de si una función es una dependencia o es una correspondencia, así:

(A1): "No sé, porque los dos se centran en inicios distintos, es decir, de dónde salió ese número"

Se puede apreciar que su interés está puesto en el punto de partida y que no toma partido por ninguna de las dos posiciones. Respecto a su definición personal de función, su confusión es también manifiesta, al decir:

(A1): “Un número x puede salir de la suma de dos términos o una influencia de un solo término”.

A pesar de la falta de claridad, se puede interpretar esta respuesta en torno a las nociones de dependencia o correspondencia, ya que se puede entender que el número x depende de los dos términos iniciales en el primer caso, y en el segundo se presenta una correspondencia entre un valor y otro número x .

Por otro lado, el segundo estudiante tomó partido por la noción de dependencia, al afirmar que:

(A2): “la de dependencia porque abarca más lo que se estudia en el colegio y esta utiliza las variables más estudiadas que son la variable “ y ” y la variable “ x ” por lo tanto considero que sería la más apropiada para el concepto de función”.

Aunque sus razones no son claras, se nota un esfuerzo por justificar su respuesta desde el punto de vista de la aplicabilidad de la noción de dependencia. Con respecto a su definición de función, enfatiza una vez más en la aplicabilidad, al afirmar así:

(A2): “Es una dependencia, que se utiliza para diversas situaciones o problemas de la vida diaria”

El tercer estudiante manifiesta confusión al expresar su definición de función, como se puede notar en esta cita:

(B1): “Una función es algo así como algo ya definido,(...), algo que le corresponde o tiene algo en común con otra cosa”

Vemos que se inclina por la noción de correspondencia, pero su justificación es bastante débil e imprecisa.

El cuarto estudiante, por su parte, manifiesta:

(B2): “Una función es cuando hay dos conceptos hay uno que le corresponde y complementa al otro y los dos conforman la función. Este se puede graficar ya que sus dos variables se corresponden”

Se aprecia una inclinación hacia la idea de correspondencia, además de que tiene presente la existencia de dos variables. Se nota, además, la importancia que le da a la gráfica como forma de apreciar la correspondencia entre variables.

El quinto estudiante presenta una defensa más clara de porque se inclina, en su caso, por la idea de dependencia, al manifestar:

(C1): “Me parece más válida la definición como dependencia aunque también es correspondencia. Bueno pero como dependencia puedo tener más idea de explicarla. En las funciones siempre van a existir dos variables sino se dice que no es una función y hay una variable que es dependiente y otra independiente. La primera es la que depende fijamente de la segunda o sea o es directamente proporcional o inversamente proporcional”

Se destaca la forma en que el joven defiende su elección de la noción de dependencia por encima de la de correspondencia, aludiendo al papel jugado por las variables y presentando incluso ejemplos de dependencia como son los de proporcionalidad. Se aprecia que el alumno no solo se limita a enunciar la necesidad de que existan dos variables, sino que debe haber una dependiente y otra independiente. Aunque la mención de la proporcionalidad directa e inversa podría verse como una limitación del concepto de función, debe enfatizarse en el papel positivo que implica la ejemplificación como forma de sustentar su elección.

Es de interés, asimismo, la definición asumida por el estudiante al final del desempeño, la cual describió así:

(C1): “Es función x de la variable y teniendo en cuenta que a cada valor en x le corresponde un valor en y que es dependiente del valor que halla en x que es la variable no cambiante $f(x)=y$, la cual se puede graficar con sus respectivas variables dependiendo de las diferentes situaciones dadas para hallar su solución”

Se destaca su uso de ambas nociones (correspondencia y dependencia) en su definición de función, así como la precisión de ésta, relacionada con la definición de Dirichlet en cuanto a la necesidad de que haya un solo valor en y para cada valor en x . Vemos, asimismo, que se menciona la gráfica como el medio idóneo de representación de una función, aunque también se hace alusión a la forma analítica ($f(x) = y$).

Se puede concluir, de las respuestas presentadas, que algunos estudiantes han logrado alcanzar una cierta noción de la definición de función, a pesar de su complejidad. Igualmente, cabe destacar que este desempeño, a pesar de ser poco común en la secuencia de actividades que normalmente desarrollan los alumnos en clase, al referirse al desarrollo histórico del concepto de función, ayudó a desarrollar en medida apreciable la comprensión de éste concepto por parte de los alumnos involucrados en la investigación.

6.3.4. Desempeño de investigación guiada No. 2. Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función.

Esta actividad se puede considerar una depuración del ejercicio poco exitoso realizado en el segundo desempeño de exploración, en cuanto a que se disminuyó el número de situaciones problema, así como la dificultad de éstas. La actividad fue realizada sin contratiempos por los

estudiantes y sus respuestas fueron significativas para el trabajo, centrándonos para el presente análisis en las dos últimas de los dos primeros puntos (1f y 2d), en donde se les preguntó si dichas situaciones podían clasificarse como funciones y la sustentación de dicha afirmación.

Además, en el tercer punto se les pidió que realizaran una comparación entre ambas situaciones problema, mencionando las diferentes representaciones obtenidas, lo cual también es de gran interés para identificar la comprensión del concepto de función presente en los estudiantes en ese momento.

El primer estudiante realizó un trabajo bastante incompleto, al no desarrollar el tercer punto, además de que sus respuestas a las preguntas de interés de los dos primeros puntos no aportan mucho para el análisis, como se puede apreciar en su respuesta a la pregunta (1f):

(A1): “Si, porque tiene variables dependientes e independientes y se puede hacer una fórmula de ellas”

Por otro lado, el segundo estudiante, a pesar de realizar un esfuerzo considerable en la realización del desempeño, sigue presentando deficiencias para desarrollar respuestas más reflexivas, como se aprecia en ambas respuestas (1f y 2d) a continuación:

(A2): “Si. Porque una función tiene variable dependiente e independiente y este problema obtiene estas dos variables”

(A2): “Esta si es una función porque en esta se utiliza la función por correspondencia”

En cuanto a su respuesta respecto al tercer punto, su comparación es superficial, al limitarse a afirmar en que se parecen en que ambas son funciones, tienen gráfica, tabla, formula y gráfica y se diferencian en que tienen distintas gráficas, fórmulas, etc.

El tercer estudiante presentó una respuesta más elaborada (2d), la cual desarrolló así:

(B1): “Si porque hay una variable independiente que es la distancia que se debe recorrer y una variable dependiente que es la velocidad por horas del piloto”

Puede considerarse valioso el que describa concretamente cual es la variable independiente y cuál es la variable dependiente, más allá del error en que se pueda incurrir al definir las, ya que la variable dependiente es el tiempo que tarda en recorrer el trayecto y la variable independiente es la velocidad promedio con que lo realiza.

El cuarto estudiante no realizó la actividad debido a su inasistencia al colegio en ese día, mientras que los estudiantes quinto y sexto desarrollaron la actividad en parejas, ya que consideré interesante que compartieran impresiones acerca del desempeño, además de que esperaba obtener respuestas más elaboradas que las obtenidas con los estudiantes de los dos primeros grupos. Por ejemplo, su respuesta a la pregunta (1f) fue:

(C1y2): “Si es un ejemplo de función porque existe una variable dependiente (ganancia) y una independiente (número de boletas), se puede hacer tabla, graficar y clasificar”

En la respuesta a la (2d) afirmaron así:

(C1y2): “Si es una situación ejemplo de función porque al igual que en el punto anterior la situación planteada aquí se puede graficar, se puede organizar en tabla lo que explica que como requisito de toda función hay una variable independiente y una variable dependiente las cuales se corresponden valores”.

Aquí avanzan un poco más al explicitar la condición esencial para que exista una función, como se asume en la definición tomada como base del trabajo. En torno a la tercera pregunta, se repiten las mismas similitudes y diferencias entre ambas situaciones.

6.4. Proyecto Final de Síntesis.

El análisis será realizado a partir de cada uno de los cuatro proyectos finales presentados, ya que desafortunadamente dos de los estudiantes no presentaron dicho trabajo. Para el objeto del presente trabajo, se hará énfasis en las respuestas dadas a las preguntas 4, 5 y 6 del proyecto, las cuales indagan acerca de la definición y su relación con los demás elementos del concepto de función.

6.4.1. Proyecto Final del Estudiante A1.

Su trabajo se caracterizó por ser uno de los más completos, ya que realizó un profundo análisis de la relación entre los ejemplos presentados y la definición de función. Cabe destacar algunas de sus afirmaciones que dan cuenta de un avance significativo en su comprensión del concepto de función, entre las cuales están:

- “Se puede decir que algunas funciones pueden salir o ser una reacción de una acción ya sea una venta, una adición o sustracción de algo, entre otros como el primer ejemplo que planteo la acción sale siendo la venta de algo y la reacción sale siendo las ganancias”
- “Muchos aplican el concepto de función sin saber de él ya que es tan común que lo realizamos casi sin conciencia de la existencia de esta correspondencia de las acciones y las reacciones o resultado de la relación de los términos con el resultado.”

Se aprecia una noción bastante clara de dependencia a partir del par acción-reacción como explicación de un determinado problema que implica la aplicación del concepto de función.

Por otro lado, en la última pregunta donde se les pide que hagan un ensayo en el cual presente su comprensión del concepto de función, se destacó por la profundidad de su análisis, como se puede apreciar en su respuesta: “la función se tiene que desarrollar en un lugar, conjunto

o intervalo de donde sale la variable independiente y se corresponde con variable independiente u otro lugar, conjunto o intervalo mediante una fórmula o dependencia. Pero algunas funciones no necesariamente tienen que ser un procedimiento sino que también pueden ser una simple correspondencia ejemplo a cada uno le corresponde un lugar en el universo”

Es notable como, a pesar de la tendencia a relacionar el concepto con una fórmula o dependencia, el joven de inmediato se percató de que ésta no es la esencia del concepto, sino que en el caso de una correspondencia no es necesaria la existencia de una fórmula definida.

Luego, el joven presenta una conclusión final donde se expresa acerca de las distintas actividades o desempeños realizados en la unidad curricular desde un punto de vista personal de la siguiente forma: “En conclusión todas las actividades estaban dirigidas a los objetivos: un poco de historia acerca del origen del concepto, saber aplicarlo en la vida, saberlo diferenciar, identificar, saber, conocer el concepto de función junto con sus características todo esto para ver que no es muy extraño a la vida diaria y algunas funciones nos pueden ayudar a conocer posibles resultados, y que hay muchas formas de presentarse frente a uno”

El estudiante demuestra así su apropiación personal del concepto, presentando una valiosa aproximación a la complejidad del concepto en sus múltiples facetas, y como por medio de los desempeños pudo avanzar en su comprensión.

6.4.2. Proyecto Final del Estudiante A2.

Debe reconocerse en este alumno su esfuerzo por desarrollar un buen trabajo, no obstante que sus respuestas no demuestran un nivel de comprensión similar al del alumno anterior. Por ejemplo, en la cuarta pregunta su respuesta se limita a enunciar diferencias superficiales entre las distintas representaciones de los dos ejemplos de función solicitados en las preguntas iniciales.

Más interés reviste su respuesta a la pregunta cinco, donde se les pide que planteen un ejemplo de una relación que no sea función. Al respecto afirma: “En el dominio podríamos colocar el conjunto de jugadores de un partido de fútbol, en la correspondencia podríamos colocar el balón que le corresponde a cada jugador y en el rango colocaríamos el conjunto de balones. En este ejemplo podríamos decir que no es una función primero porque en un partido de fútbol solo hay un balón y con éste todos los jugadores juegan y segundo no se adapta todo el problema a la definición de función, pero si este problema lo trasladaríamos a un entrenamiento de un equipo de fútbol podríamos decir que si es función porque al entrenar a cada jugador le puede corresponder un balón.”

Se puede notar una clara diferenciación de las características de una relación y una función en un ejemplo sencillo pero cercano a la vivencia cotidiana de un alumno, dado el gusto que manifiestan por el fútbol la mayoría de los estudiantes de últimos grados de bachillerato.

Por otro lado, en el ensayo final expresó el joven su enumeración de los elementos del concepto de función así: “Los elementos de una función son: la representación analítica que es la fórmula del problema (...), la representación tabular que es la tabla del problema, otra sería la representación gráfica que es donde se realiza el plano cartesiano y por ultimo esta la representación verbal que es la que hablamos como resolver el problema”

De la anterior cita se puede reconocer una confusión entre los elementos y las representaciones, por un lado, pero cabe destacar la adecuada comprensión de las distintas representaciones del concepto de función. Es posible que al pedirles que desarrollen las distintas representaciones de una determinada situación problema, al ser éstas numerosas, hacen perder de vista los demás elementos como son, entre otros, la aplicación o problema en sí y, la definición, siendo ésta última el elemento central en la investigación.

6.4.3. Proyecto Final del Estudiante B2.

El estudiante presentó un trabajo demasiado incompleto, en el cual se aprecia una comprensión superficial del concepto de función, como se puede apreciar en la siguiente afirmación: “Estos ejemplos son de función ya que tienen dos variables la independiente y la dependiente además de que se les puede graficar y sacar una fórmula”

6.4.4. Proyecto Final del Estudiante C1.

En general, el trabajo realizado por este estudiante durante todo el proceso realizado a través de los distintos desempeños ha sido bastante bueno, demostrando un nivel de comprensión conceptual avanzado. En este proyecto final se destacan apartes de su respuesta a la última pregunta, como se muestra a continuación:

- “una función solo se da cuando a un elemento de salida le corresponde solo uno de llegada”
- “Toda función tiene la característica de graficarse correctamente, además de ello sus valores se pueden tabular y algo muy elemental es que a esos valores se les puede hallar una fórmula general que permite estudiar cualquier valor propuesto, tienen rango, dominio, codominio y pueden clasificarse en inyectiva, biyectiva y sobreyectiva, que son propiedades de la función como tal”
- “El concepto de función se puede aplicar a situaciones del campo científico o de la vida cotidiana, para analizar así el comportamiento de algo por medio de sus valores propuestos en gráficas, tablas, etc.”

A pesar de algunas incorrecciones, como la de suponer que siempre se les puede hallar una fórmula o graficarse correctamente, se aprecia una comprensión elaborada del concepto de función y de sus distintos elementos.

6.5. Entrevistas finales.

6.5.1. Entrevista final estudiante A1.

La primera pregunta fue acerca de su opinión acerca de la unidad curricular desarrollada, a lo cual respondió: “A mí me facilitó mucho en cuestión de que comprendí que no era muy alejado de la realidad sino que la trabajamos mucho en la vida cotidiana”

A continuación se le preguntó acerca de cada uno de los desempeños desarrollados, expresando que: “Aunque algunos me dieron problemática porque no tenía muy claro las relaciones, se me ha facilitado mucho después de hacer estos trabajos, me sentí pues cómodo con la mayoría de los trabajos”

Se le preguntó, además, como le pareció el desempeño del desarrollo histórico del concepto de función, a lo cual manifestó: “(...) más o menos sencillo porque iban relacionándose la anterior con la siguiente, casi siempre iban mejorando la anterior hasta llegar a la final”

Debo reconocer que, a pesar de las bondades derivadas de que los alumnos vean como los conceptos matemáticos son parte de un largo proceso histórico de elaboración y refinamiento, se apreció una cierta sensación de progreso ininterrumpido, como si necesariamente las primeras definiciones fueran erradas y fueran sustituidas por otras mejores, sin tomar en cuenta que cada una de ellas podía responder a las necesidades y posibilidades de la época en que se enunciaban.

A continuación se entró a analizar la imagen mental alcanzada del concepto de relación, expresando el alumno: “(...) me suena más como a comparación pero que tenga algo que los conecte, pueden ser muy separados pero hay algo que los puede unir”.

Mientras que en relación al concepto de función, expresa: “(...) me suena a acción y reacción, por ejemplo, cuando uno va a vender un producto, la acción es vender y la reacción es lo que uno consigue”. Aquí se puede apreciar que la definición asumida en el trabajo influye en su expresión del concepto.

Al pedírsele que comparara dichas imágenes, afirmó: “(...) una similitud es que tienen como un medio para relacionarse, (...) y diferencia en que la función es más como a la práctica y la relación es más como teoría”

Cabe destacar como el alumno se vio fuertemente influenciado por los diversos ejemplos de aplicación del concepto de función trabajados en clase durante los desempeños, mientras que faltó presentarle una variedad similar de ejemplos del concepto de relación, cuya aproximación fue decididamente teórica.

Más adelante, se le pidieron ejemplos de relación y de función, manifestando una vez más una tendencia a dar ejemplos abstractos de relaciones y ejemplos prácticos de función.

Al preguntársele cual concepto es más general, el estudiante se inclinó más por el de función, ya que la función “relaciona los dos términos y los pone en la práctica”. Aquí se debe entender por términos las dos variables y enfatiza una vez más el alumno en el carácter práctico del concepto de función.

Más adelante, al preguntársele por la noción más cercana al concepto de función, el joven manifestó: “la correspondencia, ya que es la que más aplican las funciones, ya que no todas las

funciones tienen un proceso para llegar al resultado”. Aquí se aprecia una inclinación hacia la definición de Dirichlet, que pone en primer plano la correspondencia.

Se le pidió que expresara con sus propias palabras la definición de función, expresándose así: “principalmente, yo me fui por una acción que conduce una reacción, porque para empezar la acción uno necesita unos elementos entonces llega la reacción que nos da unos resultados (...), por medio de la fórmula o el proceso que hicimos”

Finalmente, al preguntársele acerca de la importancia que le daba a la definición para comprender el concepto de función, expresó que la consideraba muy importante ante las fallas que presentaban los otros elementos del concepto (tabla de valores, gráfica, etc.).

En conclusión, el estudiante demostró una comprensión personal del concepto de función, y en especial de su definición, producto de la reflexión realizada en los distintos desempeños y en las entrevistas realizadas.

6.5.2. Entrevista final estudiante A2.

Respecto a la pregunta de entrada, la respuesta del estudiante fue: “la experiencia fue excelente, porque comprendí cosas que no sabía (...), como en la historia vemos que nos hablan de la evolución del concepto de función”. En torno a la imagen mental que el alumno tiene del concepto de relación, éste manifiesta: “relación, por ejemplo, (...) una tabla, tabla de valores, que tenga, por ejemplo la relación entre una variable, podría ser la variable x y la variable y ”, mientras que respecto a la imagen mental que el alumno tiene del concepto de función, expresa: “se me vienen muchos, se me viene la tabla, la gráfica, una fórmula”

Se puede notar una escasa diferenciación de los dos conceptos, primando la tabla como su representación básica, aunque se podría ver una mayor riqueza de imágenes mentales en el

concepto de función. Nótese ahora la comparación que hace el alumno de los dos conceptos a partir de la imagen mental que tiene: “la diferencia es el conjunto de valores que cada tabla corresponde”, lo cual es, por lo menos, muy poco claro.

Luego, respecto a su definición personal de función, afirma: “se puede definir por propiedades, por relaciones y otra definición seria (...), un problema que puede abarcar la variable independiente y la variable dependiente”. Claramente, se inclina hacia la concepción general de función.

Luego, al pedírsele un ejemplo de una situación que es función y una que no es función, el estudiante afirma comprenderlo desde la correspondencia, expresando un ejemplo de correspondencia entre los autos y sus placas, mientras que manifiesta un ejemplo donde uno de los elementos no tiene correspondencia (una banda de rock donde a cada integrante le corresponde un instrumento, pero si el cantante no toca ningún instrumento, no se puede hablar de función en este ejemplo), y por lo tanto no es función.

Cuando se le pregunta respecto a lo que se necesita para hablar de función en un problema, el joven manifiesta: “tiene que haber una tabla de valores, una gráfica, la forma analítica y la forma verbal”. A pesar de la falta de claridad, se puede notar que existen nociones de las distintas representaciones del concepto de función. Finalmente, al preguntársele que es importante para comprender el concepto de función, el joven expresa: “a mí me ayuda más la tabla de valores (...) pero también podemos coger la definición y la fórmula”

A pesar de que en su comprensión de la definición de función prevalece la confusión, hay algunos aspectos destacados, como es el de su comprensión desde la correspondencia, además de tener una noción de los distintos elementos del concepto y representaciones de éste, los cuales le permiten acercarse a un problema desde diferentes perspectivas. No obstante, se puede apreciar

que no muestra inclinación a darle importancia a la definición del concepto, dado que está más centrado en sus representaciones.

6.5.3. Entrevista final estudiante B1.

La joven expresa, al principio, sus dudas respecto a algunas preguntas, lo cual se debe a su inasistencia a algunas sesiones de clase, pero se le manifiesta que durante la entrevista se le ilustrará al respecto. En torno a la pregunta de entrada, manifiesta que entendió las actividades y le fue bien haciéndolas. Respecto al desempeño de la evolución histórica del concepto de función, la estudiante expresó: “aprendí de cómo fue la evolución, como lo fueron tomando algunos científicos (...) y lo fueron adaptando hasta llegar al que es un concepto de función, que debe tener variables y que deben corresponder”.

En general, sus respuestas carecieron de la profundidad esperada de un alumno que realizara todos los desempeños, debido al problema de inasistencia. Entre las respuestas dadas, se destaca la expresión que asocia al concepto de función, en la cual expresó: “correspondencia, (...) porque las dos (variables) deben tener una similitud y una debe corresponder a la otra”

La definición personal de función de la joven es: “(...) debe haber dos variables, una independiente y una dependiente, que las dos tienen que hablar del mismo tema y una debe corresponder a la otra (...), se pueden graficar, se puede buscar una fórmula”

Finalmente, se le pidió que expresara si la definición era importante para la comprensión del concepto de función, la joven expresó su preferencia por la tabla de valores, pero asimismo resaltó las actividades realizadas al principio, manifestando: “los ejemplos que nos tocó hacer al principio, que fueron ejemplos cotidianos (...) me pareció una forma muy buena para podernos ingresar al tema”

A pesar de la dificultad ya manifestada, se puede notar una comprensión mínima de la definición de función, enfatizando en el papel de las variables y en la necesaria correspondencia entre ellas, pero que se vio fuertemente influenciada por el primer desempeño, de exploración, en el cual se expresaron ideas coloquiales acerca del concepto de función.

6.5.4. Entrevista final estudiante B2.

Respecto a la pregunta de entrada, el joven respondió: “Al principio me pareció diferente a lo que había trabajado siempre en matemáticas, (...) yo estaba acostumbrado a (...) operaciones y me hizo ver que las matemáticas son más amplias que eso (...) Me pareció un tema muy apegado a la vida cotidiana”.

Respecto al desempeño acerca de la historia del concepto, manifestó: “Me pareció muy profundo, en el sentido de que yo no me imaginaba que un tema como la función, que parece tan simple, tuviera una historia tan compleja, (...) me parece que es trabajo que nos hizo meditar mucho, nos hizo comprender que hay muchas formas de ver una cosa (...)”. Debe destacarse el favorable papel de dicho desempeño, ya que llevó a que éste, e incluso otros alumnos, pensaran y reflexionaran sobre el papel de la historia en la comprensión de un concepto matemático sobre la posibilidad de ver una definición bajo diversas formas de acuerdo al desarrollo histórico.

Al preguntársele acerca de la primera imagen mental que tiene al escuchar la palabra relación, el joven expresó: “dependencia, unión, porque si algo está en relación con algo, es porque o se necesitan o tienen una unión entre sí”, mientras que respecto a la imagen mental al escuchar la palabra función, manifestó: “(...) necesitar, como necesario, la función de algo es cumplir con su debido trabajo, también me viene a la mente, después de haber estudiado eso, relación (...)”. De las anteriores respuestas se puede apreciar que hay serias dificultades en diferenciar los dos conceptos.

Al pedírsele que comparara ambos conceptos a partir de sus imágenes mentales, el joven afirma: “si hay muchas similitudes, en sí una función puede ser una relación, pero la función es más específica (...) en cambio una relación puede ser más abierta”.

Respecto a los ejemplos de relaciones, el joven se explayó así: “ganar el año depende de estudiar, es una relación (...) prender el carro, meterle gasolina, (...), la humedad en el aire está relacionada con la lluvia”, mientras que sobre funciones afirmo: “una dependencia, por ejemplo, cuanto se ganan unas personas al vender boletas de una rifa (...)”

Nuevamente, al pedírsele que comparara los dos conceptos a partir de los ejemplos, el joven manifestó: “los dos son dependencias, los ejemplos de funciones que hice fueron todos de dependencia, pero el de la lluvia es como distinto”, sin dar una mayor explicación.

Más adelante, se le pidió que expresara su definición personal de función, se expresó así: “Una relación específica que se hace entre dos términos y solo esos dos términos”.

En general, hay poca claridad respecto a la definición de función, así como de la diferencia entre función y relación.

6.5.5. Entrevista final estudiante C1.

El joven comienza la entrevista manifestando su agrado con las actividades desarrolladas en la unidad curricular del concepto de función, debido a su novedad y dinamismo. Luego, al preguntársele sobre el desempeño de la historia del concepto, el estudiante afirma: “(...) muy buena porque es un tema visto desde hace mucho tiempo, muy estudiado (...)”

Luego se le pidió que expresara la imagen mental que tiene al escuchar la palabra relación, expresó de forma escueta: “relación, podría ser dos variables, yo lo veo como dos variables”

Y en torno a la palabra función, su apreciación fue más amplia: “función ya abarca mucho más, (...) se me vienen un montón de fórmulas, que abarca un tema más amplio, a veces con relación a la vida cotidiana (...), un montón de valores, que unos dependen de otros”. A pesar de la ambigüedad al expresarse, se puede notar una mayor importancia del concepto de función, que se afirma abarca muchos aspectos, además de la diferencia que caracteriza a los dos conceptos, ya que mientras asocia la relación a las variables, el de función lo asocia principalmente al de dependencia.

Al pedírsele que expresara su definición del concepto de función, el joven afirmó: “un conjunto de valores que toman una variable independiente y otro conjunto de valores que toman la variable dependiente, teniendo en cuenta que la variable dependiente no puede tomar más de un valor en la independiente, y se puede hallar fórmula y graficar”. Se aprecia claramente como se apega a la definición asumida en el trabajo, con la claridad de expresar la condición para que dichos conjuntos de valores correspondan a una función.

Finalmente, se le pidió que manifestara si la definición había jugado un papel en su comprensión del concepto de función: “Se comprende más por medio del concepto, (...) así fue que yo la comprendí mejor porque así uno analiza más (...) piensa más, mientras que si uno se mete en las matemáticas así como tal, uno hace pero más que no se da cuenta ni lo que está haciendo”.

En conclusión, el estudiante muestra una comprensión básica del concepto, aunque sería deseable un desarrollo autónomo de ésta, que mostrara una asimilación personal de la definición en vez de enunciar en forma acrítica la definición presentada.

Entrevista final estudiante C2.

Respecto a la pregunta de entrada, afirmó: “Fue muy agradable, (...) asimilamos muy buen el tema (...), tenemos diferentes puntos de vista del concepto de función entonces gracias a esos puntos de vista se nos hizo un poco más fácil entender y aplicar estas funciones a la matemática, (...)”

En cuanto a su opinión acerca del desempeño sobre la historia del concepto de función, el joven expresó: “Muy buena, primero porque ahí fue donde vimos muchos puntos de vista y como fue cambiando el concepto de función con el tiempo y lo que pensaban los distintos matemáticos”

Luego, la primera imagen que tiene el joven al escuchar la palabra relación es: “más que imagen, se me viene... pienso en función porque según lo que hemos visto en la función hay mucha relación entre las variables, (...) el dato de una variable va variando según el dato de la otra variable entonces se relacionan mucho porque según el cambio de una va a estar el cambio de la otra”

Mientras que respecto a la imagen que se obtiene al escuchar la palabra función, expresó: “gráficas, porque según lo que vimos de función casi todas las funciones que hay o lo que tiene variable dependiente e independiente se puede graficar y la gráfica muestra más claramente el porqué de la variable dependiente e independiente y el resultado del porqué cambia eso según las variables”. En su respuesta se puede apreciar la importancia que le da al papel de las variables en el concepto de función, además del carácter didáctico de la representación visual.

Luego, al pedírsele que comparara ambos conceptos y tratara de diferenciarlos, su respuesta fue: “Tengo claro que en función está la variable dependiente e independiente mientras que al relacionar dos términos no necesariamente debe haber una variable dependiente e

independiente”. Ésta es una respuesta muy interesante al enfatizar implícitamente en la dependencia como factor diferenciador de los dos conceptos.

Al preguntársele con cual palabra asocia más cercanamente las palabras relación y función, se aprecia aún una cierta asimilación de ambos conceptos, al elegir en ambos casos la palabra variables. Asimismo, al pedírsele que elementos diferencian a una relación de una función, el joven se inclinó por la representación gráfica, pero sin hacer la claridad de que en la gráfica podía diferenciar ambos conceptos.

Analizando ahora su respuesta a la pregunta de cuál es su definición personal del concepto de función expuso: “función es la correspondencia de dos o más variables con relación a cualquier tema”. Es una definición muy general, que tiene la desventaja de no expresar la condición que se debe cumplir para que una relación sea función.

Finalmente, se le pidió que expresara cual era la forma de entender mejor el concepto de función: “Para mí, indiscutiblemente es fundamental la definición, porque si no tenemos claro que es una función no tenemos claro que tipos de ejercicios o problemas son funciones y también es fundamental la gráfica (...), es el complemento de toda función”. Debe reconocerse como el estudiante valora conocer y saber interpretar la definición de función en la solución de problemas, ya que eso facilita el abordaje de éstos, y una vez más, el elemento visual es parte importante de la comprensión del concepto.

6.6. Análisis global de las entrevistas finales.

En este apartado, se presentaran algunas apreciaciones generales respecto a los resultados obtenidos en el desarrollo de las entrevistas finales. En primer lugar, se debe destacar como se logró notar las diferencias entre la comprensión de los estudiantes casos de estudio, ya que

mientras algunos mostraron una comprensión elaborada de la definición, otros solo demostraron una comprensión básica o mínima de ella e incluso otros no presentaron ningún desarrollo de su comprensión de la definición de función.

En segundo lugar, cabe notar que en esta investigación, por ser de carácter cualitativo, se enfatiza en valorar las distintas comprensiones alcanzadas por los estudiantes, más allá de su adecuación a una única definición, sino más bien realizar una aproximación al proceso personal de apropiación de la definición de función por cada uno de los estudiantes participantes en la investigación.

Finalmente, es de notar el papel que juegan las entrevistas en la consecución de elementos para el análisis, ya que los documentos provenientes de los desempeños no fueron producidos por todos los alumnos, mientras que las entrevistas permiten garantizar que todos los jóvenes casos de estudio la realizaran, así como la posibilidad de mostrar resultados más valiosos gracias a una interacción más cercana con los entrevistados.

6.7. Discusión de los resultados.

En este apartado final del capítulo se presentan las conclusiones que se pueden extraer en cada uno de los casos de estudio (estudiantes analizados), de acuerdo a las entrevistas realizadas y los documentos derivados de los desempeños de comprensión, respecto a la comprensión del concepto de función alcanzada por cada uno de ellos.

Caso de estudio 1: Estudiante A1. En el caso de este joven se presentó una notable evolución en su comprensión de la definición de función, ya que inicialmente consideraba que una función era una relación entre dos términos que se relacionan o transforman entre sí, mientras que al final reconoce una función como dependencia, expresándolo como un par

acción-reacción, pero además de ello también considera el caso de una función como correspondencia, caso en el cual no es necesaria fórmula alguna.

En los desempeños su trabajo fue excelente, es un joven que analiza los ejercicios y los problemas de manera acertada, además de que ello fue determinante para su cambio de percepción respecto al concepto de función.

Se destaca su concienzudo proyecto final, en el que presentó una profunda reflexión acerca del concepto de función, lo que se vio reflejado en su entrevista final, en la cual afirmó, específicamente, que una función es una acción que conduce a una reacción, por medio de una fórmula o un proceso, aspecto éste último que permite apreciar su avance en la comprensión y su enfoque personal en la definición de función. Se puede concluir que su proceso de comprensión se vio beneficiado de la implementación de la unidad curricular bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión.

Caso de estudio 2. Estudiante A2. En este joven se debe destacar su comprensión de las diferentes representaciones de función, a las cuales se refiere constantemente al pedírsele que definiera función. Aunque parte de una escasa comprensión de la definición, logra avanzar en cierta medida, aunque prevalecen la confusión y la falta de claridad en sus respuestas.

En su definición de función expresada en la entrevista final, a pesar de ser poco clara, se debe valorar su reconocimiento de la importancia de las variables en el concepto de función. No obstante, persiste la confusión al expresar en ésta la necesidad de que exista un problema. Finalmente, a pesar de que se presentaron dificultades para lograr que el estudiante llegará a una expresión personal de la definición de función, se debe valorar el esfuerzo realizado por aprender un poco más del concepto, como es el caso de la diferencia entre relación y función.

Caso de estudio 3: Estudiante B1. La estudiante partió, en la entrevista inicial, de que una definición es desempeñar algo, mientras que respecto a la expresada en la entrevista final, se pudo notar una evolución, ya que enunció una función como una situación en que debe haber dos variables, una independiente y otra dependiente, y la una debe corresponder a la otra, lo cual permite apreciar una noción del papel de las variables y de la correspondencia como función.

Para terminar, se debe tener presente que su evolución pudo haber sido mayor si hubiera habido mayor responsabilidad de la estudiante hacia sus deberes escolares, lo cual puede demostrarse en los acertados ejemplos y resultados mostrados en los desempeños que realizó efectivamente.

Estudio de caso 4: Estudiante B2. A pesar de ser un joven bastante reflexivo y analítico, su evolución fue bastante irregular, además de que tampoco presentó todos los desempeños o en el caso del proyecto final, su trabajo fue bastante regular y descuidado. Desde su definición de función en la entrevista inicial hasta su definición en la entrevista final, no se podría hablar de una evolución en su comprensión de la definición de función, debido a la falta de claridad de ambas. No obstante lo cual, su trabajo en los desempeños fue bueno, presentando un adecuado reconocimiento de las variables involucradas en los problemas y la relación entre ellas, y destacándose su claridad en el reconocimiento de la existencia de relaciones directa e inversamente proporcionales.

Por otro lado, la mejor definición que enunció durante todo el trabajo se presentó en el tercer desempeño, en el que afirmo que una función es cuando hay dos conceptos, hay uno que le corresponde y complementa al otro y los dos conforman la función, y que se puede graficar, en la que se muestra un avance que después no se aprecia en la entrevista final. En conclusión, es un estudiante del cual se podrían haber obtenido mejores resultados, pero que por falta de

dedicación no se logró lo que se esperaba después de la realización de la unidad curricular, es decir, una comprensión más profunda y reflexiva de la definición de función.

Caso de estudio 5: Estudiante C1. Se puede apreciar un notable trabajo de este joven durante toda la unidad curricular y, como resultado de ello, una apreciable comprensión de la definición de función al final de aquella. A pesar de partir de una noción ambigua de función, como algo que se desarrolla mediante otras cosas, se llega a una definición en la entrevista final más reflexiva, enfatizando en la necesidad de que haya dos tipos de variable (independiente y dependiente) y en la correspondencia de un solo valor de la segunda por cada uno de la primera. Igualmente, se aprecian otras expresiones destacadas durante todos los desempeños, como en el segundo en el que expresó que para que se dé una función deben existir dos variables y una siempre va a depender de la otra.

Su comprensión del concepto es integral, como se puede apreciar de su proyecto final, que fue el mejor de los presentados, en el cual manifiesta que el concepto de función se puede aplicar a toda clase de situaciones para analizar el comportamiento de algo por medio de sus valores y usando gráficas, tablas, etc., lo cual muestra la importancia que le da a las aplicaciones en la comprensión del concepto. La conclusión es, en este caso, una notable evolución en su comprensión de la definición e incluso, en cierta medida, del concepto de función, aprovechando las oportunidades de aprendizaje que le brindaron los distintos desempeños propuestos en la unidad curricular.

Caso de estudio 6: Estudiante C2. Desafortunadamente, las continuas faltas de asistencia del joven obligan a depender casi exclusivamente de las entrevistas inicial y final que se le realizaron. Como en el caso de los demás jóvenes, su definición de función es bastante precaria en la entrevista inicial, comparándolo con simples cálculos matemáticos, mientras que en la

entrevista final se inclinó por la correspondencia de dos variables, pero no hay una profundidad en su análisis. En conclusión, poco desarrollo de la comprensión del concepto de función debido a su ausencia casi total durante el desarrollo de la unidad curricular y a su poca responsabilidad en la entrega del proyecto final de síntesis.

CAPITULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Entre las principales conclusiones que se derivan del desarrollo del presente trabajo de investigación se encuentran las siguientes:

En la exploración teórica se pudo descubrir la complejidad del concepto de función, dados los múltiples elementos involucrados, como son los de las aplicaciones, las distintas definiciones válidas posibles dependientes del enfoque con el que se asuman, como son los de dependencia y correspondencia. Incluso, se puede apreciar otro elemento, algo informal, pero valioso por su conexión con la realidad, como es el coloquial, en el cual se pueden explorar las distintas nociones semánticas de la palabra función, es decir, sus distintos usos en el habla cotidiana. Ello implicó que se decidiera enfocar el trabajo hacia la definición del concepto, como forma de delimitar el análisis posterior de los resultados, y tomando en cuenta que los demás elementos ayudan a enriquecer la comprensión de la definición de función.

La adaptación de los distintos elementos del concepto de función al marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión fue uno de los pasos más relevantes y que representaron un mayor reto para el desarrollo de la investigación, ya que los desempeños debían ser novedosos e interesantes para los estudiantes, que incluyeran todos los elementos del concepto de función y, además, que enfatizarán en la evolución de la comprensión de su definición. A pesar de algunas dificultades iniciales en su diseño, la unidad curricular fue bien recibida por los estudiantes, quienes manifestaron su agrado hacia las distintas actividades llevadas a cabo.

Respecto al objetivo general del trabajo de investigación, se puede apreciar, del análisis de las entrevistas y los documentos presentado en el capítulo anterior, una evolución significativa en la comprensión del concepto de función por parte de 2 (A1 y C1) de los 6 estudiantes tomados como casos de estudio, y en menor medida, por los estudiantes A2 y B2, puesto que se aprecia

una apropiación personal de la definición de función, la cual, a pesar de presentar imprecisiones, merece destacarse por el esfuerzo realizado para aproximarse a un concepto de tal complejidad como es el de función. Ello permite concluir, teniendo en cuenta el carácter de investigación exploratoria del trabajo de investigación, que la aplicación del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión es un buen medio para lograr una mayor comprensión, por parte de los alumnos, de la definición de función, debido a que ayuda a dirigir las actividades desarrolladas en clase hacia la consecución de dicho objetivo y a su énfasis en la importancia de la comprensión conceptual.

En general, debe apreciarse el potencial que tiene este marco para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos, ya que permite hacer del concepto el centro de la enseñanza (tópico generativo), al cual se accede por medio de desempeños que deben ir más allá de lo operativo y trascender hacia experiencias que se aproximen a las vivencias cotidianas de los estudiantes, los cuales deben estar enmarcados en la consecución de unas metas de comprensión explícitas y apoyados por una valoración continua y una realimentación constante del estado de la comprensión del concepto por parte del estudiante.

Por otro lado, debe reconocerse que la elección del tópico generativo implicó un reto significativo, ya que el concepto de función, a pesar de su importancia y riqueza que lo hacen ser de gran interés para todo estudiante, es uno de los más complejos de la educación básica secundaria y media, lo cual implicó que los desempeños elaborados quisieran abarcar sus múltiples elementos, como son la definición, en la cual se trató de hacer énfasis en el trabajo, las representaciones, las aplicaciones y las propiedades, lo cual conllevó a que, por momentos, se perdiera el foco de la investigación al pretender abarcar todos los distintos elementos del concepto de función.

Por último, un aspecto difícil conciliar durante el desarrollo del trabajo, fue la conexión entre el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión y la teoría existente desde la educación matemática acerca del concepto de función. Ello porque debe reconocerse que la Enseñanza para la Comprensión es un marco que no se especializa en la educación matemática, sino que puede ser usado en todas las áreas de enseñanza de la educación. Esta falta de especialización del marco conceptual planteo un reto importante para el desarrollo de este trabajo de investigación de Maestría, ya que debía conjugar la libertad que permite el marco conceptual con la rigurosidad en el tratamiento del concepto matemático desde la educación matemática, en la cual hay trabajos muy importantes elaborados sobre el concepto de función. Consideró haber solventado esta dificultad durante la elaboración final del trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Blatter, J. (2008). *Case study*. En L. Given (Ed.). *The Sage Encyclopedia of Qualitative Research Methods*, (pp. 68-71). Los Angeles: Sage.
- Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión*. Guía para el docente, Buenos Aires: Paidós.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.
- Carlson, M. and Oehrtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*. Research Sampler, MAA Online.
- DeMarois, P. & Tall, D. (1996). *Facets and layers of the function concept*. Valencia, Proceedings of PME 20, vol.2, p.297-304.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwert, p. 95-126.
- Eisenberg, T. (1991). *Functions and associated learning difficulties*. En D. Tall, (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwert, p. 140-152.
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York: Kluwer Academic Publishers, cap.17, p. 491-578.
- Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes, 25.

- Hays, P. (2004). Case Study Research. En K. deMarrais, & S. Laplan, (Eds). *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social sciences*, (pp.217-234). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación* (4a Ed.). México: McGraw Hill.
- Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of function. Texas: Trinity University Mathematics.
- Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function concept: A brief survey*. The College Mathematics Journal, 20(4), p. 282-300.
- Ruiz Higuera, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada. Jaén, España.: Universidad de Jaén, Colección Juan Pérez de Moya.
- Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes, 25.
- Vinner S (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical thinking*. Edited by David Tall. Kluwer Academic Publishers.
- Youshkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. En *Archive for history of exact sciences*. V. 16, No. 1. P. 37-85
- Wiske, M.S. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.

ANEXO A. DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN.

A.1. Desempeño de exploración no. 1: la definición de función y su relación con distintas expresiones coloquiales.

Meta de Comprensión No. 1: El estudiante desarrollará comprensión acerca de las distintas expresiones coloquiales relacionadas con la definición de función y cómo éstas ayudan a una mejor comprensión de dicha definición.

Definición de función asumida en la presente unidad curricular: El concepto de función ha sido definido de diversas formas por muchos matemáticos en el transcurso de los últimos siglos. De todas ellas nos centraremos en la siguiente, la cual enfatiza en aspectos cruciales para la comprensión del concepto de función:

“La característica esencial de una función o aplicación es la dependencia entre dos variables. Una función o aplicación está formada por:

a) Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.

b) Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.

c) Regla que asigna a cada elemento del conjunto de salida uno y solo uno del conjunto de llegada.” (Group Zero, 1981; citado en Azcarate y Delofeu, 1996)

Cabe mencionar aquí la definición clásica de Dirichlet, enunciada en 1837, que a pesar de expresarlo en forma diferente, mantiene la esencia de la anterior, y que afirma lo siguiente:

“y es una función de una variable x , definida en el intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y . También es irrelevante en qué forma esta correspondencia es establecida” (Kleiner, 1989, p.291)

En el presente desempeño de comprensión se utilizarán distintas expresiones y palabras asociadas a la de función, para comprender mejor su definición. Las actividades a realizar son las siguientes:

1. Escribe tres ejemplos de dependencia entre dos variables que puedas apreciar en tu vida cotidiana, dentro o fuera del colegio.

2. Escribe dos ejemplos en los que se exprese la correspondencia entre dos cosas.

3. Escribe dos ejemplos en los que se exprese una transformación, es decir, como un elemento se puede transformar en otro.

4. Escribe dos ejemplos en los que se exprese una relación del tipo: A más (ó menos).... más (ó menos)....

5. Escribe dos ejemplos en los que se exprese una relación del tipo: ... cómo función de ...

6. Escribe dos ejemplos en los que se exprese una relación del tipo: la (ó el)... de....

7. Escribe dos ejemplos en los que se aprecie la relación entre las operaciones aritméticas y el concepto de función.

8. Realizar una cartelera en la que escojan los mejores ejemplos (al menos dos) desde el punto de vista estético realizados por cada uno de los grupos.

Bibliografía:

- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). Funciones y Gráficas. Madrid, Síntesis.*
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, 20(4), p. 282-300.*

Valoración del desempeño de comprensión: Se evaluará el desempeño asignando una valoración del 60% a los primeros siete puntos del taller y del 40% al punto 8 correspondiente a la elaboración de la cartelera. La nota final del desempeño será ponderada de acuerdo a los distintos métodos de valoración utilizados así: 20% Autoevaluación, 30% Covaloración (realizada por los compañeros) y 50% Valoración por parte del profesor.

A.2. Desempeño de exploración no. 2: Las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función.

Meta de Comprensión No. 2: Los estudiantes desarrollarán comprensión acerca de las distintas aplicaciones del concepto de función a diversas situaciones de la vida diaria y a fenómenos científicos, y cómo éstas permiten comprender con mayor claridad la definición de función.

Lee y analiza detenidamente cada situación y responde las preguntas planteadas:

1. La tarifa que se paga cuando se viaja en taxi se compone de dos partes:

-El banderazo, que es el valor desde el que parte el taxímetro, que es de \$1900.

-Por cada kilómetro que recorre el taxi se debe pagar \$1000 en forma proporcional.

a) ¿Qué valor se debe pagar si la distancia recorrida por el taxi es de 3 kilómetros? ¿Y si es de 5 km? ¿Y si es de 7 km?

b) Construye una gráfica que te permita expresar la situación planteada en forma general.

c) Halla una fórmula (expresión analítica) que te permita hallar el valor de la carrera para cualquier distancia.

2. Modifiquemos la situación anterior para acercarla a la realidad. Como podemos ver en cualquier taxi de nuestra ciudad, por cada 78 metros el taxímetro aumenta su lectura en \$75, pero

sólo cuando se sobrepasa dicha cantidad de metros, no en forma continúa. El banderazo sigue siendo de \$1900, pero además el valor de la carrera mínima es de \$3900.

- a) A partir de que distancia se paga un valor superior al de la carrera mínima.
- b) ¿Qué valor se debe pagar si la distancia recorrida por el taxi es de 3 kilómetros (3000 metros)? ¿Y si es de 5.2 km? ¿Y si es de 7.5 km? Escribe tus respuestas en forma tabular.
- c) Trata de construir una grafica que te permita expresar la situación planteada en forma general.
- d) Trata de hallar una o varias fórmulas que te permitan hallar el valor de la carrera para cualquier distancia.

3. Un jugador de fútbol le pega el balón de forma tal que éste alcanza a superar una barrera de 2 metros ubicada a 10 metros del jugador. Si al pasar por la barrera, el balón alcanzó su altura máxima, para luego comenzar a descender, responde:

- a) ¿A qué distancia del jugador caerá al suelo el balón de fútbol? Realiza una gráfica o dibujo que te permita analizar la trayectoria del balón.
- b) Realiza una tabla en la que relaciones la altura que alcanza el balón y la distancia horizontal que recorre el balón. Explica cómo podrías entender la definición de función a partir de esta tabla.
- c) Trata de construir una fórmula que te permita describir el valor de la altura (y) dependiendo de la distancia horizontal (x) que recorre el balón.

4. Una población de conejos se caracteriza por crecer de la siguiente forma: al inicio hay dos conejos y cada mes dicha población se duplica.

- a) Construye una tabla que relacione el número de conejos con el tiempo transcurrido en meses (desde el mes 0 hasta el mes 5).

- b) Gráfica en el plano cartesiano los puntos de la tabla, uniéndolos con una curva.
- c) Trata de construir una fórmula que te permita describir la relación entre las dos variables involucradas en el ejercicio.

5. Tiempo de Reacción. Supongamos que mientras conduces un carro, ves un joven parado en mitad de la calle. Tu cerebro registra la información y envía una señal a tu pie para que apriete el freno. El carro recorre una distancia D , que es función de la velocidad r , antes de detenerse. Esa función es de la forma: $D(r) = 165/8 r + 15$, donde D es la distancia en centímetros que recorre el auto hasta detenerse y r es la velocidad en km/h del auto al momento de apretar los frenos.

- a) Halle la distancia que recorre un auto que va a 60 km/h
- b) Asimismo, para los casos en que el auto va a 70, 80, 90 y 100 km/h respectivamente.
- c) Organice los valores hallados en una tabla de valores.
- d) Grafica en el plano cartesiano la situación dada.
- e) Reflexiona que implicaciones tiene ello para ti como peatón.

6. Compara las distintas aplicaciones y escribe una conclusión que puedas extraer de la actividad, teniendo presente la definición de función asumida en esta unidad curricular, identificando las variables en cada problema, determinando cuál es la variable independiente y cuál la dependiente, los valores que pueden asumir y las características de las gráficas y las tablas construidas que permiten definir la relación entre dichas variables como una función.

A.3. Desempeño de investigación guiada no. 1: La historia de las matemáticas y la evolución del concepto de función.

Meta de Comprensión No.3: El estudiante desarrollará comprensión acerca de la evolución histórica del concepto de función y su influencia en la comprensión de la definición de función.

Lectura introductoria: ¿Qué es la matemática?

(Tomado del prólogo del libro “El lenguaje de las matemáticas” de Keith Devlin).

No son solo Números.

¿Qué es la matemática? Si le preguntas a personas al azar, es probable que te respondan “La Matemática es el estudio de los números”, e insistiendo un poco acerca de qué clase de estudio es, podrías inducirlos a describirla como “la ciencia de los números”. Pero eso es lo máximo que obtendrías. Y con eso, habrás obtenido una descripción de la Matemática que cesó de ser precisa ¡hace dos mil quinientos años! Dada tal idea equivocada de gran magnitud, hay escasamente duda alguna de que es improbable que estas personas se den cuenta de que la investigación en matemáticas es una actividad floreciente a nivel mundial, o acepten que la Matemática permea, a menudo a una extensión considerable, la mayoría de los ámbitos de vida y la sociedad de hoy.

En efecto, la respuesta a la pregunta “¿Qué es la Matemática?” ha cambiado varias veces durante el curso de la historia. Hasta alrededor de 500 A.C., la Matemática era en verdad el estudio de los números. Este era el período de la Matemática en Egipto y Babilonia. En esas civilizaciones, la Matemática consistió casi solamente de aritmética. Era en gran medida utilitaria, y similar a un libro de cocina (Haga tal y tal a un número y conseguirás la respuesta).

El período desde cerca de 500 A.C. hasta 300 D.C. fue la era de la Matemática Griega. Los matemáticos de la antigua Grecia estaban preocupados principalmente con la geometría. En verdad, ellos consideraron los números en una manera geométrica, como medidas de longitud, y cuando ellos descubrieron que habían longitudes para las cuales sus números no correspondían

(longitudes irracionales), su estudio del número se detuvo en gran medida. Para los griegos, con su énfasis en la geometría, la matemática era el estudio del número y la forma.

En efecto, fue sólo con los griegos que la Matemática llegó a ser un área de estudio, y dejó de ser una colección de técnicas para medir, contar y contabilizar. El interés de los griegos en la Matemática era no solo utilitario; ellos consideraron la Matemática como una búsqueda intelectual que tiene elementos estéticos y religiosos. Tales introdujo la idea de que afirmaciones, declaradas en forma precisa, de la Matemática podían ser lógicamente probadas mediante un argumento formal. Esta innovación marcó el nacimiento del teorema, ahora la piedra angular de la Matemática. Para los griegos, esta aproximación culminó en la publicación de los Elementos de Euclides, según se dice el libro de más amplia circulación de todos los tiempos después de la Biblia.

Matemáticas en Movimiento.

No hubo cambios importantes en la naturaleza en conjunto de la Matemática, y difícilmente hubo avances significativos dentro de ella, hasta mediados del siglo XVII, cuando Newton (en Inglaterra) y Leibniz (en Alemania) inventaron en forma independiente el Cálculo. En esencia, el cálculo es el estudio del movimiento y el cambio. La matemática previa había estado restringida, en gran medida, a los problemas estáticos de contar, medir y describir la forma. Con la introducción de técnicas para manejar el movimiento y el cambio, los matemáticos fueron capaces de estudiar el movimiento de los planetas y de cuerpos que caen en la tierra, el funcionamiento de maquinaria, el flujo de líquidos, la expansión de gases, fuerzas físicas como el magnetismo y la electricidad, los vuelos, el crecimiento de plantas, el esparcimiento de epidemias, la fluctuación de los beneficios, etc. Después de Newton y Leibniz, la matemática llegó a ser el estudio del número, la forma, el movimiento, el cambio y el espacio (...)

Preguntas de Comprensión:

1. ¿La lectura de este texto cambió en algo tu forma de pensar acerca de las Matemáticas?
2. Más adelante, en el texto de Keith Devlin, se define la Matemática como La Ciencia de los Patrones o Regularidades, ya que lo que hace un matemático es examinar patrones abstractos- patrones numéricos, patrones de forma, patrones de movimiento, patrones de comportamiento, patrones de votación en una población, etc. ¿Puedes ver alguna relación entre el concepto de función y la definición de la Matemática dada por el autor?

Lectura principal: Historia del concepto de función. El desarrollo de su definición.

Si tratáramos hoy de contestar a la difícil pregunta '¿qué son las matemáticas?' muchas veces respondemos algo como 'El estudio de las relaciones entre conjuntos' o 'El estudio de las dependencias entre cantidades variables'. Si estas afirmaciones son cercanas a la verdad, entonces sería lógico sugerir que el concepto de función debe haber aparecido desde las primeras etapas del desarrollo de las matemáticas. Ciertamente, si vemos las matemáticas babilónicas encontramos tablas de cuadrados de los números naturales, cubos de los números naturales y recíprocos de los números naturales. Estas tablas sin duda definen funciones de N sobre N o de N sobre R . E. T. Bell escribió en 1945:

Puede no ser demasiado generoso dar crédito a los antiguos babilonios de tener el instinto de función; ya que una función ha sido definida sucesivamente como una tabla o como una correspondencia.

Si avanzamos hasta las matemáticas griegas entonces llegamos al trabajo de Ptolomeo. Él computó cuerdas de un círculo lo que esencialmente quiere decir que computó funciones trigonométricas. Seguramente, uno podría pensar que, si estaba calculando funciones

trigonométricas, entonces Ptolomeo debe haber comprendido el concepto de función. No obstante, puede afirmarse que, aunque Ptolomeo lidió con las funciones, es poco probable que comprendiera el concepto de función.

Galileo estaba empezando a entender el concepto aún con mayor claridad. Sus estudios sobre el movimiento contienen la clara comprensión de una relación entre variables. Casi al mismo tiempo que Galileo llegaba a estas ideas, Descartes introducía el álgebra a la geometría en *La Géométrie* (La geometría). Afirma que una curva puede dibujarse al permitir que una línea tome sucesivamente un número infinito de valores distintos. Lo cual de nuevo lleva el concepto de función a la construcción de una curva.

Detengámonos por un momento antes de llegar a la primera vez que se usó la palabra 'función'. Es importante entender que el concepto se desarrolló con el paso del tiempo; su significado fue cambiando y también fue siendo definido con mayor precisión a través de los años. Ya hemos sugerido que una tabla de valores, aunque defina una función, no es pensada necesariamente por su creador como una función. Los primeros empleos de la palabra 'función' sí encapsulaban ideas del concepto moderno pero de manera mucho más restrictiva.

Como tantos términos matemáticos, la palabra función fue usada por primera vez con su significado no matemático. Leibniz fue el primer matemático en utilizar la palabra función en 1692. Usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que “una tangente es una función de una curva”.

Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz escrita el 2 de septiembre de 1694, describe una función como:

[...] una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes.

Era un concepto cuya introducción sucedió en el momento ideal en lo que respecta a Johann Bernoulli ya que estaba estudiando problemas de cálculo de variaciones en cuyas soluciones aparecen funciones.

Se puede decir que en 1748 el concepto de función saltó a la fama en matemáticas. Esto se debió a Euler, quien publicó *Introductio in analysin infinitorum* en el año en que hace central el concepto de función en su presentación del análisis. Euler definió una función en el libro como sigue:

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.

Todo esto está muy bien pero Euler no da una definición de 'expresión analítica' sino que supone que el lector entenderá que significa expresiones formadas por las operaciones comunes de suma, multiplicación, potencias, raíces, etc. Euler permitió que las operaciones algebraicas de sus expresiones analíticas aparecieran un número infinito de veces, dando como resultado series infinitas, productos infinitos y fracciones continuas infinitas. Sin embargo, había una dificultad en el trabajo de Euler que generaría confusión, ya que no logró distinguir entre una función y su representación analítica (como fórmula). No obstante, *Introductio in analysin infinitorum* cambiaría la manera en que los matemáticos piensan sobre conceptos familiares. Jahnke escribe:

Hasta Euler las cantidades trigonométricas seno, coseno, tangente, etc. se consideraban como líneas relacionadas con el círculo más que como funciones. [...] Fue Euler quien introdujo el acercamiento funcional.

En 1755 Euler publicó otro libro muy importante, *Institutiones calculi differentialis*. En este libro definió una función de manera totalmente general, dando lo que podemos razonablemente afirmar que era una definición verdaderamente moderna de función:

Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas. Esta definición se aplica de manera más bien amplia e incluye todas las formas en que una cantidad puede ser determinada por otra. Si, por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x de cualquier modo, o que son determinadas por ella, son llamadas funciones de x .

Esto podría haber sido un gran logro pero, después de dar esta amplia definición, Euler dedicó el libro al desarrollo del cálculo diferencial usando solamente funciones analíticas.

Cauchy, en 1821, dio una definición que hace de la dependencia entre variables el centro del concepto de función. Escribió en *Cours d'analyse*:

Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que dado el valor de una de ellas, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable.

Nótese que a pesar de la generalidad de la definición de Cauchy, aún piensa en una función en términos de una fórmula. Fourier, en *Théorie analytique de la Chaleur* en 1822, dio la siguiente definición:

En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dada una infinidad de valores de la abscisa x , hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola.

Está claro que Fourier ha dado una definición que se aleja deliberadamente de las expresiones analíticas. En 1837 Dirichlet definió función de la siguiente forma:

“y es una función de la variable x , definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y . Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia.”

Hasta ese momento, las funciones se concebían como expresiones analíticas o curvas, y es Dirichlet quien, por primera vez, considera a una función como una “correspondencia”. Presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica o curva que la represente. Es el primer ejemplo que ilustra el concepto de función como una correspondencia arbitraria, y se expresa de la siguiente manera: $f(x)$ definida como 0 si x es racional y 1 si x es irracional.

En 1838, Lobachevsky dio una definición de una función general que todavía necesitaba que ésta fuera continua:

Una función de x es un número que está dado para cada x y que cambia gradualmente junto con x . El valor de la función puede estar dado mediante una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida.

Sin duda la función discontinua en todos los puntos de Dirichlet no sería una función bajo la definición de Lobachevsky, lo cual parece indicar un retroceso en el desarrollo de la definición de función

Alrededor de esa época se construyeron muchas funciones patológicas (raras, extrañas). Poincaré estaba a disgusto con la dirección que había tomado la definición de función. En 1899 escribió:

Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas que parecen forzadas a parecerse lo menos posible a las funciones honestas que sirven a algún propósito. [...] Antes, cuando se inventaba una nueva función era con una meta práctica. Hoy son inventadas a propósito para mostrar que el razonamiento de nuestros ancestros fallaba y nunca obtendremos más que eso de ellas. Si la lógica fuera la única guía del profesor, tendría que empezar por lo más general, es decir, las funciones más estrambóticas.

¿De dónde han tomado el concepto las definiciones más modernas? Goursat, en 1923, dio la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día:

Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y . Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.

El grupo Bourbaki, en 1939, definió función como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837:

Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F , se llama relación funcional en y , si para todo x en E , existe un único y en F el cual está en la relación dada con x . Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en

relación con x , se dice que y es el valor de la función en el elemento x , y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función.

Bourbaki también formuló una definición de función equivalente, como un conjunto de pares ordenados. En sus palabras:

“una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano $E \times F$ ”

Preguntas de comprensión:

3. ¿Se puede trabajar con algo sin comprenderlo bien? Por ejemplo, ¿puedes trabajar con desigualdades sin comprender bien el concepto de desigualdad? Escribe un ejemplo similar.

4. El plano cartesiano es una poderosa herramienta para la representación gráfica de funciones. ¿qué matemático crees que lo descubrió y qué ramas de la matemática relacionó?

5. En el texto hay un gran número de definiciones del concepto de función. ¿Cuál consideras que es, para ti, la definición más clara de función y por qué?

6. En el texto se encuentran dos definiciones de función dadas por Euler. Inventa una explicación de que le llevó a cambiar su definición de función en tan corto tiempo (1748 a 1755).

7. Puedes ver en el texto cómo se ha ido desarrollando históricamente el concepto de función, desde visiones que lo asociaban a una tabla, una curva o a una fórmula hasta las formulaciones modernas que hacen énfasis en la dependencia y la correspondencia entre conjuntos. ¿Por qué crees que se consideran mejores las definiciones modernas que las primeras asociadas a sus representaciones?

8. ¿Sería posible graficar en el plano cartesiano la función de Dirichlet? Si no es posible graficarla, ¿crees que podría seguir llamándosele función?

9. Poincaré se quejaba del rebuscamiento de los matemáticos de las funciones más extrañas e inútiles posibles. ¿Te has sentido alguna vez así respecto a las matemáticas que ves en el colegio? Describe una experiencia relacionada.

10. La definición de función que se tomó como base para el trabajo con los desempeños anteriores es similar a la primera definición de Bourbaki. Compáralas usando tus propias palabras.

11. Cual consideras más apropiada, la definición de función como dependencia o la definición de función como correspondencia, y por qué.

12. Inventa una definición personal de función usando tus propias palabras.

Nota: El trabajo será valorado más por su originalidad y creatividad que por su exactitud y rigurosidad, es decir, no hay respuestas buenas o malas, sino respuestas más originales, creativas y reflexivas que otras.

A.4. Desempeño de investigación guiada no. 2: las aplicaciones del concepto de función y su papel en la comprensión del concepto de función.

A. Tópico generativo de la unidad curricular desarrollada bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión:

Si comprendo su definición, se me hará fácil comprender el concepto de función.

B. Metas de comprensión.

Meta de comprensión No. 2: Los estudiantes desarrollarán comprensión acerca de las distintas aplicaciones del concepto de función a diversas situaciones de la vida diaria y a fenómenos científicos, y cómo estas permiten comprender con mayor claridad la definición de función.

Meta de comprensión No. 3. Los estudiantes desarrollarán comprensión acerca de: las diversas representaciones del concepto de función y cómo podemos visualizar la definición de función en cada una de ellas.

C. Actividades del desempeño.

Resuelve las siguientes aplicaciones del concepto de función, enfatizando en el proceso para llegar a la respuesta más que en el resultado en sí:

1. Los estudiantes del grado 11 de la I.E. Alcaldía de Medellín están buscando alternativas para recaudar fondos para la realización de su fiesta de graduación, conocida comúnmente como “Prom”. Una de ellas es la realización de un evento de Hip-Hop y Reggaetón, para el cual se venderían las boletas de entrada a \$5000 cada una. Para calcular las ganancias del evento debe tenerse en cuenta que los costos que se deben asumir para su realización son de \$300 000. Con base en los datos anteriores responda las siguientes preguntas:

a) ¿De qué dependen las ganancias del evento? Explícite claramente cuáles son la variable independiente y la variable dependiente.

b) Calcular las ganancias obtenidas si el número de boletas vendidas es de 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350 y 400, respectivamente. Organice los datos en una tabla y gráfíquelos en el plano cartesiano.

c) ¿A partir de qué número de boletas se empieza a obtener ganancias en el evento?

d) Si se desea obtener al menos \$900 000 en ganancias, ¿cuál es el número mínimo de boletas que se deben vender?

e) Trate de determinar una fórmula o expresión analítica que le permita generalizar la situación dada.

f) ¿Es esta situación un ejemplo de función? Explique su respuesta.

2. Uno de los deportes más populares a nivel mundial son las carreras de autos. Entre las competencias más destacadas están la Fórmula 1 y la NASCAR. Ésta última, dónde compite el colombiano Juan Pablo Montoya, se caracteriza por ser realizada con carros similares a los que circulan por las calles de nuestras ciudades. Una de las pruebas más famosas de la NASCAR es la Daytona-500, llamada así porque los corredores deben cubrir una distancia de 500 millas. El tiempo y la velocidad promedio del ganador de la prueba varía de año a año.

a) En 1997, Jeff Gordon la ganó con una velocidad promedio de 148 millas por hora, mientras que al año siguiente Dale Earnhardt lo hizo con una velocidad promedio de 173 millas por hora. ¿Cuál fue la diferencia en el tiempo de carrera de estos dos conductores?

b) Calcular el tiempo de carrera de un conductor que corre dicha prueba con una velocidad promedio de 50, 75, 100, 125, 150, 175 y 200 millas por hora respectivamente. Organice los datos en una tabla y grafique en el plano cartesiano.

c) Trate de obtener una fórmula o expresión analítica que le permita hallar el tiempo de carrera para diferentes velocidades promedio desarrolladas.

d) ¿Es esta situación un ejemplo de función? Explique su respuesta.

3. Compare ambas situaciones y explique qué similitudes y diferencias encuentra entre ambas, teniendo en cuenta sus fórmulas, tablas, gráficas y los valores que pueden tomar las variables dependientes e independientes en cada uno de los casos.

Valoración continua: Al realizar la actividad ten presente que tu trabajo será valorado no solo por los resultados que obtienes y su precisión, sino por el proceso de elaboración del desempeño y la forma en que realizas la actividad. La buena presentación es importante para la comprensión de las actividades desarrolladas.

Además, recuerda que el profesor te ayudará a resolver las dudas más importantes que tengas, pero tú eres el responsable de tu trabajo, por lo tanto asume esta responsabilidad con madurez y autonomía, evitando hacer preguntas innecesarias o inadecuadas, por lo cual debes leer muy detenidamente las actividades y preguntas planteadas antes de comenzar. No te preocupes por los errores en que puedas incurrir, lo más importante es que te esfuerces por hacer un trabajo independiente en donde se pueda ver tu análisis personal de las situaciones planteadas.

Por último, trata de tener como guía para el desarrollo de tu trabajo las metas de comprensión enunciadas, así como el tópico generativo, ya que del logro de estas metas dependerá en gran medida la valoración que obtengas por tu trabajo.

A.5. Proyecto final de síntesis.

Unidad curricular: El Concepto de Función.

A. Tópico generativo de la unidad curricular desarrollada bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión:

Si comprendo su definición, se me hará fácil comprender el concepto de función.

B. Metas de comprensión.

Meta de comprensión No. 1: El estudiante desarrollará comprensión acerca de las distintas expresiones coloquiales relacionadas con la definición de función y cómo estas ayudan a una mejor comprensión de dicha definición.

Meta de comprensión No.2: El estudiante desarrollará comprensión acerca de la evolución histórica del concepto de función y su influencia en la comprensión de la definición de función.

Meta de comprensión No. 3: Los estudiantes desarrollarán comprensión acerca de las distintas aplicaciones del concepto de función a diversas situaciones de la vida diaria y a fenómenos científicos, y cómo estas permiten comprender con mayor claridad la definición de función.

Meta de comprensión No.4: Los estudiantes desarrollarán comprensión acerca de las diversas representaciones del concepto de función y cómo podemos visualizar la definición de función en cada una de ellas.

Meta de comprensión No. 5: Los estudiantes desarrollarán comprensión acerca de las propiedades del concepto de función y su relación con la definición de función.

C. Actividades del desempeño.

Realizar, en forma individual, un trabajo de síntesis que demuestre tu comprensión del concepto de función y el cual contenga:

1. Dos ejemplos de aplicación del concepto de función, los cuales pueden ser de un campo científico o una situación cotidiana.
2. Representar cada ejemplo en forma gráfica (plano cartesiano), tabular y analítica (fórmula).

3. Analizar las propiedades de cada ejemplo (dominio y rango, inyectiva, biyectiva y sobreyectiva).

4. Realizar un escrito de al menos una página en el cual analices la relación entre los ejemplos desarrollados y la definición del concepto de función.

5. Mostrar un ejemplo de una relación que no sea función y explicar por qué no se ajusta a la definición de función.

6. Escribir un ensayo de al menos dos páginas en la que realices un análisis lo más completo posible de la comprensión alcanzada de cada una de las metas de comprensión estudiadas en la unidad curricular.

D. Valoración continua.

En la valoración del ensayo se tendrá en cuenta la presentación del trabajo (20%), su originalidad (20%), el adecuado desarrollo de cada una de las actividades (5% cada uno de los primeros 4 puntos y 10% el punto 5), en especial el ensayo final que presenta tus conclusiones de la unidad curricular (30%) y la puntualidad en su entrega (Fecha límite: 12 de noviembre).

Recuerda que ante las dudas que surjan en la elaboración de tu trabajo, tendrás la posibilidad de recibir retroalimentación no solo del profesor, sino de tus compañeros de grupo o de otros grupos de grado XI. Trata de ser lo más independiente y autónomo posible, recuerda que el plagio de los puntos 4 y 6 implicará la anulación de todo el trabajo.

Por último, trata de tener como guía para el desarrollo de tu trabajo las metas de comprensión enunciadas, así como el tópico generativo, ya que del logro de estas metas dependerá en gran medida la valoración que obtengas por tu trabajo.

ANEXO B. ENTREVISTAS.

B.1. Guión de entrevista inicial.

1. ¿Cuál es tu opinión acerca de las matemáticas?
2. ¿Qué temas te han gustado o te han llamado la atención de los que te han enseñado en la clase de matemáticas durante los últimos años, y por qué?
3. ¿Qué recuerdas acerca del tema de función, que te deben haber enseñado en los grados anteriores? Cuéntame con tus palabras que entendiste sobre el tema.
4. ¿Qué ideas, palabras o frases se te vienen a la mente cuando escuchas la palabra función? Trata de darme algún ejemplo de la vida real dónde se pueda hablar de función.
5. Te voy a dar un ejemplo simple de una aplicación de una función a un fenómeno físico: tu hermano sale a trotar todos los días, pero algunos días trota veinte minutos, y otros días cuarenta minutos. Si siempre trota a la misma velocidad, 6 km/h, entonces algunos días recorre 2 km, y los otros días 4 km. ¿Comprendes la relación que hay entre el tiempo que trota y la distancia que recorre?
6. ¿Podrías darme un ejemplo diferente con una relación similar o diferente?
7. El año pasado, cuando estabas en grado décimo y estudiaste trigonometría, ¿qué relación había entre un ángulo cualesquiera y el seno de dicho ángulo? ¿Qué proceso estaba implícito en dicha relación?
8. ¿Recuerdas los nombres de algunos tipos de funciones que hayas visto en los grados anteriores en clase de matemáticas, y si es así, cuáles recuerdas?

9. ¿Podrías darme alguna definición acerca de lo que es una función en matemáticas, usando tus propias palabras?

B.2. Guión de entrevista final.

1. Preguntas de entrada: ¿Cómo ha sido tu experiencia, en general, con la unidad curricular desarrollada en clase sobre la comprensión del concepto de función?; ¿Cómo te sentiste en el desarrollo de los distintos desempeños acerca del concepto de función?

2. ¿Cuál es la primera imagen que se te viene a la mente al escuchar la palabra relación?

3. ¿Cuál es la primera imagen que se te viene a la mente al escuchar la palabra función?

4. ¿Encuentras similitudes o diferencias entre tu forma de entender una relación y entender una función?

5. ¿Podrías sugerir ejemplos de relaciones?

6. ¿Podrías sugerir ejemplos de funciones?

7. ¿Encuentras similitudes o diferencias entre los ejemplos que colocaste anteriormente para relaciones y funciones?

8. ¿Con cuál de las siguientes palabras asocias en mayor medida el concepto de relación: Tabla de valores, gráfica en el plano cartesiano, fórmula, variables, correspondencia, otra, ¿cuál?

9. ¿Con cuál de las siguientes palabras asocias en mayor medida el concepto de función: Tabla de valores, gráfica en el plano cartesiano, fórmula, otra, ¿cuál?

10. ¿Con cuál de las siguientes expresiones asocias en mayor medida la definición de función: dependencia, correspondencia, transformación, otra, ¿cuál?

11. ¿Cuál o cuáles serán los elementos que diferencian a una relación de una función?

12. ¿Cuál es tu definición particular de función, es decir, que entiendes por función?

13.¿Comprendes la diferencia entre una situación que se puede definir como función y una que no?/

14.¿Qué consideras necesario para que se pueda hablar en una situación determinada de una aplicación del concepto de función?

15.¿Es importante, para ti, la definición para comprender mejor el concepto de función, o consideras que hay otros medios más eficientes para llegar a una mejor comprensión (fórmula $y=f(x)$, tabla de valores, gráfica, aplicaciones o situaciones problema, variables dependiente e independiente, etc.)?