Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local

Informe final

Ledys Llasmin Salazar Gómez
Universidad de Antioquia - Unversidad EAFIT

Febrero de 2011

Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local

Este trabajo se enmarca en el programa de Maestría en Educación, con énfasis en la Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia en convenio con la Universidad Eafit

Ledys Llasmin Salazar Gómez

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Educación, con énfasis en Educación Matemática.

Asesor

Ph. D. Pedro Vicente Esteban Duarte

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Departamento de Educación Avanzada

Medellín
2011

Estoy satisfecho con el misterio de la eternidad de la vida y con el conocimiento, el sentido, de la maravillosa estructura de la existencia. Con el humilde intento de comprender aunque más no sea una porción diminuta de la razón que se manifiesta en la naturaleza ...

Albert Einstein

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En el Auditorio Luis Javier García Isaza del Museo Universitario de la Universidad de Antioquia, se reunieron por videoconferencia los profesores Pedro Vicente Esteban Duarte (Presidente del jurado), Pedro Campillo Herrero y Jorge Enrique Fiallo Leal, en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación: "*Fases de Aprendizaje en el Contexto de Van Hiele para el Concepto de Continuidad Local*" presentado por la estudiante **LEDYS LLASMÍN SALAZAR GÓMEZ**, de la Sexta Cohorte de la Maestría en Educación, línea Educación Matemática, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO,** por unanimidad, luego la profesora Patricia Parra Moncada, Miembro del Comité de Maestría, dio a conocer el resultado.

Al trabajo de investigación que mereciere ser destacado, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Meritorio:
X Sobresaliente:

Medellín, 1 de junio de 2011

Pedro V. Esteban D.
PEDRO VICENTE ESTEBAN D.
Presidente del Jurado

JORGE ENRIQUE FIALLO L.
Jurado

PATRICIA PARRA MONCADA
Miembro del Comité de Maestría

Consideramos el trabajo sobresaliente porque aporta al campo de la educación matemática, en cuanto amplía el estudio realizado en una primera etapa (descriptores de nivel) y hace un aporte a los educadores de básica y media.

Agradecimientos

El proceso de formación personal que posibilitó el desarrollo del proyecto de grado estuvo siempre acompañado por el doctor Pedro Vicente Esteban Duarte, quien con incondicional entregra, hizo posible la obtención de esta meta que hoy representa un gran aporte a nivel personal y académico para mi vida, a él reitero mis sentimientos de gratitud.

Agradezco al doctor Carlos Mario Jaramillo, a mi familia y amigos por su apoyo absoluto durante todos los momentos que hicieron parte del proceso, pues fueron ellos con su compañía y entrega, quienes apoyaron la construcción del trabajo investigativo.

Resumen

El interés por la formación de los estudiantes en el ámbito de las Matemáticas, se ha analizado con profundidad en los últimos años, con el fin de mejorar el desempeño de ellos en dicha asignatura, donde la Educación Matemática, ha contribuido con aportes de carácter teórico y metodológico, en aras de optimizar el rendimiento académico de los estudiantes.

La Educación Matemática y las investigaciones que a ella se articulan, dan cuenta de elementos de carácter teórico y metodológico que permean constantemente los contextos educativos y que exigen a los docentes, nuevas formas de enseñanza.

En cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje de los educandos, la presente investigación se desarrolla en este sentido, dado que presenta una forma alternativa que permita a los estudiantes la comprensión de los conceptos. Allí se articula el modelo educativo de van Hiele en su aspecto prescriptivo, con la enseñanza de uno de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, el concepto de continuidad local, a través de la implementación y el desarrollo de un conjunto de actividades que generan procesos de razonamiento en los estudiantes con el fin de promoverlos de un Nivel II a un Nivel III de razonamiento.

El conjunto de actividades que los estudiantes desarrollan se estructuran en un Módulo de Aprendizaje, el cual está articulado al modelo seleccionado y es construido en correspondencia con los descriptores de fases correspondientes, los cuales se enfocan en describir el conjunto de desempeños que los estudiantes deben desarrollar en cada momento de su trabajo. Adicionalmente, el Módulo de Aprendizaje emplea en el desarrollo de sus actividades diferentes estrategias como: Interacción con materiales, manipulación de aplicaciones en Geogebra, elaboración de mapas conceptuales y solución de cuestionarios; cuyo propósito es posibilitar la caracterización de los procesos de razonamiento que los estudiantes llevan a cabo, donde se de cuenta de su estructura mental y las redes de relaciones elaboradas respecto al concepto objeto de estudio.

Posteriormente, el desarrollo del trabajo se enfoca en el análisis de cada uno de los procesos de razonamiento de tres casos particulares, donde se describe cada una de sus categorías en correspondencia con las fases de aprendizaje y donde se hace explícito como razonan los estudiantes en su paso del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

El concepto de continuidad local

El Análisis Matemático se basa en la comprensión de los conceptos de límite y de continuidad, desarrollados a partir del siglo XVII, con los trabajos realizados por Descartes, Euler, Newton, Cauchy, Weierstrass, Bolzano, entre otros. Nuevas aplicaciones de estos conceptos surgen cada día, a partir de las investigaciones en las que son aplicados para comprender nuevos aspectos de la Matemática misma o de fenómenos estudiados por otras Ciencias.

En el estudio de las funciones que modelan diferentes fenómenos de la naturaleza, es importante saber si son continuas en todo su dominio o en qué puntos localmente, cumplen o no, con esta propiedad. Es por ello, que la comprensión del concepto de continuidad local desde los últimos años de bachillerato y primeros semestres de Universidad es fundamental para que los estudiantes avancen en el estudio de los cursos de Cálculo, Física, Química y otras materias propias de la formación en las carreras científicas y técnicas.

La definición de continuidad local se le presenta a los estudiantes de diferentes formas: (i) verbal, en la que se expone a partir de ejemplos, que no le permiten al estudiante crear un concepto imagen adecuado, (ii) algebraica, que es como se encuentra en los textos de Cálculo, en los que se fracciona en tres partes y que aparece ante los alumnos como una aplicación directa de la definición de límite, y (iii) formal, definida a partir del control de distancias, haciendo uso de la notación (ε, δ). La tercera forma de presentación, le permite a los estudiantes crear un adecuado concepto definición, pero en los primeros años de escolaridad sólo se presentan las dos primeras.

Desde el punto de vista pedagógico, presentar a los estudiantes la defineión formal, requiere del diseño de instrumentos adecuados que involucren el control de errores a partir de las distancias involucradas en la definición. Esto se logra con la ayuda de *software* adecuado como el Derive ®, el GeoGegra ®, entre otros. Para determinar el nivel de razonamiento que adquieren los alumnos, se pueden involucrar modelos educativos que describan el nivel de razonamiento o comprensión que adquieren los estudiantes con respecto a un concepto matemático.

A continuación se presenta la justificación del presente estudio, aspectos del desarrollo histórico del concepto de continuidad y la forma como se expone en algunos textos de bachillerato y de Cálculo que se estudian a nivel Universitario en Colombia.

1.1. Justificación

En educación se pueden considerar aspectos de carácter teórico, metodológico y práctico que hacen parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, de acuerdo con las necesidades y condiciones de cada población, lugar y situación. Luego, la Educación Matemática y las investigaciones que de ella se desprenden pueden ser un fundamento para la enseñanza y/o el aprendizaje de las mismas, considerando que éstas no sólo se deben limitar a fundamentar teorías, sino que deben aportar a las experiencias formativas y contribuir con las prácticas educativas. Por lo tanto, es necesario analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los educandos, puesto que estos se deben articular al contexto donde se llevan a cabo las prácticas educativas. Además, para la enseñanza de un concepto matemático se deben tener en cuenta aspectos que involucren niveles de comprensión que pueden alcanzar los alumnos al finalizar un proceso educativo.

Por consiguiente, es necesario generar experiencias agradables de aprendizaje en las aulas de clase, para fortalecer la asimilación de los conceptos matemáticos expuestos a los estudiantes y, no exponerlos a esquemas y formas de enseñanza que los lleven a concebir la matemática como algo distante a su forma de vida o de su entorno. Para ello, se deben tener en cuenta las diferentes formas en las que los seres humanos se motivan a aprender conceptos nuevos.

Los estudiantes razonan de acuerdo con sus estructuras mentales, estas han sido construidas a partir de sus experiencias previas de aprendizaje. Por ello es necesario, ayudarles a expandirlas y fortalecerlas con actividades que les ayuden a potenciarlas. Una forma de ayudarle a los alumnos a alcanzar esta meta es impartir la instrucción con base en las Fases (Sección 2.6.2, p. 29) de Aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele, que estructuran la enseñanza de tal forma que los alumnos pueden progresar a niveles de razonamiento más avanzados, de acuerdo con el mismo modelo. En el presente trabajo de investigación, se desarrolla un Módulo de Aprendizaje con base en las Fases, para ayudarle a los alumnos a progresar del Nivel II al Nivel III (Sección

2.6.1, p. 28) del modelo, tomado como base teórica para el diseño metodológico. A continuación se exponen aspectos relacionados con el concepto de continuidad local.

1.2. El concepto de infinito

En los últimos años, la educación colombiana ha desarrollado nuevas técnicas y alternativas que sustentan el currículo, particularmente el currículo matemático, con el fin de lograr que los estudiantes aprendan las temáticas correspondientes a las asignaturas de Matemáticas. Sin embargo, en diferentes contextos escolares persisten vacios conceptuales, los que se reflejan en la necesidad de comprender algunos tópicos, dado que no se profundiza en la naturaleza y esencia de los conceptos, sino en su aspecto operativo, en especial en el campo del Cálculo y del Análisis Matemático.

En el ámbito del Cálculo y del Análisis Matemático, conceptos como: Límite, derivada, integral, infinito, continuidad, entre otros, constantemente son abordados en clases desde su aspecto operativo, sin profundizar en la definicón de los mismos, lo cual se ve reflejado en situaciones donde se solicita al estudiante aplicarlo a oros contextos y entablar relaciones entre ellos.

Respecto al concepto de infinito y continuidad local, se puede decir que a través de los años, han estado intímamente relacionados y que su desarrollo histórico ha estado permeado por las condiciones de ambos, donde aún continuan vacios conceptuales que generan incertidumbre cuando se trata de definirlos.

El Análisis Matemático, como ciencia que aborda la constitución del cuerpo de los números reales, articula el concepto de infinito a la explicación de algunos teoremas sobre la constitución de dicho conjunto numérico, adicionalmente, no solo en este campo es utilizado el concepto de infinito, momentos posteriores al desarrollo del Cálculo en el siglo XVII, ilustraron como el infinito fue utilizado para definir conceptos de áreas del Análisis Matemático como: ecuaciones diferenciales, ecuaciones en derivadas parciales, series de Fourier, entre otros, que fueron definidos por diferentes autores a lo largo de la historia y a su vez se enmarcaron en las controversias y necesidades de cada una de las épocas.

Autores como: Platón, Pitágoras, Zenon, Galileo, Pascal, Hilbert, entre otros, realizaron aportes a la definición del infinito y lo trabaron en sus obras; al repecto Hilbert afirma, en su ensayo acerca del infinito, que “En cierto sentido, el Análisis Matemático no es sino una sinfonía del infinito”, así mismo, menciona que “En ese sentido aparecen los conceptos clave del análisis infinitesimal: Derivada, diferencial, integral, continuidad, etc., que van a exigir las nociones de límite y de aproximación ilimitada, es decir, el infinito potencial”. El infinito potencial, considerado como “aquello que jamás tiene fin porque siempre hay un más allá" está plasmado en el conjunto numérico de los números naturales, los cuales son una base en la creación del conjunto de los racionales e irracionales, donde "todo número real viene expresado por un desarrollo decimal con infinitas cifras. Aquí esa infinitud se muestra constitutiva del número real" [9, p. 4]. Además, afirma que:

> A diferencia del infinito potencial, el infinito actual se caracteriza por ser extenso, medible y permitir el establecimiento de parámetros, es decir, el infinito actual admite cuantificar. Éste, originado en un contexto geométrico, es un infinito ilimitado, métrico, que permite la cuantificación y la resolución de problemas del mundo real. A este salto del infinito potencial al infinito actual, que es donde encuentra sentido el proceso demostrativo de la inducción completa, se refería Blaise Pascal cuando afirmaba: "Conocemos que hay un infinito e ignoramos su naturaleza. Como sabemos que los números son infinitos, que es verdad que hay un infinito numérico" [9, p. 8].

Respecto al infinito actual y potencial, se puede decir que generalmente en las aulas de clase no se realiza distinción sobre los mismos, éste es asumido con un carácter único, sin diferenciar el significado de cada uno de ellos en los diferentes ejercicios matemáticos y como se mencionaba anteriormente, éste fue uno de los fundamentos teóricos para comprender la constitución del conjunto numérico de los números reales, los cuales son considerados como infinitos y son representados en la recta numérica, la cual ha sido llamada la recta del real o continuo [9, p. 5].

Se puede concluir entonces, que el enseñar el concepto de infinito, asociado al concepto de continuidad, implica un análisis profundo en sus antecedes epistemológicos y ontológicos, con el fin de no introducir errores conceptuales en las aulas de clase, puesto que los vacios teóricos sobre los mismos pueden conllevar a un análisis superficial o incoherente sobre los mismos.

1.3. El concepto de función y continuidad a través de la historia

En el desarrollo histórico de las Matemáticas, desde épocas remotas hasta las actuales, matemáticos y científicos se han preocupado por el rigor y el fundamento de las mismas, aspecto que se ha visto reflejado en las definiciones y controversias que se han generado a través de los años, donde diferentes puntos de vista actualmente son utilizados y/o aplicados en las aulas de clase y se han transformado en el legado de nuestros antepasados; los que analizaron, confrontaron y refutaron diferentes conceptos matemáticos. Las confrontaciones originadas a través de los años, han llevado a que áreas como: La Geometría, la Aritmética, el Álgebra y el Cálculo, sean cuestionadas en su rigor y sus fundamentos. Por ejemplo, en la Geometría Euclidiana, el axioma de las paralelas fue cuestionado y en la Aritmética, las propiedades del número fueron replanteadas [13, p. 91].

En lo referente al Cálculo, algunos conceptos debatidos fueron: La noción del infinito (cantidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas), series infinitas, serie convergente y divergente, la definición (principio) de continuidad, la definición de derivada, la definición de integral, entre otros, los que están fundamentados en la definición de función y continuidad que son bases esenciales en el campo del Análisis Matemático, donde la constitución de este saber se consolida fundamentalmente con la definición de los conceptos mencionados [13, p. 164].

Respecto a los conceptos que fundamentan el Análisis Matemático, vale la pena mencionar el concepto de continuidad, puesto que en los siglos XVII y XVIII los científicos llegaron a su estudio, buscando soluciones a problemas físicos como el de la cuerda vibrante y la transmisión del calor, los mismos que fueron abordados por D´Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Lavoisier, Biot, Fourier, Cauchy, entre otros, quienes hablaron directamente del concepto de función (sin ser entendido en el sentido actual) y continuidad en sus soluciones, además, no sólo en la solución de estos problemas fueron abordados los conceptos, en desarrollos posteriores del Cálculo, el trabajo realizado en series trigonométricas y teoría de integrales, efectuado por Poisson, Cauchy, Dirichlet, Lipschitz y Rieman, contribuyó con la construcción de la definición de dichos conceptos [4, pp. 2 - 4].

En el siglo XVII, acerca del problema de la cuerda vibrante, fueron presentadas diversas soluciones en forma de ecuaciones, las cuales requerían la precisión de la definición del concepto de función y continuidad, estas soluciones fueron desarrolladas por Bernoulli (1727), D´alembert (1747) y Euler (1750), donde se puede precisar que la definición de Bernoulli ya había sido planteada por Taylor en el año de 1715 y la solución de D´alembert dada a conocer en 1749 [4, pp. 2 - 4].

En cuanto a Euler [4, p. 3], él afirmaba que:

> Una función de una cantidad variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes. Una función está sujeta a la ley de continuidad si puede expresarse en todo su dominio por una expresión analítica, siendo en otro caso discontinua. Si unas cantidades dependen de otras, de modo que si las últimas cambian, lo hacen también las primeras, se dice que las primeras cantidades son

funciones de las últimas.

Adicionalmente Euler introdujo la notación $f(x)$, haciendo referencia a la función f aplicada sobre x, la notación de una función trigonométrica, el uso de la función exponencial, los logaritmos y la utilización de las series de potencias para expresar funciones logarítmicas.

Se puede decir que no sólo en la precisión de la definición de función y continuidad en el problema de la cuerda vibrante se dió pie a que estos conceptos fuesen debatidos y estudiados, el análisis de otro problema para la época, el problema de la transmisión del calor, también generó nuevos cuestionamientos, dado que en la época de la revolución industrial, el problema de la transmisión del calor fue estudiado por físicos y matemáticos, de los cuales se destacan a Fourier, quien presentó un trabajo con sus respectivas ecuaciones sobre el problema de la transmisión del calor e indicó que la solución de Bernoulli sobre la cuerda vibrante presentaba errores.

Posteriormente, en desarrollos sobre series trigonométricas y teoría de integrales apareció Dirichlet definiendo una función continua y Cauchy demostrando la existencia de la integral de una función acotada con un número finito de discontinuidades, donde Dirichlet probó que las series de Fourier podían representar funciones discontinuas y por lo tanto había inexactitud en el teorema de Cauchy sobre la continuidad de la suma de series de funciones continuas [4, pp. 11 - 12].

Otro personaje que se puede resaltar en este contexto es Bolzano, quien en 1817 enunció su teorema, el cual está relacionado con los ceros de una función continua que se comporta de forma positiva y negativa, también fue quien se adelantó al análisis de los rigurosos del siglo XIX con el concepto de función continua y la demostración de sus propiedades, enunciando un criterio de convergencia de series y la existencia de las funciones continuas sin derivadas.

Sin embargo, no sólo el concepto de función fundamentó la definición de continuidad, el problema de la relación entre lo discreto y lo continuo contribuyo en su definición, donde Eudoxo introdujo la idea de magnitud continua, no como un número sino como segmentos rectilíneos, ángulos, áreas, volúmenes, tiempo, etc, que podrían variar de manera continua, fue a partir de esto que se trataron las cantidades continuas desde una perspectiva geométrica.

Se puede observar que el desarrollo histórico sobre el concepto de continuidad contribuyó con el surgimiento del Cálculo, donde las diferentes posiciones enmarcadas en cada momento de la época, estructuraron este campo del saber, con el fin de contribuir en su desarrollo y evolución [12, p. 79].

1.4. La educación y el aprendizaje de las Matemáticas

La educación como proceso de formación transmite los valores y conocimientos que hacen parte de una cultura, aspecto que se ve reflejado en las prácticas que se llevan a cabo en las diferentes comunidades; las mismas que están determinadas por los aprendizajes y conocimientos que se adquieran en el entorno al que pertenece el individuo, dado que éstos están condicionados por las interacciones en las que son desarrollados y es desde allí donde se contribuye con el proceso de formación de los nuevos ciudadanos.

En este sentido, la educación debe favorecer el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de acuerdo a las condiciones propias del ser humano, puesto que el hombre está condicionado por su cultura y la forma de acercarse al conocimiento, la que varía de acuerdo con las prácticas educativas que lleve a cabo en el contexto al que pertenece.

Por lo tanto, es importante que la educación actual propenda por un aprendizaje que no esté limitado a la repetición de esquemas y teorías, sino un aprendizaje que permita el desarrollo del ser humano y el empleo del conocimiento en diferentes contextos y situaciones, puesto que educar es un proceso que hace parte del ser humano en todas sus dimensiones, a nivel personal, disciplinar y social, entre otras.

En relación al aspecto disciplinar, el acceso del hombre a los diferentes campos del conocimiento está determinado por las condiciones de enseñanza, en especial aquella que se imparte en las aulas de clase, donde el estudiante entra en contacto con experiencias que estructuran sus razonamientos y la forma de aprender las cosas. Por consiguiente, es fundamental que el papel del docente sea el de facilitador de experiencias significativas para el aprendizaje de los conceptos, donde se pueda lograr una educación con sentido, dado que no tiene consistencia repetir mecánicamente los conceptos.

Por lo tanto, es pertinente que la educación en el campo de las Matemáticas articule el conocimiento y las estrategias para acceder al mismo, dado que no tiene sentido llevar teorías al aula, si éstas no generan aprendizajes en los educandos, pues en repetidas ocasiones los estudiantes se encuentran reacios al aprendizaje de éstas porque se han limitado a la repetición de teorías sin encontrar sentido a lo que aprenden. Luego, el aprendizaje de las Matemáticas debe ir más allá de la repetición de conceptos, éstos deben hacer parte de los contextos donde se resuelven problemas y se entablan relaciones con otros, para estar en la capacidad de definirlos y solucionar problemas en diferentes contextos no sólo desde el ámbito matemático.

1.5. El concepto de continuidad en el currículo escolar

Es común encontrar expresiones para enseñar el concepto de continuidad como: "Decir que una función f es continua en $x = c$ significa que su gráfica no sufre interrupción en c, que no se rompe ni tiene saltos o huecos" o que la curva que se obtiene al deslizar la tiza o el lápiz sobre un tablero o papel es continua [14, p. 74].

Expresiones como estas dejan de lado aspectos que son esenciales en el trazado de la curva y pueden llevar a ideas intuitivas erróneas y, no a su comprensión desde el punto visual geométrico, que permite avanzar en la construcción de la definición formal del concepto. Además, la enseñanza tradicional refuerza destrezas para determinar un límite, evaluar una función en un punto, clasificar funciones continuas o discontinuas y aplicar diferentes teoremas relacionados con la continuidad, lo que conlleva a calcular un resultado en forma mecánica o a la memorización de teoremas dejando de lado la esencia formal del concepto, y aunque las destrezas operativas no representan un obstáculo, es importante ir más allá de éstas, con el fin de concebir adicionalmente la comprensión de los conceptos matemáticos. Para comprender los conceptos matemáticos, es pertinente crear estrategias que permitan el acercamiento de los estudiantes a los mismos, las que están determinadas por las diferentes prácticas que se lleven a cabo en el aula de clase, donde los alumnos acceden al conocimiento en correspondencia con el proceso desarrollan.

Por consiguiente, es pertinente que nuestro sistema educativo actual se enfoque no sólo en los resultados sino en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos, dado que a pesar de que el currículo está permeado por diferentes modelos y prácticas educativas, se aprecia en las aulas de clase que los estudiantes no adquieren una adecuada apropiación de los conceptos, particularmente los conceptos matemáticos.

Cuando los estudiantes se enfrentan a cursos de Matemáticas, en especial en el campo del Análisis Matemático, encuentran obstáculos para definir algunos conceptos, dado que se enfocan en la resolución de ejercicios sobre los mismos y no propiamente en el significado de su definición y aplicaciones.

Particularmente, el concepto de continuidad local está estrechamente relacionado con otros conceptos del Análisis Matemático, como: Límites, derivadas, integral, entre otros, los que se encuentran estrechamente relacionados y la comprensión de alguno de ellos posibilita un mejor conocimiento a los otros.

Sin embargo, en los contextos escolares persisten vacíos cuando se habla de los conceptos del Análisis Matemático, dado que en la mayoría de los casos no se profundiza en su definición sino en la aplicación para la solución de ejercicios. Por lo tanto, es pertinente que el currículo matemático, incluya en sus elementos el análisis detallado y profundo de los conceptos, de acuedo con el nivel de escolaridad en el que se imparten, con el fin de lograr un acercamiento óptimo por parte de los estudiantes a los temas impartidos.

1.6. El concepto de continuidad en algunos textos del Cálculo

El desarrollo del currículo actual está mediado por diferentes herramientas, entre ellas, los textos escolares, los que presentan los conceptos desde una perspectiva visual geométrica, donde se ilustra la solución de ejercicios y en el mejor de los casos la solución de problemas, se encuentra entonces que los textos escolares para la enseñanza del bachillerato, por lo general se limitan al desarrollo del concepto a través de la realización de ejercicios sin profundizar en la definición y esencia formal de la misma.

Respecto al concepto de continuidad, se observa que éste es mencionado con frecuencia en los textos escolares de bachillerato haciendo alusión a contextos cotidianos, por ejemplo: La producción es continua, el flujo de pasajeros es continuo, la carretera es continua, entre otros; explicaciones que llevan a la comprensión del concepto desde una visión intuitiva y visual, sin precisar la definición formal del mismo. Adicionalmente, en los textos de Cálculo el concepto es abordado desde la aplicación de teoremas que verifican las condiciones para que una función sea continua, sin profundizar en la esencia de su definición y sus fundamentos.

A diferencia de los textos escolares para bachillerato, los textos de Cálculo universitarios desarrollan el concepto desde una concepción formal sobre el mismo, algunos textos emplean las distancias épsilon y delta y otros las vecindades, elementos que son abordados desde el Análisis matemático con carácter formal acerca de la definición del concepto.

A continuación se presentan algunos ejemplos de la forma como se asume el concepto de continuidad en diferentes textos escolares.

Chávez, Salgado, Romero y Torres [6, pp. 117 - 118] se refieren al concepto de continuidad aludiendo a tres elementos fundamentales, como son: Funciones contínuas, continuidad de una función en un punto y continuidad de una función en un intervalo, a continuación se expone cada uno de ellos:

1. Funciones continuas: Una función es continua cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponden pequeñas variaciones en la variable

dependiente.

2. Continuidad de una función en un punto: Una función f es continua en un punto $x = a$ si cumple las siguientes condiciones:

   a) f está definida en un intervalo abierto que contiene a a; es decir $f(a)$ existe.

   b) El límite de la función cuando x tiende a a existe; es decir, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

   c) El límite de la función cuando x tiende a a es igual a la función calculada en a; es decir, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3. Continuidad de una función en un intervalo: Una función f es continua en un intervalo abierto (a,b), si f es continua en todos los puntos del intervalo (a,b).

   Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si:

   a) f es continua en el intervalo abierto (a,b)

   b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Expresiones como las anteriores dejan ver que el concepto es presentado de manera que se verifiquen las condiciones de continuidad en un punto y posteriormente la continuidad en todos los puntos de la curva, las que están determinadas por la definición de límite, donde inicialmente se verifica que la función esté definida en el punto, luego que exista el límite en ese punto y por último que ambos valores sean iguales, donde realmente se estaría aplicando el teorema para verificar la continuidad de la función en el punto, sin profundizar en el significado del concepto.

Otro aporte relevante es presentado en el texto de Cálculo de Larson [14, pp. 74 - 75], donde se afirma que:

1. "Decir que una función f es continua en $x = c$ significa que su gráfica no sufre interrupción en c, que no se rompe ni tiene saltos o huecos."

2. Definición de Continuidad en un punto: Una función f se dice continua en c si se verifican las condiciones:

   a) $f(c)$ está definido

   b) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe

   c) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

3. Continuidad en un intervalo abierto: Una función f se dice continua en un intervalo (a,b) si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

   Los dos ejemplos anteriores ilustran sobre la forma de presentar el concepto de continuidad local en los textos para la enseñanza del Cálculo están enfocados en el mismo sentido, ambos se fundamentan en la utilización del límite, donde inicialmente se aplican las tres condiciones para verificar la continuidad en un punto y posteriormente en todos los puntos de la curva.

Otros autores que presentan la definición del concepto de continuidad, en algunos textos de Análisis Matemático, son referenciados por Cauchy y Bartle:

Según Barttle [2, p. 160]: Sea $A \leq R$, sea $f : A \to R$ y sea $c \in A$. Se dice que f es continua en c si, dada cualquier vecindad $V \in f(c)$ de $f(c)$, existe una vecindad $V \in \delta(c)$ de c tal que si x es cualquier punto de $A \cap V\delta(c)$, entonces $f(x)$ pertenece a $V \in (f(c))$.

Según Cauchy [9, p. 6]: La función f es continua en x_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. En esta reformulación se ha producido una transformación conceptual. Los intervalos dejan de considerarse magnitudes extensas, que disminuyen o aumentan, para tomarse como conjuntos de puntos dados en acto.

Se puede observar entonces que en los textos para la enseñanza del Cálculo y el Análisis Matemático, se presentan formas específicas para acercar al estudiante al concepto de continuidad local, los mismos que se desarrollan en correspondencia con el nivel académico al que pertenezca el estudiante y con los intereses y propósitos de quien expone el tema. Por lo tanto, es importante que en las clases, el estudiante no se limite sólo a la repetición de enunciados o teoremas presentados en los textos, es pertinente generar espacios de reflexión y análisis sobre los mismos, donde se profundice en la definición de los conceptos con el propósito de comprender los mismos.

La presente investigación apunta a ayudarle a los estudiantes para que comprendan el concepto de continuidad local, desde la visión de Cauchy, que la define a partir del control de errores definidos por epsilon y delta al hacerlos infinitamente pequeños en la vecindad del valor en el que se estudia el concepto para una función en particular. Para ello, se construye un mecanismo visual geométrico que lleva a la definición del concepto, a partir del control de errores y del zoom horizontal que se obtiene con el asistente matemático Geogebra®.

1.7. Algunos estudios relacionados con el concepto de continuidad

El concepto de continuidad local es fundamental en el campo del Análisis Matemático dado que se articula con conceptos como: Límite, derivada, integral, entre otros, los mismos que estructuran este campo del saber y le dan rigor al mismo, y que ha sido permeado por las diferentes visiones y controversias que se han generado en las diferentes épocas, y se han plasmado en diferentes estudios desarrollados en correspondencia con el concepto. A continuación se presentan algunos aportes concernientes al concepto de continuidad desde diferentes autores.

1.7.1. Aparicio y Cantoral

El reporte de investigación presentado por Aparicio y Cantoral, hace referencia al concepto de continuidad de una función real de una variable real desde una visión puntual, allí, ellos ilustran las acciones y el discurso que los estudiantes manifiestan en torno al concepto de continuidad puntual, donde supusieron que los conocimientos de los estudiantes son un producto cultural, enfocándose en el aspecto gestual para visualizar como los estudiantes movilizan su pensamiento con la ayuda de un software dinámico [1, pp. 10 - 13].

En su trabajo ellos manifiestan que la continuidad puntual es consecuencia de la discontinuidad puntual y no de la continuidad global y afirman que las personas perciben el cambio en su estudio de fenómenos reales en términos globales y no locales [1, pp. 10 - 13].

1.7.2. Crespo

En el acta del Comité latinoamericano de Matemática Educativa, Crespo [8, pp. 39 - 44] afirma que el concepto de continuidad local se encuentra estrechamente relacionado con la definición de infinito y límite, y que realizar un recorrido histórico por el concepto, deja ver las concepciones que los estudiantes poseen sobre el mismo y los aprendizajes que han adquirido a lo largo de los años.

Una de las dificultades que reflejan los estudiantes es la no asimilación de la idea de continuidad en la recta numérica, que da pie a obstáculos epistemológicos como es la diferenciación entre la discretud y la continuidad, la confluencia de lo infinito con lo indivisible y la diferenciación y aceptación de los infinitos actual y potencial, aspectos que son fundamentales para la comprensión de otros conceptos del Análisis Matemático y que confluyen con el propósito de no confundir el concepto de continuidad con el de densidad en la recta numérica [8, pp. 39 - 44].

1.7.3. Porcel, Ramírez y Caputo

En el trabajo: "Conocimientos previos sobre Límite funcional y Continuidad en alumnos de un curso de Análisis Matemático de FACENA" [19, pp. 1 - 4], los autores muestran el desarrollo de una experiencia referida a la enseñanza del límite funcional, la que consistía en la identificación de las concepciones y principales obstáculos epistemológicos y didácticos que dificultaban la construcción de este concepto por parte de estudiantes universitarios que se enfrentan a cursos de Matemáticas.

En este sentido, los autores ilustran un diagnóstico sobre el concepto de límite funcional en los alumnos que ingresan a los cursos de Análisis Matemático, adicionalmente, se muestra la importancia del quehacer matemático y se definen las habilidades como: Interpretar, identificar, definir, calcular, demostrar y graficar, las cuales según los autores, muestran en el estudiante su capacidad para tomar decisiones y para solucionar problemas, y a medida que las desarrollan van adquiriendo un pensamiento matemático riguroso, reflexivo y profundo [19, pp. 1 - 4].

El presente trabajo de investigación contribuye al campo de la Educación Matemática en su aspecto metodológico, puesto que presenta una forma alternativa para la enseñanza del concepto de continuidad local. Respecto a este concepto, el primer Capítulo: Articula los antecedentes y fundamentos que estructuran el concepto objeto de estudio, presenta varias definiciones y plantea su pertinencia en el campo de la Educación.

Se puede concluir entonces, que los fundamentos que estructuran la propuesta de investigación están articulados con los elementos teóricos y la definición de los antecedentes del problema, puesto que el conjunto de ambos elementos conlleva a una adecuada comprensión del concepto objeto de estudio y al desarrollo de la propuesta investigativa.

En el próximo capítulo se desarrollan los elementos teóricos que fundamentan la propuesta, con la intención de direccionar el trabajo de investigación y brindar argumentos que estén en coherencia con el sustento y desarrollo de la misma.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

En este capítulo se desarrollan los fundamentos teóricos que estructuran la propuesta investigativa, donde se ilustran aspectos como: El desarrollo de diferentes teorías del aprendizaje, el modelo educativo de van Hiele y sus respectivos componentes, algunos estudios enmarcados en el modelo, definiciones para mapas conceptuales, Módulo de Aprendizaje, entrevista socrática y fundamentación del problema. A través de cada uno de estos aspectos, se pretende ilustrar cómo la propuesta de investigación está articulada a fundamentos teóricos específicos que la definen y le dan validez, los mismos que van en correspondencia con el propósito de la misma.

Uno de los propósitos trazados en la investigación, radica en la construcción de la definición de continuidad local por parte de los estudiantes; pues dicho concepto admite en sus múltiples manifestaciones el desarrollo de planteamientos que conllevan a su definición, de acuerdo con las necesidades e intereses particulares de la investigación sobre el concepto objeto de estudio, es posible definir un marco que articule el concepto matemático con una teoría de aprendizaje pertinente.

Luego, el concepto es abordado en el presente capítulo desde algunos referentes teóricos y metodológicos, respecto al último se puede mencionar: La entrevista de carácter socrático, los mapas conceptuales y un Módulo de Aprendizaje; los cuales se caracterizan por ser herramientas que permiten poner en evidencia los procesos de razonamiento que son desarrollados por los estudiantes. Adicionalmente, en el desarrollo del Capítulo, se da a conocer el modelo teórico seleccionado y su respectiva justificación, donde se presentan los argumentos por los que fue elegido y su articulación a la propuesta investigativa.

2.1. Aprendizaje y conocimiento

El ser humano desde el inicio de su gestación está sometido a condiciones que estructuran su personalidad y que generan aprendizajes, los que dependen de la cultura e intereses del medio que lo rodea, y se ven reflejados en las actividades que realiza a diario como: Leer, contar, escribir, entre otras. Además, en sus prácticas cotidianas, el hombre ilustra los aprendizajes que ha adquirido a lo largo de su vida, los que son permeados por la escuela, la familia y el entorno social, es decir, el conocimiento y el aprendizaje están enmarcados en el contexto particular de la persona, dependen de la cultura y de la sociedad, los cuales a pesar de sus múltiples definiciones y discursos teóricos, obedecen a la visión propia de quienes preguntan y de quienes afirman. Según Meirieu:

> Así, cuando decimos que aprender es estar atento, leer, escuchar, recibir conocimientos, creemos describir la realidad y, en muchos aspectos, la describimos. Es verdad que el aprendizaje se manifiesta muy a menudo con estos signos, pero solamente "se manifiesta", no se lleva a cabo. Del mismo modo, cuando aprendemos por repetición o por imitación, sólo describimos comportamientos, no decimos nada de las operaciones mentales que se realizan, de qué manera precisa un elemento nuevo queda integrado dentro de una estructura antigua y lo modifica; sabemos muy bien que hay cosas que se pueden repetir mecánicamente infinitas veces sin que esto sea una garantía de aprendizaje, sin que baste siquiera para asegurar el establecimiento de reflejos condicionados [16, pp. 55 - 56].

Por lo tanto, ciertas conductas o comportamientos no indican que se hubiese generado un aprendizaje con sentido, en algunas ocasiones, éstos representan imitaciones o repeticiones de esquemas. Luego, es importante resaltar que el aprendizaje no sólo se refleja en un comportamiento, éste se evidencia también en los razonamientos que se hagan sobre las situaciones y el significado que se dé a las cosas.

Hablar de conocimiento y aprendizaje es algo complejo, estos dependen de aspectos a nivel personal y social que condicionan al ser humano, puesto que no hay un punto de partida ni un punto de llegada debido a la multiplicidad de condiciones que los determinan.

Es importante entonces, que en el campo de la educación se generen espacios donde se propicien aprendizajes con sentido, donde los estudiantes a pesar de sus múltiples diferencias, tengan la posibilidad de acceder al conocimiento, el que no se debe limitar a determinadas esferas sociales.

El acceso al conocimiento, está influenciado por las condiciones bajo las que se desarrollan los momentos de aprendizaje, donde las técnicas empleadas contribuyen a un acercamiento o distanciamiento respecto a los diferentes conceptos del saber estudiado. Particularmente en el campo de la Educación Matemática, los estudiantes en su aproximación a los conceptos matemáticos, se ven influenciados por las condiciones y estrategias de enseñanza, las que dependen en gran parte de la metodología empleada por el docente. Por lo tanto, es pertinente que el docente emplee estrategias adecuadas en sus prácticas escolares, con el propósito de que los estudiantes puedan acercarse al conocimiento y aprender sobre los conceptos, de tal manera que el aprendizaje sea significativo y haga parte de su proceso de formación, el que debe ser integral y formativo.

2.2. Aprendizaje significativo

El proceso de aprendizaje no está limitado solamente a la repetición o memorización de de conocimientos y teorías, involucra la reflexión y el análisis profundo sobre los conceptos, donde es preciso desarrollar experiencias con sentido, para que los estudiantes encuentren utilidad a lo que aprenden y significado al conocimiento, donde éste no esté relegado a aprender sólo para el momento.

El hablar del aprendizaje significativo, nos remite a la imagen de Ausubel, quien fue su precursor; para él, el aprendizaje significativo ocurre cuando se desestabilizan las estructuras mentales iníciales y se reconstruye alrededor de las mismas, a través de un proceso de reflexión que transforma el conocimiento inicial en uno nuevo, el cual es útil y va en correspondencia con el conocimiento previo.

Al respecto Ausubel plantea:

> El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de anclaje a las primeras[1].

Luego, hablar de un aprendizaje significativo implica la articulación entre lo que el estudiante sabe, lo que desea saber y el proceso que se lleve a cabo en su

[1] Palonimo, W. (2008). Teoría del Aprendizaje significativo de David Ausubel. Consultado el 7 de enero de 2010 de http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml.

estructura cognitiva, con el fin de desarrollar experiencias propias que conlleven a un aprendizaje significativo. El desarrollo de experiencias dentro de la teoría del aprendizaje significativo, implica la articulación de las vivencias actuales y los conceptos preexistentes, los que son moldeados por la reflexión y análisis que se hace de las prácticas llevadas a cabo. Por lo tanto, el aprendizaje adquiere sentido cuando es visualizado como un elemento integro, donde se da validez al nuevo conocimiento en relación con los conocimientos previos, con el propósito de que dichos conocimientos puedan ser aplicados al contexto donde el estudiante se desenvuele.

2.3. Teorias del aprendizaje

El aprendizaje es concebido por cada cultura de acuerdo a sus prácticas, creencias e intereses, el cual no es de carácter único y universal debido a las diferencias personales y sociales de los seres vivos.

Desde hace varios años, psicólogos, educadores, sociólogos, filósofos, entre otros, han manifestado la preocupación por el significado y las condiciones bajo las que se dan los aprendizajes en el ser humano, donde se puede decir que no hay una explicación exacta, ya que el aprendizaje se enmarca en la visión de cada autor de acuerdo con sus intereses y las necesidades de cada época.

A través de la historia, en el campo de la educación han surgido diferentes escuelas del conocimiento, que han caracterizado las condiciones de la época y la posición de los autores respecto a la concepción del aprendizaje, posiciones que se ven plasmadas en teorías que continuamente se desarrollan en los contextos escolares. Se puede hablar de teorías del aprendizaje: Conductistas, cognitivistas, funcionalistas, entre otras, las cuales se convierten en fundamentos que permiten comprender los intereses de la educación y los propósitos de la misma.

A continuación se presenta a grandes rasgos: El conductismo, el cognitivismo y el funcionalismo, donde se hace énfasis en el cognitivismo asociado a las teorías constructivistas de Piaget y Vigotski.

2.3.1. El Conductismo

En la perspectiva conductista el hombre es estudiado desde sus acciones y comportamientos, sin tener en cuenta los procesos internos que lleva a cabo, es decir, los procesos mentales que desarrolla de forma consciente. Bajo esta teoría, el ser humano es analizado desde sus conductas y hechos, puesto que una de las características que diferencia a los seres humanos es su comportamiento, el que depende de los estímulos e instrucciones dadas al mismo.

Bajo el enfoque conductista, los alumnos son considerados desde sus conductas sin discurrir sobre sus procesos internos, allí, es pertinente enfocarnos no sólo en este aspecto, ya que los estudiantes no son receptores e imitadores de conocimientos, ellos desarrollan procesos internos, los cuales generan diferentes razonamientos sobre lo que se está aprendiendo, para poder acercarse al conocimiento.

Es pertinente entonces, que las diferentes prácticas escolares articulen las conductas y los procesos mentales que desarrollan los estudiantes, dado que existen grandes diferencias en los comportamientos de los seres humanos, pues cada uno de ellos actúa en correspondencia con sus pensamientos y necesidades, aspecto que diferencia la esencia de cada ser humano, dado que cada una de nuestras acciones nos diferencian de los otros, éstas provienen tanto de procesos externos como internos, del mundo que nos rodea y de nuestros pensamientos.

En el ámbito educativo, el conductismo ha marcado profundamente las diferentes prácticas escolares, las que se han visto enfocadas en la obtención de resultados por parte de los alumnos, sin considerar otros factores adicionales, como su contexto, estructura mental, dificultades de aprendizaje, entre otras. Según Meirieu el conductismo es:

> Una concepción de la actividad intelectual que se centra en las correlaciones entre los estímulos externos y los comportamientos. Éste ha inspirado los primeros trabajos de la "pedagogía por objetos" que se esforzaba por traducir sistemáticamente los contenidos del programa en los comportamientos que se esperaban del alumno [16, pp. 200 - 201].

Propiamente ser conductista desplegaría cierto tipo de actividades, en otras palabras, comportarse de ciertas maneras (hacer, decir, escribir, creer, buscar, investigar, teorizar, etc.). Por otra parte, decir que alguien es conductista es comportarse frente a la conducta de otro y ajustarse a la convención de una comunidad que establece responder de cierta manera ante el comportamiento de un individuo [11, p. 325].

Luego, el conductismo deja de lado aquellos procesos internos que se desarrollan en la mente del educando y se limita solo a analizar la forma en la que se comporta, sin considerar la influencia del entorno y sus condiciones de vida, tanto intelectuales, como personales.

La perspectiva conductista en ciertos momentos puede representar un obstáculo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, como lo plantean Zuriff (1985), O'Donohue y Kitchener (1999) y Malone (2001) citados por Hurtado [11, pp. 320 - 328], cuando los estudiantes se enfrentan a nuevas experiencias, llevan los aprendizajes que han adquirido a lo largo de su historia de vida, los que pueden generar resistencia a la comprensión de nuevas ideas.

Es oportuno mencionar, que hablar de una perspectiva conductista en el campo de la educación implica la consideración de aspectos solo de carácter comportamental, donde no se consideran otros elementos que hacen parte del proceso de formación, pues la educación es un proceso integral que abarca elementos actitudinales y aptitudinales, los que consolidan el proceso que desarrolla el estudiante.

2.3.2. El Cognitivismo

A diferencia del Conductismo, el Cognitivismo da sentido y significado al proceso de aprendizaje de los educandos, considera los procesos mentales en diferentes momentos y resalta la importancia de las experiencias como mediadoras en la construcción del conocimiento.

Algunas teorías sobre el cognitivismo, además del aprendizaje significativo, permiten dar cuenta de la configuración de las estructuras mentales en el ser humano, puesto que admiten explicaciones sobre la personalidad y el comportamiento, los que son mediados por agentes externos e internos que condicionan la forma de aprender y acercarse al conocimiento.

El enfoque cognitivo ha tenido gran influencia en el campo educativo, éste considera aspectos como: La memoria, la percepción, el lenguaje, el pensamiento, la abstracción, la comprensión, la concentración, la razón, entre otros, los que son elementos fundamentales en el ámbito pedagógico y en las prácticas escolares, puesto que es en las diferentes experiencias educativas donde se construye el conocimiento, el que se hace manifiesto en los procesos cognitivos y en los razonamientos que presentan los estudiantes.

Bajo esta perspectiva, el individuo al ser un constructor de conocimientos, se encuentra influenciado por agentes internos y externos, donde el aspecto interno hace referencia a los diferentes procesos mentales como: la abstracción, el análisis, los razonamientos, entre otros, y el aspecto externo a las condiciones del medio, como la cultura, la didáctica, las estrategias de enseñanza, los intereses políticos, entre otros.

En este sentido surge la corriente del Constructivismo, el que se caracteriza por ser una teoría con fundamentos cognitivos, donde se reconoce al estudiante como un constructor de conocimiento, el cual entra en contacto con experiencias que le permiten acceder a diferentes aprendizajes y donde está condicionado tanto por los procesos internos como externos.

Algunas teorías sobre constructivismo desarrolladas en el ámbito educativo son: El Constructivismo Cognitivo de Piaget y el Constructivismo Socio-cognitivo de Vigotski, las cuales han hecho parte de diferentes prácticas educativas por muchos años [21, p. 7]. A continuación se presenta una breve descripción del constructivismo desarrollado por Piaget y Vigotski.

Constructivismo Cognitivo de Piaget

Piaget adquirió formación en el campo de la Biología, la Filosofía y la Psicología; su preparación en estos tres saberes le permitió realizar valiosos aportes, entre los que se puede destacar la epistemología genética y la resolución de problemas, que según él, dependían del desarrollo de ciertas estructuras cognitivas. Para Piaget, todas las estructuras que conforman la cognición humana poseen una génesis, y por medio de procesos de transformación constructivistas, las estructuras más simples van siendo vinculadas a las de orden superior, donde el aprendizaje se construye en correspondencia con el desarrollo cognitivo, y el conocimiento en las interacciones con el entorno, específicamente con los objetos [21, p. 12].

La teoría piagetiana se apoya en tres ejes conceptuales: Estructuras cognitivas, funciones cognitivas y contenidos de la cognición. Respecto a las estructuras cognitivas, él hace alusión a los esquemas de acción y las operaciones; en relación con las funciones cognitivas, habla de la organización y la adaptación (Asimilación, Acomodación y Equilibración) y en cuanto a los contenidos de la cognición, resalta las etapas de desarrollo: Sensoriomotriz, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales [21, p. 13].

Los ejes conceptuales desarrollados por Piaget, permiten dar cuenta de la cognición humana en todas sus dimensiones, desde su estructura hasta sus funciones y contenidos, los cuales son elementos integradores en el proceso formativo, debido a que el conocimiento se construye de acuerdo a la etapa que este atravesando el individuo.

Otro aspecto importante, es el valor que Piaget otorga a las estructuras cognitivas, él afirma que no es la presencia de unos u otros elementos en un momento dado, sino las relaciones que se establecen entre ellos. Para él, las estructuras cognitivas pueden ser los esquemas y las operaciones [21, p. 13].

> Un esquema puede ser definido como una serie de contenidos cognitivos (acciones inteligentes específicas, tales como percepciones, recuerdos, conceptos, símbolos, acciones motoras) relacionados, que están estrechamente entrelazados y que tienden a gatillarse unos a otros [21, p. 17].

Una operación cognitiva es la interiorización de una acción reversible agrupada en un conjunto con leyes de totalidad; cuando la imagen es un objeto material se tiene una operación concreta; cuando las acciones interiorizadas operan sobre otras acciones interiorizadas se tiene una operación formal.

Las funciones cognitivas están cambiando constantemente, por esto Piaget analiza la cognición humana a través de las invariantes funcionales: Organización y adaptación, la adaptación es la condición que permite la vida de un organismo en un medio, la que se equilibra a través de la asimilación y la acomodación. Los contenidos de la cognición son aquellos elementos como percepción, recuerdos, conceptos, operaciones, estructuras, entre otros, organizados de acuerdo a ciertas relaciones que encarnan en la práctica las estructuras cognitivas de todo tipo [21, pp. 16 - 23].

Las etapas del desarrollo planteadas por Piaget explicitan como el desarrollo cognitivo va en relación con la edad, puesto que en diferentes años, la persona tiene la capacidad de realizar determinados procesos. Estas etapas son [21, pp. 27 - 28]:

1. Etapa Sensoriomotriz (0 - 2 años), cuyo máximo logro es la adquisición de la función simbólica o capacidad de representar el mundo externo por medio de los símbolos.

2. Etapa preoperacional (2 - 7 años), cuyo máximo logro es la preparación, a partir del ejercicio activo del uso de símbolos, para la adquisición de las "operaciones mentales", las que son descritas por Piaget como estructuras cognitivas que le permiten al individuo en el ambiente de manera lógica y reversible.

3. Etapa de las operaciones concretas (7 - 12 años) caracterizada por el ejercicio de la lógica en la acción del individuo con los objetos del entorno.

4. Etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años), caracterizada por la posibilidad del individuo de operar en el ambiente de manera hipotético-deductiva, aún en ausencia de experimentación práctica.

Los argumentos expuestos por Piaget, dejan ver la gran importancia que tiene analizar al hombre en su proceso de formación desde los aspectos cognitivos, hasta la evolución en los procesos de razonamiento, los que están sometidos a la asimilación y acomodación, a través de los cuales se va consolidando la estructura cognitiva en correspondencia con el desarrollo biológico.

Constructivismo Socio-cognitivo de Vigotski

Desde una visión socio-cognitiva, el aprendizaje de los seres humanos es ampliamente influenciado por las condiciones sociales y culturales; bajo esta perspectiva, el hombre construye el conocimiento a través de las interacciones con el entorno, donde se convierte en un producto social, que estructura sus aprendizajes de acuerdo a las relaciones con la sociedad.

El ser humano no se construye sólo, su formación se encuentra condicionada por la interacción con los seres humanos, dado que es en el entorno social donde se enfrenta a experiencias, las que generan aprendizajes que lo identifican, es decir, la construcción del conocimiento, se encuentra mediada por las prácticas culturales del entorno al que pertenece el individuo y de las relaciones que entabla con el mismo.

Vigotski considera que el desarrollo del ser humano depende de su interacción con la sociedad, y argumenta que es en medio de la cultura, donde se gestan las acciones mentales que estructuran su personalidad. Él alude a otros conceptos importantes en el ámbito cognitivo; el proceso de internalización, la psicología del juego, los procesos psicológicos elementales (PPE) y los superiores (PPS) y la zona de desarrollo próximo (ZDP), los que permiten comprender la forma de acercarse al conocimiento, en correspondencia con las acciones y conocimientos previos que posea el individuo. Respecto al proceso de internalización, éste hace referencia al desarrollo de las funciones psicológicas superiores a través de operaciones de carácter social y psicológico, conformadas a partir de la interacción social y la mediación cultural; en cuanto a los procesos psicológicos elementales (PPE), los define como actos o procesos psicológicos que son compartidos con otros animales tales como la atención, la percepción, la memoria y el pensamiento (en su dimensión inteligencia práctica) y los procesos psicológicos superiores (PPS) implican acciones y procesos de tipo instrumental y se caracterizan por la incorporación de signos, los que cambian por completo la naturaleza y expresión de los procesos psicológicos elementales antes desarrollados dando pie a la aparición de dichos procesos psicológicos superiores (o instrumentales) [21, pp. 32 - 44].

Los procesos psicológicos que desarrolla un individuo, están determinados por las interacciones con el entorno, las que están condicionadas por las estructuras mentales que posee el mismo, es decir, el ser humano interactúa con el medio en concordancia con sus pensamientos, los que determinan su forma de actuar y comportarse.

Otro aspecto relevante tratado por Vigotski es el concepto de zona de desarrollo próximo [21, p. 44], al respecto afirma que:

> La zona de desarrollo próximo (ZDP) se refiere al espacio, brecha o

> diferencia entre las habilidades que ya posee el/la niño/a y lo que puede llegar a aprender a través de la guía o apoyo que le puede proporcionar un adulto o un par más competente. El concepto de la ZDP se basa en la relación entre habilidades actuales del niño y su potencial. Un primer nivel, el desempeño actual del niño, consiste en trabajar y resolver tareas o problemas sin la ayuda de otro, con el nombre de nivel de Desarrollo Real. El nivel de desarrollo potencial es el nivel de competencia que un niño puede alcanzar cuando es guiado y apoyado por otra persona. La diferencia o brecha entre esos dos niveles de competencia es lo que se llama ZDP.

La ZDP en los contextos educativos, brinda la posibilidad de considerar los conceptos previos en el estudiante, con el fin de crear mecanismos que permitan articular los conocimientos iníciales con los nuevos, es decir, la construcción de un concepto surge a partir de las habilidades previas y se organiza con el desarrollo potencial que posea al estudiante.

Es pertinente entonces que en el ámbito educativo, se considere el nivel de partida de los estudiantes, es decir, sus conocimientos previos, dado que no tiene sentido involucrarlo en experiencias que no comprenda, pues en repetidas ocasiones ellos manifiestan dificultades para la comprensión, no por falta de habilidades, sino porque no poseen los conocimientos iníciales que se requieren para el aprendizaje del nuevo concepto.

2.3.3. El funcionalismo

En cualquier ámbito, la educación se encuentra condicionada por factores sociales y políticos, los que determinan sus propósitos y son ampliamente influenciados por algunos grupos y esferas sociales; aspecto que determina el funcionamiento y marcha de las sociedades.

La teoría funcionalista se refiere al equilibrio social y considera factores que condicionan dicho equilibrio, dado que cada elemento de la sociedad desempeña una función, las que regulan las conductas y los mecanismos de cada uno de ellos, con el fin de buscar el equilibrio social. Se basa en la teoría de sistemas, estableciendo que la sociedad se organiza como un sistema social que debe resolver cuatro imperativos fundamentales para subsistir: Adaptación al ambiente, conservación del modelo y control de tensiones, persecución de la finalidad e integración mediante las diferentes clases sociales[2].

[2] Calderon, J. (2010). El funcionalismo. Consultado el 13 de diciembre de 2010 de http://www.politicas.unam.mx/sae/portalestudiantil/comunicacion/articulos-academicos.

La integración de las diferentes clases sociales como uno de los principios esenciales de la teoría funcionalista, deja ver la necesidad que tiene el ser humano de interactuar y compartir con los otros, donde se hace primordial el desarrollo del valor de la tolerancia, fundamentalmente en los contextos escolares.

En nuestro sistema educativo actual, resulta paradójico hablar de teoría funcionalista, dado que las diferentes leyes educativas y las prácticas escolares reflejan un desequilibrio social, puesto que en repetidas ocasiones falta tolerancia por las diferencias y, se asume a los estudiantes como simples receptores de conocimiento, lo que genera malestar y desequilibrio social y por ende a las diferentes funciones que permiten su equilibrio.

2.4. La comprensión en el marco del modelo de van Hiele

Definir el término comprensión implica un conocimiento profundo sobre las diferentes dimensiones que conforman al ser humano, puesto que resulta confuso precisarlo, debido a la multiplicidad de factores que conforma al ser humano. Luego, puntualizar la comprensión, como cualquier otro concepto que abarque la dimensión humana, requiere el abordaje de una perspectiva que fundamente los principios de quien trata de precisar el término.

Existen diversas definiciones de comprensión, algunos autores la asumen como un proceso metal, otros como una capacidad o inteligencia y otros como destrezas, entre otras. En general dependen de la posición del autor, dado que cada contexto asume la comprensión desde sus perspectivas, particularmente en las aulas de clase, el enfoque teórico bajo el que se desarrollen las practicas educativas, permite definir la comprensión en un tópico específico.

El presente trabajo de investigación asume la definición de comprensión desde el modelo educativo de van Hiele, dado que en una de sus componentes llamadas *insight*, se define éste, a partir de la comprensión del estudiante en determinados momentos de acuerdo con su estructura mental. El insight como comprensión, se obtiene cuando un estudiante actúa adecuadamente ante una nueva situación; se observa cuando se produce una acción fuerte que estabiliza una estructura desde la cual se da respuesta a nuevas preguntas, es decir, puede representar la respuesta inmediata que el estudiante manifiesta de acuerdo con su estructura mental y las redes de relaciones desarrolladas con respecto al concepto [22, pp. 27 - 31].

2.5. Aprendizaje desde lo concreto

La comprensión y el aprendizaje son elementos que están estrechamente relacionados. Dan cuenta del proceso de aprendizaje que desarrollan los estudiantes, en la experiencia escolar o en su entorno donde pueden tener un acercamiento a diferentes conocimientos. Es importante, que el proceso de enseñanza se transforme en algo dinámico, que permita la generación de interacciones que propicien la reflexión, para hacer posible el aprendizaje y la comprensión de los conceptos.

Los procesos de enseñanza que articulan el aprendizaje desde lo concreto, se fundamentan en la utilización de materiales para el desarrollo de experiencias, con el propósito de generar sensaciones que favorecen el aprendizaje con la utilización de los sentidos, y así, dar significado a lo que se aprende y enseña.

Por otra parte, la interacción con elementos y experiencias para acercarnos al conocimiento, pone a prueba la utilización de nuestros sentidos, pues cada uno de ellos brinda experiencias que van más allá de lo físico, es decir, aprendemos no sólo con nuestro cuerpo, sino también con aquellas sensaciones que generamos, lo que da mayor profundidad y sentido al concepto que se esté tratando de comprender.

> Cuando procesamos la información asociándola a nuestras sensaciones y movimientos de nuestro cuerpo, estamos utilizando el sistema de representación kinestésico. Una vez que sabemos algo con nuestro cuerpo, aprendido con la memoria muscular, es muy difícil de olvidar. En consecuencia los alumnos que utilizan preferentemente el sistema kinestésico necesitan, por tanto, más tiempo que los demás. Esa lentitud no tiene nada que ver con la falta de inteligencia, sino con su distinta forma de aprender [20, p. 7].

Si bien el aprendizaje kinestésico se enfoca en el aprendizaje con la utilización de las habilidades manuales, es pertinente resaltar que en los diferentes momentos de las clases, se deben brindar herramientas que contribuyan en este sentido, dado que prácticas educativas monótonas y repetitivas, hacen que los estudiantes se desmotiven y no le encuentren sentido a lo aprendido.

La presente propuesta de investigación, en uno de sus momentos, desarrolla el aprendizaje desde lo concreto, con el fin de generar experiencias significativas que conlleven al estudiante a encontrar sentido a los conceptos, particularmente a conceptos del Análisis Matemático.

2.6. El modelo educativo de van Hiele

En sus clases, los esposos van Hiele encontraron falencias en los argumentos que los estudiantes manifestaban sobre los conceptos geométricos, pues aunque estos dieran definiciones de los mismos, pareciese que fuesen repeticiones memorísticas y no articuladas a la esencia del concepto. Además, ellos encontraron que los estudiantes no desarrollaban habilidades del lenguaje respecto a los conceptos geométricos, lo que en muchas ocasiones limitaba la generación de procesos de razonamiento.

Con el propósito de dar soluciones a estos aspectos, surge el modelo educativo de van Hiele, actualmente conocido y utilizado en la comunidad académica, el cual fue inicialmente desarrollado para el campo de la Geometría y actualmente se extiende a otros campos del saber, especialmente, al Análisis Matemático [24, p. 59]. El modelo considera aspectos relevantes para las prácticas escolares, entre ellos vale la pena destacar: La necesidad de conocer los saberes previos del estudiante, la importancia atribuida al lenguaje y la componente visual-geométrica de los conceptos, elementos que se consolidan, con el fin de generar un adecuado razonamiento sobre los conceptos matemáticos, tanto de la Geometría como del Análisis Matemático. Como se nombraba anteriormente, el modelo surge inicialmente en el ámbito geométrico, y fue allí donde se dieron las primeras investigaciones fundamentadas en el mismo. Se puede mencionar: El proyecto Chicago: Van Hiele levels and achievement in secundary school geometry, Oregón: Assessing children is intellectual growth in geometry y Brooklyn: Geometry thinking among adolescents in inner city schools, referenciados por Llorens (1994), los que consideraron esencialmente elementos geométricos [24, pp. 62 - 63].

2.6.1. Componentes del modelo

El modelo educativo de van Hiele se estructura en tres componentes, el insight que se refiere a la comprensión, los niveles de razonamiento que aluden al aspecto descriptivo, dan cuenta de la evolución del razonamiento desde el reconocimiento básico hasta el aspecto formal, y por último, las fases de aprendizaje, que son el elemento prescriptivo, dan pautas a los docentes para organizar actividades de enseñanza. A continuación se hace una breve descripción de cada una de ellas.

El insight

El insight se puede asociar con la percepción e intuición que exhiben los estudiantes ante nuevas situaciones, allí sus acciones dan cuenta de la estructura mental y las redes de relaciones que han desarrollado en torno al concepto.

La teoría de la Gestalt y de van Hiele se refieren a las estructuras mentales de la misma forma pero en términos diferentes, la teoría de la Gestalt describe las estructuras como las expectativas que permiten actuar adecuadamente, donde el término adecuadamente significa la relevancia que se da a la objetividad, además, afirma que "En razón de una estructura mental" van los suministros paralelos con mi "intención", una persona que actúa con intención no actúa al azar, actúa de acuerdo con la estructura que percibe, correspondiente a su estructura mental, la que es la estructura de la expectativa. La teoría de van Hiele, sustenta que la comprensión se da a razón de una estructura mental, la que se caracteriza por su objetividad, donde se puede afirmar que existe *insight* cuando una persona actúa ante una nueva situación de una forma adecuada y coherente [22, pp. 23 - 25].

El insight se puede considerar como aquella situación en la que un estudiante actúa adecuadamente, donde se puede observar una acción fuerte que estabiliza una estructura, desde la que se da respuesta a nuevas preguntas, es decir, el estudiante construye redes de relaciones respecto a un concepto, las mismas que determinan su estructura mental. Además, ésta condiciona sus actos ante las situaciones inesperadas, para poder dar cuenta de sus procesos de razonamiento [22, pp. 33 - 37].

Niveles de Razonamiento

Uno de los fundamentos del modelo educativo de van Hiele, es el aspecto prescriptivo, el cual corresponde a los niveles de razonamiento, éstos describen el conjunto de características que posee el estudiante en correspondencia con sus procesos de razonamiento, desde un nivel básico hasta un nivel de deducción formal. Aceptando la nomenclatura de Llorens [24, pp. 62 - 63] se tiene: Nivel 0: Predescriptivo, Nivel 1: Reconocimiento visual, Nivel 2: Análisis, Nivel 3: Clasificación y relación y Nivel 4: Deducción formal, a continuación se presenta una breve descripción de cada uno de ellos:

Nivel 0. Predescriptivo

Los objetos son los elementos básicos de estudio. En este nivel, los alumnos reconocen los elementos básicos de estudio para el concepto tratado.

Nivel I. De reconocimiento visual

Los objetos son propiedades que analizan los elementos básicos de estudio. Se reconocen los elementos básicos en distintas situaciones y se aprende vocabulario relacionado con el concepto y las distintas relaciones entre los elementos básicos.

Nivel II. De análisis

Los objetos son proposiciones que relacionan las propiedades. Se analizan las relaciones entre los elementos básicos de estudio.

Nivel III. De clasificación y de relación

Los objetos son las ordenaciones parciales (sucesiones) de las proposiciones. Se relacionan los elementos básicos de estudio y se analizan sus propiedades llegando a dar definiciones verbales del concepto tratado.

Nivel IV. De deducción formal

Los objetos son las propiedades que analizan las ordenaciones. Se analiza el concepto en distintas situaciones y se puede llegar a hacer demostraciones formales.

Respecto a los niveles de razonamiento mencionados anteriormente, es importante que los estudiantes no se queden anclados en alguno de ellos, es pertinente que progresen a través de éstos, da tal forma que lleguen a una comprensión adecuada y rigurosa de los conceptos, por lo que se hace necesario brindar las herramientas que permitan este progreso, las cuales serán mencionadas en el siguiente fragmento.

2.6.2. Fases de aprendizaje

Las fases de aprendizaje constituyen un esquema para organizar la enseñanza y están orientadas a favorecer el progreso desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, puesto que como se mencionaba anteriormente, es importante que el estudiante no se ubique siempre en el mismo nivel de razonamiento, es necesario el desarrollo de las actividades y procesos que le permitan enriquecer su estructura mental, para poder progresar a través de los diferentes niveles de razonamiento y es en este sentido en el que se desarrollan las fases del modelo: Fase 1, Interrogación/Información; Fase 2, Orientación dirigida; Fase 3, Explicitación; Fase 4, Orientación libre y Fase 5, Integración. A continuación se realiza una breve descripción de cada una de ellas [24, pp. 62 - 63].

Fase 1: Interrogación/Información

El propósito de esta fase es doble, en primer lugar, el maestro aprende que conocimiento previo tienen los estudiantes acerca del tema y, en segundo lugar, los estudiantes conocen en que dirección se dará el estudio o trabajo a realizar.

Fase 2: Orientación dirigida

Los estudiantes exploran el tema de estudio mediante materiales que el maestro ha ordenado cuidadosamente.

Fase 3: Explicitación

Al construir sobre sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus expresiones acerca de las estructuras que han observado.

Fase 4: Orientación libre

Los estudiantes se encuentran con tareas más complejas tareas con muchos pasos, tareas que pueden ser completadas de varias maneras y tareas de final abierto.

Fase 5: Integración

Los estudiantes repasan y resumen lo que han aprendido con la meta de formación de un panorama de las nuevas redes de objetos y relaciones, ésta solo debe ser una acumulación, comparación e integración de cosas que ya conoce [24, pp. 48 - 51].

Las fases propuestas en el modelo, brindan elementos al docente para estructurar la enseñanza, dado que es importante generar experiencias que estén en concordancia con el nivel de razonamiento de los estudiantes y que contribuyan al mejoramiento y progreso a través de los mismos.

Para avanzar de un Nivel de razonamiento al siguiente, se requiere que el estudiante cumpla todas las características de las cinco Fases. Por lo tanto para propiciar el progreso de Nivel, se deben desarrollar módulos de aprendizaje que tengan en cuenta las propiedades de los mismos y el lenguaje propiod de cada uno de ellos. El presente estudio se centra en el progreso del Niel II al III para el concepto de continuidad local.

2.6.3. Características del modelo

Si bien el modelo se caracteriza por las tres componentes mencionadas anteriormente, es conveniente resaltar que los niveles de razonamiento poseen un conjunto de carácterísticas, las que determinan cada una de las propiedades en los diferentes niveles de razonamiento, aquí es fundamental resaltar la importancia del lenguaje, puesto que a medida que el estudiante avanza en cada uno de los niveles, su lenguaje se va estructurando y refinando. Según la investigación de Vasco y Bedoya [23, pp. 21 - 22], algunas propiedades de los niveles de razonamiento son las siguientes:

- Secuencialidad fija: Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel $n-1$.
- Adyacencia: El objeto de percepción del nivel $n+1$ se convierte en el objeto de razonamiento del nivel $n+2$.

- Distinción: Para alcanzar el nivel n el aprendiz debe reorganizar y reinterpretar el conocimiento adquirido en el nivel $n-1$, de modo que llegue a la percepción de una nueva estructura.
- Separación: De acuerdo con esta propiedad, dos personas que razonen en diferentes niveles no podrían entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.
- Especificidad del lenguaje: Cada nivel tiene un lenguaje específico, a tal punto que las distintas capacidades de razonamiento que van unidas a cada uno de los niveles de van Hiele, se manifiestan de una manera notoria en la expresión verbal y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico.

Las propiedades que aluden a los niveles de razonamiento, dejan claro que el proceso de enseñanza que se imparte en los contextos ecolares debe ir más alla de la determinación de resultados y la memorización de teorías, dado que es necesario involucrar elementos como: La organización, interpretación, reflexión y análisis sobre los conceptos, con el fin de generar procesos de razonamiento adecuados, que propendan por el mejoramiento del mismo y que se articulen con el lenguaje empleado, en correspondencia con el nivel de razonamiento al que pertenezca el estudiante.

2.6.4. Algunos estudios enmarcados en el modelo de van Hiele

El modelo de Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof representa un fundamento teórico y metodológico para la enseñanza de la Geometría, área para la cual fue desarrollado inicialmente.

Sin embargo, en la actualidad el modelo se extiende a otros campos de las Matemáticas, como es el Análisis Matemático, lo cual se puede evidenciar en investigaciones como: Appropiateness of the van Hiele Model for describing student is cognitive processes on algebra task as typified by College Students Learning of functions (1991), Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local (1994), La noción de continuidad desde la óptica del modelo de van Hiele (1999), La modelización del espacio y el tiempo: Su estudio vía el modelo de van Hiele (2000), La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele (2000), Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele (2000), Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica (2002), Diseño de Módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele (2005), Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía área de figuras planas (2005) [23, pp. 25 - 31] y Módulo de aprendizaje para la comprensión de series de términos positivos (2009) [24, pp. 2 - 4]; las que presentan claramente la articulación que puede existir entre el modelo y diferentes conceptos matemáticos, no necesariamente del ámbito geométrico, dado que el modelo de acuerdo a su estructura, permite abordar elementos teóricos y metodológicos en la enseñanza de la Geometría y el Análisis Matemático .

2.7. Mapas conceptuales

Cuando se habla de los fundamentos que consolidan una propuesta investigativa, es pertinente referenciar teórica y metodológicamente, donde exista coherencia entre el marco definido para la propuesta y las estrategias empleadas. Hasta ahora se han presentado algunos elementos que fortalecen la propuesta, siendo necesario mencionar algunas estrategias que se pretenden desarrollar con los estudiantes, entre las cuales se puede destacar la creación de los mapas conceptuales.

En los últimos años, ésta técnica ha gozado de gran acogida en el campo educativo, pues su utilidad a nivel teórico y metodológico vale la pena resaltar. Los mapas conceptuales representan una técnica que permite la visualización del razonamiento y la organización de los pensamientos de los estudiantes, su elaboración da cuenta de la asimilación de los conceptos y de la capacidad de sintetizar las ideas.

Los mapas conceptuales permiten resumir la información, reconocer los conocimientos previos de los estudiantes, establecer relaciones jerárquicas, analizar la estructura mental de un estudiante, entre otros. Aspectos que son básicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos, particularmente de los conceptos matemáticos.

Según Novak y Gowin [17, p. 4]: “Un mapa conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones”. Es decir, la utilización de esta técnica permite encontrar significado a lo aprendido y a su vez consolidar el conocimiento, de manera tal que se favorezca el enriquecimiento de la estructura mental de quien lo elabora. Además, Novak y Gowin afirman:

> Puesto que se produce más fácilmente un aprendizaje significativo cuando los nuevos conceptos o significados conceptuales se engloban bajo otros conceptos más amplios, más inclusivos, los mapas conceptuales deben ser jerárquicos; es decir, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior del mapa y los conceptos progresivamente más específicos y menos inclusivos, en la parte inferior [17, p. 4].

Los mapas conceptuales deben estar orientados a generar aprendizajes significativos en los estudiantes, los cuales se hacen evidentes en las redes de relaciones que construyen respecto al concepto tratado, dado que es en esta instancia, donde los procesos de razonamiento dan cuenta del aprendizaje y comprensión que se ha elaborado de los conceptos.

Los mapas conceptuales permiten entablar relaciones entre los conceptos, con el fin de hacer más viable la comprensión de un tema determinado, adicionalmente favorecen la organización y consolidación de lo aprendido, pues aunque los estudiantes tengan ideas, se hace necesario ordenarlos para encontrar sentido y coherencia sobre el concepto que se está aprendiendo.

El aprendizaje de los estudiantes con la manejo de los mapas conceptuales se ve plasmado en los argumentos y la utilización del lenguaje, dado que a medida que refina sus redes de relaciones el lenguaje se hace más amplio y preciso. Luego, el lenguaje que el estudiante expone en la construcción de sus mapas conceptuales, da cuenta de los procesos mentales llevados a cabo por el mismo.

Es pertinente resaltar la articulación que existe entre los mapas conceptuales y el modelo de van Hiele, dado que ambos le otorgan gran importancia al lenguaje, en los mapas conceptuales el lenguaje permite expresar con códigos o palabras los pensamientos, los que dan cuenta de lo que se ha interiorizado respecto a un tema particular, y en el modelo de van Hiele, se ilustra a medida que el estudiante mejora su nivel de razonamiento explicitando un lenguaje más estructurado, dado que en la medida que exista un aprendizaje y comprensión clara de los conceptos, los mapas conceptuales serán mejor elaborados.

Como lo afirman Zapata y Sucerquia:

> Dado que el modelo de van Hiele propone la existencia e importancia del establecimiento de una red de relaciones en un proceso de aprendizaje, entonces una herramienta como los mapas conceptuales da elementos para representar relaciones significativas entre conceptos, encontramos así, un planteamiento común entre el modelo y los mapas conceptuales, la importancia del lenguaje [24, p. 55].

El lenguaje que construye un estudiante respecto a un concepto matemático, puede ser visualizado en la construcción de sus mapas conceptuales, los cuales dan cuenta de las redes de relaciones elaboradas en correspondencia con las actividades desarrolladas, es decir, al construir un mapa conceptual, los estudiantes están plasmando sus conocimientos y aprendizajes.

En este trabajo de investigación, se presentan momentos donde los estudiantes deben utilizar esta técnica, la cual permite analizar cómo se han estructurado las redes de relaciones respecto al concepto objeto de estudio, en este caso el concepto de continuidad local.

2.8. Módulo de Aprendizaje

El Módulo de Aprendizaje también conocido como Unidad Didáctica, Unidad de Aprendizaje o Módulo de Instrucción, consiste en un conjunto de actividades enmarcadas en cada una de las cinco fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, las cuales tienen como propósito desarrollar procesos de razonamiento en los estudiantes, con el fin de mejorar su nivel respecto al concepto estudiado [3, p. 80].

Las experiencias que los estudiantes deben desarrollar en el Módulo de Aprendizaje, se convierten en una herramienta educativa que permite planear la enseñanza, cuyo propósito es generar experiencias significativas para el aprendizaje de los conceptos.

Las actividades diseñadas en el Módulo de Aprendizaje deben estar enmarcadas en el contexto de los alumnos, pues no tiene sentido diseñar actividades con elementos que están en otro nivel de razonamiento diferente al del estudiante, puesto que no serían comprendidas por ellos. Es esencial que exista un momento inicial para el desarrollo de las actividades de un Módulo de Aprendizaje, el cual de cuenta del nivel de razonamiento inicial del alumno, para que a partir de allí se diseñen las experiencias pertinentes, que estén en correspondencia con el nivel de razonamiento que se desea que los estudiantes alcancen. Como lo planeta Corberan [7, p. 35]:

> Conocimientos y niveles de razonamiento de los estudiantes no pueden considerarse como realidades absolutamente disociadas. Es necesario pensar el progreso a través de los diferentes niveles de razonamiento como un proceso constructivo obligatoriamente ligado al dominio de redes conceptuales cada vez más complejas.

El Módulo de Aprendizaje como la consolidación de un conjunto de actividades que van en correspondencia con el nivel de razonamiento que se desea desarrollar en el estudiante, involucra las propiedades de secuencialidad y adyacencia, donde el progreso en el razonamiento se favorece con el diseño e implementación de actividades que desarrollen habilidades de un nivel inferior al inmediatamente superior.

Recientes investigaciones han aportado en este sentido con el diseño de experiencias de aprendizaje enmarcadas en las fases del modelo, para el progreso del Nivel II al III de razonamiento, respecto a conceptos del Análisis Matemático como aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella y series de términos positivos [24, pp. 2 - 4], los cuales se han articulado en el diseño e implementación de Módulos de instrucción [23, pp. 25 - 31], encaminados al progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes.

La presente investigación se enmarca en este sentido, en el diseño, implementación y aplicación de un Módulo de Aprendizaje, el cual presenta una forma alternativa para la enseñanza de un concepto del Análisis Matemático, el concepto de continuidad local, con el fin de favorecer el desarrollo de habilidades de razonamiento para la definición del mismo en su paso del Nivel II al III del modelo de van Hiele. Los estudiantes responden a un conjunto de actividades enmarcadas en cada uno de los descriptores de fase, los que se refinaron a medida que se desarrollo el trabajo de campo.

2.9. Entrevista de carácter socrático

La entrevista de carácter socrático se caracteriza por su estructura e intencionalidad, con ésta se pretende que el entrevistado construya los argumentos necesarios para llegar a la definición del concepto objeto de estudio, el que es construido a través de diferentes momentos, donde se cuestionan los argumentos que inicialmente posee el estudiante.

En el proceso de estructuración de la entrevista, las preguntas realizadas a los estudiantes son depuradas con el propósito de consolidar un guion entrevista para detectar su nivel de razonamiento, las preguntas realizadas a los mismos van enfocadas en el descubrimiento de las contradicciones que se están argumentando, con el fin de desestabilizar aquello que carece de argumentos y de significado, para generar un proceso de razonamiento crítico en los estudiantes, con argumentos claros y coherentes. Según Londoño y Jurado:

> El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada [15, p. 27].

Por lo tanto, el papel de quien pregunta en la entrevista de carácter socrático, debe ser el de un incitador de argumentos coherentes sobre lo que se está hablando, con la idea de fortalecer las redes de relaciones que el entrevistado ha elaborado, para llegar a respuestas con sentido y coherencia respecto al concepto estudiado.

Otro aspecto importante sobre la entrevista de carácter socrático son sus características: Intencionalidad, lenguaje, conceptos básicos, experiencias previas, diálogo inquisitivo, movilización del pensamiento, aporte de información, problematización de ideas, paso por los tres momentos y la red de relaciones, las cuales se consolidan en el desarrollo de la misma [15, p. 28], con el fin de organizar una herramienta metodológica para acercar a los estudiantes a los conceptos matemáticos.

Respecto a la movilización del pensamiento y las redes de relaciones, es válido resaltar que en aquellos momentos donde el estudiante encuentra desequilibrios que desestabilizan su estructura mental, la entrevista interviene generando cuestionamientos que lleven a un adecuado razonamiento sobre el concepto, los que permiten que se estructuren nuevas redes de relaciones sobre el concepto y que el estudiante mejore en sus procesos de razonamiento.

La presente investigación tiene como modelo de entrevista el método socrático, trabajado ampliado por Londoño y Jurado [15, p. 28], donde el propósito es analizar los procesos de razonamiento que el estudiante expone ante el concepto de continuidad local cuando éste es interrogado y desestabilizado de sus esquemas, dado que allí los argumentos se van refinando con la idea de llegar a la construcción del significado del concepto.

2.10. Antecedentes y fundamentación del problema

Respecto a los fundamentos teóricos mencionados en los Capítulo I y II y a las practicas educativas actuales, se puede argumentar que existe la necesidad de generar espacios propicios para la reflexión en torno a los conceptos enseñados en la escuela, particularmente en el área de Matemáticas, ya que en repetidas ocasiones los conocimientos son presentados en forma acabada y no se propende por el análisis y reflexión en torno a los mismos, por ejemplo en el campo del Análisis Matemático, cuando los estudiantes tratan de acercarse a los conceptos de límite, función, continuidad, derivadas, integral, entre otros, encuentran grandes obstáculos respecto a la definición y comprensión de los mismos.

Generalmente el concepto de continuidad es presentado desde un aspecto intuitivo de lo que puedan concebir los estudiantes y desde la aplicación de los teoremas, lo que hace que no se profundice en su conceptualización sino que sea abordado desde un manejo operativo y mecánico.

Esta investigación tiene como propósito fundamental presentar una forma alternativa para la enseñanza del concepto de continuidad local y a la vez contribuir a la construcción de mecanismos que favorezcan la comprensión del mismo. El punto de partida para este trabajo es la Tesis Doctoral presentada por el doctor Campillo (1999): “La noción de continuidad desde la óptica del modelo de Van Hiele”, que formuló descriptores para los Niveles 0, I, II, III y IV, para el concepto de continuidad de Cauchy, pero que no se ocupó de la forma como los estudiantes avanzan de un nivel de razonamiento al siguiente. Además, en la revisión de la literatura hasta el momento, no se han encontrado investigaciones que se ocupen de describir la forma como los alumnos progresan de un nivel de razonamiento al siguiente en relación con el concepto de continuidad local [5, pp. 84 - 87].

En la presente propuesta, se pretende caracterizar el razonamiento de los estudiantes en su paso del Nivel II al Nivel III, a través de la utilización de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, como herramienta que aporta al diseño de actividades para la enseñanza, con el fin de favorecer la comprensión del concepto objeto de estudio.

Otro aspecto relevante que motiva la realización de este trabajo de investigación, son los estudios desarrollados por algunos grupos de investigación, los cuales con sus aportes han mostrado que es necesario estructurar la Educación Matemática, para poder contribuir con el conocimiento y aprendizaje de los educandos. Se destaca el grupo de Investigación: "Educación Matemática e Historia (UdeA - EAFIT)", el mismo que ha realizado diferentes investigaciones en el campo del Análisis Matemático, que se han convertido en formas alternativas y viables en el campo de la Educación Matemática a nivel teórico y metodológico.

Además, el modelo educativo de van Hiele como el marco teórico y metodológico que guía este trabajo, favorece en su componente descriptivo y prescriptivo el diseño, implementación y aplicación de un Módulo de Aprendizaje, en este caso particular, se parte de alumnos que se encuentren en el Nivel II de razonamiento respecto al concepto, para contribuir con un mecanismo apropiado que les permita acceder a un nivel superior, el Nivel III en el marco del modelo.

2.11. ¿Porqué contextualizar este estudio en el modelo de van Hiele?

El aspecto descriptivo del modelo dado por los niveles de razonamiento y el prescriptivo por las fases de aprendizaje, van en correspondencia con lo que se desea desarrollar e implementar en la investigación, la que considera ambos aspectos, aunque se desarrolla fundamentalmente en el aspecto prescriptivo.

Respecto al aspecto descriptivo, se toma como base los descriptores de nivel dados por Campillo [5, pp. 84 - 87], el cual define los descriptores para los Niveles 0 al III respecto al concepto de continuidad local. La presente propuesta se enfoca en los descriptores del Nivel II y III propiamente, en cuanto al aspecto prescriptivo, conformado por las fases de aprendizaje, por las que un estudiante debe recorrer para avanzar de un nivel de razonamiento al siguiente, con el propósito de progresar del Nivel II al Nivel III respecto al concepto objeto de estudio.

Otro aspecto relevante que permite enmarcar la investigación en este modelo es la importancia que se da a la componente visual geométrica de los diferentes conceptos, dado que el concepto de continuidad local goza de este aspecto en correspondencia con el mecanismo que se va a desarrollar, pues allí el estudiante pone de manifiesto su estructura cognitiva de acuerdo a la imagen que posea del concepto, la que inicialmente se caracteriza por su aspecto geométrico.

Finalmente, la importancia atribuida al lenguaje se convierte en un elemento esencial en el desarrollo del trabajo de investigación, dado que el progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes, se hace evidente con las expresiones y el lenguaje que desarrollan sobre los conceptos, cuando los estudiantes se encuentran en un Nivel II de razonamiento, sus expresiones son diferentes a las utilizadas en el Nivel III, puesto que a medida que avanza en el nivel de razonamiento sus argumentos son más refinados y las redes de relaciones construidas respecto al concepto, son más elaboradas.

2.12. Planteamiento del problema de investigación

Las estrategias de enseñanza habituales en los contextos escolares, comúnmente están limitadas al desarrollo de pedagogías tradicionales, donde el estudiante es un receptor de conocimiento, sin permitir espacios para la reflexión y el análisis, es decir, el proceso de enseñanza y aprendizaje se encuentra determinado por la memorización de teorías y conceptos, sin meditar sobre los mismos.

Por lo tanto, es pertinente que nuestras prácticas educativas en ámbitos matemáticos, además de la adquisición de un saber, generen espacios para la reflexión e interiorización de los conceptos, los cuales se dan en correspondencia con la metodología docente empleada, pues es el maestro, quien con sus estrategias se convierte en un facilitador del conocimiento, especialmente en el ámbito matemático.

En los contextos matemáticos, especialmente en clases de Cálculo y Análisis Matemático, los conceptos son abordados desde su aspecto operacional, utilizando en la mayoría de los casos postulados y teoremas para la resolución de ejercicios y problemas, sin comprender las definiciones de éstos. Particularmente, el concepto de continuidad local, que es un fundamento teórico del Cálculo y del Análisis Matemático, es importante que sea comprendido por los estudiantes, puesto que es útil, aplicable y fundamental para comprender otros conceptos y por consiguiente, surge la necesidad de buscar estrategias de enseñanza que se puedan aplicar en el aula de clase y que aporten a la comprensión de los mismos.

Los estudiantes del último grado de bachillerato y primeros semestres de universidad aprenden el concepto de continuidad local en forma mecánica, dejando de lado su significado. De allí, se desprende la necesidad de brindarles experiencias de aprendizaje relevantes para que progresen del Nivel II al Nivel III respecto a la comprensión de éste concepto.

Luego, esta investigación es una de las puertas abiertas que deja la tesis doctoral de Campillo, en su trabajo de investigación (1999) hace una caracterización de los descriptores de nivel para el concepto de continuidad, donde determina los descriptores que permiten ubicar a un alumno en alguno de los niveles 0, I, II y III del modelo de van Hiele. En el Nivel II, los estudiantes analizan las condiciones necesarias para definir la continuidad de una función en un punto, mientras que en el Nivel III utilizan dichas condiciones para determinar si existe o no la continuidad de la función en dicho punto.

Debido a la importancia que tiene el concepto de continuidad local en el Análisis Matemático para la comprensión de conceptos como: Derivada, series, integral, entre otros, es pertinente plantear la siguiente pregunta: ¿Cómo son los procesos de razonamiento que presenta un estudiante en el paso del Nivel II al Nivel III, a través del desarrollo de un Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de continuidad local en el marco del modelo educativo de van Hiele?, es por ésto que la propuesta de investigación se enmarca en dicho modelo, puesto que a través de las fases de aprendizaje se brindan fundamentos que permiten fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje para la comprensión del concepto de continuidad local.

2.13. Objetivos de investigación

El mejoramiento del razonamiento de los estudiantes respecto a los conceptos matemáticos, está mediado por la implementación de estrategias adecuadas que apunten al desarrollo de habilidades, con el fin de comprender los conceptos matemáticos.

De acuerdo con los elementos teóricos y metodológicos, como también los antecedentes, se han trazado los siguientes objetivos de investigación.

2.13.1. Objetivo general

Caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III en el marco del modelo educativo de van Hiele mediante el diseño de un Módulo de Aprendizaje para el concepto de continuidad local.

2.13.2. Objetivos específicos

1. Describir el proceso de razonamiento respecto al concepto de continuidad local del Nivel II al Nivel III a través de la implementación de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele.

2. Diseñar un Módulo de Aprendizaje enmarcado en las fases del modelo educativo de van Hiele que le permitan al estudiante explicitar su proceso de razonamiento respecto al concepto de continuidad local.

3. Implementar en un grupo de estudiantes un Módulo de Aprendizaje enmarcado en las fases del modelo educativo de van Hiele que les permita explicitar su proceso de razonamiento en el paso del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local.

4. Contribuir al progreso del Nivel II al Nivel III de razonamiento en el marco del modelo educativo de van Hiele respecto a la comprensión del concepto de continuidad local.

El modelo educativo elegido, por su estructura y características, enfatiza en aspectos descriptivos y prescriptivos, lo cual hace posible articular los intereses propios de la investigación con el trabajo a desarrollar, pues las fases del modelo ofrecen elementos que permiten fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre diferentes conceptos matemáticos, y los niveles determinan las características de los procesos de razonamiento presentados en los estudiantes.

Enmarcar la investigación en el modelo educativo de van Hiele, permite desarrollar estrategias que estén en correspondencia con el objetivo de la misma, el cual se enfoca en caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en su paso del Nivel II al III, dado que la estructura del modelo facilita la consecución del mismo, pues en ésta se contempla el progreso del nivel de razonamiento del estudiante, a través del desarrollo de actividades apropiadas en cada una de las cinco fases, las cuales al ser realizadas adecuadamente favorecen el progreso en el nivel de razonamiento, es de ésta manera, como la mencionada estructura se articula con el propósito de la investigación.

En el desarrollo de la próximo Capítulo, se incluye cada uno de los elementos que se utilizan para la recolección de la información, de acuerdo con el enfoque de la propuesta.

Capítulo 3

Metodología y diseño de la investigación

En este Capítulo se presenta el diseño metodológico que fundamenta la propuesta investigativa y cada uno de los instrumentos empleados para la recolección de los datos, con su respectivo propósito. Entre los instrumentos utilizados para la recolección de la información, se destaca el Módulo de Aprendizaje y su proceso de construcción, refinado a través de la utilización de herramientas como: Entrevistas de carácter socrático, mapas conceptuales y cuestionarios; además, se describe su propósito y su respectiva estructura.

En el marco de la metodología propuesta, se asume un enfoque de carácter cualitativo, a continuación se hace una breve descripción de los elementos que caracterizan este tipo de investigaciones.

3.1. Enfoque

El abordaje metodológico desde una perpectiva cualitativa permite analizar en detalle el fenómeno estudiado y describir las características particulares del mismo. Se estudia un fenómeno social en un contexto particular, el que puede ser examinado en profundidad a partir de éste enfoque cualitativo.

Este estudio se enmarca en un paradigma cualitativo, dado que se explora y analiza una situación contextualizada, se observan y se estudian las características particulares de los estudiantes, los participantes son constructores de conocimiento, el diseño es flexible, los datos se obtienen de las producciones escritas, de las entrevistas y se elabora la codificación y categorización de la información que permite analizar los procesos de razonamiento [10, pp. 526 - 530].

3.2. Diseño

El diseño empleado en la presente investigación es el estudio de casos, el que permite analizar de manera detallada y en forma individual el trabajo de cada estudiante, posibilitando mayor profundidad en la recoleccion de la información y su respectivo análisis, dado que “el objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, no la cantidad ni la estandarización”, donde es posible realizar una descripción del proceso de razonamiento en el paso del Nivel II al III de cada uno de los estudiantes seleccionados para el estudio de casos [10, p. 566].

Un estudio de casos puede ser usado para dar respuestas a preguntas de cómo y por qué. En este estudio es fundamental analizar cómo razonan los estudiantes frente al concepto de continuidad local, lo que permite describir los procesos de razonamiento en el progreso de un nivel inferior al inmeditamente superior. En el desarrollo de esta propuesdta de investigación, el estudio de casos se realiza a tres estudiantes, allí se describe cómo es el proceso de razonamiento de éstos durante el desarrollo del Módulo de Aprendizaje frente al concepto de continuidad local a partir de la definición dada por Cauchy, y en la que se presenta la definición a partir del control de errores, determinados por ε y δ.

3.3. Participantes

En el trabajo de campo participan estudiantes del grado once de una institución educativa pública del Municipio de Medellín, estos se caracterizan por pertenecer a una población de nivel socio económico medio-bajo ubicados en los estratos: 1, 2, 3 y 4. La mayoría de los hogares de estos estudiantes están formados por madres cabeza de familia, que diariamente trabajan para mantener el hogar y el estudio de sus hijos. En estos estudiantes predomina el interés por las actividades sociales y culturales, lo que se refleja en la constante participación de los mismos en diferentes eventos.

En general, la población de estudiantes se caracteriza por su amabilidad y alegría en las diferentes actividades escolares, los cuales participan constantemente en las actividades propuestas por la institución. En cuanto a la presente propuesta investigativa, los participantes seleccionados se distinguen por su capacidad de hablar, la disposición para el desarrollo de las actividades y por estar ubicados en determinado nivel de razonamiento, donde se retoman sólo estos tres casos para el análisis, los mismos que aportan información necesaria para la consecución de los objetivos trazados.

3.4. Desarrollo del trabajo de campo

El trabajo de campo se realiza en diferentes etapas, donde inicialmente es necesario determinar cuáles de los estudiantes se encuentran ubicados en un Nivel II de razonamiento, con el fin de proceder con el desarrollo de las actividades del Módulo de Aprendizaje. A continuación se explica cómo se desarrolla el trabajo de campo en sus etapas correspondientes:

1. Inicialmente se selecciona un grupo de 37 estudiantes del grado en mención, al que se le aplica el test de Campillo, para asegurar el nivel de partida, es decir, determinar el nivel de razonamiento inicial de los mismos, de los cuales son seleccionados 3 estudiantes porque el diseño empleado es el estudio de casos, dado que se pretende describir el razonamiento de cada uno de ellos en forma detallada, con el fin de caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes respecto al concepto de continuidad local [5, pp. 84 - 87].

2. Se seleccionan tres estudiantes que se encuentren en el Nivel II de razonamiento para realizar las entrevistas de carácter socrático.

3. Con los tres estudiantes seleccionados y con todo el grupo se desarrollan e implementan las guías que conforman el Módulo de Aprendizaje.

4. Simultáneamente con el desarrollo de las guías, son capacitados todos los estudiantes del grupo inicial, sobre la elaboración de mapas conceptuales y el manejo de las aplicaciones en GeoGebra®.

5. Con el desarrollo de las actividades del Módulo de Aprendizaje, se refinan las preguntas y se elabora un cuestionario para cada fase.

6. Una vez desarrollado el Módulo de Aprendizaje, se procede nuevamente con la resolución del test de Campillo para visualizar el nivel de razonamiento que han alcanzado los estudiantes después de finalizar el trabajo de campo.

7. Por último, se realiza una codificación y categorización de la innformación para describir el proceso de razonamiento de los estudiantes en su paso del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local, que es presentada en la sección del Análisis de la Información.

8. El trabajo en profundidad se realizó con los tres estudiantes inicalmente seleccionados. Otros estudiantes del grupo se motivaron por el desarrollo de todas las actividades, donde finalmente mejoraron su nivel de razonamiento de acuerdo con al última aplicación del test de campillo, el cual se caracteriza por ser el producto de la refinación de la entrevista de carácter socrático para determinar el nivel de razonamiento en los estudiantes, cuyas características del cuestionario, están en correspondencia con las características de la entrevista, como: Intencionalidad, lenguaje, experiencias previas del entrevistado, diálogo inquisitivo, movilización del pensamiento, aportes de información, problematización de las ideas, el paso por tres momentos (saber inial, problematización del conocimiento y comprensión del concepto) y la red de relaciones; características que hacen parte de la estructura del cuestionario desarrollado por Campillo [15, pp. 94 - 100] y [5, pp. 50 - 97].

3.5. Instrumentos

Los instrumentos seleccionados para la recolección de los datos en el proceso de investigación están en correspondencia con el objetivo de la misma y proponen actividades que apuntan a la consecución de los objetivos, permitiendo que los estudiantes expongan sus procesos de razonamiento respecto al concepto de continuidad local. Dichos instrumentos son:

- Test de Campillo
- Entrevistas
- Mapas conceptuales
- Módulo de Aprendizaje
- Cuestionario de las fases

Las tareas y actividades realizadas por los esutidiantes, utilizando estos intrumentos, son analizados de acuerdo con el paradigma cualitativo elegido. Los resultados se encuentran en el Capítulo 4 en la página 87.

3.5.1. Test de Campillo

Es una prueba escrita orientada a conocer el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes sobre el control de curvas en relación con el concepto de continuidad local.

El test consta de 32 preguntas de selección múltiple, que fueron consolidadas a partir de la refinación de una entrevista de carácter socrático realizada por Campillo. La prueba no tiene el carácter de una evaluación, su propósito fundamental es la detección del nivel de razonamiento. Otra característica, es que es semi-estructurada, se deja una opción para que el estudiante escriba su respuesta en el caso de que las opciones que se le brindan no concuerden con su forma de razonar [5, pp. 84 - 87]. Las 32 preguntas del test se agrupan en tres bloques de respuestas, los cuales determinan la ubicación de los estudiantes en el nivel de razonamiento de acuerdo a la cantidad de respuestas correctas en cada uno de ellos, donde en la presente propuesta de investigación los estudiantes inicialmente poseen un nivel de razonamiento de acuerdo a sus respuestas por bloques y donde posteriormente se analizan nuevamente sus resultados, para determinar el nivel de razonamiento que han alcanzado.

En el presente trabajo de investigación, el test se realiza al comienzo y al final del trabajo de campo, al inicio se utiliza para visualizar la conducta de entrada de los estudiantes, es decir, para determinar en qué nivel de razonamiento se encuentran, en este caso en particular, para seleccionar los estudiantes que se encuentran en el Nivel II de razonamiento frente al concepto de continuidad local. Y al finalizar el trabajo de campo, para analizar los cambios que se han presentado en el razonamiento de los mismos.

3.5.2. Entrevistas

Las entrevistas realizadas a los estudiantes y que permitieron refinar las preguntas planteadas en el Módulo de Aprendizaje son de carácter socrático [15, pp. 25 - 30] y son refinadas a medida que se desarrolla el trabajo de campo, la intencionalidad de estas preguntas se enfoca en visualizar los razonamientos presentados por los estudiantes, los que inicialmente tienen una red de relaciones establecida en torno al concepto, y a medida que razonan sobre el mismo, la enriquecen con los argumentos generandos al resolver cada una de las actividades propuestas.

Las preguntas y actividades que se desarrollan a través de cada una de las fases de aprendizaje, permiten que el estudiante construya una red de relaciones en torno al concepto, esta red es depurada a medida que se resuelven las actividades, las cuales están fundamentadas en el mecanismo de los estiramientos horizontales, el cual consiste en realizar deformaciones a la curva para analizar su comportamiento, experiencias que se desarrollan con el programa GeoGebra® y la interacción con gomas elásticas.

Uno de los objetivos de la entrevista de carácter socrático es la movilización del pensamiento, por lo tanto en algunos momentos se repiten preguntas, donde la pregunta inicial va orientada a analizar la forma como el estudiante razona en un primer momento y, la posterior a confirma su avance o estancamiento, a partir de las conjeturas realizadas, la desestabilización de sus estructuras previas y que ayudan a formar la nueva estructura de razonamiento.

Dado el carácter socrático del Módulo de Aprendizaje, es necesario que en ciertos momentos se presenten aportes de información previos a las preguntas, con el fin de brindar claridad, para evitar confusiones y esclarecer conceptos necesarios que implican la comprensión del concepto objetivo de estudio. Así, la entrevista se convierte en uno de los fundamentos para la construcción del Módulo de Aprendizaje, el que es presentado como uno de los productos finales de la investigación, ver Apéndice B en la página 181.

Las preguntas de carácter socrático que guían las actividades del Módulo de Aprendizaje, han sido refinadas en un cuestionario que desarrollan los estudiantes al finalizar el trabajo en cada fase, los mismos que permiten dar cuenta del razonamiento de los estudiantes en correspondencia con los descriptores de cada una de ellas.

A continuación se ilustran algunas de las preguntas planteadas en el Módulo de Aprendizaje.

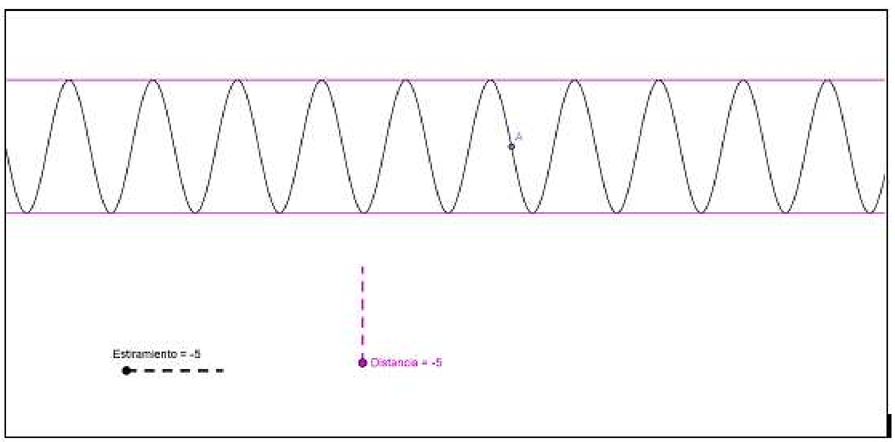


Figura 3.1: Aplicación 1.

Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 1)

Responde respecto a la Aplicación 1:

a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces *click* en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces *click* en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A.

b) Presiona *click* en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona *click* en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

Estas preguntas tienen la intencionalidad de colocar a prueba lo que el estudiante sabe, que reafirme los conceptos que tiene bien fundamentados y que pueda razonar sobre los que no. Esto le permite comenzar a construir el razonamiento apropiado en torno al objeto de estudio, de allí la importancia de una respuesta en correspondencia con el mecanismo empleado, pues la idea es enriquecer la red de relaciones previa que posee, para favorecer la comprensión sobre el concepto. La entrevista de carácter socrático, es una de las herramientas que permite poner en evidencia los procesos de razonamiento generados por los estudiantes, donde finalmente se propende por la comprensión del concepto y la refinación del lenguaje, en correspondencia con el mismo.

3.5.3. Mapas conceptuales

En el desarrollo de cada una de las entrevistas, es necesario analizar las construcciones mentales y las redes de relaciones elaboradas respecto al concepto objeto de estudio, para lo que se utilizan los mapas conceptuales, dado que ellos permiten analizar la estructura cognitiva del estudiante en correspondencia con las redes de relaciones elaboradas.

En cada una de las fases propuestas para el Módulo de Aprendizaje, el estudiante construye mapas conceptuales, en la fase 1 y 5, al comienzo y al final de las actividades y en las fases 2, 3 y 4, finalizando las mismas. El mapa conceptual inicial en la fase 1, permite analizar sus conocimientos previos, y el mapa final de la misma, permite observar las construcciones elaboradas a lo largo de la fase 1, el cual se convierte en el mapa inicial para la fase 2 y así sucesivamente, hasta llegar a la fase 5, donde finalizando la misma, el estudiante elabora nuevamente otro mapa que permirte dar cuenta de todas las redes de relaciones construídas a lo largo del trabajo de campo, debido a que es en la fase 5 donde integra y consolida los procesos de razonamientos generados en las fases anteriores, siendo los mapas conceptuales la herramienta que permite dar cuenta de las estructuras que han sido interiorizadas en los estudiantes, razón por la cual es utilizado constantemente en el desarrollo del Módulo de Aprendizaje.

3.5.4. Módulo de Aprendizaje

El Módulo de Aprendizaje (ver Apendice B, página 181) que los estudiantes desarrollaron, está enmarcado en las cinco fases del modelo educativo de van Hiele, en cada una de ellas se presentan los descriptores que fueron refinados con el trabajo de campo y el desarrollo de las entrevistas, cuyo propósito fue favorecer el progreso del Nivel II al Nivel III de razonamiento respecto al concepto de continuidad local.

El trabajo de los estudiantes con el Módulo de Aprendizaje permitío el análisis de los argumentos expuestos en cada una de las preguntas de las fases. Se identificaron los procesos de razonamiento (ver el análisis de los mismos en el Capítulo 4, página 87) generados respecto al concepto de continuidad local, los mismos que dan cuenta de las redes de relaciones construidas durante el proceso.

3.6. Descriptores de Nivel

Los descriptores de nivel que permiten medir el nivel de razonamiento del alumno, respecto al concepto de continuidad local, fueron desarrollados por Campillo en su Tesis Doctoral, los cuales representan el producto de la refinación de una entrevista de carácter semiestructurado, cuyas características están en correspondencia con las de la entrevista socrática, donde posteriormente se diseña un test que permite ubicar los estudiantes en el nivel de razonamiento correspondiente, de acuerdo a sus respuestas. A continuación se presentan el conjunto de descriptores desarrollados por Campillo para cada uno de los niveles de razonamiento [5, pp. 84 - 87].

3.6.1. Descriptores del Nivel 0

- El mero reconocimiento de los objetos a estudio (puntos, curvas, rectas) constituye lo que consideramos nivel 0 o predescriptivo: Se reconocen los abjetos con sus propiedades matemáticas elementales. Un punto no tiene dimensiones, una curva está formada por infinitos puntos y no tiene agujeros entre puntos.

3.6.2. Descriptores del Nivel I

- La construcción del estiramiento por el alumno será una característica del nivel I, estiramiento entendido como una separación horizontal de los puntos de una curva, dejando fijo el distanciamiento vertical entre ellos.
- El reconocimiento del trozo de curva controlado localmente, fijándose para distinguir el punto de corte entre la curva y la recta.
- Una característica de nivel I es una primera apreciación de lo que luego vendrá a construir el dinamismo del concepto: Unas rectas horizontales más cercanas al punto provocan una reducción del trozo de curva controlado localmente; comprende que el resultado depende de la variable rectas.
- Diferenciación del nivel (II) El alumno en nivel I que no ha llegado al nivel II no recurre a las deformaciones, cuando tiene dificultades para apreciar cual es el trozo de curva controlado localmente, al no ser capaz de utilizar herramientas anteriores ante un problema nuevo.

3.6.3. Descriptores del Nivel II

- La utilización de las deformaciones de forma adecuada para poder decidir el trozo de curva controlado localmente es una característica del nivel II: La utilización de nuevos medios para resolver un problema que hasta ahora no se le había presentado.
- Fijado un distanciamiento, la apreciación de que una curva no tiene trozo controlado localmente para estas rectas dadas, es una distinción con el nivel I, siempre que llegue a esa aseveración tras haber realizado las deformaciones adecuadas y haya generalizado que, en el teórico proceso infinito de posibles deformaciones, no podrá apreciar el trozo controlado. Así como la apreciación de trozo de curva controlado es un proceso finito y realiza deformaciones hasta poder apreciar los cortes de la curva con la recta con claridad, la conjetura de la no existencia de control local, supone un paso más en la calidad del razonamiento.
- El alumno en un nivel II avanzado también podrá desenvolverse en este tipo de problemas, aunque no se le explicite un distanciamiento vertical de entrada.

- La separación entre los niveles II y III, sería la capacidad de distinguir que no se obtiene el mismo concepto de control local comenzando por distanciamientos verticales en lugar de horizontales.

3.6.4. Descriptores del Nivel III

- Es capaz de ejemplificar situaciones en donde la distinción nombrada es patente.

- Proporciona el método adecuado para saber si una curva es controlable localmente y es capaz de aplicarlo correctamente, siendo esta actitud un diferenciador claro del nivel III.

Los anteriores descriptores, correspondientes a los decsriptores de nivel, se convierten en un punto de partida para la realización del presente trabajo de investigación, debido a que éstos brindan las pautas para crear los descriptores de fases, los cuales dan cuenta de los desempeños que los estudiantes llevan a cabo para progresar en su nivel de razonamiento, es decir, el aspecto descriptivo desarrollado por Campillo brinda argumentos para la implementación del aspecto prescriptivo del modelo, el cual se enfoca en la implementación de un mecanismo a través del desarrollo de un Módulo de Aprendizaje, donde los descriptores de nivel dan cuenta del nivel de razonamiento en el que se encuentra el estudiante y donde los descriptores de fase dan cuenta de los procesos que ellos desarrollan para progresar en el mismo, particularmente en esta investigación, el progreso del Nivel II al Nivel III de razonamiento, respecto al concepto de continuidad local.

3.7. Fases de Aprendizaje

Esta propuesta de investigación se enfoca en el aspecto prescriptivo del modelo, que corresponde a las fases de aprendizaje, las cuales se fundamentan en el diseño de actividades como herramientas para la enseñanza, el apredizaje y la detección de los procesos de razonamiento que realizan los estudiantes den su paso del Nivel II al III en el módelo educativo de van Hiele, respecto del concepto de continuidad local de Cauchy. El Módulo de Aprendizaje se encuentra diseñado bajo estos fundamentos: Aprendizaje desde lo concreto, interacciones con el *software* GeoGebra® y el razonamiento expuesto, los cuales se evidencian a lo largo de las actividades planteadas en cada fase.

3.7.1. Aprendizaje desde lo concreto

En el desarrollo de las actividades desde lo concreto los estudiantes interactúan con diferentes materiales. Actividades como: Observar un punto dibujado en un hilo y estirarlo para mirarlo con la lupa, crear un geoplano, dibujar figuras planas en él y luego ampliarlas horizontal y verticalmente, entre otras. Esto permite que el estudiante analice los conceptos: Estiramiento horizontal, vertical y en ambos ejes, con el propósito de familiarizarlos con conceptos que se utilizarán en el desarrollo del trabajo de campo [3].

Figura 3.2: Construcción del geoplano.

3.7.2. Interacciones con el *software* GeoGebra®

La utilización de nuevas técnicas para la enseñanza de conceptos del Cálculo, resultar motivante para los estudiantes, puesto que están accediendo a la comprensión de los conceptos con estrategias no tradicionales, lo cual brinda un fundamento a la propuesta de investigación para utilizar un paquete computacional que permite orientar diversas actividades del Módulo de Aprendizaje.

El GeoGebra® es un paquete computacional donde pueden ser diseñadas diferentes aplicaciones para el aprendizaje de conceptos matemáticos y éste en sus múltiples componentes permite visualizar cada una de las partes de las aplicaciones.

El concepto de continuidad local es abordado en este programa a través de diferentes aplicaciones que constan de: Curvas, rectas, puntos y deslizadores, *zoom* vertical, horizontal y en ambos sentidos. Con el *software* se puede explorar la componente visual geométrica del concepto de estudio y visualizar sus características en este sentido.

[3]Fotografía tomada durante el desarrollo y construcción del geoplano.

La interfaz de GeoGebra® admite realizar movimientos en las aplicaciones, lo que permite generar conjeturas frente al concepto y visualizar aspectos de las curvas que a simple vista no se reconocen. Es así como su uso, en el aula de clase, favorece la realización de actividades como: Estiramientos sobre curvas, desplazamientos de rectas, zoom de acercamientos, entre otros; las anteriores acciones son fundamentales para la construcción del mecanismo que el estudiante utiliza en el desarrollo de las actividades del Módulo de Aprendizaje; dicha construcción lleva al estudiante a reconocer cuándo una curva se puede controlar localmente, hecho fundamental para que el estudiante verbalice el concepto de continuidad local de Cauchy.

3.7.3. Razonamiento expuesto

El razonamiento expuesto por los estudiantes se manifiesta a través de diferentes mecanismos, uno de ellos es la construcción de mapas conceptuales, en la cual no sólo se hace explícito el refinamiento del lenguaje con respecto al concepto objeto de estudio, si no que también se pone de manifiesto la red de relaciones establecida por los estudiantes; de manera similar las respuestas presentadas en cada una de las fases del Módulo de Aprendizaje y en la entrevista dan cuenta de su estructura mental y las redes de relaciones que se han elaborado.

Las socializaciones, conjeturas, producciones escritas y aportes de los estudiantes, permiten evidenciar sus procesos de razonamiento y por ende identificar si existe o no progreso en estos, además, favorece la construcción de espacios para que se hagan consientes de sus avances y construcciones, mediante la identificación de aciertos y de posibles errores en su proceso de razonamiento.

3.7.4. Descriptores de fase y cuestionarios

En el desarrollo de las actividades del Módulo de Aprendizaje, las preguntas son refinadas y consolidadas en un cuestionario de fases, el mismo que está en correspondencia con los descriptores de fases y los objetivos planteados en cada una de ellas. Los descriptores, se obtuvieron a partir de la refinación de cada una de las entrevistas de carácter socrático llevadas a cabo a los estudiantes, las que en diferentes momentos desestabilizan la estructura mental inicial de los mismos, enriqueciendo la red de relaciones que poseen en torno al concepto tratado, manifestando argumentos sobre su proceso de razonamiento más elaborados, que se pueden observar en las respuestas del cuestionario que ha sido consolidado.

A continuación se presenta el propósito de cada una de las fases, los descriptres obtenidos en el trabajo de campo y los cuestionarios que se implementaron al finalizar cada una de ellas.

Fase 1: Información

En esta fase los estudiantes conocen el material a utilizar y la temática a desarrollar, allí el docente identifica los conocimientos previos que poseen los estudiantes para el desarrollo de experiencias posteriores. Para el presente estudio se pretende reconocer los conceptos previos que poseen los estudiantes en torno a: El punto, la recta y la curva.

Adicionalmente en esta fase los estudiantes son informados sobre conceptos que van a trabajar en actividades posteriores: Estiramiento horizontal, separación entre puntos, intersección entre elementos geométricos y trozo de curva controlado.

Por lo tanto, uno de los propósitos fundamentales de esta fase, además del reconocimiento de los conocimientos previos que posee el estudiante, es también introducirlo en la temática a desarrollar, en este caso el mecanismo de estiramientos horizontales, que será trabajado con el Geoplano y con el GeoGebra®.

Objetivos de la Fase 1

Los siguientes objetivos corresponden a los propósitos que el estudiante debe cumplir con el desarrollo de las actividades de la fase 1, están orientados al reconocimiento de sus saberes previos y a situarlo en los conceptos previos a utilizar durante el trabajo de campo. Éstos objetivos son:

- Definir el punto, la recta y la curva a partir de sus propiedades matemáticas y geométricas.
- Analizar las características de un estiramiento horizontal y la separación entre puntos.
- Reconocer que la intersección entre una recta y una curva es un punto.
- Reconocer cuando un trozo de curva está controlado.

Descriptores de la Fase 1

Las actividades que el estudiante desarrolla en esta primera fase dan cuenta de un conjunto de características denominadas descriptores. Permiten determinar si el estudiante ha desarrollado los procesos de razonamiento correspondientes para la fase 1, a continuación se presentan los mismos.

- Define el punto, la recta y la curva a partir de sus propiedades matemáticas y geométricas.

  Con este descriptor se pretende que el estudiante de a conocer sus conocimientos sobre los elementos: Punto, recta y curva, con el fin identificar sus conocimientos previos respecto a los mismos.

- Analiza las características de un estiramiento horizontal y la separación entre puntos.

  La intención de este descriptor es posibilitar que el estudiante aborde experiencias que le permitan conocer los elementos y conceptos a desarrollar, particularmente los estiramientos horizontales y sus respectivas características.

- Reconoce que la intersección entre una recta y una curva es un punto.

  Se pretende que el estudiante este en la capacidad de identificar el lugar geométrico que determina la intersección entre una curva y un punto en el plano.

- Comprende que el trozo de curva controlado No depende de las rectas horizontales.

  Allí, el estudiante debe hacer explícito su capacidad de reconocer la existencia del trozo de curva controlado, y aunque utilice las rectas horizontales, debe argumentar que ellas no condicionan la existencia del mismo.

- Reconoce cuando un trozo de curva está controlado.

  Se pretende que el estudiante reconozca la existencia del trozo de curva controlado en diferentes curvas, las cuales no son de carácter único y pueden variar en su forma gráfica y expresión analítica.

Actividades propuestas para la Fase 1

En esta primera fase se proponen 6 actividades, a continuación se realiza una breve descripción de estas, en la que se resaltan sus características e intencionalidad:

- La actividad 1 ofrece a los estudiantes la posibilidad de exponer conocimientos previos respecto a conceptos como: El punto, la recta y la curva, a través de sus producciones escritas.

- La actividad 2 permite que los estudiantes se acerquen a conceptos como: Estiramiento horizontal y separación entre puntos, a través de experiencias como: La observación con lupa de puntos dibujados en una goma y la realización de figuras sobre el geoplano. Estas figuras se amplían horizontalmente, verticalmente y en ambos ejes.
- La actividad 3 indaga por el elemento formado entre la intersección de una curva y una recta en el plano. Para esto, el estudiante realiza una experiencia desde lo concreto y analiza una gráfica donde se interseca una curva con una recta.
- La actividad 4 tiene como propósito que el estudiante reconozca que el trozo de curva controlado no depende de las rectas horizontales. Para ello se le presentan diferentes aplicaciones en GeoGebra® donde debe visualizar que sucede con la curva a medida que es estirada.
- La actividad 5 va en correspondencia con la actividad 4, allí el estudiante debe reconocer cuando existe el trozo de curva controlado en las diferentes aplicaciones que manipula en GeoGebra®.
- La actividad 6 es el cuestionario resultante de la fase 1.

Cuestionario para la Fase 1

El propósito de este cuestionario es analizar el razonamiento de los estudiantes cuando se han desligado de lo concreto y computacional. Es decir, a detectar el razonamiento propio de la fase, de acuerdo con el Nivel II. Las preguntas propuestas son las siguientes:

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. Un punto matemático posee:
   a) Longitud
   b) Longitud y ancho
   c) Longitud, ancho y alto
   d) Dimensiones
   e) Ninguna de las anteriores
2. Una recta matemática está conformada por:
   a) Un punto
   b) Dos puntos

   c) Tres puntos
   d) Infinitos puntos en la misma dirección
   e) Ninguna de las anteriores

3. Una curva está conformada por:
   a) Un punto
   b) Dos puntos
   c) Tres puntos
   d) Infinitos puntos
   e) Ninguna de las anteriores

4. Una recta es un caso especial de:
   a) Un punto
   b) Dos puntos
   c) Tres puntos
   d) De una curva
   e) Ninguna de las anteriores

5. Entre dos puntos matemáticos se encuentran:
   a) Cero puntos
   b) Dos puntos
   c) Infinitos puntos
   d) Tres puntos
   e) Ninguna de las anteriores

6. Observa la figura:

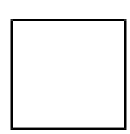


Figura 3.3: Cuadrado.

Observa nuevamente estas figuras:

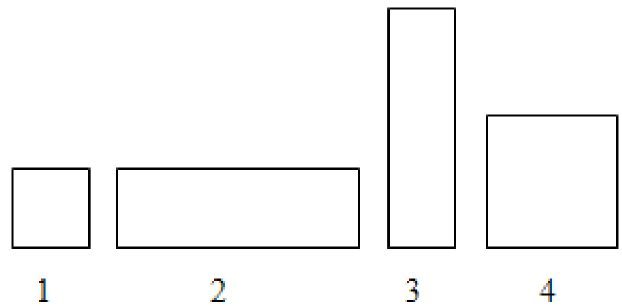


Figura 3.4: Estiramientos sobre el cuadrado.

a) En la figura 1 sólo hay estiramientos horizontales

b) En la figura 2 sólo hay estiramientos horizontales

c) En la figura 3 sólo hay estiramientos horizontales

d) En la figura 4 sólo hay estiramientos horizontales

e) Ninguna de las anteriores

7. Dados dos puntos matemáticos en una recta numérica:

   a) No se puede distinguir uno de otro

   b) Se distinguen por su forma

   c) Se distinguen por su color

   d) Se distinguen por su ubicación

   e) Ninguna de las anteriores

8. Observa las siguientes gráficas:

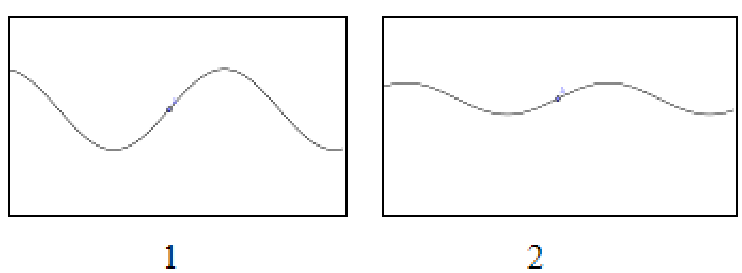


Figura 3.5: Curvas.

La grafica 2 se formó a partir de:

a) Un estiramiento horizontal a partir de la gráfica 1

b) Un estiramiento vertical a partir de la gráfica 1

c) Un zoom de aumento a partir de la gráfica 1

d) Un zoom de disminución a partir de la gráfica 1

e) Ninguna de las anteriores

9. Observa las siguientes gráficas:

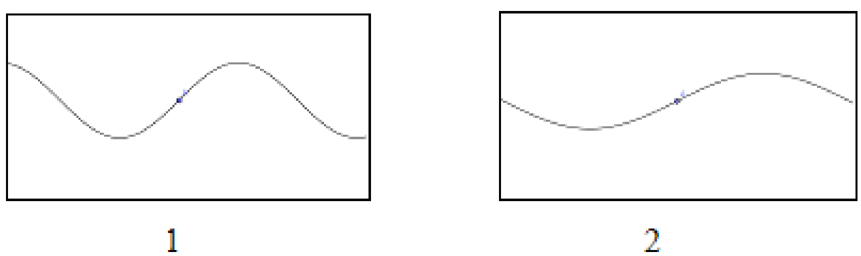


Figura 3.6: Estiramiento respecto a una curva.

La Figura 2 se formó a partir de:

a) Un estiramiento horizontal a partir de la gráfica 1

b) Un estiramiento vertical a partir de la gráfica 1

c) Un zoom de aumento a partir de la gráfica 1

d) Un zoom de disminución a partir de la gráfica 1

e) Ninguna de las anteriores

10. Observa las siguientes gráficas:

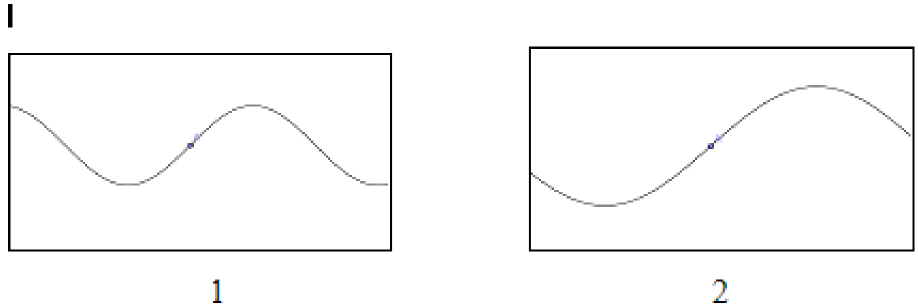


Figura 3.7: Acercamiento respecto a una curva.

La Figura 2 se formó a partir de:

a) Un estiramiento horizontal a partir de la gráfica 1

b) Un estiramiento vertical a partir de la gráfica 1

c) Un zoom de aumento a partir de la gráfica 1

d) Un zoom de disminución a partir de la gráfica 1

e) Ninguna de las anteriores

11. Observa las siguientes gráficas:

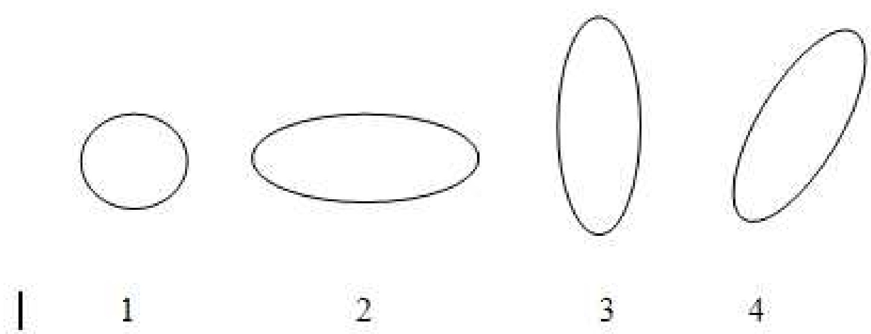


Figura 3.8: Cambios respecto a una circunferencia.

Si amplias la circunferencia sólo horizontalmente puedes obtener una figura con la forma ilustrada en:

a) La Figura 1

b) La Figura 2

c) La Figura 3

d) La Figura 4

e) Ninguna de las anteriores

Fase 2: Orientación dirigida

En esta fase los estudiantes exploran el tema a través del desarrollo de experiencias, se pretende que el estudiante comprenda e interactue con las propiedades de los elementos del concepto objeto de estudio.

El propósito fundamental de esta fase afianzar en el estudiante el uso del mecanismo de estiramiento horizontal, para identificar el trozo de curva controlado y visualice el comportamiento de las curvas al realizar los estiramientos.

Para lograr el anterior propósito el estudiante trabaja con aplicaciones desarrolladas en el *software* GeoGebra® que constan de elementos como: Deslizadores, curvas, rectas y puntos. Con la la manipulación en los deslizadores va generando estiramientos en la curva para poder visualizar el trozo de curva controlado.

Objetivos de la Fase 2

Para proporcionar los elementos necesarios donde el estudiante explore el tema e interactúe con los elementos que necesita para desarrollar sus procesos de razonamiento, se han trazado los siguientes objetivos correspondientes a ésta fase:

- Utilizar los estiramientos horizontales para describir cuando existe un trozo de curva está controlado.
- Describir cuando un trozo de curva está controlado localmente.
- Diferenciar las características presentadas en estiramientos horizontales y verticales.

Descriptores de la Fase 2

Los siguientes descriptores representan el conjunto de condiciones que el estudiante posee cuando se encuentra en la fase 2 de aprendizaje, éstas están articuladas al desempeño de experiencias que son dirigidas, las cuales llevan al desarrollo de un conjunto de desempeños en el estudiante. Los descriptores para ésta fase son:

- Utiliza los estiramientos para describir cuando hay un trozo de curva controlado.

  Este descriptor se enfoca en analizar la utilización que el estudiante hace de los estiramientos horizontales, donde el empleo del mecanismo le permita reconocer el trozo de curva controlado.

- Describe cuando un trozo de curva está controlado localmente.

  La intención de este descriptor, es que el estudiante describa cuáles son las condiciones que determinan cuando un trozo de curva está controlado localmente.

- Diferencia las características presentadas en estiramientos horizontales y verticales.

  Se pretende que el estudiante reconozca cuál es la diferencia entre utilizar estiramientos horizontales y verticales, y que a partir de allí, describa las propiedades de la curva en cada una de dichas situaciones.

Actividades propuestas para la Fase 2

En esta segunda fase se proponen 4 actividades, se presenta a continuación una breve descripción de estas:

- La actividad 1 presenta a los estudiantes diferentes aplicaciones en GeoGebra® donde se puede realizar estiramientos sobre las curvas. La idea es identificar la existencia del trozo de curva controlado con la utilización de dichos estiramientos.

- En la actividad 2 nuevamente se le presentan al estudiante diferentes aplicaciones en GeoGebra®, donde debe explicar cuándo un trozo de curva se encuentra controlado localmente.

- El estudiante en las dos actividades anteriores ha utilizado solamente estiramientos horizontales. La actividad 3 presenta la opción de trabajar adicionalmente con estiramientos verticales, el propósito es reconocer las diferencias que existen entre la utilización de los estiramientos horizontales y verticales.

- La actividad 4 es el cuestionario resultante de la fase 2.

Cuestionario para la Fase 2

El propósito de este cuestionario es analizar el razonamiento de los estudiantes en la fase 2 de aprendizaje, en relación con la comprensión del concepto de continuidad local. Las preguntas realizadas son las siguientes:

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. Hablar de estiramientos en las aplicaciones anteriores significa que:
   - *a*) La curva se amplía verticalmente
   - *b*) La curva se amplía horizontalmente
   - *c*) La curva no se amplia
   - *d*) La curva se amplía horizontal y verticalmente
   - *e*) Ninguna de las anteriores
2. El control de una curva respecto a un punto es de carácter:
   - *a*) Intuitivo
   - *b*) Lógico
   - *c*) Local
   - *d*) Físico
   - *e*) Ninguna de las anteriores
3. Para visualizar si una curva está controlada localmente debes realizar:
   - *a*) Estiramientos verticales
   - *b*) Estiramientos horizontales
   - *c*) Un zoom
   - *d*) Estiramientos horizontales y un zoom
   - *e*) Ninguna de las anteriores
4. No se obtiene lo mismo utilizando estiramientos horizontales y verticales porqué:
   - *a*) No se visualiza el trozo de curva controlado con los estiramientos verticales
   - *b*) No se visualiza el trozo de curva controlado con los estiramientos horizontales
   - *c*) Se debe realizar un zoom para determinar si la curva está controlada localmente

   d) No se puede utilizar ambos estiramientos para mirar el control local de una curva.
   e) Ninguna de las anteriores

5. El término más adecuado para hablar de control local es:
   a) Función evaluada en un punto
   b) Control en un punto
   c) Derivada en un punto
   d) Integral en un punto
   e) Ninguna de las anteriores

6. Para determinar el control local se parte inicialmente de:
   a) Estiramientos verticales
   b) Estiramientos horizontales
   c) La distancia entre las rectas verticales
   d) La distancia entre las rectas horizontales
   e) Ninguna de las anteriores

7. Observa la siguiente gráfica:

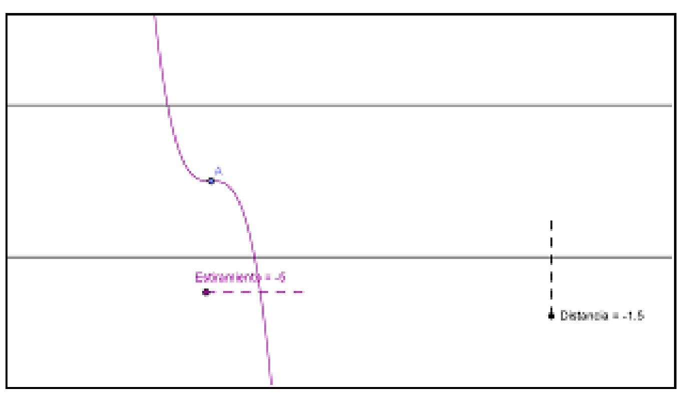


Figura 3.9: Aplicación en GeoGebra®.

Se puede afirmar que:

a) La curva es controlable en el punto A
b) La curva no es controlable en el punto A
c) La controlabilidad en el punto a depende del deslizador distancia
d) La controlabilidad en el punto a depende del deslizador estiramiento
e) Ninguna de las anteriores

8. Se puede afirmar que un estiramiento vertical permite determinar:

a) Cuando un trozo de curva está controlado localmente
b) Cuando una curva es controlable en un punto
c) La gráfica de la curva
d) La forma de la curva
e) Ninguna de las anteriores

Fase 3: Explicitación

En esta fase los estudiantes dan a conocer sus construcciones mentales sobre el concepto, a través de la explicitación de sus razonamientos. Estos son evidenciados a través del vocabulario y el refinamiento del lenguaje empleado por el estudiante en cada una de las socializaciones, donde se ponen de manifiesto sus conclusiones respecto al desarrollo de las actividades.

El estudiante debe dar las razones de cuando una función es o no controlable en un punto y reconocer el carácter local del mismo concepto. Para esto, se presentan diferentes curvas que en apariencia no son controlables en un punto. Allí el estudiante debe interactuar con las aplicaciones y a partir de sus razonamientos debe determinar si la curva es o no controlable en el punto.

Objetivos de la Fase 3

En la fase 3 el estudiante razona sobre los conceptos y explicita sus pensamientos, los cuales deben dar cuenta de las construcciones mentales que ha elaborado, para lo cual debe cumplir con los siguientes objetivos:

- Reconocer el carácter local del concepto.
- Determinar cuando un trozo de curva está y cuando no está controlado en un punto.

- Argumentar cuando una función es controlable y no controlable en un punto.
- Manifestar un lenguaje más estructurado en torno al concepto de control local.

Descriptores de la Fase 3

En esta fase, el estudiante debe estar en la capacidad de desempeñar un conjunto de condiciones que permitan dar cuanta de los procesos de razonamiento que ha elaborado respecto al concepto, éstas son evidenciadas cuando:

- Reconoce el carácter local del concepto.

  Se debe expresar que el concepto abordado se caracteriza por su aspecto local, es decir, el estudiante debe estar en la capacidad de reconocer que el concepto de continuidad se identifica por su localidad en un punto específico de una curva.

- Determina cuando un trozo de curva está y cuando no está controlado en un punto.

  La intención de este descriptor es que el estudiante analice en diferentes curvas cuando es posible encontrar el trozo de curva controlado y cuando no.

- Argumenta cuando una función es controlable y no controlable en un punto.

  Se pretende que el estudiante a partir del mecanismo desarrollado con la utilización de los estiramientos horizontales y la determinación del trozo de curva controlado, manifieste la definición de control local de la curva.

- Manifiesta un lenguaje más estructurado en torno al concepto.

  La idea es que el estudiante haga explícita la definición de control local, en términos del mecanismo desarrollado.

Actividades propuestas para la Fase 3

En esta fase se proponen 3 actividades, a continuación se realiza una descripción de cada una de ellas, enfatizando en su intencionalidad:

- La actividad 1 está enfocada en el reconocimiento del carácter local del concepto y en la determinación del trozo de curva controlado, allí el estudiante trabaja con diferentes curvas y realiza estiramientos en un punto sobre la misma. La intención del desarrollo de esta actividad es que el estudiante determine en qué curvas existe el trozo de curva controlado y que establezca éste respecto a un punto específico de la curva.

- En la actividad 2 se pretende que el estudiante, con la utilización del mecanismo de estiramientos y los conceptos de trozo de curva controlado y control local, esté en la capacidad de determinar cuándo una curva es o no controlable en un punto. Los argumentos que el estudiante presente en esta fase deben dar cuenta del lenguaje propio del nivel que se desea alcanzar.
- La actividad 3 es el cuestionario resultante de la fase 3.

Cuestionario para la Fase 3

El propósito de este cuestionario es analizar el razonamiento de los estudiantes en la fase 3 de aprendizaje, en relación con la comprensión del concepto de continuidad local. Las preguntas realizadas son las siguientes:

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. Observa las Figuras 1 y 2:

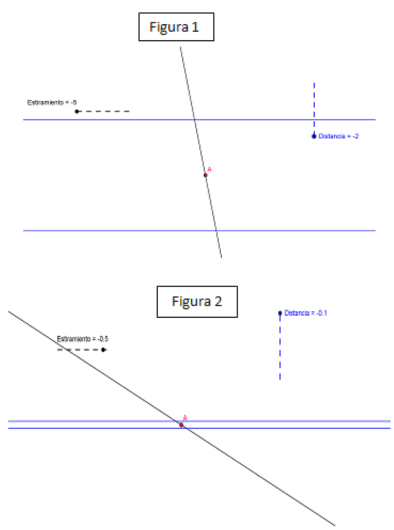


Figura 3.10: Estiramiento sobre una recta.

Después de observar las Figuras 1 y 2 se puede decir que:

a) Se movió el deslizador estiramiento

b) Se movió el deslizador distancia

c) Se movió el deslizador distancia hasta la mitad

d) Se movió el deslizador distancia y estiramiento

e) Ninguna de las anteriores

2. Observa las Figuras 1, 2 y 3:

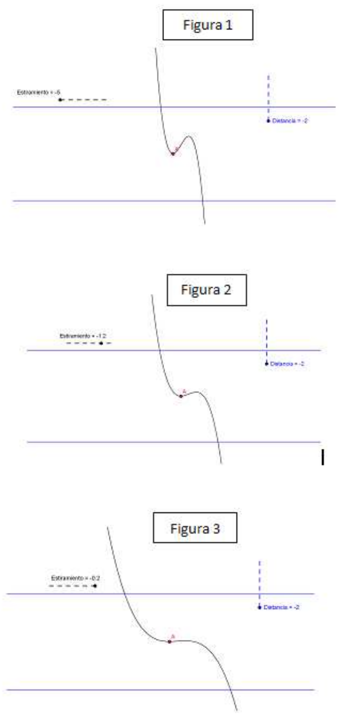


Figura 3.11: Estiramientos consecutivos.

Después de observar las Figuras 1, 2 y 3 se puede afirmar que:

a) La Figura 3 respecto a la figura 1 posee un zoom

b) La Figura 3 representa un acercamiento a la figura 1

c) La Figura 2 representa un acercamiento a la figura 1

d) La Figura 3 respecto a la figura 1 posee un estiramiento

e) Ninguna de las anteriores

3. Observa las Figuras 1, 2, 3 y 4:

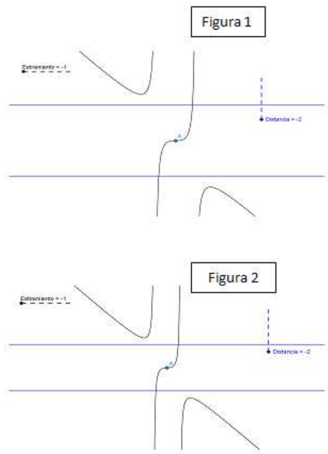


Figura 3.12: Estiramiento sobre una curva.

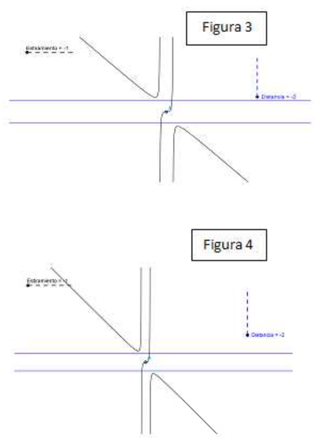


Figura 3.13: Estiramiento sobre una curva.

Después de observar las Figuras 1, 2, 3 y 4 se puede afirmar que secuencialmente:

a) Se realizaron estiramientos horizontales sobre la curva

b) Se realizó un zoom de acercamiento

c) Se realizaron estiramientos verticales sobre la curva

d) Se realizó un zoom de alejamiento

e) Ninguna de las anteriores

4. Observa las Figuras 1 y 2:

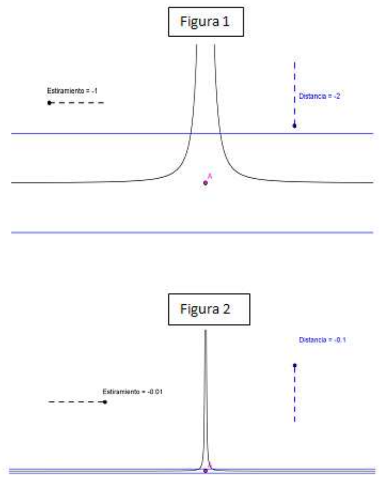


Figura 3.14: Curva simétrica.

Después de observar las Figuras 1 y 2 se puede garantizar que:

a) La curva no es controlable en el punto A

b) La curva es controlable en el punto A

c) La curva es controlable

d) La curva no es controlable

e) Ninguna de las anteriores

5. Observa las Figuras 1, 2, 3 y 4:

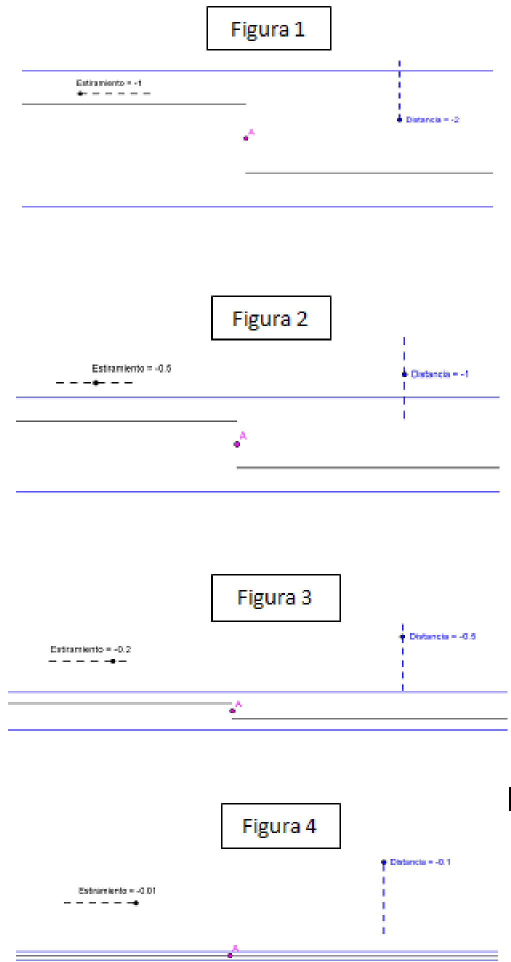


Figura 3.15: Curva simétrica.

Después de observar las Figuras 1, 2, 3 y 4 se puede garantizar que:

a) La curva no es controlable en el punto A

b) La curva es controlable en el punto A

c) La curva es controlable

d) La curva no es controlable

e) Ninguna de las anteriores

6. Para determinar si una curva está controlada localmente se debe:

a) Hacer estiramientos horizontales
b) Hacer estiramientos verticales
c) Hacer estiramientos horizontales y verticales
d) Hacer estiramientos horizontales y un zoom
e) Ninguna de las anteriores

7. El control local se refiere al control respecto a:

   a) Un punto
   b) Un segmento
   c) Una recta
   d) Una curva
   e) Ninguna de las anteriores

8. Cuando una curva está controlada localmente se puede decir que:

   a) Al estirarla horizontalmente se convierte en recta
   b) Al estirarla horizontalmente se rompe
   c) Al estirarla horizontalmente se divide en dos partes
   d) Al estirarla horizontalmente queda dentro de las rectas horizontales
   e) Ninguna de las anteriores

Fase 4: Orientación libre

En esta fase los estudiantes exploran el tema, aplicando en otros contextos lo aprendido hasta el momento. Allí también se brinda la posibilidad de manifestar nuevas ideas que den cuenta de la red de relaciones que el estudiante ha construido en torno al concepto.

Uno de los propósitos fundamentales de esta fase es que el estudiante esté en la capacidad de explicar cuando una curva es o no controlable en un punto y lo argumente con el lenguaje propio del mecanismo, en correspondencia con la definición del concepto. Es importante resaltar que es en esta fase donde el estudiante relaciona su conocimiento adquirido con otros contextos, en este caso particular, debe reconocer la existencia del concepto de control local en contextos cotidianos.

Objetivos de la Fase 4

Además de la construcción que debe realizar el estudiante sobre el concepto de continuidad local, es pertinente que aplique dicha definición a otros contextos, es decir que encuentra utilidad a la definición del mismo, para lo cual debe cumplir con los siguientes objetivos:

- Proponer argumentos para explicar cuando una curva es controlable en un punto.
- Entablar relaciones y jerarquías sobre los conceptos relacionados con el control local.
- Explicitar y justifica el carácter local del concepto.
- Proponer nuevas ideas para sustentar y explicar cuando una curva es y no es controlable en un punto.

Descriptores de la Fase 4

La utilidad que el estudiante hace del concepto se puede apreciar cuando está en la capacidad de aplicarlo a otros contextos, además de los contextos matemáticos, para lo cual debe cumplir con los siguientes desempeños:

- Propone argumentos para explicar cuando una curva es controlable.

  Se pretende con este descriptor que el estudiante además de emplear el mecanismo para definir el concepto de control local, proponga nuevas ideas que le permitan explicar el mismo.

- Entabla relaciones y jerarquías sobre los conceptos relacionados con el control local.

  La idea del desempeño de este descriptor es que el estudiante de cuenta de sus redes de relaciones elaboradas respecto al concepto, las cuales están condicionadas por su aspecto jerárquico.

- Explicita y justifica el carácter local del concepto.

  Además de reconocer la localidad del concepto, el estudiante debe estar en la capacidad de explicar que significa que la curva sea controlable en un punto.

- Propone nuevas ideas para sustentar y explicar cuando una curva es o no es controlable en un punto.

Se pretende que el estudiante encuentre utilidad al concepto de control local, lo que se hace evidente en las aplicaciones que el hace del mismo en otros contextos, principalmente en contextos cotidianos.

Actividades propuestas para la Fase 4

En esta fase se proponen 5 actividades, las cuales se describen a continuación:

- La actividad 1 propone que el estudiante explique y argumente sus ideas respecto al concepto de control local, ya que además de determinar si una curva es o no controlable en un punto, debe proponer la definición de control local.
- La construcción del mecanismo de estiramiento horizontal, parte de elementos básicos de estudio como es la realización de estiramientos horizontales y la determinación del trozo de curva controlado. En la actividad 2 el estudiante debe estar en la capacidad de consolidar estos elementos para definir el control local.
- En el desarrollo de las actividades se ha mencionado con frecuencia el término local y es en esta fase donde, adicional al reconocimiento de este aspecto, se debe presentar la argumentación que justifique el carácter local del concepto.
- En la actividad 4, el estudiante debe estar en la capacidad de reconocer que el concepto, además de los grandes beneficios que implica su comprensión en al campo de las Matemáticas, es aplicable a situaciones cotidianas.
- La actividad 5 es el cuestionario resultante de la fase 4.

Cuestionario para la Fase 4

El propósito de este cuestionario es analizar el razonamiento de los estudiantes en la fase 4 de aprendizaje en relación con la comprensión del concepto de continuidad local. Las preguntas realizadas son las siguientes:

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. El control de un curva es de carácter:

   a) Global
   b) Local
   c) Algebraico

d) Puntual

e) Ninguna de las anteriores

2. De la siguientes afirmaciones la única cierta es:

a) Todas las curvas son controladas localmente

b) Algunas curvas son controladas localmente

c) Una curva no controlable localmente se rompe

d) Se obtiene el mismo control local observando diferentes puntos de la curva

e) Ninguna de las anteriores

3. Se puede garantizar que una curva es controlable en un punto porque:

a) La curva está definida en el punto

b) La curva No está definida en el punto

c) Si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes al punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el punto

d) Si comenzando por cualquier par de rectas verticales equidistantes al punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el punto

e) Ninguna de las anteriores

4. Observa las siguientes gráficas:

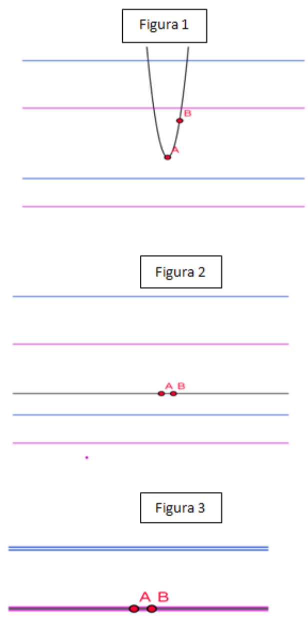


Figura 3.16: Curva simétrica.

Después de observar la figura 1, 2 y 3 se puede garantizar que:

a) La curva es controlable en el punto A

b) La curva No es controlable en el punto A

c) La curva es controlable en el punto A y B

d) Con la información suministrada no se puede garantizar que la curva sea controlable en un punto

e) Ninguna de las anteriores

5. Si observas dos puntos diferentes en una curva, un punto A y un punto B y si se tiene que la curva es controlable en el punto A, se puede garantizar que:

   a) La curva es controlable en el punto B

   b) La curva no es controlable en el punto B

   c) No existe control local

   d) El punto A y B coinciden

   e) Ninguna de las anteriores

6. La existencia o No del trozo controlado es una propiedad de:

a) La curva
b) El punto sobre la curva
c) Las rectas horizontales
d) Las rectas verticales
e) Ninguna de las anteriores

7. Una curva es controlable en un punto si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar:

a) Un punto
b) Un trozo de curva controlable que pase por el punto
c) En segmento
d) Un trozo de curva controlable
e) Ninguna de las anteriores

8. Al estirar un trozo de curva si tiende a quedarse plana la curva estará:

a) Controlada en el punto
b) No controlada en el punto
c) Definida en el punto
d) No definida en el punto
e) Ninguna de las anteriores

9. La palabra más adecuada para el espacio de la oración: "La controlabilidad de una curva indica su en ese punto" es:

a) Forma
b) Tamaño
c) Continuidad
d) Definición
e) Ninguna de las anteriores

Fase 5: Integración

En la fase 5 se consolida la información de las fases anteriores, no se adquiere un nuevo conocimiento, se estructura la red de relaciones conformada a lo largo del desarrollo de las actividades de cada una de las fases.

Al finalizar la quinta fase, el estudiante debe integrar todo lo aprendido en las otras fases a su nuevo nivel de razonamiento, con el fin de determinar si se ha generado progreso respecto al nivel de razonamiento inicial.

Objetivos de la Fase 5

La construcción que el estudiante hace a lo largo del trabajo de investigación se debe ver consolidada en el desempeño de los estudiantes en ésta fase, en la cual el estudiante no da cuenta de un nuevo conocimiento, sino de las redes de relaciones que ha elaborado respecto al concepto, para lo cual debe cumplir con los siguientes objetivos:

- Diferenciar y utilizar adecuadamente los elementos geométricos: Punto, recta y curva.
- Comprender que el concepto de continuidad local se visualiza a partir del control local empezando con distanciamientos horizontales.
- Reconocer que para saber si un trozo de curva es controlado parte de los estiramientos horizontales.
- Reconocer el carácter local del concepto de continuidad.
- Diferenciar curvas controlables de no controlables localmente.
- Expresar la definición de continuidad local de una función en un punto a partir de estiramientos horizontales.

Descriptores de la Fase 5

La consolidación del conjunto de saberes desarrollados por los estudiantes a lo largo del trabajo de investigación se visualiza en el conjunto de desempeños que lleva a cabo en la fase 5, la cual da cuenta de las condiciones necesarias para avanzar al siguiente nivel, en este caso el estudiante puede pasar del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local si:

- Diferencia y utiliza adecuadamente los elementos geométricos: Punto, recta y curva.

  Con este descriptor se pretende que el estudiante manifieste argumentos coherentes sobre el concepto de punto, recta y curva.

- Comprende que el concepto de continuidad local se visualiza a partir del control local empezando con estiramientos horizontales.

  La idea es que el estudiante utilice adecuadamente los estiramientos horizontales para llegar al concepto de control local y que posteriormente lo asocie con el concepto de continuidad local.

- Reconoce que para saber si un trozo de curva es controlado parte de los estiramientos horizontales.

  El estudiante debe reconocer y explicar la existencia del trozo de curva controlado utilizando adecuadamente el mecanismo de los estiramientos horizontales.

- Reconoce el carácter local del concepto de continuidad.

  Se pretende que el estudiante al hablar del concepto de continuidad, lo haga en términos de su localiadad, dado que este aspecto es el que caracteriza su definición.

- Diferencia curvas controlables y no controlables localmente.

  El estudiante debe estar en la capacidad de diferenciar cuando una curva es o no es controlable localmente con el mecanismo desarrollado.

- Define el concepto de continuidad local en términos de estiramientos horizontales y trozo de curva controlado respecto a un punto.

  La definición que el estudiante hace del concepto de continuidad local, debe estar en correspondencia con la definición de control local, la cual es definida con el mecanismo que se ha desarrollado.

- Define el concepto de continuidad local de Cauchy de una función en un punto en términos del mecanismo empleado.

  Se pretende que el estudiante además de expresar la definición de continuidad con el mecanismo desarrollado, relacione dicha definición con la definición formal de Cauchy, que se basa en su aspecto local y control de errores, es decir, el mecanismo que ha desarrollado, articularlo a la definición matemática del concepto.

Actividades propuestas para la Fase 5

Como se mencionaba en la fase 5, las actividades propuestas deben dar cuenta de la consolidación del trabajo realizado en las fases anteriores, a continuación se presenta la descripción de estas actividades:

- La actividad 1 es una retroalimentación del trabajo con conceptos básicos como: Punto, recta y curva. El estudiante debe dar cuenta de cada una de sus características y propiedades en diferentes situaciones.
- En la actividad 2, a partir de la utilización de los estiramientos horizontales, el estudiante determina si existe o no el control local de una curva en un punto.
- La actividad 3 tiene como propósito fundamental que el estudiante esté en la capacidad de determinar el trozo de curva controlado, con la utilización del mecanismo empleado.
- En la actividad 4 el estudiante debe reconocer la localidad del concepto, pues es en este sentido que se trabaja la definición del control local.
- Todas las curvas que el estudiante conoce en clases de Matemáticas no siempre son controlables en un punto. La actividad 5 se fundamenta en que el estudiante esté en la capacidad de determinar cuando la curva se puede controlar en el punto señalado.
- En la actividad 6, corresponde al estudiante definir claramente el concepto de control local de una curva, utilizando el mecanismo desarrollado. Además, debe ilustrar la correspondencia que existe entre el mecanismo empleado y la definición matemática seleccionada, continuidad local de Cauchy.
- La actividad 7 es el cuestionario resultante de la fase 5.

Cuestionario para la Fase 5

El propósito de este cuestionario es analizar el razonamiento de los estudiantes en la fase 5 de aprendizaje en relación con la comprensión del concepto de continuidad local. Las preguntas realizadas son las siguientes:

Para cada numeral selecciona la opción correcta

1. Observa la siguiente figura:

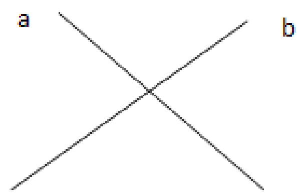


Figura 3.17: Intersección entre rectas.

La intersección entre las rectas a y b es:

a) Un punto
b) Una recta
c) Una curva
d) Una X
e) Ninguna de las anteriores

2. Observa la siguiente figura:

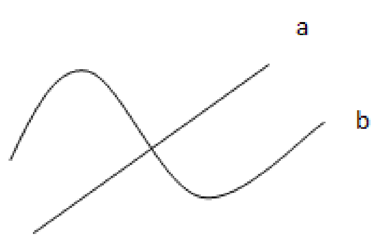


Figura 3.18: Intersección entre una curva y una recta.

La intersección entre la recta a y la curva b es:

a) Un punto
b) Una recta
c) Una curva
d) Una X
e) Ninguna de las anteriores

3. Observa la siguiente figura:

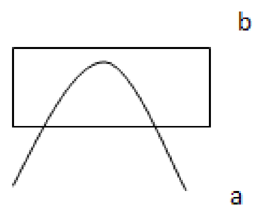


Figura 3.19: Intersección entre una curva y un rectángulo.

La intersección entre la curva a y el rectángulo b es:

a) Un punto
b) Una recta
c) Una curva
d) Una X
e) Ninguna de las anteriores

4. Observa las siguientes Figuras:

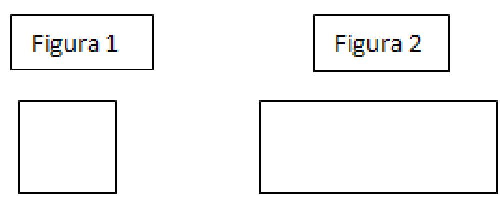


Figura 3.20: Cuadrado estirado horizontalmente.

La Figura 2 respecto a la Figura 1 indica que se ha realizado:

a) Un estiramiento vertical
b) Un estiramiento horizontal
c) Un estiramiento en ambos ejes
d) Un zoom de acercamiento

e) Ninguna de las anteriores

5. Para saber si esta curva se puede controlar en el punto A se debe:

   a) Realizar estiramientos horizontales y acercar las rectas horizontales al punto A

   b) Realizar estiramientos horizontales y un zoom de acercamiento

   c) Acercar las rectas horizontales al punto A

   d) Con la información suministrada no se puede determinar si la curva se puede controlar en el punto A

   e) Ninguna de las anteriores

6. Observa las siguientes figuras:

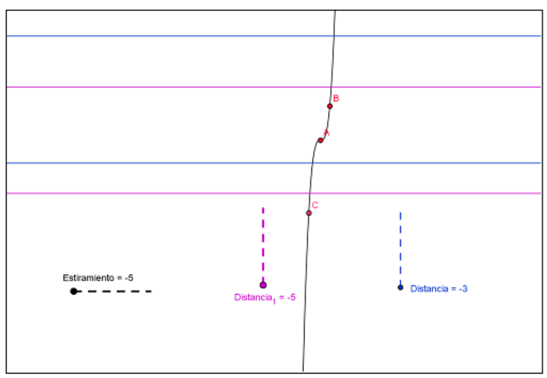


Figura 3.21: Control local.

Si se tiene que la curva se puede controlar en el punto A, se puede garantizar que:

   a) La curva se puede controlar en el punto B

   b) la curva se puede controlar en el punto C

   c) la curva se puede controlar en el punto B y C

   d) No se puede garantizar el control en otros puntos

   e) Ninguna de las anteriores

7. Cuando una curva es controlable en un punto se puede garantizar que es controlable en:

   a) Otro punto de la curva

   b) En dos puntos de la curva
   c) En todos los puntos de la curva
   d) No se puede garantizar el control en otros puntos
   e) Ninguna de las anteriores

8. Al estirar un trozo de curva si tiende a quedarse plana la curva será:
   a) Controlable en el punto
   b) Controlable en ningún punto
   c) Controlable en dos puntos
   d) Controlable en tres puntos
   e) Ninguna de las anteriores

9. La controlabilidad de la curva indica su en ese punto:
   a) Continuidad
   b) Estiramiento
   c) Control
   d) Distancia
   e) Ninguna de las anteriores

En cada una de las fases anteriores se resalta la importancia del lenguaje y de la entrevista de carácter socrático, porque a medida que se desarrollan las preguntas, el estudiante clarifica sus argumentos y el lenguaje se manifiesta de forma que da cuenta del nuevo nivel de razonamiento. Cabe anotar, que el desarrollo de todas las fases está mediado por la elaboración de mapas conceptuales, que son secuenciales e inclusivos; a medida que se avanza en cada una de las fases la elaboración de éstos es más detallada e incluye la construcción de relaciones coherentemente vinculadas, que dan cuenta del enriquecimiento de su estructura mental, respecto al concepto estudiado.

El proceso de refinación de la entrevista y las actividades desarrolladas, permiten que se hubiese generado el cuestionario de fases, el cual provee elementos para analizar el proceso de razonamiento de los estudiantes, dichos elementos están articulados a un conjunto de descriptores con una intencionaliadad específica, es decir, la consolidadción del cuestionario es una herramienta que permite el conocimiento de las redes de relciones elaboradas respecto al concepto, aspecto que se analizara en el próximo capítulo, donde se presenta el análisis de la información articulada a cada una de las producciones de los estudiantes en: El test de Campillo, el Módulo de Aprendizaje, el cuestionario de fases y los mapas conceptuales, ya que estas herramientas ponen en evidencia el razonamiento del estudiante en cada una de las fases de aprendizaje.

Capítulo 4

Análisis de la información

PAra facilidad de quienes abordan esta propuesta de investigación, se ilustra una red conceptual donde se organiza el análisis de la información. Adicionalmente, el análisis de los datos recolectados que se presenta a lo largo de éste capítulo, se fundamenta en la categorización que se hizo de cada uno de los tres casos particulares de la investigación.

Para el desarrollo de la teoría sobre cada caso particular se presenta el análisis de algunas respuestas dadas por los estudiantes en el Módulo de Aprendizaje, la entrevista y los mapas conceptuales, con sus respectivas producciones escritas.

La caracterización del proceso de razonamiento que se expone en el desarrollo del presente capítulo, ilustra cada una de las categorías manifestadas en los estudiantes en cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, en correspondencia con la construcción del mecanismo y los descriptores de fase, dicha caracterización se hace explícita en cada caso particular de acuerdo a las redes conceptuales elaboradas, las cuales dan cuenta de la estructura mental que el estudiante ha enriquecido con el desarrollo del proceso de investigación, dichas redes se evidencian en cada uno de los argumentos con su respectivo análisis, donde se puede observar un progreso en el nivel de razonamiento, particularmente el avance del Nivel II al Nivel III respecto al concepto objeto de estudio. A continuación se presenta el análisis de la información para cada caso particular y la descripción del proceso de razonamiento de los mismsos.

4.1. Red de análisis por fases para cada caso

Debido a que la técnica empleada fue el estudio de casos, para cada estudiante se presenta el análisis de la información en cada una de las cinco fases del modelo educativo de van Hiele, cada una de éstas está conformada por las categorías y estas a su vez por los códigos. Las categorías denotadas por: TC, CL, MEH, L y NII-NIII significan: Trozo de curva controlado, control local, mecanismo de estiramiento horizontal, lenguaje y avance en los descriptores del Nivel II al Nivel III respectivamente. De cada categoría se desprenden los términos: Cod1 y Cod2, que significan los códigos agrupados en cada una de ellas.

La codificación y categorización que se realizó de cada uno de los casos de la investigación estuvo apoyada en el programa para análisis de información cualitativa ATLAS.ti 6.2, el cual es una herramienta que permite codificar y categorizar cada una de las producciones de los estudiantes, con el fin de visualizar los aspectos relevantes en su proceso de razonamiento.

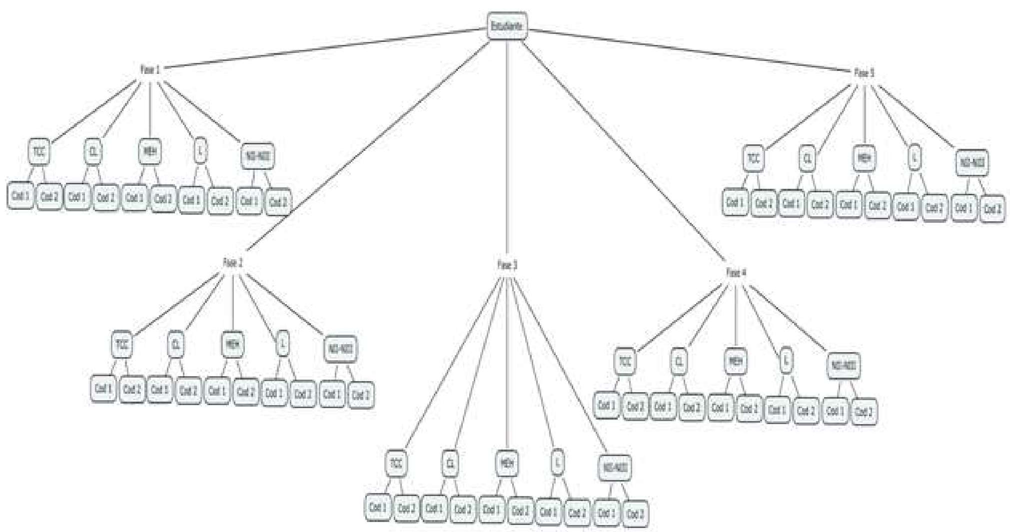


Figura 4.1: Red conceptual del análisis por casos.

Inicialmente se crearon en el programa las unidades hermenéuticas para cada uno de los casos particulares, allí fueron organizadas cada una de sus producciones como: Entrevistas, guías del Módulo de Aprendizaje, mapas conceptuales y cuestionarios de fases, donde posteriormente se procedió con la codificación de cada escrito; después de codificar cada elemento, se continuó con la categorización, para lo cual se nombraron unas familias de códigos, que en nuestro caso representaban las categorías, las cuales agrupaban el conjunto de códigos.

Finalmente, cada una de estas familias de códigos permitieron explicar el razonamiento de cada estudiante en las diferentes fases, donde se realizó la agrupación de las mismas para definir los temas, en esta investigación en particular, los temas correspondientes a caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento respecto al concepto de continuidad local (ver descriptores de niveles y de fases en el Capítulo 3, página 43).

En la Figura 4.1, página 88, se ilustra un esquema donde se da a conocer como se ha organizado la información con ayuda del ATLAS.ti 6.2.

4.2. Red de análisis por categorías

Después de presentar el análisis de la información para cada caso particular, se estructuran todos los códigos en cada categoría, con el fin de describir el razonamiento de los estudiantes respecto a cada una de ellas.

Es pertinente resaltar que la red de análisis por fases para cada caso y la red de análisis por categorías se articulan, debido a que las categorías con sus respectivos códigos se agrupan en cada una de las fases de aprendizaje.

La codificación y categorización propuesta es acorde con los datos recolectados durante el trabajo de campo, además, la categorización se enmarca en las fases de aprendizaje y en consecuencia, es coherente con los descriptores de fases, que se propusieron y refinaron con el desarrollo de las actividades.

Los descriptores de fase son fundamentales en el análisis de la información, puesto que son el cimiento para el desarrollo de las actividades del módulo y el nombramiento de los códigos y las categorías.

Para la definición de las categorías, se tuvo en cuenta tanto el trabajo de los estudiantes como los descriptores de fase, es por esto que las categorías TCC, MEH y CC se enfocan en la construcción del mecanismo, la categoría L, en analizar el refinamiento en el uso del lenguaje pertinente a cada fase, y finalmente, la categoría NII-NIII, que permite determinar el logro de los objetivos propuestos en cada fase en correspondencia con sus descriptores (ver descriptores de fases en el Capítulo 3, página 43).

4.2.1. Categoría trozo de curva controlado

La categoría trozo de curva controlado está determinada por los códigos que se ilustran en el esquema, donde cada uno de ellos es desarrollado en las diferentes fases de aprendizaje.

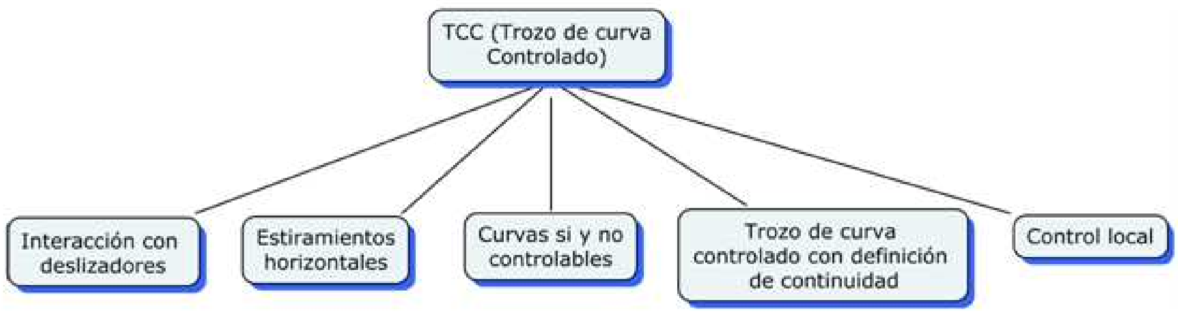


Figura 4.2: Categoría: Trozo de curva controlado.

4.2.2. Categoría concepto de control local

La categoría concepto de control local está determinada por los códigos que se ilustran en el esquema, donde se pretende que el estudiante llegue a la definición del concepto, en correspondencia con el mecanismo desarrollado.

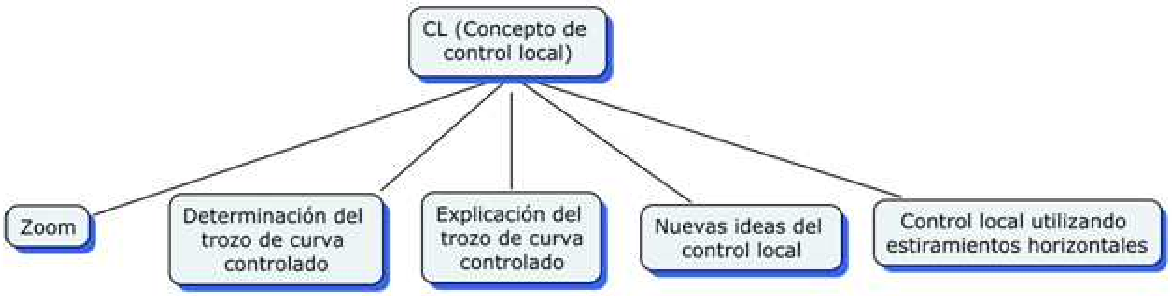


Figura 4.3: Categoría: Control local.

4.2.3. Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

La categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal está determinada por los códigos que se ilustran en el esquema, donde cada uno de ellos es desarrollado en las diferentes fases de aprendizaje, y a través del cual, el estudiante accede a la construcción del mecanismo para poder definir el concepto.

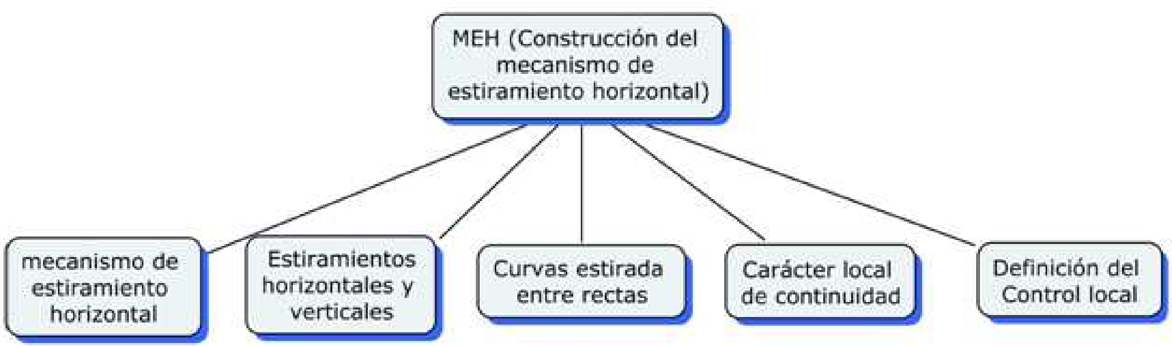


Figura 4.4: Categoría: Mecanismo de estiramiento horizontal.

4.2.4. Categoría del lenguaje

La categoría lenguaje está determinada por los códigos que se ilustran en el esquema, donde cada uno de ellos es desarrollado en las diferentes fases de aprendizaje, los cuales dan cuenta de las redes de relaciones creadas por el estudiante y se hacen evidentes en los argumentos en cada una ellas, donde el vocabulario se va refinando.

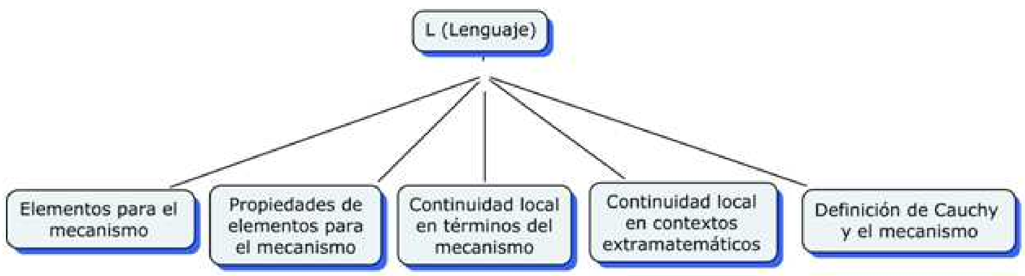


Figura 4.5: Categoría: Lenguaje.

4.2.5. Categoría avance en los descriptores del Nivel II al Nivel III

La categoría avance en los descriptores del Nivel II al Nivel III, está determinada por los códigos que se ilustran en el esquema, donde cada uno de ellos es desarrollado en las diferentes fases de aprendizaje, los mismos que se articulan a las actividades propuestas y a un conjunto de desempeños que el estudiante debe llevar a cabo para progresar en su nivel de razonamiento (ver descriptores de fases en el Capítulo 3, página 43).

Figura 4.6: Categoría: Avance en los descriptores de Nivel II al III.

4.2.6. Matriz para el análisis de casos

La matriz para el análisis de casos contiene las categorías propuestas y las acciones correspondientes en cada fase (en sentido horizontal) o las acciones en cada fase para todas las categorías (en sentido vertical), a continuación se presenta la matriz elaborada, cuyo propósito es permitir el análisis de la información de manera detallada y organizada, para cada caso particular.

Matriz de códigos y categorías

Categorización

Categorías	**Fase 1**	**Fase 2**	**Fase 3**	**Fase 4**	**Fase 5**
Trozo de curva controlado	Observa y describe cambios en la curva al trabajar con los deslizadores.	Dado un punto sobre una curva realiza estiramientos horizontales alrededor de él.	Diferencia curvas que son controlables sobre un punto de las que no lo son.	Utiliza el trozo de curva controlado localmente para evocar la definición del concepto de control local.	Define el concepto de control local sobre un punto de una curva.
Concepto de control local	Determina un punto sobre una curva y realiza estiramientos y zooms de acercamiento en él.	Determina el trozo de curva controlado sobre un punto de la curva.	Argumenta de diferentes maneras cuando un trozo de curva está controlado localmente.	Propone alternativas para explicar el control de una curva en un punto sobre ella.	Define utilizando un lenguaje adecuado el concepto de control local, empleando los estiramientos horizontales.
Construcción del mecanismo de estiramiento horizontal	Visualiza una curva como goma ideal y realiza estiramientos horizontales alrededor de un punto fijo.	Describe diferencias entre utilizar estiramientos con rectas horizontales y verticales.	Dado un trozo de curva encerrado por dos rectas horizontales, describe su comportamiento.	Explica el carácter local del concepto utilizando los estiramientos horizontales alrededor.	Define el control local de una curva.
Lenguaje	Describe los conceptos: Punto, recta, curva, zoom, estiramiento y trozo de curva controlado.	Describe las propiedades de los conceptos con el lenguaje propio de la fase II.	Verbaliza el concepto de continuidad local en términos de estiramientos horizontales y trozo de curva controlado.	Aplica el concepto de continuidad local en otros contextos.	Define el concepto de continuidad local de Cauchy a partir del mecanismo empleando en el lenguaje propio del nivel III.
Avance de los descriptores del Nivel II al Nivel III	Descriptores de fase 1	Descriptores de fase 2	Descriptores de fase 3.	Descriptores de fase 4.	Descriptores de fase 5.

Cuadro 4.1: Códigos y categorías

4.3. Análisis por fases para el Caso 1 (Alicia)

Los nombres que se presentan a lo largo del presente Capítulo, para cada uno de los casos, son ficticios con el fin de mantener la confiabilidad y seguridad de los participantes. Para el Caso 1 el nombre dado es; Alicia, para el Caso 2, María y para el Caso 3, Pablo.

En el estudio de casos, la estudiante que representa el caso 1 participó en el desarrollo de actividades como: Entrevistas, desarrollo del Módulo de Aprendizaje, socializaciones, cuestionario de fases y test inicial y final de Campillo. Esta estudiante se caracterizó por su dedicación y responsabilidad durante todas las actividades realizadas, además de su capacidad crítica y de argumentación ante las diferentes preguntas.

A continuación se presenta el análisis de la información obtenida para cada una de las cinco fases para el caso 1:

4.3.1. Análisis de la Fase 1

En esta fase Alicia manifiesta sus conocimientos iniciales respecto a los conceptos: Punto, recta y curva, además, construye ideas que va a utilizar y desarrollar a lo largo del Módulo de Aprendizaje: Estiramiento horizontal, separación entre puntos, intersección entre elementos geométricos y trozo de curva controlado.

Inicialmente, Alicia realiza actividades como: Dibujar un punto en una goma y luego estirarla, crear un geoplano y manejar la interfaz de GeoGebra®, lo cual proporciona elementos necesarios para el desarrollo del Módulo de Aprendizaje; donde las actividades propuestas allí para la primera fase, le permiten exponer sus razonamientos respecto a las preguntas, los cuales dan cuenta de sus conocimientos iniciales. A continuación se describe el desempeño de Alicia, con respecto a cada categoría:

Categoría trozo de curva controlado

El mecanismo que Alicia construye para la comprensión del concepto de control local requiere del reconocimiento del trozo de curva controlado, que se caracteriza por ser aquella porción de la curva que se encuentra dentro de las rectas horizontales y que contiene al punto, sobre el que se quiere hacer el estudio localmente. La identificación del mismo implica que Alicia trabaje y manipule adecuadamente las aplicaciones presentadas en GeoGebra® y que a partir de esto, esté en capacidad de determinar si dicho trozo de curva se puede o no controlar.

En las aplicaciones Alicia trabaja con elementos como: Deslizadores, curvas, rectas horizontales y un punto fijo.

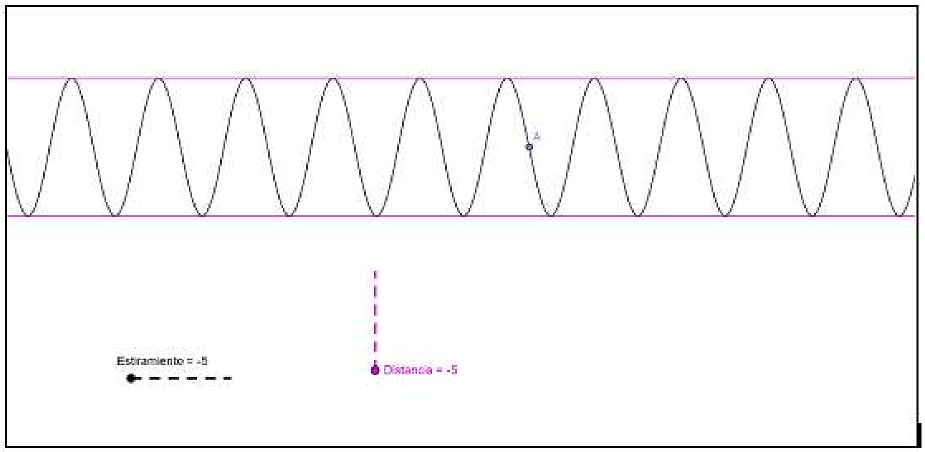


Figura 4.7: Elementos de las aplicaciones en GeoGebra®.

Las curvas y las rectas horizontales presentan cambios cuando se manipulan los deslizadores; allí las curvas se estiran y las rectas horizontales se acercan al punto fijo, donde aquella porción de la curva que se encuentra en la intersección de ambas es el trozo de curva al que se le hace el estudio de controlabilidad.

Cuando Alicia manipula los deslizadores, en las diferentes aplicaciones encuentra cambios en la curva y argumenta de la siguiente forma:

> "Se puede observar que las rectas horizontales, a medida que se acercan al punto A; solo controlan parte de la curva, porque otra parte queda fuera de las rectas horizontales".
>
> "Se observa que el deslizador de estiramiento es el que controla la curva, en cambio el deslizador de distancia funciona como un parámetro o regulador de la curva, pero parte de la curva queda fuera de las rectas horizontales". "Cuando el deslizador de estiramiento llega a la sexta subdivisión, la curva se convierte en una recta, y a medida que se acerca el deslizador de distancia al punto A, se ve que este queda alrededor de la recta, quedando 3 rectas paralelas, pero una con el punto A."

Las anteriores respuestas indican que Alicia, al interactuar con las aplicaciones de GeoGebra® está en la capacidad de reconocer el trozo de curva controlado, dado que manifiesta la existencia de la parte de la curva que queda dentro de las rectas horizontales, cuando se mueven los deslizadores.

En el momento del trabajo de campo correspondiente a la realización de la entrevista, Alicia define el trozo de curva controlado de la siguiente manera: "Es el, pedazo de la, pues, por decirlo así, el pedazo de la curva que se encuentra entre las dos rectas horizontales, igual creo que conteniendo el un punto, el punto específico."

Se puede concluir entonces, que en esta primera fase Alicia reconoce la existencia del trozo de curva controlado, aspecto que da cuenta de la construcción de uno de los primeros elementos del mecanismo que necesita y utiliza a lo largo del Módulo de Aprendizaje.

Categoría concepto de control local

En la construcción del mecanismo, Alicia da cuenta del control local cuando ubica el punto sobre la curva y estira horizontalmente alrededor de dicho punto.

Para concebir lo que sucede en el punto, Alicia realiza *zooms* de acercamiento sobre el mismo. El *zoom* permite determinar si Alicia está en la capacidad de desligarse de su visión estática de curva, puesto que a menores escalas, se puede establecer con mayor certeza lo que ocurre con la curva en dicho punto.

Alicia, al respecto, argumenta en la entrevista sobre el significado de ampliar en ambos ejes una figura y una curva: "Se puede tomar como un zoom de acercamiento, pues, en cuanto al GeoGebra®, ya que se estira en iguales dimensiones, entonces se tendría una figura más amplia o más grande y la curva, o sea, sería más grande pero igual con sus mismas dimensiones y bien proporcionado."

La anterior respuesta da evidencia de que Alicia concibe la misma curva en diferentes escalas reconociendo su unicidad. Para ello, las diferentes aplicaciones presentadas se fundamentan en realizar los estiramientos respecto a un punto, donde se reconoce que los cambios específicos en la curva se dan en torno al punto determinado.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

En esta fase Alicia interactúa con gomas, es decir con hilos que estiran, en donde dibuja un punto en el hilo y lo estira, afirmando que éste no llega a romperse, ella indica que la curva que representa el hilo se comporta como una goma ideal, la cual se puede estirar mucho y no llega a romperse.

Otro elemento fundamental para la construcción del concepto de continuidad local es la capacidad de realizar y comprender los estiramientos horizontales. En la actividad 2 de la fase 1, Alicia da a conocer lo que sucede cuando realiza un cuadrado sobre el geoplano y lo estira, afirma: “Queda un rectángulo, ya que se pierde la proporción del cuadrado, al ser estirado a lo ancho, por tanto queda con más ancho que alto.”

Este argumento que presenta Alicia, da cuenta de lo sucedido cuando realiza estiramientos horizontales, dado que ella reconoce que cambia el ancho de la figura. Sin embargo, se hace necesario profundizar en éste aspecto, para lo cual manipula diferentes aplicaciones en GeoGebra®, que constan de deslizadores, rectas horizontales, curvas y puntos fijos, los cuales al moverlos (deslizadores) permiten realizar estiramientos horizontales en una curva respecto a un punto determinado. Para realizar los estiramientos horizontales sobre las curvas era necesario que Alicia moviera el deslizador estiramiento que estaba dividido en seis partes, dichos movimientos eran realizados en forma secuencial, donde podía describir el comportamiento de la curva en diferentes momentos a medida que la estiraba.

Una de las aplicaciones que Alicia manipula es la Aplicación 5, la cual se ilustra en su forma inicial en la siguiente gráfica:

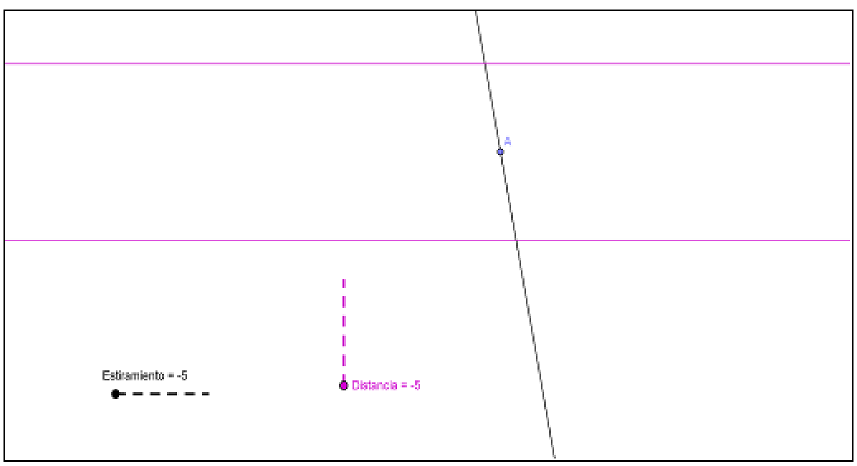


Figura 4.8: Mecanismo de estiramiento horizontal.

Los argumentos que ella expone son los siguientes:

> “La curva sólo presenta un mínimo movimiento conservando su posición en el punto A. con respecto a las líneas horizontales, éstas inicialmente controlan una mínima parte de la curva y a medida que se mueve el

> deslizador de distancia en cada subdivisión éstas van perdiendo control de la curva"
>
> "A medida que se mueve el deslizador estiramiento, la curva, por decirlo así, va girando, hasta llegar a un momento en el que queda paralelo a las rectas horizontales, tomando éstas todo el control de la curva hasta acercarse al punto A."
>
> "Forma 3 rectas paralelas, con la curva entre el punto A y las rectas horizontales al margen de ella, pareciendo así una recta sola con un punto A de referencia."

De acuerdo con lo anterior, se puede decir que Alicia ha establecido un contacto más cercano con el mecanismo, dado que emplea los estiramientos horizontales y el trozo de curva controlado para expresar el control local de una curva, en cuanto a la utilización del trozo de curva controlado, inicialmente da cuenta de su reconocimiento, el cual está determinado por el corte de las recta horizontales con la curva, donde dichas intersecciones forman un punto, es decir, el corte entre una recta y una curva dan lugar a un punto.

Categoría del Lenguaje

En esta primera fase Alicia entra en contacto con los elementos de estudio y con el reconocimiento de algunos conceptos como: Punto, recta, curva, deslizadores, aplicaciones, trozo de curva controlado, estiramiento horizontal, entre otros, los cuales comienzan a estructurar su vocabulario, el cual va desarrollando y refinando.

Alicia da cuenta de los conceptos mencionados anteriormente en el desarrollo de sus experiencias, en cuanto a los elementos punto, recta y curva, se puede decir que son utilizados en el desarrollo de todo el Módulo de Aprendizaje y que Alicia muestra una concepción más amplia sobre ellos en actividades posteriores a la actividad 1. En la actividad 2 ella interactúa con gomas elásticas y con una lupa, experiencia que le permite visualizar la noción de punto y la definición de curva como una goma ideal, lo que se hace evidente en sus argumentos cuando estira la goma y observa con la lupa un punto dibujado sobre ella, allí, ella afirma que independientemente del movimiento de la lupa y el estiramiento de la goma el punto seguirá siendo el mismo.

En esta fase, el lenguaje de Alicia comienza a ser fomentado, dado que distingue elementos como: Trozo de curva controlado, mecanismo de estiramiento horizontal y localidad del concepto, términos que ha reconocido a lo largo del desarrollo de las actividades realizadas hasta el momento.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Esta categoría, representa un aspecto relevante para el desarrollo de todos los casos, dado que es allí donde se visualiza el sentido y la profundidad con que cada caso particular ha desarrollado las actividades propuestas para la primera fase en correspondencia con sus descriptores, los cuales fueron descritos en el capítulo 3. Respecto al primer descriptor, Alicia manifiesta sus concepciones sobre punto, recta y curva en uno de sus mapas conceptuales, el cual se ilustra a continuación:

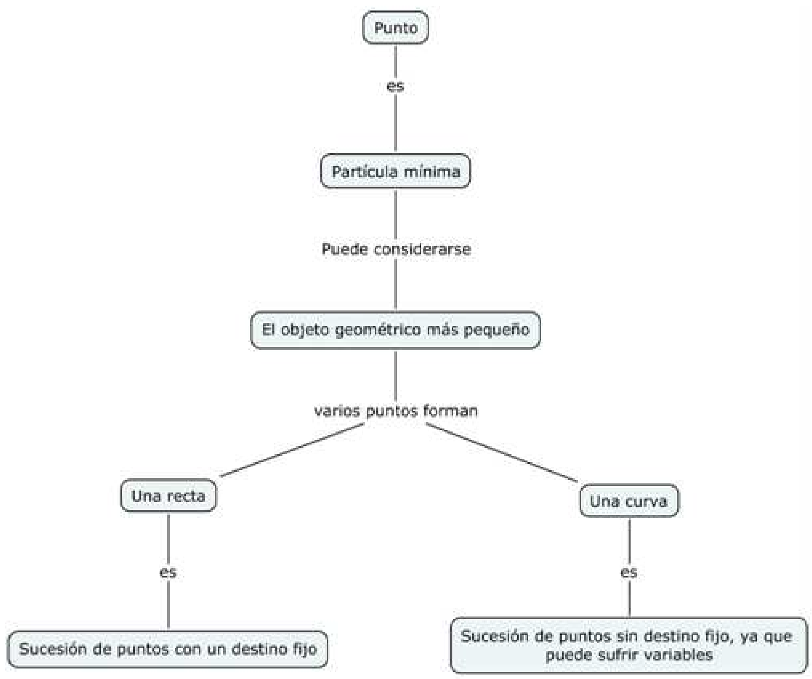


Figura 4.9: Mapa conceptual sobre el punto realizado por Alicia.

Los argumentos expuestos por Alicia, dan cuenta de que ella visualiza estos elementos sólo desde su componente gráfica y geométrica, siendo necesario profundizar más sobre los mismos, desde su definición matemática en las siguientes actividades.

Posteriormente, en el desarrollo de la entrevista se pregunta a Alicia: ¿Cómo defines el punto, la recta y una curva?, donde responde:

> "Emmm, como punto defino, la pues, para mi punto es la mínima expresión geométrica, ya que no posee ninguna de las dimensiones, pues, no tiene volumen, no tiene emmm, como, pues es, no tiene área, nada, osea, no se puede especificar en si, las cosas de un punto, como recta y como curva, pues son, es un seguimiento de puntos, que no se sabe, pues, puede ser infinitos porque no se saben la cantidad y la recta tiene una forma lineal en cambio la curva puede ser de, emm de muchas formas no se puede especificar una imagen determinada de una curva."

Con lo cual manifiesta haberse desligado un poco de la visión gráfica y geométrica de los conceptos, remitiéndose a aspectos más profundos sobre los mismos, por ejemplo, en diversos momentos afirma que una recta y una curva se pueden cortar en infinitos puntos, y que además, la curva está conformada por infinitos puntos.

En cuanto al segundo descriptor, el desempeño de Alicia en la actividad 2 de ésta fase, deja ver como ella construye un geoplano y dibuja en el mismo diferentes figuras geométricas que estira horizontalmente, verticalmente y en ambos ejes, donde cada una de éstas acciones representa un cambio sobre la figura inicial. Ella encuentra que se consiguen diferentes formas de la figura a medida que realiza los estiramientos y que cuando estira horizontalmente un cuadrado la figura que obtiene es un rectángulo debido a que se da una separación horizontal entre los puntos.

Respecto al tercer descriptor, Alicia reconoce que el elemento formado entre la intersección de una recta horizontal y una curva es un punto, donde hace explícito que en las diferentes aplicaciones de GeoGebra®, dichos puntos determinan el trozo de curva controlado, es decir, aquella porción de la curva que queda dentro de las rectas horizontales y la curva, cuando éstas se intersecan.

Respecto al cuarto descriptor, Alicia determina que el trozo de curva controlado en las diferentes aplicaciones no está condicionado por las rectas horizontales, pues éstas varían la posición respecto al punto cuando se mueven los deslizadores, es decir, la distancia entre las rectas horizontales no determina la existencia del trozo de curva controlado, dado que esta distancia puede variar; si existe el trozo de curva controlado respecto al punto, el cambio de distancia entre las rectas horizontales no afecta la existencia del mismo.

Alicia refleja el desempeño del quinto descriptor en su trabajo con las diferentes aplicaciones en GeoGebra®, en especial en la actividad 5 de esta fase, allí ella es capaz de visualizar que la curva queda dentro de las rectas horizontales y que por más que la estire siempre va a existir un trozo de la curva que queda dentro de ellas en cada una de las aplicaciones. Ella expresa lo siguiente:

> "Quedan 3 rectas, ya que la curva se convierte en una recta con el punto A y

> las rectas horizontales quedan, por decirlo así unidas, o alrededor de la recta junto al punto A" y "Relativamente sí, porque la curva se convierte en una recta cuando está en la sexta subdivisión del deslizador del estiramiento, y las rectas horizontales al quedar cerca al punto A, rodean o quedan junto a la recta porque éstas no se unen."

Estos argumentos dejan ver que Alicia tiene la capacidad de determinar cuando existe el trozo de curva controlado, el cual siempre se determina respecto a un punto, en este caso el punto A, donde reconoce que se debe ubicar el un punto de referencia específico y a partir de allí realizar los cambios, es decir, los estiramientos sobre la curva, para poder visualizar el trozo de curva controlado.

Este conjunto de desempeños expuestos por Alicia, dan cuenta de que ha desarrollado los procesos de razonamiento necesarios, en relación con los descriptores de fase, donde ha interiorizado y exteriorizado sus argumentos de acuerdo con las características de la primera fase.

4.3.2. Análisis de la Fase 2

Después de la fase de información, Alicia entra en contacto con experiencias que son guiadas a través del Módulo de Aprendizaje y en compañía del profesor, donde utiliza el mecanismo de los estiramientos horizontales para la identificación del trozo de curva controlado y la visualización del comportamiento de la curva, cuando se estira respecto a un punto.

Categoría trozo de curva controlado

Alicia se acerca al concepto de trozo de curva controlado a través de las experiencias dirigidas, las cuales se fundamentan en la interacción con las aplicaciones en el programa GeoGebra® , en cada una de éstas, ella realiza estiramientos horizontales sobre las curvas, en las cuales observa que las curvas adquieren el mismo comportamiento que las gomas, es decir, se comportan como gomas ideales, dado que se pueden estirar tanto como se quiera y no llegan a romperse, además, el estiramiento indica una separación entre puntos, argumentos que se hacían evidentes en respuestas como: "A medida que se mueve el deslizador en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión, se observa como la curva va modificando la forma para convertirse en una curva o recta controlada sobre el punto A, y más que las rectas horizontales se acercan cada vez más al punto A" y "La curva tiene forma de recta horizontal sobre el punto A, quedando paralela a las rectas horizontales entre éstas la recta y el punto A."

Alicia está en la capacidad de utilizar los estiramientos horizontales para describir que sucede con la curva y con el trozo de curva controlado, pues a medida que estira la curva respecto al punto, manifiesta que en algunas ocasiones se convierte en una línea recta respecto al mismo, lo que significa un paso más en la calidad de su razonamiento.

Categoría concepto de control local

Alicia presenta explicaciones en cada una de las aplicaciones cuando realiza los estiramientos horizontales y determina el trozo de curva controlado, las cuales le permiten definir el concepto de control local, el cual es concebido por Alicia desde el momento en que reconoce que los estiramientos sobre la curva se hacen respecto a un punto y que la existencia del trozo de curva controlado es respecto al mismo.

En cada una de las aplicaciones en GeoGebra® manipuladas por Alicia, se indaga por el control de la curva en un punto, argumentos como: "A medida que se mueve el deslizador en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión, se observa como la curva va modificando la forma para convertirse en una curva o recta controlada sobre el punto A, y más que las rectas horizontales se acercan cada vez más al punto A", dan cuenta del reconocimiento que ella hace de la localidad del concepto utilizando los estiramientos horizontales y el trozo de curva controlado respecto al punto A.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

La capacidad para realizar estiramientos horizontales y explicarlos es uno de los aspectos que caracteriza a esta fase, en la cual Alicia ilustra en la interacción con cada una de las aplicaciones, que a pesar de estirar la curva, ésta sigue siendo la misma y que lo único que sucede es que la está observando en otra escala.

Otro aspecto relevante en relación con ésta categoría, es la distinción que ella hace de la utilización de estiramientos horizontales y verticales, allí, ella realiza estiramientos en ambos sentidos y explica que sucede en cada uno de ellos, por ejemplo en la entrevista, cuando se pregunta: ¿Cuál crees que es la diferencia entre estirar horizontalmente y verticalmente una figura?, ella responde: "Que al estirar horizontalmente se tiende es como a haber, como a perder la figura inicial ya que queda en forma plana por decirlo así en el caso de la curva y en cuanto a estirar horizontal verticalmente se obtendría entonces como digo emm crestas y valles mas pronunciados, entonces sería, tendría mayor amplitud la curva" lo que deja ver la diferencia inicial que ella percibe respecto a ambos estiramientos; sin embargo, es necesario que refuerce este aspecto, dado que es pertinente que entable dicha diferencia en correspondencia con el mecanismo empleado.

Categoría Lenguaje

El lenguaje en esta fase, está en correspondencia con los elementos trabajados hasta el momento; en la fase 1 Alicia identifica los elementos y los define, pero la descripción de sus propiedades es realizada en este momento, donde describe lo que sucede con el punto y la curva a medida que se estira, y con las rectas horizontales a medida que se acercan al punto fijo. Expresiones como: "Sucede que entre más cerca estén las rectas del punto A, menor control de éstas con la curva, y al ser movido el deslizador estiramiento, la curva sufre un movimiento pero muy pequeño" y "La curva se mueve un poco, pero entre mayor distancia exista, mayor control se obtiene de la curva" permiten reconocer la visualización que Alicia tiene cuando interactúa con las aplicaciones, donde ella reconoce los cambios sobre la curva a medida que se realizan los estiramientos horizontales y que se acercan las rectas horizontales a un punto fijo.

Categoría avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Las evidencias del desempeño del primer descriptor van en correspondencia con la categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal y del segundo con la categoría trozo de curva controlado.

En todas las aplicaciones de esta fase se planteó a Alicia lo siguiente: Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?, y una de sus respuestas fue: "Sí, este es el punto de referencia y es el que controla las curvas y las rectas horizontales."

De acuerdo con las respuestas presentadas por Alicia, ella describe lo que sucede cuando se estira la curva y como dicho procedimiento ayuda a visualizar el trozo de curva controlado, dado que para describirlo lo reconoce inicialmente. Además, en las aplicaciones trabajadas en esta fase, siempre fue indagada sobre el control de cada curva y en la mayoría de dichas aplicaciones presentó una respuesta acertada, diferenciando aquellas curvas que eran y que no eran controlables.

Respecto al tercer descriptor, Alicia argumenta que no es lo mismo utilizar los estiramientos horizontales y verticales, dado que cuando estira horizontalmente puede encontrar el trozo de curva controlado y cuando estira verticalmente no es posible determinarlo.

El desarrollo que Alicia hace de la actividades, va en correspondencia con sus descriptores, donde ha manifestado los desempeños de cada uno de los descriptores de la fase, para continuar con el desarrollo y la exposición de argumentos en las actividades posteriores.

4.3.3. Análisis de la Fase 3

En esta fase de Explicitación Alicia da a conocer sus argumentos, los cuales dan cuenta de las construcciones mentales que ha elaborado respecto al concepto, allí, ella determina cuando una función es o no es controlable en un punto y manifiesta el reconocimiento de la localidad del concepto, donde es capaz de argumentar lo anterior en diferentes curvas, incluso en aquellas que en apariencia no son controlables.

En cada una de las actividades que Alicia desarrolla, tiene el espacio para dar a conocer sus razonamientos y argumentos, y a medida que se desarrolla este proceso, tiene la oportunidad de refinar y construir su vocabulario en correspondencia con el mecanismo empleado.

Categoría trozo de curva controlado

En la actividad 1 de esta fase, Alicia interactúa con 10 aplicaciones, las cuales están conformadas por diferentes curvas, cuyo propósito es determinar el control local en el punto señalado. Alicia manifiesta lo siguiente:

Respecto a la aplicación 18, 19 y 20, ella dice que las curvas son controlables en el punto A y argumenta para la aplicación 18: "Se observa una curva oblicua, que cuando se modifica tiende a ser recta, quedando entre las rectas horizontales y controlada con el zoom", para la aplicación 19: "Es una curva con el punto A como referencia, por tanto tiende a ser recta, controlada por las rectas horizontales y se observa con el zoom" y para la aplicación 20: "Aunque es una curva cerrada, siempre tiende a ser recta, quedando entre las rectas horizontales, controlada por estas y el punto A, se observa con el zoom".

Todas las explicaciones presentadas por Alicia, dan cuenta de su capacidad para determinar el control local de una curva en correspondencia con el mecanismo desarrollado, donde utiliza el reconocimiento de la existencia del trozo de curva controlado, el cual corresponde al trozo de la curva que se encuentra dentro de las rectas horizontales y que se estira respecto al punto señalado.

Ella afirma, que cuando existe el trozo de curva controlado y la curva se estira en los alrededores del punto, el comportamiento de la curva permite explicar si la curva es o no controlable en el punto, dado que si la curva queda plana en el punto, se puede afirmar que es controlable en dicho punto.

Categoría concepto de control local

Alicia construye el concepto de control local a través del mecanismo desarrollado, el cual requiere de la utilización de los estiramientos horizontales y la determinación del trozo de curva controlado, los cuales le permiten determinar si la curva es o no controlable en el punto.

Argumentos en torno al concepto de trozo de curva controlado, son explícitos en algunas respuestas de la entrevista, cuando se pregunta: ¿Qué es un trozo de curva controlado? y ¿Cuáles son las principales características de un trozo de curva controlado?, donde ella responde: "Es el, pedazo de la, pues, por decirlo así, el pedazo de la curva que se encuentra entre las dos rectas horizontales, igual creo que conteniendo el un punto, el punto específico" y "Que se encuentra dentro de las rectas horizontales del plano y obtienes un punto específico, en el caso pues utilizábamos el punto A" estas respuestas dejan claro que Alicia está en la capacidad de explicar que el trozo de curva controlado es aquel que contiene al punto y es el que está determinado por el corte de las rectas horizontales con la curva; cuando ella afirma que el trozo de curva controlado es aquel que contiene al punto, se está enfocando en la localidad del concepto, que es uno de los elementos fundamentales para la definición del mismo.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

En las aplicaciones desarrolladas a través del Módulo, Alicia siempre realiza los estiramientos horizontales a la curva respecto a un punto, en las cuales existían dos rectas horizontales y una curva, y donde ella expresaba lo que sucedía cuando se acercaban las rectas horizontales al punto y cuando se estiraba la curva en los alrededores del mismo.

Cuando a Alicia se le solicita que explique con sus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva, ella afirma lo siguiente: "Sus movimientos dependen del punto A ya que esta siempre tiende a ser una recta sobre este quedando así sobre las rectas horizontales y al realizarse el zoom se observan que éstas tienden a quedar como una sola con el punto A", este argumento permite dar cuenta de su capacidad para visualizar la distancia entre las rectas horizontales como aquella que cada vez se hace más próxima al punto A, cuando se estira la curva y se acercan las rectas horizontales al punto A, lo que indica un paso más en la calidad de su razonamiento.

Categoría Lenguaje

Cuando Alicia define el concepto de control local a través del desarrollo del Módulo de Aprendizaje, está haciendo referencia al concepto de continuidad local, el cual es explícito en consonancia con el mecanismo utilizado.

En la entrevista cuando se pregunta: ¿Cómo defines el concepto de control local?, ella responde: "Cuando una curva al realizarse estiramientos tiende como a obtener una forma plana y se queda entre la curva, entre las rectas horizontales y contiene el punto A, igual su estiramiento sería en base a este punto", argumento que deja ver que la definición desarrollada por Alicia, está en términos del mecanismo empleado.

Adicionalmente, en cada una de las aplicaciones de esta fase se le pregunta por el control local después de haber empleado el mecanismo, a lo cual ella responde en una de las aplicaciones: "Significa que una curva tiende a ser una curva recta con base al punto A, haciendo que quede entre las rectas horizontales y al realizarse el zoom sólo se observe una recta conteniendo el punto A", lo cual permite concluir que Alicia está definiendo correctamente el concepto de control local con el mecanismo empleado, lo que indica un avance en su proceso de razonamiento y la refinación de su vocabulario.

Categoría avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

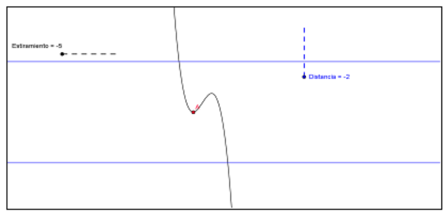
Respecto al primer descriptor Alicia muestra en sus argumentos la destreza para reconocer la localidad del concepto, en una de las aplicaciones se pregunta: ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué?, cuya respuesta es:

> "Inicialmente se observa una curva con el punto A como referencia, cuando se varían los deslizadores queda una curva en forma recta sobre A, contenida entre las rectas horizontales. Sí, este el punto de referencia de la curva, lo cual hace que todas las modificaciones se realicen en base a este o sobre esteA"

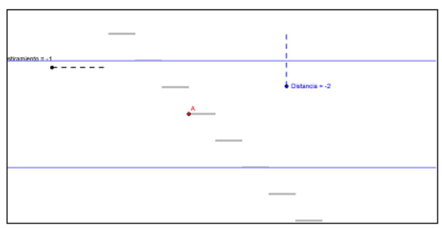
lo cual permite ver que Alicia se ubica en un punto de referencia para analizar los cambios presentados en la curva, reconociendo así la localidad del concepto.

Adicionalmente, este concepto es reforzado con la entrevista en preguntas como: ¿Porqué en los ejercicios realizados estirabas la curva respecto a un punto? y ¿Por qué en los ejercicios realizados acercabas las rectas horizontales a un punto?, cuyas respuestas son: " Porque se quería encontrar como la localidad que tenía, ósea la dependencia que tiene la curva en el puntoA" y "Por lo mismo, porque queríamos analizar pues todos los estiramientos y el comportamiento de las curvas respecto a ese puntoA." En cuanto al segundo descriptor, Alicia en diferentes aplicaciones es cuestionada por la existencia del trozo de curva controlado, donde argumenta que en algunas curvas si lo puede establecer, pero que en otras no, además, que en determinados momentos es necesario hacer un zoom de acercamiento para poder encontrarlo.

Respecto al tercer descriptor, Alicia argumenta cuando una función es o no controlable en un punto en diferentes curvas. Algunas de ellas en su presentación inicial en las diferentes aplicaciones se ilustran a continuación:



Aplicación 19



Aplicación 25

Figura 4.10: Aplicaciones en GeoGebra®.

En cada una de estas curvas, Alicia es indagada por el control de la curva en el punto A, donde se realizan preguntas como: ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? y explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva. Allí, ella responde:

> “Si, inicialmente se observa una curva con el punto A como referencia, cuando se varían los deslizadores queda una curva en forma recta sobre A, contenida entre las rectas horizontales, el punto de referencia de la curva, lo cual hace que todas las modificaciones se realicen en base a este o sobre este, ser controlable significa que una curva tiende a ser una curva recta con base al punto A, haciendo que quede entre las rectas horizontales y al realizarse el zoom sólo se observe una recta conteniendo el punto A”.

Lo cual deja claro que Alicia está en la capacidad de determinar el control de la curva en el punto señalado.

Las curvas presentadas en las aplicaciones son de diferentes formas, pues se pretende que Alicia no sólo analice una forma particular de las curvas, sino que visualice diferentes funciones, con diferentes formas gráficas, donde pueda determinar si son o no controlables en el punto indicado.

Respecto al cuarto descriptor, Alicia presenta un progreso en su lenguaje cuando trata de definir el trozo de curva controlado y el control de una curva en un punto, ella afirma que:

> "Es el, pedazo de la, pues, por decirlo así, el pedazo de la curva que se encuentra entre las dos rectas horizontales, igual creo que conteniendo el un punto, el punto específico" y "Cuando una curva al realizarse estiramientos tiende como a obtener una forma plana y se queda entre las curva, entre las rectas horizontales y contiene el punto A, igual su estiramiento sería en base a este punto".

Expresiones que dan cuenta del vocabulario empleado por Alicia en relación con el nivel de razonamiento que se desea alcanzar.

Todas las categorías explicadas a lo largo de ésta fase de explicitación dan cuenta de que Alicia presenta argumentos más coherentes en torno al concepto de control local y que ha desarrollado cada una de las pautas de los descriptores de fase correspondientes.

4.3.4. Análisis de la Fase 4

En esta fase Alicia ilustra cómo define el control local y su vez como lo aplica a otros contextos a través de la utilización de los elementos aprendidos y la creación de nuevas ideas, donde los elementos aprendidos por ella, están articulados a la construcción y uso del mecanismo.

Categoría trozo de curva controlado

La definición que Alicia hace del concepto de continuidad local, representa el desarrollo de un proceso donde construye el concepto, el cual no es presentado en su definición formal, sino desde sus componentes, donde ella construye su definición matemática.

Uno de los elementos que da cuenta del proceso de construcción que Alicia ha desarrollado sobre el concepto, es el cuestionario de fases, donde se pregunta por conceptos básicos en relación con el mecanismo desarrollado. Por ejemplo, en el cuestionario de esta fase, una de las preguntas realizadas es:

1. Se puede garantizar que una curva es controlable en un punto porque:

a) La expresión está definida en el punto

b) La expresión No está definida en el punto

c) Cuando se acercan las rectas horizontales al punto la curva tiende a convertirse en recta

d) Cuando se alejan las rectas horizontales al punto la curva tiende a convertirse en recta

e) Ninguna de las anteriores

La respuesta dada por Alicia es la c, donde determina cuando la curva es controlable en el punto de acuerdo con las características del mecanismo, y para haber llegado a esto, inicialmente determinó el trozo de curva controlado en cada una de las aplicaciones con la utilización de los estiramientos horizontales.

Categoría concepto de control local

En esta fase se propone a Alicia que presente nuevas ideas sobre el control local y se le indica que exponga alguna actividad para explicar el concepto. Sin embargo, sus argumentos están limitados a las definiciones del mecanismo desarrollado y no los aplica a otros contextos.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Durante todo el trabajo de campo, Alicia se ubica siempre en un punto sobre la curva para realizar los estiramientos horizontales, dado que el concepto que ella esta desarrollando es el de continuidad local de Cauchy, que se caracteriza por su aspecto local.

En la aplicación 29, manifiesta los siguientes argumentos respecto al control local de la curva, con la utilización del mecanismo de estiramiento horizontal: “Si se conserva la imagen inicial, se observa que entre más se muevan los deslizadores de distancia, más cerca estarán las rectas horizontales al punto A, menos control tienen estas de la curva” y “Sucede que la curva tiende a ser recta con respecto al punto A, quedando por decirlo así controlada por este y las rectas horizontales que la contienen" lo que deja ver claramente que Alicia siempre se ubica en un marco de referencia específico para estirar la curva y en este caso ese marco corresponde al punto, donde ella enfatiza en la localidad del concepto, es decir el control de la curva se determina respecto a un punto.

Categoría del Lenguaje

En el trabajo realizado hasta el momento, Alicia manifiesta un lenguaje en correspondencia con el mecanismo empleado, dado que define el control local de una curva utilizando los estiramientos horizontales y el trozo de curva controlado en el punto. Sin embargo, ella se encuentra atada a la definición del concepto, con la utilización del mecanismo, donde se hace necesario que trate de aplicarlo a otros contextos que le permitan visualizar las utilidades del mismo.

Categoría avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Respecto al primer descriptor, Alicia plantea explicaciones en correspondencia con el mecanismo empleado, ella manifiesta en cada una de las aplicaciones sus argumentos para explicar cuando la curva es o no controlable en el punto, donde afirma que: "Una curva es controlable en el punto si se puede encontrar el trozo de curva controlado y al estirar la curva en el punto tiende a quedar plana" argumento que da cuenta de la capacidad de Alicia para determinar el control de la curva en el punto indicado.

El segundo descriptor es desempeñado por Alicia cuando consolida los estiramientos horizontales y la determinación del trozo de curva controlado en la definición del control local, lo cual se puede visualizar en los argumentos que expresa en el mapa conceptual elaborado.

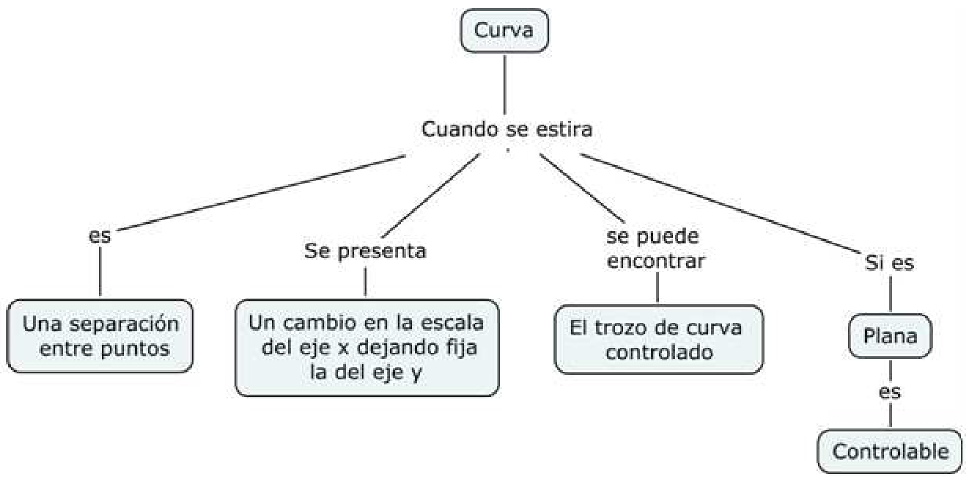


Figura 4.11: Mapa conceptual sobre la curva.

Ella ilustra su reconocimiento del trozo de curva controlado y la necesidad de realizar estiramientos horizontales a la curva para determinar si queda plana en el punto seleccionado, con lo cual puede concluir si la curva es o no controlable en el punto determinado.

Respecto al tercer descriptor, Alicia interactúa en una de sus aplicaciones con una curva que tiene dos puntos resaltados, donde trata de encontrar la continuidad en cada uno de ellos, llegando a la conclusión de que el hecho de que una curva sea controlable en un punto, no garantiza que lo sea en otro diferente, lo que da evidencia de su reconocimiento y justificación de la localidad del concepto.

En cuanto al cuarto descriptor, es pertinente que Alicia refuerce sus argumentos, pues aunque da cuenta de un adecuado manejo del mecanismo, es conveniente proponer nuevas ideas y aplicar el concepto a otros contextos.

4.3.5. Análisis de la Fase 5

En esta fase Alicia no adquiere nuevos conocimientos, allí consolida lo aprendido en cada una de las cuatro fases anteriores, donde la red de relaciones que se hace manifiesta en esta fase es el producto del trabajo desarrollado en cada una de las actividades anteriores, dado que ella hace un reordenamiento de los conceptos adquiridos a lo largo del trabajo de campo y los consolida en una estructura que da cuenta de sus procesos de razonamiento.

Categoría trozo de curva controlado

En el desarrollo de todas las actividades del Módulo de Aprendizaje, siempre se resalta el aspecto local del concepto, por ejemplo en la aplicación 32 se hace esta pregunta: Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?, a lo que ella responde: "Si, porque todos estos elementos, tanto la curva como las rectas, quedan en el mismo sentido, es decir de forma horizontal, formando a simple vista solo una recta con un punto determinado" donde se puede dar cuenta del reconocimiento del control local en su aspecto puntual para determinar cuando la curva es o no controlable en el punto señalado.

Categoría concepto de control local

El mecanismo empleado se fundamenta en la determinación del trozo de curva controlado y la realización de estiramientos horizontales a las diferentes curvas presentadas en las aplicaciones de GeoGebra® , aspecto que Alicia desarrolla durante todo el trabajo de campo.

En la aplicación 32 se pregunta: ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta, donde ella responde: "Inicialmente se observa un plano, con infinitas curvas, las cuales están determinadas por dos rectas horizontales y un punto especifico A, el cual contienen éstas, a medida que se realizan los deslizamientos con respecto a las rectas horizontales, se puede observar como estas van tendiendo un menor control sobre las rectas, en cuanto si se deja la posición inicial de las curvas"; afirmación que deja ver que el estirar horizontalmente respecto a un punto, no implica que la curva sea diferente a la inicial, sino que la está observando a diferentes escalas, ya sea en uno de los ejes o en ambos.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Como se mencionó en la categoría anterior, el control local es el concepto desarrollado a través de todo el Módulo de Aprendizaje, donde cada una de las aplicaciones del mismo, se fundamenta en la determinación del control respecto a un punto fijo, y para llegar a dicha definición, Alicia utiliza el mecanismo de los estiramientos horizontales en cada una de las aplicaciones.

Categoría del Lenguaje

Una de las principales características del modelo educativo de van Hiele es la importancia atribuida al lenguaje, dado que las verbalizaciones en torno al concepto dependen del nivel de razonamiento del estudiante.

En esta fase se presentan unos aportes de información, para que Alicia relacione los conceptos desarrollados a través del Módulo de Aprendizaje, con los elementos de la definición de continuidad local de Cauchy, allí, ella argumenta la relación que existe entre los estiramientos horizontales y verticales con las distancias ε y δ de la definición de Cauchy, donde hace explícito que la distancia ε corresponde a la distancia entre las rectas horizontales y que la distancia δ a aquella que le permite visualizar lo que sucede con el trozo de curva controlado cuando es estirado.

Categoría avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Respecto al primer descriptor Alicia determina los elementos geométricos en situaciones como: La intersección entre dos rectas, dos planos y una curva y un plano, donde responde para el primer caso, que es un punto, para el segundo, que es una recta y para el tercero que es una curva, lo cual da evidencia de que identifica adecuadamente el punto, la recta y la curva en situaciones matemáticas.

En cuanto al segundo descriptor, Alicia trabaja nuevamente con aplicaciones donde realiza estiramientos horizontales a las curvas y donde se desenvuelve adecuadamente utilizando el mecanismo, sin requerir ayuda de nadie, lo que indica un paso más en la calidad de su razonamiento.

Argumentos como: "Con respecto a las curvas, se puede observar todos sus movimientos con el deslizador de estiramiento, de forma que cuando están en la sexta subdivisión tienden a ser una recta con respecto a el punto A, quedando así entre las rectas horizontales y conteniéndolas en si cuando estas se encuentran en la sexta subdivisión del deslizador de distancia y todos estos elementos, tanto la curva como las rectas, quedan en el mismo sentido, es decir de forma horizontal, formando a simple vista solo una recta con un punto determinado" permiten ver que Alicia comprende el concepto de continuidad local y que para llegar a esta definición utilizó los estiramientos horizontales.

Respecto al tercer descriptor, el reconocimiento de la existencia del trozo de curva controlado es evidenciado cuando Alicia estira las curvas, en algunos estiramientos ella encuentra que se puede determinar, en cambio en otros momentos no, lo que deja ver como reconoce el mismo en correspondencia con el mecanismo, dado que utiliza los estiramientos horizontales.

Respecto al cuarto descriptor, Alicia reconoce el carácter local del concepto de continuidad en las aplicaciones, cuando se ubica en un punto de referencia, donde realiza los estiramientos respecto al punto y encuentra el trozo de curva controlado respecto al mismo, explicando la definición de continuidad local en su esencia puntual.

Respecto al quinto descriptor, Alicia llega a la definición de continuidad local comprendiendo el concepto de control local, allí ella manifiesta el control local como un proceso reiterativo donde se estira la curva en los alrededores del punto y donde la curva tiende a quedar plana, advirtiendo que se estiraba dentro del trozo de curva controlado.

En cuanto al sexto descriptor, Alicia da cuenta de la interiorización del mecanismo en la definición que presenta del control local y de continuidad local, donde argumenta que ambos conceptos significan lo mismo. Adicionalmente, Alicia presenta la definición de continuidad local de Cauchy en términos del mecanismo con los siguientes argumentos: Para cualquier par de rectas horizontales equidistantes de un punto (aquellas que controlan la distancia vertical) se trata de buscar un trozo de curva controlado (aquel que determina el distanciamiento horizontal) que pasa por el punto (que se encuentra dentro del distanciamiento horizontal). Es decir, con el mecanismo seleccionado si se tiene el trozo de curva controlado, al estirar la curva, si tiende a quedarse plana la curva será controlable en el punto. Es decir, dado un ε, puede hallarse un δ donde siempre que $|x-c| < \delta$, puede encontrarse que $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Estas conclusiones finales dadas por Alicia dejan ver que ha interiorizado el mecanismo con sus respectivas propiedades, y que lo asocia con el concepto objeto de estudio que en este caso es el concepto de continuidad local de Cauchy.

Progreso en el nivel de razonamiento para el Caso 1

A continuación se presentan los resultados obtenidos por Alicia en el desarrollo del test de Campillo, los cuales dan cuenta de sus respuestas iníciales, es decir aquellas que presentó antes del desarrollo de trabajo de campo, donde se encontraba ubicada en el Nivel II de razonamiento respecto al concepto, y las respuestas finales, es decir, después del desarrollo del trabajo de campo, donde se encuentra ubicada en el Nivel III de razonamiento.

Respuestas del test de Campillo para el caso 1

Las respuestas que se presentan a continuación, son las iniciales y finales dadas por Alicia cuando desarrolla el test de Campillo.

Respuestas de Alicia Test de Campillo		
Pregunta	**Respuesta inicial**	**Respuesta final**
1	c	c
2	b	b
3	a	a
4	b	b
5	a	d
6	c	a
7	c	a
8	b	b
9	a	a
10	a	b
11	c	c
12	a	a
13	b	b
14	e	b
15	c	c
16	a	b
17	a	d
18	b	c
19	e	c
20	b	b
21	a	c
22	e	a
23	d	d
24	d	c
25	b	d
26	b	b
27	a	c
28	b	b
29	b	a
30	a	c
31	a	d
32	b	c

Cuadro 4.2: Respuestas al test de Campillo por Alicia.

Repuestas por bloques de la estudiante del Caso 1

La consolidación de las respuestas en bloques, permite visualizar como Alicia ha progresado en su nivel de razonamiento, pasando de un Nivel II a un Nivel III, respecto a la comprensión del concepto de continuidad local, lo que deja claro que las fases de aprendizaje son herramientas que favorecen el diseño de actividades para que la estudiante progrese a través de los niveles de razonamiento, en este caso particular el ascenso de Alicia en su nivel de razonamiento.

Respuestas por bloques Test de Campillo				
	Bloque 1	**Bloque 2**	**Bloque 3**	**Nivel de razonamiento**
Inicial	9	5	2	2
Final	11	6	5	3

Cuadro 4.3: Respuestas por bloques para Alicia.

4.4. Análisis por fases para el Caso 2 (María)

La estudiante que representa el Caso 2 se caracteriza por sus habilidades de razonamiento, ella es muy crítica y analiza con detalle todo lo que sucede a su alrededor, siempre pregunta cuando algo no le queda claro y exige una adecuada justificación en las respuestas.

A continuación se presenta el análisis de los datos obtenidos durante el desarrollo de las cinco fases de Aprendizaje.

4.4.1. Análisis de la Fase 1

A continuación se presenta el conjunto de categorías desarrolladas por María en la fase 1, donde da cuenta de sus conocimientos previos y los conceptos que va a desarrollar.

Categoría trozo de curva controlado

En esta primera fase, María reconoce la existencia del trozo de curva controlado sin nombrarlo directamente, donde al interactuar con las aplicaciones de GeoGebra®, manifiesta argumentos como: “La curva se va reduciendo y estirando a la vez, las rectas horizontales de manera quedan controlando la curva cuando las horizontales están iguales y cuando no es parte de la curva la que queda controlada” y “Si queda dentro, aunque la curva está totalmente estirada, conserva su cualidad de curva y a su vez, queda dentro de las rectas que están en el punto A", los cuales dan cuenta de su reconocimiento del trozo de curva controlado.

Dichas aplicaciones están conformadas por elementos como: Deslizadores, curvas, rectas horizontales y un punto fijo, donde los deslizadores son segmentos que están divididos en seis partes, y a medida que se mueve el deslizador en cada una de las subdivisiones, la curva se estira o las rectas horizontales se acercan al punto fijo.

De acuerdo con las expresiones manifestadas por María, se puede decir que ella está en la capacidad de determinar cuál es el trozo de curva controlado con la ayuda de las herramientas presentadas en las aplicaciones de GeoGebra®.

Categoría concepto de control local

María reconoce que en todas las aplicaciones se le presenta un punto sobre la curva, donde debe estirar horizontalmente y realizar zooms de acercamiento, los cuales son herramientas que implican la utilización del mecanismo para definir el concepto.

Ella reconoce la diferencia que existe entre estirar horizontalmente y realizar zooms de acercamiento, donde explica que el zoom es: "Poner más grande la figura o curva, a la vez, en eje x y en el eje y, de igual proporción" y "Ampliar su tamaño en ambas direcciones" lo cual deja ver que está en la capacidad de realizar zooms de acercamiento sobre un punto específico de la curva y que es capaz de describir los comportamientos de la misma.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

María construye el mecanismo de estiramiento horizontal cuando interactúa con las diferentes aplicaciones en GeoGebra® y cuando construye el Geoplano, respecto a las aplicaciones en GeoGebra®, ella realiza sucesivos estiramientos horizontales a la curva en un punto fijo y respecto a la construcción del Geoplano, estira las figuras dibujadas en él; cuando estira horizontalmente el cuadrado que ha dibujado en el Geoplano, ella afirma: "Se convierte en un rectángulo horizontal" argumento que indica su capacidad para visualizar la figura que forma el cuadrado, cuando es estirado horizontalmente.

En la interacción con las aplicaciones de GeoGebra®, María realiza los estiramientos a las curvas en el punto y expresa lo siguiente: "La curva se va reduciendo y estirando a la vez, las rectas horizontales de manera quedan controlando la curva cuando las horizontales, están iguales y cuando no es parte de la curva la que queda controlada" y "La parte controlada de la curva se reduce, hasta que las rectas solo alcanzan el punto A" lo cual da cuenta de su capacidad para describir los comportamientos de la curva cuando es estirada, la cual sigue conservando su unicidad.

Categoría Lenguaje

María reconoce los conceptos que va a estudiar y a desarrollar durante el trabajo de campo, y a medida que desarrolla cada una de las actividades de las fases, se visualiza el progreso y refinamiento de su lenguaje.

Un elemento esencial en su vocabulario es la concepción que posee sobre el punto, la recta y la curva, los cuales se ven en el mapa conceptual que ha elaborado inicialmente y que se ilustra a continuación.

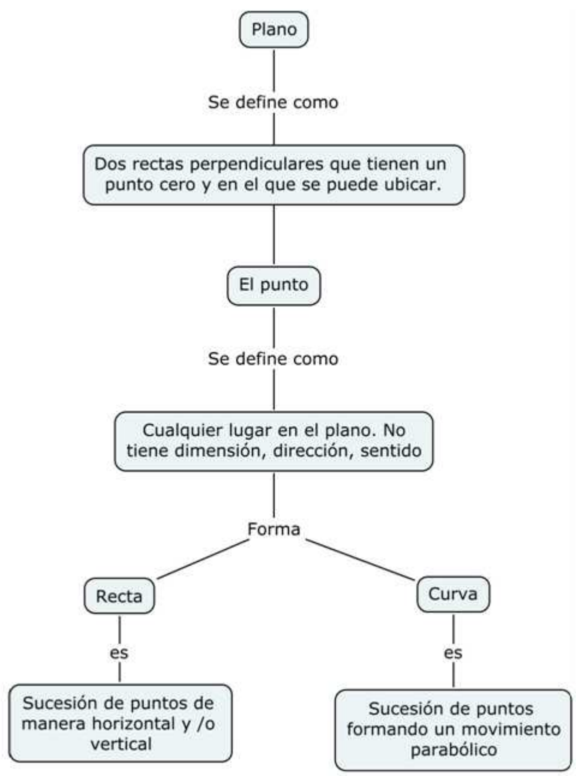


Figura 4.12: Mapa conceptual sobre el plano.

Estos argumentos dejan ver las concepciones de María respecto a algunos elementos geométricos, en cuanto al punto, ella argumenta que éste no posee dirección, dimensión y sentido, respecto a la recta y a la curva se hace necesario que profundice en los mismos, dado que se ve en el mapa su definición desde una visión gráfica, siendo necesario analizar su aspecto analítico.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Es claro que María ha manifestado sus conceptos previos sobre: El punto, la recta y la curva y que además ha sido informada sobre conceptos a trabajar como: Estiramientos horizontales y trozo de curva controlado, los cuales le permiten construir la definición de control local.

El desempeño de Alicia en la primera fase se visualiza en el proceso que ha desarrollado en cada actividad en correspondencia con los descriptores.

El primer descriptor se visualiza en la categoría lenguaje y en la entrevista cuando se pregunta: ¿Cómo defines el punto, la recta y la curva?, donde ella responde: "El sitio se puede ver como un sitio cualquiera en un plano cartesiano, como la intercepción de dos rectas, pues haciendo la intercepción de dos rectas, o como una mínima expresión geométrica; la recta es una secuencia de puntos indefinidos que puede estar en cualquier dirección y una curva es también un secuencia de puntos definidos que tienen una forma irregular", argumentos que permiten ver la relación que entabla sobre el punto, la recta y la curva, siendo necesario refinar sobre los mismos.

El segundo descriptor se visualiza con la categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal y con el trabajo realizado con las gomas, es decir, con hilos que estiran, donde ella dibuja un punto en la goma, la estira y observa el punto con una lupa cuando estira la goma, allí, ella dice que el punto sigue siendo el mismo por más que la estire, reconociendo la unicidad de la curva en el punto.

Adicionalmente, el desempeño del segundo descriptor se observa cuando responde el cuestionario de ésta fase, uno de sus razonamientos explicita que entre dos puntos existen infinitos puntos, dando cuenta de lo sucedido a la curva cuando es estirada.

En cuanto al tercer descriptor, María en sus explicaciones afirma que cuando dos rectas se intersecan el lugar geométrico que se obtiene es un punto y que cuando una recta y una curva se intersecan es otro punto, explicaciones que dejan claro su reconocimiento del punto en diferentes situaciones, dado que cuando trabaja con las aplicaciones de GeoGebra® hay momentos donde se presentan estas intersecciones.

Respecto al cuarto descriptor, en este momento del trabajo de campo María manifiesta su capacidad para reconocer el trozo de curva controlado en las diferentes aplicaciones, ella expresa respecto a éste, que por más que se acerquen las rectas horizontales al punto fijo, si existe el trozo de curva controlado, éste seguirá existiendo aunque la distancia entre las rectas horizontales cambie.

Respecto al quinto descriptor, María menciona la existencia del trozo de curva controlado cuando visualiza la porción de la curva que queda dentro de la intersección las rectas horizontales con la curva, en la entrevista ella manifiesta lo siguiente cuando se pide que defina el trozo de curva controlado: “Es una sección de la curva que se encuentra en el marco de referencia de dos rectas paralelas que permiten determinar si hay control o no”.

De acuerdo con lo anterior, María ha cumplido con los objetivos trazados para esta fase en correspondencia con sus descriptores, llevando a cabo todos sus desempeños.

4.4.2. Análisis de la Fase 2

En esta fase María explora el tema a partir de tareas que son guiadas e indaga el concepto a través de interacciones con diferentes aplicaciones en GeoGebra® , donde el realizar movimientos sobre éstas, le permite visualizar el comportamiento de la curva. Adicionalmente, construye el mecanismo a partir de los estiramientos horizontales y la determinación del trozo de curva controlado.

Categoría trozo de curva controlado

En esta fase María construye con los estiramientos horizontales, el trozo de curva controlado en un punto sobre la curva, donde comienza a acercar las rectas horizontales a dicho punto. Argumentos como: “Si, sin importar que tanto se muevan las rectas horizontales, la parte de la curva que contiene el punto A, siempre está controlada” y “Las curvas están alineadas con el punto A, pero ninguna la toca, aun así las curvas son controladas por las rectas, mas no en el punto A” exponen que María reconoce el trozo de curva controlado con la utilización de los estiramientos horizontales, pero que presenta vacios en cuanto a la localidad del concepto, dado que a pesar de haber estirado respecto al punto no reconoce que él está en el trozo de curva controlado.

Categoría concepto de control local

María llega al concepto de control local después de hacer una adecuada construcción del trozo de curva controlado y de reconocer la localidad del concepto a través del desarrollo de las diferentes actividades.

En la entrevista cuando se pide que explique cuáles son las principales características de un trozo de curva controlado manifiesta lo siguiente: “Que se encuentra dentro de dos rectas paralelas y que se encuentra también en el punto” lo cual da cuenta de su capacidad para reconocer que el trozo de curva controlado es aquella porción de la curva que está dentro de las rectas horizontales y que contiene el punto.

De acuerdo con lo anterior, ella ha dado un paso más en el progreso de su razonamiento, puesto que ha identificado adecuadamente las características del trozo de curva controlado para la definición de control local.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Otro elemento fundamental para acceder a la explicación del control local es la adecuada construcción de los estiramientos horizontales, ella inicialmente presenta sus explicaciones en cuanto a los estiramientos horizontales y posteriormente, explica la diferencia entre los estiramientos horizontales y verticales, en cuanto a los estiramientos horizontales ella dice que es la alteración de la figura en sentido horizontal en dirección derecha e izquierda o viceversa y respecto a la diferencia entre los estiramientos horizontales y verticales afirma lo siguiente: "Depende del sentido en el que se encuentren ambas rectas, no se obtiene lo mismo, además el estiramiento horizontal cambia en x y el vertical en y, no queda el mismo pedazo de la curva" lo que da cuenta de que María entiende que no se obtiene el mismo concepto de control utilizando estiramientos horizontales o verticales.

Categoría del Lenguaje

En esta fase, María manifiesta sus concepciones sobre los elementos trabajados hasta el momento y sus correspondientes propiedades, respecto al punto dice: "Fracción mínima de una línea, el cual no tiene dimensión" y respecto a la curva: "Secuencia de puntos que tiene forma de línea irregular, con crestas y valles" expresiones que indican el reconocimiento de algunas características del punto y las curvas, donde a la vez se hace necesario profundizar en los mismos.

Otro aspecto relevante son las expresiones verbales respecto a los conceptos: Estiramiento horizontal, trozo de curva controlado y control local, los cuales permiten la construcción del concepto de control local utilizando los estiramiento horizontales y el trozo de curva controlado, en cuanto al control local afirma que: "Es cuando hay un trozo de curva dentro de dos rectas paralelas y eso determina el control en el punto" donde da cuenta de su lenguaje en correspondencia con el mecanismo empleado, lo que significa una mejora más en su razonamiento.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Respecto al primer descriptor María se enfrenta a aplicaciones donde realiza estiramientos horizontales respecto a un punto, allí ella manifiesta que el estirar la curva y acercar las rectas horizontales al punto fijo, le han permitido observar cual es el trozo de curva controlado.

En esta fase, Mara manifiesta el desempeño en cada uno de estos descriptores con lo expresado en las categorías anteriores, dado que ella ha alcanzado los objetivos propios de la fase en correspondencia con sus descriptores porque:

- Utiliza con seguridad los estiramientos horizontales y está en la capacidad de reconocer y explicar cuando existe el trozo de curva controlado en diferentes curvas.
- Reconoce la localidad del concepto y sabe que el punto de referencia hace parte del trozo de curva controlado.
- Utiliza con seguridad los estiramientos horizontales y está en la capacidad de reconocer y explicar cuando existe el trozo de curva controlado en diferentes curvas.
- Diferencia el comportamiento de la curva cuando se estira horizontalmente y verticalmente.

4.4.3. Análisis de la Fase 3

En este período del trabajo de campo María expone sus argumentos en las socializaciones con los otros compañeros partícipes de la investigación, allí, ella da cuenta de sus construcciones mentales en torno al concepto de control local, donde sus argumentos, en algunos momentos fueron refutados y en otros aceptados por parte de sus compañeros.

Categoría trozo de curva controlado

Cuando María identifica la existencia del trozo de curva controlado ha dado un gran paso para saber si una curva es o no controlable en el punto, las aplicaciones que ella manipula en esta fase son de diferentes características en su forma inicial, con el objetivo de que pueda determinar cuáles son y cuáles no son controlables en el punto indicado.

Respecto a una curva que no es controlable afirma: "Las curvas no tocan al punto A en ningún momento, el punto A sirve como punto de referencia, en su alineación, más no son controladas en A" y respecto a una curva que es controlable afirma: "Sin importar si la curva se estira o no, sin importar el desplazamiento de las rectas la curva es controlada, así sea por una pequeña fracción", expresiones que dan cuenta de un gran avance en su razonamiento, dado que está reconociendo que el control local es una propiedad de la curva en el punto.

Categoría concepto de control local

En la fase anterior María determina el trozo de curva controlado y en esta fase explica sus características, donde un adecuado manejo y explicación del mismo implica la utilización de los estiramientos horizontales.

Posteriormente, identifica el punto que se forma en la intersección entre las rectas horizontales y la curva y por último utiliza los deslizadores para realizar movimientos: Estirar la curva y acercar las rectas horizontales al punto fijo.

El anterior procedimiento ha permitido a María definir el control local de una curva en un punto, al respecto afirma: "Es cuando hay un trozo de curva dentro de dos rectas paralelas y eso determina el control en el punto y la curva se estira y se vuelve plana" argumento que deja ver como María explica con claridad cuando la curva es controlable en el punto, además no sólo visualiza el trozo de curva controlado, lo define y lo relaciona con el concepto objeto de estudio.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

María explicita en cada uno de sus argumentos lo sucedido a la curva cuando la estira entre rectas horizontales, explicaciones como:

> "Sin importar que la curva se estire por completo, o que las rectas horizontales se muevan y se separen, el punto A va a estar controlado por las rectas paralelas" y "Aunque la curva tiene direcciones diferentes y sufra acercamiento, la parte central de la curva queda controlada, siempre y cuando se este cerca del punto A".

Dan cuenta del comportamiento de la curva cuando es estirada, donde María manifiesta con sus explicaciones que esta en la capacidad de realizar estiramientos sobre la curva y que puede argumentarlos.

Categoría del Lenguaje

En la entrevista se pregunta a María: ¿Cuándo una curva se puede controlar en un punto? y ¿Cómo defines el concepto control local?, ella responde:

> "Cuando el punto es constante en la curva y el punto a su vez está dentro de la recta, que determina si hay control o no" y "Es cuando hay un trozo de curva dentro de dos rectas paralelas y eso determina el control en el punto, eh, sería que la curva, el punto siempre va a estar en la curva, cuando está controlado, refiriéndonos pues al control, que si posee el comportamiento de la curva o que tanto se desplacen las rectas paralelas horizontales que estén haciendo el control siempre va a estar, siempre va a ser como una constante el punto controla".

De acuerdo con lo anterior, María manifiesta en sus expresiones la utilización del mecanismo, dado que define el control local en correspondencia con el mismo, además, en el desarrollo del trabajo, María explica que la determinación del trozo de curva controlado y los estiramientos horizontales la condujeron a definir el concepto de control local, aspecto que evidencia un paso más en el progreso de su razonamiento.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

En cuanto al primer descriptor, se puede decir que María sólo en algunos momentos reconoce el carácter local del concepto. Sin embargo, se le presentan nuevos momentos para que llegue a dicho reconocimiento en diferentes curvas, por ejemplo en una de las preguntas de la entrevista: ¿Por qué en los ejercicios realizados estirábamos la curva siempre respecto a un punto?, donde ella responde:

> "Para determinar que comportamiento tenía la curva en ese, en el lugar específico donde se encontraba el punto, para ver si el punto seguía en el mismo lugar, bien fuera que la curva se tornara plana o siguiera siendo curva"; y ¿Por qué en los ejercicios realizados acercabas las rectas horizontales al punto?, donde responde: "Para observar si el punto era controlado o no en la parte de la recta que estaba dentro de la curvas, dentro de la rectas".

Los anteriores argumentos dejan ver que María reconoce la localidad del concepto, pues ella está afirmando que para determinar el comportamiento de curva se ha ubicado en un punto específico.

Respecto al segundo descriptor su desempeño se puede visualizar con la categoría trozo de curva controlado. Adicionalmente en las aplicaciones que trabajo en esta fase es capaz de visualizarlo y explicarlo, ella dice que: “Sin importar cuánto se aleje, acerque, estire o encoja, la parte de la curva que tiene el punto A siempre está dentro de las rectas horizontales”.

En cuanto al tercer descriptor su desempeño se puede visualizar con la categoría concepto de control local. Adicionalmente, en esta fase María trabaja con diferentes curvas para visualizar si son o no controlables en el punto indicado, ella afirma respecto a la aplicación 25 que: “Parte de la curva siempre está sobre el punto A, el cual siempre está controlado sin importar el estiramiento de la curva”.

Adicionalmente María interactuó con diez aplicaciones donde determinó el control local en el punto de cada una de las curvas, en cada una de ellas explicó porque eran o no controlables en el punto.

En este momento de finalización de la fase 3, respecto al cuarto descriptor, María expresa la definición del control local de una curva diciendo que la curva es controlable en el punto cuando encuentra el trozo de curva controlado y al estirarla se vuelve plana en el punto.

Argumentos como estos, dejan ver que ella está utilizando el mecanismo y sus respectivos términos para explicar la definición del control local de la curva en el punto, lo que implica un gran avance en su razonamiento.

4.4.4. Análisis de la Fase 4

María manifiesta la concepción sobre el control local de una curva en correspondencia con el mecanismo desarrollado y aplica sus ideas a contextos extramatemáticos. A continuación se describe cada una de las categorías para la fase 4.

Categoría trozo de curva controlado

En esta fase María expresa como el concepto de trozo de curva controlado le permite definir el control local, en la aplicación 29 le es presentada una parábola, ella realiza estiramientos y afirma respecto a la curva que: “Si queda dentro de las rectas queda controlada. Aunque la curva se ha estirado por completo, ha quedado paralela a las rectas horizontales y dentro de ella” expresiones que dan cuenta de que ella ha identificado inicialmente aquella porción de la curva que queda dentro de las rectas horizontales, lo que indica una avance en su razonamiento.

Categoría concepto de control local

En esta fase Mara da a conocer que la definición de control local que ha aprendido hasta el momento puede ser aplicada a otros contextos, ella manifiesta nuevas ideas respecto al mismo cuando es indaga por su utilidad en situaciones que no necesariamente son matemáticas.

Adicionalmente, efectúa una lectura sobre la utilidad del concepto y observa diferentes gráficas, las cuales ilustran figuras como puentes, respecto a una de ellas, manifiesta la importancia que tiene el concepto de control local para el soporte de algunas estructuras.

Algunas de las preguntas realizadas y las respuestas dadas por María fueron las siguientes:

Profesor: ¿Por qué es importante que algunas estructuras representen expresiones controlables?

María: *En las estructuras, una expresión controlable puede definirse como referencia para denotar el soporte de la estructura.*

P: ¿Por qué es importante que algunas estructuras representen expresiones NO controlables?

M: *Para denotar qué parte no se encuentra sobre una estructura de apoyo.*

P: ¿Cuál es la importancia del concepto de control local en situaciones de la vida cotidiana?

M: *El estudio de una zona específica de alguna estructura.*

Las anteriores respuestas permiten ver que María presenta nuevas ideas sobre el concepto y que las aplica a situaciones que hacen parte de su vida diaria, donde el concepto no sólo es utilizado en contextos matemáticos.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

En el trabajo de campo desarrollado hasta el momento María habla del concepto de control local haciendo referencia a su aspecto local, el cual se ve evidenciado en las actividades desarrolladas hasta el momento, para las cuales ha utilizado los estiramientos horizontales.

En una de las aplicaciones se pregunta a María lo siguiente: Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?, donde ella responde:

> "Si, ya que sin importar cual sea el comportamiento de la curva, dicho punto de referencia está siempre en el marco de referencia de las rectas horizontales".

Expresiones que dejan claro la realización de estiramientos horizontales sobre la curva en el punto y la capacidad de describir los sucedido cuando es estirada.

Categoría Lenguaje

Esta categoría va en correspondencia con la categoría concepto de control local, puesto que es allí donde se visualiza la utilidad que ella hace del concepto en otros contextos, donde explica la importancia del mismo en la realización de diferentes estructuras como puentes y edificios, las cuales en algunos momentos pueden representar expresiones no controlables en un punto.

El lenguaje de María, muestra que ella no sólo llega a la definición de control local con la utilización del mecanismo, sino que lo aplica a contextos extramatemáticos, lo que indica un paso más en la calidad de su razonamiento.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

En cuanto al primer descriptor ella expone el concepto de control local en términos del mecanismo desarrollado, además, afirma que el control local es una propiedad de la curva en el punto seleccionado.

Respecto al segundo descriptor, María identifica algunas relaciones entre los términos y manifiesta las siguientes expresiones:

- Cuando se estira horizontalmente la curva no se rompe, las puntas se separan horizontalmente y la curva va quedando plana.
- Cuando la curva está formada por puntos y al estirarla no se rompe, quiere decir que hay infinitos puntos.
- La existencia o no del trozo de curva controlado, solamente depende de la forma de la curva y no de las rectas horizontales.

- La curva es controlable en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pasa por el punto.
- Si al estirar un trozo de curva tiende a quedarse plana la curva será controlable.

Las anteriores expresiones dejan ver que María está en la capacidad de entablar relaciones entre los conceptos desarrollados, los cuales son descritos por ella de acuerdo con sus propiedades.

Respecto al cuarto descriptor, se puede decir que María reconoce la localidad del concepto, lo cual se hace visible en su trabajo con las diferentes aplicaciones cuando realiza los estiramientos horizontales respecto a un punto fijo.

Una de las preguntas realizadas en el cuestionario de fases expone lo siguiente:

Si observas dos puntos diferentes en una curva, un punto A y un punto B y si se tiene que la curva es controlable en el punto A, se puede garantizar que:

a) La curva es controlable en el punto B

b) La curva no es controlable en el punto B

c) No existe control local

d) El punto A y B coinciden

e) Ninguna de las anteriores

Allí, la respuesta de María es la e, donde argumenta que el hecho de que una curva sea controlable en un punto, no garantiza que sea en otro, dado que el control local como su nombre lo dice es de carácter local, es decir en el punto.

Respecto al quinto descriptor, María propone ideas para visualizar el concepto en otros contextos, sin embargo, sus argumentos sólo van en correspondencia con el mecanismo desarrollado y no en términos que ella hubiese creado.

4.4.5. Análisis de la Fase 5

El adecuado desempeño en cada una de las actividades de las fases anteriores se visualiza en esta fase, dado que María consolida todo lo aprendido e interiorizado en el desarrollo de las actividades, allí no se manifiestan nuevos conocimientos, pero en cada uno de sus argumentos muestra como ha estructurado sus pensamientos y las redes de relaciones que ha creado respecto al concepto.

Categoría trozo de curva controlado

En esta fase María muestra que está en la capacidad de definir cuando la curva es o no controlable en el punto y para ello determina el trozo de curva controlado, donde afirma que aunque la distancia entre las rectas horizontales se modifique, si existe el trozo de curva controlado respecto al punto, éste no desaparecerá.

Una de las preguntas realizadas cuando efectúa los estiramientos es: ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión?, a la cual responde:

> "Se aprecian tres rectas paralelas horizontales equidistantes, y en una de ellas se encuentra el punto A, garantizando que la curva sea controlable en A".

Argumentos que dejan ver la capacidad de María para visualizar lo sucedido entre dos rectas horizontales, las cuales le permiten determinar el trozo de curva controlado para definir el control y no control local de la curva en el punto.

Categoría concepto de control local

Como se mencionaba en la categoría anterior, para llegar a la definición de control local María determina el trozo de curva controlado y realiza estiramientos horizontales respecto al punto seleccionado de la curva.

En la interacción con una de las aplicaciones se plantea la pregunta: ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta, donde ella responde:

> "Se ve cada vez menos controlada, menos parte de la curva se encuentra dentro de las rectas paralelas, excepto cuando se encuentra totalmente estirada, ya que se ve como una recta horizontal, igual que las otras dos rectas".

Explicaciones que permiten observar que cuando Mara realiza las deformaciones indicadas, es capaz de describir lo que sucede con la curva, donde expone que las curvas tienden a quedar planas en el punto cuando representan expresiones que son controlables, siendo esto una propiedad de la curva.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Cuando una curva es estirada horizontalmente en un punto, la curva en apariencia parece diferente pero sigue siendo la misma, lo único que sucede es que se está visualizando en diferentes escalas, aspecto que es reconocido y manifestado por Alicia cuando realiza los estiramientos horizontales a las curvas, los cuales son efectuados respecto a un punto y dónde éstos permiten la construcción del mecanismo para llegar a la definición del concepto.

Categoría del Lenguaje

Respecto a esta categoría, María expresa la definición de control local haciendo alusión a la definición de continuidad local de Cauchy, la cual ha sido desarrollada en relación a un mecanismo y expresada respecto a la definición de trozo de curva controlado y estiramientos horizontales en el punto, en correspondencia con la definición de Cauchy.

Cuando María habla de la definición de continuidad local en la entrevista argumenta lo siguiente:

> "Eh, sería que la curva, el punto siempre va a estar en la curva, cuando está controlado, refiriéndonos pues al control, que si posee el comportamiento de la curva o que tanto se desplacen las rectas paralelas, horizontales que estén haciendo el control siempre va a estar, siempre va a ser como una constante el punto controlado".

Lo cual indica el adecuado uso de los estiramientos horizontales para tratar de definir el concepto de control local.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

En cuanto al primer descriptor, María afirma que cuando se intersecan dos rectas, el lugar geométrico resultante es un punto y cuando se intersecan una curva y una recta otro punto, expresiones que dejan ver el reconocimiento de la existencia del punto en situaciones matemáticas.

Oro aspecto que permite analizar la concepción de María respecto a los conceptos: Punto, recta y curva, se observa en la construcción de uno de sus mapas conceptuales, como se ilustra a continuación.

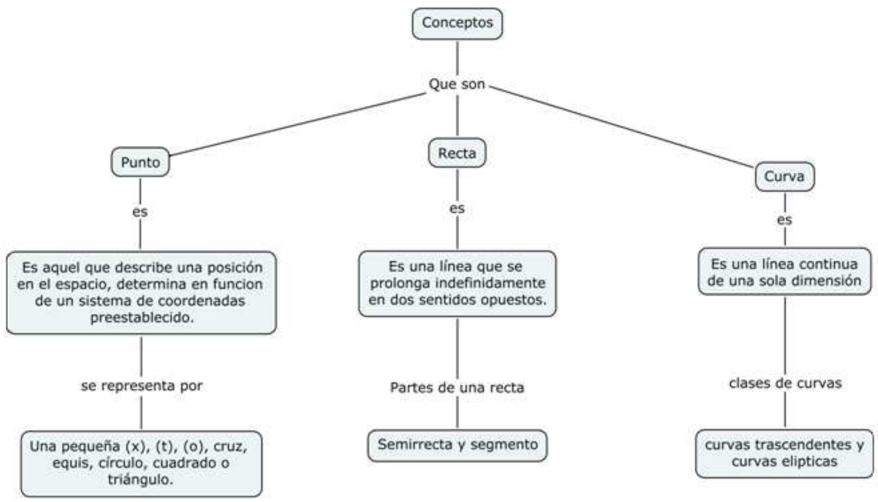


Figura 4.13: Mapa conceptual sobre definiciones.

Los anteriores argumentos dan cuenta de que María diferencia características del punto, la recta y la curva y que reconoce propiedades en cada uno de ellos.

En cuanto al segundo descriptor María argumenta que la utilización de los estiramientos horizontales permiten determinar si existe o no el control local de una curva en un punto. En una de las aplicaciones trabajadas en esta fase, después de realizar los estiramientos horizontales a la curva en el punto indicado, afirma lo siguiente: "Sin importar cuánto se muevan las rectas paralelas, siempre la curva estará dentro de las mismas", "Sin importar cual sea el comportamiento dentro de la curva o de las rectas, el punto A siempre estará dentro de las rectas paralelas", "Siempre existirá un trozo de curva en el punto A, el cual siempre es controlado por las rectas horizontales" y "Se puede determinar que una curva controlada en un punto, si ambos elementos se encuentran en un marco de referencia que indique control" expresiones que dan cuenta de su utilización de los estiramientos horizontales para llegar al concepto de control local y por ende al concepto de continuidad local.

El desempeño en el tercer descriptor se puede visualizar con las categorías: Trozo de curva controlado y concepto de control local, de esta fase. Adicionalmente, algunos de sus argumentos dejan ver como ella describe el trozo de curva controlado con la utilización de los estiramientos horizontales, lo cual se hace manifiesto en algunas preguntas con sus respectivas respuestas como se menciona a continuación.

Profesora: ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

María: “Se va reduciendo el trozo de curva controlado por las rectas, excepto cuando la curva está completamente estirada”.

P: ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

M: “Se aprecian tres rectas paralelas horizontales equidistantes, y en una de ellas se encuentra el punto A”.

P: Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

M: *Si, ya que se aprecia no como curva, sino como recta, paralela a las otras dos.*

Respecto al cuarto descriptor María reconoce el carácter local del concepto cuando está en la capacidad de centrarse en un punto específico de la curva para realizar estiramientos y determinar el trozo de curva controlado, además el hecho de que una curva sea controlable en un punto, no garantiza que lo sea en otros puntos de la curva, donde ella manifiesta que se pueden seleccionar dos puntos sobre la curva y en uno de ellos la curva puede ser controlable, pero en otro no, por ejemplo, en una de las aplicaciones cuando se tienen dos puntos, llamados A y B, ella estira la curva y acerca las rectas horizontales a cada uno de ellos. Respecto al punto A dice: “Es controlable en A, ya que al estar el punto A sobre la recta y ésta dentro de las rectas paralelas horizontales, el punto A se encuentra dentro de las rectas horizontales”. Respecto al punto B dice: “No es controlables, ya que el punto B se encuentra sobre la recta paralela y ésta no se encuentra en medio de las rectas horizontales del deslizador distancia”. Allí se está reconociendo que el control se visualiza respecto a un punto y el hecho de que una curva sea controlable en un punto, no garantiza que lo sea en otro punto diferente.

María manifiesta el desempeño del quinto descriptor cuando reconoce si diferentes curvas son o no controlables en el punto, además, en las aplicaciones trabajadas en esta fase muestra como es capaz de visualizar, determinar y explicar el concepto en diferentes curvas. Argumentos como: “Se puede apreciar tres rectas y un punto en medio de ellas. La curva se torna plana y las rectas horizontales tienen su máximo acercamiento” y “Cuando la curva y el punto tienen las mismas características que indiquen control, como que ambos elementos se encuentren dentro del marco de referencia como lo son las rectas horizontales A" dan cuenta de la capacidad de María para razonar respecto al concepto y poder determinar cuándo una curva es o no controlable en un punto.

Respecto al sexto descriptor, el desempeño de María se puede analizar cuando observa detalladamente la gráfica presentada a continuación:

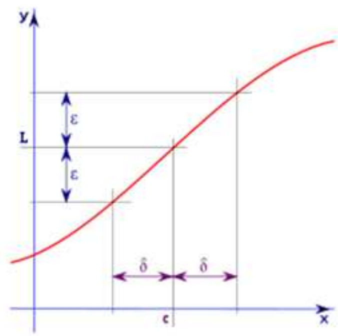


Figura 4.14: Definición de continuidad local de Cauchy.

Allí, María deduce relaciones que están en correspondencia con el mecanismo construido, ella afirma que la distancia ε está determinada por las rectas horizontales presentadas en las aplicaciones, que la distancia δ está determinada por las rectas verticales y que existen puntos de intersección entre las rectas horizontales y la curva, los cuales le permiten encontrar el trozo de curva controlado, argumentos que dan cuenta de que María utiliza los elementos construidos para asociarlos al concepto de continuidad local de Cauchy, que es la definición de continuidad caracterizada por su aspecto local.

Progreso en el nivel de razonamiento para el Caso 2

A continuación se presentan los resultados obtenidos por María en el desarrollo del test de Campillo, los cuales dan cuenta de sus respuestas íniciales, es decir aquellas que presentó antes del desarrollo de trabajo de campo y donde se encontraba ubicada en el Nivel II de razonamiento respecto al concepto, y las respuestas finales, es decir, después del desarrollo del trabajo de campo, donde se encuentra ubicada en el Nivel III de razonamiento.

Respuestas del test de Campillo para el caso 2

Las respuestas presentadas por María en el test de Campillo se ilustran a continuación, éstas dan cuenta de sus respuestas antes y al final del trabajo de campo.

Repuestas por bloques de la estudiante del Caso 2

La consolidación de las respuestas en bloques, permite visualizar como María ha progresado en su nivel de razonamiento, pasando de un Nivel II a un Nivel III, respecto a la comprensión del concepto de continuidad local, lo que deja claro que las fases de aprendizaje son herramientas que favorecen el diseño de actividades para que la estudiante progrese a través de los niveles de razonamiento, en este caso particular el ascenso de María en su nivel de razonamiento.

4.5. Análisis por fases para el Caso 3 (Pablo)

El estudiante que representa el caso 3 es llamado Pablo, el cual se caracteriza por su amabilidad, respeto, colaboración e interés por realizar los trabajos del proceso de investigación.

Cada vez que él resuelve las actividades, pregunta si lo que hace esta correcto o incorrecto, cuestionando siempre lo que comprende, con el interés de realizar adecuadamente las actividades, el cual ha estado muy interesado durante todo el trabajo de campo por los conceptos allí abordados, donde manifestaba que estos conceptos lo llevaran a comprender otros conceptos de las Matemáticas que abordará a lo largo de su año escolar.

4.5.1. Análisis de la Fase 1

En esta primera fase Pablo manifiesta que le hace falta conocer más sobre conceptos matemáticos y que el trabajo que iniciará, lo hace reconociendo la falta de conocimiento sobre algunos temas de Matemáticas.

Inicialmente, él es instruido para que conozca algunos conceptos a desarrollar: Estiramiento horizontal, separación entre puntos, intersección entre elementos geométricos y trozo de curva controlado, los cuales son desarrollados cuando resuelve las actividades de Módulo de Aprendizaje.

Respuestas de María Test de Campillo		
Pregunta	**Respuesta inicial**	**Respuesta final**
1	c	c
2	a	a
3	a	a
4	c	c
5	d	d
6	c	c
7	c	a
8	d	c
9	e	a
10	b	a
11	c	c
12	a	a
13	b	b
14	c	a
15	a	a
16	a	a
17	c	d
18	c	b
19	a	c
20	a	a
21	c	c
22	e	d
23	b	b
24	d	d
25	a	a
26	d	b
27	a	a
28	a	e
29	c	c
30	b	b
31	d	d
32	b	c

Cuadro 4.4: Respuestas al test de Campillo por María.

Categoría trozo de curva controlado

Uno de los conceptos fundamentales que Pablo construye en esta fase es el concepto de trozo de curva controlado, el cual es asimilado por él en el trabajo que realiza con

Respuestas por bloques Test de Campillo				
	Bloque 1	**Bloque 2**	**Bloque 3**	**Nivel de razonamiento**
Inicial	7	5	2	2
Final	10	7	4	3

Cuadro 4.5: Respuestas por bloques para María.

las aplicaciones de GeoGebra® , las cuales constan de elementos como: Deslizadores, curvas, rectas horizontales y un punto fijo, donde cada uno de ellos posee su utilidad para el mecanismo a desarrollar. A continuación se ilustra la gráfica de una de las aplicaciones.

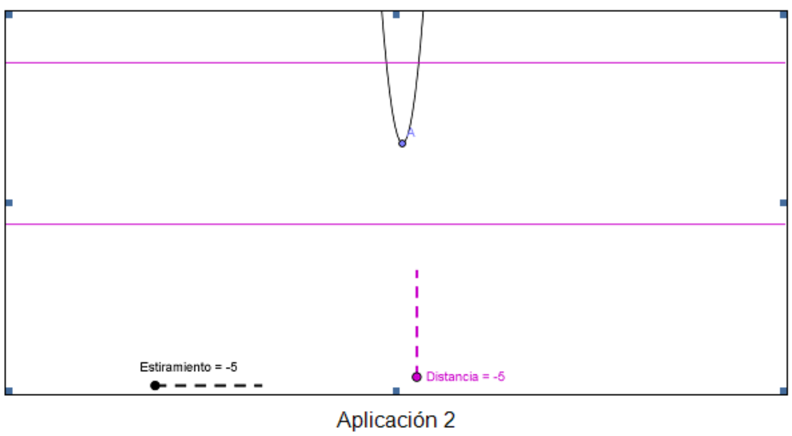


Figura 4.15: Elementos de aplicación en GeoGebra®.

Los deslizadores son segmentos que están divididos en seis partes, a medida que Pablo los mueve, la curva y las rectas horizontales presentan cambios, él afirma que el deslizador estiramiento es el que estira la curva horizontalmente y el deslizador distancia, el que acerca las rectas horizontales al punto fijo, en este caso el punto A.

En la interacción con las diferentes aplicaciones, él manifiesta argumentos como:

> “La curva se va volviendo controlada” “La curva y la línea horizontal se van alineando”, “El deslizador de estiramiento queda en medio del de distancia” y “La curva queda horizontalmente pero controlada”

expresiones que dejan ver su capacidad de describir los cambios en la curva cuando utiliza los deslizadores, siendo necesario profundizar en el reconocimiento del trozo de curva controlado, dado que sus argumentos carecen de fundamentos.

Categoría concepto de control local

En esta fase Pablo define el concepto de control local sólo desde su reconocimiento, él inicialmente se ubica en un punto fijo sobre la curva, realiza estiramientos horizontales sobre el mismo y luego un zoom de acercamiento. Al respecto, él dice que un zoom:

> "Es anchar y ampliar en contexto toda la figura, tanto el ancho como el largo, es decir, lo horizontal y lo vertical, para que tengan una igual proporción o dependiendo de la información que cojan diferentes proporciones".

Argumentos que permiten dar cuenta de la visualización del zoom como aquel proceso donde se obtiene la misma curva, pero en diferentes escalas.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Pablo inicialmente asume la curva como una goma ideal, posteriormente realiza estiramientos sobre la misma y finalmente determina el elemento geométrico formado en la intersección de las rectas horizontales con la curva, procedimientos que le permiten acercarse a la construcción de la definición a partir de la utilización del mecanismo de los estiramientos horizontales, el cual se caracteriza por su aspecto local, es decir, la curva se estira respecto a un punto fijo sobre ella.

Cuando Pablo realiza los estiramientos horizontales sobre la curva en el punto, explica que sucede en cada momento del estiramiento, argumentos como:

> "Las líneas de distancia se van acercando más a la curva hasta que ésta queda fuera de la distancia y queda en todo el punto A" y "El deslizador de estiramiento hace que la curva quede más amplia mientras la distancia se va acercando hasta llegar al punto A".

Dan cuenta de que realiza y describe los estiramientos horizontales, en correspondencia con lo sucedido en la curva.

En cuanto a la intersección entre las rectas horizontales y la curva, en cada una de las aplicaciones determina que es un punto, y respecto a la curva como goma ideal afirma que entre un punto existen infinitos puntos.

Los anteriores procesos efectuados por Pablo, ilustran como la utilización de los estiramientos horizontales es una herramienta que le permite comprender el concepto de control local.

Categoría del Lenguaje

El lenguaje de Pablo en esta primera fase no es muy amplio, pero da a conocer sus argumentos respecto a diferentes conceptos, en cuanto al punto afirma: "Este no tiene dimensión ya que no tiene sentido, magnitud y dirección" y respecto a la recta: "Estas tienen una dimensión ya que muestran una porción específica en el espacio y hay dos tipos de dimensiones de curva, curvas planas y curvas en el espacio", afirmaciones que dan cuenta de los elementos que él reconoce respecto a estos conceptos.

En cuanto a los estiramientos horizontales, en las diferentes aplicaciones de GeoGebra® expresa lo siguiente:

> "La curva está controlada en línea, pero el deslizador está en el punto A el cual es la base de la curva" y respecto al trozo de curva controlado dice: "La curva se expande un poco más, la curva toma más espacio en las rectas horizontales pero esta cuando se acerca al punto A deja afuera la curva".

Expresiones que permiten observar la utilización que Pablo hace de los elementos para construir el mecanismo y que dan cuenta de los procesos de pensamiento desarrollados en correspondencia con el vocabulario expresado.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Pablo ilustra el desempeño en el primer descriptor cuando define el punto, la recta y la curva con argumentos como:

- El punto: Aquel que describe una posición en el espacio, se determina en función de un sistema de coordenadas preestablecidas.
- La recta: Es una línea que se prolonga infinitamente en dos sentidos opuestos y está formada por puntos.
- La curva: Es una línea continua, con una forma con diferentes dimensiones que cambia de sentido y dirección.

Los anteriores argumentos dan a entender que él diferencia cada uno de estos tres elementos y que describe algunas de sus propiedades, sin embargo, se hace necesario profundizar un poco más en sus definiciones, en especial en la definición de curva, aspecto que se desarrollará con mayor profundidad en las fases posteriores.

Respecto al segundo descriptor, su desempeño se puede visualizar en la categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal. Adicionalmente, sus argumentos respecto a los estiramientos horizontales en las diferentes aplicaciones, expresiones como:

> "Cuando las rectas horizontales se acercan al punto A las crestas se van saliendo, pero si la barra de estiramiento también se estira estas van disminuyendo su amplitud", "A medida que el estiramiento y la distancia se pasan por las subdivisiones va disminuyendo su trabajo" y "Cuando las subdivisiones están en la sexta, las curvas y las líneas horizontales quedan tan juntas que parecen una sola línea".

Dan cuenta de que Pablo analiza en cada estiramiento horizontal el comportamiento de la curva en el punto indicado.

El desempeño del tercer descriptor se puede visualizar en la categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal. Adicionalmente, Pablo afirma que es capaz de definir el elemento formado entre la intersección de dos rectas y dos curvas, donde para ambas situaciones dice que es un punto y lo ilustra en gráficas, dando así cuenta de un adecuado desempeño respecto este descriptor.

En cuanto al cuarto descriptor, a medida que realiza los estiramientos horizontales a las curvas y que acerca las rectas horizontales al punto fijo, determina el trozo de curva controlado, cuando varía la distancia entre las rectas horizontales, afirma que este cambio no condiciona la existencia del trozo de curva controlado, pues aunque la distancia entre las rectas horizontales sea grande o pequeña, si el trozo de curva controlado existe, éste no deja de existir por la variación de la distancia entre las rectas, es decir, Pablo comprende que el trozo de curva controlado está establecido por las rectas horizontales, pero éstas no condicionan su existencia.

Respecto al quinto descriptor, la capacidad de Pablo para reconocer cuanto un trozo de curva está o no está controlado en un punto, se puede visualizar en sus argumentos:

> "Un trozo de curva controlado es una curva que haya cogido, pues en recta horizontal y siempre pase por el punto que este dentro de las líneas horizontales, pero la base de la curva controlada localmente es que una parte de la curva esté recta y pase principalmente por el punto y que las

> principales características, son, primero tiene que estar horizontalmente, verticalmente no es la dirección correcta, segundo debe pasar por el punto obligatoriamente para ser una recta, una curva controlable, debe de estar dentro de las líneas horizontales sin salirse y al utilizar el zoom, no se puede partir ni salir, ni coger otra dirección".

Los cuales dan cuenta del reconocimiento de Pablo respecto al trozo de curva controlado y el vocabulario que ha desarrollado en la fase.

4.5.2. Análisis de la Fase 2

En esta fase Pablo reconoce las propiedades de los elementos que va a utilizar a lo largo de las actividades del Módulo de Aprendizaje, dado que en la fase 1 reconoce los conceptos y en la fase 2 describe las propiedades de los mismos, allí, entreteje relaciones que le permiten reconocer las características de cada concepto para llegar a la definición del concepto objeto de estudio, en este caso el concepto de continuidad local.

Categoría trozo de curva controlado

La descripción que Pablo realiza sobre el concepto trozo de curva controlado se aprecia cuando utiliza los estiramientos horizontales, dado que estos le permiten visualizarlo cuando las diferentes curvas son estiradas. Respecto a la aplicación 8 manifiesta expresiones como las siguientes:

- "La línea horizontal se va acercando más al punto A y el deslizador de estiramiento hace que la curva se vaya moviendo y cuando va en la subdivisión 5, la curva es controlada".
- "La longitud de la curva se amplía un poco ya que su longitud principal es de - 5 y llega a - 3,6, y el deslizador de distancia se va acercando cada vez más al punto A dejando gran parte de la curva por fuera".
- "La curva va tomando forma controlada mientras las líneas horizontales van cerrando cada vez más su amplitud es menor hasta que la curva quede completamente horizontal igual a la distancia".
- "La curva queda completamente controlada y el deslizador de estiramiento y de distancia quedan horizontalmente y casi en el punto A".

Las anteriores expresiones dejan claro que él utiliza los estiramientos horizontales para llegar a determinar la existencia del trozo del trozo de curva controlado, el cual puede variar de acuerdo al movimiento que se efectúe en los deslizadores, ya que a medida que se acercan las rectas horizontales al punto fijo y a medida que se estira la curva, se aprecia otro tamaño en el trozo de curva controlado.

Categoría concepto de control local

El concepto de control local implica la construcción de un mecanismo que permita definirlo, además, es necesario el reconocimiento de su localidad, dado que el control local de una curva se determina en un punto.

Pablo inicialmente identifica que todas las curvas que manipula poseen un punto de referencia respecto al cual debe realizar los estiramientos horizontales, con el propósito de determinar el trozo de curva controlado y finalmente, realizar zooms de acercamiento en el mismo. Cuando Pablo realiza dicho proceso, admite expresiones como:

> "Cuando una curva está controlada localmente es porque esta toma una posición de recta después de estirarla".

Las cuales dan cuenta de su reconocimiento del control local de una curva, de acuerdo con las propiedades que se observan en ella cuando es estirada, donde garantiza que aquellas curvas para las cuales se pueda determinar el trozo de curva controlado y que cuando se estiran quedan planas, son las que representan expresiones controlables localmente.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

De acuerdo con lo mencionado en las categorías anteriores, él utiliza el mecanismo de estiramiento horizontal para llegar a la definición de control local, donde en cada una de las aplicaciones describe los estiramientos horizontales que se realizan a las curvas; adicionalmente, trabaja con estiramientos verticales para diferenciar lo que sucede entre estos, es decir, entre utilizar los estiramientos horizontales y verticales.

Una de las preguntas realizadas a Pablo fue: ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta, donde él responde: "La curva vertical sólo acoge una parte de la curva donde está el punto A cada vez que se va cerrando deja la curva por fuera". Argumento que permite dar cuenta de la visualización de Pablo al utilizar los estiramientos verticales, aspecto que es contradictorio, es decir, es diferente el comportamiento de la curva cuando se estira horizontalmente que cuando se estira verticalmente.

Otras de las preguntas realizadas fueron: ¿Cuál es la diferencia entre estirar horizontalmente y verticalmente una curva? y ¿Cuál es la diferencia entre el concepto de distancia horizontal y distancia vertical?, donde respectivamente responde:

> "La diferencia más visible es el cambio de dirección, porque horizontal es como ancho y vertical es lo largo, cogen diferentes direcciones" y "Entre distancia horizontal y distancia vertical, no podemos decir que una tiene más distancia que la otra, porque eso es dependiendo de la información, pero como lo dije anteriormente son las direcciones que cogen, por lo cual es totalmente diferente el resultado de la curva".

Argumentos que dan cuenta de su capacidad para reconocer que no se obtiene lo mismo trabajando con estiramiento horizontales o verticales, ni con distanciamientos horizontales o verticales.

Categoría Lenguaje

En este momento del trabajo de campo Pablo reconoce las propiedades de los elementos trabajados hasta el momento; ya no sólo expresa un conjunto de definiciones sino que manifiesta algunas propiedades básicas de los conceptos abordados. Por ejemplo, respecto a una curva afirma que: "Está compuesta por infinitos puntos y éstas pueden ser clasificadas en controlables y no controlables" y "Las curvas que son controlables poseen un trozo de curva controlado que es la parte de la curva que queda dentro de las líneas horizontales y conteniendo al punto, esto se da por medio del zoom". Argumentos que dan cuenta de su capacidad para describir las propiedades de una curva con los conceptos desarrollados en las diferentes actividades, lo que indica un avance más en su nivel de razonamiento, donde él ilustra sus argumentos con un vocabulario más amplio y refinado.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

El desempeño del primer descriptor se puede visualizar en la categoría trozo de curva controlado, del segundo descriptor en la categoría concepto de control local y del tercer descriptor en la categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal. Adicionalmente, a lo largo del desarrollo de las actividades de esta fase, se observa como Pablo realiza estiramientos horizontales sobre las curvas, para analizar cuando son o no controladas localmente, algunos de sus argumentos respecto a esta definición son:

> "La curva va tomando forma controlada mientras las líneas horizontales van cerrando cada vez más su amplitud es menor hasta que la curva quede completamente horizontal igual a la distancia" y "Cuando una curva está controlada localmente es porque esta toma una posición de recta después de estirar".

Expresiones que dan cuenta de que Pablo ha cumplido con los desempeños del primer y segundo descriptor de esta fase.

Adicionalmente, Pablo trabaja en algunas aplicaciones con rectas horizontales y verticales equidistantes del punto fijo, donde determina las características obtenidas en ambas situaciones, es decir, con el acercamiento de rectas horizontales y verticales, donde establece que no se obtiene lo mismo empezando con rectas verticales que con rectas horizontales, dado que las rectas horizontales son las que le permiten visualizar el trozo de curva controlado, aspecto que permite reforzar el desempeño de Pablo en el tercer descriptor de esta fase.

4.5.3. Análisis de la Fase 3

En esta fase Pablo pone de manifiesto sus construcciones mentales, las cuales dan cuenta de los procesos de razonamiento desarrollados, donde él da a conocer como ha interiorizado la construcción del mecanismo en relación con la definición del concepto. Él define cuando una curva es o no controlable en un punto en correspondencia con el mecanismo desarrollado y explica cada uno de los elementos y procedimientos realizados para llegar al concepto, lo que se hace explícito en sus argumentos.

Categoría trozo de curva controlado

Pablo trabaja en esta fase con diferentes curvas que en apariencia pueden ser o no controlables desde una concepción visual, las cuales son presentadas en una escala inicial y donde posteriormente se realizan estiramientos horizontales a las mismas para observar su comportamiento. Con la utilización de los estiramientos horizontales, Pablo determina el trozo de curva controlado y analiza el control de la curva en el punto, lo cual es realizado en diez aplicaciones diferentes, con las cuales interactúa en esta fase.

Respecto a las curvas controlables y no controlables, él define algunas de sus características.

Curvas controlables:

- No se cortan al utilizar el zoom

- Queda horizontalmente en un espacio
- Pasa por el punto A
- Tiene la misma dirección que las líneas horizontales
- Debe estar en línea horizontal en un espacio determinado al punto A

Curvas No controlables:

- Se rompe con el zoom
- Queda por fuera del punto A
- Coge otra dirección

Las anteriores condiciones para las curvas controlables y no controlables han sido definidas por Pablo, donde ha manifestado su capacidad para definir el control local de una curva en correspondencia con el mecanismo desarrollado.

Categoría concepto de control local

Esta categoría va en correspondencia con la categoría trozo de curva controlado como se mencionaba anteriormente, donde Pablo explica cuando una curva es controlable en un punto a través de la construcción del mecanismo, el cual parte de realizar estiramientos horizontales a la curva en el punto y posteriormente determinar el trozo de curva controlado.

Pablo hace explícitos sus argumentos respecto al control local en el cuestionario de fase, cuando se plantea la siguiente pregunta:

Cuando una curva está controlada localmente se puede decir que:

a) Al estirarla horizontalmente se convierte en recta

b) Al estirarla horizontalmente se rompe

c) Al estirarla horizontalmente se divide en dos partes

d) Al estirarla horizontalmente queda dentro de las rectas horizontales

e) Ninguna de las anteriores

Inicialmente su respuesta fue la d, donde se pide que argumente la respuesta, a lo cual Pablo queda en silencio, y después de reflexionar, explica que la d no cumple todas las condiciones para garantizar que una curva es controlable y por lo tanto la respuesta es la e, donde una curva es controlable en un punto cuando existe el trozo de curva controlado y al estirarla en el punto tiende a quedar plana, expresiones que dan cuenta de su progreso en los procesos de razonamiento que han sido construidos con el desarrollo de las diferentes actividades.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Es relevante resaltar que Pablo llega a la definición de control local con la construcción de un mecanismo, que en este trabajo se ha llamado: Mecanismo de estiramiento horizontal, el cual es utilizado en cada una de las aplicaciones desarrolladas, donde al ubicarse en un punto de referencia, estira la curva respecto al punto, analiza la existencia del trozo de curva controlado y su comportamiento, para poder definir si la curva es o no controlable en el punto indicado.

En una de las aplicaciones, después de haber realizado algunos estiramientos horizontales, Pablo argumenta respecto al control de la curva: "Si es controlable, porque cuando se utilizan los deslizadores hasta la sexta subdivisión y el zoom la curva no se rompe y queda en el espacio del punto A horizontalmente". Expresiones que dan cuenta de la construcción y utilización del mecanismo de los estiramientos horizontales para llegar al concepto de control local de una curva.

Categoría Lenguaje

Pablo manifiesta en esta fase que una curva es controlable en un punto si existe el trozo de curva controlado que contenga al punto y al estirar la curva en los alrededores del punto se vuelve plana, donde él da cuenta del lenguaje empleado en correspondencia con el mecanismo desarrollado, de acuerdo con los procesos mentales elaborados.

Algunas momentos que dan cuenta del vocabulario empleado por Pablo, se pueden apreciar en el desarrollo de la entrevista, donde se pregunta: ¿Cuándo una curva se puede controlar en un punto?, a lo que él responde: "Una curva se puede controlar en un punto cuando ya se utilizan los deslizadores de estiramiento y de distancia y la curva quede en recta horizontal y principalmente pasa por el punto y queda dentro de las líneas horizontales". Expresiones que dan cuenta de que Pablo enuncia la definición de control local utilizando adecuadamente los términos del mecanismo y las definiciones trabajadas en las actividades anteriores, dando cuenta de que ha construido una red de relaciones adecuada en correspondencia con la definición de control local.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

El desempeño en el primer descriptor se puede apreciar en la categoría concepto de control local, adicionalmente en el trabajo que desarrolla en cada una de las aplicaciones que manipula en GeoGebra®, donde siempre se ubica en un punto de referencia para determinar la localidad de la curva. Algunos de sus argumentos respecto al control local de una curva cuando estiraba en los alrededores del punto eran: "Sí es controlable, porque al utilizar el zoom, la curva no se rompe y queda controlada en las líneas horizontales en el punto A, una curva está controlada si ésta no se rompe con el zoom y no se sale del espacio del punto A". Expresiones que dejan ver que Pablo se desempeña adecuadamente respecto al primer descriptor, dado que está reconociendo el carácter local del concepto.

El desempeño de Pablo respecto al segundo descriptor, se puede visualizar en la categoría trozo de curva controlado y respecto al tercer descriptor en la categoría concepto de control local. Adicionalmente, cuando Pablo define si una curva es o no controlable en un punto, se da cuenta de un proceso de construcción elaborado referente al concepto, proceso que inicia con la realización de estiramientos horizontales y posteriormente con la determinación del trozo de curva controlado.

En cuanto al cuarto descriptor, el lenguaje que Pablo hace explícito en esta fase se observa más refinado y estructurado, el cual se puede analizar en la construcción de uno de sus mapas conceptuales, como el que se ilustra a continuación.

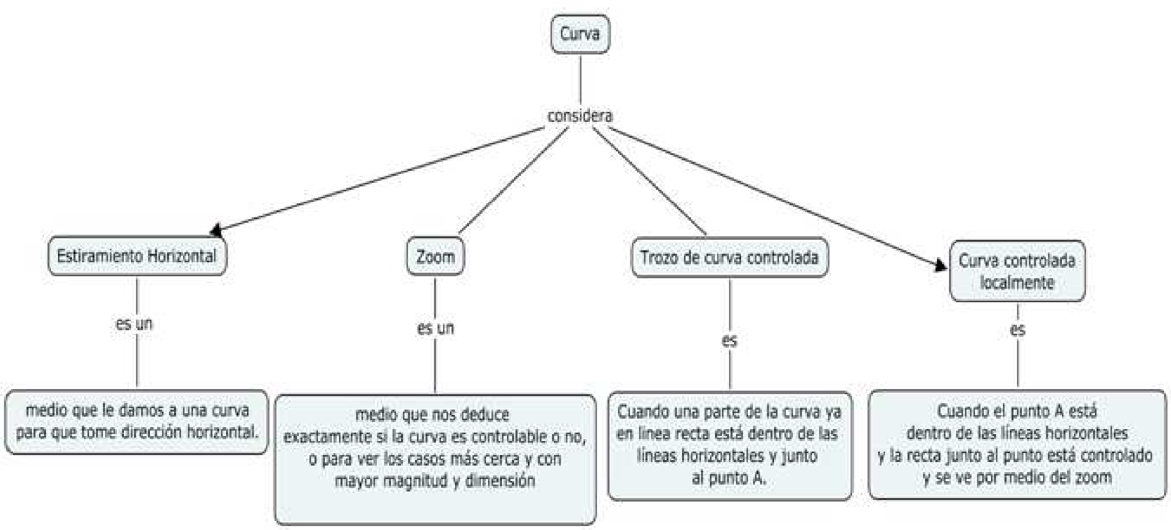


Figura 4.16: Características de una curva.

Este mapa muestra como Pablo ha estructurado y organizado sus aprendizajes respecto al concepto de control local, donde manifiesta la capacidad para determinar cuándo una curva es o no controlable en un punto y su visualización respecto a la misma, es decir, cuando afirma que está conformada por infinitos puntos. Adicionalmente, está ilustrando que para determinar el control de la curva es necesario reconocer el trozo de curva controlado y realizar zooms de acercamiento sobre la misa, expresiones que van en correspondencia con el lenguaje propio de la fase y con el nivel que se pretende alcanzar respecto al concepto objeto de estudio.

4.5.4. Análisis de la Fase 4

Pablo en esta fase da a conocer como aplica el concepto a otros contextos, él inicialmente explica el concepto de control local haciendo referencia al mecanismo desarrollado, y posteriormente, explica cómo se aplica en situaciones cotidianas, principalmente en la construcción de estructuras como puentes y edificios.

Categoría trozo de curva controlado

Pablo reconoce que la determinación del trozo de curva controlado le permite definir el concepto de control local, donde afirma que una curva es controlable en un punto cuando existe el trozo de curva controlado y al estirar la curva en el punto se vuelve plana, donde él da cuenta de la necesidad del reconocimiento y la adecuada utilización del trozo de curva controlado para poder definir el concepto de control local.

Categoría concepto de control local

En esta fase, Pablo aplica lo aprendido a otros contextos, lo cual se puede apreciar cuando relaciona el concepto de control local con situaciones cotidianas como la construcción de puentes y edificios. En una de las actividades se pregunta a Pablo lo siguiente: ¿Por qué es importante que algunas estructuras representen expresiones controlables? y ¿Cuál es la importancia del concepto de control local en situaciones de la vida cotidiana?, donde él responde:

> "Porque debe de haber un punto recto para el transporte y firmeza" y "En los puentes o arcos de partes variables, parques, casas, etc.".

. Expresiones que dejan claro que Pablo relaciona el concepto a otros contextos externos de las Matemáticas, dado que él en sus argumentos explicita que el concepto hace parte de estructuras físicas como: Puentes, casas, parques, etc., entablando así, la relación del concepto con contextos cotidianos e ilustrando la utilidad del mismo.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Pablo explica el carácter local del concepto, a partir de la utilización de los estiramientos horizontales alrededor de un punto fijo sobre la curva, en una de las aplicaciones, al interactuar con una curva que posee dos puntos específicos A y B, él realiza los estiramientos respecto al punto A y encuentra que el hecho de que la curva sea controlable en el punto A no garantiza que sea controlable en el punto B, puesto que a medida que realiza los estiramientos horizontales sobre la curva, en el punto A encuentra el trozo de curva controlado y respecto al punto B no, afirmando que la curva no es controlable en el dicho punto.

Lo anterior explicación, da cuenta de cómo él utiliza los estiramientos horizontales para describir el concepto de control local, reconociendo la esencia local del concepto, lo que indica un avance en su razonamiento, el cual se hace explícito en sus argumentos.

Categoría Lenguaje

El lenguaje de Pablo en esta fase se hace manifiesto no sólo desde la explicación que hace del concepto con la utilización del mecanismo, sino también con su capacidad de aplicarlo a otros contextos, lo cual se ve reflejado cuando expresa la utilidad del concepto en la realización de estructuras físicas como: Puentes, parques, edificios, etc. Como se mencionaba en la categoría concepto de control local, él reconoce y hace explícito que el concepto es la base para el diseño de diferentes estructuras.

Adicionalmente, en una de las socializaciones, expresa que cuando se construyen diferentes estructuras, éstas se pueden representar con expresiones matemáticas, las cuales permiten diseñar modelos para estructuras que representen expresiones que pueden ser o no controlables en un punto fijo, expresiones que dan cuenta de la utilización que hace del concepto no sólo desde contextos matemáticos, sino también, desde contextos cotidianos, ilustrando así, un enriquecimiento en el vocabulario empleado.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Respecto al primer descriptor, cuando se pregunta a Pablo: ¿Qué significa que una curva este controlada localmente?, él responde: “Significa que esta no se rompe al utilizar el zoom que no sobresalga al mover los deslizadores y que haya una parte de la curva cerca del punto A que se mantenga dentro de las líneas horizontales y que se vaya volviendo plana". Expresiones que dejan claro que Pablo explica correctamente cuando una curva es o no controlable en el punto de acuerdo con el mecanismo empleado. Adicionalmente, los argumentos que Pablo propone para explicar cuando una curva es o no controlable en un punto, los explicita en términos del mecanismo empleado, donde él no plantea ideas sobre la definición del concepto, sino que expone la utilidad del concepto en otros contextos diferentes a los contextos matemáticos.

El desempeño de Pablo respecto al segundo descriptor se observa en argumentos como:

- "Como la curva está formada por puntos y al estirarla no se rompe, quiere decir que posee infinitos puntos".
- "Para determinar la existencia de un trozo de curva controlado, se realiza un conjunto finito de deformaciones, hasta poder observar la intersección con las rectas".
- "Una curva es controlable en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el punto, si al estirar el trozo de curva tiende a quedarse plana, la curva será controlable en el punto, la controlabilidad de una curva indica su continuidad en ese punto".

Las anteriores expresiones, dejan ver como él relaciona los estiramientos horizontales en el punto con el trozo de curva controlado, los cuales le permiten determinar cuándo una curva es controlable en un punto específico.

Respecto al tercer descriptor, se puede resaltar que durante todo el trabajo desarrollado, las preguntas que se han realizado a Pablo siempre han estado enfocadas a un punto específico de la curva, dado que cuando explica el control o no control de la curva, siempre lo hace respecto a un punto específico. Una de las preguntas planteadas en el cuestionario de fases es la siguiente:

Si observas dos puntos diferentes en una curva, un punto A y un punto B y si se tiene que la curva es controlable en el punto A, se puede garantizar que:

a) La curva es controlable en el punto B

b) La curva no es controlable en el punto B

c) No existe control local

d) El punto A y B coinciden

e) Ninguna de las anteriores

Allí, Pablo da como respuesta el ítem e, donde justifica que el hecho de que una curva sea controlable en un punto, no garantiza que lo sea en otro punto diferente sobre la curva, dado que el control se caracteriza por su aspecto local, es decir en un punto específico.

En cuanto al cuarto descriptor, como se mencionaba en la explicación del primero, los argumentos que Pablo enuncia para explicar el control local, van en correspondencia con el mecanismo empleado, el cual es desarrollado a lo largo de todo el trabajo de campo y donde las nuevas ideas que él plantea, corresponden a la aplicación del concepto en otros contextos diferentes a los contextos matemáticos.

4.5.5. Análisis de la Fase 5

Pablo allí no adquiere nuevos conocimientos, agrupa todo lo interiorizado en los momentos anteriores, donde hace explícito sus aprendizajes y redes de relaciones elaboradas en un último conjunto de actividades, las cuales dan cuenta de sus construcciones mentales y procesos de razonamiento desarrollados.

Categoría trozo de curva controlado

En esta última fase, Pablo define el concepto de control local sobre un punto de una curva utilizando el trozo de curva controlado, donde él argumenta que si no reconoce la existencia del trozo de curva controlado, no puede garantizar la existencia del control local.

Adicionalmente, en la entrevista se pregunta a Pablo: ¿Cuándo una curva se puede controlar en un punto?, donde él responde:“Una curva se puede controlar en un punto cuando ya se utilizan los deslizadores de estiramiento y de distancia y la curva quede en recta horizontal y principalmente pasa por el punto y queda dentro de las líneas horizontales”. Explicación que da cuenta de la necesidad de visualizar el trozo de curva controlado para definir el control de la curva en el punto, el cual está determinado por el corte de las rectas horizontales con la curva.

Categoría concepto de control local

Pablo define el concepto de control local a través del desarrollo de las diferentes actividades propuestas en el Módulo de Aprendizaje, donde argumenta que llega al concepto a través de la utilización de los estiramientos horizontales, los cuales le permiten explicar el comportamiento de la curva en el punto señalado. Algunos de sus argumentos cuando estira las curvas son:

> "La curva va quedando cada vez más fuera de las líneas horizontales ya que estas se van acercando al punto A" y "Una curva es controlable, porque la curva es controlada y debe quedar dentro de las líneas de distancia".

. Expresiones que dejan ver la descripción que Pablo realiza cuando estira la curva, donde la utilización del mecanismo es la base fundamental para describir el concepto objeto de estudio, a través del proceso que se desarrolla en las diferentes aplicaciones.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Cuando Pablo realiza deformaciones a las diferentes curvas presentadas en las aplicaciones, lo que en realidad hace es estirarlas horizontalmente, como se mencionaba en la categoría anterior, la adecuada utilización de los estiramientos horizontales, junto con la determinación del trozo de curva controlado, son los elementos que le permiten definir el control local de una curva en un punto.

Uno de los argumentos que da cuenta de la construcción del mecanismo que Pablo realiza, es la respuesta dada en una de las preguntas del cuestionario de fases, ésta expresa lo siguiente: Una curva es controlable en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pasa por:

a) Dos puntos

b) Tres puntos

c) Ningún punto

d) Un punto

e) Ninguna de las anteriores

La respuesta de Pablo es la d, donde argumenta que la curva siempre debe pasar por el punto, adicionalmente, afirma que la respuesta puede ser completada teniendo en cuenta que para que una curva sea controlable en un punto, debe quedar plana cuando se realizan los estiramientos horizontales, expresiones que dan cuenta de un gran avance en su proceso de razonamiento.

Categoría del Lenguaje

El lenguaje de Pablo en esta fase va en correspondencia con el mecanismo desarrollado durante todo el trabajo de campo, algunos de sus argumentos se pueden apreciar en el siguiente mapa conceptual.

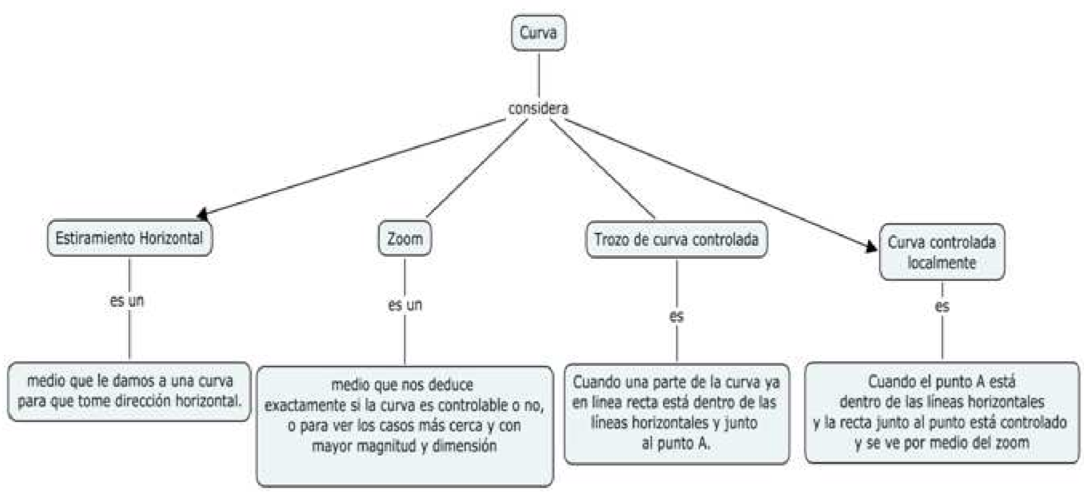


Figura 4.17: Propiedades de una curva.

Allí, Pablo analiza diferentes características de una curva y las explica con la utilización del mecanismo que ha construido, donde da cuenta de la utilización de los estiramientos horizontales, el zoom y la determinación del trozo de curva controlado, para acceder a la definición del control local, argumentos que evidencian la estructuración de su lenguaje, el cual se observa más refinado y elaborado, donde finalmente llega a la construcción del concepto de continuidad local.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

En cuanto al primer descriptor, la utilización que Pablo hace de los elementos geométricos: Punto, recta y curva, se observa en los argumentos que presenta respecto a los observaciones de las diferentes intersecciones con curvas y rectas, por ejemplo, él afirma que cuando se intersecan dos planos con una ángulo mayor de 0^o, la figura resultante es una línea recta y que cuando se intersecan una circunferencia y una recta se pueden obtener dos o un punto, expresiones que dan cuenta de la utilización que él hace de estos elementos geométricos.

El desempeño del segundo y tercer descriptor se puede observar con la categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal. Adicionalmente, se puede decir que Pablo en cada una de las aplicaciones utiliza los estiramientos horizontales, donde posteriormente analiza el trozo de curva controlado y explica como es el comportamiento de la curva en el punto indicado, donde argumenta que si la curva queda plana en el punto es controlable en el mismo.

Respecto al cuarto descriptor, Pablo afirma que durante todo el desarrollo de las actividades, los cambios a la curva y los acercamientos de las rectas horizontales, los realiza respecto a un punto. Adicionalmente, le es presentada una curva con tres puntos diferentes donde debe determinar el control en cada uno de ellos, y al realizar los estiramientos horizontales y tratar de encontrar el trozo de curva controlado, se da cuenta que lo ha encontrado respecto a un punto y que en los otros puntos no ha sido posible, donde afirma, que el hecho de que una curva sea controlable en un punto, no garantiza la controlabilidad en cualquiera de los otros puntos.

En cuanto al quinto descriptor, Pablo reconoce las características tanto de curvas controlables como no controlables, respecto a las curvas controlables dice:

> "La curva controlada está en una misma dirección, esta se comporta como una línea horizontal cuando es estirada nuevamente en el punto A" y respecto a las curvas no controlables dice: "Se rompen con el zoom y toma otra dirección y cuando tampoco se puede encontrar el trozo de curva que pase por el punto ya sabemos que no es controlable"

. Expresiones que dan cuenta de su capacidad para diferenciar las curvas que son controlables de las que no lo son.

Respecto al sexto descriptor, su desempeño se puede observar en la categoría concepto de control local. Adicionalmente, en el trabajo realizado en la actividad 6, donde a través de aportes de información relaciona el mecanismo desarrollado con la definición de continuidad de Cauchy, allí argumenta que la distancia entre las rectas horizontales representa el valor de ε y que el trozo de curva controlado está determinado por δ, donde para cualquier distancia entre las rectas horizontales, es decir, para cualquier ε, es posible encontrar el trozo de curva controlado, es decir, δ, y cuando la curva se estira en el punto, si queda plana, es una curva controlable en dicho punto.

Progreso en el nivel de razonamiento para el Caso 3

A continuación se presentan los resultados obtenidos por Pablo en el desarrollo del test de Campillo, los cuales dan cuenta de sus respuestas iníciales, es decir aquellas que presentó antes del desarrollo de trabajo de campo y donde se encontraba ubicado en el Nivel II de razonamiento respecto al concepto, y las respuestas finales, es decir, después del desarrollo del trabajo de campo, donde se encuentra ubicado en el Nivel III de razonamiento.

Respuestas del test de Campillo para el caso 3

A continuación se ilustran las respuestas dadas por Pablo en la solución del test de Campillo, se presentan las respuestas iníciales y las finales, con el fin de observar cómo ha cambiado su forma de responder después del trabajo de campo.

Repuestas por bloques de el estudiante del Caso 3

La consolidación de las respuestas en bloques, permite visualizar como Pablo ha progresado en su nivel de razonamiento, pasando de un Nivel II a un Nivel III, respecto a la comprensión del concepto de continuidad local, lo que deja claro que las fases de aprendizaje son herramientas que favorecen el diseño de actividades para que el estudiante progrese a través de los niveles de razonamiento, en este caso particular el ascenso de Pablo en su nivel de razonamiento.

4.6. Análisis por categorías: Caracterización del razonamiento en el paso del Nivel II al III respecto al concepto de continuidad local

La determinación de las categorías en cada una de las fases, admite que estas sean agrupadas representando un conjunto de códigos; los cuales permiten explicar el razonamiento del estudiante de acuerdo a un conjunto de características.

Respuestas de Pablo Test de Campillo		
Pregunta	**Respuesta inicial**	**Respuesta final**
1	c	c
2	a	b
3	a	a
4	a	a
5	d	d
6	e	a
7	d	a
8	e	b
9	a	a
10	c	c
11	c	c
12	a	b
13	b	b
14	c	e
15	c	c
16	a	a
17	b	c
18	b	a
19	a	a
20	b	b
21	a	c
22	a	a
23	b	b
24	d	d
25	a	b
26	c	b
27	d	a
28	e	b
29	d	c
30	a	d
31	c	e
32	c	c

Cuadro 4.6: Respuestas al test de Campillo por Pablo.

Categoría trozo de curva controlado

El trozo de curva controlado es aquella porción de la curva que se encuentra en la intersección entre las rectas horizontales y la curva, conteniendo el punto señalado. Un

Respuestas por bloques Test de Campillo				
	Bloque 1	**Bloque 2**	**Bloque 3**	**Nivel de razonamiento**
Inicial	7	5	2	2
Final	8	6	4	3

Cuadro 4.7: Respuestas por bloques para Pablo.

estudiante accede a la determinación y comprensión de éste, a través la realización de diferentes acciones, entre ellas: La interacción con los deslizadores, la realización de estiramientos horizontales, el análisis de curvas controlables y no controlables, la determinación del trozo de curva controlado con la definición de continuidad y por último la definición de control local, las cuales permiten que construya la definición del trozo de curva controlado; el cual se hace explícito en la definición de control local y por ende en la de continuidad local.

Por lo tanto, para describir el razonamiento de un estudiante respecto al trozo de curva controlado, es necesario determinar su proceso de construcción respecto al mismo; el cual se encuentra determinado por las acciones mencionadas anteriormente.

Categoría concepto de control local

El concepto de control local es construido por el estudiante a través de acciones como: Hacer zoom sobre un punto de una curva, determinar y explicar el trozo de curva controlado, generar nuevas ideas para el control local y utilizar los estiramientos horizontales.

Las acciones anteriores implican que el estudiante construya un mecanismo a través del cual defina el concepto de control local, dicha construcción implica realizar estiramientos horizontales a una curva respecto a un punto fijo y a la vez determinar el trozo de curva controlado respecto al mismo, donde la consolidación de ambos aspectos, favorece el razonamiento del estudiante respecto al concepto y la definición del mismo.

Categoría construcción del mecanismo de estiramiento horizontal

Para comprender el concepto de control local es necesario realizar una adecuada construcción del mecanismo de estiramientos horizontales, dado que es fundamental para la construcción del concepto, en dicha construcción del mecanismo de estiramiento horizontal los estudiantes deben realizar acciones como: Estirar una curva horizontalmente, diferenciar estiramientos horizontales y verticales, estirar curvas entre rectas horizontales, reconocer el carácter local del concepto y definir el control local; cada uno de estos pasos favorece la construcción del concepto de control local, el cual se construye con la utilización de estiramientos horizontales.

Categoría del Lenguaje

El lenguaje es una de las propiedades que caracteriza el nivel de razonamiento del estudiante de acuerdo con sus argumentos, el cual se refina a medida que interioriza los conceptos trabajados en cada una de las fases de aprendizaje.

Las principales actividades donde se hace evidente la estructuración de lenguaje a través de cada una de las fases consiste en: La determinación de los elementos y sus propiedades para el mecanismo, la expresión de continuidad local en términos del mecanismo y su respectiva aplicación en otros contextos y finalmente la definición de continuidad local de Cauchy con el mecanismo desarrollado.

En las expresiones verbales del estudiante es donde se hacen evidentes las construcciones mentales que ha elaborado, dado que el lenguaje pone en evidencia aquellos aspectos que han sido interiorizados y las redes de relaciones que han sido construidas.

Categoría Avance en cada uno de los descriptores del Nivel II al Nivel III

Como se mencionaba anteriormente, el Módulo de Aprendizaje está enmarcado en las fases de aprendizaje con sus respectivos descriptores; los cuales son base para el diseño de experiencias significativas; dichas experiencias se desarrollan con fines específicos, cada una de las actividades desarrolladas en las diferentes fases está en correspondencia con los objetivos de la misma, dado que el estudiante no actúa al azar, él, es guiado a través del Módulo de Aprendizaje por una secuencia de actividades con un fin específico y es el progreso en el nivel de razonamiento.

4.7. Triangulación metodológica

El proceso de triangulación valida la información obtenida en las investigaciones; donde, tanto las investigaciones cualitativas como cuantitativas pueden ser trianguladas. La triangulación se enfoca en encontrar argumentos coherentes que permitan interpretar con mayor amplitud el fenómeno estudiado, desde la fortaleza del mismo estudio y hasta sus resultados correspondientes. Triangular información no implica necesariamente el uso de tres herramientas o mecanismos, implica un análisis profundo de la información que sea coherente y que vaya en correspondencia con los diferentes mecanismos empleados.

Se puede resaltar que el proceso de triangulación no es de carácter único, dado que depende de la información obtenida por las diferentes fuentes en la investigación y está condicionado por los intereses propios del investigador, dado que se pueden triangular datos, métodos, teorías, entre otros [18, pp. 120 - 121]; por lo cual, es necesario argumentar que tipo de triangulación se desea desarrollar y determinar bajo que autor se sustenta.

Según Okuda y Gomez, existen diferentes clases de triangulación, de las cuales se pueden mencionar: La triangulación metodológica, la de datos, la de investigadores y la de teorías; sin dejar de desconocer que otros autores definen otras clases de triangulaciones [18, pp. 120 - 121].

Respecto a la triangulación metodológica, es importante mencionar que el uso de diferentes técnicas permite corroborar o complementar la información. En ésta investigación particularmente se utilizan: Las entrevistas, los cuestionarios y las producciones escritas de los estudiantes, los cuales en algunos momentos se complementan y en otros se confirman.

Las entrevistas, los cuestionarios y las producciones escritas de los estudiantes apuntan siempre a la definición de control local, articulado desde la construcción de un mecanismo y guiado por el desarrollo de un conjunto de fases enmarcadas en el modelo educativo de van Hiele. Respecto a la entrevista, las respuestas presentadas en los tres casos de la investigación, están centradas en la comprensión del trozo de curva controlado y la aplicación que se hacen de los estiramientos horizontales, donde, finalizando la realización de las mismas, los participantes definen el concepto. En cuanto a los cuestionarios, las preguntas que el estudiante desarrolla, van en correspondencia con el mecanismo construido, donde de una manera secuencial se induce al mismo al desarrollo de conjeturas para analizar el concepto. Respecto a las producciones escritas, los estudiantes desarrollan un conjunto de actividades que están enmarcadas en las fases de aprendizaje, cada una de ellas da cuenta de un conjunto de categorías desarrolladas por los mismos; las cuales permiten observar el razonamiento de los estudiantes en todo el proceso, dicho razonamiento está articulado en la construcción del mecanismo para definir el concepto objeto de estudio.

Las anteriores técnicas, en cada uno de los tres casos particulares de la investigación, dan cuenta de que el estudiante a través de cada una de ellas siempre se acerca al concepto de control local a partir de la construcción de un mecanismo, dicho mecanismo consta de la determinación de un trozo de curva controlado y la realización de estiramientos horizontales, los cuales se caracterizan por su aspecto local.

La consolidación de cada uno de los argumentos en las diferentes técnicas, permiten definir que el proceso de razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al III se puede favorecer a través de la construcción del mecanismo de los estiramientos horizontales, que consiste en estirar la curva en los alrededores del punto y determinar el trozo de curva controlado que contenga al mismo, y a partir de éste proceso visualizar como es el comportamiento de la curva en el punto señalado, donde aquellas curvas que tienden a volverse planas en el punto señalado se caracterizan por ser controlables localmente, es decir, son continuas en dicho punto.

La categorización y triangulación presentadas a lo largo del capítulo permiten dar cuenta de la consecusión de los objetivos de investigación, los cuales estaban orientados a caracterizar el razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento respecto al concepto de continuidad local, para lo cual se emplearon las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, como herramienta que permite el diseño de actividades, cuyo propósito es favorecer los proceso de razonamiento en los estudiantes, con el fin de generar redes de relaciones mejor elaboradas respecto a los diferentes conceptos matemáticos, particularmente el concepto objeto de estudio.

Es pertinente resaltar que aunque el análsis de la información se centró en tres casos particulares, todo el grupo de estudiantes del grado once participó en el desarrollo de las actividades, donde de los 38 estudiantes, 12 se encontraban en el Nivel II de razonamiento al inicio del desarrollo del trabajo de campo y posteriormente 10 de ellos progresaron al Nivel III de acuerdo con los resultados prsentados en el test de Campillo, adicionalmente, se puede resaltar que las fases de Aprendizaje del modelo junto con el conjunto de actividades enmarcadas en las mismas, favorecen el desarrollo de procesos de razonamiento en los estudiantes, los cuales a su vez facilitan el progreso en el nivel de razonamiento de los mismos (Sección 3.6, página 50).

Capítulo 5

Conclusiones

PAra la consecución de los objetivos de investigación, se desarrollaron estrategias que permitieron asegurar el cumplimiento de los mismos, dichas estrategias se vieron reflejadas en los capítulos anteriores, principalmente en el Capítulo 4, página 87, en el que se implementó el diseño metodológicio enmarcado en el Módulo de Aprendizaje.

La obtención de cada una de las conclusiones presentadas en el presente capítulo, dan cuenta de como la implementación de estrategias adecuadas, articuladas a un modelo educativo específico, permiten un mejor desempeño de los estudiantes en sus prácticas académicas y personales, las cuales dan cuenta del cumplimiento de los objetivos trazados y las conclusiones que de la misma investigación se derivan.

A continuación, se exponen las principales conclusiones propias de la investigación en correspondencia con los objetivos trazados, adicionalmente, las nuevas ideas que surgen durante la aplicación de la propuesta y su articulación con el campo de la Educación Matemática, dichas conclusines son abordadas desde la consecución de los objetivos hasta la determinación de futuras líneas de investigación, donde se tiene en cuenta el cumplimiento de cada uno de los objetivos, en relación con cada una de las técnicas implementadas, resaltando aspectos como: El desarrollo del Módulo de Aprendizaje, la implementación de un mecanismo, el uso de herramientas virtuales, los descriptores de fase y las fases de aprendizaje en la Educación Matemática. A continuación se exponen las conclusiones obtenidas en la propuesta investigativa.

5.1. Conclusiones relativas al objetivo general

Las fases del modelo educativo de van Hiele se convirtieron en una herramienta mediadora que orienta el proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes, a la vez, su componente prescriptivo guía el diseño y aplicación de Módulos de Aprendizaje, los cuales permiten investigar y describir los procesos de razonamiento que los estudiantes presentaron en su paso del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local, objeto de la investigación.

El progreso en el proceso de razonameinto de los estudiantes, se artícula a las fases de aprendizaje del modelo, siendo éstas, elementos que permiten describir el razonamiento de ellos en cinco momentos, que están en correspondencia con las cinco fases de aprendizaje. De está manera, el proceso de enseñanza y de aprendizaje, respecto al concepto de continuidad local, se convierte en un elemento significativo, donde se generan espacios de reflexión y estímulo en los que el aprendiz desarrolla la comprensión expandiendo su red de relaciones.

Durante el desarrollo de la propuesta, fue posible caracterizar el razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento, respecto al concepto de continuidad local, a través del análisis de la información que consistió en la codificación y triangulación de los datos recolectados.

Caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III en el marco del modelo educativo de van Hiele mediante el diseño de un Módulo de Aprendizaje para el concepto de continuidad local.

5.2. Conclusiones relativas a los objetivos específicos

En la investigación fueron trazados cuatro objetivos específicos, cada uno de ellos articulados al logro del objetivo general de la propuesta.

Los objetivos específicos desarrollados fueron:

1. Describir el proceso de razonamiento respecto al concepto de continuidad local del Nivel II al Nivel III a través de la implementación de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele.

   Respecto a este objetivo, se puede afirmar que la implementación de estrategias enmarcadas en las Fases de Aprendizaje del modelo, permiten describir las características de los razonamientos en los estudiantes, dado que cada fase tiene sus propios fines y de acuerdo a la fase en la que se encuentre el estudiante, se desarrollan actividades especificas que dan cuenta de cómo evoluciona su razonamiento (Sección 4.1, p. 88).

2. Diseñar un Módulo de Aprendizaje enmarcado en las fases del modelo educativo de van Hiele que le permitan al estudiante explicitar su proceso de razonamiento respecto al concepto de continuidad local.

   En cuanto a este objetivo, se puede observar que durante todo el trabajo y refinación de las actividades se presenta como producto final un Módulo de Aprendizaje respecto al concepto de continuidad local, el cual sirve como apoyo a los docentes para la enseñanza de este concepto (Sección B, p. 181).

3. Implementar en un grupo de estudiantes un Módulo de Aprendizaje enmarcado en las fases del modelo educativo de van Hiele que les permita explicitar su proceso de razonamiento en el paso del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local.

   Acerca del tercer objetivo, vale la pena resaltar, que después del diseño del Módulo de Aprendizaje, se realizó la implementación del mismo, éste se convirtió en una forma alternativa para la enseñanza de conceptos del Análisis Matemático, puesto que permite la interacción de los estudiantes con nuevas herramientas que no sólo se limitan al aspecto teórico del concepto (Sección 4.7, p. 158).

4. Contribuir al progreso del Nivel II al Nivel III de razonamiento en el marco del modelo educativo de van Hiele respecto a la comprensión del concepto de continuidad local.

   Respecto a este cuarto objetivo, es importante mencionar que para favorecer el mejoramiento en el nivel de razonamiento de los estudiantes en torno al concepto de continuidad local, se deben presentar las actividades adecuadas al nivel de razonamiento del mismo, pues no tiene sentido pensar que el mejoramiento en el razonamiento se da instantáneamente, éste representa un proceso que los estudiantes construyen y que en esta propuesta de investigacón se puede observar con las repuestas que presentan en el test de Campillo después de realizar el trabajo de campo (Sección 4.3.5, p. 115), (Sección 4.4.5, p. 134) y (Sección 4.5.5, p. 155).

En esta investigación los estudiantes progresaron del Nivel II al Nivel III de razonamiento para los tres casos particulares, lo que deja claro que ellos pueden mejorar sus procesos de razonamiento respecto a conceptos matemáticos con la implementación de actividades que les permitan razonar sobre los mismos, las cuales al estar articuladas a las fases y consolidadas en un Módulo de Aprendizaje, hacen evidentes los razonamientos que son llevados a cabo por los estudiantes, quienes a medida que desarrollan actividades construyen redes de relaciones elaboradas para progresar en su nivel de razonamiento.

5.3. Conclusiones respecto al Módulo de Aprendizaje

Estrategias adecuadamente diseñadas e implementadas que sean comprendidas por los estudiantes, favorecen la motivación de los mismos para el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Algunas estrategias empleadas en el desarrollo del Módulo de Aprendizaje fueron:

- Acciones desde lo concreto.

  Las acciones que los estudiantes realizaron respecto a lo concreto estuvieron mediadas por el uso de gomas elásticas y la construcción de un geoplano con figuras en el mismo, respecto al uso de las gomas elásticas, ellos analizaron diferentes propiedades de las curvas, y respecto al geoplano se construyeron ideas previas sobre el significado de los estiramientos horizontales, verticales y en ambos ejes. Allí, ambos aspectos representaron elementos fundamentales para el desarrollo de las actividades del Módulo de Aprendizaje.

- Interacción con aplicaciones en GeoGebra®.

  Durante el desarrollo de cada una de las actividades del Módulo de Aprendizaje, los estudiantes interactuaron con diferentes curvas que estaban plasmadas en las aplicaciones presentadas en GeoGebra®, dichas aplicaciones poseían: Curvas, rectas horizontales, puntos fijos y deslizadores, elementos que al ser utilizados permitían describir los cambios a la curva, donde el movimiento de los deslizadores permitía el acercamiento de las rectas horizontales al punto fijo y el estiramiento de la curva, con el de describir el comportamiento de la misma en diferentes momentos.

- Elaboración de producciones escritas.

  Cada actividad que el estudiante llevaba a cabo era cuestionada con el fin de determinar que si se hubiese cumplido con los propósitos de la misma, para lo cual, los estudiantes presentaban sus escritos donde sustentaban las respuestas y a la vez realizaban explicaciones orales sobre las mismas.

- Elaboración de Mapas Conceptuales.

> Cada una de las actividades de las fases de Aprendizaje implicaba la elaboración de mapas conceptuales, tanto al inicio y al final de cada una de ellas, los cuales estaban orientadas a evidenciar las redes de relaciones que el estudiante elaboraba respecto al concepto objeto de estudio, con el propósito de analizar el razonamiento de cada uno de ellos.

Todos estos componentes permiten que los estudiantes se apropien de las actividades, pues no se utiliza una metodología tradicional a la que están acostumbrados. Se utilizan nuevas estrategias en las prácticas escolares que permiten que ellos encuentren curiosidad y deseo por el desarrollo de las actividades, las cuales son organizadas en el Módulo de Aprendizaje (ver Apéndice B, página 181).

El Módulo de Aprendizaje tienen un objetivo esencial, involucrar a los estudiantes en experiencias adecuadamente diseñadas, con el propósito de generar procesos de razonamiento que le pemitan mejorar su nivel de comprensión respecto al concepto de continuidad local. Éste permite que los estudiantes en cada una de las cinco fases del modelo, se enfrenten a experiencias que permiten estructurar las redes de relaciones elaboradas respecto al concepto objeto de estudio, y por ende se propice el enriquecimiento en su estructura mental.

Por lo tanto, Módulos de Aprendizaje adecuadamente diseñados e implementados, contribuyen al desarrollo del proceso de razonamiento en los estudiantes, lo que es evidente en el Módulo de Aprendizaje que fue diseñado e implementado para el proyecto investigativo, debido a que cada uno de los estudiantes en el desarrollo de sus actividades colocaba en evidencia las conjeturas y argumentos elaborados respecto al concepto, donde a medida que se enfrentaban a nuevas experiencias, encontraban significado y sentido a los diferentes conceptos.

5.4. Conclusiones respecto al mecanismo empleado

El mecanismo empleado para la visualización del concepto consistió en definir que:

> Una curva es controlable en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el punto y al estirar el trozo de curva si tiende a quedar plana en el punto, la curva será controlable en el mismo, donde la controlabilidad de una curva indica su continuidad en ese punto [5, pp. 164 - 168].

El mecanismo empleado por los estudiantes consistió en la realización de estiramientos horizontales sobre la curva en un punto de referencia, donde se trataba de encontrar el trozo de curva controlado respecto al punto, y a partir de allí, determinar si la curva era o no controlable en el punto señalado. Éste mecanismo permite que los estudiantes analicen el concepto de continuidad local desde su componente visual-geométrica, para lo cual, él efectúa un conjundo de actividades donde inicialmente estira la curva y posteriormente encuentra el trozo de curva controlado. Luego, la construcción del mecanismo favoreció la comprensión de los estudiantes respecto al concepto abordado y adicionalmente ha generado procesos de razonamiento que dan cuenta de las redes de relaciones construidas respecto al mismo, permitiendo que los estudiantes involucrados en la investigación, definieran el concepto de continuidad local en sus propias palabras y a partir del mecanismo empleado.

5.5. El uso de las herramientas virtuales en los contextos escolares

En los últimos años las herramientas virtuales han permeado los contextos educativos, las mismas que involucran a los estudiantes en diferentes experiencias que permiten acercarse a los conceptos a través de prácticas no tradicionales, dichas experiencias envuelven a los mismos en las exigencias de la tecnología actual, en relación con una disciplina específica. Es por esto, que el uso de diferentes programas en las prácticas escolares puede ser pertinente para la enseñanza de los conceptos, particularmente en el campo de las Matemáticas, donde la utilización de programas como el GeoGebra® u otros, conlleva a los estudiantes a generar procesos de análisis, con el fin de mejorar su razonamiento respecto al concepto tratado.

Es importante mencionar que las herramientas virtuales son importantes en los contextos educativos de acuerdo a la utilización que se haga de ellas, pues no tiene sentido limitar a los estudiantes al manejo de programas, sino se generan procesos de reflexión y análisis del tema que se está abordando. Por esto, es pertinente que el uso de las herramientas virtuales sea llevado a cabo con organización y sentido sobre las prácticas escolares, con el fin de generar utilidad en los contextos educativos.

En esta investigación particularmente, la interfaz de GeoGebra® deja claro que el uso de la misma permite llevar a los estudiantes a procesos de razonamiento sobre conceptos del Análisis Matemático, como es el concepto del de la continuidad local, siendo oportuno considerar la posibilidad de utilizar dicha interfaz para la enseñanza de otros conceptos en este ámbito.

5.6. Descriptores de fase

Durante el trabajo de campo y refinación de las actividades propuestas se obtuvieron los descriptores de fase, los cuales se convierten en un conjunto de desempeños que dan pautas para caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III, donde cada uno de ellos está articulado a las fases, con el fin de establecer que condiciones desarrolla el estudiante en cada uno de los cinco momentos. A continuación se presentan los descriptores para cada una de las cinco fases de aprendizaje.

5.6.1. Descriptores de la Fase 1

Este conjunto de desempeños, permiten dar cuenta de la capacidad que posee el estudiante para elaborar los procesos de razonamiento propios de esta fase, donde da cuenta de sus concepciones previas y la utilización de conceptos que emplea a lo largo del trabajo de campo (Sección 4.3.1, p. 100), (Sección 4.4.1, p. 120) y (Sección 4.5.1, p. 139).

- Define el punto, la recta y la curva a partir de sus propiedades matemáticas y geométricas.

  Los estudiantes definieron los conceptos: Punto, recta y curva, a través de la utilización de experiencias concretas, donde se describieron cada una de sus propiedades utilizando gomas elásticas y el geoplano.

- Analiza las características de un estiramiento horizontal y la separación entre puntos.

  Allí se describió cada una de las características de la curva, considerándola como una goma ideal, la cual por más que sea estirada no llega a romperse, donde estas concepciones son creadas en el estudiante a partir del uso de gomas elásticas y la manipulación de apliaciones en GeoGebra®.

- Reconoce que la intersección entre una recta y una curva es un punto.

  Cuando el estudiante observaba en diferentes gráficas de las aplicaciones y del Módulo de Aprendizaje cada uno de los elementos geométricos que se formaban entre la intersección de curvas y rectas, explicaba que era un punto específico de la curva o de la recta.

- Reconoce cuando un trozo de curva está controlado.

A través de la utilización de los estiramientos horizontales, los cuales eran realizados en cada una de las curvas de las aplicaciones, los estudiantes reconocían el trozo de curva controlado como aquella porción de la curva que se encontraba entre las rectas horizontales y los puntos de corte de las mismas con la curva.

5.6.2. Descriptores de la Fase 2

Este conjunto de condiciones, orientan al estudiante en la elaboración de actividades que le permiten construir un mecanismo para definir el concepto, el cual consiste en realizar estiramientos horizontales y encontrar el trozo de curva controlado, determinando cada una de sus características y propiedades para poder llegar al concepto (Sección 4.3.2, p. 104), (Sección 4.4.2, p. 123) y (Sección 4.5.2, p. 143).

- Utiliza los estiramientos para describir cuando hay un trozo de curva controlado.

  En cada una de las aplicaciones que los estudiantes manipulaban, realizaban los estiramientos horizontales a la curva en un punto fijo y con la ayuda de este proceso describían la existencia del trozo de curva controlado.

- Describe cuando un trozo de curva está controlado localmente.

  Los estudiantes siempre realizaban los estiramientos a las curvas respecto a un punto, adicionalmente determinaban el trozo de curva controlado respecto al mismo, lo cual les permitía explicar que la característica fundamental del concepto que se desarrollaba se enfocaba en su aspecto local.

- Diferencia las características presentadas en estiramientos horizontales y verticales.

  Cuando el estudiante estiraba entre rectas horizontales, determinaba el trozo de curva controlado, lo cual *no* era posible cuando estiraba entre rectas verticales, aspecto que se hacía evidente en aquellas aplicaciones donde interactuaba con ambos tipo de rectas.

5.6.3. Descriptores de la Fase 3

Este conjunto de condiciones, orientan al estudiante en la explicitación de sus procesos mentales elaborados, donde da cuenta de las redes de relaciones construidas respecto al concepto (Sección 4.3.3, p. 107), (Sección 4.4.3, p. 125) y (Sección 4.5.3, p. 147).

- Reconoce el carácter local del concepto.

  Este aspecto se hace explícito en cada una de las aplicaciones donde el estudiante estira las curvas, el cual es efectuado respecto a un punto específico.

- Determina cuando un trozo de curva está y cuando no está controlado en un punto.

  La determinación del trozo de curva controlado de una curva se expone por el estudiante cuando visualiza lo sucedido en ella al realizar los estiramientos horizontales.

- Argumenta cuando una función es controlable y no controlable en un punto.

  La determinación del control local de una curva se hace evidente cuando el estudiante observa diferentes curvas, admitiendo su controlabilidad y no controlabilidad a partir de las propiedades de la misma.

- Manifiesta un lenguaje más estructurado en torno al concepto.

  El lenguaje de los estudiantes se hace explícito con sus producciones escritas, tanto en las guías como en los mapas concetuales, donde se observa la estructuración del mismo en correspondencia con los elementos desarrollados hasta el momento.

5.6.4. Descriptores de la Fase 4

Este conjunto de desempeños, orientan al estudiante en la aplicación y utilización del concepto en otros contextos, donde no sólo es utilizado en contextos matemáticos (Sección 4.3.4, p. 111), (Sección 4.4.4, p. 128) y (Sección 4.5.4, p. 149).

- Propone argumentos para explicar cuando una curva es controlable.

  Los estudiantes proponen ideas para explicar el concepto de control local, no sólo enfocándose en la utilización del mecanismo, sino en ideas que ellos mismos manifiestan.

- Entabla relaciones y jerarquías sobre los conceptos relacionados con el control local.

  Cuando los estudiantes interactúan con las diferentes aplicaciones, argumentan que el concepto de control local está determiando por la utilización del mecanismo y la determinación del trozo de curva controlado, donde hacen manifiesto en sus explicaciones aspectos jerárquicos sobre el concepto.

- Explicita y justifica el carácter local del concepto.

  En cada una de las aplicaciones se determina el control local de la curva en un punto específico, donde una curva en la cual sean señalados varios puntos y donde se tenga el control en un de ellos, no garantiza que exista el control en otros puntos de la misma, lo cual es explicado por los estudiantes en algunas de las aplicaciones.

- Propone nuevas ideas para sustentar y explicar cuando una curva es y no es controlable en un punto.

  A través de sus argumentos, los estudiantes proponen ideas que dan cuenta de la utilidad que ellos hacen del concepto en otros contextos diferentes a los contextos matemáticos, como situaciones de la vida cotidiana, particularmente el diseño de estructuras.

5.6.5. Descriptores de la Fase 5

Las características que definen las construcciones mentales elaboradas por el estudiante, donde se da cuenta de su aprendizaje, se pueden agrupar en el siguiente conjunto de desempeños que permiten evidenciar su estructura cognitiva (Sección 4.3.5, p. 114), (Sección 4.4.5, p. 131) y (Sección 4.5.5, p. 154).

- Diferencia y utiliza adecuadamente los elementos geométricos: Punto, recta y curva.

  El estudiante explica en diferentes situaciones cada una de las características del punto, la recta y la curva, principalmente, en aquellos momentos donde se presentan intersecciones entre cada uno de ellos.

- Comprende que el concepto de continuidad local se visualiza a partir del control local, empezando con distanciamientos horizontales.

  Cuando los estudiantes construyen la definición del control local, vinculan dicha definición con la de continuidad local de acuerdo a su definición matemática y el mecanismo construído, lo que se hace explícito en sus argumentos.

- Reconoce que para saber si un trozo de curva es controlado parte de los estiramientos horizontales.

  Allí el estudiante llega a la definición de control local utilizando los estiramientos horizontales sobre la curva en un punto específico, en cada una de las aplicaciones manipuladas.

- Reconoce el carácter local del concepto de continuidad.

  La localidad del concepto se hace explícita en cada una de las aplicaciones con las que el estudiante interactúa, dado que todas las actividades del Módulo de Aprendizaje, se enfocaban en analizar el comportamiento de la curva en un punto específico.

- Diferencia curvas que son controlables de las que no lo son localmente.

  Es evidente que las aplicaciones desarrolladas en cada una de las actividades, en algunos momentos representaban expresiones controlables y en otros no, lo cual es definido por el estudiante con la utilización del mecanismo en cada una de ellas.

- Define el concepto de continuidad local en términos de estiramientos horizontales y trozo de curva controlado respecto a un punto.

  Allí los estudiantes explican el concepto de continuidad local, el cual debe estar en correspondencia con la definición de control local, la cual es definida con el mecanismo que se ha desarrollado, utilizando los estiramientos horizontales y el trozo de curva controlado.

- Define el concepto de continuidad local de Cauchy de una función en un punto en términos del mecanismo empleado.

  El estudiante a través de unos aportes de información, entabla las relaciones que existen entre el mecanismo construido y la definición de continuidad de Cauchy, donde hace explícito que el concepto desarrollado con el mecanismo es el mismo que el de Cauchy.

El conjunto de descriptores mencionados anteriormente se convierten en un producto de la propuesta investigativa, los cuales dan pautas a los docentes para el diseño de actividades que propendan por mejorar la comprensión de los estudiantes respecto a los conceptos matemáticos. En la presente investigación en particular, los descriptores desarrollados para cada una de las fases, brindan elementos que apuntan hacia el mejoramiento de los procesos de razonamiento llevados a cabo por los estudiantes en las diferentes aulas de clase, siendo este conjunto de desempeños, quienes en última instancia describen la forma como un estudiante progresa de un nivel de razonamiento al siguiente, de acuerdo con el modelo de van Hiele. Para nuestro caso del Nivel II al Nivel III de razonamiento respecto al concepto de continuidad local.

5.7. Progreso en el nivel de razonamiento

El proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, adquiere sentido cuando se propician experiencias adecuadas, que generan cambios cognitivos en los estudiantes. Se puede resaltar que el desarrollo del proceso de investigación da cuenta de como los estudiantes han progresado en su nivel de razonamiento, pasando del Nivel II al Nivel III, evidenciando que el uso de herramientas adecuadas en sus practicas educativas, pueden generar cambios en su forma de comprender y acercarse a los conceptos, particualrmente el concepto de continuidad local. Es por esto que la evidencia del progreso de los estudiantes en el nivel de razonamiento, se hace explícita en el desarrollo que ellos llevan a cabo al desarrollar el test de Campillo, el cual brinda las pautas para ubicar a los estudiantes en cada uno de los niveles.

Los estudiantes que hicieron parte del desarrollo e implementación del Módulo de Aprendizaje, progresaron en su nivel de razonamiento, dando a conocer el mismo a través de sus argumentos y el uso del lenguaje, el cual era más refinado y estructurado a medida que avanzaban de un nivel inferior a uno superior, donde las redes de relaciones construidas respecto al concepto se encuentran mejor elaboradas, lo que se hace evidente en el análisis de la información en cada caso particular.

5.8. Las fases de aprendizaje en la Educación Matemática

Las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele son una herramienta que permite estructurar la enseñanza, brindan pautas para el desarrollo de diferentes actividades que los estudiantes desarrollan respecto a un concepto particular, las cuales propenden por mejorar la calidad del razonamiento respecto a los conceptos, especialmente en el ámbito de la Educación Matemática.

El modelo educativo de van Hiele en sus tres componentes, permite articular investigaciones al mismo de acuerdo con los intereses y propósitos de la misma, respecto a las fases de aprendizaje, en los últimos años investigaciones recientes como las de Vasco y Bedoya [23, p. 37], Zapata y Sucerquia [24, p. 5] y la que culmina con este trabajo, dan cuenta de como las fases de dicho modelo se convierten en una pauta que propende por mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en conceptos de las Matemáticas, particularmente del Análisis Matemático, donde el campo de la Educación Matemática se puede fortalecer en el aspecto metodológico con investigaciones de éste tipo, en las que se tiene como eje central de la enseñanza y el aprendizaje al estudiante.

5.9. Futuras líneas de investigación

El anterior trabajo de investigación, articula el modelo educativo de van Hiele en su componente prescriptivo con un concepto del Análisis Matemático, el concepto de continuidad local, a través de la implementación de un Módulo de Aprendizaje donde el estudiante construye un mecanismo que le permite definir el concepto. Los estudiantes que hacen parte de este proceso, inicialmente se encontraban en un Nivel II de razonamiento y posteriormente progresaron al Nivel III, lo que deja abierta la posibilidad de trabajar con estudiantes que se encuentran en otros niveles de razonamiento para promoverlos a un nivel superior.

Es importante resaltar también, que se pueden crear estrategias articuladas en las fases de Aprendizaje del modelo educativo de van Hiele para favorecer la comprensión de diferentes conceptos del Análisis Matemático, como es el concepto de límite, derivada, integral, entre otros.

Adicionalmente, se pueden proponer futuras investigaciones que den cuenta de la utilidad de las herramientas tecnológicas con sus respectivos componentes para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos, no sólo desde el ámbito operativo, sino también desde los procesos de razonamiento que pueden generar los diferentes conceptos.

Apéndice A

Divulgación del trabajo de investigación

Durante el desarrollo del trabajo de investigación se realizaron diferentes socializaciones, las cuales articulaban algunos elementos de la propuesta al campo de la Educación Matemática, con el fin de contribuir a la comunidad académica con nuevas ideas.

La divulgación del trabajo de investigación da cuenta del aporte que se realiza a la educación colombiana, con el fin de contribuir al mejoramiento de las diferentes prácticas escolares, en aras de generar calidad a la misma, debido a que es necesario que las investigaciones sean conocidas por la comunidad, para que se generen aportes a los quehaceres educativos.

A.1. Artículos

Durante el desarrollo del trabajo de investigación, se realizaron algunas producciones escritas y participaciones en eventos de carácter nacional e internacional, una de las producciones escritas ha sido publicada en las memorias del segundo congreso internacional en Formación y Modelación en Ciencias Básicas en la Universidad de Medellín y las ponencias han sido desarrolladas en algunos congresos donde se presentaron algunas conclusiones y avances respecto al proyecto investigativo. A continuación se da a conocer a de manera resumida la divulgación que se ha realizado del trabajo de investigación.

Comprensión del concepto de continuidad local en el marco del modelo

educativo de van Hiele

Resumen

Contexto: Nuestro trabajo de investigación presenta una propuesta alternativa para mejorar el nivel de razonamiento del alumno respecto al concepto de continuidad local, enmarcado en el contexto del modelo de van Hiele, el cual es susceptible de una componente visual - geométrica. La propuesta se centra en el aspecto prescriptivo del modelo referido a las fases, donde a través del diseño e implementación de un Módulo de Aprendizaje, el estudiante progrese a un nivel avanzado de razonamiento en el concepto objeto de estudio. Es decir, el propósito es establecer los descriptores de fase adecuados para que los estudiantes avancen del Nivel II al Nivel III de razonamiento para lograr la comprensión del concepto.

Objetivo: Contribuir con una propuesta alternativa para mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes respecto al concepto de continuidad local.

Metodología: A través de la exposición de los avances del trabajo de investigación, los participantes apreciarán cómo un Módulo de Aprendizaje enmarcado en el modelo educativo de van Hiele se convierte en una propuesta didáctica que aporta a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Resultados: Las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele son una propuesta didáctica para estructurar la enseñanza y favorecer el progreso del nivel de razonamiento en los estudiantes.

Conclusiones: Se observa que las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele permite estructurar actividades de enseñanza de conceptos matemáticos susceptibles de una componente visual-geométrica.

Palabras claves: Modelo educativo de van Hiele - continuidad local - fases de aprendizaje - Módulo de Aprendizaje.

Estado: Publicado

Revista: Memorias del segundo congreso internacional en Formación y Modelación en Ciencias Básicas en la Universidad de Medellín, 2010.

A.2. Participaciones internacionales

La paticipación en eventos internacionales fue desarrollada en la modalidad de ponencia y comunicación breve como se menciona a continuación.

A.2.1. Ponencia

II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 5 - 7 de 2010.

Comprensión del concepto de continuidad en el marco del modelo educativo de van Hiele.

Resumen

Nuestro trabajo de investigación presenta una propuesta alternativa para mejorar el nivel de razonamiento del alumno respecto al concepto de continuidad local, la propuesta se centra en el aspecto prescriptivo del modelo referido a las fases, donde a través del diseño e implementación de un Módulo de Aprendizaje, el estudiante progresa a un nivel avanzado de razonamiento en el concepto objeto de estudio. Es decir, el propósito es establecer los descriptores de fase adecuados para que los estudiantes avancen del Nivel II al Nivel III de razonamiento para lograr la comprensión del concepto de continuidad local.

Palabras claves: Modelo educativo de van Hiele, continuidad local, fases de aprendizaje, Módulo de Aprendizaje.

A.2.2. Comunicación Breve

6th International Congress of Qualitative Inquiry, Urbana Champagnat, Estados Unidos, Mayo 26 - 29 de 2010.

Estudio de caso para el concepto de continuidad local en el marco de van Hiele.

Resumen

Una crisis en el ámbito educativo tiene que ver con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Nuestro trabajo de investigación aborda el concepto de continuidad local por la dificultad para su comprensión; usando las fases del modelo de van Hiele se diseña una técnica para determinar los procesos de razonamiento seguidos por los alumnos frente a este concepto. Mediante el estudio de casos, percibimos que sus razonamientos difieren considerablemente, por tanto, se establecen estrategias adecuadas que permitan lograr un avanzado nivel de razonamiento, logrando así contribuir al mejoramiento de la Educación Matemática en una sociedad totalmente globalizada.

Palabras claves: Aprendizaje, fases, razonamiento, educación, sociedad.

A.3. Participaciones nacionales

Las paticipaciones en eventos nacionales fue desarrollada en la modalidad de ponencias, como se menciona a continuación.

A.3.1. Ponencia

El 11º Encuentro colombiano de Matemática Educativa, Bogotá, Colombia, Octubre 7 - 9 de 2010.

Comprensión del concepto de continuidad local en el marco del modelo educativo de van Hiele

Resumen

Es esencial que el aprendizaje de diversos campos del saber esté articulado a las necesidades del contexto y a la cultura. Sin embargo, cuando los estudiantes aprenden las Matemáticas, se presenta desarticulación con sus prácticas cotidianas y en el mejor de los casos desarrollan habilidades de carácter operativo. El trabajo de investigación se enfoca en el aspecto metodológico para la enseñanza y comprensión del concepto de continuidad local y se fundamenta en el modelo educativo de van Hiele, allí presentamos una forma alternativa para la enseñanza del concepto de continuidad local y contribuimos con mecanismos que favorezcan la comprensión del mismo, respecto al razonamiento de los estudiantes en su paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento del modelo de van Hiele.

Palabras claves: Aprendizaje, fases de aprendizaje, razonamiento, educación, sociedad.

A.3.2. Ponencia

Tercer encuentro de los estudiantes de la licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Medellín, Colombia, Diciembre 5 de 2008.

El concepto de continuidad local en el marco del modelo educativo de van Hiele

Resumen

En este documento presentamos las primeras reflexiones en torno al modelo educativo de van Hiele como una herramienta para caracterizar la comprensión del concepto de continuidad propio del cálculo diferencial. Estas reflexiones se convierten en un avance del proyecto de investigación enmarcado en la Maestría en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia, realizada con el apoyo del grupo de investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit).

Palabras claves: Continuidad, Modelo educativo de van Hiele, fases de aprendizaje.

Apéndice B

Módulo de Aprendizaje

A continuación se presenta la consolidación de las actividades que estructuran el Módulo de Aprendizaje, el cual ha sido diseñado e implementado en el desarrollo del proceso de investigación, donde éste representa la herramienta que permite caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes respecto al concepto de continuidad local, en el paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento en el marco del modelo educativo de van Hiele.

Cada una de las actividades propuestas están articuladas a los descriptores de fases correspondientes para cada una de ellas, las cuales se convierten en una propuesta metodológica alternativa para la enseñanza del concepto de continuidad local de Cauchy, donde se pretende que los estudiantes construyan la definición del concepto a través del desarrollo de un mecanismo.

B.1. Fase 1: Información

Respetado estudiante, estas invitado a realizar las siguientes actividades de forma consciente y espontánea. Puedes responder con sinceridad de acuerdo a tus razonamientos.

B.1.1. Actividad 1

Objetivo: Definir el punto, la recta y la curva a partir de sus propiedades matemáticas y geométricas.

Materiales

- Hojas de block
- Regla
- Lápiz

Desarrollo de la actividad

Dibuja en una de tus hojas de block lo que consideras como punto, recta y curva.

Los objetos en el plano pueden tener la dimensión de longitud, de longitud y ancho, de longitud, ancho y alto ó ninguna.

¿Qué dimensiones le asocias a cada uno de los siguientes objetos geométricos?

1. Al punto ______________ ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____

2. A la recta ______________ ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____

3. A la curva ______________ ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____

4. ¿Cómo defines un punto?

   ____
   ____
   ____

5. ¿Cómo defines una recta?

6. ¿Cómo defines una curva?

7. ¿Una recta puede ser parte de una curva? Explica tu respuesta.

8. ¿Un punto puede ser parte de una recta? Explica tu respuesta.

9. Realiza un mapa conceptual donde involucres los tres conceptos (punto, recta y curva).

B.1.2. Actividad 2

Objetivo: Analizar las características de un estiramiento horizontal y la separación entre puntos.

Materiales

- Marcador
- Lupa
- Cartón paja o una tablilla de madera
- Chinches de cabeza resistente o puntillas

- Martillo
- Regla o metro
- Hilo que estire
- Dos bandas (Pueden ser reglas de madera que se ajusten al geoplano o un resorte)

Construcción del geoplano

- Traza en el cartón paja o en la tabla las cuadrículas de medida 1 cm x 1 cm.
- Traza aproximadamente 40 cuadrículas de largo por 40 cuadrículas de ancho.
- En cada vértice de la cuadrícula coloca un chinche si estás trabajando en el cartón paja, o puntillas si estás trabajando en la madera.

Desarrollo de la actividad

Las siguientes actividades las puedes llevar a cabo con un compañero para que obtengas un manejo adecuado de los objetos

1. Forma un cuadrado con el hilo en el geoplano de 2cm x 2cm.
2. Luego estira el ancho del cuadrado horizontalmente, es decir, te queda un rectángulo de 4cm x 2cm.
3. Luego estira el largo del cuadrado verticalmente, es decir te queda un rectángulo de 2cm x 4cm.
4. Luego estira el ancho y el largo del cuadrado, es decir, amplia horizontal y verticalmente, te queda un cuadrado de 4cm x 4cm.
5. Responde las preguntas:

   a) ¿Qué sucede con el cuadrado cuando lo amplias horizontalmente?

   ____

   ____

   ____

   b) ¿Qué sucede con el cuadrado cuando lo amplias verticalmente?

   ____

   ____

   ____

c) ¿Qué sucede con el cuadrado cuando lo amplias horizontal y verticalmente?

d) ¿Cuál es la diferencia entre ampliar horizontalmente y verticalmente?

6. Realiza una figura con hilo en el geoplano, luego replícala dos veces con diferentes tamaños guardando la proporción, luego replícala pero ampliando horizontalmente y por último verticalmente, te deben quedar 5 figuras en el geoplano. Numera cada figura y explica las propiedades matemáticas de cada una de ellas.

7. Toma un pedazo de hilo que estire y dibuja un punto entre sus extremos.

8. Observa con una lupa el punto mientras la acercas y la alejas, responde:

   a) ¿Qué observas?

   b) ¿Cuáles son las propiedades matemáticas del punto?

9. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué sucede con el punto a medida que se acerca la lupa?

b) ¿Qué sucede con el punto a medida que se aleja la lupa?

10. Estira el hilo tanto como sea posible sin romperlo.
11. Estira el hilo tanto como sea posible hasta romperlo.
12. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede con el punto cuando se estira el hilo sin romperlo?

b) ¿Qué sucede con el punto cuando se estira el hilo y se rompe?

B.1.3. Actividad 3

Objetivo: Reconocer que la intersección entre una recta y una curva es un punto.

Desarrollo de la actividad

1. Ubica un punto en el hilo, luego átalo a un punto del geoplano y empieza a estirarlo.
2. Ubica un punto en el hilo, luego átalo a un punto del geoplano, posteriormente ubica las bandas en sentido horizontal teniendo en cuenta que el punto del hilo quede dentro y empieza a estirarlo sin salir de las bandas horizontales.
3. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede cuando se estira el hilo sin las bandas?

b) ¿Qué sucede cuando se estira el hilo con las bandas?

c) ¿Cuál es la diferencia de estirar sin las bandas y con las bandas?

4. Observa la siguiente gráfica:

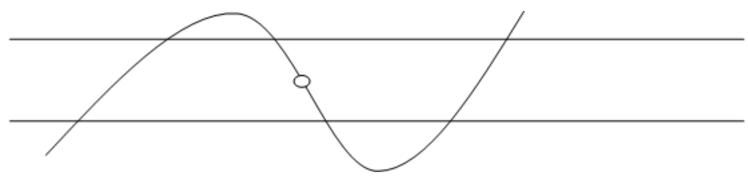


Figura B.1: Intersección curva-recta

Las dos líneas horizontales representan las bandas y la curva representa el hilo.

Hay momentos donde las rectas horizontales, se cruzan con la curva. ¿Qué elementos geométricos pueden representar la intersección entre las rectas y la curva, es decir, la intersección entre las bandas y el hilo? Explica tu respuesta.

____

____

____

____

B.1.4. Actividad 4

Objetivo: Comprender que el trozo de curva controlado No depende de las rectas horizontales.

Desarrollo de la actividad

1. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 1).

   Responde respecto a la Aplicación 1:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

2. Observa la curva, las rectas verticales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 2).

   Responde respecto a la Aplicación 2:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda hacia la derecha las rectas verticales se acercan al punto A.

   Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____

   c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____

   d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

g) ¿Cuál es la diferencia entre utilizar rectas horizontales y rectas verticales? Explica tu respuesta.

h) ¿Se obtiene lo mismo utilizando rectas horizontales y rectas verticales? Explica tu respuesta.

3. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 3).

   Responde respecto a la Aplicación 3:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

g) ¿Cómo llamarías a la porción de la curva que queda dentro de las rectas horizontales?

h) ¿Cómo explicas el término "trozo de curva controlado"?

i) ¿Puedes encontrar correspondencia entre la porción de curva que queda dentro de las rectas horizontales y el trozo de curva controlado? Explica tu respuesta.

4. Observa la curva, las rectas verticales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 4).

   Responde respecto a la Aplicación 4:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda hacia la derecha las rectas verticales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué? ______

g) ¿Cuál es la diferencia entre utilizar rectas horizontales y rectas verticales? Explica tu respuesta.

h) ¿Se obtiene lo mismo utilizando rectas horizontales y rectas verticales? Explica tu respuesta.

5. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 5).

   Responde respecto a la Aplicación 5:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la recta se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la recta a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la recta a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la recta cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la recta dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

g) ¿Cómo llamarías a la porción de la curva que queda dentro de las rectas horizontales?

h) ¿Cómo explicas el término “trozo de curva controlado”?

i) ¿Puedes encontrar correspondencia entre la porción de curva que queda dentro de las rectas horizontales y el trozo de curva controlado? Explica tu respuesta.

6. Observa la curva, las rectas verticales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 6).

   Responde respecto a la Aplicación 6:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la recta se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda hacia la derecha las rectas verticales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la recta a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la recta a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la recta a medida que se acercan las rectas verticales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la recta cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la recta dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

g) ¿Cuál es la diferencia entre utilizar rectas horizontales y rectas verticales? Explica tu respuesta.

h) ¿Se obtiene lo mismo utilizando rectas horizontales y rectas verticales? Explica tu respuesta.

B.1.5. Actividad 5

Objetivo: Reconocer cuando un trozo de curva está controlado.

1. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 7).

   Responde respecto a la Aplicación 7:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? ¿Por qué?

2. De acuerdo con lo aprendido en la realización de las actividades anteriores responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la diferencia de haber trabajado con estiramientos horizontales y verticales? Explica tu respuesta.

b) ¿Qué significa que un trozo de curva este controlado localmente? Explica tu respuesta.

c) ¿Consideras que es importante la distancia entre las rectas horizontales para determinar el trozo de curva controlado? Explica tu respuesta.

d) ¿Consideras que es importante la distancia entre las rectas verticales para determinar el trozo de curva controlado? Explica tu respuesta.

e) ¿Cuándo un trozo de curva puede estar controlado? Explica tu respuesta.

3. Realiza un mapa conceptual donde expliques que es un trozo de curva controlable en un punto.

B.1.6. Actividad 6

Objetivo: Analizar el razonamiento de los estudiantes cuando se han desligado de lo concreto y computacional.

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. Un punto matemático posee:
    a) Longitud
    b) Longitud y ancho
    c) Longitud, ancho y alto
    d) Dimensiones
    e) Ninguna de las anteriores
2. Una recta matemática está conformada por:
    a) Un punto
    b) Dos puntos
    c) Tres puntos
    d) Infinitos puntos en la misma dirección
    e) Ninguna de las anteriores
3. Una curva está conformada por:
    a) Un punto
    b) Dos puntos
    c) Tres puntos
    d) Infinitos puntos
    e) Ninguna de las anteriores
4. Una recta es un caso especial de:
    a) Un punto
    b) Dos puntos
    c) Tres puntos
    d) De una curva
    e) Ninguna de las anteriores
5. Entre dos puntos matemáticos se encuentran:
    a) Cero puntos
    b) Dos puntos
    c) Infinitos puntos
    d) Tres puntoa
    e) Ninguna de las anteriores

6. Observa la figura:

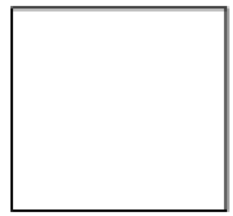


Figura B.2: Cuadrado

Observa nuevamente estas figuras:

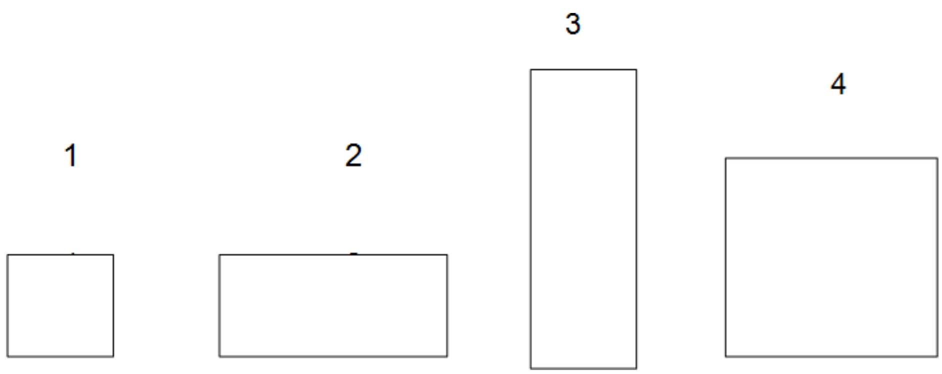


Figura B.3: Estiramientos sobre el cuadrado

Se puede afirmar que:

a) En la figura 1 sólo hay estiramientos horizontales
b) En la figura 2 sólo hay estiramientos horizontales
c) En la figura 3 sólo hay estiramientos horizontales
d) En la figura 4 sólo hay estiramientos horizontales
e) Ninguna de las anteriores

7. Dados dos puntos matemáticos en una recta numérica:

a) No se puede distinguir uno de otro
b) Se distinguen por su forma
c) Se distinguen por su color
d) Se distinguen por su ubicación
e) Ninguna de las anteriores

8. Observa las gráficas B4 y B5:

   La grafica B5 se formó a partir de:

   a) Un estiramiento horizontal a partir de la gráfica 1
   b) Un estiramiento vertical a partir de la gráfica 1
   c) Un zoom de aumento a partir de la gráfica 1
   d) Un zoom de disminución a partir de la gráfica 1
   e) Ninguna de las anteriores

Figura B.4: Curvas.

Figura B.5: Curvas.

9. Observa las siguientes gráficas:

Figura B.6: Estiramiento respecto a una curva.

Figura B.7: Estiramiento respecto a uan curva.

   La grafica B7 se formó a partir de:

   a) Un estiramiento horizontal a partir de la gráfica 1
   b) Un estiramiento vertical a partir de la gráfica 1
   c) Un zoom de aumento a partir de la gráfica 1
   d) Un zoom de disminución a partir de la gráfica 1
   e) Ninguna de las anteriores

10. Observa las gráficas B8 y B9:

    La grafica B9 se formó a partir de:

    a) Un estiramiento horizontal a partir de la gráfica 1
    b) Un estiramiento vertical a partir de la gráfica 1
    c) Un zoom de aumento a partir de la gráfica 1
    d) Un zoom de disminución a partir de la gráfica 1
    e) Ninguna de las anteriores

Figura B.8: Acercamientos respecto a una curva.

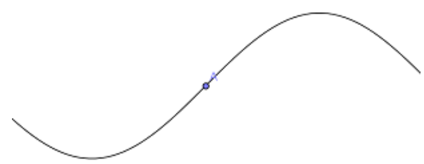


Figura B.9: Acercamientos respecto a una curva.

11. Observa las siguientes gráficas:

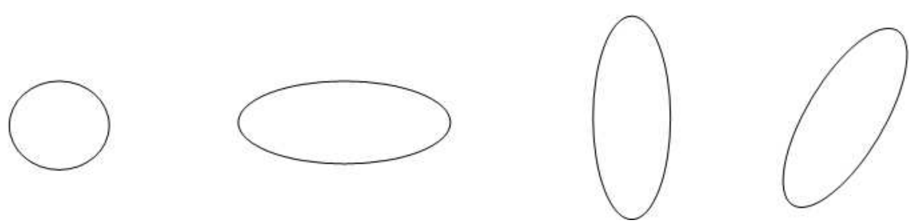


Figura B.10: Cambios respecto a una circunferencia.

Si amplias la circunferencia sólo horizontalmente puedes obtener una figura con la forma ilustrada en:

a) La figura 1
b) La figura 2
c) La figura 3
d) Ninguna de las anteriores

B.2. Fase 2: Orientación dirigida

Respetado estudiante, estas invitado a realizar las siguientes actividades de forma consciente y espontánea. Puedes responder con sinceridad de acuerdo a tus razonamientos.

B.2.1. Actividad 1

Objetivo: Utilizar los estiramientos horizontales para describir cuando existe un trozo de curva controlado.

Desarrollo de la actividad

1. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 8).

   Responde respecto a la Aplicación 8:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

g) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir?

2) ¿Existe el trozo de curva controlado? y ¿Consideras que esta curva se puede controlar localmente?

3) ¿Qué significa que una curva se pueda controlar localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva esté controlada localmente.

4) ¿Qué significa que una curva no se pueda controlar localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva no esté controlada localmente.

2. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 9).

   Responde respecto a la Aplicación 9:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

g) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir?

2) ¿Existe el trozo de curva controlado? y ¿Consideras que esta curva se puede controlar localmente?

3) ¿Qué significa que una curva se pueda controlar localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva esté controlada localmente.

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva no esté controlada localmente.

3. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 10). Interactúa con esta aplicación al igual que lo has realizado en las aplicaciones anteriores, es decir, utiliza los deslizadores estiramiento y distancia para mirar que sucede con la gráfica

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la diferencia entre las Aplicaciones 8 y 9 con respecto a la Aplicación 10?

b) ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales?

c) ¿La curva está controlada localmente? Si o No ¿Porqué?

d) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir?

2) ¿Existe el trozo de curva controlado? y ¿Consideras que esta curva se puede controlar localmente?

3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva esté controlada localmente.

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva no esté controlada localmente.

4. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 11).

Responde respecto a la Aplicación 11:

a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? ¿Por qué?

g) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir?

2) ¿Existe el trozo de curva controlado? y ¿Consideras que esta curva se puede controlar localmente?

3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva esté controlada localmente

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva no esté controlada localmente.

B.2.2. Actividad 2

Objetivo: Describir cuando un trozo de curva está y no está controlado localmente.

Desarrollo de la actividad

1. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 12).

   Responde respecto a la Aplicación 12:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   b) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   c) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? ¿Por qué?

g) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

   1) ¿Qué puedes concluir?

   2) ¿Existe el trozo de curva controlado? y ¿Consideras que esta curva se puede controlar localmente?

3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva esté controlada localmente.

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva no esté controlada localmente.

2. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 13). Interactúa con esta aplicación al igual que lo has realizado en las aplicaciones anteriores, es decir, utiliza los deslizadores estiramiento y distancia para mirar que sucede con la gráfica.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la diferencia entre la Aplicación 12 con respecto a la Aplicación 13?

   b) ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales?

   c) ¿La curva está controlada localmente? Si o No ¿Porqué?

d) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir? Explica y describe si existe el trozo de curva controlado localmente.

2) ¿Consideras que esta curva se puede controlar localmente?

3) ¿Qué significa que una curva se pueda controlar en un punto?

4) ¿Qué significa que una curva no se puede controlar en un punto e?

3. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 14). Interactúa con esta aplicación al igual que lo has realizado en las aplicaciones anteriores, es decir, utiliza los deslizadores estiramiento y distancia para mirar que sucede con la gráfica.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la diferencia entre la Aplicaciòn13 con respecto a la Aplicación 14?

   b) ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales?

c) ¿La curva está controlada localmente? Si o No ¿Porqué?

d) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir? Explica y describe si existe el trozo de curva controlado localmente.

2) ¿Consideras que esta curva está controlada localmente?

3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente?

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente?

4. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 15). Interactúa con esta aplicación al igual que lo has realizado en las aplicaciones anteriores, es decir, utiliza los deslizadores estiramiento y distancia para mirar que sucede con la gráfica.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la diferencia entre la Aplicaciòn14 con respecto a la Aplicación 15?

b) ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales?

c) ¿La curva está controlada localmente? Si o No ¿Porqué?

d) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

   1) ¿Qué puedes concluir? Explica y describe si existe el trozo de curva controlado localmente.

   2) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en un punto?

   3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente?

   4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente?

5. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento y distancia y el punto A (Aplicación 16). Interactúa con esta aplicación al igual que lo has realizado en las aplicaciones anteriores, es decir, utiliza los deslizadores estiramiento y distancia para mirar que sucede con la gráfica.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la diferencia entre la Aplicaciòn15 con respecto a la Aplicación 16?

   b) ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales?

   c) ¿La curva está controlada localmente? Si o No ¿Porqué?

   d) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

      1) ¿Qué puedes concluir? Explica y describe si existe el trozo de curva controlado localmente.

      2) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en un punto?

      3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente?

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente?

B.2.3. Actividad 3

Objetivo: Analizar la diferencia que existe entre utilizar estiramientos verticales y horizontales.

Desarrollo de la actividad

1. Observa la curva, las rectas horizontales, las rectas verticales y los deslizadores estiramiento, Distancia1 y Distancia2 y el punto A (Aplicación 17). Responde respecto a la Aplicación 17:

   a) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador Distancia1 y Distancia2 también están dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A y de izquierda a derecha las rectas verticales se acercan también al punto. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia1 y distancia2 en cada una de las seis subdivisiones.

      1) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

      2) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales se acercan al punto A? Explica tu respuesta.

b) Regresa los deslizadores estiramiento y Distancia1 y Distancia2 a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador Distancia 1 y Distancia 2 en cada una de las seis subdivisiones.

1) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

2) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas verticales se acercan al punto A? Explica tu respuesta.

c) Regresa los deslizadores estiramiento y Distancia1 y Distancia2 a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador Distancia1 y Distancia2 en cada una de las seis subdivisiones.

1) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador Distancia1 y Distancia2 se encuentran en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador Distancia1 y Distancia2 se encuentran en la sexta subdivisión.

1) ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

2) ¿Queda la curva dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador Distancia 1 y Distancia2 se encuentra en la sexta subdivisión.

1) ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

2) ¿Queda el punto A dentro de las rectas verticales? Si o no ¿Por qué?

g) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

1) ¿Qué puedes concluir?

2) ¿Consideras que esta curva está controlada localmente?

3) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva esté controlada localmente.

4) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras que significa que una curva no esté controlada localmente.

h) ¿Cuál es la diferencia entre usar rectas verticales y usar rectas horizontales?

i) ¿De qué depende el trozo de curva controlado?

2. Realiza un mapa conceptual donde ilustres la diferencia entre utilizar estiramientos verticales y horizontales.

B.2.4. Actividad 4

Objetivo: Analizar el razonamiento de los estudiantes en la fase 2 de aprendizaje en relación con la comprensión del concepto de continuidad local.

1. Hablar de estiramientos en las aplicaciones anteriores significa que:

   a) La curva se amplía verticalmente

   b) La curva se amplía horizontalmente

   c) La curva no se amplia

   d) La curva se amplía horizontal y verticalmente

   e) Ninguna de las anteriores

2. El control de una curva respecto a un punto es de carácter:

a) Intuitivo
b) Lógico
c) Local
d) Físico
e) Ninguna de las anteriores

3. Para visualizar si una curva está controlada localmente debes realizar:

a) Estiramientos verticales
b) Estiramientos horizontales
c) Un zoom
d) Estiramientos horizontales y un zoom
e) Ninguna de las anteriores

4. No se obtiene lo mismo utilizando estiramientos horizontales y verticales porque:

a) No se visualiza el trozo de curva controlado con los estiramientos verticales
b) No se visualiza el trozo de curva controlado con los estiramientos horizontales
c) Se debe realizar un zoom para determinar si la curva está controlada localmente
d) No se puede utilizar ambos estiramientos para mirar el control local de una curva.
e) Ninguna de las anteriores

5. El término más adecuado para hablar de control local es:

a) Función evaluada en un punto
b) Control en un punto
c) Derivada en un punto
d) Integral en un punto
e) Ninguna de las anteriores

6. Para determinar el control local se parte inicialmente de:

a) Estiramientos verticales
b) Estiramientos horizontales

c) La distancia entre las rectas verticales
d) La distancia entre las rectas horizontales
e) Ninguna de las anteriores

7. Observa la siguiente gráfica.

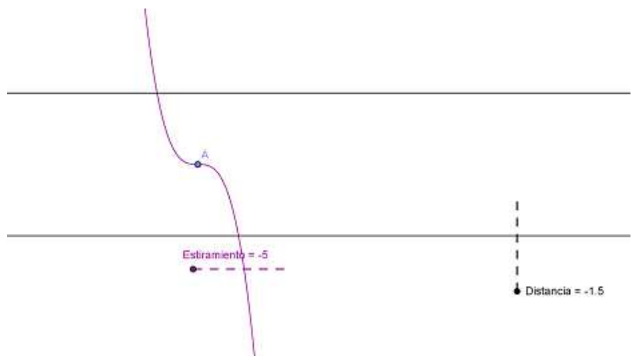


Figura B.11: Aplicación en Geogebra.

Se puede afirmar que:

a) La curva es controlable en el punto a
b) La curva no es controlable en el punto a
c) La controlabilidad en el punto a depende del deslizador distancia
d) La controlabilidad en el punto a depende del deslizador estiramiento
e) Ninguna de las anteriores

8. Se puede afirmar que un estiramiento vertical permite determinar:

a) Cuando un trozo de curva está controlado localmente
b) Cuando una curva es controlable en un punto
c) La gráfica de la curva
d) La forma de la curva
e) Ninguna de las anteriores

B.3. Fase 3: Explicitación

Respetado estudiante, estas invitado a realizar las siguientes actividades de forma consciente y espontánea. Puedes responder con sinceridad de acuerdo a tus razonamientos.

B.3.1. Actividad 1

Objetivos:

- Reconocer el carácter local del concepto.
- Determinar cuando un trozo de curva está y cuando no está controlado en un punto.

Desarrollo de la actividad

1. Respecto a las Aplicaciones 18 a la 28:
   - Observa cada una de ellas.
   - Concentra tu mirada en el punto A en cada de las aplicaciones.
   - Mueve los deslizadores Estiramiento y Distancia.
   - Realiza zoom de acercamiento sobre el punto A.
2. Observa la Aplicación 18. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

   ____

   ____

   ____

   ____

   b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Observa la Aplicación 19. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

   b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva.

4. Observa la Aplicación 20. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

   b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva.

5. Observa la Aplicación 21. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

   b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva.

6. Observa la Aplicación 22. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva.

7. Observa la Aplicación 23. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

   b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva.

8. Observa la Aplicación 24. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta.

   Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva

9. Observa la Aplicación 25. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

    a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

    b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva

10. Observa la Aplicación 26. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva

11. Observa la Aplicación 27. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

    a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

    b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva

12. Observa la Aplicación 28. Después de haber interactuado con los deslizadores concentra tu mirada en el punto A y lleva los deslizadores Estiramiento

y Distancia hasta la sexta subdivisión, posteriormente realiza un zoom de acercamiento sobre el punto A varias veces hasta que visualices si la curva queda en forma de recta. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿La curva se puede controlar en el punto A? Si o No ¿Por qué? ¿Existe el trozo de curva controlado?

____

____

____

____

b) Explica con tus palabras que significa que una curva sea o no sea controlable en un punto respecto a lo que sucede en cada aplicación, es decir, utilizando lo que sucede con las distancias entre las rectas horizontales y con el estiramiento de la curva

____

____

____

____

13. Llena la siguiente tabla. Para llenar la tabla inicialmente debes interactuar con cada una de las aplicaciones y posteriormente debes analizar si la curva es controlable en el punto.

B.3.2. Actividad 2

Objetivo:

- Argumentar y explicar cuando una función es controlable y no controlable en un punto.
- Manifestar un lenguaje más estructurado en torno al concepto de control local.

Materiales

- Libro de Matemáticas
- Hojas de Block
- Internet

Aplicación Nº	Controlable en A	No Controlable en A	Explicación a la respuesta
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			

Figura B.12: Cuadro 1

Desarrollo de la actividad

1. Consulta en libros de Matemáticas y en Internet diferentes clases de funciones.
2. Escoge 5 funciones para graficar e indica su expresión matemática.
3. A cada una de éstas 5 funciones escríbele una explicación con tus palabras indicando si es controlable o no controlable. Recuerda que para indicar si es controlable o no controlable debes ubicar un punto fijo en cada una de las gráficas.
4. Entrega un trabajo escrito con lo realizado.
5. Realiza un mapa conceptual donde especifiques cuando una curva es o no controlable en un punto

B.3.3. Actividad 3

Objetivo: Analizar el razonamiento de los estudiantes en la fase 3 de aprendizaje en relación con la comprensión del concepto de continuidad local

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. Observa la figura 1 y 2

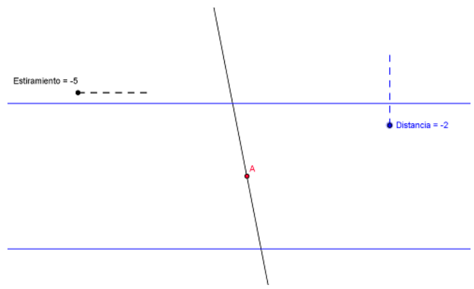


Figura B.13: Estiramiento sobre una recta

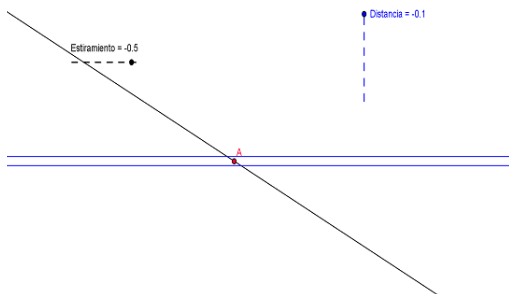


Figura B.14: Estiramiento sobre una recta

Después de observar la figura 1 y 2 se puede decir que:

a) Se movió el deslizador estiramiento
b) Se movió el deslizador distancia
c) Se movió el deslizador distancia hasta la mitad
d) Se movió el deslizador distancia y estiramiento
e) Ninguna de las anteriores

2. Observa las siguientes figuras:

Después de observar la figura 1, 2 y 3 se puede afirmar que:

a) La figura 3 respecto a la figura 1 posee un zoom
b) La figura 3 representa un acercamiento a la figura 1
c) La figura 2 representa un acercamiento a la figura 1
d) La figura 3 respecto a la figura 1 posee un estiramiento
e) Ninguna de las anteriores

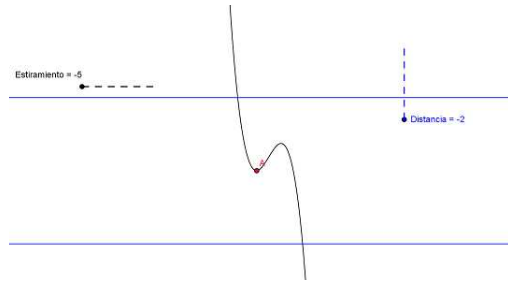


Figura B.15: Estiramientos consecutivos

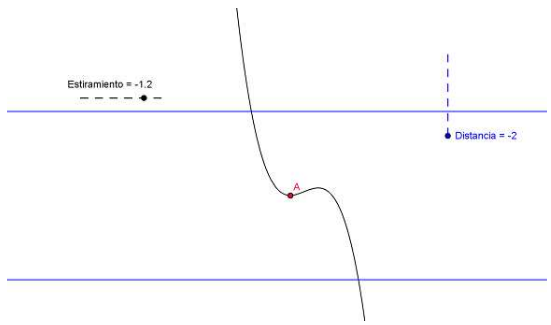


Figura B.16: Estiramientos consecutivos

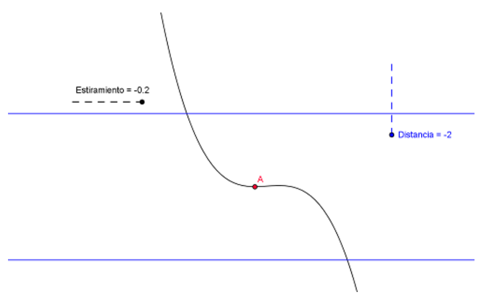


Figura B.17: Estiramientos consecutivos

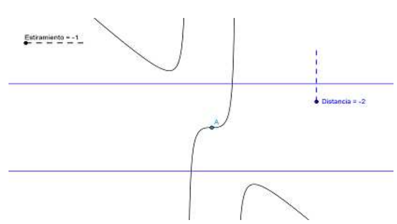


Figura B.18: Estiramiento sobre una curva.

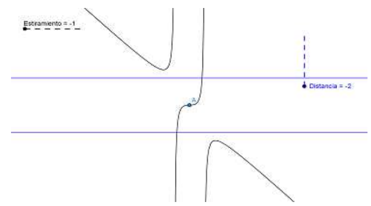


Figura B.19: Estiramiento sobre una curva.

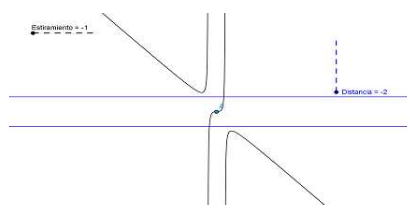


Figura B.20: Estiramiento sobre una curva.

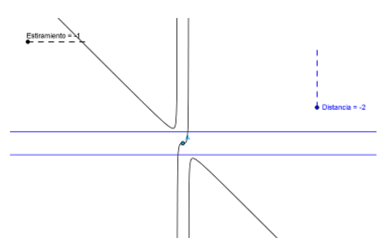


Figura B.21: Estiramiento sobre una curva.

3. Observa las figuras:

   Después de observar la figura 1, 2, 3 y 4 se puede afirmar que secuencialmente:

   a) Se realizaron estiramientos horizontales sobre la curva
   b) Se realizó un zoom de acercamiento
   c) Se realizaron estiramientos verticales sobre la curva
   d) Se realizó un zoom de alejamiento
   e) Ninguna de las anteriores

4. Observa la curva 1 y 2

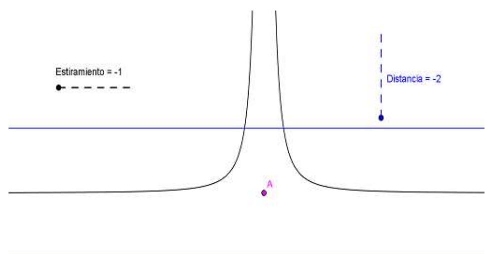


Figura B.22: Curva simétrica.

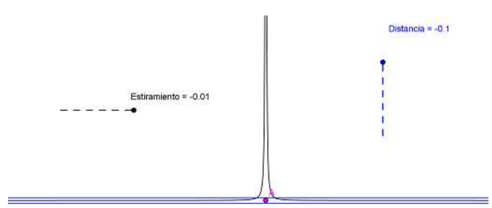


Figura B.23: Curva simétrica.

   Después de observar la curva 1 y 2 se puede garantizar que:

   a) La curva no es controlable n el punto a
   b) La curva es controlable en el punto a
   c) La curva es controlable
   d) La curva no es controlable
   e) Ninguna de las anteriores

5. Observa la figura 1, 2, 3 y 4

   Después de observar la figura 1, 2, 3 y 4 se puede garantizar que:

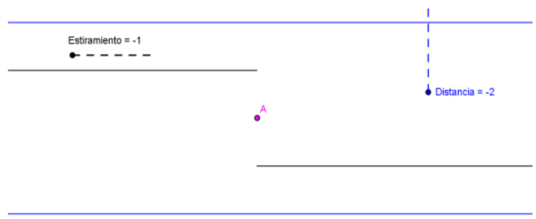


Figura B.24: Estiramiento.

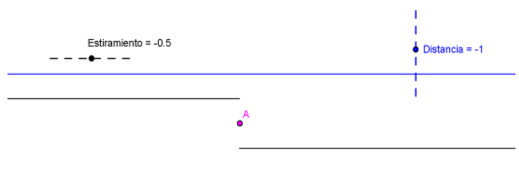


Figura B.25: Estiramiento.

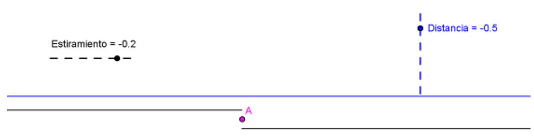


Figura B.26: Estiramiento.

Figura B.27: Estiramiento.

a) La curva no es controlable en el punto A
b) La curva es controlable en el punto A
c) La curva es controlable
d) La curva no es controlable
e) Ninguna de las anteriores

6. Para determinar si una curva está controlada localmente se debe:

a) Hacer estiramientos horizontales
b) Hacer estiramientos verticales
c) Hacer estiramientos horizontales y verticales
d) Hacer estiramientos horizontales y un zoom
e) . Ninguna de las anteriores

7. El control local se refiere al control respecto a:

a) Un punto
b) Un segmento
c) Una recta
d) Una curva
e) Ninguna de las anteriores

8. Cuando una curva está controlada localmente se puede decir que:

a) Al estirarla horizontalmente se convierte en recta
b) Al estirarla horizontalmente se rompe
c) Al estirarla horizontalmente se divide en dos partes
d) Al estirarla horizontalmente queda dentro de las rectas horizontales
e) Ninguna de las anteriores

B.4. Fase 4: Orientación libre

Respetado estudiante, estas invitado a realizar las siguientes actividades de forma consciente y espontánea. Puedes responder con sinceridad de acuerdo a tus razonamientos.

B.4.1. Actividad 1

Objetivo: Explicar cuando una curva es o no controlable en un punto y argumentar la respuesta.

Instrucciones

Antes de comenzar con el desarrollo de la actividad es necesario que leas cuidadosamente todas las instrucciones y que efectúes cuidadosamente cada uno de los pasos.

Respecto a las Aplicaciones 29 y 30

1. El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en varias partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también está dividido en varias partes, a medida que haces click en este deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las siguientes subdivisiones.
2. En cada una de las aplicaciones regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las siguientes subdivisiones.
3. Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y última subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las subdivisiones.
4. Después de mover el deslizador estiramiento hasta la última subdivisión y el deslizador distancia hasta la última subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto. Analiza que sucede con la curva después de haber llevado los deslizadores hasta las últimas subdivisiones y después de haber realizado un zoom de acercamiento.

Desarrollo de la actividad

1. Responde respecto a la Aplicación 29

    a) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

    ____

    ____

b) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la última subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la última subdivisión? Explica tu respuesta.

c) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la última subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la última subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

d) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la última subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la última subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

e) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto A?

f) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras.

2. Responde respecto a la Aplicación 30

a) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

b) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la última subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la última subdivisión? Explica tu respuesta.

c) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la última subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la última subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

d) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la última subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la última subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

e) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto A?

f) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras.

____

____

3. ¿Qué diferencias encuentras entre las curvas vistas de las Aplicaciones 29 y 30? Explica ampliamente tu respuesta

   ____

   ____

   ____

   ____

4. ¿Ambas curvas están controladas en el punto A? Si o no ¿Porqué?

   ____

   ____

   ____

   ____

B.4.2. Actividad 2

Objetivo: Establecer relaciones y jerarquías sobre los conceptos relacionados con el control local.

Desarrollo de la actividad

1. Completa las oraciones con las siguientes palabras: Plana, Vertical, trozo de curva, Infinitos, controlable, curva, trozo, horizontales, puntos, estiramiento (Pueden haber palabras repetidas en las respuestas).

   - El estiramiento de la curva se puede ver como una separación de los ______________ de la curva.
   - El ______________ es una separación entre puntos.
   - El ______________ es un cambio en la escala del eje x, dejando fija la escala del eje y.
   - Cuando se estira horizontalmente la ______________ no se rompe, los puntos se separan horizontalmente y la curva se va quedando plana.
   - Como la curva está formada por puntos y al estirarla no se rompe, quiere decir que hay ______________ puntos.

- El distanciamiento _______________ entre los dos puntos no varía al estirar la curva.
- Para determinar la existencia de un _______________ controlado, se realizan un conjunto finito de deformaciones hasta poder observar las intersecciones con las rectas.
- La existencia o no del _______________ controlado, solamente depende de la forma de la curva y no de las rectas horizontales.
- Una curva es _______________ en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas _______________ equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pasa por el punto.
- Si al estirar un trozo de curva tiende a quedarse _______________, la curva será controlable.

2. Realiza un mapa conceptual donde utilices los siguientes términos: Curva, Rectas, Trozo controlado, punto, Controlable, No controlable, zoom y estiramiento.
3. Defina cada uno de los conceptos del punto 2.

B.4.3. Actividad 3

Objetivo: Justificar el carácter local del concepto.

Instrucciones

Antes de comenzar con el desarrollo de la actividad es necesario que leas cuidadosamente todas las instrucciones y que efectúes cuidadosamente cada uno de los pasos.

Respecto a la Aplicación 31.

1. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento, distancia 1 y distancia y los puntos A y B.
2. El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que haces click en este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia1 y distancia también están dividido en seis partes, a medida que haces click en estos deslizadores de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A y al punto B.

   Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia1 en cada una de las seis subdivisiones. Presiona click en el deslizador estiramiento en la primera subdivisión y en el deslizador distancia en cada una de las seis subdivisiones.

3. Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y presiona click en el deslizador estiramiento en la segunda subdivisión y en el deslizador distancia1 y distancia en cada una de las seis subdivisiones.

4. Regresa los deslizadores estiramiento, distancia1 y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo presionando click en el deslizador estiramiento en la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y en el deslizador distancia1 y distancia en cada una de las seis subdivisiones.

5. Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia1 hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

6. Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto B y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

Responde respecto a la Aplicación 31

1. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

2. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto B? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

3. ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia1 se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

4. ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

5. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia1 se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

6. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

7. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia1 se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

8. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto B dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

9. ¿Qué puedes concluir? Explica con tus palabras que sucede con la curva en el punto A.

10. ¿Consideras que esta curva está controlada en el punto A?

11. ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras.

12. ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras.

13. ¿Qué puedes concluir? Explica con tus palabras que sucede con la curva en el punto B.

14. ¿Consideras que esta curva está controlada en el punto B?

15. ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras.

16. ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras.

B.4.4. Actividad 4

Objetivo: Proponer nuevas ideas para sustentar y explicar cuando una curva es y no es controlable en un punto.

1. Diseña una actividad donde desees explicar la diferencia entre curvas controlables y No controlables en un punto y la expones en clase.

2. Algunos elementos matemáticos han sido la fuente de inspiración para el diseño de muchas estructuras, algunas de ellas se han basado en expresiones controlables, sin embargo, existen contextos donde se tiene la necesidad de utilizar expresiones no controlables.

   Además, es erróneo afirmar que una curva deje de ser controlable cuando se rompe puesto que este concepto se caracteriza por su aspecto local.

   A continuación podrás observar en las siguientes fotos diferentes estructuras que han sido inspiradas en curvas controlables y no controlables.

Figura B.28: Puente 1

Figura B.29: Puente 2

Figura B.30: Puente 3

Figura B.31: Puente 4

Figura B.32: Puente 5

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué es importante que algunas estructuras representen expresiones controlables?

b) ¿Por qué es importante que algunas estructuras representen expresiones NO controlables?

c) ¿Cuál es la importancia del concepto de control local en situaciones de la vida cotidiana?

3. Realiza un mapa conceptual donde explicites lo realizado en las actividades anteriores haciendo referencia a la diferencia que existe entre curvas controlables y no controlables localmente.

B.4.5. Actividad 5

Objetivo: Analizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en la fase 4 en relación con la comprensión del concepto de continuidad local.

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. El control de un curva es de carácter:

    a) lobal

    b) Local

    c) Numérico

    d) Algebraico

    e) Ninguna de las anteriores

2. De la siguientes afirmaciones la única cierta es:

    a) Todas las curvas son controladas localmente

    b) Algunas curvas son controladas localmente

    c) Una curva no controlable localmente se rompe

    d) Se obtiene el mismo control local observando diferentes puntos de la curva

    e) Ninguna de las anteriores

3. Se puede garantizar que una curva es controlable en un punto porque:

a) La curva está definida en el punto

b) La curva No está definida en el punto

c) Si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes al punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el punto

d) Si comenzando por cualquier par de rectas verticales equidistantes al punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el punto

e) Ninguna de las anteriores

4. Observa las siguientes gráficas:

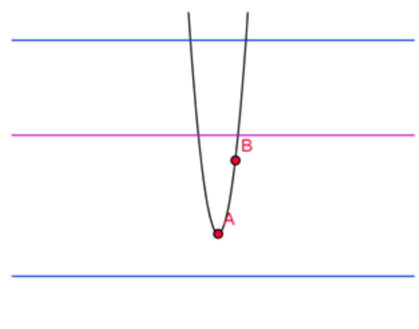


Figura B.33: Parábola inicial

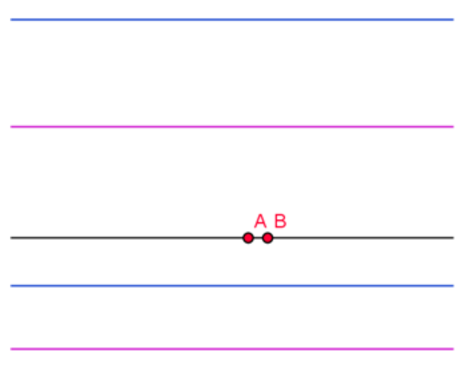


Figura B.34: Estiramiento - parábola

Después de observar la figura 1, 2 y 3 se puede garantizar que:

a) La curva es controlable en el punto A

b) La curva No es controlable en el punto A

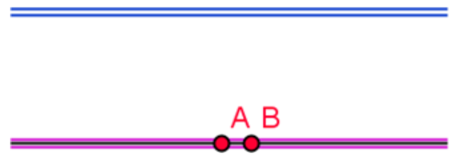


Figura B.35: Mayor estiramiento parábola

c) La curva es controlable en el punto A y B

d) Con la información suministrada no se puede garantizar que la curva sea controlable en un punto

e) Ninguna de las anteriores

5. Si observas dos puntos diferentes en una curva, un punto A y un punto B y si se tiene que la curva es controlable en el punto A, se puede garantizar que:

    a) La curva es controlable en el punto B

    b) La curva no es controlable en el punto B

    c) No existe control local

    d) El punto A y B coinciden

    e) Ninguna de las anteriores

6. La existencia o No del trozo controlado es una propiedad de:

    a) La curva

    b) El punto sobre la curva

    c) Las rectas horizontales

    d) Las rectas verticales

    e) Ninguna de las anteriores

7. Una curva es controlable en un punto si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar

    a) Un punto

    b) Un trozo de curva controlable que pase por el punto

    c) En segmento

    d) Un trozo de curva controlable

    e) Ninguna de las anteriores

8. Al estirar un trozo de curva si tiende a quedarse plana la curva estará:

   a) Controlada en el punto
   b) No controlada en el punto
   c) Definida en el punto
   d) No definida en el punto
   e) Ninguna de las anteriores

8. La palabra más adecuada para el espacio de la oración: "La controlabilidad de una curva indica su ____________ en ese punto" es:

   a) Forma
   b) Tamaño
   c) Continuidad
   d) Definición
   e) Ninguna de las anteriores

B.5. Fase 5: Información

Respetado estudiante, estas invitado a realizar las siguientes actividades de forma consciente y espontánea. Puedes responder con sinceridad de acuerdo a tus razonamientos.

B.5.1. Actividad 1

Objetivo: Diferenciar y utilizar adecuadamente los elementos geométricos: Punto, recta y curva

Desarrollo de la actividad

1. 1. Observa las gráficas y responde:

   a) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre las rectas a y b? ____________________________
   b) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre los planos c y d? ____________________________

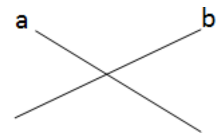


Figura B.36: Intersección entre rectas

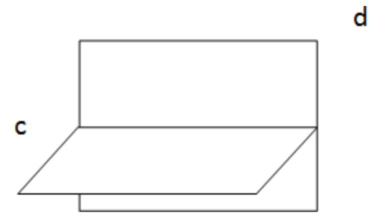


Figura B.37: Intersección entre planos

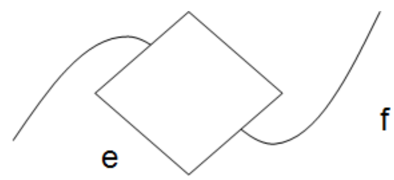


Figura B.38: Intersección cuadrado-curva

c) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre el plano e y la curva f? ________________________________

d) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre el plano g y la recta h? ________________________________

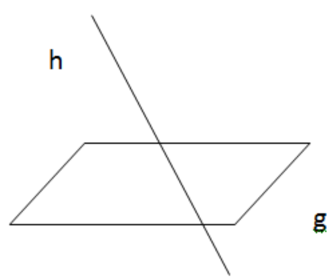


Figura B.39: Intersección plano-recta

e) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre el plano i y la recta j? ________________________________

f) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre la circunferencia k y la línea l? __________________________

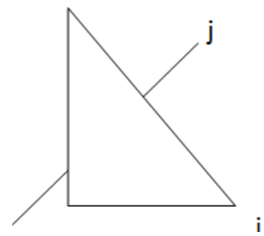


Figura B.40: Intersección Triángulo - recta

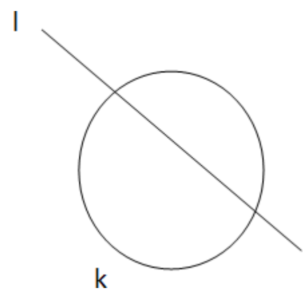


Figura B.41: Intersección Circunferencia-recta

g) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre la curva m y la línea n? ____________________

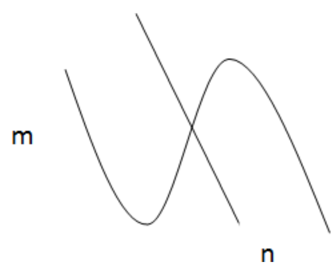


Figura B.42: Intersección curva-recta

h) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre el plano o y la línea p? ____________________

i) ¿Qué elemento o que elementos geométricos puede representar la intersección entre la elipse q y la recta r? ____________________

2. Completa las siguientes oraciones:

   a) Si deslizas la recta a sobre la recta b, en cada una de las situaciones obtenidas la intersección puede ser:

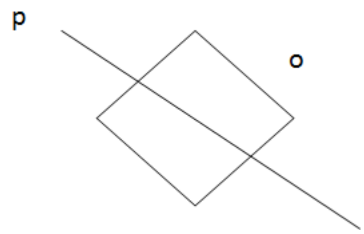


Figura B.43: Intersección cuadrado.-recta

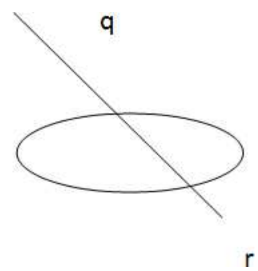


Figura B.44: Intersección elipse-recta

____

____

b) Si deslizas la recta l sobre la circunferencia k en cada una de las situaciones obtenidas la intersección puede ser:

____

____

c) Si deslizas la curva f sobre el rombo e en cada una de las situaciones obtenidas la intersección puede ser:

____

____

d) Si deslizas la recta j sobre el triángulo i en cada una de las situaciones obtenidas la intersección puede ser:

____

____

B.5.2. Actividad 2

Objetivo: Comprender que el concepto de continuidad local se visualiza a partir del control local empezando con distanciamientos horizontales.

1. Observa las siguientes figuras.

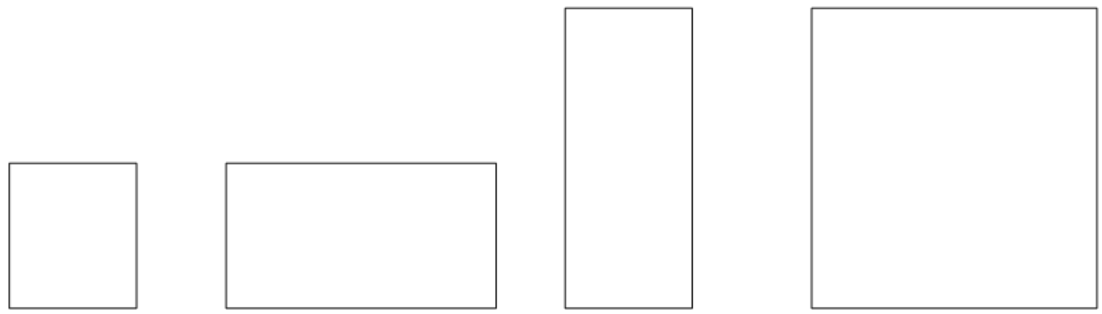


Figura B.45: Figura planas

   a) A partir de la figura 1 que proceso harías para obtener la figura 2 (Estiramientos horizontales, estiramientos verticales o estiramientos verticales y horizontales) Explica tu respuesta.

   b) A partir de la figura 1 que proceso harías para obtener la figura 3 (Estiramientos horizontales, estiramientos verticales o estiramientos verticales y horizontales) Explica tu respuesta.

   c) A partir de la figura 1 que proceso harías para obtener la figura 4 (Estiramientos horizontales, estiramientos verticales o estiramientos verticales y horizontales) Explica tu respuesta.

2. Instrucciones

   Antes de comenzar con el desarrollo de la actividad es necesario que leas todas las instrucciones y que efectúes cuidadosamente cada uno de los pasos.

   Respecto a las aplicaciones

a) Observa la curva, las rectas horizontales, el punto A y los deslizadores estiramiento y distancia.

b) El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que mueves el deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia también están divididos en seis partes, a medida que mueves el deslizador de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A.

c) Mueve el deslizador estiramiento hasta la primera subdivisión y el deslizador distancia hasta cada una de las seis subdivisiones.

d) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial y mueve el deslizador estiramiento hasta la segunda subdivisión y en el deslizador distancia hasta cada una de las seis subdivisiones.

e) Regresa los deslizadores estiramiento y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo moviendo el deslizador estiramiento hasta la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta cada una de las seis subdivisiones.

f) Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

Responde respecto a la Aplicación 32.

a) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

____

____

____

____

b) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

____

____

____

____

c) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

d) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

e) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto A? Explica con tus palabras

f) ¿Cómo determinas que una curva está controlada en un punto sobre ella? Explica con tus palabras

g) Recuerda que los distanciamientos verticales están determinados por las rectas horizontales y los distanciamientos horizontales están determinados por las rectas verticales.

1) ¿El control local se visualiza empezando con distanciamientos horizontales o verticales? Explica tu respuesta.

B.5.3. Actividad 3

Objetivo: Reconocer que para saber si un trozo de curva es controlado parte de los estiramientos horizontales.

Instrucciones

Antes de comenzar con el desarrollo de la actividad, debes seguir las mismas instrucciones que realizaste en la actividad anterior.

Responde respecto a la Aplicación 33.

1. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

2. ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

   ____

   ____

   ____

   ____

4. ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto A? Explica con tus palabras.

   ____

   ____

   ____

   ____

5. ¿Cómo determinas que una curva está controlada en un punto sobre ella? Explica con tus palabras

____

____

____

____

6. Recuerda que los estiramientos horizontales implican que la curva se estira horizontalmente como si fuera una goma ideal donde se estira la curva sin llegar a romperse.

   a) ¿El trozo de curva controlado depende de los estiramientos horizontales? Si o no. Explica tu respuesta

   ____

   ____

   ____

   ____

B.5.4. Actividad 4

Objetivo: Reconocer el carácter local del concepto de continuidad

Desarrollo de la actividad Respecto a la Aplicación 34.

1. Observa la curva, las rectas horizontales, los deslizadores estiramiento, distancia 1 y distancia y los puntos A, B y C.
2. El deslizador estiramiento que aparece en la pantalla está dividido en seis partes, a medida que mueves este deslizador de izquierda a derecha la curva se estira. El deslizador distancia1 y distancia también están divididos en seis partes, a medida que mueves el deslizador distancia1 de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto A y a medida que mueves el deslizador distancia de abajo hacia arriba las rectas horizontales se acercan al punto B.
3. Mueve el deslizador estiramiento hasta la primera subdivisión y el deslizador distancia1 hasta cada una de las seis subdivisiones.
4. Mueve el deslizador estiramiento hasta la primera subdivisión y el deslizador distancia hasta cada una de las seis subdivisiones.

5. Regresa los deslizadores estiramiento, distancia y distancia1 a la posición inicial y mueve el deslizador estiramiento hasta la segunda subdivisión y el deslizador distancia1 y distancia hasta cada una de las seis subdivisiones.

6. Regresa los deslizadores estiramiento, distancia1 y distancia a la posición inicial. Realiza el proceso reiterativo moviendo el deslizador estiramiento hasta la tercera, cuarta, quinta y sexta subdivisión y el deslizador distancia1 y distancia hasta cada una de las seis subdivisiones.

7. Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia1 hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto A y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

8. Después de mover el deslizador estiramiento hasta la sexta subdivisión y el deslizador distancia hasta la sexta subdivisión concentra tu mirada en el punto B y realiza un zoom de acercamiento sobre el punto.

   Respecto a las Aplicación 34.

   a) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

   b) ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto B? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

   c) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia1 se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

   ____

d) ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

e) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia1 se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

f) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

g) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia1 se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

h) Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto B dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

i) ¿Qué puedes concluir? Explica con tus palabras que sucede con la curva en el punto A.

j) . ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto A?

k) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras.

l) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras.

m) ¿Qué puedes concluir? Explica con tus palabras que sucede con la curva en el punto B.

n) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto B?

ñ) ¿Qué significa que una curva este controlada localmente? Explica con tus palabras.

o) ¿Qué significa que una curva no esté controlada localmente? Explica con tus palabras.

p) Si aplicas el mismo proceso del punto B respecto al punto C ¿Qué puedes concluir?

q) ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto C? Explica con tus palabras

B.5.5. Actividad 5

Objetivo: Diferencia curvas controlables y no controlables localmente.

Instrucciones

Antes de comenzar con el desarrollo de la actividad, debes seguir las mismas instrucciones que realizaste para la aplicación 32 y 33.

Responde respecto a la Aplicación 35.

1. ¿Qué sucede con la curva a medida que se acercan las rectas horizontales al punto A? Explica tu respuesta.

2. ¿Qué sucede con la curva cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión? Explica tu respuesta.

3. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda la curva dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

4. Cuando el deslizador estiramiento se encuentra en la sexta subdivisión y cuando el deslizador distancia se encuentra en la sexta subdivisión ¿Queda el punto A dentro de las rectas horizontales? Si o no ¿Por qué?

5. ¿Consideras que esta curva se puede controlar en el punto A? Explica con tus palabras

6. ¿Cómo determinas que una curva está controlada en un punto sobre ella? Explica con tus palabras

B.5.6. Actividad 6

Objetivos:

- Definir el concepto de continuidad local en términos de estiramientos horizontales y trozo de curva controlado respecto a un punto.
- Definir el concepto de continuidad local de Cauchy de una función en un punto en términos del mecanismo empleado.

1. Observa con atención la siguiente figura.

   a) Observa las siguientes figuras.

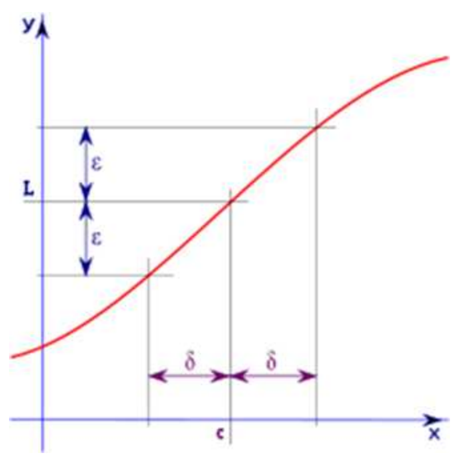


Figura B.46: Definición de Cauchy

Aporte de información

Lee con atención:

- La letra δ significa la distancia que separa las rectas verticales equidistantes del valor c.
- La letra ε significa la distancia que separa las rectas horizontales equidistantes del valor L.
- El punto A se encuentra dentro de la distancia comprendida entre las rectas horizontales y dentro de las rectas verticales.
- La curva que está en rojo representa la función f(x)
- $|f(x) - L|$ representa la distancia vertical que puede ir variando de acuerdo al valor de ε, donde siempre se va a cumplir la condición de que $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $|x - c|$ representa la distancia horizontal que puede ir variando de acuerdo al valor de δ, donde siempre se va a cumplir la condición de que $|x - c| < \delta$.

Analiza la siguiente información

De acuerdo con lo realizado en las actividades donde utilizaste las aplicaciones con el Geogebra se pueden entablar relaciones.

Completa las siguientes expresiones utilizando las palabras (Punto (2 veces), controlable, verticales, horizontales y trozo de curva controlado (2 veces)):

- La distancia vertical que en la figura se representa con ? está determinada por las rectas ____________
- La distancia horizontal que en la figura se representa por ? está determinada por las rectas ____________
- Los puntos de intersección de las rectas horizontales con la curva determinan el ____________
- Cuando se realizan estiramientos sobre la curva y acercamientos de las rectas horizontales al punto fijo se está intentando encontrar el ____________
- Una curva es controlable en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pase por el ____________
- Al estirar un trozo de curva si tiende a quedarse plana la curva será ____________
- La controlabilidad de una curva indica su continuidad en ese ____________

Lee con atención la siguiente definición:

"La función f es continua en c si para cualquier $\varepsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$ "

Llena los espacios en blanco en los siguientes párrafos con las siguientes palabras:

Trozo de curva controlado, $|x - c| < \delta$, curva, vertical, ε, plana, punto, δ, horizontal (2 veces), horizontales, A y |f(x) - L | <ε.

Dado un distanciamiento ____________ que está determinado por ε, es posible encontrar un distanciamiento ____________ determinado por δ que cumpla con la condición de que el punto ____________ quede dentro de dicho distanciamiento vertical y la distancia correspondiente al intervalo ____________.

Para cualquier par de rectas ____________ equidistantes de un punto (aquellas que controlan la distancia vertical) se trata de buscar un ____________ (aquel que determina el distanciamiento horizontal) que pasa por el ____________ (que se encuentra dentro del distanciamiento horizontal). Es decir, con el mecanismo seleccionado si se tiene el trozo de curva controlado, al estirar la ____________, si tiende a quedarse ____________ la curva será controlable en el punto.

Es decir, dado ____________, puede hallarse un ____________ donde siempre que ____________ puede encontrarse que ____________.

2. Elabora un mapa conceptual con lo realizado en las actividades anteriores.

B.5.7. Actividad 7

Objetivo: Analizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en la fase 5 en relación con la comprensión del concepto de continuidad local.

Para cada numeral selecciona la opción correcta.

1. Observa la siguiente figura

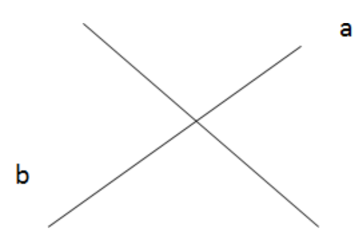


Figura B.47: Intersección entre rectas

La intersección entre las rectas a y b es:

a) Un punto
b) Una recta
c) Una curva
d) Una X
e) Ninguna de la anteriores

2. Observa la siguiente figura

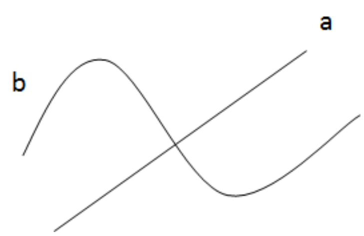


Figura B.48: Intersección entre una curva y una recta

La intersección entre la recta a y la curva b es:

a) Un punto
b) Una recta
c) Una curva
d) Una X
e) Ninguna de la anteriores

3. Observa la siguiente figura.

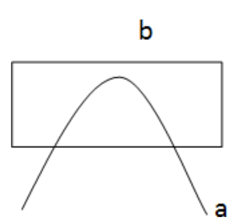


Figura B.49: Intersección curva y un rectángulo

La intersección entre la curva a y el rectángulo b es:

a) Un punto

- *b*) Una recta
- *c*) Una curva
- *d*) Una X
- *e*) Ninguna de la anteriores

4. Observa las siguientes figuras.

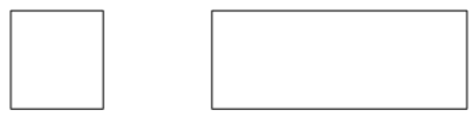


Figura B.50: Cuadrado estirado horizontalmente

La figura 2 respecto a la figura 1 indica que se ha realizado:

- *a*) Un estiramiento vertical
- *b*) Un estiramiento horizontal
- *c*) Un estiramiento en ambos ejes
- *d*) Un zoom de acercamiento
- *e*) Ninguna de las anteriores

5. Para saber si esta curva se puede controlar en el punto A se debe:

- *a*) Realizar estiramientos horizontales y acercar las rectas horizontales al punto A
- *b*) Realizar estiramientos horizontales y un zoom de acercamiento
- *c*) Acercar las rectas horizontales al punto A
- *d*) Con la información suministrada no se puede determinar si la curva se puede controlar en el punto A
- *e*) Ninguna de las anteriores

6. Observa la siguiente gráfica.

Si se tiene que la curva se puede controlar en el punto A, se puede garantizar que:

- *a*) La curva se puede controlar en el punto B
- *b*) la curva se puede controlar en el punto C
- *c*) la curva se puede controlar en el punto B y C

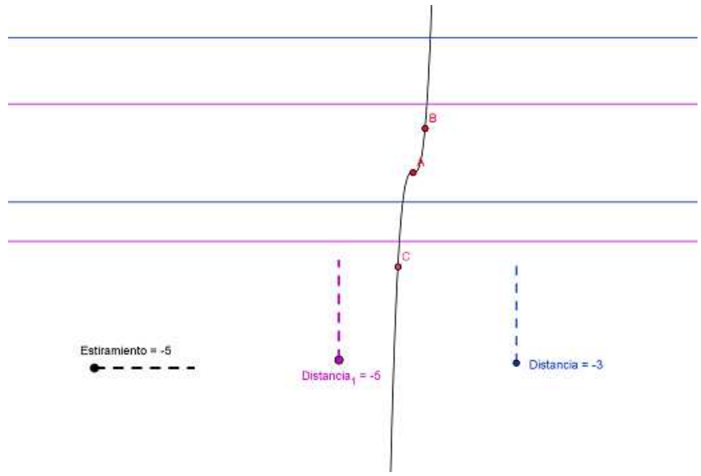


Figura B.51: Control local

d) No se puede garantizar el control en otros puntos

e) Ninguna de las anteriores

7. Cuando una curva es controlable en un punto se puede garantizar que es controlable en:

   a) Otro punto de la curva

   b) En dos puntos de la curva

   c) En todos los puntos de la curva

   d) No se puede garantizar el control en otros puntos

   e) Ninguna de las anteriores

8. Una curva es controlable en un punto, si comenzando por cualquier par de rectas horizontales equidistantes del punto, siempre podremos encontrar un trozo de curva controlable que pasa por:

   a) Dos puntos

   b) Tres puntos

   c) Ningún punto

   d) Un punto

   e) Ninguna de las anteriores

9. Al estirar un trozo de curva si tiende a quedarse plana la curva será:

a) Controlable en el punto
b) Controlable en ningún punto
c) Controlable en dos puntos
d) Controlable en tres puntos
e) Ninguna de las anteriores

10. 10. La controlabilidad de la curva indica su ______________ en ese punto
La palabra que mejor va en el espacio es:

a) Continuidad
b) Estiramiento
c) Control
d) Distancia
e) Ninguna de las anteriores

Bibliografía

[1] Aparicio, E. y Cantoral, R. *Aspectos discursivos y gestuales asociados con la noción de continuidad puntual.* Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa RELIME, 2006.

[2] Barttle, L. *Análisis.* 1982.

[3] Bedoya, J., Esteban, P. y Vasco, E. *Fases de aprendizaje de modelo educativo de van Hiele y su aproximación al concepto de control local* , volume 28. Lecturas Matemáticas, Medellín, 2007.

[4] Bombal, F. *Las series de Fourier y el desarrollo del Análisis en el siglo XIX.* Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

[5] Campillo, P. *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele.* 1999.

[6] Chavéz, H., Salgado, D., Romero, J. y Torres W. *Introducción al Cálculo.* Serie Documentos Especiales, Bogotá, 2004.

[7] Corberan, R. . *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele.* Universidad de Valencia, Madrid, 1994.

[8] Crespo, C. *Acta latinoamericana de Matemática educativa.* 2004.

[9] DeLorenzo, J. *El infinito matemático.* Investigación Ciencia Volumen, 2000.

[10] Hernández, R. *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill, México, 2006.

[11] Hurtado, C. El Conductismo y algunas implicaciones de lo que significa ser conductista hoy. 2006.

[12] Kline, M. *El pensamiento matemático de la atniguedad a nuestros días.* Serie Documentos Especiales, 1992.

[13] Kline, M. *Matemáticas la pérdida de la certidumbre.* México, 2000.

[14] Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. *Cálculo y Geometría Analítica.*

[15] Londoño, R. y Jurado, F. *Diseño de una entrevista socrártica para la construcción del concepto de suma de una serie vía área de figuras planas.* Medellín, 2005.

[16] Meirieu, P. *Aprender, sí. Pero ¿Cómo?* Octaedro, Barcelona, 2002.

[17] Novak, J. y Gowin, D. *Aprendiendo a Aprender.* Ediciones Martínez Roca, Barcelona, 1988.

[18] Okuda, M. y Gomez, C. *Métodos en investigación cualitativa: Triangulación.* Red de Revistas Científica de América Latina y el Caribe, España y Portugal, Bogotá, 2005.

[19] Porcel, E., Ramírez, M. y Caputo, L. *Conocimientos previos sobre Límite funcional y Continuidad en alumnos de un curso de Análisis Matemático de FACENA.* Argentina, 2003.

[20] Romo M., López D. y López I. ¿Eres visual, auditivo o kinestésico? Estilos de Aprendizaje desde la programación Neurolingüística (PNL) . 2010.

[21] Rosas, R. y Sebastián, C. *Piaget, Vigotski y Maturana. Constructivismo a tres voces.* Buenos Aires, 2004.

[22] van Hiele, P. *Structure and Insight, a theory of Mathematics Education.* 1986.

[23] Vasco, E. y Bedoya, J. *Diseño de Módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.* Medellín, 2005.

[24] Zapata, S. y Sucerquia, E. *Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos.* Medellín, 2009.