

# DISIPACION DE MOMENTUM LINEAL EN RESALTOS HIDRAULICOS

**Jaramillo M. José Javier,**  
Estudiante del Postgrado de Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos.  
Facultad de Minas. Universidad Nacional

**Naranjo M. Jorge Alberto,**  
Profesor del Posgrado de Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos.  
Facultad de Minas. Universidad Nacional

**Palacio T. Carlos Alberto,**  
Estudiante del Postgrado de Hidráulica.  
Facultad de Ingeniería. U.de los Andes

## INTRODUCCION

Según la teoría hidráulica tradicional, el resalto hidráulico no disipa momentum lineal sino solamente energía. Sin embargo, de hecho, ambas magnitudes, momentum y energía, cambian significativamente, y evaluar esas disipaciones no es difícil si se dispone de las medidas de las alturas sucesivas y del número de Froude aguas arriba.

La teoría hidráulica resuelve, para calibrar un resalto, las ecuaciones

$$v_1 y_1 = v_2 y_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \rho g y_1^2 = \frac{1}{2} \rho g y_2^2 = \rho v_2^2 y_2 = \rho v_1^2 y_1 \quad (2)$$

$$\rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g \Delta E \quad (3)$$

y a partir de (1) en (2) obtiene que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1), \quad F_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g y_1}} \quad (4)$$

y esto en (3) produce

$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \quad (5)$$

y se demuestra con (4) en (5) que

$$\Delta E = \frac{1}{16} y_1 \frac{(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 3)^3}{(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1)} \quad (6)$$

Por tanto las condiciones aguas arriba determinarían unívocamente el resalto resultante. Esto no es cierto. La fórmula (2) es la base de todo el equívoco. Resulta de suponer que el momentum lineal se conserva entre las secciones del flujo uniforme antes y después del resalto. Al modificar esa ecuación, las ecuaciones (4), (5) y (6) pierden validez.

## 1. LOS CAMBIOS DE ENERGIA Y MOMENTUM

Se pueden evaluar por diferencia de las magnitudes evaluadas en las dos secciones. Se llama  $\Delta S$  al momentum lineal por unidad de masa que se pierde entre las dos secciones,  $S_1 - S_2$ :

$$\rho V_2^2 Y_2 - \rho V_1^2 Y_1 + \frac{1}{2} \rho g (Y_2^2 - Y_1^2) = \rho(S_2 - S_1)$$

y esto, con (1), se reduce a:

$$\Delta S = (Y_2 - Y_1) \left( V_1^2 \frac{Y_1}{Y_2} - \frac{1}{2} g (Y_1 + Y_2) \right) \quad (7)$$

Si  $\Delta S$  fuera cero, con (7) se deduciría (4). Si  $\Delta S$  no es cero, la fórmula de alturas secuentes no es válida. Y algo semejante sucede con la disipación de energía:

$$\frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) + \rho g (Y_1 - Y_2) = \rho g \Delta E$$

Con (1) produce:

$$\Delta E = (Y_2 - Y_1) \left( \frac{V_1^2}{2g} \frac{Y_2 + Y_1}{Y_2} - 1 \right) \quad (8)$$

Si  $\Delta S = 0$ , en (8) se obtiene (5) ó (6). Pero si  $\Delta S$  no es cero, las fórmulas clásicas para  $\Delta E$  no son válidas. En cambio siempre serán válidas (7) y (8).

## 2. LA ALTURA SECUENTE REAL ES UNAFRACCIÓN DE LA PREVISTA POR LA HIDRÁULICA TRADICIONAL

Digamos:

$$Y_2^* = Y_2 (1 - \epsilon) \quad (9)$$

Con  $Y_2$  dado por (4), con  $0 \leq \epsilon < \epsilon_L$ . Este límite superior para  $\epsilon$  se obtiene si  $Y_2$  sólo iguala a  $Y_1$ , es decir, si no hay resalto, caso en el cual

$$\epsilon_L = \frac{\sqrt{1 + 8F_1^2} - 3}{\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1} \quad (10)$$

Y se tendrá

$$S_1 = V_1^2 Y_1 + \frac{1}{2} g Y_1^2, S_2 = V_2^2 Y_2 + \frac{1}{2} g Y_2^2 \quad (11.1)$$

$$S_2^* = V_2^{*2} Y_2^* + \frac{1}{2} g Y_2^{*2} \quad (11.2)$$

$$V_1 Y_1 = V_2 Y_2 = V_2^* Y_2^* \quad (11.3)$$

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 0 \quad (11.4)$$

$$\Delta S^* = S_1 - S_2^* \neq 0 \quad (11.5)$$

$$\Delta E = E_1 - E_2 \neq 0 \quad (11.6)$$

$$\Delta E^* = E_1 - E_2^* \neq \Delta E \quad (11.7)$$

$$\rho g E_1 - \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g Y_1, \rho g E_2 - \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g Y_2 \quad (11.8)$$

$$\rho g E_2^* = \frac{1}{2} \rho V_2^{*2} + \rho g Y_2^* \quad (11.9)$$

Reemplazando (9) en (11.5) y en (11.7), tras algunas transformaciones, resulta:

$$\Delta S^* = \frac{1}{4} g Y_1^2 \epsilon \left( \frac{\sqrt{1 + 8F_1^2} - 3 - \epsilon}{1 - \epsilon} \right) \cdot \left( (2 - \epsilon) \sqrt{1 + 8F_1^2} + \epsilon \right) \quad (12)$$

$$\frac{\Delta E^*}{\Delta E} = \frac{(1 - \epsilon) \sqrt{1 + 8F_1^2} + \epsilon - 3}{(1 - \epsilon)^2 (\sqrt{1 + 8F_1^2} - 3)}$$

$$\cdot \left( 1 - 8\epsilon \frac{F_1^2 + (\epsilon - 2) (\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1)}{(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 3)^2} \right) \quad (13)$$

Con  $\Delta E$  como en (5) ó (6) en (11.6). Si  $\epsilon=0$ ,  $\Delta S^* = \Delta S = 0$ ,  $\Delta E^* = \Delta E$ . Y si  $\epsilon = \epsilon_L$ ,  $\Delta S^*$  vuelve a ser nulo! Para cualquier valor de  $\epsilon$  entre los extremos (0,  $\epsilon_L$ ), resulta  $\Delta S^* > 0$ .

Es muy cómodo expresar esas disipaciones de momentum y energía críticas. Con ,

$$S_o = \frac{3}{2} g^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{4}{3}} \quad (14)$$

$$g E_o = \frac{3}{2} g^{\frac{2}{3}} Q^{\frac{2}{3}} \quad (15)$$

resulta para esas disipaciones unitarias

$$\Delta S^* = \frac{\Delta S^*}{S_o} = \frac{S_1 - S_2^*}{S_o} \quad (16)$$

$$\Delta E^* = \frac{\Delta E^*}{E_o} = \frac{E_1 - E_2^*}{E_o} \quad (17)$$

y son funciones exclusivas del número de Froude aguas arriba y del acortamiento fraccional  $\epsilon$  de altura secuente

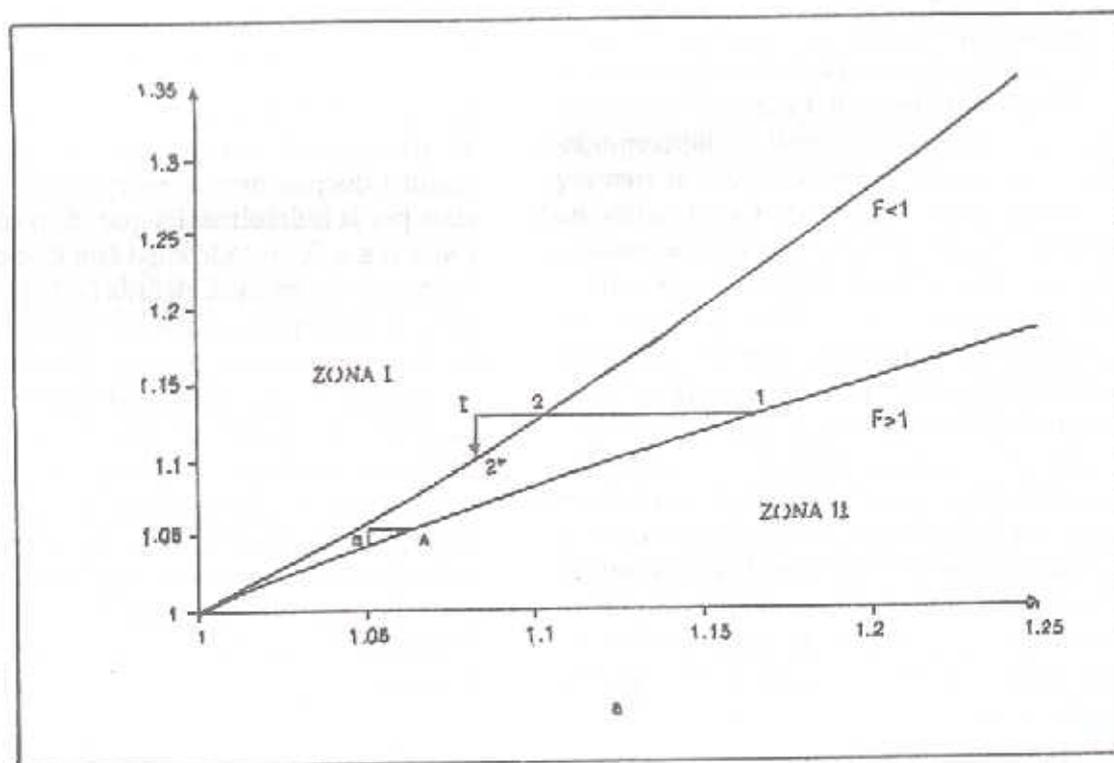
$$\Delta S^* = f(\epsilon, F_1) \quad \Delta E^* = g(\epsilon, F_1) \quad (18)$$

### 3. LA TRANSFORMACIÓN ENERGÉTICA Y DE MOMENTUM

Se observa bien en un gráfico de  $S$  vs  $\epsilon$ , como el diseñado por Benjamín Lighthill (Bibl.). Es fácil probar que (Cf Jaramillo - Palacio, bibl.)

$$\epsilon = \frac{1}{3} F^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} F^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad s = \frac{1}{3} F^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} F^{\frac{2}{3}} \quad (19)$$

Figura 1.



Y esto produce una cúspide con vértice en  $F=1$ ,  $e=1$ ,  $s=1$ , con una rama subcrítica ( $F<1$ ) y una supercrítica ( $F>1$ ). Una transición clásica de resalto pasa horizontalmente de un punto 1 en la rama subcrítica a un punto 2 en la rama supercrítica. Se conservarfa  $s$ , y la longitud 1-2 sería predecible con (6) y (15). El caso general muestra una trayectoria 1212\*, con  $\Delta e^*$  mayor que  $\Delta e$  con  $\Delta s^*>0$ . La línea quebrada en I, siempre debe caer, otra vez, en algún punto de la rama subcrítica (como 2\*). Este es un resultado bien confrontado por los experimentos con resalto ondular hechos por Jaramillo y Palacio. Pero nada impide aplicar el mismo análisis a cualquier resalto hidráulico. Mientras más pequeño sea  $\epsilon$ , menor la distancia 12\*, y si  $\epsilon=0$  el punto 2\* coincidirá con el punto previsto por la teoría clásica. Cabe observar que las zonas I y II son prohibidas para la evolución de un flujo uniforme. El punto I no corresponde a ningún estado de flujo, es sólo un punto en el diagrama. La zona intermedia, entre las dos ramas de la cúspide, si parece que pueda representar: la unidad, pueden "moverse" por trayectorias como AB según análisis de Benjamín Lighthill. Lo que hemos observado, cierto que son resaltos "hipercnoidales, indica que la transformación siempre lleva de una rama a otra. Con resaltos no ondulares, a  $F_i = 2, 3, 4$ , se ha observado lo mismo. El análisis de Benjamín Lighthill no es -por otra parte- del todo conveniente, pero no tenemos argumento experimental para descartarlo, y por ahora mantenemos abierta la posibilidad de hallar puntos de flujo en la zona interna de la cúspide en suavísimos resaltos cnoidales. Para  $F_i > 1.7$  aseveramos que toda transformación de flujo uniforme a flujo uniforme pasa de una rama a otra de la cúspide. Un flujo bajo compuerta o sobre vertedero se puede representar igualmente en estas coordenadas (figura de la página siguiente).

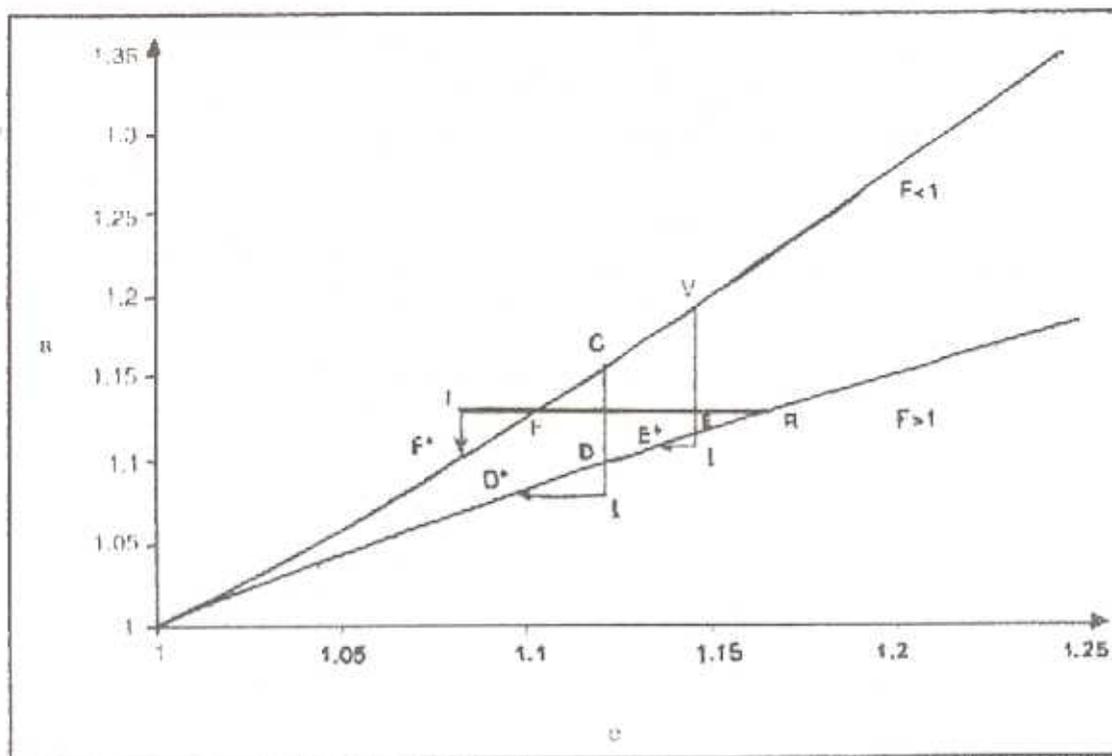
Naturalmente,  $\Delta s$  nos dará una medida del dragado sobre el volumen del resalto, sea por paredes o por coros. El producto  $\rho \Delta s \cdot Sc$  es igual a ese dragado. Un modelo adecuado de capas límites permitirfa pues relacionar el dragado con  $\epsilon$  y  $F_i$ .

El ábaco de Benjamín y Lighthill, de  $s$  vs  $e$ , debería generalizarse para la representación de flujos modulados por el número de Froude. Si se toma en cuenta la información que allí se condensa, es mucho más cómodo ese ábaco que los de energía y momentum específicos en función de la profundidad.

El análisis de los experimentos hechos con resaltos ondulares, y al análisis teórico anterior muestran que

*Un resalto ondular disipa más energía que uno que no ondule y se desarrolle a igual número de Froude y entre las mismas alturas secuentes que el ondular.*

El uso de (5) ó (6) para resaltos ondulares es un error, que conduce a afirmar que esos resaltos disipan menos energía que la prevista por la hidráulica. Es que (5) ó (6) sólo valen si  $\epsilon = 0$ , en todo caso con  $\epsilon \ll 1$ . La disipación de energía medida en los experimentos (Jaramillo - Palacio, bibl) es como un 30% mayor que la prevista. El momentum lineal disipado es como un 10% del momentum inicial. El parámetro de  $\epsilon$  medido varió entre 0.01 y 0.15, y en números de Froude se varió entre 1,87 y 2,47. Otros experimentos realizados en la Universidad Nacional con flujos bajo compuertas y sobre vertederos muestran que en todos los casos las disipaciones exceden las previsiones hidráulicas.



Evolución de una transición de régimen froudeano para: 1) Flujo bajo compuerta, 'trayectoria CDID', 2) Flujo sobre vertedero, trayectoria VEIE', C) Flujo en un resalto hidráulico, trayectoria RFIIF. Los puntos D, E, F previstos por la hidráulica clásica no corresponden al estado final D', E', F' de las transiciones reales. La línea E'I mide una energía disipada en el vertedero, la línea VE representa la fuerza hecha por el dique del vertedero, la línea EI representa un dragado hecho sobre el fluido. La línea CD representa la fuerza hecha por la compuerta, la DI un dragado, la ID una energía que se disipa en la transición. Ambos casos pasan de sub a supercríticos, el caso 3) pasa en el sentido opuesto.

### Definición de variables

- E = energía por unidad de masa
- F = número de Froude
- g = aceleración de la gravedad
- $\rho$  = densidad de masa
- S = momentum por unidad de masa
- V = velocidad media de la corriente
- Y = profundidad del agua

### Subíndices

1. Referente a una sección aguas arriba del resalto. Estado de flujo supercrítico
2. Referente a una sección aguas abajo del resalto. Estado de flujo subcrítico

### Superíndices

- \* valores reales o calculados con valores medidos

### Bibliografía

- Benjamín, T. y M. Lighthill. On Cnoidal Waves and Bore. Proc. Royal Soc. London, Vol. 224, pp 448-459, 1954.
- Chow, V. Open Channel Hydraulics. McGraw-Hill, 1959. Hall, H. y Knight. Higher Algebra.
- Jaramillo, J. y C. Palacio. Resaltos ondulares y Ondas Solitarias. Trabajo dirigido de grado. Universidad Nacional. Medellín, 1994

