# Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado

**Diana Patricia Acevedo Vélez**

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Medellín

2011

# Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado

Este trabajo se enmarca en el programa de Maestría en Educación, con énfasis en Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia

**Diana Patricia Acevedo Vélez**

Proyecto de grado para optar al título de Magíster en Educación

Asesores

Dr. Carlos Mario Jaramillo López

Dr. Pedro Vicente Esteban Duarte

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Medellín

2011

*A mi familia, principal fuente de inspiración*
*y motivación para superarme cada día.*
*Especialmente a mi mamá, Miriam Vélez,*
*y a mi papá, Humberto Acevedo,*
*por ser los conductores de mi proyecto de vida*
*y por darme todo su apoyo en los días difíciles;*
*sobre todo por enseñarme que se puede soñar*
*y que esos sueños se pueden cumplir.*

*A Dios por hacer posible este sueño*
*y a Juan Carlos por invitarme a seguir soñando.*

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA**

## Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Carlos Mario Jaramillo López y Pedro Vicente Esteban Duarte (Presidentes del jurado), y los profesores Olga Lucía Zapata Cardona y Felipe Jorge Fernández Hernández, en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación: "*Comprensión del concepto de probabilidad en Estudiantes de Décimo Grado*" presentada por la estudiante **DIANA PATRICIA ACEVEDO VÉLEZ,** de la Sexta Cohorte de la Maestría en Educación, línea Educación Matemática, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO,** por unanimidad, luego la profesora Dora Inés Chaverra Fernández, Coordinadora del Comité de Maestría dio a conocer el resultado.

Al trabajo de investigación que mereciere ser destacado, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

x Meritorio:
Sobresaliente:

Medellín, 13 de junio de 2011

Pedro V. Esteban D.

**CARLOS MARIO JARAMILLO L.**
**Presidente del Jurado**

**PEDRO VICENTE ESTEBAN D.**
**Presidente del Jurado**

**OLGA LUCÍA ZAPATA C.**
**Jurado**

**FELIPE JORGE FERNÁNDEZ H.**
**Jurado**



Ciudad Universitaria: Calle 67 No. 53-108 – Bloque 9, oficina 119
Conmutador: 219 83 32 Ext. 5725 Teléfono: 219 57 25 – Fax: 219 5726
Pagina web: http://ayura.udea.edu.co
Medellín - Colombia

# Agradecimientos

Durante la realización de investigación fueron muchas las personas e instituciones que no sólo me abrieron sus puertas sino que me apoyaron continuamente en la realización de este proyecto personal y académico, por eso considero pertienente, en este corto espacio, darles mis más sinceros agradecimientos, porque detras de todas estas páginas obtenidas con mucho esfuerzo y dedicación no están sólo mis manos sino las de otros que, como yo, ven en la educación un camino para el mejoramiento de la sociedad. Es por ello que agradezco de manera especial: A Dios, que lo permite todo. A los Doctores Pedro Vicente Esteban Duarte y Carlos Mario Jaramillo López, mis asesores, quienes hicieron posible que este trabajo se pudiera llevar a cabo por el compromiso y dedicación asumidos. A los alumnos participantes de la experiencia, que con su disponibilidad, entrega, motivación y cercanía me permitieron la implementación de la estrategia metodológica con resultados muy satisfactorios. A la Universidad de Antioquia y a la Universidad Eafit que, a través del grupo de investigación Educación Matemática e Historia (Udea-Eafit), apoyaron la realización de esta investigación. A todos los docentes del programa de Maestría que nutrieron con sus ideas mi trabajo. A las directivas y compañeros del Colegio San Ignacio de Loyola de Medellín (Ant), por permitir que la propuesta de investigación se llevara a cabo. A mi familia, que con su amor, paciencia y comprensión me ayudaron a lograr esta meta. A Juan Carlos Rodriguez Arroyo, mi novio, que con su paciencia y apoyo incondicional, me acompañó en la realización de este sueño.

# Índice general

# Índice de cuadros

# Índice de figuras

## Resumen

Existe una gran diversidad de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de probabilidad, pero no abundan estudios que abordan los aspectos relativos a su comprensión. El presente trabajo de investigación caracterizó la comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de décimo grado, a través de cuatro niveles propuestos en el marco conceptual de la Enseñanza para la comprensión (EpC). Con el conocimiento de estas características se puede ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que se les presentan cuando se enfrentan a la resolución de problemas de probabilidad. Para llegar a esta caracterización se construyó y aplicó una unidad curricular, basada en el marco de la EpC, la cual contiene estrategias que potencializan el desarrollo de la comprensión, a través de la motivación e interés hacia la solución y construcción de problemas de probabilidad por parte de los estudiantes. Se eligieron cuatro estudiantes para analizar a profundidad su proceso de compresión del concepto de probabilidad. Antes, durante y después del proceso de aplicación de la unidad curricular se produjeron los datos a través de elaboraciones escritas, observaciones y entrevistas que posteriormente fueron analizados usando el sofware Atlas.ti6. Se eligieron cuatro estudiantes para analizar a profundidad su proceso de compresión del concepto de probabilidad, éstos presentaron características distintas en el modo de comprender la probabilidad, incluso presentaron algunas dificultades similares a las mencionadas en otras investigaciones (Fernández, 2001; Barragés y Guisasola, 2002). Los rasgos de la comprensión de cada estudiante sirvieron de referente para la construcción de cuatro matrices en las que se describe cómo un estudiante comprende la probabilidad desde las cuatro dimensiones de la EpC: los contenidos, los métodos usados para resolver situaciones problema de probabilidad, la aplicación de éste concepto en la vida y las formas en que se puede expresar cómo se comprende la probabilidad. Cada una de

estas dimensiones se analizó con base en unas categorías que se anticiparon como descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad y otras que surgieron durante el análisis. Para la Dimensión de Contenido, se encontraron cuatro categorías: (1) Diferenciación entre experimentos aleatorios y deterministas, (2) Relación entre azar y probabilidad, (3) Conceptualización de la probabilidad y (4) Redes conceptuales. La Dimensión de Métodos se analizó desde las categorías: (1) Aplicación de las definiciones subjetivista, clásica y frecuencialista de la probabilidad, (2) Construcción del espacio muestral, (3) Uso de la teoría de conjuntos, (4) Aplicación de las técnicas de conteo y (5) Utilización de axiomas y teoremas. La Dimensión de Propósitos o Praxis se analizó teniendo en cuenta (1) Relación teoría-práctica y (2) Relación práctica- teoría. La Dimensión de Formas de comunicación se analizó teniendo en cuenta (1) Manejo del lenguaje probabilístico, (2) Comunicación de la solución de problemas, (3) Interacción con el público y (4) Manejo de medios. En cada una de estas categorías los estudiantes presentaron distintas formas de conceptualizar, razonar, proceder o expresar, por lo cual se hizo una descripción en cuatro niveles de comprensión: ingenuo, principiante, aprendiz y experto. A través de la utilización de unidades curriculares como la presentada en esta investigación se puede lograr que un estudiante avance de un nivel de comprensión a otro.

**Palabras Claves: Enseñanza para la Comprensión, Dimensiones de la comprensión, Elementos de la comprensión, probabilidad**.

# Capítulo 1

# Antecedentes y planteamiento del problema

En este capítulo se describe la revisión de literatura que se hizo acerca del concepto de probabilidad, su enseñanza y su aprendizaje. Además, se dan las características generales de tres marcos teóricos sobre la comprensión: Modelo de Pirie y Kieren, Modelo Educativo de Van Hiele y Enseñanza para la Comprensión. También, se presenta el problema de investigación y los objetivos de la misma.

## 1.1. Antecedentes

En esta sección se exponen algunas ideas sobre el concepto de probabilidad a través de la historia, se presentan algunas ideas de investigaciones recientes sobre las razones para enseñar la probabilidad y sobre el aprendizaje y la enseñanza de este concepto. Finalmente, se explican tres modelos que fundamentan la comprensión: Modelo de Pirie y Kieren, Modelo Educativo de van Hiele y Enseñanza para la Comprensión.

### 1.1.1. El concepto de probabilidad a través de la historia

Algunas cosas en el mundo ocurren de acuerdo con las leyes naturales, las cuales se cumplen inevitablemente. Las monedas que se arrojan al aire han de caer por la fuerza de la gravedad. Todos los hombres son mortales porque la muerte es una necesidad biológica y así sucesivamente. Pero en realidad se sabe poco acerca de muchos de los fenómenos que nos rodean. Por ejemplo, se puede predecir el movimiento de los planetas alejados millones de kilómetros en el espacio, pero nadie puede pronosticar el resultado de arrojar una moneda o un dado. Este tipo de eventos se le atribuyen al azar (Kasner y Newman, 2007). Pero, ¿qué es el azar? Es tal vez una forma de explicar nuestra ignorancia. Sin embargo, existe una luz que puede ayudar a descifrar el tan oscuro reino del azar, porque en medio del desorden que lo acompaña existe un cierto orden, una regularidad y es por esto que a eventos de naturaleza aleatoria se les puede asignar diversos niveles de probabilidad. La teoría de la probabilidad se ocupa precisamente de las leyes del azar. Pero, ¿qué es la probabilidad? Muchas filósofos y matemáticos han intentado definirla. Entre muchas opiniones y teorías contradictorias a continuación se presentan tres interpretaciones principales, a través de un recuento histórico.

Las primeras ideas intuitivas sobre el concepto de probabilidad surgen desde la antigüedad por la práctica de juegos de azar. Tanto niños como adultos que no han estudiado probabilidades, usan expresiones corrientes para cuantificar los sucesos aleatorios y expresar su grado de creencia en ellos. Estas primeras ideas, que surgen ligadas a las apuestas, la ganancia en un juego y el concepto de juego equitativo, no se precisaron hasta que se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos. Esta cuantificación inicia con Pascal y Fermat en el siglo XVII, quienes resuelven algunos problemas relacionados con juegos de azar, pero aún no se logra tener una definición de probabilidad.

En 1814 aparece la definición de Laplace, conocida como definición clásica, que expresa que en una experiencia aleatoria en la que todos los resultados son igualmente probables (equiprobables), la probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables a dicho suceso dividido por el número de casos posibles de la experiencia. Esta definición a priori de la probabilidad, resolvía algunos problemas de la época, pero se encontró que muchos sucesos en la naturaleza no son necesariamente equiprobables. Ni siquiera los mismos dados son equiprobables, como afirma Campos (2004), porque la perfección del material con el que están hechos es casi imposible, por lo cual, la probabilidad de que cayera 5 no es $1/6$ sino un valor aproximado a este número. Además, la definición es circular. La hipótesis de equiprobabilidad que Laplace enuncia como 'resultados igualmente probables' exige una aplicación previa del concepto de probabilidad. Por tanto, se trata de una definición que hace uso del propio concepto que se está tratando de definir, lo que puede originar paradojas. Sin embargo, es una definición que en la actualidad es de bastante utilidad en el cálculo de probabilidades.

Según Kasner y Newman (2007), una concepción más utilizable y ampliamente acogida, que genera menos dificultades que la concepción subjetivista, la cual se comentará más adelante, es la frecuencialista o interpretación estadística, puesto que ha permitido el auge de la aplicabilidad de la probabilidad en la física, la astronomía, la biología, las ciencias sociales y los negocios. La probabilidad sería entonces la frecuencia relativa con la que ocurre un evento entre un cierto conjunto de eventos. De esta manera, la probabilidad se expresa como un cociente bien definido que se puede determinar hipotéticamente. La hipótesis puede verificarse racionalmente con base en el conocimiento de las causas mecánicas de los fenómenos o experimentalmente. En este último caso, se repite el experimento una cantidad grande de veces y luego se hace el cociente entre el número de casos en que ocurrió el evento al que se le está hallando la probabilidad y el total de veces que se hizo el experimento, ese cociente es el valor asociado a la probabilidad. Pero es un valor hipotético que con experimentos posteriores se reforzará la creencia en él o se abandonará. Dado que la prueba de la hipótesis no es lógica sino experimental siempre está sujeta a nuevos experimentos y, así lo que se puede demostrar es que en la práctica real la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad predicha, es decir, que la experiencia confirma las suposiciones.

Matemáticamente esta idea frecuencialista de la probabilidad se podría definir como el límite cuando la cantidad de repeticiones del experimento tiende a infinito de las frecuencias relativas favorables a un suceso (Fernández, 2007). Así que cuando se dice que la probabilidad de que caiga 5 en un dado no cargado es $1/6$, lo que significa es que si lanzamos muchas veces el dado, la frecuencia relativa de la cantidad de 5 que caen con respecto al total de lanzamientos se encuentra en 'la vecindad' de $1/6$. Una de las dificultades de esta concepción es que parte del concepto de límite matemático que es usado para procesos infinitos y los procesos experimentales seguidos para la aplicación de esta definición son finitos. Además, un experimento aunque produzca mil veces seguidas el mismo resultado no prueba que los siguientes sean consistentes con los anteriores. Esta idea frecuencialista de la probabilidad es atribuida a Jacob Bernoulli, pero igual fue apoyada por otros matemáticos como Cournot, Ellis y perfeccionada en el siglo XX por von Mises y Reichenbach (Torretti, 2003).

Bajo esta concepción de la probabilidad se resolvieron muchos problemas a nivel demográfico sobre nacimientos o mortalidad, también se hicieron cálculos sobre proyecciones de vida de las personas para determinar las cuotas de los seguros de vida de tal manera que fuera rentable su venta; así mismo, tuvo gran influencia en la astronomía, en la meteorología, teoría cinética de los gases y en la biología (Fernández, 2007). Con esto se evidencia cómo las prácticas matemáticas van siendo permeadas por la forma como se van construyendo los conceptos a través de la historia, por esos signos e instrumentos que se usen y la cultura en la que se desarrollen (Benis S., 2006).

Pero después de todas las virtudes que se le han encontrado a la concepción frecuencialista de la probabilidad, vale la pena identificar otras debilidades. En primer lugar, no es posible calcular la probabilidad, sino dar una estimación de ella, puesto que el número de ensayos es finito. En segundo lugar, existen situaciones en las que no es posible ejecutar el experimento infinitas veces bajo las mismas condiciones. Y por último, como indican Borovcnik, Bentz y Kapadia (1991, citados por Barragués y Guisasola, 2006), el concepto de convergencia que subyace a esta concepción de probabilidad no es el de la convergencia de una sucesión de las frecuencias relativas, sino que se basa en el propio concepto de probabilidad, lo que lleva de nuevo a una definición circular como en el caso de la definición clásica.

Para resolver este problema, Bruno de Finetti y Frank Ramsey proponen una visión personalista o subjetivista de la probabilidad:

> ... una aseveración objetiva es verdadera o falsa, mas no probable. La probabilidad es un atributo de nuestras opiniones subjetivas sobre aquellos asuntos acerca de los cuales no podemos o no queremos hacer una aseveración objetiva. El valor numérico de las probabilidades mide el grado de confianza que cada opinión inspira, ahora y aquí, a quien la profesa (Torretti, 2003, p. 14).

Otro defensor de esta concepción de la probabilidad fue Augustus de Morgan, el célebre lógico y matemático. Él pensaba que la probabilidad se refería a un estado de ánimo, al grado de certidumbre o incertidumbre que caracteriza a nuestras opiniones. Pero si la probabilidad ha de tratarse matemáticamente, debe proporcionar mejores métodos de medición material que la mera intensidad de las creencias. En la mayor parte de los casos no puede asignarse un valor numérico a la relación de probabilidad. Cuando algo no puede ocurrir su probabilidad es cero, si es seguro que ocurra, es uno. Toda probabilidad de un evento tendrá que estar entre cero y uno pero no se dispone de recursos matemáticos para medir la intensidad de una creencia y si los psicólogos pudieran construir un instrumento que midiera dicha intensidad no sería suficiente debido a que las opiniones de las personas frente a un mismo hecho difieren mucho, lo que es evidente para unos, puede ser menos convincente para otros, porque están determinadas por nuestras emociones y prejuicios. Desde esta perspectiva, la probabilidad es un grado de creencia personal, es un juicio acerca de un fenómeno que es impredecible y que no se presta a repetición indefinida. Por eso, desde esta perspectiva, el valor de la probabilidad depende del sujeto que la determine, así que un mismo evento puede tener distintos valores de probabilidad.

Finalmente, en búsqueda de una fundamentación matemática de la probabilidad, Kolmogorov en 1933 propone un sistema axiomático tomando como herramientas algunos conceptos matemáticos como el de conjunto, el de función medible y las técnicas de integración modernas. Él define la probabilidad como una función P que se define en un conjunto de medida 1 ($\Omega$) donde a cada $\sigma$-álgebra $A$, subconjunto de $\Omega$, representa un suceso elemental que satisface: incluye a $\Omega$ y a $\Phi$, es cerrado por complementación y por uniones numerables, se le asigna un valor en el intervalo $[0, 1]$. A la terna $(\Omega, A, P)$ se le denomina espacio de probabilidades. Además plantea una serie de axiomas que caracterizan esta definición de probabilidad (Chung, 1983) y un conjunto de teoremas que indican como la probabilidad se obtiene a partir de otras probabilidades.

Desde entonces, la probabilidad es un modelo matemático que se puede usar para describir e interpretar los fenómenos aleatorios, y su aplicación es útil en casi todos los campos de la actividad humana, como la ciencia, la técnica, la política y la gestión.

Algunos de estos axiomas y teoremas que fueron abordados durante el trabajo de campo de esta investigación fueron:

Primer axioma: La probabilidad de un suceso A es un número real mayor o igual que 0. $P(A) \geq 0$

Segundo axioma: La probabilidad del total, $\Omega$, es igual a 1, es decir, $P(\Omega) = 1$

Tercer axioma: Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos, disjuntos o de intersección vacía dos a dos), entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Según este axioma, se puede calcular la probabilidad de un suceso compuesto de varias alternativas mutuamente excluyentes sumando las probabilidades de sus componentes.

Teoremas:

1. $P(\Phi) = 0$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A') = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ para eventos independientes.

Para el caso de esta investigación se pretende abordar en profundidad con los estudiantes la concepción clásica, la frecuencialista y la subjetivista, aunque se hará mención de la axiomática sin detenerse en esta en virtud de algunas propuestas curriculares y recomendaciones para la enseñanza de la probabilidad, que buscan un mayor equilibrio entre el enfoque clásico, frecuencial y subjetivo (por ejemplo, Godino et al., 1996; Shaughnessy et al., 2004, citados por Insunza, Gastélum y Alvarez, 2009) en la enseñanza secundaria para evitar el uso a veces excesivo de técnicas combinatorias y conceptos formales, los cuales son más propios de un curso de probabilidad a nivel universitario. Dichas propuestas recomiendan una metodología de enseñanza basada en la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios, con lo cual se busca, según Inzunsa et al (2009), que el estudiante "obtenga datos reales o simulados, que haga predicciones acerca de los posibles resultados, que compare sus predicciones con los resultados experimentales y finalmente que los valide mediante un modelo teórico apropiado".

### 1.1.2. Razones para enseñar la probabilidad

Desde los últimos años, muchos investigadores (Batanero, 2000; Batanero y Godino, 2005; Educación Estadística en la Matemática Escolar, 2006; Zapata-Cardona, 2008; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997) han insistido en incluir la estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de las escuelas en todo el mundo, debido a la utilidad que estas temáticas representan en la cotidianidad, así como en el proceso de comprensión de temáticas avanzadas de la ciencia. En primer lugar, por la necesidad de que las personas adquieran una cultura estadística y probabilística que les permita comunicarse en una sociedad basada en la información. En segundo lugar, por su "papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar experimentos acordes con la realidad, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre." (Batanero y Díaz, 2005, p. 1). Hay que resaltar, además, su valor instrumental en otras ramas del saber ajenas a la matemática, la importancia de adquirir un conocimiento estocástico básico en muchas profesiones y el importante papel de la estadística y la probabilidad en el desarrollo de un razonamiento crítico ("Educación Estadística en la Matemática Escolar", 2006).

Esta insistencia sobre la importancia de la enseñanza de conceptos de estadística y probabilidad, ha surgido de las distintas comunidades de investigación que sobre educación estadística se han gestado desde hace más de tres décadas (Educación Estadística en la Matemática Escolar, 2006) y cuyo interés no es exclusivo de la comunidad de educadores matemáticos, sino que, dicha preocupación, por la didáctica y por la formación de profesionales y usuarios de la estadística y la probabilidad, ha surgido también de los estadísticos y los propios psicólogos que se han interesado en el razonamiento estocástico (Batanero, 2000). Su preocupación ha sido la de incrementar y mejorar la enseñanza de la estadística y de la probabilidad en las escuelas, debido a que los estudiantes, que terminan su educación básica, no consiguen la cultura necesaria para enfrentarse a asuntos tan simples como comprender la información estadística que aparece en los distintos medios de comunicación (Educación Estadística en la Matemática Escolar, 2006) o colaborar de forma consciente con los datos necesarios para distintas investigaciones del gobierno u otras instituciones.

Actualmente, en los currículos de matemáticas hay una tendencia a favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, que ha estado presente en la ciencia, la cultura y aún en las forma de pensar cotidiana durante este siglo. En el caso del currículo colombiano, desde la renovación curricular iniciada en 1975 en la administración de López Michelsen, se dio una revisión a todos los programas de matemáticas, generando una nueva orientación, llamada por Carlos Eduardo Vasco Uribe[1] 'enfoque de sistemas', en este enfoque para los programas de matemáticas se le da igual importancia al sistema numérico, al geométrico, al métrico, a los datos y al algebraico y analítico (MEN, 1998) que llevan cada uno al desarrollo de un tipo de pensamiento. Respecto a los sistemas de datos y el pensamiento aleatorio, Vasco (2005) afirma que hoy día se hace verdaderamente importante para los estudiantes

> el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que apa-

[1]Delegado como asesor del Ministerio de Educación Nacional para la reestructuración de las matemáticas escolares.

> rezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos. (p. 65)

Esta idea de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, al igual que a los demás pensamientos, se encuentra hoy descrita en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Matemáticas. En ellos se propone que desde la básica primaria hasta finalizar el bachillerato, los estudiantes deben ir avanzando en la comprensión de la probabilidad a través del análisis de datos reales, la experimentación, las simulaciones y la resolución de problemas en situaciones de incertidumbre no sólo dentro de la matemática sino también en otros campos del saber.

A pesar de estos argumentos sobre la importancia de comprender los conceptos de la estadística y la probabilidad, aún no se le ha dado el espacio que se merece en los programas de la educación básica y media, porque en algunos casos, su enseñanza ha quedado relegada a una unidad de estudio en la clase de matemáticas, que incluso muchas veces ni se logra impartir, por falta de tiempo en las instituciones educativas, interés o conocimiento por parte de los profesores (Educación Estadística en la Matemática Escolar, 2006). Y cuando se enseña, en algunos casos, los profesores se han dedicado a informar a los estudiantes sobre cómo se tabula información, cómo se construyen gráficos, cómo se calculan medidas y probabilidades, por nombrar algunas cuestiones, pero no se ha tenido en cuenta el papel fundamental que desempeña la estadística y la probabilidad en la investigación en ciencias, en el desarrollo del razonamiento estadístico y de un pensamiento crítico, y en la resolución de problemas cotidianos susceptibles de ser formalizados.

La enseñanza de la probabilidad debería estar orientada hacia la comprensión de los conceptos y procedimientos más que a su reproducción. Así, la construcción de tablas y gráficos, el cálculo de las probabilidades, entre otros, puede tener sentido para los estudiantes y de esta forma logren su comprensión. Además, permitiría que los estudiantes comparen, interpreten, analicen, infieran y tomen decisiones frente a distintas situaciones. Esto implica que la enseñanza de la estadística y la probabilidad debería fundamentarse en aplicaciones y análisis de datos reales, como una manera de conseguir que los estudiantes comprendan lo que se les quiere enseñar.

### 1.1.3. Investigaciones actuales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad

Muchas de las investigaciones actuales han revelado que la comprensión del concepto de probabilidad, por parte de los estudiantes, viene acompañada de dificultades de diversa índole. Y otras se han centrado en las prácticas que los maestros asumen o deberían asumir cuando abordan el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de probabilidad, para lograr en los estudiantes un alto nivel de comprensión.

En relación a las dificultades del aprendizaje de la probabilidad, Batanero (2005) presenta un estudio que analiza los distintos significados del concepto de probabilidad (intuitivo, Laplaciano, frecuencial, subjetivo y matemático) a través de la historia y su relación con los errores[2] en que incurren los estudiantes al resolver problemas relacionados con el concepto de probabilidad.

Otras investigaciones en este mismo sentido (Fernández, 2001; Barragués y Guisasola, 2002), encuentran que, la mayoría de los estudiantes presentan ideas alternativas a las formales sobre el concepto de probabilidad, aún después de la instrucción, y existe poca diferencia entre estudiantes que han estudiado la probabilidad de los que no lo han hecho, al resolver problemas de este tipo.

[2] Interpretados como conflictos semióticos.

Algunos autores como Batanero y Godino (2005) afirman que dar el paso de lo intuitivo a lo formal se les dificulta a los estudiantes debido a una visión determinista del mundo, que se ha formado desde la misma matemática y otras disciplinas. Además de las características particulares de los fenómenos aleatorios, como su carácter de 'operación irreversible': esa imposibilidad de comprobar un resultado, como si ocurre con las operaciones aritméticas, por ejemplo. De otro lado, el análisis de un experimento aleatorio va más allá del resultado inmediato y por tanto requiere la consideración de todos los sucesos elementales posibles, es decir del espacio muestral del experimento.

Algunas de estas dificultades se enmarcan en lo que Kahnema y Tversky denominan Heurísticos y sesgos al hacer investigación sobre los juicios y la toma de decisiones. Los Heurísticos son estrategias o procedimientos intuitivos basados en procesos de memoria bastante automáticos como lo son los cálculos de similitudes o recuperación de casos de memoria (Gabucio, Domingo, Lichtenstein, Limón, Minervino, Romo y Tubau, 2005) y los sesgos son errores que ocurren en forma sistemática, es decir, el error está condicionado por algo distinto al azar. A continuación se presentan los errores o heurísticos que aparecen de manera más frecuente en los estudiantes (Scholz, 1991; Muñoz, 1998; Saénz, 1998; Serrano et al., 1996, 1998, citados por Barragués y Guisasola, 2002):

*Heurístico de la accesibilidad:* consiste en estimar la probabilidad de un suceso según la facilidad con que se recuerden ejemplos de su ocurrencia. Un error típico de accesibilidad es emitir juicios o valoraciones a la luz de lo primero que pasa por la cabeza.

*Heurístico de representatividad:* consiste en asignar probabilidades altas a los sucesos que parecen ser prototípicos de una población y bajas a los que parecen no serlo. Dos errores típicos que surgen de esta heurística son la insensibilidad al tamaño de la muestra y las concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias. En el primer caso, se tiende a pensar que cualquier muestra representa la población. En el segundo caso, se tiende a considerar que las secuencias que tienen un orden establecido no pueden ser aleatorias, por ejemplo la idea de que el número de lotería 1234 es poco probable que salga.

*El sesgo de equiprobabilidad:* consiste en la creencia de los sujetos de que, en cualquier experimento aleatorio, existe equiprobabilidad de los sucesos.

*El sesgo determinista:* se da cuando se utilizan razonamientos causales para estimar probabilidades, esto es, se buscan explicaciones deterministas al azar.

*Enfoque del resultado aislado:* consiste en estimar la probabilidad de un evento dependiendo de si éste ocurrirá o no la próxima vez que se repita el experimento.

Aunque muchas investigaciones hayan considerado las dificultades que tienen los estudiantes con relación al concepto de probabilidad, según Zapata-Cardona (2008), poco se ha dicho sobre las implicaciones pedagógicas de aquellas dificultades y cómo los profesores podrían ayudar a sus estudiantes a superarlas. Esta investigación pretende conocer cómo los estudiantes de último grado de bachillerato comprenden el concepto de probabilidad como una herramienta teórica que sirva como fundamento para ayudarles a superar las dificultades que se les presentan cuando se enfrentan a él.

En la literatura revisada sobre la enseñanza, se encuentran algunas propuestas didácticas para el desarrollo de los contenidos mínimos a nivel de conceptos, procedimientos y actitudes en los cursos de estadística y probabilidad en España (Checa, 1998). También Batanero y Díaz (2005) proponen, en este sentido, un trabajo por proyectos como estrategia para el desarrollo de las clases. Insunza et al. (2009) desarrollaron un software para favorecer el aprendizaje y razonamiento probabilístico desde una perspectiva frecuencialista. Además, Batanero (2003) plantea las simulaciones en los experimentos aleatorios como un instrumento que ayude a los estudiantes a explorar y descubrir conceptos y principios relacionados con el azar y la probabilidad.

Por otro lado, desde mi experiencia como docente de estadística y probabilidad durante más de cuatro años, me he percatado de que la comprensión que adquieren algunos estudiantes del concepto de probabilidad después de haberlo estudiado, es intuitiva, es decir, se guían más por sus creencias que por los conceptos y procedimientos estudiados en clase. Otros tantos, aplican dichos procedimientos a cualquier tipo de problema, sin tener en cuenta la diversidad de situaciones que se pueden presentar y por tanto la diversidad de estrategias para resolverlas.

En conclusión, aunque en la actualidad muchas investigaciones se han enfocado en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, pocas se han preocupado por analizar los procesos que siguen los estudiantes para la comprensión de este concepto. Con esta investigación se buscó ampliar la teoría sobre la comprensión del concepto de probabilidad desde la mirada de los niveles de comprensión propuestos por la EpC. El aporte de esta investigación fue en dos direcciones, por un lado nutre el campo de aplicación del marco conceptual de la EpC en el caso particular del concepto de probabilidad y por otro, es un aporte teórico que servirá de apoyo a los docentes para tener algunas ideas sobre cómo comprenden los estudiantes el concepto de probabilidad. Desde este punto, generar estrategias de aula que promuevan dicha comprensión y con esto ayudar a los estudiantes a superar algunas dificultades que se encuentran cuando se enfrentan a resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad.

### 1.1.4. Algunas teorías sobre la comprensión

El objeto de estudio de esta investigación es la comprensión del concepto de probabilidad. Este proceso podría ser estudiado desde distintos enfoques teóricos, aquí se expondrán algunos de ellos y se argumentarán las razones por las cuales se eligió la EpC.

#### 1.1.4.1. Modelo de Pirie y Kieren

Este es un modelo sobre el crecimiento de la comprensión, que por su carácter dinámico permite resaltar la importancia de los procesos individuales, de los procesos históricos y de las interrelaciones de los individuos en el proceso de comprensión de conceptos matemáticos. En esencia, este modelo considera la comprensión como un elemento orgánico, inestable y retrogresivo, un proceso de crecimiento interminable, completo, dinámico y estratificado pero no lineal. El modelo de crecimiento de la comprensión de Pirie y Kieren rechaza la noción evolutiva de la comprensión como una función monótona creciente y más bien la cosideran como un proceso dinámico de organización y reorganización (Meel, 2003).

La definición inicial de comprensión matemática del modelo de Pirie y Kieren surgió a partir de la definición constructivista de Glasersfeld. Ellos describieron la comprensión matemática de la siguiente manera:

> La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra

> restringido por los que están fuera de él. (Pirie y Kieren 1989, citado por Meel, 2003)

Usando esta definición, concibieron su modelo de crecimiento de la comprensión compuesto por ocho niveles potenciales: *Primitive Knowing, Image Making, Image Having, Property Noticing, Formalising, Observing, Structuring, Inventising*, que se pueden traducir como Conocimento primitivo, Creación de la imagen, Estableciendo imagen, Deducción de propiedades, Formalización, Observación, Estructuración y Creación o Invención, la siguiente figura, muestra la concepción del modelo de Pirie y Kieren, el cual comienza por el primer nivel potencial Primitive Knowing o PK (Rendón, 2009).

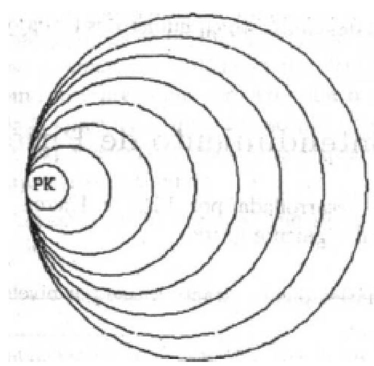



Figura 1.1: Concepción del Modelo de Crecimiento de la Comprensión de Pirie y Kirien.

Pirie y Kirien conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática como poseedor de 7 niveles potenciales. El proceso de llegar a comprender inicia en el centro del modelo llamado *conocimiento primitivo.* Primitivo se refiere al hecho de ser un punto inicial, no a ser un nivel inferior en las matemáticas. El contenido central es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje.

En el segundo nivel, llamado *creación de imagen*, el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores que transmiten el significado de cualquier imagen mental. Las acciones que se realizan en este estrato involucran desarrollar las conexiones entre los referentes y los símbolos, mientras el estudiante emplea el lenguaje de fracción para analizar y registrar las acciones.

En el tercer nivel, llamado *comprensión de la imagen*, las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares.

En el cuarto nivel, llamado *observación de la propiedad*, el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen; se nota en el estudiante una madurez por realizar distintas conexiones entre diversas imágenes mentales y la capacidad para iniciar un proceso de construcción de conceptos que pueden evolucionar en la definición de características particulares.

En el quinto nivel de la comprensión, llamado *formalización*, el estudiante es capaz de conocer las propiedades y extraer de ellas las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este nivel, se genera una producción de definiciones matemáticas completas, aunque posiblemente el lengaje utilizado no sea un lenguaje matemático formal.

El siguiente nivel se llama *la observación*, este permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. En este nivel el estudiante puede producir realizaciones relacionadas con la cognición sobre el concepto formalizado.

Por último, el séptimo nivel se llama *la estructuración*, en él el estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. El anillo exterior del modelo de Pirie y Kieren se denomina *invención*, porque es en este cuando el sujeto adquiere la capacidad para liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este nivel, la comprensión matemática del estudiante es infinita, imaginativa y llega más allá de la estructura actual.

La descripción anterior caracteriza un concepto particular; las acciones específicas y verbalizaciones serán trazadas a la luz del modelo general. Si el estudiante no demuestra tal complemento en el proceso y en la acción de forma orientada, se considera que no ha alcanzado el nivel de comprensión (Vasco y Bedoya, 2005).

#### 1.1.4.2. El Modelo Educativo de Van Hiele

A finales de los años 50, los esposos Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele - Geldof, trabajaban como profesores de matemáticas en la enseñanza media. A partir de su experiencia docente y mientras estudiaban algunos de los trabajos de Piaget, Pierre van Hiele formuló su sistema de niveles de razonamiento en geometría de modo que se pudiese solventar el salto conceptual que se presentaba entre los vocabularios utilizados por los docentes y los reconocidos por los estudiantes.

La idea básica del modelo, expresado en forma sencilla es: El aprendizaje de la geometría se hace pasando por niveles de pensamiento. Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características: No se puede alcanzar el nivel $n$ sin haber pasado por nivel anterior $n-1$, o sea, el progreso de los alumnos a través de los niveles es invariante. En cada nivel de pensamiento, lo que era implícito, en el nivel siguiente se vuelve explicito. Cada nivel tiene su lenguaje utilizado (símbolos lingüísticos) y su significatividad de los contenidos (conexión de estos símbolos dotándolos de significado). Dos estudiantes con distinto nivel no pueden entenderse.

El modelo abarca tres aspectos: uno descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento de los individuos y se puede valorar el progreso de éstos. Otro instructivo, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento. La idea central del componente descriptivo es que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, los estudiantes, pasan por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos y hacer demostraciones. La componente instructiva del modelo, se basa en las fases de aprendizaje, estas constituyen unas directrices para fomentar el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes y su paso de un nivel de razonamiento al siguiente, mediante actividades y problemas particulares para cada fase. El tercer aspecto es el insight, que se da cuando el estudiante ha comprendido y ha logrado razonar de manera correcta.

Acontinuación se explica e qué consiste la percepción (insight), los niveles de pensamiento y las fases de aprendizaje.

**El insight.** Los cambios que presenta un alumno en su forma de razonamiento, frente a un concepto específico, a lo largo de una intervención pedagógica, se pueden observar y analizar a través del aumento progresivo en el lenguaje empleado por él, y a su vez, en la forma como manifiesta, analiza y emplea el nuevo conocimiento adquirido en nuevas situaciones, esto último, según van Hiele, se denomina Insight. (Esteban, citado por Vasco y Bedoya, 2005).

**Los niveles de razonamiento.** Según Vasco y Bedoya (2005) los niveles de razonamiento, parte descriptiva del modelo, permiten ubicar a un alumno en alguno de ellos, de acuerdo con la comprensión que tenga frente a un concepto matemático. Van Hiele propone que un alumno pasa por cinco (5) niveles de razonamiento en la estructuración de un concepto matemático en su red de relaciones, describiéndolos para la geometría. Estos niveles son:

1. Nivel 0 Predescriptivo: Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global. Pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras.

2. Nivel I. De reconocimiento visual. Los alumnos analizan las propiedades de las figuras. Pero no relacionan explícitamente las figuras con sus propiedades.

3. Nivel II. De análisis. Los alumnos relacionan las figuras con sus propiedades. Pero no organizan los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.

4. Nivel III. De clasificación y relación. Los alumnos organizan sucesiones de enunciados que les permiten deducir un enunciado a partir de otro. Pero no reconocen la necesidad de rigor y no alcanzan a comprender las relaciones entre varios sistemas deductivos.

5. Nivel IV. De deducción formal. Los alumnos analizan diversos sistemas deductivos con cierto grado de rigurosidad; comprenden ahora las propiedades de las que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

Van Hiele describe el paso de un alumno, de un nivel al siguiente, como una función del aprendizaje: la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tiene lugar bajo la influencia del programa de enseñanza y de aprendizaje. La transición implica el aprendizaje de un nuevo lenguaje.

**Las fases de aprendizaje.** Las fases de aprendizaje tienen como fin, ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, y básicamente constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Las fases de aprendizaje son cinco y se describen en la siguiente figura:

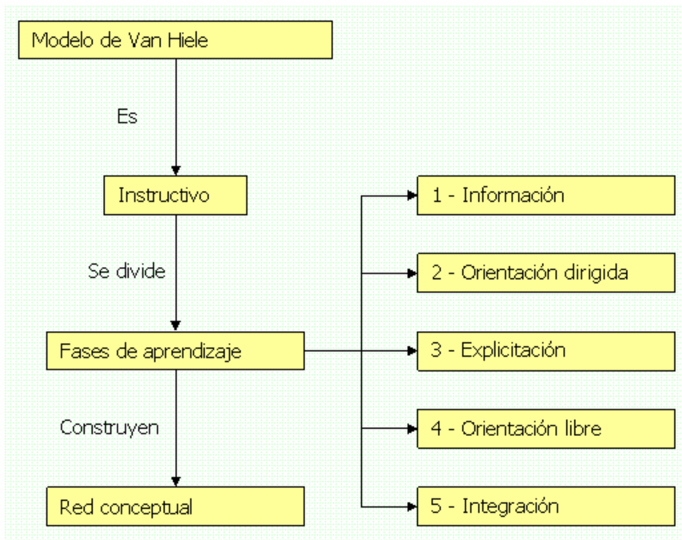



Figura 1.2: Diagrama de las Fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele.

"Completadas estas cinco fases, los alumnos habrán adquirido una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior, completándola y reformulándola, y a partir de ese momento, el alumno ha progresado a un nuevo nivel de razonamiento" (Rendón, 2009, p. 40).

#### 1.1.4.3. La Enseñanza para la Comprensión

En 1988, Howard Gardner, David Perkins y Vito Perrone, docentes de la Escuela de Educación de la Universidad de Harvard, comenzaron a reflexionar sobre ¿qué significa comprender? ¿De qué manera desarrollamos la comprensión en nuestros estudiantes? ¿Cómo averiguar hasta qué punto han comprendido alguna temática o tópico? ¿Cómo apoyar el desarrollo de la comprensión? Y para dar respuesta a estos interrogantes propusieron en 1990 un proyecto de investigación llamado el Proyecto Cero, que tuvo como finalidad desarrollar un Enfoque de Enseñanza para la Comprensión (EpC) basado en investigaciones y sometido a prueba en las aulas.

Pero algunos de nosotros podría decir que enseñar con miras hacia la comprensión no es una idea nueva. Prácticamente todos los maestros enseñamos para que nuestros estudiantes comprendan, entre otras cosas. Para ello, utilizamos distintas estrategias, procuramos explicar las cosas con claridad, proponemos situaciones abiertas que permitan la discusión, planificamos experimentos; sin embargo, descubrimos que nuestros estudiantes comprenden mucho menos de lo que esperábamos y más aún, no hacen la conexión de lo aprendido en la escuela con sus actividades por fuera de ella. (Blythe, T. y col, 1999).

Pero, ¿qué impide que nuestros estudiantes comprendan? Tal vez la comprensión compite con otras tantas metas en nuestras agendas; tal vez "las escuelas donde trabajamos y los exámenes para los cuales preparamos a nuestros estudiantes ofrecen en general muy poco apoyo a la enseñanza para la comprensión" (Blythe y Perkins, 1999, p. 37) o no sabemos qué currículos, qué actividades y qué evaluaciones apoyan realmente la comprensión. El Proyecto de Enseñanza para la Comprensión propone que se privilegie la comprensión sobre cualquier otra actividad y proporciona estrategias de planificación y enseñanza que permita a los docentes responder a la pregunta ¿cómo fomentar la comprensión de mis estudiantes? (Blythe y Perkins, 1999).

Pero antes de explicar en qué consiste el Enfoque de la Enseñanza para la Comprensión es necesario aclarar que la visión de comprensión desde este enfoque se hace desde la perspectiva del desempeño, que dice que "la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como, explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera". (Blythe y Perkins, 1999, p. 39). Lo que implica una visión de la comprensión vinculada con el 'desempeño', es decir, la comprensión de un estudiante se evidencia según sus acciones. Estas acciones o desempeños deben demostrar lo que sabe y además aplicarlo de forma novedosa. Por eso, cuando se quiere apreciar la comprensión de un estudiante en un momento determinado, se le pide que "haga algo que ponga su comprensión en juego, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, armando un producto" (Perkins, 1999, p. 71). Lo que los estudiantes respondan frente a estas actividades no sólo demuestra su nivel de comprensión sino que los puede hacer avanzar. Al enfrentarse a nuevos desafíos llegan a progresar en su comprensión.

El marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión consta de dos parte: Las Dimensiones de la comprensión y Los Elementos de la comprensión. Las Dimensiones describen cuatro puntos desde donde debe ser analizada la comprensión de los estudiantes y los Elementos presentan las pautas para la construcción de las prácticas de aula.

**Las Dimensiones de la comprensión**

*Redes conceptuales*: los docentes deben analizar antes de iniciar su práctica qué comprende el estudiante o qué se quiere que llegue a comprender.

*Métodos de producción del conocimiento*: deben describir y evaluar cómo los estudiantes construyen y usan su conocimiento según la disciplina. Conocer métodos propios del área. En este punto el docente se pregunta cómo se comprende en la disciplina que se enseña.

*Praxis*: Se busca las posibilidades de relacionar teoría y práctica, es decir, posibilidad de relacionar un conocimiento con la vida. El docente debe analizar para qué se comprende lo que se quiere que los estudiantes comprendan.

*Formas de comunicación*: el docente analiza las distintas maneras en que los estudiantes comprenden y la forma en que lo comunican de tal forma que otros también puedan comprender. (Jaramillo y Bermudez, 1997)

Cada una de estas dimensiones puede ser desarrollada por los estudiantes en distinta medida, por lo cual se generan cuatro niveles de comprensión en cada una de las Dimensiones: comprensión ingenua, de principiante, de aprendiz y de experto.

**Elementos de la comprensión**

*Tópicos generativos*: son temas centrales para una o más disciplinas, por lo cual se puede establecer múltiples relaciones entre unos temas y otros, inclusive con la vida del estudiante.

*Metas de comprensión*: según Blythe y Perkins (1999) se definen como "enunciados o preguntas donde se expresan cuáles son las cosas más importantes que deben comprender los alumnos en una unidad o en un curso." (p. 45). Esas cosas pueden ser conceptos, procedimientos o habilidades.

*Desempeños de comprensión*: para Blythe y Perkins (1999) son "actividades que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del estudiante en lo referente a las metas de comprensión." (p. 45). Este es el espacio en el que los estudiantes reconfiguran, expanden, extrapolan y aplican lo que saben en distintas situaciones.

*Valoración continua y evaluación final:* proceso por el cual los estudiantes obtienen retroalimentación de sus desempeños por parte del docente y de sus compañeros.

Esta investigación tendrá como marco teórico la EpC. Este un marco que además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, brinda a los profesores herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión, desde el abordaje de un concepto hasta el de un curso completo. Esta es una característica que ni el Modelo de Pirie y Kieren ni el Modelo Educativo de Van Hiele posee, puesto que en estos dos abordajes de la comprensión están más interesados en mostrar lo que pasa a nivel cognitivo en el estudiante cuando comprende un concepto que en asuntos curriculares, de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación como lo hace la EpC. Esto se debe a que la EpC surge de la vivencia de los profesores en el aula, entonces la teoría y la práctica están estrechamente ligadas pero claramente diferenciadas, por lo que la teoría ilumina la práctica y la práctica nutre la teoría. Además, no se pretende que los profesores copien un modelo sino que exploren y reflexionen sobre sus propios contextos, realidades, intereses y necesidades para transformarlas. También ofrece los elementos teóricos necesarios para hacer una descripción del proceso de comprensión del concepto de probabilidad a través de cuatro niveles de comprensión.

Este marco conceptual es de carácter general más no es específico de un saber disciplinar, como es el caso de las matemáticas, sin embargo, algunas de sus aplicaciones han sido en este campo, en temáticas como la razón de cambio (Rendón, 2009), las pruebas y conjeturas en matemáticas (Durango, 2009) y La integración entre pedagogía y tecnología en la enseñanza del Cálculo de varias variables (Rojas, 2010).

## 1.2. Pregunta de Investigación

A pesar de la diversidad de investigaciones existentes sobre el concepto de probabilidad no se han encontrado estudios que aborden los aspectos relativos a la caracterización de la comprensión del concepto de probabilidad a través de niveles de comprensión propuestos por la EpC, así que, para hacer un aporte en este aspecto, este trabajo abordó la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden el concepto de probabilidad un grupo de estudiantes de décimo grado?

Una respuesta a esta pregunta permitió caracterizar la comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de décimo grado, que se construyó desde el trabajo de campo. Cuando se logra conocer las características fundamentales del proceso de comprensión del concepto de probabilidad, se puede ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que se les presentan cuando se enfrentan a la resolución de problemas de probabilidad. Para ello se recorrió una ruta metodológica en la que se construyó una unidad curricular, basada en el marco de la EpC. Este enfoque facilita la construcción de estrategias, que potencializan el desarrollo de la comprensión, a través de la generación de centros de motivación e interés hacia el aprendizaje de la probabilidad por parte de los estudiantes, puesto que, en ellos, pueden encontrar relación con su vida. Luego se analizaron, de manera detallada, los procesos seguidos por ellos en la comprensión del concepto para lograr su caracterización.

## 1.3. Objeto de Investigación

El objeto de estudio de esta investigación es la comprensión del concepto de probabilidad. Para analizarlo, se presentó en el apartado 1.1.1 la naturaleza dual del concepto de probabilidad como creencia y como evidencia aceptable, de la cual se desprenden las distintas definiciones que se han presentado a través de la historia. Luego, se determinó lo que se entiende por comprensión dentro de esta investigación en el apartado 1.1.4.3; a partir de estos elementos se determinaron los siguientes objetivos.

## 1.4. Objetivos

Para responder a la pregunta de esta investigación se hizo necesario fijar el horizonte conceptual desde el que se abordó el proceso de investigación, el cual está constituido por un objetivo general que se fue logrando en la medida en que se cumplieron unos objetivos específicos.

### 1.4.1. General

Caracterizar la comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de décimo grado.

### 1.4.2. Específicos

1. Construir descriptores sobre la comprensión del concepto de probabilidad, de acuerdo a los cuatro niveles de comprensión en correspondencia con el marco de la EpC.

2. Describir de qué manera un estudiante puede avanzar de un nivel a otro en el proceso de comprensión del concepto de probabilidad.

La revisión de literatura presentada en este capítulo, motivó la realización de esta investigación sobre la comprensión del concepto de probabilidad y permitió delimitar la pregunta de investigación, el objeto de investigación y los objetivos.

# Capítulo 2

# Marco teórico

En esta sección se hace un desarrollo teórico del marco conceptual que guió esta investigación; sus elementos y dimensiones, y se explica la utilidad que tuvieron los mapas conceptuales en el desarrollo de la investigación.

## 2.1. Enseñanza para la Comprensión

A continuación se describen de manera detallada cada uno de los aspectos que constituyen el marco de la EpC. Éstos fueron los referentes teóricos con los cuales se construyó y desarrolló el trabajo de campo de esta investigación y sirvieron de base para el análisis de los datos.

### 2.1.1. Elementos de la comprensión

Los cuatro elementos de la comprensión: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños, valoración continua y evaluación final, constituyen la pauta para la planificación de la enseñanza, no se trata de una secuencia paso a paso sino que cada uno se centra en un aspecto particular de la práctica docente y se interrelacionan y actúan paralelamente.

#### 2.1.1.1. Tópicos generativos

Son temas centrales para una o más disciplinas, por lo cual se pueden establecer múltiples relaciones entre unos temas y otros, inclusive con la vida del estudiante. Estos tópicos son llamativos e interesantes para los estudiantes porque tienen el poder para generar conocimientos, relaciones y necesidad de indagar sobre su naturaleza. Además, deben ser interesantes para el profesor. Le deben generar pasión, asombro y curiosidad, que a su vez les puede servir como modelo de compromiso intelectual a sus alumnos.

El profesor debe hacerse el siguiente cuestionamiento para la determinación de los tópicos generativos: ¿qué quiero que mis alumnos comprendan?

#### 2.1.1.2. Metas de comprensión

Según Blythe y Perkins. (1999) se definen como "... enunciados o preguntas donde se expresan cuáles son las cosas más importantes que deben comprender los alumnos en una unidad o en un curso" (p. 45). Esas cosas pueden ser conceptos, procedimientos o habilidades. El profesor debe hacer en este punto una rigurosa selección temática puesto que lo que importa en este enfoque es la calidad de los aprendizajes y no la cantidad, por lo cual su consigna es "menos es más". Los profesores deben hacerse las siguientes preguntas: ¿qué es lo que quiero que mis estudiantes comprendan? ¿por qué es importante que lo comprendan? Es esencial que los estudiantes conozcan estas metas para que sepan hacia dónde se conducen en su proceso de aprendizaje.

Las metas de comprensión son de dos tipos: a corto plazo que corresponden a una unidad, y, a largo plazo, denominados también hilos conductores que incumben al contenido de un curso. Las primeras se usan como propósitos específicos que describen cuánto queremos que los estudiantes comprendan de un tópico generativo. Las segundas se relacionan con los procesos de desarrollo más generales que se pretende promover en los estudiantes.

#### 2.1.1.3. Desempeños de comprensión

Son todas las actividades que los estudiantes hacen para desarrollar y demostrar su comprensión. Involucra a los estudiantes en un trabajo que hace que progresen en las metas de comprensión especificadas para el curso o unidad curricular, a través de desafíos suficientemente grandes como para ampliar sus conocimientos. Los desempeños de comprensión deben diseñarse en secuencias reiterativas, es decir, de manera que los estudiantes puedan revisar constantemente un desempeño hasta alcanzar la comprensión buscada. Estas actividades van más allá de la memorización y la rutina, sin desmeritar la importancia que estos elementos tienen en el aprendizaje. Ofrecen la posibilidad de utilizar múltiples estilos de aprendizaje y expresión. Brindan el espacio para que los estudiantes apliquen lo que saben en distintas situaciones. Además, ofrecen la posibilidad, tanto al profesor como al estudiante, de constatar el desarrollo de la comprensión a lo largo del tiempo en situaciones innovadoras y retadoras. Existen tres tipos de desempeños de comprensión: los preliminares, los de investigación guiada y los proyectos finales de síntesis.

Los *desempeños de comprensión preliminares* tienen la finalidad de explorar las cuestiones antes de darles la información. Por lo general, aparecen al inicio de la unidad curricular y sirven para ubicar al estudiante en el dominio de un tópico generativo, viendo la relación de éste con sus intereses y experiencias previas, lo que permite al docente conocer lo que los estudiantes ya saben y lo que están interesados en aprender. Permitiendo que los estudiantes pongan a prueba sus comprensiones anteriores y se enfrenten a algunos fenómenos o enigmas que presenta el tópico generativo. Los *desempeños de investigación guiada* sirven para que los estudiantes se centren en problemas y cuestiones específicas, relacionadas con el tópico generativo y las metas de comprensión. Durante el inicio de la unidad o curso, los desempeños pueden ser relativamente simples y a medida que los estudiantes desarrollan la comprensión de metas preliminares pueden comprometerse en formas más complejas de investigación. La guía del profesor ayuda a los estudiantes a aplicar conceptos y métodos disciplinares, a integrar sus conocimientos y a poner en práctica una comprensión cada vez más compleja y avanzada.

Los *proyectos finales de síntesis* les exigen a los estudiantes integrar las distintas comprensiones desarrolladas en los desempeños previos y por ende, mostrar con claridad el dominio que tienen los estudiantes de las metas de comprensión establecidas.En este elemento los profesores deben hacerse la pregunta ¿qué deben hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión?

#### 2.1.1.4. Valoración continua y evaluación final

Proceso por el cual los estudiantes obtienen retroalimentación de sus desempeños por parte del profesor y de sus compañeros. La valoración continua y la evaluación final consta de dos componentes: establecer unos criterios de evaluación de cada desempeño que deben ser conocidos por los estudiantes antes de iniciar dichos desempeños, y proporcionar una retroalimentación continua a los estudiantes que les permita mejorar sus desempeños. La valoración continua y evaluación final refuerzan a la vez que evalúan la comprensión.

En este proceso de valoración continua se usará el portafolio del estudiante, como una estrategia evaluativa que posibilita tanto al estudiante como al docente concientizarse y reflexionar sobre su proceso de comprensión del concepto de probabilidad. Este consiste en una carpeta en la que el estudiante organizará sistemáticamente las evidencias de su proceso de comprensión y podrá revisar los progresos respecto de las metas de comprensión, según sus desempeños.

### 2.1.2. Dimensiones de la comprensión

Las dimensiones son ideas generales sobre las cualidades de la comprensión en cualquier disciplina. En la EpC se determinan cuatro Dimensiones de la Comprensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación.

#### 2.1.2.1. Contenido

En esta dimensión se evalúa el nivel hasta el cual los estudiantes han trascendido sus ideas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual pueden usar con flexibilidad las relaciones entre los distintos conceptos que han adquirido. Así que en esta dimensión el docente debe hacerse dos preguntas fundamentales:

> ¿En qué medida los desempeños de los alumnos demuestran que las teorías probadas y los conceptos del dominio han transformado sus ideas intuitivas? ¿En qué medida pueden razonar los alumnos dentro de redes conceptuales ricamente organizadas moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalizaciones? (Boix-Mansilla y Gardner, 1999, p. 231).

Las posibles respuestas a estas preguntas conllevan a la evaluación del nivel hasta el cual han avanzado los estudiantes en su dimensión de contenidos.

#### 2.1.2.2. Métodos

Evalúa la capacidad de los estudiantes para guardar un sano escepticismo hacia sus creencias y hacia el conocimiento presentado desde distintas fuentes. Además, de valorar en qué medida los estudiantes utilizan métodos apropiados para construir y validar argumentos, de manera similar a como actúan los expertos en la disciplina que se está estudiando.

En esta dimensión se reconoce que el conocimiento ha sufrido un proceso de construcción según criterios debatidos públicamente por personas ilustradas en los dominios respectivos.

#### 2.1.2.3. Propósitos

Esta dimensión evalúa la capacidad de los estudiantes para reconocer las cuestiones esenciales, los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento; para tomar una posición personal frente a lo que aprenden, para usar el conocimiento en múltiples situaciones del contexto escolar, de otras disciplinas y de su propio contexto social, pero también conocer las consecuencias del uso que se le de a dicho conocimiento.

#### 2.1.2.4. Formas de comunicación

En esta dimensión se evalúa la utilización efectiva y creativa, por parte de los estudiantes, de distintas clases de símbolos, sean visuales, verbales, matemáticos, corporales, entre otros, para comunicar lo que comprenden de un tópico o concepto, dentro de distintos géneros de desempeños propuestos (escribir un ensayo, hacer una exposición, explicar un algoritmo, entre otros). Además, se analiza la capacidad de los estudiantes para considerar la audiencia y el contexto en el que se están comunicando. En resumen, el profesor analiza las distintas maneras en que los estudiantes comprenden y la forma en que lo comunican, de tal manera que otros también puedan comprender (Jaramillo y Bermúdez, 1997).

Las cuatro dimensiones muestran la naturaleza multidimensional del proceso de comprensión. En algunas de las dimensiones, los desempeños de los estudiantes se podrán evidenciar más fácilmente que en otras, pero la comprensión profunda conlleva la capacidad de usar el conocimiento en todas las dimensiones.

### 2.1.3. Niveles de comprensión

Como la profundidad de la comprensión puede diferir de una dimensión a otra, es indispensable diferenciar desempeños débiles de desempeños más avanzados, para lo cual, se hace una caracterización de cuatro niveles de comprensión por cada dimensión: ingenuo, de principiante, de aprendiz y de experto.

#### 2.1.3.1. Nivel de comprensión de ingenuo.

En este nivel los desempeños de comprensión se fundamentan en el conocimiento intuitivo. Por lo cual, los estudiantes "... describen la construcción del conocimiento como un proceso no problemático que consiste en captar información que está directamente disponible en el mundo..." (Boix-Mansilla y Gardner, 1999, p. 239), debido a que ellos no hacen relaciones entre lo que aprenden en la escuela y su cotidianidad. Tampoco, consideran el propósito y la utilidad de la construcción del conocimiento disciplinar. Y hay poca reflexión acerca de las formas en que el conocimiento es expresado o comunicado a los otros.

#### 2.1.3.2. Nivel de comprensión de principiante

Los desempeños están vinculados a la escolaridad. En este nivel el estudiante hace algunas relaciones entre conceptos disciplinares, describe la naturaleza y propósito de la construcción del conocimiento, así como sus formas de expresión y comunicación como procesos mecánicos. La validación de los procesos depende de una autoridad externa (profesor) y no de los criterios racionales de la disciplina (Boix-Mansilla y Gardner, 1999)

#### 2.1.3.3. Nivel de comprensión de aprendiz

Según Boix Mansilla y Gardner, (1999), en este nivel los desempeños están íntimamente ligados al conocimiento y modos de pensar de la disciplina. Los estudiantes usan flexiblemente los conceptos o ideas disciplinarias. La construcción de conocimientos se ve como algo complejo, que sigue procedimientos y criterios usados por los expertos. Los desempeños permiten relacionar el conocimiento disciplinario y la vida cotidiana, examinando las oportunidades y consecuencias de su uso. A través de los desempeños se expresan y comunican los conocimientos de forma flexible.

#### 2.1.3.4. Nivel de comprensión de experto

Los desempeños integran conocimientos de distintas disciplinas, son creativos y críticos. Los estudiantes se mueven flexiblemente en las cuatro dimensiones, vinculando los criterios de construcción y validación de la disciplina con su objeto de estudio y sus objetivos. En este nivel, la construcción del conocimiento se ve como una tarea compleja en la que se dan distintas visiones, a veces contrarias. Los estudiantes pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo de manera adecuada y eficiente.

En los Cuadros 2.1- 2.5 se muestra la relación entre las dimensiones y los niveles de comprensión propuesta por Boix-Mansilla y Garner (1999).

Cuadro 2.1: Dimensiones y niveles de comprensión I.

| Dimensión | Rasgo | Nivel 1. Ingenuo | Nivel 2. Principiante | Nivel 3. Aprendiz | Nivel 4. Experto |
|---|---|---|---|---|---|
| Contenido | Creencias intuitivas | Faltan conceptos disciplinares, prevalecen las creencias intuitivas. | Se mezclan conceptos disciplinares con ideas intuitivas, pero estas últimas prevalecen. | Prevalecen los conceptos e ideas disciplinares aunque aparezcan algunas creencias intuitivas. Se sigue considerando el conocimiento disciplinario desligado del mundo real. | Prevalecen los conceptos e ideas disciplinares. Los estudiantes reconocen que el conocimiento disciplinario refina las creencias intuitivas pero a su vez éstas inspiran, desarrollan y critican el conocimiento disciplinar. |
| | Redes concep-tuales | El conocimiento se percibe fragmentado. No se hace relación entre conceptos. Los ejemplos y generalizaciones están desconectados. | Las relaciones que los estudiantes establecen entre conceptos o ideas son simples o ensayados. Pueden dar ejemplos del tópico pero les falta llegar a generalizaciones. | Los estudiantes han construido una red de relaciones entre conceptos o ideas disciplinares. Aunque a veces aparecen brechas o contradicciones, los estudiantes pueden dar ejemplos y generalizaciones. | Las redes conceptuales, ideas o puntos de vista son altamente organizadas. Los estudiantes proponen gran variedad de ejemplos y generalizaciones. Además, crean nuevas relaciones, ejemplos, interpretaciones o respuestas coherentes con las ideas disciplinares. |
| Métodos | Sano escepti-cismo | Los estudiantes captan la información del mundo y por ello no sienten la necesidad de métodos para probar ningún tipo de afirmación. | Los estudiantes sienten la necesidad de argumentar sus ideas pero no les preocupa si sus creencias son correctas. | Algunas veces los estudiantes se muestran escépticos de lo que piensan, oyen, leen o conocen. Se dan críticas escasas o ensayadas. | Los estudiantes dudan, son autocríticos o escépticos de lo que piensan, oyen, leen o conocen. Sus críticas se enfocan en la base sobre la cual se construye en conocimiento. |

Cuadro 2.2: Dimensiones y niveles de comprensión II.

| Dimensión | Rasgo | Nivel 1. Ingenuo | Nivel 2. Principiante | Nivel 3. Aprendiz | Nivel 4. Experto |
|---|---|---|---|---|---|
| Métodos | Construir conocimiento en el dominio | El único método usado para construir conocimiento es por ensayo y error. | Aplican mecánicamente métodos o procedimientos disciplinares. Entienden que son útiles en la construcción del conocimiento. | Reconocen el valor de los métodos en la construcción del conocimiento. Pero tienden a usar un solo método o procedimiento en las construcciones que hace. | Reconocen que los métodos surgen de discusiones públicas y racionales. Además, aplican efectivamente variedad de ellos. |
| | Convalidar el conocimiento en el dominio | No existen criterios que convaliden el conocimiento. Las cosas se determinan como verdaderas por la propia evidencia del medio, porque son estéticamente agradables o porque son moralmente aceptadas. | Se empieza a dar importancia a la convalidación del conocimiento. Pero sujeta a la experiencia inmediata o por una autoridad externa, como el libro de texto, expertos o profesores, a quienes se les toma como poseedores de información correcta. | Los estudiantes dan importancia a la convalidación del conocimiento. Perciben algunos métodos y procedimientos de convalidación que usan mecánicamente y sin cuestionamiento alguno. | Los estudiantes convalidan el conocimiento usando distintos métodos o procedimientos propios del dominio, según sea el caso. Además, ven los criterios de convalidación como cuestionables y abiertos a revisión a lo largo del tiempo. |
| Propósitos | Conciencia de los objetivos del conocimiento | Les falta conciencia de las cuestiones y de los objetivos esenciales que impulsan la investigación en el dominio de conocimientos. | Los estudiantes son conscientes de las cuestiones y objetivos esenciales pero no los vinculan claramente con la investigación en el dominio. | Los estudiantes logran identificar, con ayuda, algunas cuestiones y objetivos esenciales que impulsan la construcción del conocimiento y reflexionan sobre la importancia de lo que aprenden en la escuela. | Los estudiantes buscan e identifican cuestiones y objetivos esenciales que impulsan la construcción del conocimiento. En algunos casos, critican esos objetivos por las consecuencias negativas que trae su uso. Reflexionan sobre la importancia de lo que aprenden en la escuela y la relación con su vida |

Cuadro 2.3: Dimensiones y niveles de comprensió III.

| Dimensión | Rasgo | Nivel 1. Ingenuo | Nivel 2. Principiante | Nivel 3. Aprendiz | Nivel 4. Experto |
|---|---|---|---|---|---|
| Propósitos | Múltiples usos y consecuencias | Los estudiantes no van más allá de las tareas propuestas. Sus desempeños demuestran poca relación entre lo que aprenden en la escuela y su cotidianidad. | Los usos del conocimiento están conectados con tareas escolares. Y sus consecuencias no van más allá de la escuela. Empiezan a relacionar lo que aprenden en la escuela con sus experiencias cotidianas. | Empiezan a usar lo que aprenden para resolver situaciones de su cotidianidad de forma original. Analizan algunas consecuencias prácticas, lógicas, sociales y morales de usar el conocimiento. | Los estudiantes usan el conocimiento de forma variada y novedosa. Son conscientes de que el conocimiento es una herramienta para predecir y controlar la naturaleza, orientar las acciones humanas o mejorar el entorno social o físico. Reinterpretan sus experiencias a la luz de lo aprendido en la escuela. Analizan las consecuencias prácticas, lógicas, sociales y morales de usar el conocimiento, apoyados en una posición o visión del mundo. |

Cuadro 2.4: Dimensiones y niveles de comprensión IV.

| Dimensión | Rasgo | Nivel 1. Ingenuo | Nivel 2. Principiante | Nivel 3. Aprendiz | Nivel 4. Experto |
|---|---|---|---|---|---|
| Propósitos | Dominio y autonomía | El uso del conocimiento depende de la instrucción de su profesor. No se ve la necesidad de tener una posición personal frente a lo que aprenden. | Inicialmente, los estudiantes presentan dificultades para usar el conocimiento en situaciones novedosas, pero después son capaces de hacerlo solos. Conocen la posición e intereses de distintas personas sobre el conocimiento del dominio, pero no tienen una posición propia frente a lo que aprenden. | Los estudiantes usan lo que aprenden sin tener en cuenta las perspectivas e intereses de los demás. Son conscientes de la influencia que tienen las posiciones, objetivos e intereses de las personas en la construcción del conocimiento. Construyen una posición acerca de lo que aprenden pero sin tomar en cuentas puntos de vista alternativos. | Los estudiantes se apropian de lo que han aprendido, al margen de preocupaciones autoritarias o de poder. Perciben cómo las posiciones, objetivos e interés personales afectan la forma como se construye el conocimiento. Y se dan cuenta que al igual que los expertos tienen intereses y objetivos para aprender ellos también los tienen según su visión del mundo. |
| Formas de comunicación | Dominio de los géneros de desempeños | A los estudiantes les es indiferente el uso de los tipos o géneros de desempeño al comunicar lo que comprenden. Además, no conocen las reglas que enmarcan su uso. | Los estudiantes siguen instrucciones para usar los tipos de desempeños propuestos. | Los estudiantes usan flexiblemente distintos tipos de desempeños para expresar lo que comprenden y demuestran conciencia de las reglas que éstos siguen al explorar nuevos géneros. | Los estudiantes se mueven flexible, expresiva y creativamente por distintos géneros de desempeños. Cuando usan nuevos géneros tienen en cuenta sus reglas. |

Cuadro 2.5: Dimensiones y niveles de comprensión V.

| Dimensión | Rasgo | Nivel 1. Ingenuo | Nivel 2. Principiante | Nivel 3. Aprendiz | Nivel 4. Experto |
|---|---|---|---|---|---|
| Formas de comunicación | Uso efectivo de los sistemas de símbolos | Los estudiantes usan los sistemas de símbolos sin reflexión alguna. No existe intención comunicativa evidente. | Los estudiantes empiezan a familiarizarse con un sistema de símbolos y a usar sólo éste. | Los estudiantes empiezan a familiarizarse con distintos sistemas de símbolos, pero a veces tienden a concentrarse más en éstos que en el objetivo del desempeño. Al expresar sus ideas pueden determinar cuál de los sistemas de símbolos que conocen es el más adecuado según sus objetivos. | Los estudiantes muestran un dominio de distintos sistemas de símbolos y pueden integrar varios de ellos en un mismo desempeño. Además, muestran conciencia estética en su uso. |
| | Consideraciones de la audiencia y el contexto | Los públicos y contextos en que se quiere comunicar lo que se comprende no son tomados en cuenta. | La audiencia se toma en cuenta pero esperando que se adecuen a la presentación. Se limita a la transmisión de información. El contexto en el que se desarrolla la comunicación no es tenido en cuenta. Las fallas en la comunicación se atribuyen a factores como aspectos técnicos, o falta de atención de la audiencia. | Los estudiantes, guiados por el docente, tienen en cuenta el tipo de público. Empiezan a tener conciencia de la influencia que puede ejercer el contexto en la comunicación. No existe un sentido realista de las dificultades que pueden ocurrir en la comunicación. Se piensan que querer comunicar es lograrlo. | Los estudiantes son sensibles ante las diferencias de público. También son conscientes de las exigencias de los contextos para la comunicación y puede usarlas a favor de la misma. Son conscientes de las dificultades de la comunicación. A menudo afecta la visión del mundo, las creencias, entre otras. |

La información de los Cuadros 2.1 - 2.5 constituye una fundamentación importante para el análisis de los datos en el capítulo 4.

## 2.2. Mapas conceptuales

Para Novak y Gowin (1999) un mapa conceptual es una herramienta gráfica para representar las relaciones entre conceptos usando proposiciones, o de otra manera, es un recurso esquemático compuesto de un conjunto de significados incluidos en una estructura de proposiciones.

Los mapas conceptuales deben ser jerárquicos, esto es, los conceptos más generales deben situarse en la parte superior y los conceptos que se van derivando de otros en la parte inferior. En su elaboración se explicitan los conceptos y proposiciones que posee el sujeto, sin descartar la posibilidad de desarrollar nuevas relaciones conceptuales y nuevos significados, generando en el estudiante sentimientos positivos. Pero alguna vez estas sensaciones resultan negativas o de preocupación cuando el estudiante se da cuenta de sus errores conceptuales o que es ignorante sobre algún asunto; sin embargo, es fundamental la intervención del docente para generar estrategias que busquen la transformación de esa situación negativa.

Los mapas conceptuales como estrategia y método son de utilidad tanto para los profesores como para los estudiantes. En el caso de los profesores, para diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes, para planificar sus clases y como instrumento de evaluación. A los estudiantes les facilita el aprendizaje porque se hacen consientes de sus conocimientos previos, de sus errores y de sus aciertos, además permite adquirir nuevos conocimientos, a la vez que les pueden ayudar a recordar los conceptos y las relaciones entre ellos por su impacto visual. Según Novak y Gowin (1999), algunas aplicaciones educativas de los mapas conceptuales son: la exploración de los conocimientos previos de los estudiantes, mostrar una ruta de aprendizaje en una unidad o curso, extraer significados de los libros de texto o trabajos experimentales, leer artículos y preparar trabajos escritos o exposiciones.

También es de anotar que la construcción de mapas conceptuales es una oportunidad de que profesores y estudiantes negocien los significados de los conceptos, esto es, que lleguen a acuerdos frente a lo que denotan. Aunque las palabras con las que se designan los conceptos sean las mismas, cada sujeto puede tener sus propios significados. Asimismo, es importante que intercambien ideas sobre la validez de un vínculo entre conceptos o darse cuenta de relaciones que faltan entre conceptos y la necesidad de un nuevo aprendizaje.

Estudios recientes muestran que este recurso es una estrategia que ayuda al estudiante en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático y a los docentes en su proceso de enseñanza. Los mapas conceptuales dan la posibilidad a los estudiantes de establecer de forma explícita las relaciones que va construyendo (Esteban, Vasco y Bedoya, 2004).

El uso de los mapas conceptuales como organizador gráfico, permite representar las relaciones significativas que tiene el estudiante en su mente, por lo cual constituye un instrumento importante dentro del trabajo de investigación porque cada mapa es la manifestación de la red de relaciones entre los distintos conceptos o ideas asociados al concepto de probabilidad que el estudiante construye. Los mapas conceptuales fueron utilizados en dos sentidos: como estrategias de aprendizaje y como instrumentos de evaluación continua. En el trabajo de campo los mapas conceptuales aportaron pautas importantes para mostrar como cada estudiante avanzó en el proceso de comprensión del concepto de probabilidad, tomando como punto de partida sus conocimientos previos.

A través del marco conceptual de la EpC y con la ayuda de los mapas conceptuales, se construyeron cuatro matrices que contienen los descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad en cuatro niveles de comprensión. Además, se dan algunas herramientas a los docentes para abordar este concepto que día a día toma mayor fuerza, no sólo por su aplicación en situaciones cotidianas sino por los procesos de pensamiento que desarrolla.

# Capítulo 3

# Metodología

Esta investigación se abordó desde el paradigma cualitativo de investigación mediante un estudio de casos, debido a que este enfoque de investigación posibilita entender a profundidad el proceso de comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de cuatro estudiantes de décimo grado. Además, este fenómeno se indagó en un ambiente natural: el aula de clase, para dar sentido o interpretarlo en virtud de los significados que los estudiantes construyen, usando como un instrumento clave, las observaciones y las entrevistas a profundidad (Guba y Lincoln, 1994). Por otro lado, los datos recogidos bajo este enfoque fueron flexibles y sensibles al contexto social en que se produjeron; además, la relación entre investigador e investigado fue interactiva, es decir, una relación en doble vía.

A continuación se describe el contexto de la investigación, los participantes y su elección, la posición de la investigadora en el estudio, los instrumentos usados para la producción de información y la validez del estudio.

## 3.1. Contexto y participantes

El trabajo de campo de esta investigación se desarrolló en una institución educativa de carácter privado de la ciudad de Medellín . Esta institución es una obra de la Compañía de Jesús (dirigida por sacerdotes) que cuenta con 125 años de trayectoria a nivel educativo. Por otro lado, es importante anotar que el área de matemáticas está dividida en dos asignaturas: matemáticas y geometría para los grados de 1º a 9º y en 3 asignaturas: matemáticas, geometría y estadística para los grados 10º y 11º. La intensidad horaria de la asignatura de estadística es de una hora y veinticinco minutos semanales. En esta asignatura se abordan tanto elementos de estadística descriptiva como de probabilidad. En el curso de estadística de grado 10° se hace una introducción al concepto de probabilidad y en grado 11° se profundiza sobre la teoría de la probabilidad todo el año escolar. En esta institución educativa, laboro desde hace cinco años, cuatro de ellos enseñando estadística, así que mi posición en el estudio fue de docente e investigadora a la vez.

La parte del trabajo de campo correspondiente a la aplicación de la EpC en el aula de clase mediante la unidad curricular se aplicó con los cuatro grupos de grado 10°, cada grupo de 30 estudiantes. Sin embargo, se tomaron cuatro de estos estudiantes para analizar a profundidad sus desempeños mediante producciones escritas y observaciones que se realizaron durante el proceso de aplicación de la unidad curricular, además de una entrevista semiestructurada que se les hizo después de terminada la aplicación de dicha unidad. Los cuatro estudiantes se eligieron en la cuarta semana de aplicación del trabajo de campo usando los siguientes criterios: responsabilidad con las actividades propuestas y fluidez en la comunicación de las ideas. A cada uno de ellos se les contó del trabajo de investigación que se estaba desarrollando y se les preguntó si estaban de acuerdo en participar en él y todos estuvieron de acuerdo. Como los cuatro estudiantes eran menores de edad se les envío a los padres de familia un consentimiento de participación que firmaron. Además, a los cuatro estudiantes se les asignó un seudónimo para protejer su identidad. Los seudónimos usados fueron: Micky, Federico, Ana y Mary. Micky y Mary estudiaban en el mismo grupo y Federico y Ana estaban en otro grupo.

## 3.2. Producción y análisis de datos

Los datos se produjeron antes, durante y después de la aplicación de una unidad curricular para el concepto de probabilidad (planeación que hace el docente de su trabajo de aula, basado en la EpC). Antes, se tomó una prueba escrita que los estudiantes habían desarrollado el período anterior sobre las técnicas de conteo y los conjuntos (ver apéndice A) para analizar algunos conocimientos previos. Los datos que se tomaron durante este proceso fueron cuatro elaboraciones escritas: dos mapas conceptuales, uno sobre técnicas de conteo y conjuntos y otro sobre el concepto de probabilidad, el desarrollo de un laboratorio (ver apéndice A), una prueba escrita sobre probabilidad (ver apéndice D) y el diario de campo de la observación de la docente-investigadora. Terminada la aplicación de la unidad curricular se produjo otra prueba escrita sobre probabilidad y estadística descriptiva de donde sólo se retomaron los puntos de probabilidad (ver apéndice E) y se aplicó una entrevista semiestructurada (ver apéndice F) para conocer la manera como los estudiantes comunican lo que comprenden, la relación que hacen de la teoría y la práctica, la conceptualización lograda en torno a la probabilidad y los métodos que usan para calcular la probabilidad.

La aplicación de la unidad curricular tuvo una duración de aproximadamente tres meses y durante este tiempo los estudiantes construyeron portafolios de actividades (carpeta en la que se recopilan todas las elaboraciones escritas de forma gradual), en los cuales coleccionaron de forma sistemática las evidencias de su proceso de aprendizaje, por lo tanto, permitieron analizar la transformación y progreso de su comprensión con respecto a las metas de comprensión propuestas para la unidad curricular. Consecuentemente, se convirtieron en una herramienta fundamental en esta investigación, debido a que allí se recopilaron las elaboraciones escritas que los estudiantes construyeron en diferentes etapas del proceso, además, permitió conocer cómo se iba transformando la red de relaciones que los estudiantes estaban construyendo en el proceso de comprensión del concepto de probabilidad.

Como apoyo para la construcción de las actividades y el análisis de la comprensión de los estudiantes se construyeron cuatro matrices, una para cada Dimensión de la comprensión: Contenidos, Métodos, Práxis y Formas de comunicación, en las que se presentaron unos descriptores iniciales para algunos aspectos que se consideraron parte de la comprensión del concepto de probabilidad, que se fueron refinanado durante el análisis de los datos. Estos a su vez están discriminados según el Nivel de comprensión. Las matrices hicieron las veces de "lupa" al momento de iniciar el análisis. Para cada una de las dimensiones de la comprensión se construyeron unas categorías a priori basadas en la experiencia docente de la investigadora y en la revisión de literatura (Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997); otras fueron categorías emergentes de los aspectos que componen principalmente la comprensión del concepto de probabilidad, así:

- Para la Dimensión de Contenido, los resultados encontrados desde los distintos instrumentos se analizaron según cuatro categorías: (1) Diferenciación entre experimentos aleatorios y deterministas, (2) Relación entre azar y probabilidad, (3) Conceptualización de la probabilidad y (4) Redes conceptuales.

- La Dimensión de Métodos se analizó desde las categorías: (1) Aplicación de las definiciones subjetivista, clásica y frecuencialista de la probabilidad, (2) Construcción del espacio muestral, (3) Uso de la teoría de conjuntos, (4) Aplicación de las técnicas de conteo y (5) Utilización de axiomas y teoremas.

- La Dimensión de Propósitos o Praxis se analizó teniendo en cuenta (1) Relación teoría-práctica y (2) Relación práctica- teoría.
- La Dimensión de Formas de comunicación se analizó teniendo en cuenta (1) Manejo del lenguaje probabilístico, (2) Comunicación de la solución de problemas, (3) Interacción con el público y (4) Manejo de medios.

Las entrevistas y las observaciones se transcribieron y junto con los mapas conceptuales y las pruebas escritas se analizaron usando el software Atlas.ti6. Se construyó una Unidad Hermenéutica por estudiante. Allí se cargaron las producciones correspondientes a cada estudiante y se hizo un análisis por estudiante así: se tomó como unidad de análisis las ideas completas que expresaban los estudiantes frente a una situación, ejercicio, pregunta o discusión. Luego, se asignaron códigos a cada una de estas unidades de análisis. Estos códigos fueron agrupados en unas categorías a priori (aspectos de las matrices), para ser ubicados luego en alguno de los temas (Dimensiones para la comprensión). Se construyeron redes de ideas con los códigos y categorías para cada Dimensión y se hizo la interpretación de los resultados por estudiante en cada dimensión y categoría. Los datos hallados en cada categoría transformaron esas matrices iniciales, de tal manera que dieran cuenta del proceso de comprensión del concepto de probabilidad de cada uno de los estudiantes del estudio de casos. Luego, los estudiantes fueron ubicados en un nivel de comprensión en cada una de las Dimensiones. Por último, se describió cómo hacer para que un estudiante avance de un nivel de comprensión a otro, basándose en el análisis de la aplicación de la unidad curricular.

### 3.2.1. Unidad curricular

El marco conceptual de la EpC tiene dos aspectos: uno práctico y uno teórico. El aspecto práctico sirvió de base para la construcción de una unidad curricular para el concepto de probabilidad que se aplicó en el aula de clase y el aspecto teórico se utilizó para el análisis de los datos; por lo cual, tanto el trabajo de campo como el análisis están acordes con el marco conceptual de esta investigación.

La principal característica de esta unidad es que lleva al estudiante a reflexionar y discutir sobre conceptos asociados a la probabilidad, como son los experimentos aleatorios, los espacios muestrales, los eventos, el azar y la misma probabilidad vista desde las distintas concepciones que se le ha dado a través de la historia: subjetivista, clásica y frecuencialista. Esta unidad curricular también brinda la posibilidad al estudiante de resolver situaciones que le inquietan, le permite explorar la probabilidad a través de la discusión con otros, de la experimentación, de las simulaciones, entre otras actividades que son la puerta de entrada a un proceso dirigido por el docente en el que se indaga, se profundiza en los temas, se construyen relaciones entre conceptos, se discuten procesos, se cuestionan situaciones para que finalmente los estudiantes puedan dar una respuesta parcial o total a las inquietudes planteadas inicialmente.

#### 3.2.1.1. Tópico generativo

El primer paso que se dio en la construcción de la Unidad curricular fue pensar en el Tópico generativo, es decir, en un tema o pregunta que fuera trasversal al proceso que se quería llevar a cabo con los estudiantes hacia la comprensión del concepto de probabilidad y que relacionara distintas disciplinas, pero además que generara en los estudiantes el interés por su estudio. Después de algunas búsquedas y discusiones se llegó a la siguiente pregunta como Tópico generativo: ¿en qué situaciones de la cotidianidad se puede aplicar la probabilidad? Durante el tiempo de implementación de la unidad curricular los estudiantes estuvieron en la búsqueda de respuestas a esta pregunta, pero para que la búsqueda fuera guiada se construyeron algunas Metas de comprensión que fueron delineando el camino por el Tópico generativo.

#### 3.2.1.2. Metas de comprensión

Inicialmente, se construyó una Meta de comprensión a largo plazo o Hilo conductor que guiaría todo el proceso: Los estudiantes comprenderán la probabilidad como una medida del azar. Después para poder alcanzar esta meta a largo plazo se plantearon algunas Metas de Comprensión a corto plazo:
Los estudiantes comprenderán:

1. Las diferencias y similitudes entre los experimentos o fenómenos aleatorios y los deterministas a través de distintas situaciones de su entorno.

2. La probabilidad como un concepto asociado solamente a fenómenos aleatorios, usando distintas situaciones de su entorno.

3. Los distintas concepciones que ha tenido la probabilidad a través de la historia: clásica, frecuencialista, subjetivista y axiomática, para aplicarlas a la resolución de situaciones problema de diversas ramas del saber y de su cotidianidad.

Para lograr estas metas de comprensión, se diseñaron las siguientes actividades o Desempeños de comprensión para cada una de las fases propuestas por la EpC.

#### 3.2.1.3. Desempeños de comprensión

*Fase de exploración.* Como los mapas conceptuales fueron una herramienta importante tanto de aprendizaje como de evaluación y sirvieron en el trabajo de campo como instrumento de recolección de datos, se hizo con los estudiantes un recuento sobre cómo se elaboran, porque el grupo de estudiantes con el que se hizo el trabajo de campo ha estudiado esta técnica desde el grado anterior en el curso de lengua castellana. Inicialmente, se hizo una explicación de lo que son los conceptos (que pueden ser objetos o acontecimientos) y las relaciones entre ellos, que se muestran a través de las palabras de enlace. Luego, se explicó, que los mapas conceptuales son jerárquicos, así que se debe hacer una organización de los conceptos, desde los más generales hasta los más específicos, incluyendo la posibilidad de ejemplificar. Después, se le pidió a los estudiantes que construyeran un mapa conceptual en el que resumieran las ideas más importantes sobre la teoría de conjuntos y las técnicas de conteo que se habían estudiado anteriormente, con el fin de conocer el estado de sus conocimientos previos. Posteriormente, se hizo una lluvia de ideas en la que los estudiantes aportaron sobre lo que consideran como fenómenos aleatorios y no aleatorios.

Luego, estas ideas previas se contrastaron consultando las definiciones de estos experimentos para determinar las diferencias y relaciones existentes entre ellos. Después, los estudiantes construyeron un mapa conceptual que sintetizara las ideas encontradas sobre los dos tipos de fenómenos para posteriormente compartir esas ideas con los compañeros de clase.

Después, la docente dio algunos ejemplos de fenómenos deterministas y fenómenos aleatorios cercanos a la vida de los estudiantes. En el caso de los deterministas se citaron algunos ejemplos de la física y de la química. Para el caso de los fenómenos aleatorios se citaron los juegos de azar: loterías, juegos de cartas, de dados, de ruletas. Posteriormente, se hizo otra lluvia de ideas en la que los estudiantes dieron sus aportes sobre lo que es para ellos la probabilidad y los conceptos con los cuales la relacionan en su vida.

Después, la docente expuso el mapa de la Figura 3.1, donde se muestra una red de ideas alrededor del concepto de probabilidad, para abrir el panorama a los estudiantes frente a este tópico.

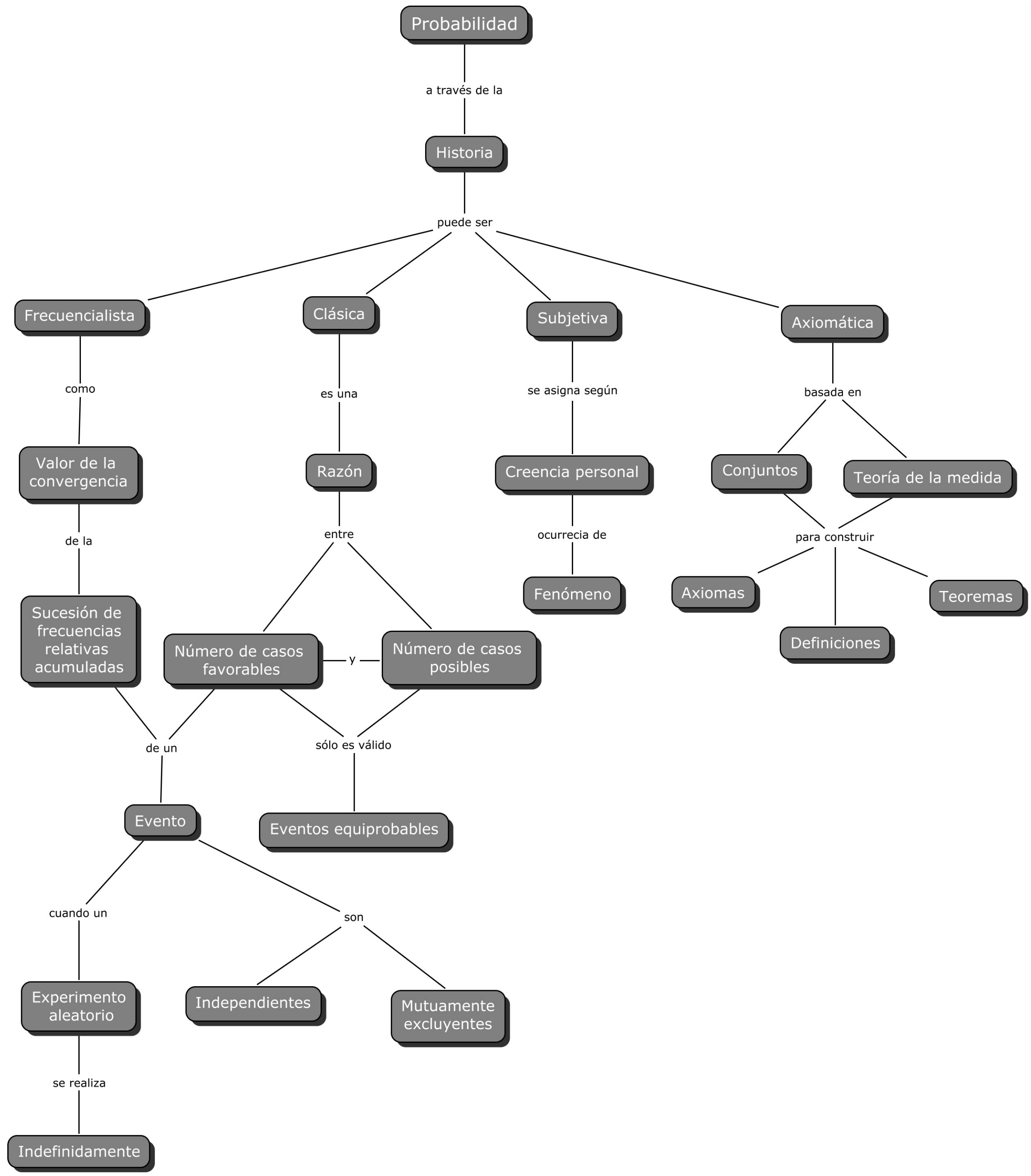



Figura 3.1: Mapa conceptual sobre las distintas concepciones de probabilidad.

Luego, se propuso a los estudiantes que respondieran: ¿En qué situaciones de mi cotidianidad puedo aplicar la probabilidad? Para responder a este cuestionamiento los estudiantes usaron distintas fuentes de información como preguntar a personas conocidas, consultar en Internet o simplemente por conocimiento propio. Posteriormente, se socializaron las ideas encontradas por los estudiantes y conformaron grupos de tres o cuatro y eligieron un problema de probabilidad que les interesara resolver y que estuviera relacionado con su vida. Cada grupo compartió de manera detallada, el tipo de problema que querían resolver y las ideas preliminares de cómo pensaban hacerlo.

*Fase de investigación guiada.* Cada grupo de estudiantes empezó a indagar sobre el tema elegido, las condiciones en que se presenta y algunas ideas de cómo resolverlo. Además, se le propusieron algunas actividades para explorar las distintas concepciones de probabilidad que se han dado a través de la historia como un insumo para la solución del problema de interés. A través de la actividad experimental "¿Cómo se comporta el azar?" (ver apéndice A) los estudiantes exploraron sus ideas sobre el azar y las reglas que este sigue, a la vez que se introdujeron en las concepciones frecuencialista y clásica de la probabilidad.

Después, desarrollaron la actividad "Algunos juegos de azar" (er apéndice B), con la cual, los estudiantes exploraron el campo desde dónde surgió la probabilidad, usando juegos de cartas, con dados cúbicos, dados dodecaédricos, balotas y monedas y algunas combinaciones de ellos para aplicar la definición clásica de la probabilidad, e ir verificando desde la práctica algunos teoremas y aplicando algunas definiciones y axiomas de la Teoría axiomática de la probabilidad.

Después, los estudiantes construyeron un mapa conceptual en el que los estudiantes describieron lo que habían aprendido acerca de la probabilidad hasta ese momento. A medida que se avanzó en la realización de estas actividades de exploración, los estudiantes comenzaron a resolver el problema elegido por ellos, utilizando lo que habían consultado y las herramientas teóricas que sobre el concepto de probabilidad se habían construido con las dos actividades anteriores y las discusiones de clase.

*Fase de síntesis.* En esta fase los estudiantes mostraron la comprensión del concepto de probabilidad a través de la exposición del problema elegido al inicio del curso y de la solución o soluciones encontradas.

#### 3.2.1.4. Valoración continua y evaluación final

En este proceso, cada estudiante desarrolló un portafolio de actividades para recoger sus producciones, las cuales fueron valoradas, retroalimentadas y evaluadas constantemente, tanto por la docente como por los compañeros. Esto se explica más detalladamente en los Cuadros 3.1-3.3.

Cuadro 3.1: Fase de exploración.

| **Desempeños de la comprensión** | **Valoración Continua** | |
|---|---|---|
| | **Criterios** | **Retroalimentación** |
| Los estudiantes construyeron un mapa conceptual sobre los conceptos previos necesarios para el estudio del concepto de probabilidad: teoría de conjuntos y técnicas de conteo. | Riqueza y veracidad de las relaciones entre conceptos. | Informal: el docente durante clases posteriores afinó algunas relaciones que no eran válidas o a las que les faltó profundidad. |
| Se hizo una lluvia de ideas en la que los estudiantes aportaron sobre lo que consideran como experimentos, experimentos aleatorios y experimentos deterministas. | Claridad en los aportes hechos. | Informal: entre los estudiantes y la docente se fue ampliando la lluvia de ideas. |

| **Desempeños de la comprensión** | **Valoración Continua** | |
|---|---|---|
| | **Criterios** | **Retroalimentación** |
| Los estudiantes consultaron las diferencias y relaciones existentes entre los experimentos deterministas y los experimentos aleatorios para compartir con los compañeros de clase. Además, los estudiantes y la docente dieron algunos ejemplos de los dos tipos de experimentos. | Claridad y profundidad en las ideas consultadas. Variedad en los ejemplos aportados. | Informal: entre docente y estudiantes compararon las diferencias o similitudes entre las ideas aportadas en la lluvia de ideas y lo consultado, sacando conclusiones al respecto. |
| Posteriormente, elaboraron un mapa conceptual sobre los dos tipos de fenómenos para entregar a la docente. | Riqueza y veracidad de las relaciones entre conceptos. | Formal: la docente hizo comentarios por escrito de los mapas conceptuales. |
| Los estudiantes dieron sus ideas sobre lo que es para ellos la probabilidad y los conceptos con los cuales la relacionan en su vida. | Claridad y coherencia de las ideas presentadas. | Informal: entre la docente y los estudiantes se fue ampliando la lluvia de ideas. |
| Se propuso a los estudiantes que respondieran las siguientes preguntas: ¿En qué situaciones de mi cotidianidad puedo aplicar la probabilidad? ¿Cuáles situaciones me ayuda a solucionar la probabilidad de la carrera que tengo en mente para mi futuro? Para responder a estos cuestionamientos los estudiantes usaron distintas fuentes de información. | Variedad en las situaciones presentadas. | Formal: la docente hizo por escrito las observaciones pertinentes a las respuestas dadas por los estudiantes. |

| **Desempeños de la comprensión** | **Valoración Continua** | |
|---|---|---|
| | **Criterios** | **Retroalimentación** |
| Partiendo de las respuestas a los interrogantes anteriores, los estudiantes en grupos de dos o tres eligieron un problema a ser resuelto por ellos utilizando la probabilidad, que tenía relación con su vida. Posteriormente, cada grupo narró de manera detallada, el tipo de problema que querían resolver y la ideas preliminares de cómo pensaban ellos que se puede resolver. | Complejidad y pertinencia del problema propuesto. | Formal: la docente hizo, de forma escrita, las observaciones pertinentes a los problemas presentados por los estudiantes para que siguieran profundizando y empezaran a resolverlo. |

Cuadro 3.2: Fase de investigación guiada.

| **Desempeño de la Comprensión** | **Valoración Continua** | |
|---|---|---|
| | **Criterios** | **Retroalimentación** |
| A través de la actividad experimental “¿Cómo se comporta el azar?” los estudiantes exploraron sus ideas sobre el azar y las reglas que este sigue, a la vez que se introdujeron en las concepciones frecuencialista y clásica de la probabilidad. | Desarrollo de la actividad de forma completa y participación en su socialización a través de aportes con argumentos. | Informal: discusiones de los estudiantes mediada por el docente. |
| Con la actividad “Algunos juegos de azar” los estudiantes exploraron el campo desde dónde surgió la probabilidad: los juegos de azar y abordaron algunos axiomas, definiciones y teoremas de la Teoría axiomática de la probabilidad, a la vez que seguían aplicando la definición clásica de probabilidad. | Desarrollo de toda la actividad y aplicación correcta de la definición clásica de la probabilidad y de los axiomas y teoremas construidos mediante la actividad. | Informal: los estudiantes y el docente discutieron las soluciones dadas a las distintas situaciones propuestas y su validez o no. |
| Los estudiantes construyeron un mapa conceptual sobre la probabilidad | Riqueza y veracidad de las relaciones entre conceptos. | Informal: el docente durante las clases posteriores afinó algunas relaciones que no eran válidas o a las que les faltó profundidad. |

Cuadro 3.3: Fase de proyecto final de síntesis

| **Desempeños de la comprensión** | **Valoración** | |
|---|---|---|
| | **Criterios** | **Retroalimentación** |
| Exposición del problema elegido al inicio del curso y de la solución o soluciones encontradas. | *Contenido:* utiliza los conceptos estudiados apoyándose en ellos para la argumentación y validación de la solución dada a su problema de aplicación. *Métodos:* Propone creativamente estrategias para solucionar el problema seleccionado. *Propósitos:* Logra relacionar eficientemente los conceptos aprendidos con la situación de la vida diaria elegida para abordar durante el período. *Formas de comunicación:* El material elaborado es creativo. Posee dominio del lenguaje relacionado con el concepto de probabilidad. Facilidad para comunicarse entre si los integrantes del equipo y para comunicar sus ideas a sus compañeros y al profesor. | Formal: los estudiantes y el docente valoraron las exposiciones de sus compañeros a través de una matriz que contiene los criterios de valoración de acuerdo a las cuatro dimensiones para la comprensión de la EpC. |
| Entrega del portafolio de actividades de los estudiantes. | Contenido: guías de las actividades desarrolladas, pruebas escritas, diarios de campo, mapas conceptuales, planteamiento y solución del problema de aplicación. | Formal: el docente hizo comentarios por escrito de las fortalezas y debilidades de los portafolios construidos. |
| Los estudiantes desarrollaron tres pruebas escritas donde encontraron una serie de situaciones problema que resolvieron aplicando lo comprendido acerca de la probabilidad. | Solución creativa de los distintos problemas, argumentando con base en la teoría estudiada sobre el concepto de probabilidad. | Formal: el docente revisó la solución de las situaciones problema y hará los comentarios pertinentes. |

Esta unidad curricular es una propuesta de aplicación de la EpC para el concepto de probabilidad que permite al docente planear su trabajo de aula a la vez que busca que el estudiante comprenda lo que aprende, por lo cual sirvió de instrumento para la recolección de datos de la investigación.

## 3.3. Validez

La validez de esta investigación se fundamenta en la triangulación de fuentes, debido a que se compararon los datos producidos por cada participante a través de distintos instrumentos de recolección de información como lo fueron las elaboraciones escritas (mapas conceptuales y pruebas escritas), la observación (diario de campo) y la entrevista semiestructurada, esto se muestra en el capítulo 4. Además, se hizo triangulación de informantes ya que los datos producidos por los cuatro estudiantes también se compararon para construir los descriptores finales de la comprensión del concepto de la probabilidad como se muestra en el apartado 5.1.

# Capítulo 4

# Análisis

Este capítulo está dedicado a los resultados encontrados sobre cómo comprenden el concepto de probabilidad un grupo de cuatro estudiantes de décimo grado de una institución privada de la ciudad de Medellín.
En la sección 4.1 se muestra el análisis de los desempeños de comprensión de los estudiantes en la secuencia de aplicación de la unidad curricular como punto de partida para el análisis de la comprensión de cada estudiante según las cuatro dimensiones para la comprensión de la EpC en la sección 4.2.

## 4.1. Aplicación de la unidad curricular

Aunque la unidad curricular consta de cuatro parte fundamentales: tópico generativo, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua y evaluación final, en el análisis de datos se tomará lo concerniente a los desempeños de comprensión, que es donde se producen los datos, a través de las tres fases:
*Fase de exploración:* como se describió en el apartado 3.2.1.3, se le pidió a los estudiantes que construyeran un mapa conceptual en el que resumieran las ideas más importantes sobre la teoría de conjuntos y las técnicas de conteo que se habían estudiado anteriormente, con el fin de conocer el estado de sus

conocimientos previos. Uno de estos mapas se presenta en la figura 4.1

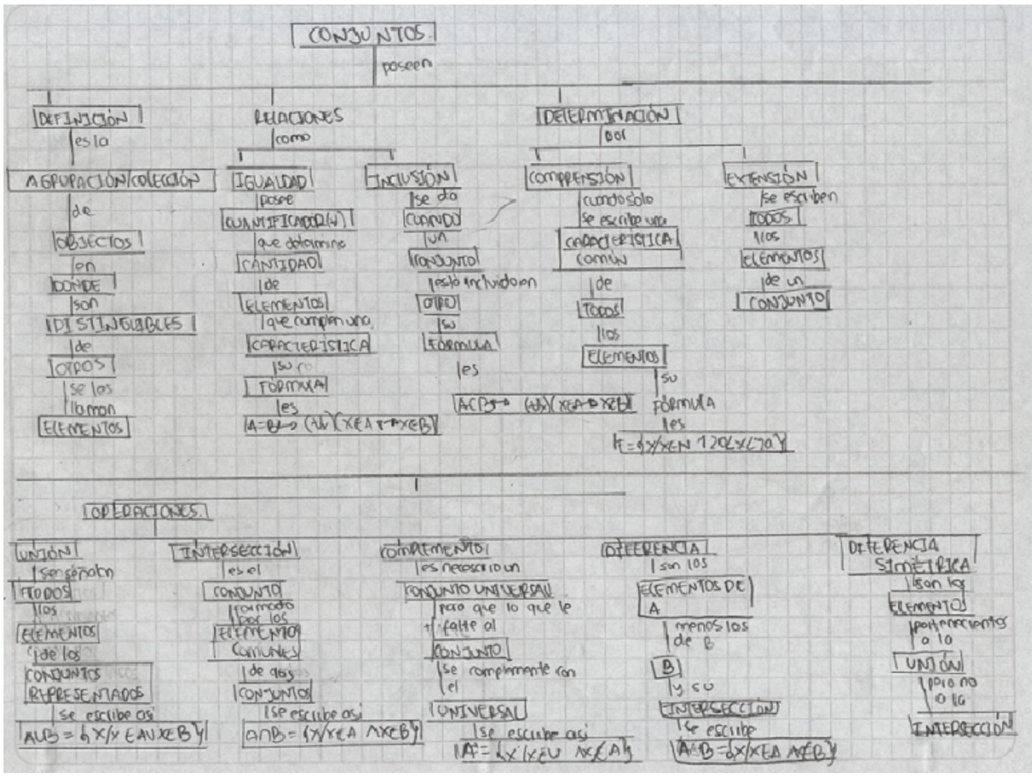



Figura 4.1: Mapa conceptual sobre la teoría de conjuntos construido por Ana.

La estudiante establece relaciones entre conceptos, en la mayoría de los casos, aunque le hace falta establecer relaciones cruzadas, sus relaciones son muy lineales. Usa conceptos repetidamente, los podría haber usado para establecer nuevas relaciones. Es importante anotar que al final del mapa la estudiante establece la expresión matemática para complementar lo dicho teóricamente.

De la lluvia de ideas en la que los estudiantes aportaron sobre lo que consideran como fenómenos aleatorios y no aleatorios, se encontró:

Experimentos aleatorios: Los experimentos aleatorios no buscan

> algo específico sino lo que pueda pasar. Realizar una actividad donde uno no busca una actividad específica.
>
> Experimentos deterministas: Son demostrativos y se espera llegar a un fin específico. Se realizan para probar algo. (Diario de campo; abril 8, 2010)

Se evidencia que los estudiantes tienen algunas ideas cercanas a las definiciones de cada uno de los tipos de experimentos, pero aún no se vislumbra ninguna asociación de éstos últimos con la probabilidad.

Estas ideas previas fueron contrastada con una consulta sobre las definiciones de estos experimentos para determinar las diferencias y relaciones existentes entre ellos. Después, construyeron un mapa conceptual que sintetizó las ideas encontradas sobre los dos tipos de fenómenos para posteriormente compartir esas ideas con los compañeros de clase. Uno de los mapas conceptuales construido por una de las estudiantes se muestra en la Figura 4.2.

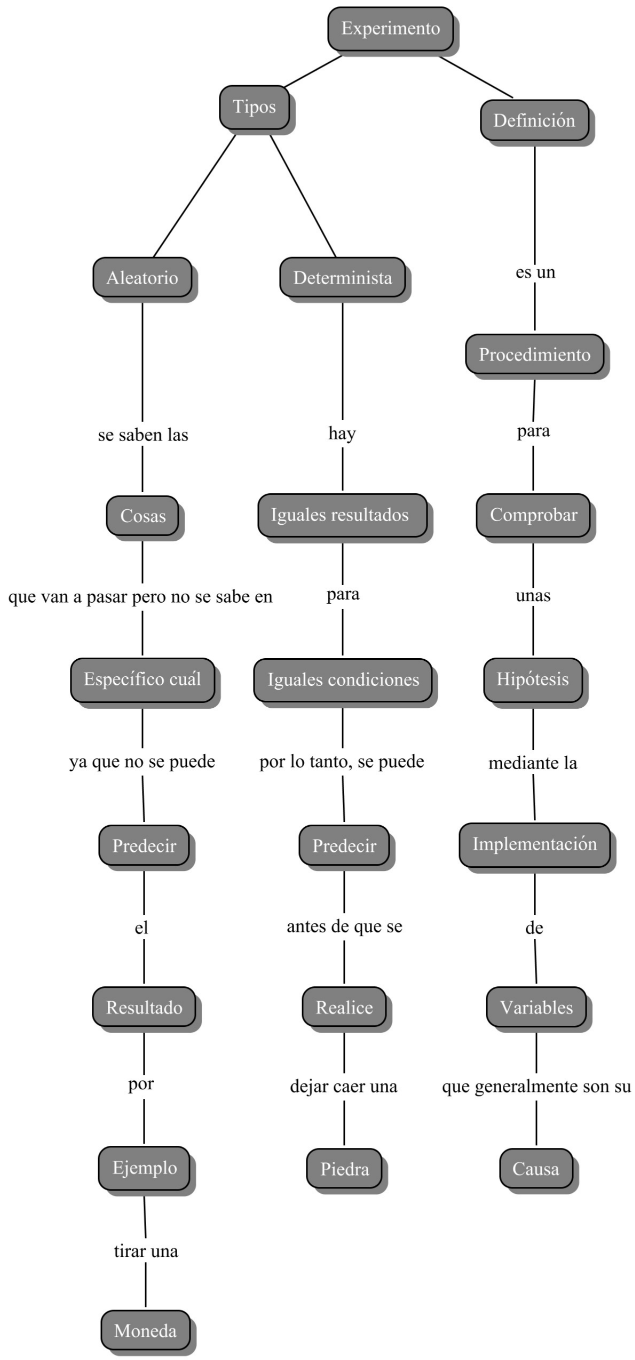



Figura 4.2: Mapa conceptual sobre experimentos aleatorias y deterministas construido por Ana.

Al comparar las ideas previas con las consultadas y expuestas en el mapa se puede notar como los estudiantes tenían algunas ideas que los acercaba a las definiciones, pero con la consulta se muestran algunas relaciones nuevas que no tenían previamente.

Para concluir esta discusión sobre los tipos de fenómenos, la docente dio algunos ejemplos de fenómenos deterministas y fenómenos aleatorios cercanos a la vida de los estudiantes. Posteriormente, se hizo otra lluvia de ideas en la que los estudiantes dieron sus aportes sobre lo que es para ellos la probabilidad y los conceptos con los cuales la relacionan en su vida. Al respecto, algunas ideas dadas por los estudiantes fueron:

> Número de casos en que puede suceder algo.
> Opciones de que algo pase.
> Posibilidad de obtener un resultado específico. (Diario de campo; abril 15)

En las dos primeras ideas se nota como los estudiantes asocian la probabilidad con el conteo. En la tercera, existe un acercamiento al concepto de forma subjetivista.

Como se describe en el apartado 3.2.1.3 la docente expuso un mapa conceptual de la probabilidad y propuso a los estudiantes que respondieran: ¿En qué situaciones de mi cotidianidad puedo aplicar la probabilidad? y generaran unas situaciones problema o preguntas que les interesara resolver durante el curso en equipos de trabajo. Algunos de los problemas o preguntas que inicialmente se plantearon los estudiantes, fueron:

> Federico: nuestra situación problema está enfocada a las loterías, en especial El Baloto porque nos produce curiosidad saber la probabilidad que hay de ganar contando con que hay miles de personas que también lo juegan. Además, saber si es muy difícil

> tener 6 números iguales a los ganadores, sabiendo que por cada número se pueden escoger 45.
>
> Tico: si hay 200 cabinas en el metrocable, y todas le dan 30 vueltas al cable en un día. ¿Qué probabilidad hay de que en 10 días yendo a diferentes horas me vuelva a tocar en la misma cabina?
>
> Mary: ¿Qué probabilidad hay de obtener en el juego de Póker un full house?
>
> Micky: La revista Vogue está rifando un premio de 300.000 dólares en tiendas asociadas, se debe escoger por lo menos una de tres llaves entre 5000, de las cuales existen 3 colores: amarillo, rojo y verde. Hay una de cada color que abre la caja con el premio. Cuando llegamos decían que quedaban 500 llaves amarillas, 200 llaves rojas y 700 verdes y se podían escoger 3 verdes, 1 amarilla y 2 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que me gane el premio? (Diario de campo; abril 29)

Cada una de estas situaciones evidencia como cada estudiantes desde sus intereses, gustos y motivaciones se hace preguntas que si las retomamos se pueden convertir en todo un proyecto en el que los estudiantes aprenderán y comprenderán gustosos. Además, con este tipo de trabajos se puede ir más allá del contenido y valorar otras dimensiones de la comprensión que son igualmente importantes. Por otro lado, se puede evidenciar que las situaciones son realmente sencillas de resolver para una persona que tenga algún conocimiento básico de probabilidad, pero para estos estudiantes son todo un reto.

*Fase de investigación guiada.* En esta fase se le propuso a los estudiantes distintas actividades para explorar las distintas concepciones de probabilidad que se han dado a través de la historia como un insumo para la solución del problema de interés. A través de la actividad experimental "¿Cómo se comporta el azar?" (ver apéndice A) los estudiantes exploraron sus ideas sobre el azar y las reglas que este sigue, a la vez que se introdujeron en las concepciones frecuencialista y clásica de la probabilidad, a través de experimentos aleatorios como lanzar una moneda "muchas veces" y analizar el valor al que tienden las frecuencias relativas a medida que aumenta el número de lanzamientos. A continuación se muestran algunos fragmentos de la actividad.

Experimento 1: Lancen una moneda y anoten C si sale cara o S si sale sello. Después calculen la frecuencia de cada uno de los resultados. Los resultados encontrados por una estudiante se muestran en la Figura 4.3.

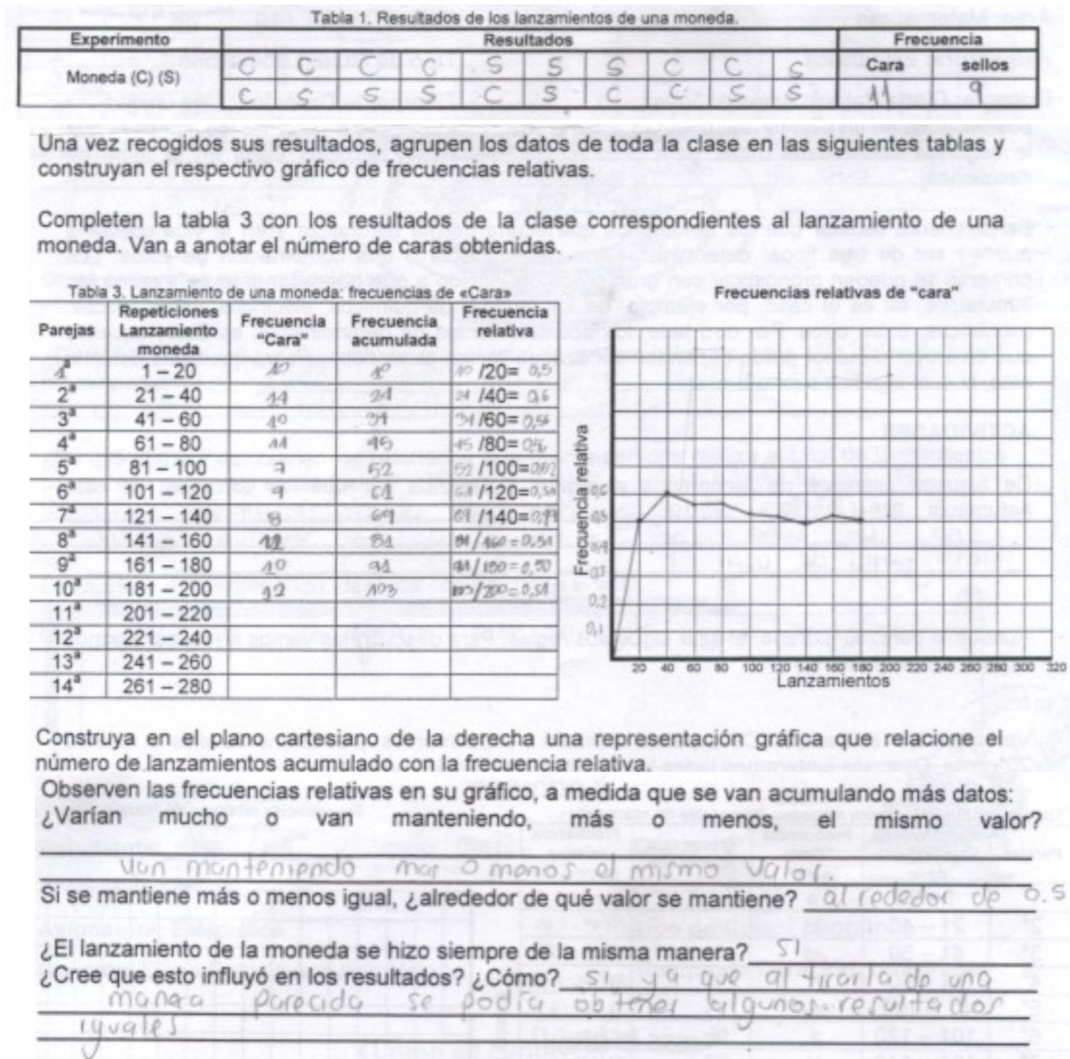


Tabla 1. Resultados de los lanzamientos de una moneda.

| Experimento | Resultados | | | | | | | | | | Frecuencia | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Cara | sellos |
| Moneda (C) (S) | C | C | C | C | S | S | S | C | C | C | | |
| | C | S | S | S | C | S | C | C | S | S | 11 | 9 |

Una vez recogidos sus resultados, agrupen los datos de toda la clase en las siguientes tablas y construyan el respectivo gráfico de frecuencias relativas.

Completen la tabla 3 con los resultados de la clase correspondientes al lanzamiento de una moneda. Van a anotar el número de caras obtenidas.

Tabla 3. Lanzamiento de una moneda: frecuencias de «Cara»

| Parejas | Repeticiones Lanzamiento moneda | Frecuencia "Cara" | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
| 1ª | 1 – 20 | 10 | 10 | 10 /20= 0,5 |
| 2ª | 21 – 40 | 14 | 24 | 24 /40= 0,6 |
| 3ª | 41 – 60 | 10 | 34 | 34 /60= 0,56 |
| 4ª | 61 – 80 | 11 | 45 | 45 /80= 0,56 |
| 5ª | 81 – 100 | 7 | 52 | 52 /100= 0,52 |
| 6ª | 101 – 120 | 9 | 61 | 61 /120= 0,50 |
| 7ª | 121 – 140 | 8 | 69 | 69 /140= 0,49 |
| 8ª | 141 – 160 | 12 | 81 | 81 /160 = 0,51 |
| 9ª | 161 – 180 | 10 | 91 | 91 /180 = 0,50 |
| 10ª | 181 – 200 | 12 | 103 | 103 /200 = 0,51 |
| 11ª | 201 – 220 | | | |
| 12ª | 221 – 240 | | | |
| 13ª | 241 – 260 | | | |
| 14ª | 261 – 280 | | | |



Construya en el plano cartesiano de la derecha una representación gráfica que relacione el número de lanzamientos acumulado con la frecuencia relativa.

Observen las frecuencias relativas en su gráfico, a medida que se van acumulando más datos: ¿Varían mucho o van manteniendo, más o menos, el mismo valor?

van manteniendo mas o menos el mismo valor.

Si se mantiene más o menos igual, ¿alrededor de qué valor se mantiene? al rededor de 0.5

¿El lanzamiento de la moneda se hizo siempre de la misma manera? SI

¿Cree que esto influyó en los resultados? ¿Cómo? SI ya que al tirarla de una manera parecida se podria obtener algunos resultados iguales

Figura 4.3: Solución de Mary al primer experimento del laboratorio ¿Cómo se comporta el azar?

Igualmente, los estudiante analizaron la tendencia de las frecuencias relativas para el evento sacar 5 en el lanzamiento de un dado al lanzarlo "muchas veces" o sacar cara-sello en el lanzamiento de dos monedas. A través de preguntas alrededor de estos experimentos los estudiantes construyeron algunas ideas sobre azar y probabilidad como las siguientes: para el caso del lanzamiento de una moneda algunos estudiantes encontraron que las frecuencias relativas se van manteniendo alrededor de 0,5. En el experimento de lanzar el dado, las frecuencias relativas se van manteniendo alrededor de 0,12 y 0,2. Y en el experimento de lanzar dos veces la moneda, la frecuencias relativa del evento sacar cara y sello estuvo alrededor de 0, 4 y 0,51. Algunos estudiantes compararon estos valores con la proporción de casos que favorecían cada evento haciendo una relación inmediata con la definición clásica de la probabilidad, es decir, $\frac{1}{2}$ para el primer experimento, $\frac{1}{6}$ para el segundo y $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ para el tercer experimento. Además, encontraron como en el azar se pueden encontrar algunas regularidades como lo son las frecuencias relativas que posteriormente se concluyó que este valor era la probabilidad de que ese evento sucediera (Diario de campo; 29 de abril).

Con la actividad "Algunos juegos de azar" (ver apéndice B) los estudiantes exploraron el campo desde dónde surgió la probabilidad, usando algunpos juegos de azar para aplicar la definición clásica de la probabilidad, e ir verificando desde la práctica algunos teoremas y aplicando algunas definiciones y axiomas de la Teoría axiomática de la probabilidad.

Para verificar la comprensión del concepto de probabilidad los estudiantes construyeron un mapa conceptual en el que describieron las relaciones que hasta el momento habían construido.

A medida que se avanzó en la realización de estas actividades de exploración, los estudiantes comenzaron a resolver el problema elegido por ellos, utilizando lo que habían consultado y las herramientas teóricas que sobre el concepto de probabilidad se habían construido con las dos actividades anteriores y las discusiones de clase.

*Fase de síntesis.* Una de las situaciones que los estudiantes estuvieron resolviendo durante la aplicación de la unidad curricular y su respectiva solución se presentan a continuación.

> Descripción del problema: el metrocable de Medellín, ruta Acevedo-Santo Domingo Savio, cuenta con 60 cabinas que le dan una vuelta completa al circuito en 30 minutos. Su funcionamiento comienza a las 5 am y finaliza a las 10 pm, funcionando así un total de 17 horas diarias. Se eligió la cabina #20 para determinar las probabilidades de que al ir a una hora aleatoria, ésta se encuentre en la estación en donde comenzó el circuito para poder abordarla. ¿Qué probabilidad hay de que en diez días, yendo a horas aleatorias una vez por día al punto de partida (primera estación), pueda abordar la cabina #20 durante las diez visitas? [esta fue la pregunta que investigaron]
>
> Desarrollo: espacio muestral ($\Omega$): cada día, la cabina #20 comienza a dar la vuelta por el circuito a las 5:10 am (esto quiere decir que cada medio minuto hay una cabina en el punto de partida, que en este caso es la primera estación). Como el recorrido total hasta llegar de nuevo al punto de partida dura 30 minutos, esta cabina estará allí, cada día, a las horas que muestra la Figura 4.4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5:10am | 1:40 pm | 9:40 am | 6:10 pm |
| 5:40 am | 2:10 pm | 10:10 am | 6:40 pm |
| 6:10 am | 2:40 pm | 10:40 am | 7:10 pm |
| 6:40 am | 3:10 pm | 11:10 am | 7:40 pm |
| 7:10 am | 3:40 pm | 11:40 am | 8:10 pm |
| 7:40 am | 4:10 pm | 12:10 pm | 8:40 pm |
| 8:10 am | 4:40 pm | 12:40 pm | 9:10 pm |
| 8:40 am | 5:10 pm | 1:10 am | 9: 40 pm |
| 9:10 am | 5:40 pm | | |

Figura 4.4: Tiempos en los que la cabina # 20 estará en la primera estación ($\Omega$).

> Si cada medio minuto hay una cabina lista para ser abordada, quiere decir que en las 17 horas de funcionamiento del sistema, habrán 2040 abordajes. Este total lo encontramos convirtiendo 17 horas en medios minutos, es decir, 17 horas * 2x(60 minutos) = 2040 medios minutos en 17 horas. Entonces, al haber 34 momentos en los que la cabina elegida estará en el punto de partida, la expresión para determinar la probabilidad es la siguiente: P(Cabina #20 en pto. de partida) $=\frac{34}{2040}$ = 0.0166, que en términos de porcentaje, es del 1,66 % por cada día. Ahora, como son 10 días para el experimento, las probabilidades son las de el primer día y * [multiplicada] las del segundo día, y * [multiplicada] las del tercer día, [...] y * [multiplicada] las del décimo día. Es decir: $\frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60}$ que simplificando queda $\left(\frac{1}{60}\right)^{10} = 1{,}6538x10^{-18}$. En términos de porcentaje (multiplicando por 100), esto es un $1{,}6538x10^{-16}$= 0.00000000000000016538 % de probabilidad de que esto suceda (Diario de campo, mayo 19)

Como se puede ver, este es un problema que nació desde la curiosidad de los estudiantes y que con un poco de consulta y los elementos teóricos estudiados como la definición clásica de probabilidad y eventos independientes, pudieron encontrar su solución.

## 4.2. Dimensión de Contenido

En esta dimensión se dará cuenta de todos los conceptos y redes conceptuales asociados con el concepto de probabilidad que el estudiante ha construido a través de la experiencia del trabajo de campo en el que se desarrolló la unidad curricular basada en los cuatro elementos de la EpC: tópico generativo, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua y evaluación final.

### 4.2.1. Diferenciación entre experimentos aleatorios y deterministas

Un aspecto importante en la comprensión del concepto de probabilidad, es reconocer la existencia de fenómenos aleatorios (a los que se asocian experimentos aleatorios), en un mundo en que muchas cosas se han presentado como deterministas, e identificar sus principales características para diferenciarlos de los no aleatorios. En esta investigación se asumió como fenómeno aleatorio cualquier situación en la que se tienen diferentes resultados posibles, sin que se sepa con seguridad cuál será el que ocurrirá en una experiencia particular (por ejemplo, si se tira un dado, no se sabe con seguridad el número que saldrá en la cara superior); sin embargo, se puede reproducir la situación en las mismas condiciones para analizar los diferentes resultados que se producen. En un fenómeno determinista se puede predecir lo que va a suceder cada vez que se reproduzca la situación (sal tomar una piedra y dejarla caer, se puede estar seguro que caera).

**Micky**

Reconoce la existencia de los experimentos deterministas y aleatorios, logrando encontrar algunas diferencias. En los experimentos deterministas identifica unas regularidades en las condiciones de ocurrencia pero en los experimentos aleatorios se da cuenta que se da variedad de resultados y existen factores externos que pueden hacer que ocurran unos u otros, sin embargo, por más que esos factores externos existan, la conclusión a la que llega el estudiante es que en últimas el azar no se puede cambiar, es azar.

El episodio que se tomó como base para analizar esta categoría fue la pregunta de la entrevista ¿Cuáles son las diferencias o similitudes existentes entre los siguientes experimentos: calcular el tiempo de caída de un objeto que se tira de un segundo piso de una casa y lanzar una moneda o un dado? Micky respondió:

> .... a pues que el de física se puede decir que es un experimento determinista pues porque siempre tiene que seguir las mismas leyes de la gravedad por ejemplo o en la mayoría de las cosas siempre va a ver la fricción contra el viento en cambio en los dados eso es como mucho más variante, eso puede variar mucho, eso es lo que se llama azar. [la profesora pregunta ¿qué cosas varían en el dado?] ... a pues es que son muchos factores, pues por ejemplo que uno lo coja de cierta manera o que le aplique una fuerza distinta o que lo tire de otra manera, es que son demasiados factores externos que afectan a que caiga uno o que caiga el otro aunque uno puede hacer lo mismo y le puede caer el mismo dos veces pero eso es el azar... (entrevista, junio 10, 2010).

**Federico**

Federico, a diferencia de Micky, no logra diferenciar claramente los experimentos aleatorios de los deterministas. Tal vez se deja llevar por el tema que se estaba trabajando: probabilidad y en consecuencia pensaba que cualquier experimento que se le presentara era aleatorio. Concibe los experimentos aleatorios como aquellos en los que hasta que no suceden, no es posible determinar su resultado y les asocia valores de probabilidad, como se puede evidenciar en la respuesta que da en la entrevista ante la pregunta de las diferencias o similitudes entre los dos experimentos:

> Federico: similitudes pues yo creo que pues no se, según lo que hemos visto de experimento aleatorio y todo eso uno no sabe, uno no puede calcular el tiempo si uno coge una hoja y un papel y empieza a hacer fórmulas, uno puede saber el tiempo teórico de caída, pero uno calculando en la mente más o menos tanto, es muy difícil que uno lo haga y es también muy difícil saber si uno tira una moneda le va a caer cara o sello, pues ahi uno puede decir cara y cae cara pues era porque había un 0,5 entre 1 de que hubiera caído cara pero es difícil saberlo, nadie sabe entonces yo creo que es eso: los dos son experimentos aleatorios, hasta que no pase, uno no sabe cuál es el resultado.
>
> Profesora: bueno y en la moneda también podrías usar como en el caso del tiempo una formulita para calcular lo teórico?
>
> Federico: ¿lo teórico?
>
> Profesora: ... en el caso del objeto que dejo caer puedo calcular un tiempo teórico, ¿cierto? con una altura y con unos datos. En el caso de la moneda, cuando la lanzo, ¿puedo usar alguna formulita para decir: me va a caer cara o me va a caer sello o sea como para encontrar el resultado teórico?
>
> Federico: no. Pues yo si puedo utilizar una fórmula que me diga que de una tirada me puede caer un medio cara y un medio sello pero yo con exactitud yo no puedo saber si es cara o sello solamente (entrevista; septiembre 9, 2010).

**Mary**

Tiene una idea de que los experimentos aleatorios como aquellos en los que existe variedad de resultados pero no se sabe con certeza lo que va a ocurrir. Pero cuando se le presentan dos experimentos, Mary no logra diferenciar un experimento aleatorio de uno determinista. Así se evidencia en la respuesta que da en la entrevista sobre este asunto:

> Mary: ¿un objeto cualquiera?
>
> Profesora: si un objeto cualquiera, digamos una piedra desde allí del balcón... calcular cuánto tiempo se demora en caer abajo al primer piso.
>
> Mary: pues de pronto, según el objeto, pues de pronto uno caerá más rápido que el otro y también como depende según a su contextura. Por ejemplo, si es una piedra de pronto cae en un lugar y el otro puede ser más liviano pues caerá en un lugar distinto pero de similitud mmmmm no se.
>
> Profesora: pero los dos experimentos son aparte, o sea el dado no se tira de ahí del segundo piso... ¿qué ocurre cuando yo lanzo un dado? ¿qué me interesa analizar? y ¿qué me interesaría analizar si lanzo una piedra desde el segundo piso?
>
> Mary: no, uno cuando está con el dado se fija en que le va a salir, en que carita va a caer y la piedra pues el tiempo como en la rapidez que cae.
>
> Profesora: ¿crees que son del mismo tipo de experimento los dos?
>
> Mary: no, porque la piedra es como igual en todos, es como igual. En cambio el dado es diferente porque puede caer en un dos... pues van a caer diferente porque el otro siempre va a seguir siendo una piedra en cambio el dado puede que caiga en un 1 en un 2 o un 6... (entrevista; junio 10, 2010).

**Ana**

La estudiante identifica algunas diferencias entre los experimentos aleatorios y deterministas: los primeros están relacionados con el azar y los segundos siguen algunas leyes naturales y se pueden predecir algunos resultados. Así lo expresó en la entrevista cuando se le preguntó por las diferencias entre los dos tipos de experimentos:

> ... esa eran como las dos clases de experimentos en que hay algo fijo que son como con las leyes de la física, entonces mmm pues el objeto siempre va a caer por la gravedad y con el tiempo, pues bueno se mide, en cambio con el otro que es lanzar el dado es algo totalmente al azar como era experimento aleatorio y el otro... [a la estudiante se le olvidó el nombre del evento, pero sabía que existían dos tipos].

Además, no concibe que los experimentos aleatorios puedan tener algunas reglas ni tendencias. Asocia azar con "caos", desorden y que cualquier cosa puede pasar.

### 4.2.2. Relación entre azar y probabilidad

La idea sobre el azar que se tomó como base en esta investigación fue la proporcionada por el MEN (2003), que afirma

> El azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, como es el caso de los estados del tiempo; de la ocurrencia de los terremotos, huracanes u otros fenómenos de la naturaleza; de los accidentes, fallas mecánicas, epidemias y enfermedades; de las elecciones por votación; de los resultados de dispositivos como los que se usan para extraer esferas numeradas para las loterías y de las técnicas para efectuar los lanzamientos de dados o monedas... (p.65).

La teoría de la probabilidad surge por la necesidad de conocer el comportamiento del azar, de allí que su comprensión esté estrechamente relacionada con reconocer que sólo en los fenómenos aleatorios es válido hablar de probabilidad. Se hace esencial que los estudiantes reconozcan no sólo los fenómenos regidos por el azar sino que puedan asocial la probabilidad con dichos fenómenos.

**Micky**

Al inicio del trabajo de campo el estudiante atribuye al azar eventos en los que no sabe cómo ocurrirán, es decir, no se sabe cómo están determinados, pero reconoce que les puede asignar algún valor. Ya existe un acercamiento del azar y la probabilidad. En el laboratorio ¿cómo se comporta el azar? se le pidió a los estudiantes que escribieran cómo entendían el azar y esto fue lo que Micky escribió:

> El azar es una libertad que podemos medir usando tablas de datos, y podemos llegar a entenderlo cuanto más lo hagamos y conociendo las condiciones (laboratorio; abril 8, 2010).

Al final, en la entrevista, se nota que la idea que Micky tenía sobre el azar no ha cambiado sustancialmente, pues continúa asociándolo a eventos en los que no es posible determinar lo que va a ocurrir, pero ahora hace explícita la relación entre azar y probabilidad, aunque no profundiza en ella. Así respondió en la entrevista:

> ... el azar pues es que uno nunca sabe pues uno si sabe la probabilidad pero uno nunca sabe si en cinco veces le salen las cinco veces pues como lo que uno quiere, es como el azar.
>
> ... el azar es como una norma sin leyes, como una ley anárquica pues aunque suene como muy ilógico, porque el permite que pase lo que sea. El no tiene ningún orden, el permite que pase lo que sea (entrevista; junio 10, 2010)

**Federico**

El estudiante asocia el azar con hechos en los cuales no es posible predecir el resultado. Así lo explica en el laboratorio:

> Hecho impredecible en el que muchos factores influyen variadamente para la obtención de un resultado (laboratorio; abril 8, 2010).

Pero aunque exista esa dificultad en la predicción de un resultado, reconoce que la probabilidad permite saber que tanta seguridad se tiene de que ocurra.

**Mary**

La estudiante concibe el azar como un resultado que no es seguro, en el que no se sabe lo que puede pasar y que es cambiante (laboratorio; abril 8, 2010). Además, asocia el azar y la probabilidad:

.. como es de la probabilidad del azar más que todo porque está participando un dado y una moneda, pues es como sacar las probabilidades más uno no sabe igual lo que va a pasar... la probabilidad del azar va mucho también como en la suerte y en lo que salga (entrevista; junio 10, 2010).

**Ana**

Para Ana, el azar tiene que ver con desorden y con situaciones en las que no se puede predecir lo que ocurrirá, sin embargo a través de los actividades se dio cuenta que el azar se puede medir con la probabilidad. Ver apartado 4.2.3, Ana.

### 4.2.3. Conceptualización de la probabilidad

Las ideas que se analizarán en este apartado sobre el concepto de probabilidad se fundamentan en las tres visiones descritas en el apartado 1.1.1: subjetivista, clásica y frecuencialista.

**Micky**

Entiende la probabilidad como una posibilidad de que ocurra un suceso o evento, que puede ser calculada desde la definición clásica de probabilidad (casos favorables sobre casos posibles).

> .... pues que probabilidad es como en cuanto es la posibilidad de que $x$ ó $y$ cosa pase... yo antes pensaba que la probabilidad se daba en porcentajes principalmente pero me di cuenta que la probabilidad nace... de la definición clásica que es casos favorables sobre casos posibles y que ya de ahí uno si puede sacar porcentajes y eso, pero la forma clásica yo no la conocía y me parece que es como la más acertada... (entrevista; junio 10, 2010).

Tiene la idea de la probabilidad clásica como una relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, aunque no establece, explícitamente, las condiciones de aplicación de esta definición. Tiene claro el concepto de eventos equiprobables, que para la aplicación de la definición clásica de probabilidad es muy importante, aunque en el mundo físico sea algo casi que imposible de alcanzar, este es un supuesto con el que es necesario trabajar, que justifica su existencia por su utilidad y que se dejará de usar en tanto la experiencia deje de corroborarlo (Kasner y Newman, 2007). El estudiante identifica eventos que son equiprobables y aunque desde el sentido común, se le puede atribuir menor probabilidad a unos eventos que a otros, sabe que desde la teoría de la probabilidad esto es falso. Así se puede ver en el siguiente apartado de la entrevista:

> Profesora: ...si fueras a jugar una lotería, ¿a qué número le apostarías, por ejemplo la lotería de Medellín o cualquier lotería?
>
> Micky: cualquiera
>
> Profesora: ¿por qué?
>
> Micky: porque cualquiera tiene la misma probabilidad de ganar.

> Profesora: si yo te ofreciera en este momento una boleta con cuatro ceros, ¿me la comprarías?
>
> Micky: pues uno por la cultura diría no, que bobada pero eso legalmente puede que pase.
>
> Profesora: bueno y si te vendiera una con 1234 me la comprarías con mas facilidad que la del 0000.
>
> Micky: pues yo creo que sí, pero yo digo en mi interior que tiene la misma probabilidad (entrevista; junio 10, 2010).

La definición frecuencialista de la probabilidad, la asocia con la repetición de un experimento y la aproximación de la frecuencia relativa a un valor constante, como se puede evidenciar en el siguiente episodio:

La profesora, durante la entrevista, le contó una anécdota al estudiante y le preguntó qué pensaba: "El matemático inglés John Kerrich, mientras fue prisionero de los alemanes durante la Segunda Guerra Mundial, lanzó una moneda 10.000 veces. Resultando 5.067 caras, una razón de 0,5067". El estudiante afirmó lo siguiente:

> ... pues porque él se aprovechó ahí como de los experimentos repetitivos que la definición frecuencialista y, ahí pues lo que hizo fue corroborar que aproximadamente es 0,5 caras y 0,5 sellos (entrevista; junio 10, 2010).

**Federico**

Entiende la probabilidad como la oportunidad que tiene un evento de suceder y que puede ser cuantificada. Esta concepción tiene un sentido muy similar al expresado por Micky, como se puede evidenciar en lo que afirma Federico en la entrevista:

> ... es como lo que pudiera pasar en un evento es como el número de... es como la oportunidad que se pueda dar algo en determinada situación ... uno después de ver el tema aprende muchas

> más cosas que antes no sabía de la probabilidad, como calcularla o cosas así por el estilo. (entrevista; septiembre 9, 2010)

En el mapa conceptual de probabilidad (Figuras 4.5 y 4.6), Federico afirma que la probabilidad de un suceso A es la razón entre el número de casos favorables y el total de resultados de un experimento. Aunque relaciona los elementos fundamentales de la definición clásica de probabilidad, olvida el hecho de que el experimento debe ser aleatorio y los resultados equiprobables. Sin embargo, Federico es capaz de identificar eventos que son equiprobables. Así lo hizo en la entrevista:

> Profesora: si fueras a jugar una lotería, ¿a qué número le apostarías?
>
> Federico: ... yo no creo en eso del número de la suerte y que aparezcan números en animales o cosas así, pero igual para mi todos tienen la misma probabilidad de ganar ...
>
> Profesora: ... tú en algún momento, en una lotería, por ejemplo de cuatro cifras, ¿le apostaría a los cuatro ceros?
>
> Federico: ... si, pues me parece lo mismo apostarle a los cuatro ceros que apostarle al cero uno cuarenta y nueve, pues porque igual en cada número en cada cifra hay un décimo de la posibilidad de que salga, entonces me parece como lo mismo cualquier número simplemente es cuestión de suerte.

En otro apartado de la entrevista en el que se le hace referencia a la anécdota sobre el matemático inglés John Kerrich, se nota que Federico tiene tan arraigada la definición clásica de probabilidad que dejó de lado la definición frecuencialista de probabilidad que se aplica en esta situación. Veamos:

> ... yo pienso que igual, solamente hay dos posibilidades de que caiga. Es decir, que del cien por ciento sea hay un cincuenta y cincuenta, pero eso como es experimental siempre hay como un error en el experimento. Pero eso puede también variar, que en

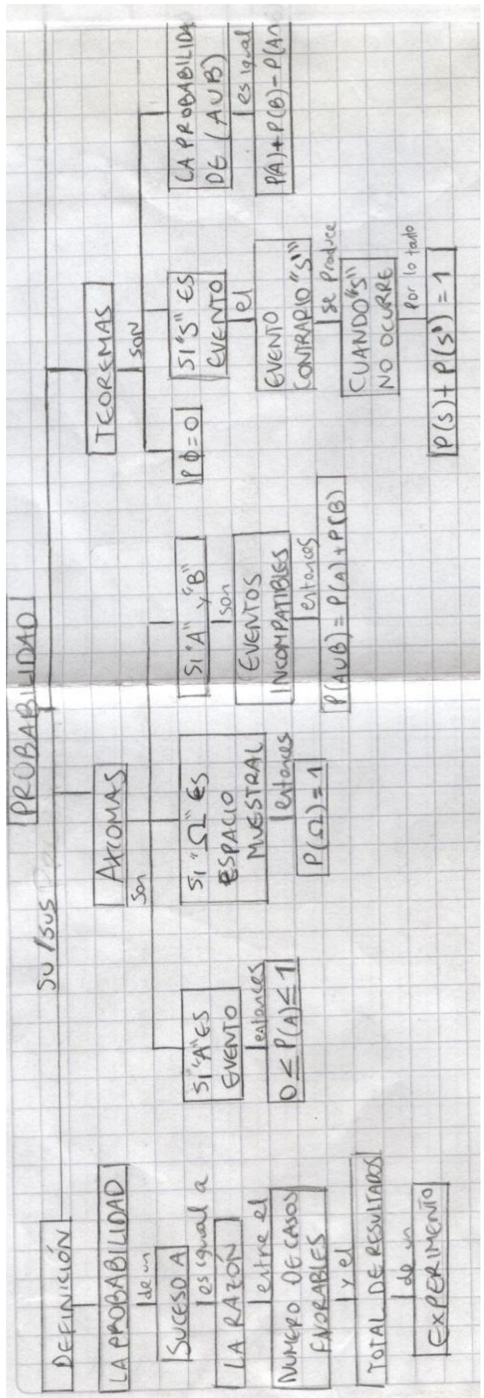



Figura 4.5: Mapa conceptual de probabilidad construido por Federico, parte I.

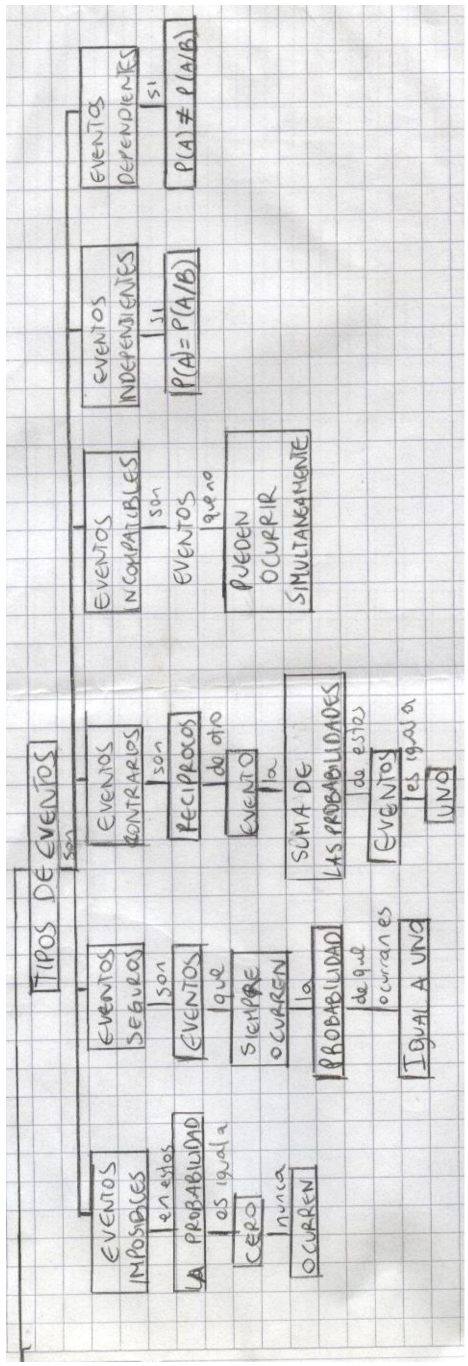



Figura 4.6: Mapa conceptual de probabilidad construido por Federico, parte II

> las veces la altura en la que la dejó caer o la velocidad si la tiró para arriba, muchas cosas así... Yo pienso que igual por más que uno lo haga le va dar un número más otro, pero hay que tener presente que si hay solamente dos posibilidades que el todo de las posibilidades son dos nada más, que el setenta por ciento no creo que... no me parecería, como no puede ser que la moneda que él utilizó era más cargada por un lado que para el otro, pero no hay que ver que solo son dos posibilidades es un cincuenta y cincuenta.

**Mary**

Mary tiene una idea de probabilidad asociada a usos prácticos o al lenguaje cotidiano, es decir, a la visión subjetivista de la probabilidad. La idea que presenta en la entrevista es la siguiente:

> ... como muchos datos... porque como a partir de esos datos sacar un resultado específico. [La entrevistadora pregunta por algunas aplicaciones de la probabilidad a su vida]... ahhh, de pronto cuando uno dice.... qué probabilidad hay de que llueva o algo así, que uno como que adivina, pues porque eso no es muy certero, son cosas no muy certeras o como quién va a ganar en un partido de fútbol... entonces uno como que si se pregunta más no ve el tema con profundidad, ya ahora porque uno como que sabe y se está informando, pues del tema pero uno como que si lo menciona pero no lo profundiza.

Como se evidencia en el anterior apartado, la estudiante asocia la probabilidad con la aleatoriedad cuando habla de "muchos datos" y "un resultado específico" o "eso no es muy certero". Está haciendo referencia a eventos en los que existe variedad de resultados pero no es posible determinar con certeza cuál ocurrirá.

Por otro lado, en el mapa conceptual de probabilidad (Figura 4.7), la estudiante describe la definición clásica de probabilidad como la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles en un experimento en el que los resultados son igualmente posibles. Aunque la estudiante conozca que para aplicar la definición clásica es necesario que los resultados del experimento sean equiprobables, tiene dificultad para determinar cuando se da la igualdad en las probabilidades. La estudiante durante la entrevista usó un heurístico de representatividad, que consiste en asignar probabilidades altas a los sucesos que parecen ser prototípicos de una población y bajas a los que parecen no serlo (Scholz, 1991; Muñoz, 1998; Saénz, 1998; Serrano et al., 1996, 1998, citados por Barragués y Guisasola, 2002) y que lleva a los estudiantes a cometer errores en el cálculo de probabilidades. Veamos:

> Profesora: si fueras a jugar una lotería, ¿a qué número le apostarías?
>
> Mary: al 7
>
> Profesora: al 7 si es de una cifra... ¿y si es de 4 cifras?
>
> Mary: si es de 4 cifras, no se, pues yo como que mis papas o yo no sé, uno siempre piensa como que uno pone el día en que cumple años o el mes o algo así.
>
> Profesora: ok, y si yo te ofrezco en este momento una boleta que estoy vendiendo de la rifa de un carro y te ofrezco la boleta con 4 ceros, ¿me la compras?
>
> Mary: no se
>
> Profe: porque
>
> Mary: porque, es que bueno, como puede salir un cero puede salir también otro número, pero es que yo no sé como lo mismos números, si uno como que, y no porque sea cero porque pueden ser 4 números dos pues, pero de todas maneras como el cero, uno piensa en el cero y como que no.
>
> Profesora: no qué...

Mary: como que piensa que eso no va a salir.

Profesora: ok. ¿Y si te vendo el 1234?

Mary: si, de pronto si...

Profesora: ¿por qué?

Mary: porque, pues yo no sé, uno como que piensa que como que en todas las veces no le va a salir el mismo número, pues y sale como en las baloticas como en la televisión, así pues probablemente si puedan salir los mismos números, como no, entonces uno prefiere como cambiar pues distintos.

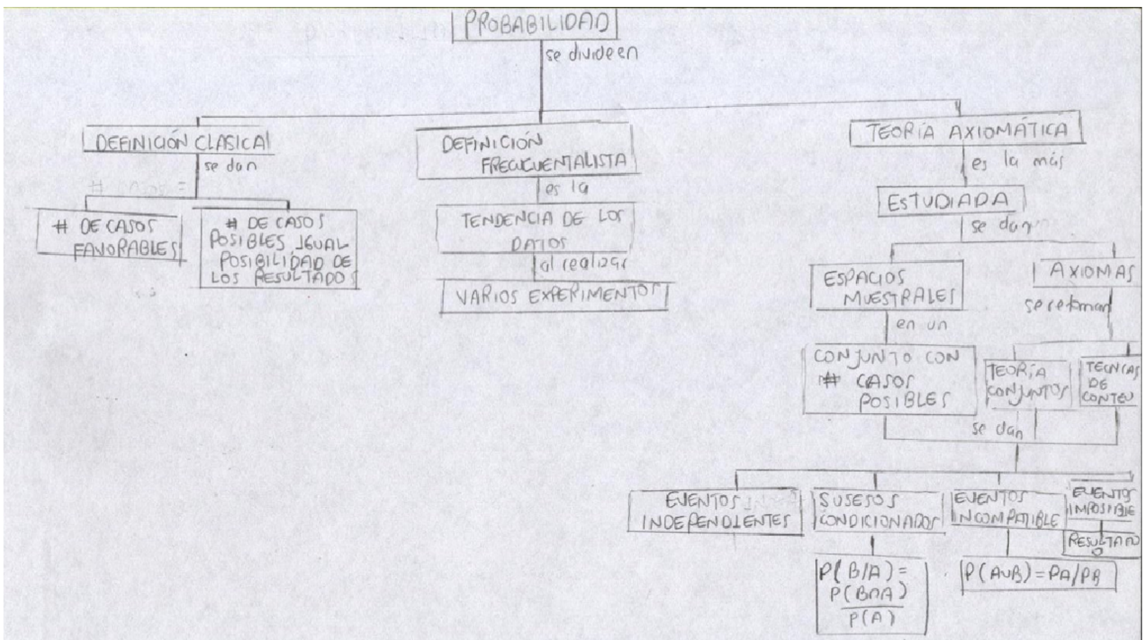



Figura 4.7: Mapa conceptual de probabilidad construido por Mary.

Además, la estudiante comete otro error muy común llamado sesgo de equiprobabilidad, puesto que piensa que en cualquier experimento aleatorio existe equiprobabilidad de los sucesos. Por ejemplo, en un juego, la probabilidad de que Pablo gane es $\frac{1}{4}$ y de que gane Emilio es $\frac{2}{3}$. Al preguntarle a la estudiante si el juego es equitativo, ella responde:

> ... yo pienso que igual, como es de la probabilidad del azar, más que todo porque está participando un dado y una moneda, pues es como sacar las probabilidades más uno no sabe igual lo que va a pasar entones... pues yo digo que igual como puede ganar uno puede ganar el otro...

Por otro lado, la estudiante tiene algunas ideas de lla definición frecuencialista de la probabilidad, hace relaciones entre algunas palabras clave, pero no logra organizar la idea. La estudiante dice que

> ... la definición frecuencialista de la probabilidad es la tendencia de los datos al realizar varios experimentos (mapa conceptual de probabilidad; mayo 10, 2010). Ver Figura 4.7. Además, en la entrevista no se evidencia su utilización.

**Ana**

La estudiante entiende la probabilidad como una posibilidad de que ocurra algo (entrevista; septiembre 2, 2010). Además, demuestra un conocimiento básico de las distintas concepciones de la probabilidad que se han dado a través de la historia.

En el mapa conceptual de probabilidad, la estudiante explica que la definición clásica de probabilidad consiste en la razón entre los casos favorables y los casos posibles, de la misma manera que los demás compañeros del estudio de casos, pero no menciona la condición de equiprobabilidad de los resultados.

Frente a la pregunta sobre la lotería, que se ha venido citando en este apartado, para cada uno de los integrantes del estudio de casos, Ana tiene una respuesta similar a la de Mary, incurriendo en el mismo error en la asignación de las probabilidades:

> Profesora: ... si fueras a jugar a una lotería, ¿a qué número le apostarías?

Ana: al 7

Profesora: al 7 perfecto porque

Ana: porque ya en otras ocasiones me ha ayudado pues aunque es totalmente al azar eso ya en otras ocasiones me ha ayudado

Profesora: ok y si la lotería fuera de cuatro dígitos a cual le apostarías

Ana: totalmente al azar profe e números que a uno le gusten no se el 4 el 7 el 15 número de dos dígitos

Profesora: cuatro cada uno de un digito

Ana: entonces sería 4, 7, 9 y 5

Profesora: ok y si yo te trajera una boleta con el 0000 cuatro seros tu me la comprarías

Ana: no

Profesora. Porque

Ana: porque poco probable que salga eso aunque es al azar en ocasiones anteriores no creo que haya salido eso

Profesora: ok y por ejemplo el 1234 me la comprarías si tuviera ese número

Ana: puede ser si más probable que salga.

Por otro lado, Ana presenta en su mapa conceptual de probabilidad (Figura 4.8) una idea sobre la concepción frecuencialista pero no es clara. Además, en la entrevista tampoco reconoce su utilización. Veamos el episodio de la entrevista sobre la anécdota del matemático inglés John Kerrich:

Ana: pues yo no creo que haya un patrón para eso como eso es totalmente al azar puede ser en la forma en que él la tiró... igual entonces siempre hay alguna de las dos posibles entonces tiene que caer.

Profesora: tú dijiste hace un momento que la moneda tenía dos opciones: cara o sello. Si tú tiraras la moneda, por ejemplo diez veces, tú qué crees, qué esperarías, cuántos sellos por ejemplo esperarías en esas 10 lanzadas de la moneda.

Ana: profe, eso es al azar.

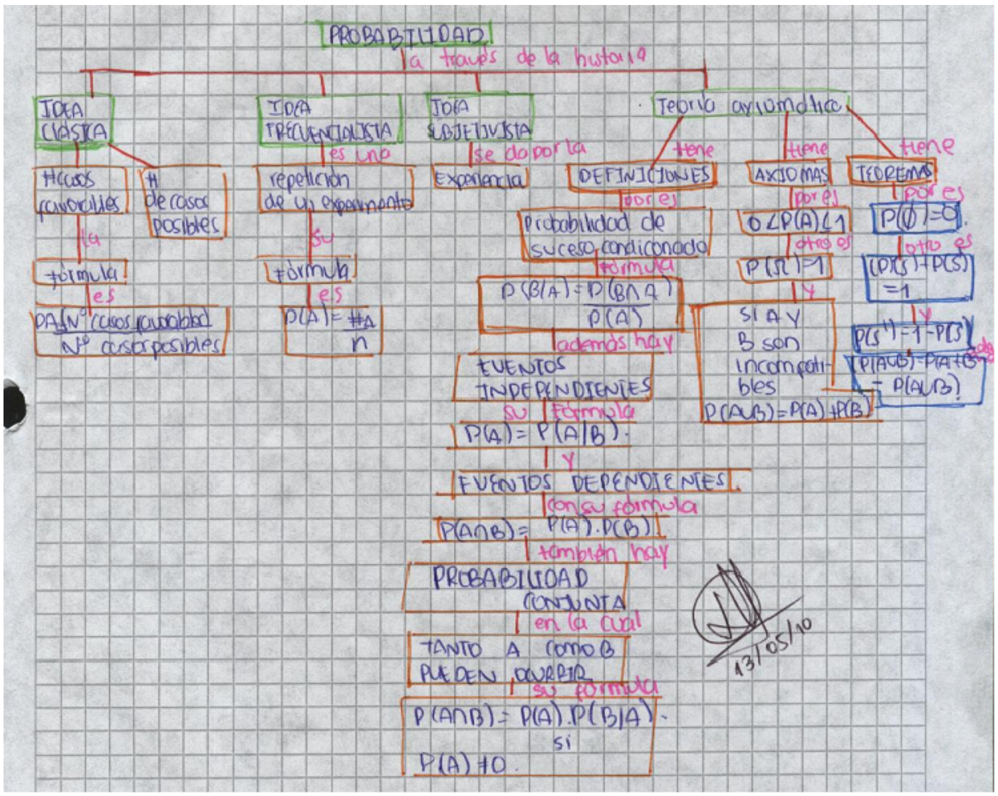



Figura 4.8: Mapa conceptual de probabilidad construido por Ana.

### 4.2.4. Redes conceptuales

#### Micky

En los mapas conceptuales se pudo evidenciar que las redes entre conceptos que construyó, dan cuenta de las relaciones que ha tejido el estudiante alrededor del concepto de probabilidad, aunque se muestran muy lineales y presenta algunas fallas en su estructura, debido a que algunos conceptos importantes dentro de la teoría los ubica como conectores, logra mostrar los distintos conceptos abordados durante las clases. No da ejemplos ni presenta relaciones nuevas. En el mapa conceptual de probabilidad (Figura 4.9) establece relaciones entre las dos concepciones que con más fuerza vimos durante el período: clásica y frecuencialista y algunos apartes de la teoría axiomática. Aunque se mencionó la concepción subjetivista no se trabajó ninguna guía que reforzara esta concepción y esa puede ser una razón por la cual no aparece en ningún mapa conceptual.

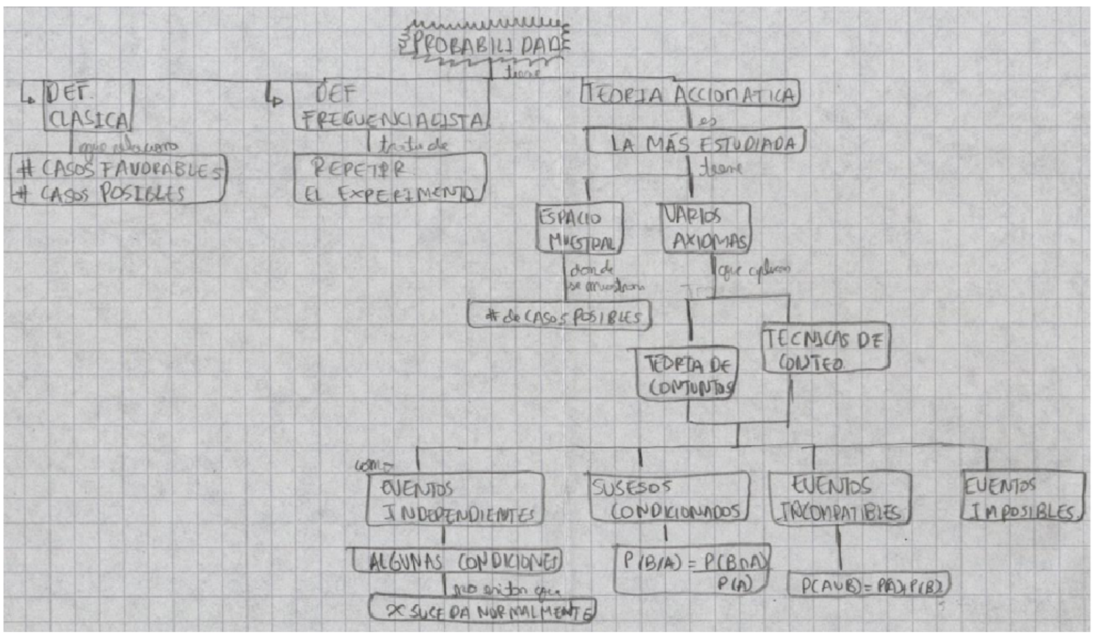



Figura 4.9: Mapa conceptual de probabilidad construido por Micky.

## Federico

Las redes conceptuales que construyó son simples y determinadas por la teoría trabajada en clase. No escribe con sus propias palabras el significado de los conceptos sino que usa el lenguaje matemático. Algunas veces, en lugar de conceptos usa frases. En el mapa conceptual de probabilidad (Figura 4.5

y 4.6), se centra en la definición clásica y la teoría axiomática, distinguiendo en esta última axiomas, teoremas y tipos de eventos, pero no hace alusión a las concepciones frecuencialista ni subjetivista de la probabilidad. Esto concuerda con lo analizado en la Dimensión de contenido en la categoría "Conceptualización de la probabilidad".

### Mary

Al igual que Federico, las redes conceptuales que teje Mary son simples y determinadas por la teoría trabajada en clase. Además, en lugar de conceptos, a veces, usa frases. Mary, de la misma manera que Micky, construye un mapa conceptual de probabilidad (Figura 4.7) en el que presenta las dos concepciones que se trabajaron en el aula: frecuencialista y clásica y algunos apartes de la teoría axiomática.

### Ana

La estudiante establece relaciones entre conceptos en la mayoría de los casos. Le hace falta establecer relaciones cruzadas, sus relaciones son muy lineales, pero dan cuenta de todas las relaciones conceptuales que se construyeron durante las clases. Usa conceptos repetidamente en cada una de las relaciones que establece. Es importante anotar que al final de los mapas la estudiante establece la expresión matemática o un ejemplo para complementar lo dicho teóricamente.

Las relaciones entre los conceptos, aunque sencillas, dan cuenta de las ideas principales del tema que se estaba estudiando, mostrando la mayoría de la información que se trabajó en clase o por fuera de ella. Ver Figuras 4.1, 4.2 y 4.8.

## 4.3. Dimensión de Métodos

Esta dimensión de la comprensión mostrará las distintas estrategias que los estudiante utilizan para resolver problemas de probabilidad.

### 4.3.1. Aplicación de las definiciones subjetivista, clásica y frecuencialista de la probabilidad

**Micky**

El estudiante hace uso de la concepción subjetivista de la probabilidad cuando estima la probabilidad de ciertos eventos dependiendo de las evidencias que tenga de que este puede ocurrir, esto es, según su propia experiencia. Así lo hizo en este apartado de la entrevista:

> Profesora: ¿antes habías usado en algún caso la palabra probabilidad para referirte a algo... antes de este curso, en tu vida cotidiana?
> Micky: pues si, porque uno dice que es muy probable de que gane la materia, por ejemplo, o que es muy probable que hoy salga por la noche, pero nunca me había puesto a pensar en problemas como los que hicimos en el trabajo práctico.
> Profesora: y ¿cómo entendías que era muy probable que ganaras la materia?, ¿cómo sabias eso?
> Micky: a... pues porque uno ve la mayoría las notas y uno sabe que si le está yendo bien y uno como que trata de ver una constante así positiva o negativa para ver si es alta la probabilidad o si es baja (entrevista, junio 10, 2010).

La definición clásica de probabilidad, aunque tenga limitaciones en su aplicación, es una herramienta sencilla de usar para calcular probabilidades, por eso constituye el primer acercamiento entre el estudiante y el cálculo de probabilidades. Micky es un estudiante que aplica correctamente la definición clásica de probabilidad, determinando eficazmente los casos favorables a un evento y los casos posibles del experimento (en el que cada resultado es equiprobable), usando como estrategias los datos de la situación problema directamente, la lista de elementos del espacio muestral o las técnicas de conteo. La utilización de estos recursos para el cálculo de casos favorables y posibles, por parte de Micky, se explica ampliamente en los apartados 4.3.2 y 4.3.4.

Sólo en un episodio en que se le presenta la situación de una persona muy distraída que ha extraviado el número telefónico de su mejor amigo, pero que logra averiguar las 5 cifras intermedias de un total de 7 y sabe que el primer dígito debe ser par, distinto de cero y que la última cifra es impar mayor que 4, ¿cuál es la probabilidad de acertar al número de teléfono de su amigo? Micky interpreta la probabilidad pedida como la conjunción de la probabilidad de dos eventos independientes, pero confunde los casos favorables con los casos posibles según las condiciones del problema, puesto que la probabilidad de los eventos son $\frac{4}{10}$ y $\frac{3}{10}$, por lo tanto, la probabilidad pedida es $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$. PeroMicky razona como se expone en la Figura 4.10.

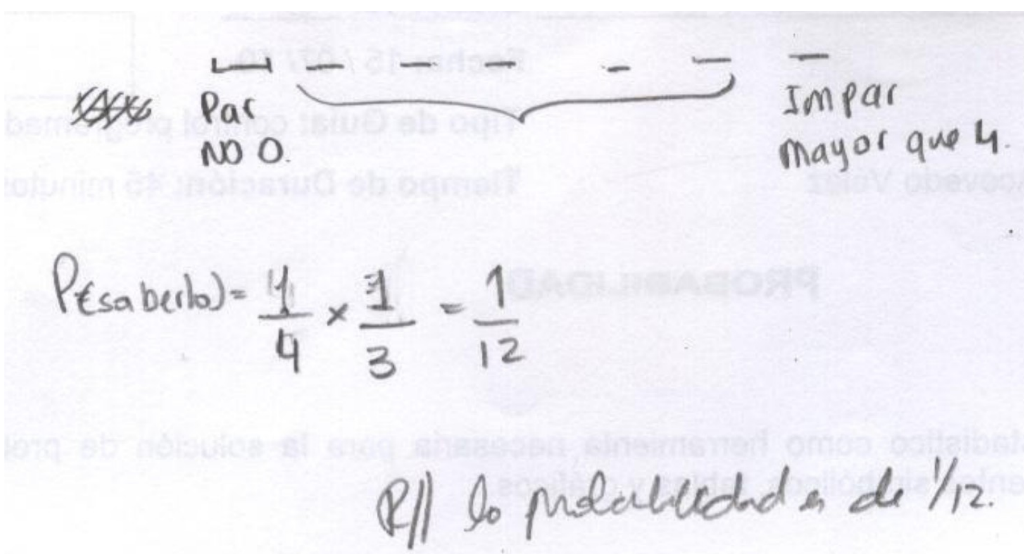
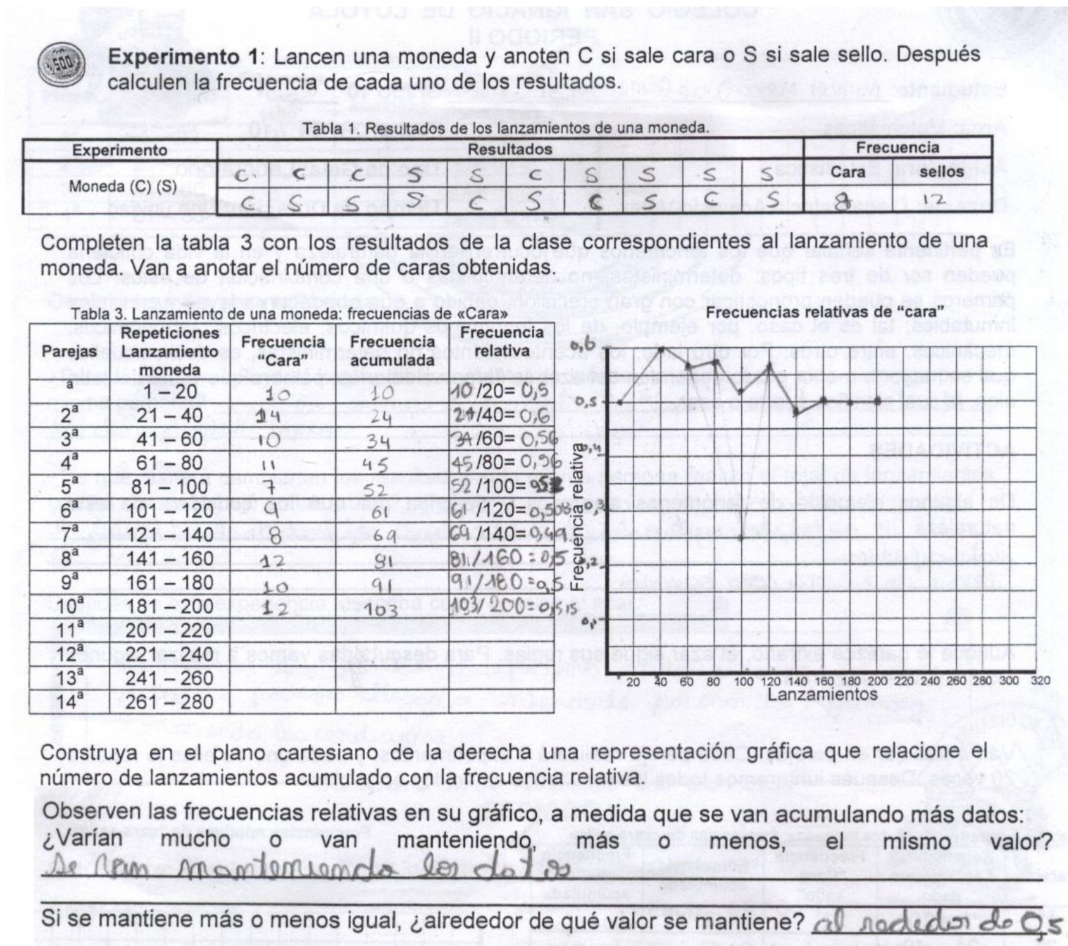



Figura 4.10: Cálculo de la probabilidad de un evento realizado por Micky.

Por otro lado, el estudiante aplica la definición frecuencialista de la probabilidad en experimentos que se repiten una cantidad grande de veces para encontrar el valor al que tiende la frecuencia relativa de un evento en particular, en el laboratorio ¿Cómo se comporta el azar? Al final se dio cuenta que esos valores de la frecuencia relativa se acercaban mucho a los que se podían hallar usando la definición clásica (aunque esta definición aún no se había estudiado). El uso de la definición frecuencialista fue restringido durante el trabajo de campo debido a que la mayoría de las situaciones presentadas en el aula de clase se podían resolver usando la definición clásica de probabilidad. En la Figura 4.11 se presenta uno de los experimentos que llevó al estudiante a entender la definición frecuencialista de la probabilidad.



**Experimento 1**: Lancen una moneda y anoten C si sale cara o S si sale sello. Después calculen la frecuencia de cada uno de los resultados.

Tabla 1. Resultados de los lanzamientos de una moneda.

| Experimento | Resultados | | | | | | | | | | Frecuencia | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Moneda (C) (S) | C | C | C | S | S | C | S | S | S | S | Cara | sellos |
| | C | S | S | S | C | S | C | S | C | S | 8 | 12 |

Completen la tabla 3 con los resultados de la clase correspondientes al lanzamiento de una moneda. Van a anotar el número de caras obtenidas.

Tabla 3. Lanzamiento de una moneda: frecuencias de «Cara»

| Parejas | Repeticiones Lanzamiento moneda | Frecuencia "Cara" | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 – 20 | 10 | 10 | 10 /20= 0,5 |
| 2ª | 21 – 40 | 14 | 24 | 24/40= 0,6 |
| 3ª | 41 – 60 | 10 | 34 | 34 /60= 0,56 |
| 4ª | 61 – 80 | 11 | 45 | 45 /80= 0,56 |
| 5ª | 81 – 100 | 7 | 52 | 52 /100= 0,52 |
| 6ª | 101 – 120 | 9 | 61 | 61 /120= 0,508 |
| 7ª | 121 – 140 | 8 | 69 | 69 /140= 0,49 |
| 8ª | 141 – 160 | 12 | 81 | 81 /160 = 0,5 |
| 9ª | 161 – 180 | 10 | 91 | 91 /180 = 0,5 |
| 10ª | 181 – 200 | 12 | 103 | 103/ 200= 0,515 |
| 11ª | 201 – 220 | | | |
| 12ª | 221 – 240 | | | |
| 13ª | 241 – 260 | | | |
| 14ª | 261 – 280 | | | |



Construya en el plano cartesiano de la derecha una representación gráfica que relacione el número de lanzamientos acumulado con la frecuencia relativa.

Observen las frecuencias relativas en su gráfico, a medida que se van acumulando más datos: ¿Varían mucho o van manteniendo, más o menos, el mismo valor?

Se van manteniendo los datos

Si se mantiene más o menos igual, ¿alrededor de qué valor se mantiene? al rededor de 0,5

Figura 4.11: Solución de Micky al primer experimento del laboratorio ¿Cómo se comporta el azar?

### Federico

El estudiante tiene la idea de que todos los números en una lotería tienen la misma probabilidad de salir en el momento de un sorteo (como se describió en el apartado 4.2.3), sin embargo, existe algo en él que lo lleva a pensar en que una combinación entre números que han salido en sorteos anteriores con números que aún no salen, puede ser una opción que le ayude a poner la probabilidad a su favor. Aunque el estudiante insiste en que todos los números tienen la misma probabilidad de salir, tiende a pensar de forma subjetiva debido a que se deja llevar por sus creencias o por prácticas de otras personas. Sólo en este caso se deja ver la utilización de la concepción subjetivista de la probabilidad por parte del estudiante, puesto que en los demás razonamientos siempre está presente la concepción clásica.

Federico, al igual que Micky, aplica correcta y explicitamente la definición clásica de probabilidad, determinando los casos favorables a un evento y los casos posibles del experimento (en el que cada resultado es equiprobable), usando como estrategias los datos de la situación problema directamente, la lista de elementos del espacio muestral o las técnicas de conteo. Pero adicionalmente, Federico encuentra la equivalencia entre las distintas representaciones numéricas de la probabilidad: fracción, decimal y porcentaje.

Federico, comete el mismo error que Micky al resolver el problema del número telefónico: confunde los casos favorables con los posibles, quizá debido al esquema que hizo lo llevó a pensar que era un solo número el favorable de los que tenía disponibles en el gráfico. Veáse la figura 4.12.

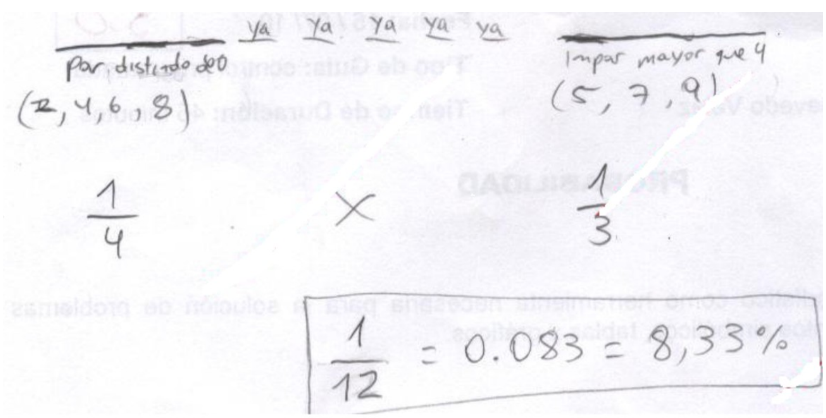



Figura 4.12: Cálculo la probabilidad de un evento por Federico.

> Federico, en los distintos experimentos que hizo en el laboratorio ¿Cómo se comporta el azar? llega a que las frecuencias relativas de los distintos experimentos tienden a un valor constante a medida que se realizan más y más veces los experimentos; además, que este valor es muy cercano al valor que teóricamente se esperaría. Aunque el estudiante mostró entender la concepción frecuencialista de la probabilidad, ésta no es recordada por él en la entrevista que es hecha al final del trabajo de campo. Quizá faltaron más experiencias que afianzaran esta concepción.

**Mary**

Mary, usa la concepción subjetivista de la probabilidad para asignar probabilidades a algunos eventos, es decir, se basa en sus creencias u opiniones para determinar qué tan probable es un evento. Mientras Federico argumentó desde la definición clásica qué probabilidad es más alta: que un estudiante llegue temprano o tarde al colegio, Mary lo hace desde sus creencias, veamos:

> ... yo creo que llegue temprano... pues primero porque uno sabe que tiene que llegar temprano y... uno sale con tiempo por si pasa alguna cosa, por ejemplo, hay la probabilidad de que haya taco o que haya un accidente, pero entonces uno piensa más como salir con tiempo o al menos yo pienso así.

Mary, de igual forma que Micky y Federico, aplica la definición clásica de probabilidad en situaciones donde es válida su utilización. El cálculo de los casos favorables a un evento y los casos posibles del experimento lo hace desde los datos de la situación directamente, desde el espacio muestral o usando las técnicas de conteo. Pero en algunas ocasiones tiene dificultades con el cálculo de los casos favorables y posibles, como se evidencia en la situación problema del número telefónico, aunque el error de Mary es distinto al de Micky y Federico. Ella no confunde los casos favorables con los posibles sino que aunque sabe determinar la cantidad de elementos válidos para algunas de las condiciones de la situación problema, no lo logra con una de las condiciones y confunde la cantidad de elementos que son válidos en total con la cantidad de elementos a tomar, es decir, 7! porque son siete dígitos. En la Figura 4.13 se muestra cómo lo resolvió Mary.

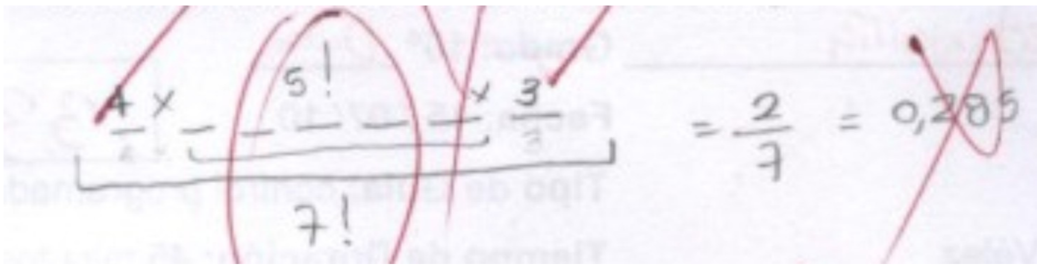



Figura 4.13: Cálculo de la probabilidad de un evento por Mary

En el laboratorio en el que se exploró la definición frecuencialista de la probabilidad, la estudiante encuentra que a medida que aumentan las repeticiones de los experimentos, las frecuencias relativas se mantienen más o menos constantes. Pero Mary, a diferencia de Micky y Federico, no logra encontrar relación entre los valores de las frecuencias relativas y los valores teóricos. Aunque Mary lleva a cabo los experimentos que le son propuestos, no logra construir una conceptualización frecuencialista de la probabilidad como se explicó en los apartados 4.2.3 y 4.2.4.

### Ana

La estudiante usa su conocimiento o experiencia con relación a alguna situación para estimar su probabilidad, sin tener en cuenta si se trata de un fenómeno aleatorio o no. En la entrevista, estimó la probabilidad de ganar un examen así:

> ... primero, lo que uno entiende en clase, cierto, después cuando uno ya está haciendo el simulacro o repasando, uno ve que entiende bien y ya luego llega al examen y pues si uno cree que

> responde bien entonces hay mayor probabilidad de ganar y, comparando con algunas personas... pero si uno entiende y cuando llega y el examen cambia en algunas cosas uno ya sabe que tiene probabilidad de perder.

También usa la definición clásica para calcular la probabilidad de un evento, determinando los casos posibles y los casos favorables desde la información de la situación problema, usando la lista de elementos del espacio muestral o usando las técnicas de conteo. Aunque la estudiante en una situación problema de una prueba escrita y en la exposición de su trabajo de aplicación, se quedó en el cálculo de los casos favorables y escribió este número como el valor de probabilidad que se deseaba calcular. Esto le ha sucedido cuando los casos favorables los calcula usando técnicas de conteo. Además, presenta grandes dificultades cuando requiere calcular los casos favorables y los posibles usando variaciones. Inclusive la situación problema del número telefónico no la logró resolver.

Con relación a la utilización de la definición frecuencialista de la probabilidad, Ana presenta las misma situación que Mary.

### 4.3.2. Construcción de espacio muestral

**Micky**

El estudiante concibe el espacio muestral como el conjunto en el que se muestran el número de casos posibles de una situación (mapa conceptual de probabilidad, mayo 10, 2010). Esta idea de espacio muestral está íntimamente relacionada con la definición clásica de probabilidad. Y reconoce la necesidad de establecer con precisión dicho espacio muestral a partir de las condiciones de un experimento aleatorio, en algunas situaciones en las que no es muy engorrosa su construcción, como apoyo para el cálculo de probabilidades.

El estudiante aplica una estrategia general para construir la lista completa de los elementos del espacio muestral para experimentos de cualquier cantidad de etapas[1]. Además, usa este recurso para calcular probabilidades, como se evidencia en la solución que el estudiante propone a una situación problema en una prueba escrita. La situación es: un empleado de una tienda de comidas rápidas ofrece a sus clientes la posibilidad de armar su hamburguesa. Para ello, pone a disposición del cliente: tocineta, queso y lechuga. El cliente decide si incorpora o no cada ingrediente. Si llega un nuevo cliente a la tienda, a) ¿cuál es la probabilidad de que no añada queso a su hamburguesa? b) ¿cuál es la probabilidad de que añada al menos dos de los ingredientes? En la Figura 4.14 se presenta la forma en que Micky lo resolvió.

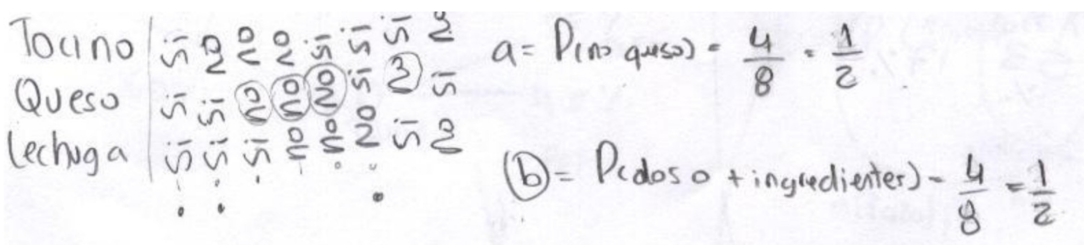



Figura 4.14: Espacio muestral construido por Micky para calcular probabilidades.

Pero es importante anotar que para problemas en los que podría resultar tedioso y poco manejable enumerar los elementos del espacio muestral, el estudiante usa distintas estrategias asociadas a las técnicas de conteo que hacen innecesaria la enumeración directa. Además, a medida que aprende distintas técnicas para el cálculo de probabilidades, no encuentra necesaria la construcción del espacio muestral. Por ejemplo:

[1] En este trabajo se determinarán las etapas de un experimento aleatorio según la cantidad de elementos que tenga cada resultado de dicho experimento. Por ejemplo, el experimento de lanzar una moneda es de una etapa, puesto que los resultados son C (cara) o S (sello), cada resultado tiene un solo elemento; el experimento de lanzar dos veces una moneda es de dos etapas, puesto que los resultados tienen dos elementos: CC, CS, SC, SS.

> ...doce son los totales... ¿cierto? la cara y el dado a la vez [en un experimento que consistía en lanzar una moneda y luego un dado] (entrevista; junio 10, 2010).

**Federico**

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al igual que Micky reconoce su utilidad en el cálculo de probabilidades, sobre todo en casos en los que no identifica fácilmente los casos favorables a cierto evento.

De forma similar a Micky, aplica una estrategia general para construir la lista completa de los elementos del espacio muestral de experimentos de cualquier cantidad de etapas. Federico, a diferencia de Micky, usa la simbología acordada en clase para denotar el espacio muestral y para nombrar los resultados del experimento aleatorio, Federico utiliza una simbolización propiamente matemática, en cambio Micky utiliza una menos “rigurosa”. En la misma situación problema de las hamburguesas, Federico hizo el razonamiento para un experimento de tres etapas como se muestra en la Figura 4.15.

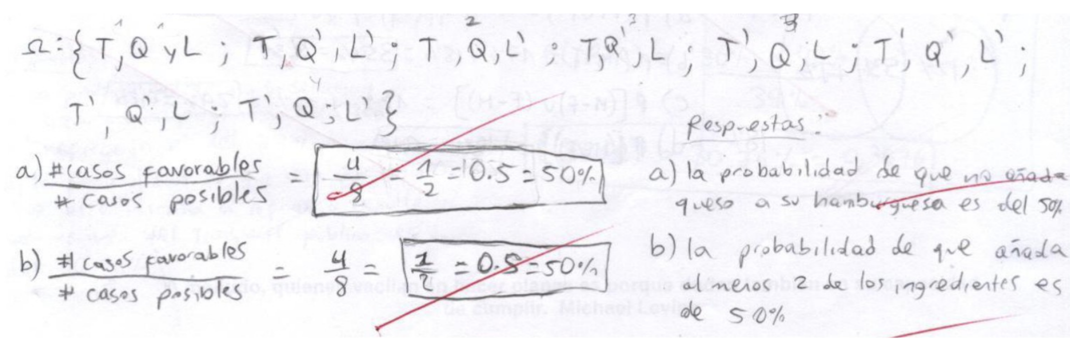



Figura 4.15: Espacio muestral construido por Federico para calcular probabilidades.

A medida que Federico tiene más herramientas para el cálculo de probabilidades recurre con menos frecuencia a la construcción del espacio muestral.

Sin embargo, existen situaciones en las que no es capaz de aplicar las técnicas aprendidas y recurre a la opción de describir el espacio muestral como una manera de tener tangibles los resultados del experimento y poder encontrar la probabilidad que quiere calcular.

**Mary**

En el mapa conceptual de probabilidad, la estudiante describe el espacio muestral de forma similar a como lo hacen Micky y Federico, como el conjunto de todos los casos o resultados posibles de un experimento aleatorio.

La estudiante aplica una estrategia para construir la lista de los elementos del espacio muestral de experimentos de cualquier cantidad de etapas. Además, usa dicha lista para calcular probabilidades usando la definición clásica. Un ejemplo de esta situación es la solución que la estudiante hace a la situación problema de las hamburguesas: ella constituye el espacio muestral del experimento usando símbolos que le ayudan en la enumeración; después, toma de allí los que le sirven para resolver las preguntas de probabilidad. Este problema podría haberse hecho de otra manera, por ejemplo usando combinatorias, pero la estudiante lo hizo usando el espacio muestral, que en este caso era más sencillo dicho proceso que cualquier otro. Véase la Figura 4.16.

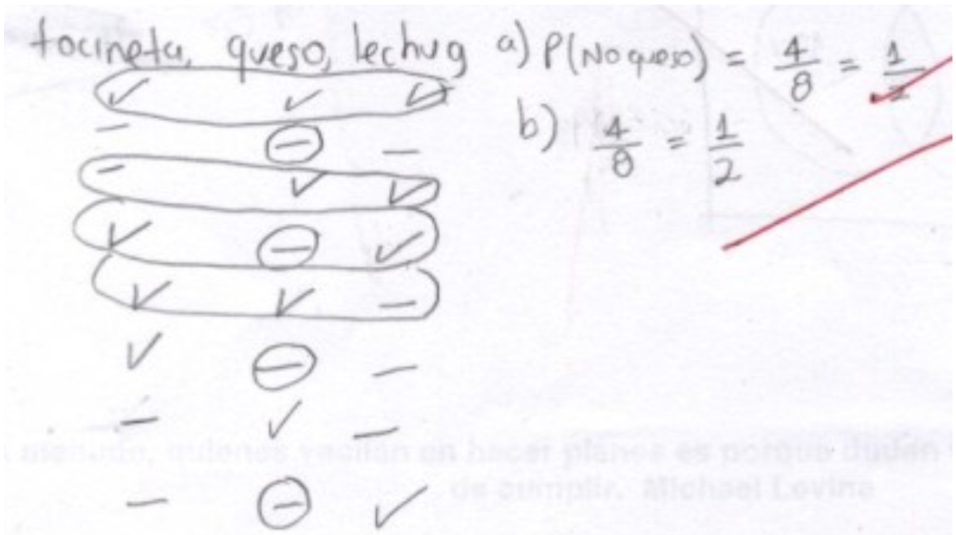



Figura 4.16: Espacio muestra construido por Mary para calcular probabilidades.

Después de conocer las técnicas de conteo y algunos axiomas y teoremas para el cálculo de probabilidades, Mary, pocas veces recurre a la construcción del espacio muestral para resolver situaciones problemas de probabilidad.

**Ana**

La estudiante concibe el espacio muestral de la misma forma que los otros tres compañeros. Además, construye la lista de los elementos del espacio muestral de experimentos aleatorios de hasta cualquier cantidad de etapas, usando una simbología particular que le permite determinar los elementos que cumplen con las condiciones establecidas en dicho experimento. Luego, calcula las probabilidades usando la definición clásica. Para la situación problema de las hamburguesas, Ana construye una solución similar a la de Mary.

### 4.3.3. Uso de la teoría de conjuntos

Los Diagramas de Venn constituyen una herramienta que facilita el cálculo de probabilidades en algunas situaciones problema, por ello es considerado como un elemento esencial en este trabajo sobre la comprensión del concepto de probabilidad, al igual que lo son las operaciones entre conjuntos y las relaciones entre sus definiciones y el lenguaje común.

**Micky**

El estudiante sabe usar los Diagramas de Venn en la solución de situaciones problema de probabilidad: ubica correctamente la información entregada en la situación problema y conoce el significado de términos como "al menos" (como mínimo) y "a lo sumo" (como máximo); sabe responder preguntas sobre la probabilidad de los eventos A o B (relacionados con la unión), o negación de eventos (relacionados con el complemento), entre otros tipos de preguntas en las que pueden intervenir cualquier operación entre conjuntos o combinación de operaciones, para encontrar respuesta a problemas relacionados con la probabilidad. En conclusión, Micky aplica correctamente algunos elementos de la teoría de conjuntos como estrategia alternativa para resolver problemas de probabilidad.

**Federico**

Federico, al igual que Micky utiliza correctamente los Diagramas de Venn y las operaciones entre conjuntos para resolver situaciones problema de probabilidad. Pero adicionalmente, usa una simbología propia de la teoría de conjuntos y de la probabilidad para dar sus respuesta.

**Mary**

La estudiante, de igual modo que Micky y Federico, usa eficazmente los Diagramas de Venn para resolver situaciones problema de probabilidad, representando la información de manera correcta en el diagrama y extrayendo la información del mismo para responder distintas preguntas.

**Ana**

La estudiante, de la misma forma que Micky, Federico y Mary, construye adecuadamente los Diagramas de Venn, ubicando la información aportada en la situación problema, para luego calcular las probabilidades correspondientes. También conoce el significado de términos como "al menos" (como mínimo) y "a lo sumo" (como máximo); sabe responder preguntas sobre la probabilidad de los eventos A o B (relacionados con la unión), o negación de eventos (relacionados con el complemento), entre otros tipos de preguntas en las que pueden intervenir cualquier operación entre conjuntos o combinación de operaciones, para encontrar respuesta a problemas relacionados con la probabilidad, pero algunas veces falla en la interpretación de preguntas del tipo "al menos" o cuando contiene negaciones.

En conclusión, Ana aplica la teoría de conjuntos para resolver problemas de probabilidad. No obstante, en ocasiones se equivoca calculando alguna de las probabilidades pedidas.

### 4.3.4. Aplicación de las técnicas de conteo

Al igual que algunos elementos de la teoría de conjuntos hacen más sencillo el proceso de solución de algunas situaciones problema de probabilidad, las técnicas de conteo que pertenecen a la teoría combinatoria constituyen otra herramienta esencial que ayuda a determinar el número de modos diferentes en que un evento puede ocurrir y por tanto son el entorno ideal para el cálculo de probabilidades. Además, la teoría combinatoria es la base para la formulación de algunos teoremas que simplifican el cálculo de probabilidades y que se describen en el apartado 4.3.5.

**Micky**

El estudiante en su mapa conceptual acerca de las técnicas de conteo, las describe como maneras de encontrar posibles resultados. Esas maneras las identifica en 5 tipos: regla aditiva, regla multiplicativa, variaciones, combinaciones y permutaciones, como se muestra en la Figura 4.17.

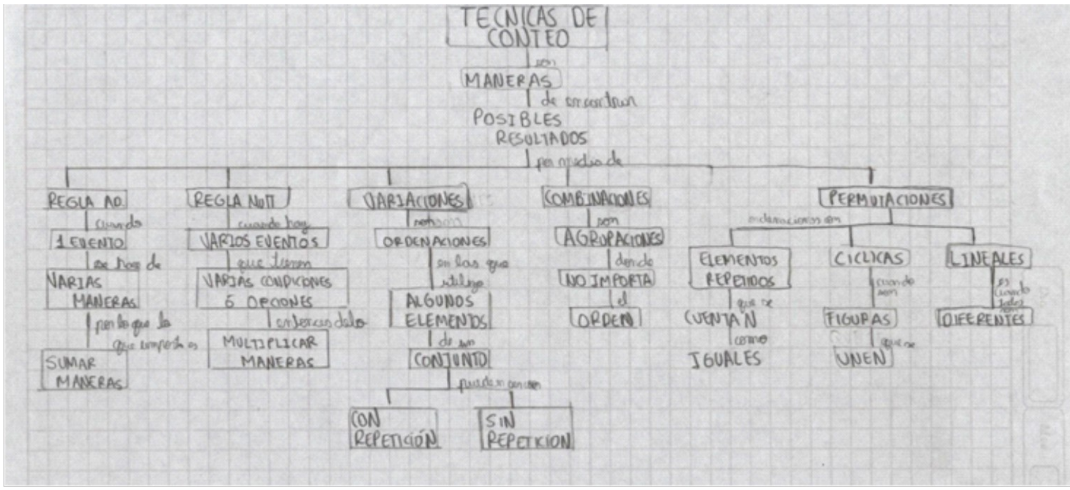



Figura 4.17: Mapa conceptual sobre las técnicas de conteo construido por Micky.

Como se puede notar en el mapa conceptual, el estudiante no relaciona las permutaciones con las variaciones aunque sea un mismo tipo de técnica donde las primeras son un caso particular de las segundas.

Pasando a la utilización de las técnicas de conteo en el cálculo de probabilidades, se inicia con la explicación de una de las más usadas: la regla multiplicativa. Esta regla la aplica el estudiante a situaciones compuestas por varias condiciones que se deben cumplir a la vez y así calcular el total de modos o maneras en que se puede dar dicha situación. También es usada para calcular variaciones o permutaciones. La regla multiplicativa, la emplea para calcular los casos favorables a un evento y los casos posibles de un experimento, para aplicar luego la definición clásica de probabilidad. Por otro lado, la regla multiplicativa está intimamente relacionada con los eventos independientes, por lo cual el teorema correspondiente a este tipo de eventos es usado también por los estudiantes para resolver problemas de probabilidad, calculando la probabilidad de cada condición y luego multiplicando las probabilidades, véase el apartado 4.3.5.

La regla aditiva, asociada al teorema sobre eventos mutuamente excluyentes, es usada correctamente por el estudiante en situaciones en las que se pide calcular la probabilidad de que ocurra un evento u otro, sumando las probabilidades respectivas de los eventos.

Para el caso de las situaciones que requieren la utilización de las combinaciones, el estudiante identifica el número de elementos con los que cuenta para hacer las agrupaciones y su clasificación en subgrupos. Además, tiene en cuenta el tamaño de la muestra que le piden tomar y las condiciones que le impone la situación problema a alguno de sus elementos o a todos. Las combinaciones las usa tanto para calcular los casos favorables como los casos posibles en una situación determinada y luego calcular la probabilidad usando la definición clásica de probabilidad. A continuación se presenta una situación donde se evidencia este hecho:

> Resuelva... A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que constituir una comisión de 5 personas. Si dicha comisión se elige al azar, ¿cuál es la probabilidad de que: a) queden 2 matemáticos y 3 físicos? b) no quede ningún matemático? (prueba escrita; julio 15, 2010). Ver figura 4.18.

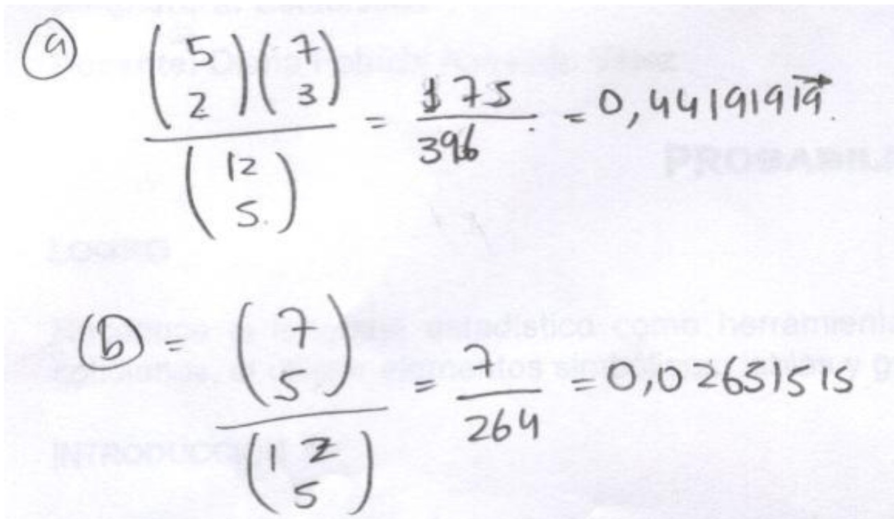



Figura 4.18: Solución de una situación problema de probabilidad realizada por Micky, en la que intervienen las combinatorias.

Cuando se requiere el uso de las variaciones (o las permutaciones), el estudiante reconoce la cantidad de elementos que deben ordenarse y aplica alguna fórmula pertinente o la regla multiplicativa para calcular el número de casos favorables y el número de casos posibles, para después relacionarlos bajo la definición clásica de probabilidad. En resumen, en la solución de situaciones problema, el estudiante identifica con exactitud las técnicas de conteo apropiadas y las aplica correctamente.

### Federico

Federico aplica de forma similar a Micky las técnicas de conteo. Además, las utiliza correctamente en las 2 pruebas escritas y en la entrevista, pero en el trabajo de aplicación no tuvo en cuenta la condición de que en el baloto no importa el orden en que se obtengan las balotas ganadoras y por eso no consiguió la solución de una de las preguntas. Este error pudo ser causado más por falta de atención a las condiciones de la situación problema.

En resumen, en la solución de la mayoría de situaciones problema, el estudiante identifica las técnicas de conteo apropiadas y las aplica correctamente.

**Mary**

La estudiante reconoce que las técnicas de conteo son un instrumento para determinar la cantidad de modos en que se dan ciertos eventos o experimentos. Mary, construye un mapa conceptual sobre dichas técnicas de una forma similar a como lo hace Micky.

Mary identifica la mayoría de las situaciones en las que se aplica la regla multiplicativa: divide la situación en eventos (o por condiciones) que se deben cumplir a la vez, calcula los elementos válidos para las condiciones que impone el problema y luego multiplica las opciones de cada evento. También, usa esta regla para el cálculo de variaciones o combinada con otras técnicas de conteo. Mary aplica la regla multiplicativa y la regla aditiva de la misma manera en que lo hace Micky.

La estudiante presenta grandes dificultades con la utilización de las combinatorias puesto que en algunos casos las confunde con las variaciones. Tiene en cuenta el asunto del orden asociado a las variaciones y no a las combinaciones. Cuando aplica las combinaciones, no tiene en cuenta el tamaño de los grupos que se deben construir, se deja llevar por las condiciones explícitas de la situación problema. A continuación se presenta una situación donde se evidencia este hecho:

> Una muestra de 6 individuos para cierta prueba es seleccionada de un grupo de 20 fumadores y 10 no fumadores. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar muestras que contengan 4 fumadores? (prueba escrita; julio 15, 2010). Ver figura 4.19.

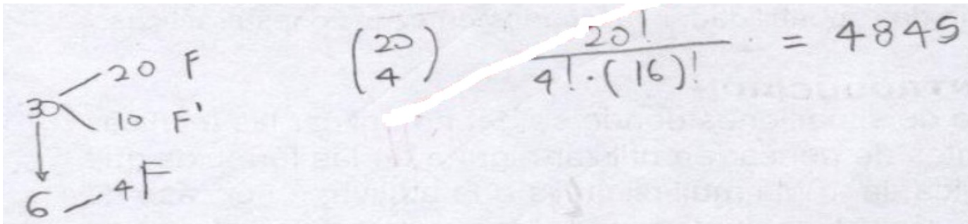



Figura 4.19: Cálculo de combinaciones hecho por Mary

Otro error típico de Mary es que en situaciones problema en las que se requiere la elección de grupos o comités con condiciones específicas, es decir, donde se requiere el uso de las combinatorias o la selección sin reemplazo, confunde los casos posibles de un experimento con el tamaño del grupo que le piden construir y los casos favorables a un evento con las condiciones que impone el problema sobre dicho grupo. No tiene sentido del tamaño de la muestra, trabaja con tantos elementos como condiciones impone el problema, veamos la solución de la situación problema de las 5 matemáticos y 7 físicos en la Figura 4.20.

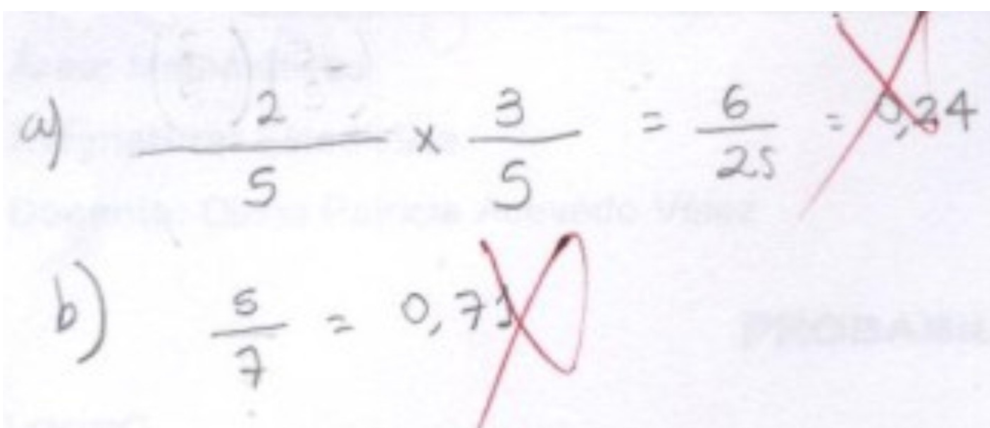



Figura 4.20: Solución de una situación problema de probabilidad realizada por Mary, en la que intervienen las combinatorias.

La estudiante, en la mayoría de los casos calcula las variaciones (o permutaciones) usando la regla multiplicativa para construir los casos favorables a un evento y los casos posibles de un experimento. Es de anotar que la estudiante usa combinación de técnicas de conteo para el cálculo de probabilidades. En conclusión, Mary no siempre reconoce las técnicas de conteo que se requieren para el cálculo de probabilidades, no obstante, aplica la que cree conveniente.

**Ana**

Aplica la regla multiplicativa y aditiva de la misma manera que Micky. Pero en una situación problema de una prueba escrita, usó la regla aditiva en lugar de la multiplicativa.

La estudiante usa las combinaciones para contar el número de agrupaciones que se pueden realizar con unas condiciones particulares y de esta manera determinar los casos favorables a un evento y los casos posibles de un experimento para proceder a calcular la probabilidad del evento, como se evidencia en la respuesta que da a una de las preguntas del trabajo de aplicación:

> ¿Cuál es la probabilidad de ganarse el baloto? Son las combinaciones posibles de 6 números en 45 disponibles y eso da como resultado 8'145.060 diferentes combinaciones. La probabilidad de ganar el mayor del Baloto es de uno en 8'145.060.

Pero en la situación problema de los 5 matemáticos y los 7 físicos, Ana usa las combinatorias para resolverlo, pero comete errores al plantear una de las combinatorias y en lugar de multiplicar las combinatorias, las suma, lo que da a entender que aún no tiene muy claro el uso de la regla aditiva y la multiplicativa. Además, se queda en el cálculo de los casos favorables y olvida por completo los casos posibles. Véase la Figura 4.21.

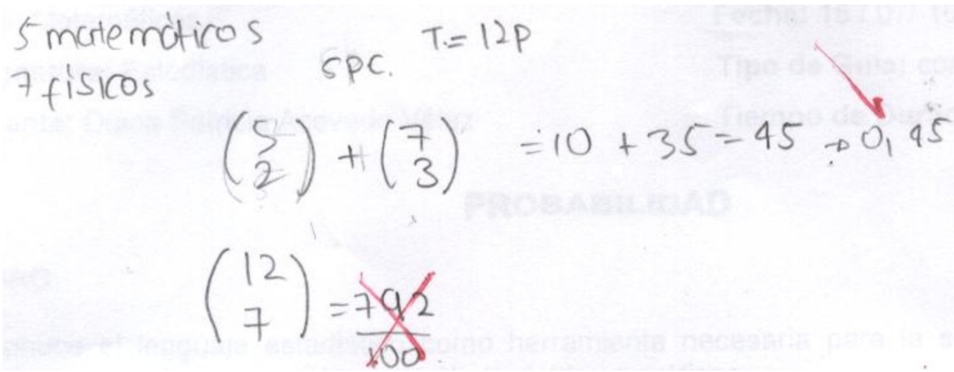



Figura 4.21: Solución de una situación problema de probabilidad realizada por Ana, en la que intervienen las combinatorias.

La estudiante es capaz de usar la fórmula de permutaciones para elementos iguales de forma correcta, pero tiene dificultades para calcular otro tipo de variaciones. Lo que implica que no es capaz de calcular la probabilidad para sucesos en los que importa el orden de ubicación de los elementos.

En conclusión, Ana no siempre reconoce las técnicas de conteo que se requieren para el cálculo de probabilidades, no obstante, aplica la que cree conveniente.

### 4.3.5. Utilización de axiomas y teoremas

**Micky**

El estudiante divide el experimento en eventos independientes para calcular separadamente las probabilidades y luego multiplicarlas, aunque también podría optar por calcular la probabilidad para el experimento completo. Existen varios episodios que ejemplifican esta forma de razonar del estudiante, el primero que se mostrará es una parte de la entrevista que consistió en calcular la probabilidad de ganar en un juego en el que primero se lanza una moneda, si sale cara se lanza un dado gris y si sale sello se lanza un dado blanco. Veamos:

... Olga gana si el número es múltiplo de dos y el dado es blanco, entonces para que el dado sea blanco es porque tuvo que haber sacado sello y, para que haya sacado sello es un medio, y múltiplo de dos hay tres de seis, o sea tres sextos, o sea pues un medio lo voy hacer así más rápido ósea otra vez un cuarto.

El segundo ejemplo, es una parte de una prueba escrita, en la que Micky utiliza la estrategia anterior para calcular la probabilidad que le piden en la siguiente situación problema: cada una de las carrozas de un municipio contiene tres letras, la primera letra se escoge del conjunto $\{B, C, L, R, W\}$, la segunda letra se escoge del conjunto $\{E, I, U\}$ y la tercera del conjunto $\{P, M, N, T\}$. ¿Cuál es la probabilidad que al tomar una carroza en este municipio tenga la placa $CUT$? El estudiante lo resuelve así:

$\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$

Para el caso en que los eventos sean dependientes, el estudiante procedió de la misma manera como hizo el cálculo para eventos independientes. El estudiante adapta la estrategia teniendo en cuenta calcular la nueva probabilidad de cada evento después de ocurrido el anterior.

El estudiante reconoce que el valor de probabilidad de un evento está entre cero y uno. Además, es capaz de calcular la probabilidad para eventos contrarios, así lo hizo en la entrevista:

Profesora: ... si yo te dijera en este momento que hoy 10 de junio del 2010 hay una probabilidad de 0,7 que llueva, ¿cómo entendería esto?

Micky: pues es una probabilidad muy alta porque si la máxima es la unidad, pues 0,7 uno podría decir que es una probabilidad relativamente alta de que puede llover.

Profesora: bueno y ¿cuánto sería la probabilidad de que no llueva?

Micky: que no llueva el 0,3.

**Federico**

Dadas dos condiciones de un problema, si es posible dividirlo en eventos independientes, el estudiante calcula las probabilidades de cada evento y luego las multiplica. Así lo hizo en la entrevista al calcular la probabilidad en el juego de la moneda y los dados gris y blanco:

> ... la jugadora Z dice que ganará si el número es múltiplo de dos y el dado es blanco. Si sale cara tirara un dado gris y si sale sello lanzará un dado blanco. Sello ¿cierto? para que sea un dado blanco, o sea hay un medio de la probabilidad de que salga sello y fuera de eso tiene que el número tiene que ser múltiplo de dos. Los números que son múltiplos de dos en seis caras del dado son: dos, cuatro, seis o sea tres de seis números, la probabilidad también de que ella gane es de tres sobre doce, del veinticinco por ciento pues un cuatro también... (entrevista; septiembre 9, 2010).

La situación problema de las carrozas, es resuelta por Federico de la misma manera que lo hizo Micky.

Federico identifica en las situaciones problema los eventos mutuamente excluyentes, calcula la probabilidad para cada uno de éstos y luego suma las probabilidades. Asocia los eventos mutuamente excluyentes con el conector "o" y en el caso en que los eventos no son mutuamente excluyentes, a la suma hecha le resta la probabilidad de que los eventos ocurran a la vez. Veamos un ejemplo:

> ... la del jugador X es que ganará si el número es impar o múltiplo de cuatro.... ganará si el número es impar o sea el uno, el tres y el cinco o sea tres de seis, entonces "o" se suman y debe dar múltiplo de cuatro, el múltiplo de cuatro que hay es solamente

> el cuatro, cuatro sextos, eso da dos tercios eso da como sesenta y seis por ciento... (entrevista; septiembre 9, 2010).

El estudiante, al igual que Micky, reconoce que el máximo valor de probabilidad es uno o cien por ciento. Además, teniendo en cuenta este valor máximo, también es capaz de calcular la probabilidad de eventos contrarios:

> Profesora: si yo te digiera que la probabilidad de que llueva por estos días es punto siete, ¿tú qué pensarías de eso?
>
> Federico: que es muy alta pues quiere decir que de diez días siete días van a llover, es decir, que el setenta por ciento del cien de los días va a llover, esto quiere decir que casi a diario puede llover esa es una probabilidad muy alta, no se pues, o también a partir de eso puede concluir que en tres de diez días no va a llover... (entrevista; septiembre 9, 2010).

**Mary**

Mary, calcula probabilidades para eventos independientes de la misma manera como lo hacen Micky y Federico, pero en algunas ocasiones confunde los eventos independientes con los mutuamente excluyentes y por ello incurre en errores en el cálculo de probabilidades.

Así calculó la probabilidad para el juego de la moneda y los dados gris y blanco durante la entrevista, usando correctamente el teorema para eventos independientes:

> .... si, entonces.... es como un medio de... porque puede salir cara o sello... y tiene que salir una cara ... que sea menor que cuatro entonces son tres números disponibles... tres, dos y uno a no tiene seis y tiene seis y hay tres posibles... entonces... es que cuando son independientes se multiplican... pero no se si está bien... bueno, un medio por un tercio, ¡ay no! ¿yo por qué estoy

> haciendo esto? Estaba sumando... ¡ay no que pena!... entonces da un cuarto, ¿no?... entonces pues yo creo que sería un cuarto la posibilidad de que el jugador Y gane.

La situación problema de las carrozas, la resolvió igual que Micky y Federico.

La estudiante reconoce, así como Micky y Federico, que cada valor de probabilidad está entre cero y uno, pero en algunas ocasiones pasó por alto resultados en los que la probabilidad excedía ese valor máximo:

> Profesora: ¿qué significa ese tres medios para el jugador X?
>
> Mary: que es la probabilidad de que gane pues... no, si.
>
> Profesora: o sea que de cada dos juegos, ¿el jugador X ganará tres?
>
> Mary: ay... yo no se, es que eso no me da... que ganará tres.
>
> Profesora: ¿tiene sentido que gane tres de dos?
>
> Mary: no se, si, yo creo que si... pues hay no eso no... me da más de uno.
>
> Profesora: da más de uno... claro, tres medios es 1,5
>
> Mary: ¡ay no! entonces pues no, es que tiene que ser pues más bajito que uno, entonces yo no se, lo hice mal (entrevista; junio 10, 2010).

Mary, en algunas ocasiones se confunde al calcular la probabilidad para un evento contrario a otro, dada la probabilidad de uno de ellos. Uno de esos momentos fue en la entrevista:

> Profesora: si yo te digo que hoy hay probabilidad de que llueva de 0,7, mira las nubes grises, ¿tú qué pensarías?
>
> Mary: que si, que pues es alta, pues si como que alta la probabilidad, como que lo que uno observa.
>
> Profesora: ¿y cuál sería la probabilidad de que no llueva?
>
> Mary: más bajita.

> Profesora: ¿y cuánto? ¿Cuánto sería? si la probabilidad de que llueva es 0,7, ¿cuál sería la de que no llueva?
>
> Mary: eee, no se, me imagino que por ahí 0,2 ó 0,3.
>
> Profesora: ¿por qué 0,2? o ¿por qué 0,3?
>
> Mary: porque por ejemplo 0,7 es uno como que lo observa y si pues, o sea en verdad, como que si va a llover, porque uno muchas veces ve nublado pero a medida que va pasando el día en el cielo está más descubierto y sale el sol, pero entonces como uno lo ve, entonces como probablemente si va a llover entonces 0,7 y entonces ya 0,2 uno ve como el cielo más despejado.

**Ana**

La estudiante separa los experimentos en eventos independientes y halla correctamente la probabilidad para cada evento pero en ocasiones no multiplica las probabilidades, así lo hizo en la entrevista para el juego de la moneda y los dados gris y blanco:

> ... hay un medio de probabilidad... de sacar cara o sello, entonces el jugador Y necesita un número menor que cuatro entonces el 1, 2 y 3, entonces serían como tres sextos o sea un medio de probabilidad, pues de que pueda ganar. La de la jugadora W no fui como capaz de sacarle los números pero pues ella tiene que tener un empate o pues todos tiene que perder. El jugador X dice que gana si el número es impar o múltiplo de 4, entonces los números impares serian el 1, el 3, el 5 y el 4, pues sería el único número que quedaría ahí, porque tiene que ser múltiplo de cuatro, entonces yo puse que tiene cuatro sextos de probabilidad de ganar y la jugadora Z dice que tiene que ser un múltiplo de 2 y los múltiplos de 2 son 2, 4 y 6 entonces tres sextos, es un medio, entonces esas son las probabilidades de cada uno.

La estudiante sabe que el máximo valor que puede tener la probabilidad es 1, pero no sabe dar cuenta del por qué, no entiende las razones de que esto ocurra. No existe una apropiación del axioma de probabilidad que dice que la probabilidad de cualquier evento siempre estará en el intervalo $[0,1]$, puesto que al encontrar un número mayor que uno, no existe ninguna reflexión, sino que le parece un resultado viable, como se había expresado anteriormente. Sin embargo, calcula la probabilidad para eventos contrarios de forma correcta. Veamos un ejemplo:

> Profesora: bueno y si yo te digo que la probabilidad de que hoy llueva es de 0,7 tu que piensas de eso.
>
> Ana: es seguro que vaya a llover.
>
> Profesora: entonces, ¿cuál sería la probabilidad de que no lloviera?
>
> Ana: 0,3.
>
> Profesora: ¿cómo la hallaste?
>
> Ana: restándole lo que le faltaba para llegar a uno.
>
> Profesora: y ¿porque será uno?...
>
> Ana: lo máximo, ¿no?... porque es el primer número natural (entrevista; septiembre 2, 2010).

## 4.4. Dimensión de Praxis

En este apartado se presenta cómo el estudiante establece relaciones entre el concepto de probabilidad y su vida.

### 4.4.1. Relación teoría-práctica

**Micky**

Logra relacionar el concepto de probabilidad con su cotidianidad, es decir, con situaciones cercana a él. Aunque usa situaciones que se han mencionado en clase, como es el caso de las loterías. He aquí la situación que se planteó el estudiante para su trabajo de aplicación:

> La revista Vogue está rifando un premio de 300.000 USD en tiendas asociadas, se debe escoger una llave (o más) de tres llaves de entre unas cinco mil, de las cuales existen tres colores: amarillo, rojo y verde. Hay una llave de cada color que abre la caja con el premio. Cuando llegamos, decían que quedaban 500 llaves amarillas, 200 llaves rojas y 700 verdes. Podía escoger 6, escogí tres verdes, 1 amarilla y dos rojas. ¿Cuánta probabilidad hay de que me lo gane? (Diario de campo; mayo 19, 2010).

**Federico**

Desde el análisis de la probabilidad de un evento es capaz de inferir algunas consecuencias para su vida, como lo expresó en la entrevista:

> ... que el setenta por ciento del cien de los días va a llover esto quiere decir que casi diario puede llover esa es una probabilidad muy alta, no se pues, o también a partir de eso puede concluir que en tres de diez días no va a llover... eso de la lluvia puede traer muchos problemas también, por ejemplo, los trancotes.... si siete días va a llover esos siete días pueden haber más problemas para la movilidad... como la probabilidad es tan alta tengo que mantener una sombrilla para no mojarme en el momento en el que llueva.

Además, identifica y establece relaciones entre el concepto de probabilidad y su cotidianidad. Los trabajos de aplicación de sus compañeros y el propio son una muestra de como llevar lo aprendido en el aula para resolver problemas cercanos a su vida. Es más, para resolver la segunda pregunta que se planteó Federico durante el trabajo de campo se requiere el uso de teoría probabilística que aún no ha sido estudiada, lo que puede tomarse como base para estudio posteriores:

> Las loterías, son juegos que involucran el azar, la suerte. Una de ellas es el Baloto. Éste es un juego que consiste en acertar en cualquier orden 6, 5, 4 ó 3 números en una matriz de números del 1 al 45. Se puede jugar a través de un tarjetón que tiene 5 paneles para 5 apuestas distintas. Baloto ofrece un acumulado inicial de \$2.000 millones de pesos, el cual se ira acumulando cada sorteo si no es ganado, hasta poder entregarlo a un nuevo ganador. 1. ¿Cuál es la probabilidad de que uno pueda ganar por lo menos el premio menor, es decir de obtener 3 números de los ganadores? ¿Cuál es la probabilidad de que uno pueda ganar el premio mayor, es decir obtener los 6 números ganadores? 2. Teniendo en cuenta el dato de que de 518 sorteos hechos hasta el 5 de abril de 2006, sólo se han ganado 17 sorteos y que a partir de esta fecha se han ganado otros 18 sorteos en 429 más que han habido, ¿cuál es la probabilidad de que cualquier persona se gane el próximo sorteo? 3. Si se supone que son seis balotas y no importa el orden en las que estén para ganar, ¿de cuántas maneras pueden quedar organizados los seis números escogidos? (Diario de campo; mayo 19, 2010).

**Mary**

La estudiante establece relaciones entre nuevas situaciones y las que han sido estudiadas en el aula de clase en torno al concepto de probabilidad. Por ejemplo, Mary desarrolló un trabajo de aplicación relacionado con el Póker debido al interés que le producía conocer cómo calculaban las probabilidades de sacar distintas manos en los concursos de televisión.

**Ana**

Al igual que Mary, establece relaciones entre nuevas situaciones y las que han sido estudiadas en el aula de clase en torno al concepto de probabilidad. Aunque algunos ejemplos de la aplicación de la probabilidad en su cotidianidad son similares a los trabajados en clase.

### 4.4.2. Relación práctica- teoría

#### Micky

El estudiante realiza generalizaciones sobre los conceptos de azar y probabilidad a partir de las situaciones experimentales que se le presentaron durante el trabajo de campo.

#### Federico

Al igual que Micky, hace generalizaciones desde las situaciones experimentales sobre los conceptos de azar y probabilidad.

#### Mary

La estudiante se limita a describir las experiencias en torno a los conceptos de azar y probabilidad. No hace deducciones más allá de lo tangible o visible.

#### Ana

De la misma forma que Mary, no va más allá de lo tangible o visible cuando se trata de sacar conclusiones frente a las experiencias que tuvo con respecto al azar y la probabilidad.

## 4.5. Dimensión de Formas de comunicación

A continuación se presentan los aspectos que desde el trabajo de campo han surgido como descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad en la comunicación de las ideas.

### 4.5.1. Manejo del lenguaje probabilístico

**Micky**

El estudiante, cuando argumenta sus ideas de forma oral o escrita usa con propiedad el lenguaje probabilístico y la simbología asociada al mismo que se ha manejado en este primer acercamiento al estudio del concepto de probabilidad, estableciendo relaciones con la situación que está explicando.

**Federico**

Cuando expone sus ideas usa un lenguaje probabilístico adecuado y unos términos particulares de la situación problema que está resolviendo o analizando. Además, sus argumentos están basados en la teoría que sobre probabilidad ha sido trabajada y los enriquece con ejemplos que ayudan a esclarecer sus ideas.

> ... es alta [la probabilidad de que un estudiante llegue temprano al colegio] pues si son treinta estudiantes en mi salón, por ejemplo, y dos llegan tarde quiere decir que el.... si el treinta es el cien por ciento, el dos es casi un seis coma algo por ciento... si lo generalizamos más quiere decir que de cien estudiantes siete llegan tarde, para mi la probabilidad de que un estudiante llegue temprano me parece alta...

**Mary**

La estudiante explica sus ideas usando algunos términos propios del lenguaje probabilístico, pero con frecuencia recurre al lenguaje natural. Además, deja de lado la simbolización propia del lenguaje probabilístico en la mayoría de los episodios analizados.

**Ana**

Cuando expone sus ideas, usa con propiedad el lenguaje probabilístico y sus símbolos, y establece relaciones con la situación que está explicando.

### 4.5.2. Comunicación de la solución de problemas

Cuando el estudiante se enfrenta a la solución de una situación problema, lo primero que debe hacer es entender el contexto en el que se desarrolla, las condiciones que se imponen y las preguntas que se hacen alrededor de ésta, para pasar a plantear una estrategia de solución.

**Micky**

Micky en las distintas situaciones problema que se le presentaron en el laboratorio, en las pruebas escritas y en la entrevista, leyó e interpretó la situación problema con sus respectivas condiciones antes de calcular las probabilidades que se le pedían. Esas condiciones estaban en forma de texto, en una gráfico o en una tabla.

A continuación se muestra como Micky es capaz de extraer información de una tabla de doble entrada para relacionarla con las condiciones de las preguntas que se le presentan y la definición clásica de probabilidad en una prueba escrita (agosto 28, 2010):

> La siguiente tabla muestra la relación entre los fumadores y las personas que han tenido alguna dificultad respiratoria:

| *Problemas respiratorios* | | *Fumador* | |
|---|---|---|---|
| | | Si | *No* |
| | *Si* | 58 | 25 |
| | *No* | 9 | 73 |

> a) Si se selecciona al azar una persona fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sufrido problemas respiratorios? b) Si se selecciona una persona que no ha tenido dificultades respiratorias, ¿cuál es la probabilidad de que no sea fumadora? Micky resolvió estas preguntas como se muestra en la Figura 4.22.

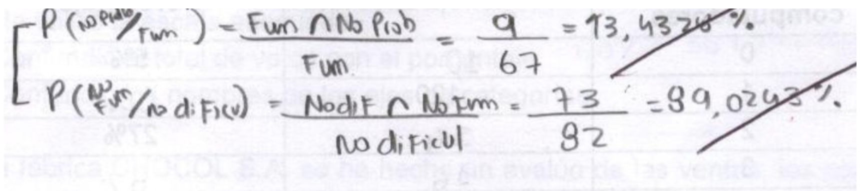


Figura 4.22: Cálculo de probabilidades que Micky hace usando la información de una tabla.

Luego de entender el problema, el estudiante escribe los datos que le proporciona la situación problema, teniendo en cuenta las condiciones particulares, y algunas veces construye diagramas para mostrar las relaciones de unos datos con otros. Luego, construye una estrategia de solución, similar a las trabajadas en clase, usando los distintos conceptos y procedimientos descritos en las Dimensiones de Contenidos y de Métodos.

**Federico**

El estudiante, al igual que Micky, leyó e interpretó las distintas situaciones problema que se le presentaron a lo largo del trabajo de campo con sus respectivas condiciones, antes de calcular las probabilidades que se le pedían. Esas condiciones estaban en forma de texto, en una gráfica o en una tabla. En la mayoría de las situaciones problema, Federico tuvo éxito en sus interpretaciones, pero falló al no tener en cuenta una de las condiciones de la situación problema que resolvió como trabajo de aplicación.

Federico, de la misma manera que Micky, fue capaz de extraer la información presentada en la tabla sobre la relación entre fumadores y los problemas respiratorios, para luego calcular probabilidades condicionadas, usando la definición clásica de probabilidad. También hace la presentación de la solución de problemas de forma similar a Micky. Adicionalmente, escribe e interpreta los valores de probabilidad de tres maneras: fracción, decimal y porcentaje.

**Mary**

Entendió las condiciones de las distintas situaciones problema que se le presentaron a lo largo del trabajo de campo, pero tuvo dificultades con los enunciados en los que se pedían probabilidades en las que intervenían grupos de personas u objetos con condiciones particulares, es decir, situaciones en las que era necesario el uso de las combinatorias.

La estudiante, del mismo modo que Micky y Federico, fue capaz de extraer la información de una tabla de doble entrada y determinar los casos favorables y los posibles según las condiciones para calcular las probabilidades. También hizo la presentación de las solución de problemas de forma similar a Micky y Federico.

**Ana**

Entendió las condiciones de las distintas situaciones problema que se le presentaron a lo largo del trabajo de campo, pero tuvo dificultades en la interpretación de enunciados de probabilidad en los que se debían usar las ordenaciones de objetos para el cálculo de los casos favorables de un evento y los posibles del experimento para calcular la probabilidad.

La estudiante, del mismo modo que Micky y Federico, fue capaz de extraer la información de una tabla de doble entrada y determinar los casos favorables y los posibles según las condiciones para calcular las probabilidades.

Luego de leer y entender el problema, la estudiante extrae la información numérica que le aporta cada situación problema y construye un diagrama con el que se guía para construir la solución. Luego, recurre a alguno de los conceptos o procedimientos descritos en las dimensiones de Contenido y de Métodos, pero en algunas ocasiones no identifica la estrategia adecuada para calcular la probabilidad o existen situaciones en las que hace el cálculo de algunas probabilidades correctamente pero otras no. Existe una falta de secuenciación en la resolución de preguntas de un mismo problema bajo las mismas condiciones.

### 4.5.3. Interacción con el público

**Micky**

En el episodio en el que el estudiante expuso su trabajo de aplicación, mantuvo contacto visual y verbal con sus compañeros y profesora, despertando su interés y atención. Tanto así, que a mitad de su exposición tocaron para que los estudiantes salieran al descanso, pero todos sus compañeros decidieron quedarse para escuchar el resto de la exposición.

**Federico**

Durante la exposición de su trabajo de aplicación las explicaciones del estudiante fueron claras, se notó preparación y seguridad, aunque hayan tenido algunos errores en la solución. Siempre mantuvo la atención del público, usando el contacto visual y gestual.

**Mary**

En el desarrollo de la exposición de su trabajo de aplicación, mantuvo contacto visual, verbal y gestual con sus compañeros y profesora, despertando su interés y atención.

**Ana**

La estudiante se muestra segura ante sus compañeros y profesora en el momento de hacer su exposición. Explica con fluidez, pero algunas veces tiende a leer de las diapositivas porque estas están muy cargadas de información. Mantiene contacto visual y verbal con el público.

### 4.5.4. Manejo de medios en las exposiciones

#### Micky

Este aspecto fue analizado en el episodio sobre la exposición del trabajo de aplicación, en el cual, el estudiante usó distintas herramientas como apoyo para presentar sus ideas: diapositivas agradables a la vista, gráficos, tablero y marcadores, además, los integró adecuadamente en su presentación.

#### Federico

En la exposición de su trabajo de aplicación, el estudiante usó como medio diapositivas que fueron estéticamente agradables a la vista y usadas eficazmente en el desarrollo de la exposición.

#### Mary

Durante la exposición de su trabajo de aplicación usaron una presentación de Power Point. Ésta tenía una diagramación agradable a la vista, con letra legible y gráficos acordes al tema sobre el que construyeron su trabajo: el póker. Además, llevaron un video para mostrar una jugada en uno de los concursos de televisión sobre póker, pero no lo pudieron presentar, así que lo explicaron. La estudiante, usó correctamente la presentación, no obstante su discurso estuvo muy sujeto a lo que en ella tenía escrito.

#### Ana

Para la exposición de su trabajo de aplicación, la estudiante, además de presentar teóricamente su trabajo de aplicación usando diapositivas, hace una parte práctica que ayudó a ejemplificar la situación que estaba planteando. Las diapositivas estuvieron cargadas de información y su discurso estuvo sujeto a su contenido.

# Capítulo 5

# Conclusiones y Recomendaciones

El objetivo de este estudio era investigar las características de la comprensión del concepto de probabilidad según las cuatro Dimensiones de la comprensión propuestas por la EpC. Participaron cuatro estudiantes de décimo grado de una institución educativa de carácter privado de la ciudad de Medellín durante el año 2010. Ellos fueron observados y entrevistados a profundidad. Los datos fueron recogidos en forma de observaciones, entrevistas, y producciones escritas (mapas conceptuales y pruebas escritas) y se analizaron a la luz de las Dimensiones para la comprensión propuestos por la EpC (Boix - Mansilla y Gardner, 1999; Perkins, 1999; Jaramillo y Bermúdez, 1997), las distintas concepciones de la probabilidad a través de la historia (Kasner y Newman, 2007) y la teoría de Heurísticos y sesgos en las solución de problemas de probabilidad (Barragués - Fuentes y Guisasola - Aranzabal 2002).

Los estudiantes presentaron características distintas en el modo de comprender la probabilidad, incluso presentaron algunas dificultades similares a las mencionadas en otras investigaciones (Fernández, 2001; Barragués y Guisasola, 2002). Los rasgos de la comprensión de cada estudiante, descritos en el Capítulo 4, sirvieron de referente para la construcción de cuatro matrices en las que se describe cómo un estudiante comprende la probabilidad desde las cuatro dimensiones de la EpC: los contenidos, los métodos usados para resolver situaciones problema de probabilidad, la aplicación de éste concepto en la vida y las formas en que se puede expresar cómo se comprende la probabilidad. Cada una de estas dimensiones se analizaron con base en unas categorías que se anticiparon como descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad y otras que surgieron durante el análisis. En cada una de estas categorías los estudiantes presentaron distintas formas de conceptualizar, razonar, proceder o expresar, por lo cual se hizo una descripción en cuatro niveles de comprensión, que se mostrará en el apartado siguiente. Además, se describe la forma como se puede lograr que un estudiante avance de un nivel de comprensión a otro.

## 5.1. Matrices de descripción de la comprensión del concepto de probabilidad

Después de realizado el análisis exhaustivo de cada estudiante en las distintas categorías de las cuatro Dimensiones de la Comprensión, se presentan a continuación cuatro matrices, una para cada Dimensión de la comprensión, que contienen unos descriptores del proceso de comprensión del concepto de probabilidad en cuatro niveles de comprensión: ingenuo, principiante, aprendiz y experto.

### 5.1.1. Matriz para la Dimensión de Contenido

En los Cuadros 5.1 - 5.3 se presenta una matriz en la que se relacionan las cuatro categorías: Diferenciación entre experimento aleatorio y determinista, Relación entre azar y probabilidad, Conceptualización de la probabilidad y Redes conceptuales, que se encontraron con el trabajo de campo para describir lo que conceptualmente está ligado a la probabilidad, mostrando en qué medida los conceptos se van transformando desde ideas intuitivas hasta ideas más formales y como los estudiantes han ido tejiendo redes conceptuales cada vez más ricas en torno a la probabilidad a partir de los cuatros niveles de comprensión de la EpC: Ingenuo, Principiante, Aprendiz y Experto.

### 5.1.2. Matriz para la Dimensión de Métodos

En esta matriz se relacionan las cinco categorías: Aplicación de las definiciones subjetivista, clásica y frecuencialista de la probabilidad, Construcción del espacio muestral, Uso de la teoría de conjuntos, Aplicación de las técnicas de conteo, Utilización de axiomas y teoremas, que surgieron en el trabajo de campo como rasgos característicos de los métodos, procedimientos, estrategias y criterios que usan los estudiantes para calcular probabilidades con los cuatro niveles de comprensión propuestos por la EpC.

### 5.1.3. Matriz para la Dimensión de Praxis

Para la construcción de los descriptores de esta dimensión se usaron dos categorías: Relación teoría - práctica y Relación práctica - teoría con las cuales se pretende describir las reconocer en qué medida los estudiantes logran evidenciar la utilidad del concepto de probabilidad, su aplicación en su cotidianidad y cómo desde la cotidianidad también se logra construir teoría.

### 5.1.4. Matriz para la Dimensión de Formas de comunicación

Las categorías que se encontraron pertinentes para analizar la Dimensión de Formas de comunicación fueron: Manejo del lenguaje probabilístico, Comunicación de la solución de problemas, Interacción con el público y Manejo de

Cuadro 5.1: Dimensión de Contenido (conceptualización) I.

| Categoría | Ingenuo | Principiante | Aprendiz | Experto |
|---|---|---|---|---|
| *Diferenciación entre experimentos aleatorios y deterministas* | No distingue entre experimentos aleatorios y deterministas. | Cualquier experimento lo considera de carácter determinista. | Reconoce la existencia de experimentos aleatorios y de su diferencias con los deterministas pero no las logra establecer. | Establece diferencias entre los experimentos deterministas y aleatorios. |
| *Relación entre azar y probabilidad* | No reconoce que exista alguna relación entre los fenómenos regidos por el azar y la probabilidad. Concibe el azar como un caos imposible de entender. | Reconoce que existe una relación entre los fenómenos regidos por el azar y la probabilidad, pero no sabe explicar en qué consiste. | Reconoce que en fenómenos regidos por el azar es posible calcular probabilidades, pero no lo relaciona con alguna regularidad en dichos fenómenos. | Reconoce que en fenómenos regidos por el azar existe cierta regularidad que se puede medir con la probabilidad. |

Cuadro 5.2: Dimensión de Contenido (conceptualización) II.

| Categoría | Ingenuo | Principiante | Aprendiz | Experto |
|---|---|---|---|---|
| *Conceptualización de la probabilidad* | Entiende la probabilidad como un juicio subjetivo sobre la posibilidad de que ocurra algo. | Entiende la probabilidad como un valor asignado a la posibilidad de que ocurra algo en una situación determinada sin tener en cuenta si es o no aleatoria. Además, calcula ese valor usando la definición clásica de probabilidad: razón entre los casos favorables a dicho evento y los casos posibles. | Entiende la probabilidad como un valor asignado a la posibilidad de que ocurra un evento en un fenómeno aleatorio. Además, reconoce que ese valor se calcula usando la definición clásica de probabilidad o la definición frecuencialista. | Entiende la probabilidad como una medida asociada al grado de seguridad sobre la ocurrencia de un evento de un experimento aleatorio. Además, reconoce que esa medida se puede asignar, según la historia, desde tres concepciones: usando las creencias, opiniones, experiencias (subjetivista); calculando la razón entre los casos favorables al evento y los casos posibles del experimento aleatorio (clásica) o calculando la frecuencia relativa del evento, cuando el experimento se ha repetido muchas veces (frecuencialista). |

Cuadro 5.3: Dimensión de Contenido (conceptualización) III.

| Categoría | Ingenuo | Principiante | Aprendiz | Experto |
|---|---|---|---|---|
| *Redes conceptuales* | Las relaciones que establece entre conceptos asociados a la probabilidad se presentan incompletas y sin coherencia. | Las relaciones que establece entre los conceptos o ideas asociados con la probabilidad son simples y determinadas por lo estudiado en el aula de clase. | Construye redes de relaciones entre conceptos o ideas asociadas a la probabilidad. Aunque a veces pueden aparecer contradicciones o ideas incompletas. | Construye redes de conceptos acerca de la probabilidad de una forma organizada, proponiendo ejemplos y generalizaciones. Además, crean nuevas relaciones, ejemplos e interpretaciones de las ideas trabajadas en clase. |

Cuadro 5.4: Dimensión de Métodos (procedimientos) I.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Aplicación de las definiciones subjetivista, clásica y frecuencialista de la probabilidad* | Usa la definición subjetivista de la probabilidad para asignar probabilidades a los eventos. | Independientemente del fenómeno que se le presente, el estudiante aplica la definición clásica de probabilidad, aunque en algunos casos usa procedimientos intuitivos que le hacen cometer errores al asignar la probabilidad a un evento. | Aplica la definición clásica de probabilidad y la definición frecuencialista en fenómenos donde es válida su utilización. | Dependiendo de las condiciones que presente un fenómeno determinado el estudiante es capaz de establecer cuál definición de la probabilidad es más adecuado usar: subjetivista, clásica o frecuencialista. |
| *Construcción del espacio muestral* | Construye de forma incompleta la lista de los elementos del espacio muestral de experimentos de hasta dos etapas, por lo cual comete errores en el cálculo de probabilidades. | Construye de forma completa la lista de los elementos del espacio muestral de experimentos de dos etapas. Pero para experimentos de tres etapas no relaciona los elementos del espacio muestral con las condiciones particulares del experimento, por lo cual comete algunos errores en el cálculo de probabilidades. | Aplica una estrategia general para construir la lista completa de los elementos del espacio muestral de experimentos de hasta tres etapas, como apoyo al cálculo de probabilidades. | Aplica una estrategia general para construir la lista completa de los elementos del espacio muestral de experimentos de más de tres etapas, como apoyo al cálculo de probabilidades. |

Cuadro 5.6: Dimensión de Métodos (procedimientos) II.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Uso de la teoría de conjuntos* | No reconoce que la utilización de la teoría de conjuntos (Diagramas de Venn y las operaciones entre conjuntos) es necesaria en el cálculo de probabilidades. | Intenta aplicar la teoría de conjuntos para calcular probabilidades, reconoce las operaciones requeridas, pero falla en el planteamiento de los Diagramas de Venn. | Aplica la teoría de conjuntos (Diagramas de Venn y las operaciones entre conjuntos) para calcular probabilidades. No obstante, en ocasiones se equivoca calculando alguna de las probabilidades pedidas. | Aplica correctamente la teoría de conjuntos (Diagramas de Venn y las operaciones entre conjuntos) como estrategia alternativa para calcular probabilidades. |
| *Aplicación de las técnicas de conteo* | Ante problemas de probabilidad que requieran el uso de las técnicas de conteo, no reconoce la necesidad de usarlas. | Tiene dificultades en el reconocimiento de alguna de las técnicas de conteo que se requieren para el cálculo de probabilidades, no obstante, aplica la que cree conveniente | Reconoce las técnicas de conteo apropiadas para resolver una situación problema, pero algunas veces las aplica mal. | Usa de manera creativa las técnicas de conteo en el cálculo de probabilidades. |

Cuadro 5.7: Dimensión de Métodos (procedimientos) III.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Utilización de axiomas y teoremas* | No entiende los enunciados de los axiomas y teoremas estudiados acerca del cálculo de probabilidades. | Entiende algunos de los enunciados de los axiomas y teoremas estudiados pero los aplica de forma errónea en el cálculo de probabilidades. | Entiende todos los enunciados de los axiomas y teoremas estudiados y los aplica en el cálculo de probabilidades, pero algunas veces se equivoca en su utilización. | Utiliza eficazmente los teoremas y axiomas estudiados en el cálculo de probabilidades. |

Cuadro 5.8: Dimensión de Praxis.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Relación teoría - práctica* | No encuentra relación entre el concepto de probabilidad y su cotidianidad. | La relación que establece entre el concepto de probabilidad y su cotidianidad está sujeta estrictamente a los ejemplos dados por el docente. | Establece relaciones entre nuevas situaciones y las conocidas, en torno al concepto de probabilidad. | Establece usos creativos de la probabilidad en su cotidianidad sin descuidar el aspecto formal del mismo. |
| *Relación práctica - teoría* | No hace inferencias de las experiencias en torno al concepto de probabilidad. | Se limita a describir las experiencias en torno al concepto de probabilidad. No hace deducciones más allá de lo tangible o visible. | Saca conclusiones de las actividades experimentales desarrolladas en torno al concepto de probabilidad, pero no logra hacer generalizaciones. | Realiza generalizaciones sobre los conceptos de azar y probabilidad a partir de situaciones experimentales. |

medios. A través de estas categorías se describe cómo los estudiantes expresan lo que comprenden, dominan algunos géneros de desempeño y tienen en cuenta a ese otro que los escucha o les interpele.

Teniendo en cuenta estas matrices, se realizó en el siguiente apartado la ubicación de los estudiantes en los niveles de comprensión alcanzados por ellos, en las distintas categorías de las cuatro Dimensiones al finalizar la aplicación de la unidad curricular basada en la EpC.

## 5.2. Clasificación de los estudiantes en niveles de comprensión

Cada una de las matrices descritas anteriormente se constituyen en un tejido conceptual, en el que se caracteriza el proceso de comprensión de los estudiantes visualizado desde cuatro Dimensiones, pero a su vez, se puede usar como herramienta de evaluación de los desempeños de los estudiantes, de tal manera que el proceso evaluativo pueda ir más allá de la calificación y, se pueda convertir en un instrumento de retroalimentación y de identificación de las dificultades y las fortalezas que presentan los estudiantes para luego poderles ayudar a seguir avanzando en la comprensión.

Para el caso de esta investigación, se presenta a continuación el análisis de los niveles de comprensión alcanzados por los participantes del estudio de casos, después de aplicada la unidad curricular. Esta ubicación se hace usando los análisis hechos de cada estudiante en los apartados 4.1 al 4.5 y las matrices del apartado 5.1.

Cuadro 5.10: Dimensión de Formas de comunicación I.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Manejo del lenguaje probabilístico* | Expone sus ideas usando el lenguaje natural con muy pocas referencias al lenguaje probabilístico. | Expone sus ideas usando el lenguaje probabilístico, con algunas referencias al lenguaje natural. | Expone sus ideas usando con propiedad el lenguaje probabilístico. | Expone sus ideas con dominio del lenguaje probabilístico y su simbolización. Además, recurre de manera coherente a analogías. |
| *Comunicación de la solución de problemas* | No entiende el enunciado del problema propuesto, por lo cual no usa los conceptos y procedimientos correspondientes en la resolución de problemas relacionados con la probabilidad. | Entiende el enunciado del problema y lo plantea correctamente, pero en algunos casos utiliza de manera incorrecta los conceptos y procedimientos estudiados para resolver problemas de probabilidad. | Entiende el enunciado del problema, lo plantea y utiliza los conceptos y procedimientos asociados a la probabilidad para resolver problemas en los que intervenga este concepto. | Entiende el enunciado del problema, lo plantea y utiliza de manera creativa los conceptos y procedimientos estudiados, apoyándose en ellos para la argumentación y validación de la solución dada a problemas en los que interviene el concepto de probabilidad. |

**Cuadro 5.12: Dimensión de Formas de comunicación II.**

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Interacción con el público* | No tiene en cuenta el público al cual se dirige en el desarrollo de una exposición asignada. | Mantiene contacto visual con el público pero no permite la participación de éste en el desarrollo de su exposición. | Mantiene contacto visual y verbal con el público, admitiendo interpelaciones. | Mantiene contacto visual y verbal con el público, despertando su interés y atención. |
| *Manejo de medios en las exposiciones* | Elige el medio que debe usar para exponer sus ideas pero no lo sabe utilizar. | Elige el medio que debe usar para exponer sus ideas y lo utiliza adecuadamente. | Elige distintos medios para exponer sus ideas pero le cuesta integrarlos adecuadamente en su presentación. | Elige distintos medios para exponer sus ideas y los integra adecuadamente en su presentación. |

Cuadro 5.13: Niveles de comprensión de los participantes del estudio de casos en la Dimensión de Contenido.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Diferenciación entre experimentos aleatorios y deterministas* | | Federico<br>Mary | Micky | Ana |
| *Relación entre azar y probabilidad* | | | Ana<br>Mary | Micky<br>Federico |
| *Conceptualización de la probabilidad* | | Mary | Ana<br>Federico | Micky |
| *Redes conceptuales* | | Micky<br>Federico<br>Mary | | Ana |

Ninguno de los estudiantes quedó en el nivel de ingenuo, todos alcanzaron alguno de los tres niveles siguientes, lo que significa que a través de las distintas actividades realizadas en el trabajo de campo los estudiantes lograron avanzar en la comprensión de los conceptos relacionados con la probabilidad. Esto se puede evidenciar comparando las ideas iniciales que sobre probabilidad tenían los estudiantes (apartado 4.1) y la conceptualización lograda finalizada la aplicación de la unidad curricular (apartado 4.2.3 y 4.2.4).

Cuadro 5.14: Niveles de comprensión de los participantes del estudio de casos en la Dimensión de Métodos.

| **Categoría** | **Ingenuo** | **Principiante** | **Aprendiz** | **Experto** |
|---|---|---|---|---|
| *Aplicación de las definiciones subjetivista, clásica y frecuencialista de la probabilidad* | | Ana<br>Mary | Federico | Micky |
| *Construcción del espacio muestral* | | | | Micky<br>Federico<br>Mary<br>Ana |
| *Uso de la teoría de conjuntos* | | | Ana | Micky<br>Federico<br>Mary |
| *Aplicación de las técnicas de conteo* | | Mary<br>Ana | Federico | Micky |
| *Utilización de axiomas y teoremas* | | | Mary<br>Ana | Micky<br>Federico |

En la Dimensión de Métodos se puede notar que varios de los estudiantes avanzaron en la comprensión de los métodos, procedimientos y estrategias para el cálculo de probabilidades hasta un nivel de Aprendiz o Experto en la mayoría de las categorías. Este fue un aspecto que se afianzó bastante durante el trabajo de campo, debido a que los estudiantes estuvieron la mayor parte del tiempo resolviendo o analizando situaciones problema que implicaban el cálculo de probabilidades.

Cuadro 5.15: Niveles de comprensión de los participantes del estudio de casos en la Dimensión de Praxis.

| CATEGORÍA | INGENUO | PRINCIPIANTE | APRENDIZ | EXPERTO |
|---|---|---|---|---|
| *Relación teoría-práctica* | | | Micky<br>Federico<br>Mary<br>Ana | |
| *Relación práctica- teoría* | | Ana<br>Mary | | Micky<br>Federico |

Todos los estudiantes del estudio de casos lograron avanzar hasta un nivel de Aprendiz en la relación teoría práctica, porque conectaron lo aprendido sobre el concepto de probabilidad con las posibilidades de ser usado en la vida. En la categoría Relación práctica - teoría se dieron mayores diferencias porque unos lograron avanzar hasta el nivel de experto pero otros quizá requerían de más actividades experimentales que les ayudarán a realizar conjeturas e hipótesis para ser probadas y poder llegar a generalizar o a inferir algunas ideas acerca del azar y la probabilidad.

Cuadro 5.16: Niveles de comprensión de los participantes del estudio de casos en la Dimensión de Formas de Comunicación.

| CATEGORÍA | INGENUO | PRINCIPIANTE | APRENDIZ | EXPERTO |
|---|---|---|---|---|
| *Manejo del lenguaje probabilístico.* | | Mary | Micky<br>Ana | Federico |
| *Comunicación de la solución de problemas* | | Ana<br>Mary | Micky | Federico |
| *Interacción con el público* | | | | Micky<br>Federico<br>Mary<br>Ana |
| *Manejo de medios en las exposiciones* | | Federico | Ana<br>Mary | Micky |

En cuanto a la forma en la que los estudiantes expresaron lo que comprendían se puede encontrar que dos estudiantes avanzaron hasta los niveles de principiante y aprendiz y los otros dos lograron avanzar a aprendiz y experto.

## 5.3. Cómo se avanza de un nivel de comprensión a otro

Desde el trabajo de campo realizado en esta investigación se encontró que una alternativa que permite a un estudiante progresar en su nivel de comprensión del concepto de probabilidad es la utilización de unidades curriculares como la construida para esta investigación, debido a que se encuentra estructurada según la EpC y articulada con los descriptores de la comprensión del concepto en las cuatro Dimensiones. La utilización de unidades curriculares como la que se presenta en este trabajo, implica varias acciones por parte de los docentes y de los estudiantes. Por parte del docente, requiere de un acompañamiento continuo y personalizado del proceso de aprendizaje del estudiante, haciendo la retroalimentación de cada actividad o desempeño que éste realice. Además, la utilización de actividades en las que el estudiante construya conceptos experimentando, conjeturando, discutiendo con sus compañeros y el docente. En el caso del concepto de probabilidad fue de gran utilidad el uso de las simulaciones en la construcción de conocimiento y esto está de acuerdo con investigaciones actuales en la enseñanza de la probabilidad (Batanero, 2003). Por otro lado, cada actividad que se realice debe tener unos criterios de evaluación como se muestra en las Cuadros 3.1, 3.2 y 3.3, para que los procesos de retroalimentación ayuden al estudiante a avanzar en su comprensión del concepto de probabilidad. Las cuatro matrices de las Dimensiones de la Comprensión descritas en el apartado 5.1 pueden utilizarse como instrumento de evaluación del nivel de comprensión que demuestra el estudiante en cada uno de sus desempeños, adaptándolas según las particularidades de cada desempeño, para luego, realizar la retroalimentación correspondiente e ir transformando sus actividades de tal forma que puedan servir para que el estudiante avance en su nivel de comprensión. Lo que quiere decir esto es que en esta forma de concebir la enseñanza el docente debe estar abierto a hacer cambios en sus planeaciones de clase según vaya observando los desempeños de comprensión logrados por sus estudiantes y los niveles alcanzados por los mismos.

Finalmente, el concepto de probabilidad es fundamental en la formación del pensamiento aleatorio en los alumnos de secundaria. Por lo tanto, el diseño de experiencias de aprendizaje que favorezcan su comprensión, les brindará la oportunidad de comprender otros conceptos importantes de la estadística, como también tomar mejores decisiones tanto en su vida profesional como en su entorno. Una manera de entender cómo comprenden los estudiantes el concepto de probabilidad es a través de distintos desempeños que se pueden evaluar desde las dimensiones de contenido, métodos, praxis y formas de comunicación, pero a su vez constituyen una descripción de la comprensión de la probabilidad y pueden enriquecer el panorama tanto de la enseñanza como del aprendizaje y la evaluación de éste. Por otro lado, algunas de las conclusiones a las que llegaron los estudiantes después de esta experiencia de trabajo con la unidad curricular fue que a través de las distintas actividades prácticas se fueron acercando paulatinamente a los conceptos y a su vez pudieron evidenciar que la probabilidad se puede aplicar en distintas situaciones cotidianas.

## 5.4. Aportes a la educación estadística

Esta investigación constituye un aporte a la enseñanza de la probabilidad, un campo que apenas está siendo explorado en nuestro país. En este trabajo se brindan algunas ideas a los docentes para organizar sus prácticas de aula desde un enfoque flexible como lo es el de la EpC, que se ha utilizado muy poco para la enseñanza de la probabilidad. Otro aporte son las matrices de descripción de la comprensión del concepto de probabilidad que amplían el campo de aplicación de la EpC y pueden ser usadas por los maestros en la valoración de los desempeños de sus estudiantes y como insumo para la organización de sus actividades de tal forma que los estudiantes puedan avanzar en sus niveles de comprensión. Por último, la incorporación de los mapas conceptuales en la EpC dinamizó la dimensión de contenidos, porque permiteron comprender los conceptos y comunicar lo comprendido.

## 5.5. Investigaciones futuras

Muchas de las variables en este estudio podrían ser investigadas en el futuro. La longitud del estudio, por ejemplo, los asuntos explorados, o el número de participantes podría ser modificada para conseguir un cuadro mejor, más detallado de la comprensión del concepto de probabilidad.

Una futura investigación en la comprensión del concepto de probabilidad podría aplicar los descriptores de la comprensión para evaluar los niveles de comprensión de los estudiantes y así poder seguir refinando las cuatro matrices de descripción de la comprensión del concepto de probabilidad y posteriormente conseguir un instrumento de evaluación que pudiera ser generalizado y usado en forma de test por los docentes para que se haga más fácil la valoración de los estudiantes, sobre todo en grupos numerosos.

Además, se podría explorar lo que a nivel mental ocurre en el estudiante para que se logre el paso de un nivel a otro de comprensión en las distintas dimensiones, ya que el marco conceptual de la EpC no lo explica y con este estudio sólo logramos llegar hasta dotar al docente de herramientas para que posibilite dicho avance.

También se podría investigar cómo comprenden el concepto de probabilidad estudiantes de distintos niveles educativos para seguir ampliando la teoría sobre la comprensión de este concepto y poder construir reformas a nivel curricular.
Otra posibilidad sería investigar en qué medida la aplicación de la unidad curricular que se propone en este trabajo permite el progreso de la comprensión de un estudiante.

# Apéndice A

# Actividad 1: ¿Cómo se comporta el azar?

Esta actividad fue implementada al inicio del trabajo de campo para explorar el azar, la definición frecuencialista y la definición clásica de la probabilidad.

**COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA**
**PERIODO II**

**Estudiante:**__________________________________ **Grado 10º**____

**Área:** Matemáticas **Fecha:** 08 / 04 / 10

**Asignatura:** Estadística **Tipo de Guía: Laboratorio**

**Docente:** Diana Patricia Acevedo Vélez **Tiempo de Duración:** Una unidad

# ¿Cómo se comporta el azar?

**INDICADORES DE DESEMPEÑO**

- Desarrolla las actividades propuestas en forma ordenada, empleando la notación adecuada en la solución de problemas de probabilidad.
- Hace aportes significativos sobre probabilidad durante los trabajos en equipo.

**INTRODUCCIÓN**

La teoría de las probabilidades y la estadística son ciencias diferentes, pero están estrechamente relacionadas: la primera busca datos numéricos más o menos objetivos para evaluar las posibilidades de un evento futuro, es decir, su grado de certidumbre o verosimilitud; mientras que la segunda utiliza esos datos para proporcionar métodos y técnicas útiles en la toma de decisiones.

Es pertinente señalar que los fenómenos que ocurren en la naturaleza y en la vida cotidiana pueden ser de tres tipos: deterministas, no deterministas o una combinación de éstos. Los primeros se pueden pronosticar con gran precisión, debido a que obedecen a leyes y principios inmutables; tal es el caso, por ejemplo, de los fenómenos químicos, eléctricos, astronómicos, mecánicos, entre otros. Por otro lado, los acontecimientos no deterministas, es decir, aquellos que en mayor o menor grado dependen del azar se llaman aleatorios, palabra que viene del latín alea, la cual significa suerte o azar.

**ACTIVIDADES**

De algunos ejemplos de fenómenos aleatorios y describa por qué los considera de esta naturaleza____________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

Aunque le parezca extraño, el azar sigue sus reglas. Para descubrirlas vamos a realizar algunos experimentos aleatorios.

Van a trabajar en parejas. Cada pareja realizará 3 experimentos, y cada uno de ellos lo repetirá 20 veces. Después juntaremos todos los resultados obtenidos en la clase.

**Experimento 1**: Lancen una moneda y anoten C si sale cara o S si sale sello. Después calculen la frecuencia de cada uno de los resultados.

Tabla 1. Resultados de los lanzamientos de una moneda.

| Experimento | Resultados | | | | | | | | | | Frecuencia | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Moneda (C) (S) | | | | | | | | | | | Cara | sellos |
| | | | | | | | | | | | | |

**Experimento 2**: Lancen un dado y anoten 5 si sale 5 o ≠ si sale un número distinto de 5. Después calculen la frecuencia de cada uno de los resultados.

Tabla 2. Resultados de los lanzamientos de un dado.

| Experimento | Resultados | | | | | | | | | | Frecuencia | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dado (5) (≠) | | | | | | | | | | | 5 | ≠ |
| | | | | | | | | | | | | |

**Experimento 3**: Lancen dos monedas a la vez y anoten CC si salen dos caras, SS si salen dos sellos o CS si salen una cara y un sello. Después calculen la frecuencia de cada uno de los resultados.

| Experimento | Resultados | | | | | | | | | | Frecuencia | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dos monedas (CC) (SS) (CS) | | | | | | | | | | | Cara-cara | Sello-sello | Cara-sello |
| | | | | | | | | | | | | | |

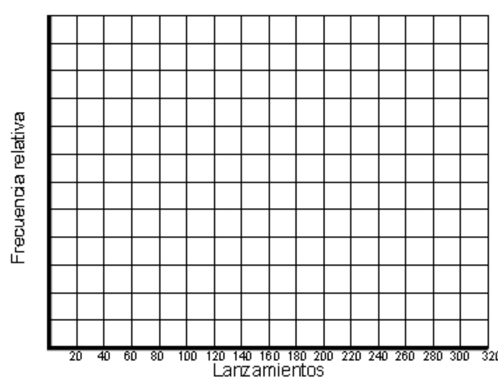
Una vez recogidos sus resultados, agrupen los datos de toda la clase en las siguientes tablas y construyan el respectivo gráfico de frecuencias relativas.

Completen la tabla 3 con los resultados de la clase correspondientes al lanzamiento de una moneda. Van a anotar el número de caras obtenidas.

Tabla 3. Lanzamiento de una moneda: frecuencias de «Cara»

| Parejas | Repeticiones Lanzamiento moneda | Frecuencia "Cara" | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
| ª | 1 – 20 | | | /20= |
| 2ª | 21 – 40 | | | /40= |
| 3ª | 41 – 60 | | | /60= |
| 4ª | 61 – 80 | | | /80= |
| 5ª | 81 – 100 | | | /100= |
| 6ª | 101 – 120 | | | /120= |
| 7ª | 121 – 140 | | | /140= |
| 8ª | 141 – 160 | | | |
| 9ª | 161 – 180 | | | |
| 10ª | 181 – 200 | | | |
| 11ª | 201 – 220 | | | |
| 12ª | 221 – 240 | | | |
| 13ª | 241 – 260 | | | |
| 14ª | 261 – 280 | | | |

**Frecuencias relativas de "cara"**




Construya en el plano cartesiano de la derecha una representación gráfica que relacione el número de lanzamientos acumulado con la frecuencia relativa.

Observen las frecuencias relativas en su gráfico, a medida que se van acumulando más datos:

¿Varían mucho o van manteniendo, más o menos, el mismo valor?
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
Si se mantiene más o menos igual, ¿alrededor de qué valor se mantiene? ________________

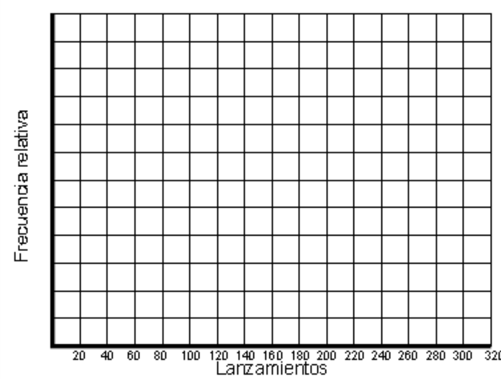
¿El lanzamiento de la moneda se hizo siempre de la misma manera?____________________
¿Cree que esto influyó en los resultados? ¿Cómo?__________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

Llenen la tabla 4, con los resultados de la clase correspondientes al lanzamiento de un dado. Van a anotar el número de "5"obtenidos.

Tabla 4. Lanzamiento de un dado: frecuencias de «5»

| Parejas | Repeticiones Lanzamiento dado | Frecuencia "5" | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
| 1ª | 1 – 20 | | | /20= |
| 2ª | 21 – 40 | | | /40= |
| 3ª | 41 – 60 | | | /60= |
| 4ª | 61 – 80 | | | /80= |
| 5ª | 81 – 100 | | | /100= |
| 6ª | 101 – 120 | | | /120= |
| 7ª | 121 – 140 | | | /140= |
| 8ª | 141 – 160 | | | |
| 9ª | 161 – 180 | | | |
| 10ª | 181 – 200 | | | |
| 11ª | 201 – 220 | | | |
| 12ª | 221 – 240 | | | |
| 13ª | 241 – 260 | | | |
| 14ª | 261 – 280 | | | |

**Frecuencias relativas de "5"**




Construya en el plano cartesiano de la derecha una representación gráfica que relacione el número de lanzamientos acumulado con la frecuencia relativa.

Observen las frecuencias relativas en la gráfica, a medida que se van acumulando más datos. ¿Varían mucho o van manteniendo, más o menos, el mismo valor? ____________________
______________________________________________________________________

Si la frecuencia relativa del resultado «5» se mantiene más o menos igual, ¿alrededor de qué valor se mantiene?_______________________________________________________

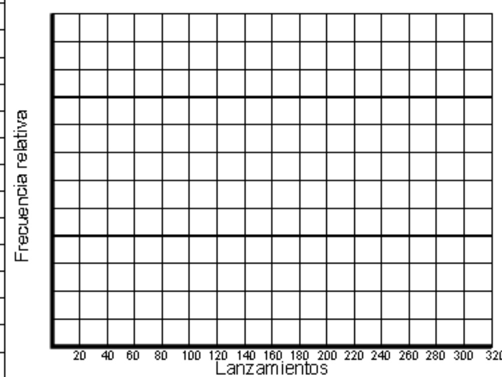
¿Qué similitudes o diferencias encuentran entre los dos experimentos anteriores?__________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

Llenen la tabla 5, con los resultados de la clase correspondientes al lanzamiento de dos monedas. Van a anotar el número de "cara-sello" obtenidos.

Tabla 5. Lanzamiento de dos monedas: frecuencias de «cara-sello»

| Parejas | Repeticiones Lanzamiento dado | Frecuencia "Cara-sello" | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa acumulada |
|---|---|---|---|---|
| 1ª | 1 – 20 | | | |
| 2ª | 21 – 40 | | | |
| 3ª | 41 – 60 | | | |
| 4ª | 61 – 80 | | | |
| 5ª | 81 – 100 | | | |
| 6ª | 101 – 120 | | | |
| 7ª | 121 – 140 | | | |
| 8ª | 141 – 160 | | | |
| 9ª | 161 – 180 | | | |
| 10ª | 181 – 200 | | | |
| 11ª | 201 – 220 | | | |
| 12ª | 221 – 240 | | | |
| 13ª | 241 – 260 | | | |
| 14ª | 261 – 280 | | | |
| 15ª | 281 – 300 | | | |
| 16ª | 301 - 320 | | | |

**Frecuencias relativas de "cara-sello"**




Si la frecuencia relativa del resultado "Cara-sello" se mantiene más o menos igual al ir aumentando el número de lanzamientos, ¿alrededor de qué valor se mantiene? ____________

¿Tiene algo que ver en este experimento que las dos monedas sean de la misma denominación? Explique______________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

**Otras preguntas para reflexionar:**

¿De qué manera influye el hecho de que el total de lanzamientos no haya sido obtenido por la misma persona? ___________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

¿De qué manera cambiarían los resultados si la misma persona realiza el total de lanzamientos con los que se trabajó en las tablas?_____________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

Después de esta experiencia, describa cómo concibe el azar.

Bibliografía: Matemáticas. Contenidos, Actividades y Recursos. (2000) Guías Praxis para el profesorado. España: CISS PRAXIS educación.

# Apéndice B

# Actividad 2: Algunos juegos de azar

Con esta actividad se exploró la definición clásica de la probabilidad, algunos axiomas y teoremas de la teoría axiomática de la probabilidad.

**COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA**
**PERIODO II**

**Estudiante:**__________________________________ **Grado 10º**____

| | |
|---|---|
| **Área:** Matemáticas | **Fecha**: 05/ 05/ 10 |
| **Asignatura:** Estadística | **Tipo de Guía:** Conceptual y ejercitación |
| **Docente:** Diana Patricia Acevedo Vélez | **Tiempo de Duración:** Dos unidades |

## Algunos juegos de azar

### INDICADORES DE DESEMPEÑO

- Identifica y diferencia los tipos de eventos que se distinguen en estadística para calcular sus respectivas probabilidades.
- Reconoce la relación y la diferencia existente entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional.
- Hace aportes significativos sobre probabilidad durante los trabajos en equipo.

### INTRODUCCIÓN

La teoría de la probabilidad nació de la pasión del hombre por los juegos de azar. Éstos se conocen desde épocas remotas, sin embargo no fue sino hasta el siglo XVII en que matemáticos como Fermat y Pascal, alentados por jugadores como el caballero de Meré, conocido jugador de la época y aficionado a las matemáticas, sientan las bases de lo que sería la teoría de las probabilidades.

A medida que transcurrió el desarrollo de la ciencia se encontró que muchos fenómenos naturales, biológicos, físicos, sociales, entre otros, están gobernados por factores casuales, no controlados por el investigador, y por ello pueden ser analizados desde la teoría de la probabilidad.

### ACTIVIDADES

**1. Dado sin truco.**
**Se lanza un dado que no está cargado, calcula la probabilidad de:**
**a) sacar 1.**
**b) Obtener un número mayor que 4.**
**c) Obtener un número menor que 1.**
**d) Obtener un número mayor que 0.**
**e) Obtener un número múltiplo de 5.**
**f) Obtener un número impar.**

**2. Dos monedas.**
**Se lanzan dos monedas a la vez, calcula la probabilidad de que:**
**a) Caiga dos caras.**
**b) Caigan dos cruces.**
**c) Caiga una cara y una cruz.**
**d) Caiga cruz o cara.**

**3. Un dado y una moneda.**
Si se lanza un dado y una moneda a la vez. Indica las probabilidades de cada uno de los eventos:

a) Cara y cualquier número.
b) Cara o cruz y un 5.

c) Cruz y un número mayor que 3.
d) Cruz y un número par.
e) No salga un 2.

**4. Lanzamiento de un dado dodecaédrico.**
El dodecaedro regular tiene doce caras pentagonales iguales. Cuando se lanza un dado de forma dodecaédrica sólo queda encima una de las doce caras, habrá pues doce resultados.
a) ¿Los doce resultados son equiprobables?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7?
c) Calcula la probabilidad de los siguientes eventos o sucesos:
A: sacar un número múltiplo de 2.
B: sacar un número múltiplo de 3.
C: sacar un número múltiplo de 5.

A los resultados de una experiencia aleatoria se les llama **SUCESOS O EVENTOS ELEMENTALES,** que denotaremos con letras mayúsculas. Al conjunto de estos eventos se le denomina **ESPACIO MUESTRAL**. El espacio muestral se representa con la letra griega $\Omega$ (omega).

En este juego de azar el espacio muestral es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. No todos los eventos son elementales. Por ejemplo los sucesos anteriores A, B y C no lo son. ¿Por qué?. Cualquier suceso se puede asociar a un subconjunto del espacio muestral. El suceso A: sacar un número múltiplo de 2, se puede expresar como $A = \{2,4,6,8,10,12\}$.

Además hay eventos que nunca ocurren. Por ejemplo, en este juego nunca saldrá un número negativo ni un número mayor que 20. A estos eventos que jamás se producen se les llama **EVENTOS IMPOSIBLES.** La ***probabilidad de que ocurra un evento imposible es cero***. Los eventos imposibles están asociados al conjunto vacío que se representa con la letra griega $\phi$. También hay eventos que ocurren siempre. En este juego siempre sale un número positivo o un número menor que 13. Los eventos que ocurren siempre se llaman **EVENTOS SEGUROS.** La ***probabilidad de que ocurra un evento seguro es 1.*** A los eventos seguros les corresponde como conjunto el espacio muestral.

d) Expresa los eventos “sacar un número mayor que 10”, “sacar un número mayor que 15” y “sacar un número mayor o igual que 1” como subconjuntos del espacio muestral.

En esta experiencia, si no sale un número par, sale un número impar y recíprocamente. Los eventos “sacar un número para” y “sacar un número impar” se dice que son **EVENTOS CONTRARIOS**, puesto que en cada experiencia se realiza o bien uno de los sucesos o el otro.

e) Calcula la probabilidad de los eventos contrarios para:

- "sacar un número múltiplo de 2"
- "sacar un 10"

Si S es un evento cualquiera, el evento contrario S', se produce sólo cuando no ocurre S. Se verifica P(S)+P(S')=1 y, por lo tanto, P(S') = 1 – P(S)

Algunos eventos no pueden ocurrir simultáneamente. Por ejemplo en nuestra experiencia de lanzar el dado dodecaédrico, no puede salir un número mayor que 5 y, a la vez, un número menor que 2. Se dice que son **EVENTOS INCOMPATIBLES O MUTUAMENTE EXCLUYENTES**. Por otro lado, si los dos eventos pueden ocurrir simultáneamente diremos que son compatibles.

f) Anota un suceso incompatible con el suceso "salir un número múltiplo de 3" y otro que sea compatible.
g) Dos sucesos R y S contrarios ¿son incompatibles? ¿Por qué?
h) Pablo y Marta han preparado un juego. Los dos tienen un dado dodecaédrico. Cada uno lanza su dado. Quien obtenga un número mayor gana y si sacan el mismo número quedan empatados. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Pablo? ¿Cuál es la probabilidad de que gane Marta? ¿Cuál es la probabilidad de que empaten? ¿Te parece que es un juego equitativo? ¿Por qué?

**5. Una moneda y dos dados cúbicos.**
En primer lugar lanzarás una moneda. Si sale cara tirarás un dado gris y si sale sello lanzarás un dado blanco.

a) Escribe el espacio muestral para tal experimento.
b) Calcula la probabilidad de "obtener un resultado del dado gris" o "un número mayor que 2".
c) Calcula la probabilidad de "obtener un resultado del dado gris" y "un número mayor que 2".
d) Calcula las probabilidades de los eventos $M_3$: "sacar un número menor que 3", $M_5$: "sacar un múltiplo de 5" y $M_3 \cup M_5$: "sacar un número menor que 3 o un múltiplo de 5". ¿Existe alguna relación entre los tres valores?

Si A y B son **EVENTOS INCOMPATIBLES**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

e) Calcula las probabilidades de los eventos $S_2$: "sacar un múltiplo de 2", $S_3$: "sacar un múltiplo de 3", $S_2 \cup S_3$: "sacar un múltiplo de 2 o un múltiplo de 3" y $S_2 \cap S_3$: "sacar un múltiplo de 2 y un múltiplo de 3". ¿Existe alguna relación entre estos valores? Explica cómo lo has deducido.

**Probabilidad de la unión para dos eventos cualquiera A y B se verifica:**
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**6. Pongamos condiciones.**
Considera la experiencia de elegir al azar una carta de una baraja española de 48 cartas. El correspondiente espacio muestral es el conjunto de 48 elementos:

$$\Omega = \{O1, O2, O3, ..., 012, B1, B2, B3, ..., B12, C1, C2, C3, ..., C12, E1, E2, E3, ..., E12\}$$

Donde O, B, C y E indican el palo (oros, bastos, copas y espadas)

a) Calcula la probabilidad de los siguientes eventos: $N_3$: "sacar un 3", $N_6$: "sacar un seis", P: "sacar un número par", B: "sacar una carta de bastos" y F: "sacar una figura".
b) ¿Cuál es la probabilidad de los sucesos $B \cap P, F \cap P, F \cap B, N_6 \cap P, N_3 \cap P$?
c) La probabilidad de sacar una carta determinada es $\frac{1}{48}$. Así, $P(O2) = \frac{1}{48}, P(O3) = \frac{1}{48}$... Marta ha sacado una carta y nos informa que le ha salido un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que Marta tenga la carta O2? ¿Crees que continúa siendo $\frac{1}{48}$? ¿Cuál es la probabilidad de que tenga la carta O3?
d) Teniendo en cuenta los eventos del punto a), calcula las probabilidades siguientes: $P(N_3/P)$, $P(N_6/P)$, $P(B/P)$, $P(F/P)$. ¿La información "sacar un número par" ha modificado las probabilidades?

En este punto has calculado $P(N_6/P) = \frac{4}{24}$. Observa que 4 es justamente el número de casos favorables a $N_6 \cap P$ y 24 es el número de casos favorables al suceso P.

Si en la fracción $\frac{4}{24}$ se divide el numerador y el denominador por el número de resultados de la experiencia, 48, se obtiene la igualdad $P(N_6/P) = \frac{4}{24} = \frac{\frac{4}{48}}{\frac{24}{48}} = \frac{P(N_6 \cap P)}{P(P)}$

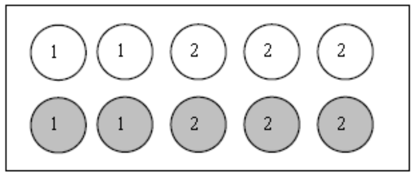
La relación anterior se verifica para cualquier probabilidad condicionada.

Dados dos eventos A y B de una experiencia aleatoria, la **PROBABILIDAD DEL SUCESO B CONDICIONADA AL SUCESO A**, $P(B/A)$, se puede calcular con la fórmula: $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$. El evento A no puede ser imposible dado que su probabilidad sería cero y la fórmula no tendría sentido.

e) Considera los eventos I: "sacar un número impar", S: "sacar un número mayor que 8". Calcula las probabilidades $P(I/S)$ y $P(S/I)$

**7. Urna.**

**Luis ha traído bolas de color blanco o gris, marcadas con un 1 o un 2. Prepara una urna con la siguiente composición:**




**a) Se extrae al azar una bola de la urna. Escriba el espacio muestral.**

**b) Calcula las siguientes probabilidades:**
- **“Sacar una bola blanca que tenga un 1”.**
- **“Sacar una bola gris que tenga un 2”**
- **“Sacar una bola blanca”**
- **“Sacar el número 1”**

**c) Si se elige una bola de la urna y tuvieras que apostar por un color, ¿por cuál apostarías? ¿por qué?**

**d) Pero si por alguna razón consiguieras saber el número que ha salido, por ejemplo 1, ¿influiría en tu decisión sobre la apuesta?**

Si $P(A)=P(A/B)$, el evento A es independiente del evento B. Siempre que $P(A)=P(A/B)$ también se verifica que $P(B)=P(B/A)$. En este caso se dice que A y B son **EVENTOS INDEPENDIENTES**. En caso contrario, se dice que los **EVENTOS** son **DEPENDIENTES**. Cuando los eventos son independientes se cumple que: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

**e) Los eventos “sacar bola blanca” y “sacar 1”, ¿son dependientes o independientes? ¿Por qué?**

**f)**

En ciertos problemas se conoce la probabilidad de que ocurra un evento B dado que A ha ocurrido, lo que se escribe $P(B/A)$, y se quiere determinar la probabilidad de que tanto A como B ocurran. La solución de este problema se facilita mediante la siguiente fórmula de **PROBABILIDAD CONJUNTA:** $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$, si $P(A)\neq 0$

**g) Si se extraen de la misma urna anterior dos bolas sin reposición (la bola que se extrae no se vuelve a introducir en la urna), cuál es la probabilidad de:**
- **Extraer la primera bola con un 1 y la segunda gris.**
- **Extraer una bola blanca y la otra gris.**
- **Extraer una bola gris y la otra con un dos.**

*A eso de caer y volver a levantarte, de fracasar y volver a comenzar, de encontrar el dolor y tener que afrontarlo.*
*A eso..., no le llames adversidad, llámale Sabiduría.*

# Apéndice C

# Prueba escrita: Técnicas de conteo y conjuntos

Esta prueba se hizo previa al inicio del trabajo de campo y sirvió de actividad diagnóstica.

**COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA**
**PERÍODO II**

**Estudiante:** ______________________________ **Grado: 10º** ____

**Área:** Matemáticas **Fecha:** 20/ 04/ 10

**Asignatura:** Estadística **Tipo de Guía:** control programada

**Docente:** Diana Patricia Acevedo Vélez **Tiempo de Duración:** 45 minutos

## EVALUACIÓN PROGRAMADA
## Técnicas de conteo y conjuntos

### LOGRO

Maneja los conceptos básicos de la Teoría de Probabilidad, al aplicarlos en situaciones prácticas.

### INTRODUCCIÓN

**A continuación se presentan una serie de situaciones donde se deben aplicar las técnicas de conteo y la teoría de conjuntos. Antes de pensar en utilizar alguna de las fórmulas que aparecen a continuación, utilice la lógica, la regla multiplicativa o la aditiva, en el caso de las situaciones de técnicas de conteo; y para conjuntos, cada vez que sea posible utilice diagramas de Venn para representar la información.**

**Además, recuerda:**

**Combinaciones**: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

**Variaciones**:

Con repetición: $nV^*r = n^r$

Sin repetición: $nVr = \frac{n!}{(n-r)!}$

**Permutaciones**: $P_n = n!$

Cíclicas: $P_n^* = (n-1)!$

Con elementos iguales:

$$P_n^{**} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

**Cardinal de la unión de tres conjuntos:**

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

### ACTIVIDADES

Resuelva las siguientes situaciones mostrando el proceso de solución.

1. ¿Cuántos números impares tienen 3 cifras y son menores que 500?

2. ¿Cuántas palabras (aunque sea sin sentido) se pueden formar con todas las letras de la palabra MISSISSIPPI?

3. ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de 4 estudiantes de Ciencias Sociales, 2 de Matemáticas y 3 de Biología; de entre 12 estudiantes de Ciencias Sociales, 8 de Matemáticas y 15 de Biología si uno en particular de matemáticas no puede quedar.

4. Una muestra de 6 individuos para cierta prueba es seleccionada de un grupo de 20 fumadores y 10 no fumadores. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar muestras que contengan 4 fumadores?

5. Una encuesta sobre 200 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de tres productos A , B y C :
   5 personas consumían sólo A
   25 personas consumían sólo B.
   10 personas consumían sólo C
   15 personas consumían A y B, pero no C.
   80 personas consumían B y C, pero no A.
   8 personas consumían C y A, pero no B.
   17 personas no consumían ninguno de los tres productos.
   **a)** ¿Cuántas personas consumían A?
   **b)** ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los tres productos?
   **c)** ¿Cuántas personas consumían A o B?
   **d)** ¿Cuántas personas no consumían C ?
   **e)** ¿Cuántas personas no consumían ni C ni A?

***Tu mayor competidor es lo que quieres llegar a ser. Jim Taylor***

# Apéndice D

# Prueba escrita: Probabilidad

Esta prueba se llevó a cabo finalizada la aplicación de la unidad curricular para verificar en qué nivel estaban los procesos y métodos para resolver situaciones problema.

**COLEGIO SAN IGNACIO DE LOYOLA**
**PERÍODO III**

**Estudiante:**___________________________________ **Grado: 10º** ______

**Área:** Matemáticas **Fecha:** 15 / 07/ 10

**Asignatura:** Estadística **Tipo de Guía:** control programada

**Docente:** Diana Patricia Acevedo Vélez **Tiempo de Duración:** 45 minutos

# PROBABILIDAD

## LOGRO

Reconoce el lenguaje estadístico como herramienta necesaria para la solución de problemas cotidianos, al utilizar elementos simbólicos, tablas y gráficos.

## INTRODUCCIÓN

Para desarrollar esta guía control tenga en cuenta la definición clásica de probabilidad:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ ó $P(A) = \dfrac{\#\ de\ casos\ favorables}{\#\ de\ casos\ posibles}$ y las siguientes propiedades:

- Para eventos contrarios se verifica: $P(A)+P(A')=1$ y, por lo tanto, $P(A') = 1 - P(A)$
- Probabilidad de la unión para dos eventos cualesquiera A y B: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- Cuando los eventos son independientes se cumple que: $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

## ACTIVIDADES

Resolver las siguientes situaciones problema mostrando el proceso seguido para ello.

1. Un empleado de una tienda de comidas rápidas ofrece a sus clientes la posibilidad de armar su hamburguesa. Para ello, pone a disposición del cliente: tocineta, queso y lechuga. El cliente decide si incorpora o no cada ingrediente.
   Si llega un nuevo cliente a la tienda:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no añada queso a su hamburguesa?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que añada al menos dos de los ingredientes?

2. Una persona muy distraída ha extraviado el número telefónico de su mejor amigo, pero logra averiguar las 5 cifras intermedias de un total de 7. Sabiendo además que el primer dígito debe ser par, distinto de cero y que la última cifra es impar mayor que 4, ¿cuál es la probabilidad de acertar al número de teléfono de su amigo?

3. Un 65% de los alumnos de un centro han aprobado Matemáticas, un 70% ha aprobado Filosofía, y un 53% ha aprobado ambas materias. Si se elige al azar un estudiante de este grupo, calcule la probabilidad de que:
   a) haya aprobado al menos una de las dos materias.
   b) no haya aprobado matemáticas.
   c) haya aprobado sólo una materia.
   d) no haya aprobado ninguna.

4. A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que constituir una comisión de 5 personas. Si dicha comisión se elige al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:
   a) queden 2 matemáticos y 3 físicos?
   b) no quede ningún matemático?

5. En un estudio realizado en cierta universidad, se ha determinado que un 40% de sus estudiantes utilizan los transportes públicos para acudir a sus clases, de éstos, un 30% están inscritos en un refrigerio universitario mientras que un 45% de los estudiantes que no utilizan los transportes públicos, también están inscritos en dicho refrigerio.
   a) Si se selecciona al azar un estudiante de esta universidad, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el refrigerio universitario?
   b) Calcule la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante de esta universidad que está inscrito en el refrigerio universitario, resulte ser usuario de los transportes públicos.

**A menudo, quienes vacilan en hacer planes es porque dudan también en su capacidad de cumplir. Michael Levine**

# Apéndice E

# Prueba escrita: Estadística descriptiva y probabilidad

Esta prueba escrita fue aplicada un mes después de terminado el trabajo con la unidad curricular. De ella se retomaron los numerales 4 y 7 para ser analizado el proceso de resolución por parte de los participantes del estudio de casos.

4. Cada una de las carrozas de un municipio contiene tres letras. La primera letra se escoge del conjunto {B, C, L, W, R}, la segunda letra se escoge del conjunto {E, I, U} y la tercera del conjunto {P, M, N, T}.

¿Cuál es la probabilidad que al tomar una carroza en este municipio ésta tenga la placa CUT?

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{20}$
C. $\frac{1}{60}$
D. $\frac{1}{12}$

7. La siguiente tabla muestra la relación entre los fumadores y las personas que han tenido alguna dificultad respiratoria:

| | | Fumador | |
|---|---|---|---|
| | | Si | No |
| *Problemas respiratorios* | Si | 58 | 25 |
| | No | 9 | 73 |

a) Si se selecciona al azar una persona fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sufrido problemas respiratorios?
b) Si se selecciona una persona que no ha tenido dificultades respiratorias, ¿cuál es la probabilidad de que no sea fumadora?

# Apéndice F

# Protocolo de entrevista

Se buscó indagar sobre las construcciones hechas por los estudiantes, sobre el concepto de probabilidad, durante el trabajo realizado en el aula y contrastar con lo encontrado en las pruebas escritas, en los mapas conceptuales y en las observaciones.

Fecha: ________________________________

Lugar:_________________________________

Entrevistador(a): Diana Patricia Acevedo Vélez

Entrevistado(a): ________________________

Introducción

En este momento me encuentro realizando una investigación en la maestría que estoy estudiando en la Universidad de Antioquia y me gustaría conocer tu opinión sobre algunos aspectos relativos al curso de estadística y conocer algunas concepciones que tienes con respecto al concepto de probabilidad.

Característica: semiestructurada.

Duración: ______________

Preguntas

1. Describe cómo se dieron las clases de estadística del segundo período.

2. ¿Encuentras algunas diferencias o similitudes con las clases del primer período? ¿cuáles?

3. ¿En cuál de los dos períodos sentiste que aprendiste más?

4. Cuando escuchas la palabra probabilidad, ¿en qué es lo primero que piensas?

5. ¿Cuáles son las diferencias o similitudes entre eso que piensas y lo que pensabas antes de ver este concepto aquí en el colegio?

6. Cuéntame qué crees que motivó al hombre para construir una teoría de la probabilidad.

7. Describe uno o más momentos de tu vida en los que hayas usado la probabilidad.

8. Si yo te digo que la probabilidad de que llueva por estos días es 0,7, ¿cómo interpretas ese valor?

9. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva?

10. Si fueras a jugar una lotería ¿a qué número le apostarías?

11. ¿Qué es más posible: que un estudiante llegue tarde o temprano al colegio?

12. ¿Cuál tiene más probabilidad: sacar seis en un dado o cara en una moneda? ¿Por qué?

13. Te voy a contar una anécdota: "El matemático inglés John Kerrich, mientras fue prisionero de los alemanes durante la Segunda Guerra Mundial, lanzó una moneda 10.000 veces. Resultando 5.067 caras, una razón de 0,5067" . ¿Qué piensas de esta experiencia?

14. ¿Cuáles son las diferencias o similitudes existentes entre los siguientes experimentos: calcular el tiempo de caída de un objeto que se tira de un segundo piso de una casa y lanzar un dado?

15. Muéstrame cómo resolverías la siguiente situación: cuatro amigos (Pablo, Marta, Emilio y Olga) se inventaron un juego. En primer lugar tirarán una moneda. Si sale cara tirarán un dado gris y si sale sello lanzarán un dado blanco. Pablo ganará si la moneda sale cara y el número en el dado es menor que 4. Olga ganará si el número es múltiplo de 2 y el dado es blanco. Emilio ganará si el número es impar o múltiplo de 4. Marta observa que se pueden producir empates y decide, de acuerdo con sus amigos, que será la única ganadora siempre y cuando se produzca un empate o bien cuando no gane ninguno de sus compañeros. ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno de los amigos? ¿Se trata de un juego equitativo? ¿Por qué?

Gracias por tu tiempo y disponibilidad.

# Apéndice G

# Consentimiento de participación

Debido a que los participantes del estudio de casos eran menores de edad, se solicitó con este instrumento el permiso para que los estudiantes participaran y pudieran ser video grabados, entrevistados y proporcionaran sus producciones escritas.

**Consentimiento de Participación**

Nosotros, ________________________________ y ________________________________
estamos de acuerdo en que nuestro hijo(a)________________________________________
participe en la investigación titulada "Comprensión del concepto de probabilidad" que es conducida por Diana Patricia Acevedo Vélez, estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia y profesora de Estadística del Colegio San Ignacio de Loyola. Esta investigación cuenta con la asesoría de los Doctores Carlos Mario Jaramillo López[1] y Pedro Vicente Esteban Duarte[2].

Entendemos que la participación de nuestro(a) hijo(a) es voluntaria y podemos decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Podemos pedir que la información relacionada con nuestro(a) hijo(a) sea regresada a nosotros o sea destruida.

***Propósito de la investigación:*** El propósito de este estudio es caracterizar la comprensión del concepto de probabilidad.

***Beneficios:*** El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Estadística.

***Procedimiento:*** Como participante en este estudio nuestro(a) hijo(a) será observado(a) en clase, algunas veces video grabado(a), entrevistado(a) y proporcionará sus producciones de clase. De ser necesario, será fotografiado(a).

***Riesgos:*** No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

***Confidencialidad:*** Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

***Preguntas posteriores:*** Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico diana.maestria@gmail.com

***Consentimiento:*** Entiendo que firmando esta autorización estamos de acuerdo en que nuestro(a) hijo(a) tome parte de esta investigación.

| ________________________ | ________________ | ________________ |
|---|---|---|
| Nombre del investigador | Firma | Fecha |
| ________________________ | ________________ | ________________ |
| Nombre de la madre | Firma | Fecha |
| ________________________ | ________________ | ________________ |
| Nombre del padre | Firma | Fecha |

[1] Profesor de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia.
[2] Profesor del departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Eafit.

# Apéndice H

# Divulgación del trabajo de investigación

En este apartado se presenta una descripción de los artículos realizados durante el proceso de la elaboración de la investigación y se muestra cada una de las ponencias realizadas en el mismo periodo, las cuales muestran los avances que se iban obteniendo durante el proceso.

## H.1. Artículos

Durante el proceso de investigación se realizaron tres artículos, de los cuales dos fueron publicados y el otro está en construcción.

Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de último grado de bachillerato

**Resumen:** Por su importancia en la formación de futuros profesionales o de ciudadanos que deben tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, el concepto de probabilidad es un tema de actualidad en investigación en Educación Matemática. En la literatura especializada se muestran las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria y de los primeros años de universidad en la resolución de problemas relacionados con éste concepto. Pero poco se ha escrito sobre cómo los estudiantes lo interpretan o como lo pueden comprender de una forma adecuada y aplicarlo en diversas situaciones correspondientes a su contexto. Nuestra investigación, caracteriza la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de último grado de bachillerato, utilizando el Marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC). Además, presenta herramientas a los profesores para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión del concepto en sus alumnos.

**Estado:** Publicado

**Revista:** Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Medellín. Editorial Universidad de Medellín, 2010, pp 65 y 66. ISBN: 978-958-8348-89-6

EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN • GRUPO DE INVESTIGACIÓN SUMMA

PONENCIA

# COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD EN ESTUDIANTES DE ÚLTIMO GRADO DE BACHILLERATO

*Diana Patricia Acevedo Vélez*[*]
*Carlos Mario Jaramillo López*[**]
*Pedro Vicente Esteban Duarte*[***]

## CONTEXTO

En la literatura especializada se muestran las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria y de los primeros años de universidad en la resolución de problemas relacionados con el concepto de probabilidad, [1], [2], [3]. Pero poco se ha escrito sobre cómo los estudiantes lo interpretan o cómo lo pueden comprender de una forma adecuada y aplicarlo en diversas situaciones correspondientes a su contexto [4].

Nuestra investigación caracteriza [5] la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de último grado de bachillerato, utilizando el marco conceptual de enseñanza para la comprensión (EpC). Además, presenta herramientas a los profesores para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión del concepto en sus alumnos [6].

*Objetivos:* compartir algunos resultados obtenidos en relación con la forma como interpretan los estudiantes el concepto de probabilidad y estrategias para promover su comprensión en situaciones en contexto:

*Metodología:* se expondrán los resultados obtenidos en la caracterización de la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes del último año de bachillerato, de acuerdo con el marco pedagógico de la enseñanza para la comprensión.

*Resultados:* a partir de la caracterización de la comprensión que tienen los estudiantes se diseñaron módulos de instrucción, para ayudarle a los docentes estructurar una intervención de aula con el propósito de que sus alumnos adquieran un aprendizaje significativo del concepto de probabilidad.

*Conclusiones:* el concepto de probabilidad es fundamental en la formación del pensamiento aleatorio en los alumnos de secundaria. Por lo tanto, el diseño de experiencias de aprendizaje que favorezcan su comprensión ayudará en la formación de profesionales y ciudadanos que puedan tomar mejores decisiones en su entorno.

PALABRAS CLAVE: enseñanza para la comprensión, elementos de la comprensión, dimensiones de la comprensión, probabilidad.

[*] Estudiante de Maestría en Educación, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. E-mail: dianapacevedo@gmail.com
[**] Docente de tiempo completo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. E-mail: cama@matemáticas.udea.edu.co
[***] Docente de tiempo completo del Departamento de Ciencia Básicas de la Universidad Eafit. E-mail: pesteban@eafit.edu.co



FORMACIÓN Y MODELACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## REFERENCIAS

[1] Fernández - Morales, A. (2001). Obstáculos para la enseñanza de la probabilidad en los estudiantes de economía y administración y dirección de empresas. Jornadas europeas de estadística. Palma de Mallorca Universidad de Málaga.

[2] Barragués - Fuentes, J. y Guisasola - Aranzabal, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 24* (2), pp. 241-256.

[3] Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Relime, 8* (3), pp. 247-263.

[4] Zapata-Cardona, L. (2008). Teachers' understanding of students' conceptions about chance: An expert-novice contrast. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Georgia, Estados Unidos.

[5] Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). Metodología de la Investigación. México: McGraw Hill.

[6] Blythe, T. y Perkins, D. (1999). La enseñanza para la comprensión. Guía para el profesor. Buenos Aires: Paidós.

Caracterización de la comprensión del concepto de probabilidad

**Resumen:** Debido a la importancia que adquiere el concepto de probabilidad en la formación del pensamiento aleatorio de los estudiantes a nivel de la secundaria como de la universidad, por su aplicación en diversos campos del saber, se investigó sobre la comprensión de este concepto, a través de un estudio de casos, para el cual se eligieron cuatro estudiantes para analizar a profundidad su proceso de compresión del concepto de probabilidad, éstos presentaron características distintas en el modo de comprender la probabilidad, incluso presentaron algunas dificultades similares a las mencionadas en otras investigaciones. Los rasgos de la comprensión de cada estudiante sirvieron de referente para la construcción de cuatro matrices en las que se describe cómo un estudiante comprende la probabilidad desde las cuatro dimensiones de la EpC: los contenidos, los métodos, la praxis y las formas de comunicación. Cada una de estas dimensiones se analizó con base en unas categorías que se anticiparon como descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad y otras que surgieron durante el análisis. En cada una de estas categorías los estudiantes presentaron distintas formas de conceptualizar, razonar, proceder o expresar, por lo cual se hizo una descripción en cuatro niveles de comprensión. Además, se describió la forma como se puede lograr que un estudiante avance de un nivel de comprensión a otro.

**Estado:** Publicado

**Revista:** Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Medellín. Editorial Universidad de Medellín, 2011, pp 94 y 95. ISBN: 978-958-8692-23-4

Ponencia

# CARACTERIZACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

*Diana Patricia Acevedo Vélez**
*Carlos Mario Jaramillo López***
*Pedro Vicente Esteban Duarte****

## RESUMEN

Existe una gran diversidad de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de probabilidad, pero no abundan estudios que aborden los aspectos relativos a su comprensión. El trabajo de investigación que se presentará caracterizó la comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de décimo grado, a través de cuatro niveles propuestos en el marco conceptual de la Enseñanza para la comprensión (EpC) [1].

Para llegar a esta caracterización, se construyó y aplicó una unidad curricular [2], la cual contiene estrategias que potencian el desarrollo de la comprensión, a través de la motivación e interés hacia la solución y formulación de problemas de probabilidad por parte de los estudiantes.

Antes, durante y después del proceso de aplicación de la unidad curricular se produjeron los datos a través de elaboraciones escritas, observaciones y entrevistas que posteriormente fueron analizados usando el sofware Atlas. ti6 [3]. Se eligieron cuatro estudiantes para analizar a profundidad su proceso de compresión del concepto de probabilidad; éstos presentaron características distintas en el modo de comprender la probabilidad, incluso presentaron algunas dificultades similares a las mencionadas en otras investigaciones [4], [5]. Los rasgos de la comprensión de cada estudiante sirvieron de referente para la construcción de cuatro matrices en las que se describe cómo un estudiante comprende la probabilidad desde las cuatro dimensiones de la EpC: los contenidos, los métodos usados para resolver situaciones problema de probabilidad, la aplicación de este concepto en la vida y las formas en que se puede expresar cómo se comprende la probabilidad. Cada una de estas dimensiones se analizó con base en unas categorías que se anticiparon como descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad, y otras que surgieron durante el

---

* Estudiante de Maestría en Educación, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Correo electrónico: dianapacevedo@gmail.com

** Docente de tiempo completo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: cama@matematicas.udea.edu.co

*** Docente de tiempo completo del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Eafit. Correo elec-

análisis. En cada una de estas categorías los estudiantes presentaron distintas formas de conceptualizar, razonar, proceder o expresar, por lo cual se hizo una descripción en cuatro niveles de comprensión. Además, se describe la forma como se puede lograr que un estudiante avance de un nivel de comprensión a otro.

## OBJETIVOS

Compartir los resultados obtenidos en relación con la forma como comprenden los estudiantes el concepto de probabilidad, y cómo promover el avance de un nivel de comprensión a otro.

## METODOLOGÍA

Se expondrán los resultados obtenidos en la caracterización de la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado, de acuerdo con el marco conceptual de la EpC.

## RESULTADOS

Caracterización de la comprensión del concepto de probabilidad según dimensiones, categorías y niveles de comprensión. Además, una unidad curricular para estructurar la enseñanza de este concepto.

## CONCLUSIONES

El concepto de probabilidad es fundamental en la formación del pensamiento aleatorio en los estudiantes de secundaria. Por lo tanto, conocer cómo el estudiante comprende este concepto es un aporte que favorece tanto su enseñanza como su aprendizaje.

**Palabras clave:** enseñanza para la comprensión, elementos de la comprensión, dimensiones de la comprensión, probabilidad, niveles de comprensión.

## REFERENCIAS

[1] Boix-Mansilla, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En: M. Stone Wiske (comp). La enseñanza para la comprensión. Argentina: Paidós. pp. 215-256.

[2] Blythe, T. y Perkins, D. (1999). La enseñanza para la comprensión. Guía para el profesor. Buenos Aires: Paidós.

[3] Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). Metodología de la Investigación. México: McGraw Hill.

[4] Fernández-Morales, A. (2001). Obstáculos para la enseñanza de la probabilidad en los estudiantes de economía y administración y dirección de empresas. Jornadas europeas de estadística. Palma de Mallorca Universidad de Málaga.

[5] Barragués-Fuentes, J. y Guisasola-Aranzabal, J. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 20 (2),* pp. 285-302.

## H.2. Ponencias

A continuación se hace una relación de las ponencias internacionales, regionales y locales en las que fueron socializados los avances del trabajo de investigación.

**Ponencia:** *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de último grado de bachillerato.* II Congreso Internacional de Formación y Modelación en ciencias básicas, Departamento de Ciencias básicas, Universidad de Medellín, mayo 5-7, 2010

Resumen

Por su importancia en la formación de futuros profesionales o de ciudadanos que deben tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, el concepto de probabilidad es un tema de actualidad en investigación en Educación Matemática. En la literatura especializada se muestran las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria y de los primeros años de universidad en la resolución de problemas relacionados con éste concepto. Pero poco se ha escrito sobre cómo los estudiantes lo interpretan o como lo pueden comprender de una forma adecuada y aplicarlo en diversas situaciones correspondientes a su contexto. Nuestra investigación, caracteriza la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de último grado de bachillerato, utilizando el Marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC). Además, presenta herramientas a los profesores para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión del concepto en sus alumnos.

**Ponencia:** *Análisis e interpretación de datos desde diferentes fuentes como una manera de estudiar la comprensión del concepto de probabilidad.*

Sixth International Congress of Qualitative Inquiry, University of Illinois, Urbana-Champaign, Estados Unidos, mayo 26-29, 2010

Resumen

El proyecto de investigación cualitativa: Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de la interfase bachillerato universidad, que tiene como marco teórico la Enseñanza para la Comprensión, responde a la crisis existente con respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Se pretende compartir con la comunidad internacional un análisis e interpretación de los datos recolectados mediante un estudio de casos, usando distintas fuentes: mapas conceptuales, portafolios de actividades, entrevistas, entre otros, como una manera de estudiar a profundidad una situación escolar particular, en este caso la comprensión del concepto de probabilidad.

**Ponencia:** C*omprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado de bachillerato.* XII Seminario de Estadística Aplicada del IASI, VII Coloquio Regional de Estadística y III Escuela de Verano del CEAES, Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, julio 20-23, 2010

Resumen

Existe una gran diversidad de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de probabilidad, pero se encuentran pocos estudios que abordan los aspectos relativos a su comprensión por parte de estudiantes del último año de bachillerato. La investigación que actualmente desarrollamos caracteriza la comprensión del concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de último grado de bachillerato, a

través de cuatro niveles propuestos en el marco conceptual de Enseñanza para la comprensión (EpC).

Con el conocimiento de estas características se puede ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que se les presentan cuando se enfrentan a la resolución de problemas de probabilidad. Para llegar a está caracterización se construyó y aplicó una unidad curricular, basada en el marco de la EpC, la cual contiene estrategias que potencializan el desarrollo de la comprensión, a través de la motivación e interés hacia la solución y construcción de problemas de la probabilidad por parte de los estudiantes. Luego, se analizaron e interpretaron los procesos seguidos por los estudiantes en la comprensión del concepto en cuestión para lograr su caracterización.

Palabras clave: Enseñanza para la comprensión, Dimensiones de la comprensión, Elementos de la comprensión, probabilidad.

**Taller:** *Construcción del concepto de probabilidad desde la experimentación.* X Encuentro de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia, Medellín, octubre 28 y 29, 2010

Resumen

A través de este taller se socializaron algunas de las actividades del trabajo de campo de la investigación "Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado" con el fin de compartir con los maestros las construcciones que se han hecho. En primera instancia se compartió el taller "¿Cómo se comporta el azar?" que tiene como objetivo aproximarse a las concepciones frecuencialista y clásica de la probabilidad, a través de actividades prácticas. En segundo lugar, se desarrolló el taller “Simulando algunas distribuciones de probabilidad” con el que se mostró cómo se pueden construir, de forma experimental, algunas Distribuciones de Probabilidad, a través de la simulación de situaciones problema.

**Ponencia:** *Caracterización de la comprensión del concepto de probabilidad.* III Congreso Internacional de Formación y Modelación en ciencias básicas, Departamento de Ciencias básicas, Universidad de Medellín, mayo 4-6, 2011

Resumen

Debido a la importancia que adquiere el concepto de probabilidad en la formación del pensamiento aleatorio de los estudiantes a nivel de la secundaria como de la universidad, por su aplicación en diversos campos del saber, se investigó sobre la comprensión de este concepto, a través de un estudio de casos, para el cual se eligieron cuatro estudiantes para analizar a profundidad su proceso de compresión del concepto de probabilidad, éstos presentaron características distintas en el modo de comprender la probabilidad, incluso presentaron algunas dificultades similares a las mencionadas en otras investigaciones. Los rasgos de la comprensión de cada estudiante sirvieron de referente para la construcción de cuatro matrices en las que se describe cómo un estudiante comprende la probabilidad desde las cuatro dimensiones de la EpC: los contenidos, los métodos, la praxis y las formas de comunicación. Cada una de estas dimensiones se analizó con base en unas categorías que se anticiparon como descriptores de la comprensión del concepto de probabilidad y otras que surgieron durante el análisis. En cada una de estas categorías los estudiantes presentaron distintas formas de conceptualizar, razonar, proceder o expresar, por lo cual se hizo una descripción en cuatro niveles de comprensión. Además, se describió la forma como se puede lograr que un estudiante avance de un nivel de comprensión a otro.

**Taller:** *Construcción del concepto de probabilidad desde la experimentación.* Réplica X Encuentro de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia, Yarumal, abril 14 y 15, 2011

Resumen

A través de este taller se socializaron algunas de las actividades del trabajo de campo de la investigación "Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado" con el fin de compartir con los maestros las construcciones que se hicieron. En primera instancia se compartió el taller "¿Cómo se comporta el azar?" que tiene como objetivo aproximarse a las concepciones frecuencialista y clásica de la probabilidad, a través de actividades prácticas. En segundo lugar, se desarrolló el taller "Simulando algunas distribuciones de probabilidad" con el que se mostró cómo se pueden construir, de forma experimental, las distribuciones de probabilidad Binomial e Hipergeométrica, a través de la simulación de situaciones problema.

# Bibliografía


[1] Barragués - Fuentes, J. y Guisasola - Aranzabal, J. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 20 (2)*, 285 - 302.

[2] Barragués - Fuentes, J. y Guisasola - Aranzabal, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. Enseñanza de las Ciencias, 24 (2), 241-256.

[3] Batanero, Carmen. (2000). ¿Hacía dónde va la educación estadística?. Blaix, 15, 2-13.

[4] Batanero, C. (2003). Simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía, 15 (35)*, 39-54.

[5] Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Relime, 8 (3)*, 247-263

[6] Batanero, C. y Díaz, C. (2005, Octubre). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal. VII Congreso

Galego de Estatística e Investigación de Operacións. Guimarães.

[7] Batanero, C. y Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. Luengo. Badajoz: Universidad de Extremadura, 203-226.

[8] Benis, S. From Kant to Hilbert: French philosophy of concepts in the beginning of the twentieth century. The architecture of modern mathematics. Oxford University Press, 2006.

[9] Blythe, T. y Perkins, D. (1999). La enseñanza para la comprensión. Guía para el profesor. Buenos Aires: Paidós.

[10] Boix - Mansilla, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión?. En M. Stone Wiske (comp). La enseñanza para la comprensión. (pp 215-256). Argentina: Paidós.

[11] Campos, A. (Diciembre, 2004). Laplace: Ensayo filosófico sobre las Probabilidades. *Revista Colombiana de Estadística. 27 (2)*, 153 - 177. Recuperado en mayo, 2009 disponible en http://www.emis.de/journals/RCE/V27/V27_2_153Campos.pdf

[12] Checa, A. (1998, mayo/agosto). Estadística y probabilidad: una propuesta didáctica para la enseñanza secundaria. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado*, 32, 59-72.

[13] Chung, K. (1983). Teoría Elemental de la probabilidad y de los procesos estocásticos. España: Reverté S.A.

[14] Durango, J. (2009). *La comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: "El contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas"*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

[15] Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la enseñanza y formación del profesor (Documento de discusión). (2006, Diciembre). [Versión electrónica] UNIÓN *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 8*, 63-75. Extraído en noviembre, 2008 de http://www.fisem.org/descargas/8/Union_008_008.pdf

[16] Esteban, P., Vasco, E. y Bedoya, A. (2004). Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de Van Hiele, en: *Concepts Maps: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of de First International Conference on Concept Maping*, 2 (1), 151-154

[17] Fernández - Morales, A. (2001). Obstáculos para la enseñanza de la probabilidad en los estudiantes de economía y administración y dirección de empresas. Jornadas europeas de estadística. Palma de Mallorca Universidad de Málaga.

[18] Fernández, T. (2007). Apuntes sobre historia de la probabilidad: conceptos y debates epistemológicos. Inédito. Universidad de la República. Montevideo. Recuperado en junio, 2009 disponible en http://www.unorte.edu.uy/ccss/jromero/

apuntes_sobre_Historia_de_la_Probabilidad.pdf

[19] Gabucio, F., Domingo, J., Lichtenstein, F., Limón, M., Minervino, R., Romo, M. y Tubau, E. (2005). Psicología del pensamiento. España: UOC.

[20] Guba, Egon G. y Lincoln, Yvonna S. (1994). Competing Paradigms in Qualitative Research, en Denzin & Lincoln (eds.), *Handbook of Qualitative Research*, London: Sage, (pp.105-117).

[21] Inzunsa, S., Gastélum, D. y Alvarez, A. (2009, Junio). Desarrollo de software para el aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB. [Versión electrónica] *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18, 135-149. Extraído en diciembre 2009 de http://www.fisem.org/descargas/18/Union_018_015.pdf

[22] Jaramillo, R. y Bermudez, A. (1997). Comprender: es la clave. *Alegría de enseñar, 31*, 28-37.

[23] Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. & Mogill, A. (February, 1997). A framework for assessing and nurturing young children‘s thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, (2), 101-125.

[24] Kasner, E. y Newman, J. (2007). Matemáticas e imaginación. (pp 161-187). México: Qed.

[25] Meel, D. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana*

*de Investigación en Matemática Educativa*, *6*, 221-278

[26] Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares en Matemáticas. Santa Fe de Bogotá D. C, 1998.

[27] Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado en junio, 2011 disponible en http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

[28] Novak, J. D. y Gowin, B. D. (1999). *Aprendiendo a Aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

[29] Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión?. En M. Stone Wiske (comp). La enseñanza para la comprensión. (pp 69-92). Argentina: Paidós.

[30] Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

[31] Rojas, L. (2010). *Integración entre pedagogía y tecnología en la enseñanza del Cálculo de Varias Variables.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Eafit, Medellín, Colombia.

[32] Torretti, R.(2003).El concepto de probabilidad. *Diálogos, 38 (81)*, 407-448. Recuperado en abril, 2009 disponible en http://www.memoriachilena.cl/archivos2/pdfs/MC0031046.pdf

[33] Vasco, C. E. (2005). Potencias el pensamiento matemático !Un reto escolar! Estándares básicos de competencias en matemáticas: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Extraído el 18 diciembre, 2008 de http://menweb.mineducacion.gov.co/saber/estándares_matemáticas.pdf

[34] Vasco, E. y Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

[35] Zapata-Cardona, L. (2008). *Teachers' understanding of students' conceptions about chance: An expert-novice contrast*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Georgia, Estados Unidos.