UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Influencia de Habilidades de Rotación Mental sobre Habilidades de Cálculo Aritmético en Niños de Segundo Grado de Primaria

Leonardo Uribe Kaffure

Tutores:

Dr. Walter Fernando Castro Gordillo
Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
DOCTORADO EN EDUCACIÓN
MEDELLÍN, 2017

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Trabajo presentado para optar al título de Doctor en Educación

Línea de Investigación en Educación Matemática

AGRADECIMIENTOS

El proceso de investigación que ha conllevado este trabajo de grado ha sido para mí muy agradable y fructífero. Siento que he tenido la fortuna de contar con una ‘mezcla perfecta’ de personas, instituciones y situaciones que me han permitido aprovechar, disfrutar y enriquecerme con el proyecto.

Agradezco a Colciencias y a la Universidad de Antioquia por el apoyo financiero prestado, apoyo sin el cual hubiera sido muy difícil realizar este proyecto.

La Universidad de Antioquia, el Doctorado en Educación y la Línea de Educación matemática fueron los lugares adecuados para profundizar en mi pasión por la enseñanza de las matemáticas. Aprendí con mis profesores tutores, Walter Castro y Jhony Villa, mucho más que conceptos de Educación Matemática. Aprendí a investigar con mayor profundidad y a disfrutar el proceso.

El Seminario Permanente de la Línea de Educación Matemática fue un espacio propicio para discutir, re-plantear y avanzar mi proyecto de investigación. A todos los profesores y estudiantes que hicieron parte de él les agradezco el apoyo prestado. Fue un lugar donde aprendí mucho.

El Dr. Juan Godino, quien amablemente me acogió durante mi pasantía doctoral, fue una persona clave en mi proyecto. Respeto mucho sus concepciones teóricas y lo considero una excelente persona. A él, al Dr. Luis Pino y a la Dra. Patricia Konic les agradezco mucho haber aceptado ser jurados de tesis. Me honra poner a consideración de ellos los resultados de mi proyecto de investigación.

Quizá un poco ocultas, pero no menos importantes, hay muchas personas que con su trabajo cotidiano hacen posible este y muchos otros proyectos de investigación, realizando gestiones académicas y administrativas permanentemente. Agradezco a todas ellas su colaboración. En especial, agradezco a Chelo Velázquez, quien fue un soporte constante durante todo mi proceso y quien siempre se mostró cordial y eficiente cuando requerí su apoyo.

Asumo como mío este proyecto de investigación por el hecho de hacerme responsable por lo que en él se afirma. Sin embargo, considero que pertenece también a todas las personas e instituciones ya mencionadas, porque todas han aportado algo para su realización. En este

sentido, agradezco nuevamente a Walter y a Jhony por su acompañamiento permanente y su compromiso con el proyecto. Indudablemente, hay influencias profundas de ellos en esta investigación.

A mi familia

RESUMEN

La presente investigación aborda el problema de explicar, en el ámbito de la Educación Matemática, la influencia que la ejercitación en habilidades de rotación mental tiene sobre habilidades de cálculo aritmético, medida en pruebas escritas en niños de primaria.

Partiendo de una noción de habilidad predominante en ciencia cognitiva según la cual las habilidades se asimilan a rasgos personales relativamente estables e independientes del contexto, se analizan desde la Educación matemática las posibles causas de la relación probada entre los dos tipos de habilidades mencionadas. Para ello, se propone una visión diferente y complementaria de habilidad, con un carácter más contextual, teniendo como marco conceptual una aproximación semiótica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dicha visión nos permite incluir dentro de la investigación factores tales como la trayectoria académica de los estudiantes, la influencia del maestro y la importancia de otras habilidades que se ponen en juego al afrontar tareas de cálculo aritmético.

Comenzamos por analizar, organizar y estructurar, desde un punto de vista educativo, investigaciones existentes sobre la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético, con el objetivo de interpretar dichos resultados en contextos de enseñanza en el aula. Proponemos tres posibles mecanismos que, potencialmente, pueden explicar la relación observada. En primer lugar, un mecanismo teórico: la Memoria de Trabajo, la cual sería un "recurso" común para habilidades espaciales y matemáticas y podría servir como puente para conectarlas. En segundo lugar, un mecanismo procedimental: las habilidades visuo-espaciales podrían desempeñar un papel importante en el proceso de identificación e interpretación de símbolos aritméticos y, por lo tanto, podrían ayudar a evitar algunos errores relacionados con la lectura de expresiones matemáticas. En tercer lugar, un mecanismo conceptual: la composición y descomposición de figuras pondrían en juego conceptos aritméticos correspondientes que son útiles en el proceso de adición por distribución y asociación de números (por ejemplo, $9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15$).

Usando una metodología mixta, la cual nos permite poner en diálogo las dos nociones de habilidad, concluimos que el mecanismo explicativo de la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades aritméticas que más concordó con los resultados obtenidos

fue el del incremento en la percepción de los detalles visuales que implican los ejercicios de rotación mental y que mejora la lectura de expresiones aritméticas. Este hecho ayuda a los estudiantes a evitar una lectura incorrecta influenciada por el formato general de las expresiones y a centrarse en la información a nivel de símbolos individuales.

Creamos el concepto de optimización cognitiva para explicar dicho mecanismo. Definimos la optimización cognitiva como la estrategia mediante la cual una persona interpreta un símbolo en un contexto dado mezclando información esencial (conceptual) y no esencial (contextual). Mostramos que la resolución de tareas de rotación mental permitió a los estudiantes evitar errores de optimización cognitiva, al fomentar la lectura correcta de expresiones aritméticas y evitar errores debidos a formatos estandarizados de ciertas expresiones.

Consideramos que nuestra aproximación empírica y metodológica al problema de investigación hace un aporte al campo de la Educación Matemática al considerar investigaciones de la Ciencia Cognitiva y traerlas al terreno educativo mediante metodologías mixtas y un enfoque teórico inclusivo.

Los resultados de nuestra investigación contribuyen en la reflexión de la enseñanza escolar de la aritmética y aportan un nuevo concepto (optimización cognitiva) que debería ser considerado a la hora de determinar políticas de enseñanza, aprendizaje y evaluación de conocimientos aritméticos en niños de primaria.

ABSTRACT

This research report addresses the problem of explaining, in the field of Mathematics Education, the influence that mental rotation training has on arithmetic calculation skills, as measured in written tests in primary school children.

Starting from a predominant notion of ability in cognitive science according to which the abilities are assimilated to relatively stable, context-independent personal traits, the possible causes of the proven relationship between the two types of mentioned abilities are analyzed from a Mathematical Education point of view. In order to do this, a different and complementary view of skill is proposed, with a more contextual character, having as conceptual framework a semiotic approximation of mathematics teaching and learning processes. Such a view allows us to include within our research perspective factors such as the academic trajectory of the students, the influence of the teacher and the importance of other skills that come into play when dealing with arithmetic calculation tasks.

We begin by analyzing, organizing and structuring, from an educational point of view, existing research on the relationship between mental rotation skills and arithmetic calculation skills, with the aim of interpreting those results in teaching contexts inside the classroom. We propose three possible mechanisms that may potentially explain the observed relationship. First, a theoretical mechanism: Working Memory, which would be a common "resource" for spatial and mathematical abilities and could serve as a bridge to connect them. Second, a procedural mechanism: visual-spatial skills could play an important role in the process of identifying and interpreting arithmetic symbols and, therefore, could help to avoid some errors related to mathematical expressions reading. Third, a conceptual mechanism: the composition and decomposition of figures would put into play corresponding arithmetic concepts that are useful in the process of addition by distribution and association of numbers (for example, $9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15$).

Using a mixed methodology, which allows us to put into dialogue the two given notions of ability, we conclude that the explanatory mechanism of the relationship between mental rotation skills and arithmetic abilities that best fits the obtained results is the increment in the visual perception of details involved in mental rotation exercises and the consequent improvement in arithmetic expressions reading. This fact helps students to avoid incorrect

reading influenced by the general format of expressions and to focus on information at the level of individual symbols.

We created the concept of cognitive optimization to explain this mechanism. We define cognitive optimization as the strategy whereby a person interprets a symbol in a given context by mixing essential (conceptual) and non-essential (contextual) information. We show that solving mental rotation tasks allowed students to avoid cognitive optimization errors by encouraging correct reading of arithmetic expressions and avoiding errors due to standardized formats of some expressions.

We consider that our empirical and methodological approach to the research problem makes a contribution to the field of Mathematics Education by considering Cognitive Science research and bringing it to the educational field through mixed methodologies and an inclusive theoretical approach.

The results of our research contribute to the reflection on arithmetic teaching and provide a new concept (cognitive optimization) that should be considered when determining policies of teaching, learning and evaluation of arithmetic knowledge in primary school children.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación aborda el problema de explicar, en el ámbito de la Educación Matemática, la influencia que la ejercitación en habilidades de rotación mental tiene sobre habilidades de cálculo aritmético, medida en pruebas escritas en niños de primaria.

A primera vista, el problema parece no ser significativo desde el punto de vista de la Educación Matemática. Varios investigadores en Educación Matemática, a los cuales se les planteó el problema, tuvieron como primera reacción un '¡ah!, ¿qué sentido tiene eso?'. Y es que este es un problema que difícilmente surgiría en el campo de la Educación Matemática, dado que busca relacionar dos tipos de habilidades que parecen totalmente inconexas.

Sin embargo, el problema ha sido estudiado en Ciencia Cognitiva y se han realizado investigaciones específicas acerca del tema e investigaciones más generales acerca de las relaciones entre conocimiento espacial y conocimiento matemático (Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent y Numtee, 2007; Kyttälä, Aunio, Lehto y Luit, 2003; McKenzie, Bull y Grey, 2003; McLean y Hitch, 1999; Mix y Cheng, 2012; Rasmussen y Bisanz, 2005).

Nos pareció que está situación generaba una oportunidad interesante para buscar relaciones entre la Ciencia Cognitiva y la Educación Matemática, a pesar de las divergencias manifiestas que presentan en algunas de sus concepciones teóricas y metodológicas.

Planteamos entonces la pregunta de investigación: ¿cómo pueden explicarse, en el ámbito de la Educación Matemática, la influencia que la ejercitación en habilidades espaciales tiene sobre habilidades aritméticas, medida en pruebas escritas en niños de primaria?

La redacción de la pregunta supone que existe tal influencia. Está afirmación se apoya en una amplia literatura que da por sentado que existe una relación entre los dos tipos de habilidades, si bien la naturaleza de la misma no es clara. Nos parece que la búsqueda de una respuesta adecuada a esta pregunta implica el uso de una metodología mixta que combine métodos cuantitativos, a partir de los cuales se establece la relación entre habilidades, con métodos cualitativos que busquen explicar los mecanismos que subyacen a la relación.

Durante el proceso de investigación se han puesto en discusión nuestros puntos de vista en la comunidad internacional a través de la presentación de nuestras ideas en diversos eventos internacionales: ICME 13, PME 40, CIVEOS 2 y SEIEM 20; se ha enviado un artículo a la revista Journal of Mathematics Education[1] el cual ha sido aceptado y será publicado en el número 2 del volumen 10 en noviembre de 2017. El Seminario Permanente de la Línea de Educación Matemática del Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia ha servido como espacio de presentación y discusión permanente de nuestro proyecto al interior de nuestra comunidad de investigación.

El reporte del trabajo de investigación está estructurado de la siguiente manera: en este Capítulo 1 hemos realizado una breve introducción al problema de investigación. En el

---

[1] http://educationforatoz.com/journalofmatheducation.html

[1] El sentido numérico hace referencia a “nuestra habilidad para entender rápidamente, aproximar y manipular cantidades numéricas” (Dehaene, 2001, p. 17, traducción propia).

Capítulo 2 planteamos el problema de investigación y presentamos la literatura que lo aborda y las posibles soluciones que se han ofrecido. En el Capítulo 3, a través de un análisis crítico de un instrumento de medida usado en Ciencia Cognitiva (Cheng y Mix, 2014), presentamos los principales conceptos teóricos que sirven como guía a nuestra investigación. El Capítulo 4 presenta nuestra aproximación metodológica al problema. En el Capítulo 5 presentamos los resultados obtenidos en el trabajo de campo realizado, junto con un análisis de los mismos. El Capítulo 6 presenta las conclusiones a las que llegamos a través del análisis tanto de nuestros resultados como de los resultados reportados en la literatura respecto al problema en cuestión.

2. ANTECEDENTES EN LA LITERATURA

2.1 Introducción

Las relaciones entre conocimiento espacial y matemático son quizás uno de los aspectos más estudiados y bien establecidos en Ciencia Cognitiva (Mix y Cheng, 2012). A través de la aplicación y análisis de test en diversos grupos de personas, se ha logrado clasificar e interrelacionar diferentes tipos de habilidades cognitivas. Específicamente, varias investigaciones han mostrado que existen relaciones entre habilidades espaciales y habilidades de cálculo aritmético en niños (Geary et al., 2007; Kyttälä et al., 2003; McKenzie et al., 2003; McLean y Hitch, 1999; Rasmussen y Bisanz, 2005).

Esta investigación busca ofrecer explicaciones conceptuales a dichas relaciones y destacar ciertos procesos cognitivos implicados, teniendo en cuenta el contexto educativo en el cual se desarrollan. Comenzamos por analizar, organizar y estructurar, desde un punto de vista educativo, investigaciones existentes sobre la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético, con el objetivo de interpretar dichos resultados en contextos de enseñanza en el aula. Por habilidades de rotación mental entendemos la capacidad de rotar representaciones mentales de objetos en dos o tres dimensiones (Shepard & Metzler, 1971).

Presentamos en este capítulo un análisis de los posibles mecanismos explicativos subyacentes a la relación. Nos basamos en nuestra experiencia investigativa en el tema y en una revisión bibliográfica asociada. Proponemos tres posibles mecanismos que, potencialmente, pueden explicar la relación observada. En primer lugar, un mecanismo teórico: la Memoria de Trabajo, la cual sería un "recurso" común para habilidades espaciales y matemáticas y podría servir como puente para conectarlas. En segundo lugar, un mecanismo procedimental: las habilidades visuo-espaciales podrían desempeñar un papel importante en el proceso de identificación e interpretación de símbolos aritméticos y, por lo tanto, podrían ayudar a evitar algunos errores relacionados con la lectura de expresiones matemáticas. En tercer lugar, un mecanismo conceptual: la composición y descomposición de figuras pondría en juego conceptos aritméticos correspondientes que son útiles en el proceso de adición por distribución y asociación de números (por ejemplo, 9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15).

Comenzamos por revisar algunas investigaciones que relacionan habilidades espaciales y matemáticas en niños. Seguidamente, analizamos el concepto de habilidad implícito en las investigaciones referenciadas y proponemos una visión alternativa del término habilidad basada en el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS, enfoque que se desarrollará con más detalle en capítulos posteriores). A continuación presentamos los mecanismos que pueden explicar la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético, considerando las dos perspectivas propuestas acerca de las habilidades. Finalmente, resaltamos algunos aspectos del estudio realizado a manera de conclusión.

2.2 Relaciones entre habilidades espaciales y matemáticas en niños

Diversos estudios longitudinales han mostrado que ciertas habilidades matemáticas en estudiantes de primaria y pre-escolar están influenciadas por el desarrollo previo de otras habilidades relacionadas. Praet, Titeca, Ceulemans y Desoete (2013) informaron que algunos problemas de aprendizaje de las matemáticas, en primer grado de primaria, pueden ser correctamente diagnosticados desde el jardín de infancia. Los investigadores concluyeron, por ejemplo, que la expresividad lingüística en el jardín de infancia sirve como predictor de habilidades matemáticas en primer grado de primaria. Por otro lado, Jordan, Glutting y Ramineni (2010) informaron que el Sentido Numérico (Number Sense en inglés, en el original[2]) manifestado por niños al inicio de primer grado de primaria permitió predecir la capacidad para resolver problemas de matemáticas en situaciones diversas en tercer grado de primaria. En un estudio longitudinal más extenso, Morgan, Farkas y Wu (2009) encontraron que las dificultades en matemáticas en pre-escolares eran un indicador fiable de posteriores dificultades en la misma área en quinto grado de primaria. En cuanto al género, no se han encontrado diferencias importantes entre las habilidades matemáticas de niños y niñas (Lachance y Mazzocco, 2006), aunque las habilidades predictivas asociadas (Ganley y Vasilyeva, 2011) y las estrategias de resolución de problemas (Laski et al., 2013) sí muestran diferencias según el género.

Varios estudios transversales han establecido también relaciones (simultáneas) entre habilidades matemáticas y otras habilidades. Por ejemplo, en preescolares, las habilidades espaciales son un buen predictor de habilidades matemáticas (Verdine, Irwin, Golinkoff y Hirsh-Pasek, 2014).

Específicamente en el campo de la aritmética, algunas habilidades auditivas, lingüísticas, fonológicas, espaciales, nemotécnicas y numéricas (conteo, estimación de magnitudes) han mostrado ser predictores de habilidades aritméticas (De Smedt, Taylor, Archibald y Ansari,

---

[1] El sentido numérico hace referencia a “nuestra habilidad para entender rápidamente, aproximar y manipular cantidades numéricas” (Dehaene, 2001, p. 17, traducción propia).

2010; Praet et al., 2013; Rasmussen y Bisanz, 2005; Verdine et al., 2014; Vukovic y Lesaux, 2013).

Las relaciones entre diferentes habilidades en niños de primaria abren la posibilidad de fomentar algunas habilidades con el objetivo de reforzar otras curricularmente relevantes. Por ejemplo, Geist, Geist y Kuznik (2012) consideran que la música es una de las primeras experiencias que tienen los niños con patrones y que ésta les puede ayudar a familiarizarse con ciertos conceptos matemáticos. Por su parte, Cheng y Mix (2014) han informado que el desarrollo de las habilidades de rotación espacial en niños de primaria muestra una relación directa con el incremento de sus habilidades de cálculo aritmético a corto plazo.

Las investigaciones mencionadas indagan por vínculos entre distintas habilidades haciendo uso de tendencias metodológicas principalmente estadísticas. Sus resultados son importantes para determinar pautas generales de enseñanza y para guiar políticas educativas (Ercikan y Roth, 2006). Sin embargo, para ser articulados con las prácticas educativas en el aula, dichos resultados deben ser complementados con investigaciones que expliquen tanto la génesis de dichas habilidades a nivel individual (Mislevy, 2008) como la naturaleza de sus relaciones.

En los siguientes apartados se presentarán con más detalle algunos factores importantes que deben ser considerados al desarrollar dichas investigaciones complementarias, centrando finalmente la atención en las relaciones entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético en niños de primaria.

2.3 Acerca de las habilidades

Para articular el estudio de habilidades medidas estadísticamente y habilidades en contextos educativos, es necesario analizar en cada caso lo que se entiende por una habilidad y las formas asociadas de evaluarla. En este apartado se analizan dos perspectivas teóricas opuestas, aunque complementarias, al respecto.

Los estudios de habilidades presentados en el apartado anterior se pueden enmarcar dentro de la teoría psicológica del rasgo. En este enfoque teórico las personas poseen 'rasgos', es decir, "características relativamente constantes –atributos, procesos estables, disposiciones– que se manifiestan consistentemente en cierto grado y en situaciones relevantes, a pesar de variaciones considerables del contexto y las circunstancias" (Messick, 1989, citado por Mislevy, 2008, p. 125, traducción propia). Dichos rasgos

> [...] corresponden a propiedades reales de las personas cuyo carácter se puede inferir a partir de patrones de desempeño en tareas de diferente tipo; su naturaleza es cuantitativa y se pueden hacer inferencias de su valor a través de modelos estadísticos que relacionan variables observables -tales como respuestas en test- con rasgos personales. (Mislevy, 2008, p. 125-126, traducción propia)

En este contexto, las habilidades representan conjuntos específicos de rasgos personales y pueden ser medidas mediante test debidamente validados[3]. Mislevy (2008) denomina 'Evaluación Educativa Tradicional' a esta forma de concebir y medir habilidades. Sin embargo, esta concepción de las habilidades es problemática para escenarios educativos

[3] En el contexto de la interpretación de evaluaciones, *validez* hace referencia a "Un juicio evaluativo integrado del grado en que la evidencia empírica y los constructos teóricos soportan la idoneidad y pertinencia de las interpretaciones y acciones basadas en resultados de test u otros modos de evaluación" (Messick, 1990, p. 1487, traducción propia).

donde la enseñanza y el aprendizaje se consideran procesos cambiantes, y las capacidades cognitivas de los estudiantes se asumen como hechos dinámicos.

A diferencia del enfoque anterior y acorde con una perspectiva semiótica en Educación Matemática (Godino, Wilhelmi y Lurduy, 2011; Sáenz-Ludlow, 2016), definimos una *habilidad* como la capacidad que tiene una persona de solucionar un tipo de situaciones problema mediante prácticas apoyadas en la comprensión de conceptos relevantes.

Un concepto en este contexto no hace referencia a una entidad abstracta, sino más bien a una entidad que emerge tanto de "un sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas […] [como de la] configuración de objetos y procesos ligados a tales prácticas" (Gonzato, 2013, p. 77).

Una diferencia fundamental de esta definición de habilidad respecto de aquella basada en rasgos es que se trata de un fenómeno concreto, entrelazado con el contexto del cual emerge, esto es, se trata de una actividad situada.

Desde este punto de vista, las contribuciones de la Ciencia Cognitiva se pueden organizar en un marco adecuado para escenarios educativos. En primer lugar, la comprensión de conceptos asociada con una habilidad surge de una *relación* entre el profesor y el estudiante en un contexto específico e implica un proceso de *negociación.* En segundo lugar, la comprensión de un concepto es más un proceso que un hecho, *evoluciona.* En tercer lugar, la comprensión de un concepto puede ser analizada como un proceso complejo, que involucra diferentes componentes e interacciones (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016).

En las próximas secciones profundizaremos sobre el vínculo conceptual entre conceptos y habilidades y utilizaremos las características de los procesos de comprensión antes mencionados para organizar diversos hallazgos sobre habilidades resultantes de investigaciones en Ciencia Cognitiva.

2.4 Función Semiótica, Conocimiento y Habilidades

Utilizamos un enfoque semiótico para analizar el concepto de habilidad: el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Font, Godino y D'Amore, 2007; Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque teórico, la noción de concepto, y por lo tanto la de habilidad, están relacionadas con la idea de función semiótica. Una función semiótica es una relación de correspondencia entre un antecedente (significante, expresión) y un consecuente (significado) (Godino, 2003); se establece por una persona o una institución de acuerdo con ciertos criterios o códigos. "Estos códigos, en la actividad matemática, pueden ser reglas (hábitos, acuerdos) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que deben ponerse en correspondencia en unas circunstancias fijas" (Godino et al., 2007, traducción propia, p.130).

El significado de un concepto matemático se interpreta como el consecuente de una función semiótica cuyo antecedente es un "sistema de prácticas" (ver la Sección 3.2 para una definición formal del término) realizado por una persona para resolver cierto tipo de problemas matemáticos que involucran el objeto. Por ejemplo, el significado de la «mediana» se da en términos de una entidad abstracta que surge de un sistema de prácticas vinculado a ciertos problemas estadísticos (Godino, 2003).

Los códigos que permiten establecer las funciones semióticas no son simples correspondencias entre significantes y significados. Un significante puede tener significados diferentes dependiendo del contexto, con lo cual el significado de una expresión toma la forma de un árbol jerárquico donde el significado queda determinado por las circunstancias en las cuales se da el significante (Eco, 1988). Por ejemplo, la palabra ‘parar’ puede hacer referencia a detener un objeto en movimiento, cesar una actividad, poner un objeto en posición vertical, etc. El significado específico del término depende del contexto en el que se da. En este sentido, el uso de los códigos implica no solo procesos mentales de correspondencia sino procesos de inferencia: si se está en un contexto dado, entonces el significado es este; si se está en otro contexto, entonces el significado es aquel (Eco, 1991).

El conocimiento y la comprensión de un concepto se interpretan en términos de las funciones semióticas que una persona puede establecer en un contexto determinado (Godino, 2002). Implican por lo tanto conocimiento y capacidad inferencial del código asociado.

Una ‘habilidad’ hace referencia a las prácticas que un sujeto realiza, apoyado en la comprensión de uno o varios conceptos, para ofrecer una solución a un tipo de situación problema.

Vale la pena mencionar el término competencia en el contexto de las definiciones de habilidad y conocimiento. Algunas veces las competencias se consideran como conjuntos de habilidades que permiten realizar una actividad (MEN, 2010); otras veces se consideran como un saber-hacer en situaciones determinadas mediante el uso pertinente de habilidades y conocimientos (MEN, 2006). Pensamos que es importante aplicar aquí la dualidad personal-institucional que ofrece el Enfoque Onto-Semiótico para clarificar un poco los conceptos presentados. Cuando una institución define una competencia, determina el tipo de aplicación que debe hacerse de un conocimiento o habilidad determinados. Por ejemplo, si en una evaluación escrita se pide enunciar un teorema dado, la simple expresión verbal o escrita del teorema determina lo competente del alumno en esta situación. Si en cambio se pide aplicar el teorema a un caso dado, es claro que la enunciación del teorema no basta y no es suficiente para mostrar competencia en esta nueva situación. En conclusión, una competencia está determinada no solo por los conocimientos y habilidades del individuo, sino por las expectativas que la institución tiene de él y por la forma como define la competencia en cuestión.

2.4.1 Emergencia de conceptos y habilidades

En contextos de enseñanza de la matemática, los conceptos surgen normalmente en situaciones de aula. Los profesores guían procesos de aprendizaje siguiendo estrategias y conceptos institucionalizados y se espera que los estudiantes aprehendan el significado de esos conceptos y los expresen de una manera institucionalmente aceptable. En estas circunstancias, nos interesa resaltar dos factores importantes relacionados con la emergencia de los conceptos y de las habilidades.

Primero, las habilidades y las formas asociadas de medirlas son definidas por la institución y corresponden, en cierto grado, a capacidades cognitivas del estudiante. La evaluación de habilidades debe considerar no sólo las habilidades a medir, sino también las habilidades concurrentes utilizadas en el proceso evaluativo. A veces estas habilidades "secundarias" alteran el proceso de medición de manera significativa; por ejemplo, los resultados experimentales de Piaget han sido criticados por utilizar un lenguaje complicado, así como materiales y situaciones extrañas para los niños en el proceso de evaluación de sus habilidades matemáticas y de razonamiento (Braine, 1962).

Segundo, el contexto de aprendizaje es un tema relevante (Godino y Batanero, 1994). Los conceptos emergen en situaciones educativas y están ligado, al menos al principio, a las especificidades de aquellas 'situaciones-ejemplo'. Una noción errónea del concepto de triángulo en los niños ilustra esta idea: algunos de ellos no reconocen un triángulo cuya base no es horizontal porque los ejemplos de triángulos que se les han dado siempre son triángulos con base horizontal (López, 1990).

2.4.2 Conceptos y habilidades como procesos

La comprensión de los conceptos evoluciona con el proceso educativo. Los conceptos tienden a devenir más abstractos y generalizables, y algunos de sus mecanismos subyacentes pueden cambiar:

> Las investigaciones de resonancia magnética funcional (IRMf) han demostrado que, onto-genéticamente, las funciones frontales predominan en el desarrollo temprano y se complementan gradualmente con áreas parietales como los sulcos intra-parietales bilaterales. Esta observación es válida tanto para el procesamiento simbólico de números (Ansari, Garcia, Lucas, Hamon y Dhital, 2005; Holloway y Ansari, 2010) como para la aritmética mental (Kucian, Aster, Loenneker, Dietrich y Martin, 2008; Rivera, Reiss, Eckert y Menon, 2005). Cognitivamente, esto sugiere una menor dependencia de recursos generales como la atención y la memoria de trabajo durante la cognición numérica y, en el caso de la aritmética mental, corresponde a una transferencia de estrategias de cálculo metódicas (y computacionalmente ineficientes) a estrategias más rápidas y eficientes de uso de la memoria (Grabner et al., 2009). (Popescu et al., 2016, traducción propia, p.256)

Acorde con esta conclusión, Van de Weijer-Bergsma, Kroesbergen y Van Luit (2015) reportan que los mecanismos y conceptos que soportan el dominio de las operaciones aritméticas cambian a través del ciclo de educación primaria. Los conceptos y las habilidades son, por lo tanto, entidades dinámicas que tienen que ser estudiadas como tal.

2.4.3 Componentes e interacciones entre conceptos y habilidades

Una sola habilidad puede ser interpretada como un proceso complejo cuando se considera detalladamente. Por ejemplo, la habilidad de conteo en niños involucra, según Gelman y Gallistel (1986), tres conceptos subyacentes: el principio de correspondencia uno a uno, el principio de orden estable y el principio de cardinalidad. La adición, una operación que requiere de conceptos y habilidades complejas, implica varias sub-habilidades relacionadas: cálculo, estimación, estrategias de hechos derivados, recuperación de datos de la memoria, etc. A pesar de que los estudios de ciencias cognitivas han encontrado ciertas relaciones estadísticas entre algunas de estas habilidades, las discrepancias pueden ser grandes entre casi cualquier par de habilidades en casos específicos (Dowker, 2005). Este hecho muestra que el concepto de habilidad es complejo y que depende de las particularidades de cada individuo. De hecho, la experiencia matemática de cada estudiante –y sus habilidades- están vinculadas con sus propios patrones de uso y creación de signos y significado (Sáenz-Ludlow, 2016).

En la siguiente sección, tomando en cuenta las características descritas de las habilidades y la comprensión de conceptos, analizaremos algunos hallazgos investigativos sobre habilidades espaciales y aritméticas.

2.5 Mecanismos que explican la relación entre habilidades espaciales y aritméticas

Hemos revisado literatura científica acerca de la relación entre las habilidades espaciales y aritméticas, centrándonos en la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades aritméticas en niños. Luego, hemos organizado los resultados tomando como marco conceptual la función semiótica y la comprensión de conceptos. En las siguientes subsecciones presentamos los posibles mecanismos de la relación que, apoyados por la literatura, hemos establecido. Cada mecanismo es analizado desde un punto de vista semiótico.

2.5.1 Memoria de Trabajo

2.5.1.1 Mecanismos

El concepto de Memoria de Trabajo (MT) se basa en el supuesto de que la cognición humana comparte algunas de las características de un sistema informático. Se trata de un mecanismo cognitivo encargado de almacenar y procesar información de forma temporal. Hay tres componentes principales de la Memoria de Trabajo en el modelo de Baddeley y Hitch: el Bucle Fonológico representa el componente verbal; la Agenda Visoespacial representa el componente no verbal (visual). El Ejecutivo Central controla las interacciones y el funcionamiento de los otros dos componentes (Baddeley, 2007).

A pesar de que ninguna teoría de la cognición matemática da un papel importante a la Memoria de Trabajo, este constructo ha sido frecuentemente asociado al conocimiento matemático (LeFevre, DeStefano, Coleman y Shanahan, 2005). La práctica matemática involucra el uso y la orquestación de varios conceptos y procedimientos y, como tal, implica mecanismos de almacenamiento temporal y procesamiento de información. Por lo tanto, cognición matemática y Memoria de Trabajo están conceptualmente asociados.

Raghubar, Barnes y Hecht (2010) revisaron varias investigaciones y concluyeron que la Memoria de Trabajo y algunas habilidades matemáticas están relacionadas en adultos, en niños con dificultades matemáticas y en niños con un desarrollo típico. Sin embargo, estas relaciones son complejas y dependen de varios factores tales como la edad, el formato de presentación de los problemas, el tipo y grado de desarrollo de la habilidad, etc.

Los componentes de la Memoria de Trabajo tienen diferentes relaciones con diversas habilidades matemáticas en niños (Bresgi, Alexander y Seabi, 2017; Simmons, Willis y Adams, 2012); la Agenda Visoespacial permitió predecir la comprensión de magnitudes y la habilidad de escritura de números. El Ejecutivo Central predijo habilidades de adición. Del mismo modo, según el formato de presentación (adición vertical u horizontal), diferentes componentes de la Memoria de Trabajo están relacionados con habilidades aritméticas (Caviola, Mammarella y Cornoldi, 2012).

Una relación entre habilidades de rotación mental y Memoria de Trabajo implicaría, transitivamente, una relación mediada entre habilidades de rotación mental y habilidades matemáticas, específicamente, habilidades aritméticas (Caviola et al., 2012). Tal relación fue reportada por Miyake, Friedman y Rettinger (2001). De hecho, las tareas de rotación mental requieren almacenamiento espacial y procesamiento de imágenes mentales, dos de las principales funciones de la Memoria de Trabajo.

En un contexto educativo es importante determinar si el desarrollo de ejercicios de rotación mental puede influir en las habilidades aritméticas. Una condición necesaria para ello es la maleabilidad de las habilidades espaciales y, de acuerdo con el razonamiento anteriormente expuesto, la maleabilidad de la Memoria de Trabajo. Uttal et al. (2013) y Stieff y Uttal (2015) concluyeron, a través de un meta-estudio, que las habilidades espaciales son maleables. Klingberg (2010) y Morrison y Chein (2011) sugieren lo mismo para la Memoria de Trabajo. En conclusión, la Memoria de Trabajo es un posible mecanismo explicativo de la relación y la influencia de habilidades espaciales sobre habilidades aritméticas.

2.5.1.2 Análisis Semiótico

Desde un punto de vista semiótico, la comprensión de los conceptos matemáticos -y de las habilidades asociadas- está determinada por el contexto del cual emergen. Incluso si se ha demostrado que deficiencias en la Agenda Visoespacial están relacionadas negativamente con el rendimiento matemático en niños videntes (Ashkenazi, Rosenberg-Lee, Metcalfe, Swigart y Menon, 2013), existen estudios con personas ciegas tempranas que muestran un desarrollo normal de habilidades aritméticas a pesar de la ausencia de visión y –por lo tanto- de Agenda Visoespacial. Se puede concluir que la Agenda Visoespacial es importante para las habilidades aritméticas en contextos donde construcciones visuales y no visuales son usadas para enseñar conceptos aritméticos. Si la visión está ausente, otros mecanismos proporcionan el apoyo necesario y las habilidades aritméticas se desarrollarán de manera diferente.

Similarmente, cuando se analizan las habilidades como procesos dinámicos en lugar de rasgos estables, se pueden descubrir nuevas relaciones entre ellas; tanto las habilidades espaciales como las aritméticas hacen uso de la Agenda Visoespacial, generándose así una relación dinámica entre las dos.

2.5.2 Razonamiento diagramático

2.5.2.1 Mecanismos

Una representación diagramática difiere de una sentencial en dos hechos básicos. Primero, las representaciones sentenciales son secuenciales (lineales, por ejemplo, una oración del lenguaje), mientras que las representaciones diagramáticas tienen lugar en un plano o en el espacio. En segundo lugar, una representación diagramática expresa explícitamente información topológica y geométrica, mientras que la representación sentencial tiene que expresar ese tipo de información implícitamente (Larkin y Simon, 1987). Esta diferencia representacional implica una distinción semántica, ya que ciertos tipos de información espacial se expresan más eficientemente usando diagramas como, por ejemplo, información de localización mediante el uso de mapas (Shin, 1994).

El Enfoque Onto-Semiótico asume que las expresiones aritméticas presentadas en el lenguaje simbólico de la matemática son información sentencial (Godino, Fernández, Gonzato y Cajaraville, 2012). Sin embargo, hay algunas características de las expresiones aritméticas que las hacen similares a la información diagramática. En primer lugar, según los algoritmos utilizados para resolverlas, se presentan a veces horizontalmente y a veces verticalmente, yendo así un paso más allá de la representación clásica de información sentencial. En segundo lugar, incluyen símbolos y operaciones que permiten reordenar la expresión, al menos mentalmente. Por ejemplo '5 + 3 = 8' puede ser re-expresado como '5 = 8 - 3'. En tercer lugar, debido al uso de paréntesis y precedencia de operaciones, las expresiones aritméticas pueden agruparse espacialmente y re-agruparse de acuerdo con la estrategia de solución utilizada, revelando un componente espacial importante. Schneider, Maruyama, Dehaene y Sigman (2012) han encontrado, al examinar secuencias de movimientos oculares durante el cálculo de expresiones aritméticas, que las personas miran la expresión como un todo, no secuencialmente, incluso en ausencia de paréntesis. Esta forma de ver se corresponde más con diagramas que con frases secuenciales.

En concordancia con el razonamiento precedente, Cheng y Mix (2014) observaron -en niños- un efecto positivo del entrenamiento en rotación mental sobre cálculos aritméticos del tipo '2 + __ = 7'. Las investigadoras plantearon la hipótesis de que los niños, bajo la influencia del entrenamiento de rotación mental, reajustaron la expresión aritmética al formato más convencional '__ = 7 - 2' y la resolvieron más fácilmente.

Van Nes y van Eerde (2010) propusieron un vínculo conceptual entre habilidades espaciales y aritméticas: la rotación y el ensamblaje mental de objetos implica procesos de composición y descomposición figural; de manera similar, la capacidad para componer y descomponer cantidades es importante para el desarrollo de relaciones numéricas y operaciones (por ejemplo, $9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15$). Los autores utilizan este hecho para sugerir que existe una habilidad de 'ensamblaje espacial' ('spatial structuring', en el original) que puede influir en las habilidades aritméticas de los niños.

2.5.2.2 Análisis Semiótico

El análisis anterior, visto desde una perspectiva semiótica, puede interpretarse en términos de representación simbólica y significado. Siempre que se quiere presentar un concepto, hay que hacer uso de una representación simbólica. El Enfoque Onto-Semiótico se refiere a esta situación como la "dualidad" de contenido-expresión (Godino et al., 2007). Es importante notar que un concepto puede tener múltiples expresiones e -inversamente- una expresión puede transmitir más de un concepto. Los problemas aritméticos verbales, por ejemplo, implican no sólo habilidades aritméticas, sino también lingüísticas.

En el caso particular de los cálculos aritméticos escritos, la manera de presentar los problemas aritméticos implica a veces el uso de habilidades visuales más allá de las habilidades visuales típicas usadas para la lectura del lenguaje. Como consecuencia, el resultado de la evaluación de las habilidades aritméticas puede verse afectado por habilidades visuo-espaciales, incluso si no existe un vínculo conceptual entre ambas. Jiang, Cooper y Alibali (2014) reportan que algunas características espaciales de las ecuaciones matemáticas pueden influenciar la forma en que las personas las interpretan y resuelven.

Otro concepto relacionado con la comprensión del significado es el de 'optimización cognitiva'. Lo utilizamos para describir la estrategia mediante la cual una persona interpreta un símbolo en un contexto dado usando conjuntamente información esencial (conceptual) y no esencial (contextual).

Braithwaite, Goldstone y Maas (2016) encontraron que los niños usan la distancia entre símbolos y la complejidad de las operaciones para interpretar la precedencia de los operadores aritméticos. Por ejemplo, 5+3   *   2 podría interpretarse erróneamente como (5+3) * 2, dado que la distancia entre los sumandos es menor que entre los multiplicandos, contrariamente a la convención; similarmente, 1+9*12 puede ser interpretado como (1+9)*12 por la menor complejidad de cálculo que la última operación implica.

Por otro lado, los niños acostumbran emplear 'atajos' para identificar la operación requerida en problemas aritméticos verbales, evitando la comprensión conceptual del enunciado y siguiendo -por ejemplo- sugerencias sintácticas (Dowker, 2005).

A pesar de que la optimización cognitiva permite agilizar la interpretación de símbolos al apoyarse en hechos contextuales recurrentes, su uso puede conducir a errores cuando se utiliza exclusivamente información no esencial para interpretar hechos esenciales, como se mostró en los ejemplos anteriores. Con frecuencia, estos errores se deben a falencias en el proceso educativo. La ilustración de un concepto por parte del profesor debería ser variada e incluir todas las características fundamentales, evitando la generalización de las no fundamentales (López, 1990). En el caso de la aritmética, si los problemas se presentan casi siempre en un formato canónico, los niños pueden cometer errores cuando se enfrentan a formatos no canónicos:

> La investigación ha demostrado que la comprensión y el rendimiento de los niños que resuelven problemas aritméticos exactos depende en gran medida del formato canónico del problema, en el que las operaciones aritméticas aparecen en el lado izquierdo (por ejemplo, '3 + 4 = 7'. Baroody y Ginsburg, 1983; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Seo y Ginsburg, 2003). El comportamiento de los niños en una variedad de tareas matemáticas sugiere que los niños han internalizado este formato canónico de 'operaciones en el lado izquierdo' (McNeil y Alibali, 2004, 2005). Por ejemplo, cuando se le pide a los niños que comprueben si los problemas aritméticos escritos por un niño que 'asiste a otra escuela' son 'correctos', la mayoría marca frases como '10 = 6 + 4' como 'incorrectas' y las cambia a '6 + 4 = 10' , '4 + 6 = 10' o incluso '10 + 6 = 4' (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Cobb, 1987; Rittle-Johnson et al., 1999). De manera similar, cuando se pide a los niños que reconstruyan un problema como '3 + 5 = 6 + _', después de verlo brevemente, muchos escriben '3 + 5 + 6 = _' (McNeil y Alibali, 2004). (McNeil, Fuhs, Keultjes y Gibson, 2011, p. 58, traducción propia).

Es posible que el desarrollo de habilidades de rotación mental permita cambiar más 'cómodamente' el formato de expresiones aritméticas canónicas y esto redunde en las habilidades de cálculo. Por ejemplo, Cheng y Mix (2014) sugieren que el entrenamiento en rotación mental mejora el rendimiento de los niños en operaciones aritméticas del tipo ‘2 + __ = 7’ debido a que pueden re-organizar la expresión 'rotándola' y re-expresándola como ‘__ = 7 – 2’, lo que facilitaría su resolución. Completamos esta afirmación sugiriendo que las habilidades de rotación mental mejoran la calidad del proceso de interpretación y lectura de símbolos aritméticos y ayudan a evitar interpretaciones erróneas debido a problemas relacionados con la optimización cognitiva. La relación entre habilidades espaciales y habilidades aritméticas sería entonces posible debido a algunas características diagramáticas -y visuales- de las expresiones aritméticas escritas.

2.5.3 Otros factores

2.5.3.1 Evidencia

Zhang (2016) informa que la percepción espacial, las habilidades visuo-espaciales y la función ejecutiva se relacionan con la adquisición temprana de competencias numéricas en niños de 3 años. La competencia numérica incluye habilidades de conteo de números, comprensión del principio de cardinalidad y habilidades de comparación de números, entre otras. Esas habilidades son fundamentales para la competencia aritmética. Las habilidades visuo-espaciales a una edad muy temprana estarían, entonces, relacionadas con las habilidades aritméticas posteriores.

Por otro lado, la variación en las habilidades de estimación de números en niños de 6 años de edad puede explicarse por la inteligencia general y la Agenda Visoespacial. Dado que las habilidades de estimación de números también se han relacionado con las habilidades aritméticas en niños de primaria (Booth y Siegler, 2006), existe una relación transitiva entre Agenda Visoespacial y aritmética.

Las relaciones mencionadas pueden ofrecer indicios sobre los mecanismos que conectan las habilidades espaciales y aritméticas. Sin embargo, las investigaciones sobre esos temas son insuficientes para poder plantear hipótesis razonables.

Ciertos factores sociales también pueden desempeñar un papel en la comprensión de las relaciones espacio-aritméticas. Casey, Dearing, Dulaney, Heyman y Springer (2014) subrayan la importancia del apoyo materno durante la resolución espacial de problemas para las habilidades espaciales y aritméticas en niñas.

La influencia social puede ser difícil de analizar desde una perspectiva semiótica, pero es posible que los factores sociales puedan influir en las habilidades cognitivas y entonces su influencia podría ser considerada desde un punto de vista cognitivo. Byrnes y Wasik (2009) consideraron varios factores que podrían influir en las destrezas matemáticas en los niños de preescolar y primaria. Encontraron que los factores cognitivos eran los determinantes más importantes de las habilidades matemáticas, superando a factores socioeconómicos y de oportunidad.

2.5.3.2 Análisis Semiótico

Como ya se ha dicho, no hay estudios suficientes que permitan hacer afirmaciones informadas sobre la posible conexión entre los diversos factores analizados en la sección anterior y las relaciones espacio-aritméticas. Idealmente, la inclusión de eventos semióticos como la emergencia contextual del significado y el estudio de procesos particulares de cognición pueden ofrecer resultados investigativos valiosos para comprender mejor los mecanismos que vinculan el espacio y la aritmética.

2.6 Consideraciones finales

Hemos revisado varias investigaciones que informan sobre la relación entre habilidades espaciales y aritméticas y hemos encontrado tres posibles mecanismos que podrían explicarla. Primero, la Memoria de Trabajo como un recurso compartido. Segundo, el razonamiento diagramático y algunas habilidades visuales podrían ayudar a interpretar y manipular expresiones aritméticas. En tercer lugar, la composición y la descomposición de imágenes podrían influir conceptualmente en la capacidad de asociación y distribución de números.

Como parte del proceso de razonamiento y sugerido por la literatura, hemos introducido el concepto semiótico de ‘optimización cognitiva’ para describir la estrategia mediante la cual una persona interpreta un símbolo en un contexto dado usando -conjuntamente- información esencial (conceptual) y no esencial (contextual); planteamos la hipótesis de que las habilidades de rotación mental pueden facilitar la lectura de expresiones aritméticas y ayudar a superar algunas dificultades debidas a errores de optimización cognitiva.

Creemos que un marco semiótico que guie y conceptualice futuras investigaciones sobre el tema puede ayudar a dilucidar los principales mecanismos causales que vinculan habilidades espaciales y aritméticas. Dichas investigaciones deberían tener en cuenta tanto resultados estadísticos, no contextuales, de grupo, como resultados cualitativos, contextuales y personales.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Introducción

Nuestro objetivo de investigación es explicar, en el ámbito de la Educación Matemática, la influencia que la ejercitación en habilidades espaciales tiene sobre habilidades aritméticas, medida en pruebas escritas en niños de primaria. Utilizamos para ello el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. En este enfoque teórico y metodológico se considera que el conocimiento emerge de la actividad matemática y, como tal, debe ser estudiado con base en las prácticas matemáticas que realizan los individuos en sus procesos de aprendizaje.

Acorde con esta concepción contextualizada del conocimiento, comenzamos por realizar un análisis puntual de un instrumento de medida usado en investigaciones sobre habilidades espaciales y aritméticas en Ciencia Cognitiva (Cheng y Mix, 2014). Analizamos los supuestos epistemológicos y cognitivos implícitos en dicho instrumento y los contrastamos con las concepciones equivalentes del Enfoque Onto-Semiótico, afines a concepciones socio-culturales en educación (Godino, 2017).

Buscamos con este análisis presentar los conceptos teóricos que consideramos relevantes para nuestra investigación. Un estudio más profundo del Enfoque Onto-Semiótico se puede proseguir a través de las referencias bibliográficas citadas.

Paralelamente al análisis realizado, presentamos las características de un instrumento de medida ampliado que nos permita complementar los aportes de la Ciencia Cognitiva con los de la Educación Matemática. El instrumento de medida como tal se presenta en el Capítulo 4.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera: primero, presentamos dos conceptos teóricos del Enfoque Onto-Semiótico que son relevantes para nuestra investigación. A continuación, introducimos los métodos cuasi-experimentales y presentamos el instrumento de medida a analizar. Seguidamente, analizamos las concepciones implícitas en el instrumento de medida e introducimos paralelamente las concepciones equivalentes del Enfoque Onto-Semiótico. Concluimos afirmando que los diseños cuasi-experimentales pueden aportar información valiosa para la Educación Matemática cuando son adecuadamente complementados con concepciones teóricas y métodos cualitativos usados en investigación educativa.

3.2 Dos conceptos teóricos relevantes

El Enfoque Onto-Semiótico es un modelo conceptual y metodológico que aborda la complejidad de la práctica y la investigación en Educación Matemática desde una perspectiva sistemática e interdisciplinar (Godino et al., 2007, p. 128).

Entre el conjunto de nociones teóricas que componen este enfoque, hay dos de particular interés para la presente investigación:

Primero, el concepto de '*Sistema de prácticas*' (operativas, discursivas y normativas), el cual "[…] asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático" (Godino, 2012, p.55). "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334)

Segundo, el concepto de "*Configuración de objetos y procesos* matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas, [donde] se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado" (Godino, 2012, p. 55). Un objeto matemático es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática (Font, Godino, & D'Amore, 2015, p. 64). Esta generalidad de la noción de objeto se complementa con una tipología de objetos, los cuales se distinguen por su diversa naturaleza y funcionalidad en las prácticas matemáticas.

En el EOS, las habilidades surgen y deben ser estudiadas en prácticas personales válidas desde una perspectiva institucional, conjuntamente con los objetos y procesos matemáticos implicados en tales prácticas (Godino, 2012, p. 52; Gonzato, 2013, p. 77).

Hacemos en las siguientes sesiones una introducción a los diseños cuasi-experimentales y presentamos un diseño específico enfocado a determinar relaciones entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético. A partir del análisis de este diseño, introducimos otros conceptos teóricos del Enfoque Onto-semiótico pertinentes para nuestra investigación.

3.3 Diseños cuasi-experimentales

Los métodos experimentales en educación han resurgido notablemente en años recientes, especialmente en Estados Unidos (Schoenfeld, 2002). La característica fundamental de estos métodos es que el investigador controla una variable elegida (variable independiente) y observa su efecto sobre otra variable de interés (variable dependiente). La causalidad, controlabilidad y predictibilidad de las variables del experimento son presupuestos conceptuales en estas metodologías.

Entre la diversidad de métodos experimentales (Cohen, Manion y Morrison, 2007), nos interesa analizar los diseños cuasi-experimentales en educación, donde las investigaciones se hacen en contextos educativos habituales, pero las variables de interés se tratan de aislar, controlar y manipular. Específicamente, nos centramos en el diseño pre-test post-test con grupos experimental y de control. En este tipo de diseño, la variable dependiente se evalúa en dos momentos específicos: previamente (pre-test) a la intervención que implica la variable independiente y posteriormente a ella (post-test). Los grupos experimental y de control tienen diferentes tipos de intervención y se busca determinar el efecto del tipo de intervención (variable independiente) sobre los cambios observados en la variable dependiente (test). La intervención realizada en el grupo experimental se considera importante para la variable dependiente, mientras que la intervención en el grupo de control se considera de poco valor para la variable dependiente y se usa como un mecanismo de comparación del efecto logrado por la intervención en el grupo experimental.

Los diseños cuasi-experimentales se usan cuando se pre-supone que hay una relación causa-efecto importante entre dos variables de interés. En investigación educativa, existe mucha polémica acerca de la conveniencia de aplicar estos métodos (Cohen et al., 2007; Schoenfeld, 2002). Los métodos experimentales son normalmente utilizados en investigaciones agrícolas y médicas para determinar el efecto de un tratamiento específico sobre una característica de una población (cultivos, personas); sin embargo, la complejidad de los escenarios educativos y el gran número de variables involucradas en su descripción, hacen difícil el control y manipulación de variables en la forma en que lo exigen los diseños experimentales.

En teoría, una selección aleatoria (muestra probabilística) y un número suficiente de personas en los grupos experimental y de control haría que las variables independientes no consideradas en el experimento fueran estadísticamente controladas. No obstante, lograr estas muestras aleatorias en ambientes educacionales no es fácil dado que los investigadores tienen generalmente acceso a grupos específicos de estudiantes que son, por lo tanto, no aleatorios en un sentido estadístico. A esto se añade la gran diversidad de teorías educativas (Schunk, 1996) y la falta de consenso acerca de las variables importantes a tener en cuenta al muestrear (Schoenfeld, 2007).

Presentamos a continuación un diseño cuasi-experimental que busca determinar la influencia de la ejercitación en habilidades de rotación espacial sobre habilidades de cálculo numérico en niños de primaria. En las secciones posteriores analizamos las implicaciones conceptuales de este diseño y las comparamos con conceptos relacionados del Enfoque Onto-Semiótico.

3.4 Diseño bajo análisis

La Ciencia Cognitiva ha investigado extensamente la relación entre habilidades espaciales y matemáticas; la mayor parte de los resultados respaldan el establecimiento una relación sólida entre estas dos habilidades (Mix y Cheng, 2012). Generalmente, las habilidades espaciales sirven como predictoras de habilidades matemáticas, bien de forma concurrente (De Smedt, Taylor, Archibald, y Ansari, 2010; Praet, Titeca, Ceulemans, y Desoete, 2013;

Rasmussen y Bisanz, 2005; Verdine, Irwin, Golinkoff, y Hirsh-Pasek, 2014; Vukovic y Lesaux, 2013), bien como factores que las anteceden temporalmente (Jordan, Glutting, y Ramineni, 2010; Morgan, Farkas, y Wu, 2009; Praet et al., 2013).

Basados en este hecho, algunos autores han investigado la posibilidad de promover habilidades matemáticas mediante el entrenamiento de habilidades espaciales (Cheng y Mix, 2014; Hawes, Moss, Caswell, y Poliszczuk, 2015; Lowrie, Logan, y Ramful, 2017). El diseño experimental que presentamos evalúa la influencia –a corto plazo- del entrenamiento en habilidades de rotación mental sobre habilidades de cálculo aritmético en niños de primaria.

Se trata de un diseño cuasi-experimental con una metodología pre-test post-test con grupos experimental y de control. La variable dependiente (habilidades de cálculo aritmético) se evalúa a través de test. Una muestra del tipo de ítems en los test se muestra en la Figura 1. La variable independiente (entrenamiento en habilidades de rotación mental) se 'ejercita' haciendo uso de una serie de ejercicios, uno de los cuales se presenta en la Figura 2. Estos ejercicios se realizan con los estudiantes del grupo experimental. Al mismo tiempo, los estudiantes del grupo de control trabajan con crucigramas y sopas de letras.

La diferencia entre el resultado promedio del post-test y el resultado promedio del pre-test se considera el 'efecto de la intervención experimental' (Cohen et al., 2007). Este efecto debe ser contrastado con el resultado análogo en el grupo de control, para descartar influencias debidas a otros factores y centrarse en el efecto de la intervención (que es idealmente lo único que diferencia a los dos grupos).

$5 + 1 = \square$ $\qquad$ $11 - \square = 4$

$$\begin{array}{r} 33 \\ +\;\; 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 95 \\ -\;\; 7 \\ \hline \end{array}$$

$10 + 3 + 5 = \square$ $\qquad$ $13 + 5 - 7 = \square$

$$\begin{array}{r} 232 \\ +121 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 672 \\ -345 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\;\; \square \\ \hline 39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ -\;\; \square \\ \hline 86 \end{array}$$

Figura 1. Algunos ejercicios de los test de cálculo aritmético

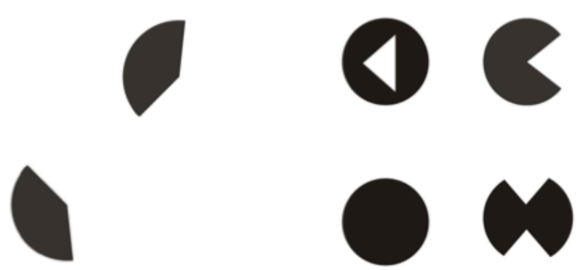


Figura 2. Ejercicios de rotación mental para estudiantes del grupo experimental. Las dos figuras de la parte izquierda generarán, al unirse una de las figuras de la parte derecha.

El experimento completo se realiza en dos sesiones en el lapso de una semana. La primera sesión se dedica al pre-test y dura aproximadamente 30 minutos. La segunda sesión incluye la intervención sobre cada uno de los grupos y seguidamente el post-test; su duración aproximada es de una hora.

Con base en nuestra experiencia investigativa con este diseño cuasi-experimental y apoyándonos en el Enfoque Onto-Semiótico, procedemos en las siguientes secciones a realizar un análisis multifacético de este instrumento de medida.

3.5 Complejidad causal en investigación educativa

El diseño cuasi-experimental presentado busca descubrir relaciones causa-efecto entre habilidades espaciales y aritméticas. Sin embargo, su alcance es limitado debido a que considera una única variable independiente, que podría no ser la de mayor peso en este caso. Hay que tener en cuenta que, de acuerdo con las concepciones epistemológicas y ontológicas que se tengan de los procesos de enseñanza y aprendizaje, se determinan las variables más importantes a considerar en cada caso bajo estudio. El profesor, la situación socio-económica del estudiante, la motivación, las habilidades previas del estudiante, etc., pueden tener un mayor peso que las habilidades de rotación espacial en este caso y, por lo tanto, hacer relativamente banales los resultados (Schunk, 1996).

Considerando la pluralidad de variables y puntos de vista en Educación Matemática, el Enfoque Onto-Semiótico propone analizar las prácticas educativas (en este caso la resolución de test de aritmética y de ejercicios de rotación espacial) a través de varias facetas expresadas como dualidades: personal–institucional, ostensivo-no ostensivo, extensivo–intensivo, unitario–sistémico y expresión–contenido (para un análisis detallado, véase: Font et al., 2015; Godino et al., 2007). El análisis de dichas dualidades aporta nuevas variables de interés al análisis del instrumento en cuestión.

Una mirada a los test a través de la dualidad personal-institucional lleva a cuestionarse hasta qué punto pueden estos medir habilidades: las habilidades de los estudiantes están relacionadas tanto con su desarrollo cognitivo individual (Duval, Sáenz-Ludlow, Uribe Vasco, y D'Amore, 2016) como con la forma en que el conocimiento ha sido impartido por la institución (Godino, 2017). Los resultados del test de aritmética del diseño cuasi-experimental presentado no pueden dar cuenta de factores tales como las herramientas didácticas del maestro, las posibles deficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje el currículo, etc. Por ejemplo, puede suceder que los estudiantes fallen en cierto tipo de problemas aritméticos no por su dificultad, sino por el tipo de presentación del problema, el cual puede no haber sido suficientemente discutido por el maestro en el proceso de enseñanza (López, 1990) y ser, por lo tanto, poco familiar para el estudiante. (véase el concepto de optimización cognitiva en el Capítulo 2).

La dualidad ostensivo (notaciones, símbolos, gráficas) vs. no ostensivo (conceptos, objetos matemáticos) aporta también otros interrogantes: ¿Depende la evaluación de la forma de presentar los conceptos? A este respecto, es posible que un estudiante tenga problemas para realizar cálculos numéricos escritos y, sin embargo, realice operaciones similares adecuadamente como respuesta a problemas aritméticos verbales. Dowker (2005) subraya que las diferentes habilidades aritméticas (cálculo numérico, resolución de problemas verbales, estimación, etc.) no están unívocamente relacionadas y varían marcadamente entre individuos. Consecuentemente, el hecho de que un estudiante no pueda resolver un ejercicio específico de suma no implica que no comprenda el concepto de adición y que no sea capaz de operar con él.

Concluimos entonces que un análisis exclusivamente cognitivo de las habilidades no es suficiente para investigar ciertos factores importantes que las determinan y, por lo tanto, el instrumento de medida debe incluir otras herramientas que den cuenta de la complejidad de la naturaleza y formas de valoración de las habilidades.

3.6 Habilidades en un contexto escolar

Existen algunos aspectos del contexto educativo que el diseño cuasi-experimental presentado no logra captar y que son importantes desde un punto de vista socio-cultural en educación. La diferencia más básica es que mientras el diseño experimental busca explicar relaciones en características cognitivas individuales, las perspectivas socio-culturales se enfocan en *procesos* de apropiación de conocimientos *socialmente* adquiridos (Billett, 1996).

Los investigadores en Educación Matemática están más interesados en los *procesos* de aprendizaje que en la verdad, y más interesados en los procesos de pensamiento de los estudiantes que en la respuesta que puedan dar a una pregunta concreta (Sierpinska y Lerman, 1996).

Además, el aprendizaje en *contextos institucionales* implica diversas interacciones entre estudiantes, maestros, materiales, configuraciones, etc. Todos estos factores afectan el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Schunk, 1996) y deberían ser tomados en cuenta al evaluar aprendizajes.

En este sentido, el Enfoque Onto-Semiótico propone una visión ontológica y epistemológica del conocimiento matemático que enfatiza su carácter *social* y *procesual*.

En su aspecto ontológico, los objetos y conceptos matemáticos no son considerados como entidades abstractas con 'existencia' propia, sino como entidades emergentes de *prácticas sociales* enfocadas a la resolución de problemas matemáticos. Dichas prácticas generan lenguajes simbólicos y sistemas conceptuales lógicamente organizados (Godino et al., 2007). La definición de una habilidad está por lo tanto relacionada con el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y con la configuración de objetos y procesos ligados a tales prácticas (Gonzato, 2013).

En su aspecto epistemológico, al emerger de situaciones prácticas específicas, el conocimiento matemático está ligado con su contexto de emergencia. En entornos educativos, esto implica re-plantear el concepto de habilidad como algo puramente cognitivo y llevarlo al terreno institucional. Ciertamente, es la institución educativa quien define qué es una habilidad y por lo tanto no se puede seguir considerando que una habilidad es algo únicamente personal. Es más apropiado asumir que se trata de una destreza personal institucionalmente mediada y aprobada.

En resumen, los presupuestos teóricos en los que se basa el diseño cuasi-experimental presentado parecen no permitir la valoración de ciertos factores importantes para los educadores matemáticos desde el punto de vista del Enfoque Onto-Semiótico.

3.7 Concepción y medición de habilidades por medio de test

La medición de habilidades a través de test implica el uso de herramientas estadísticas tanto para la creación de test como para el análisis de los resultados de su aplicación. Para seleccionar las preguntas de un test que busquen medir una habilidad, se usa la técnica estadística de análisis factorial, la cual extrae correlaciones (factores) en conjuntos de respuestas a preguntas específicas de la habilidad en cuestión. Dichos factores determinan la definición de la habilidad, depurando las preguntas que muestran alta correlación y desechando las demás. Una vez definida la habilidad, su grado de dominio se mide por el número de respuestas correctas que la persona obtenga en el test elaborado.

Se pueden hacer varias observaciones respecto a esta forma de definir y medir habilidades. Primero, a pesar de que las preguntas que conforman un test han sido seleccionadas con procesos estadísticos, el test conserva un componente subjetivo importante: el investigador debe, en un principio, seleccionar, según su criterio, el conjunto de preguntas a depurar y los métodos estadísticos para hacerlo. Además, las personas que participen en la depuración de las preguntas aportan también su componente subjetivo en la forma de sus respuestas. En definitiva, la perspectiva conceptual de quien elabora el test y la población con la cual se trabaja para elaborarlo y validarlo pueden dar forma a los resultados obtenidos (Schoenfeld, 2002). Esto hace que la 'objetividad' del instrumento sea relativa.

Los test son entonces elaborados en contextos particulares y su aplicación en otros contextos debe ser críticamente analizada, para evitar definir habilidades como imposiciones externas sin relación con el contexto de uso (Schoenfeld, 2002): se tiene 'habilidad de cálculo aritmético' si se obtienen buenos resultados en un test de cálculo aritmético!

Desde una perspectiva onto-semiótica, el test es una herramienta, entre otras, para valorar habilidades. Un análisis coherente de habilidades debe incluir también una evaluación contextual de las prácticas operativas y discursivas de las personas y de los objetos matemáticos que de ellas emergen.

Desde una perspectiva cognitivista, subyacente al uso de test como herramienta para medir y definir habilidades se pueden encontrar el lenguaje y puntos de vista de la psicología de rasgos: las personas poseen rasgos que son medibles cuantitativamente a través de la aplicación de test. Dichos rasgos son características –atributos, actitudes o disposiciones- relativamente estables e independientes del contexto (Mislevy, 2008). Esta visión es difícilmente articulable con perspectivas socio-culturales y ecológicas en las cuales el comportamiento –y las habilidades- de las personas está relacionadas con el ambiente en el que se encuentran y con las reglas sociales que lo rigen (Barker y Wright, 1949; Billett, 1996). Barker (1968) hace notar que hay menos variación comportamental entre niños que se encuentren en un ambiente específico (por ejemplo en una iglesia), que la que se puede observar en un mismo niño en dos ambientes diferentes (por ejemplo, en la iglesia y en la playa). El contexto es un factor determinante en el comportamiento.

En conclusión, los test pueden ser un instrumento válido para medir habilidades siempre y cuando su uso se complemente con otro tipo de instrumentos que den cuenta del contexto de emergencia y uso de las habilidades tanto a nivel cognitivo (personal) como a nivel institucional.

3.8 Análisis de resultados de los test

El objetivo principal de un test, en el ámbito educativo, es medir resultados de procesos de aprendizaje. Dicha medida, para el caso de los test, se centra en los productos del aprendizaje, pero ignora las formas en que los aprendizajes son asumidos por los estudiantes. Esto, desde un punto de vista socio-cultural, es un impedimento para lograr un proceso educativo de calidad (Daniels, 2003).

Adicionalmente, en el diseño experimental bajo análisis, los resultados son presentados como datos estadísticos, y la medición del efecto de las habilidades espaciales sobre las habilidades aritméticas se muestra como una tendencia, un aumento en una media estadística. Estos resultados sirven para analizar tendencias grupales, pero dicen poco acerca de los individuos y de los factores que motivan a nivel cognitivo las relaciones encontradas (Mislevy, 2008). Si se quiere profundizar en los mecanismos que subyacen a las relaciones encontradas se deben complementar los estudios experimentales con estudios cualitativos tales como entrevistas y actividades personalizadas. Este tipo de instrumentos permiten considerar más variables de estudio e indagar con mayor profundidad, a nivel individual, las habilidades de los estudiantes y sus posibles relaciones.

Los resultados de los test deben ser analizados de forma crítica para evitar interpretaciones erradas. Existe una tendencia generalizada a usar métodos estadísticos como mecanismo de justificación de resultados pobremente argumentados (Gorard, 2006, 2013). En algunos casos, se hacen pruebas estadísticas para confirmar hipótesis sin cumplir con el requisito mínimo de contar con muestras aleatorias (Gorard, 2006). El punto esencial que hay que tener en cuenta es que los modelos estadísticos se aplican sobre situaciones particulares y la pertinencia del modelo dependerá de la fidelidad en la representación de la situación

(Schoenfeld, 2002). Gorard (2013) alerta acerca del mal uso de la estadística en pruebas experimentales e invita a recurrir menos a pruebas de hipótesis y más a argumentos sólidos y convincentes que justifiquen la selección de las herramientas estadísticas usadas. Gene Glass recomienda efectuar análisis estadísticos exploratorios (Robinson, 2004). En nuestra investigación, optamos por hacer análisis estadísticos exploratorios guiados por las hipótesis planteadas acerca de los posibles mecanismos explicativos de la relación entre habilidades espaciales y aritméticas. Complementamos estos análisis con entrevistas y estudio de factores contextuales.

3.9 Apreciaciones finales

Los test, dada su facilidad de uso y su capacidad para cubrir varios temas, son un medio de evaluación interesante. Pero dado que se centran en resultados, pueden presentar indicios erróneos debidos a factores no considerados, como los ya expuestos. Adicionalmente, otros factores tales como ansiedad, engaño, falta de comprensión de los enunciados, etc. pueden llevar a valoraciones erradas de los resultados (Schunk, 1996). La introducción de métodos cualitativos complementarios permite considerar estos factores y generar conclusiones más consistentes.

Por otro lado, el hecho de que el test busque ser ‘objetivo’, en el sentido de ser independiente del contexto y de la historia del sujeto, puede presentar algunas ventajas. Tal como un observador externo puede interpretar un fenómeno en el cual no está inmerso libre de la subjetividad de sus actores, los test permiten medir características de las personas que pueden haber sido ignoradas por el sistema educativo dados sus métodos de evaluación de conocimientos. En este sentido, las aproximaciones socio-culturales, al enfatizar el papel del lenguaje y la comunicación en el proceso educativo (Daniels, 2003; Godino, 2012), pueden perder de vista formas de enseñanza y aprendizaje que no están relacionadas con la argumentación y que no son fácilmente comunicables. El concepto de conocimiento implícito, por ejemplo, revela la existencia de estructuras cognitivas que no son fácilmente verbalizables por los sujetos que las poseen (Frensch y Rünger, 2012; Seger, 1994). Los ejercicios de entrenamiento espacial del diseño experimental que presentamos se muestran de fácil comprensión y solución por parte de los estudiantes, quienes, sin embargo, tienen grandes dificultades para expresar verbalmente las estrategias utilizadas en su resolución.

Seger (1994) define el conocimiento implícito como conocimiento no episódico de información compleja adquirido de forma incidental y sin conciencia de haber sido aprendido. Asociado al conocimiento implícito se encuentra el concepto de memoria procedural como un sistema de memoria que permite la adquisición y expresión de conocimiento práctico sin necesidad de que dicho conocimiento pueda ser explícitamente recordado o conscientemente adquirido (Cohen, Eichenbaum, Deacedo, y Corkin, 1985)

Otra forma de conocimiento que no involucra directamente ni el lenguaje ni procesos institucionales es el conocimiento informal. Se trata de una forma de conocimiento que no sucede dentro de un marco educacional y que no está organizado o planificado conscientemente (Eraut, 2000). Coffield (2000) afirma que el conocimiento informal representa la mayor parte del conocimiento que una persona adquiere.

En el caso de los estudiantes de primaria, el conocimiento informal debe ser tenido en cuenta en el proceso educativo ya que representa para el niño la forma primordial de conocimiento antes de su ingreso al sistema escolar (Holt, 1968). En este sentido, el énfasis de las teorías socio-culturales en educación sobre el lenguaje como forma básica de expresión de conocimiento y su acentuación del papel de las instituciones en el proceso educativo hace que ni el aprendizaje informal ni el aprendizaje implícito sean adecuadamente valorados. De cualquier manera, el estudio del razonamiento espacial (que parece no requerir del lenguaje) y de sus relaciones con otras habilidades puede ser un campo promisorio para la investigación de los procesos de aprendizaje informal e implícito en niños.

3.10 Conclusiones

El Enfoque Onto-Semiótico puede aportar mucho al análisis y uso de los diseños cuasi-experimentales. Consideraciones tales como el carácter situado de las habilidades, su relación con el entorno social y educativo y con el desarrollo cognitivo del individuo generan reflexiones necesarias para quienes trabajan con diseños cuasi-experimentales en educación. Por otro lado, el uso de test en los diseños cuasi-experimentales y el estudio de relaciones entre variables cognitivas pueden dar pistas acerca de fenómenos de aprendizaje interesantes que no son fácilmente perceptibles en los procesos de interacción cotidiana en el aula.

Consideramos que una metodología de investigación mixta (Cohen et al., 2007) puede aportar mucho en el estudio de habilidades espaciales y sus relaciones con otras habilidades en niños de primaria, ya que en este caso el lenguaje no parece tener un papel primordial y por lo tanto una aproximación puramente cualitativa podría ser insuficiente.

En el siguiente capítulo presentamos una propuesta metodológica acorde con la discusión precedente. Se trata de obtener un instrumento de valoración de habilidades que no solo considere resultados de procesos matemáticos, sino también que permita investigar los mecanismos que subyacen a las relaciones entre habilidades de rotación espacial y habilidades de cálculo aritmético en niños de primaria.

4. METODOLOGIA

4.1 Introducción

Para responder a la pregunta de investigación -¿Cómo puede explicarse en el ámbito de la Educación Matemática la influencia que la ejercitación en habilidades de rotación mental tiene sobre habilidades de cálculo aritmético medida en pruebas escritas en niños de primaria?- se plantea una metodología con las siguientes características:

Primero, trabajamos con una metodología mixta (Johnson y Onwuegbuzie, 2004) que integra investigaciones de tipo cuantitativo (análisis estadísticos de test) y de tipo cualitativo (análisis de habilidades individuales en contextos escolares). Por un lado, se trata de obtener una imagen 'global' de las relaciones entre habilidades espaciales y aritméticas a través de análisis estadísticos de test aplicados a estudiantes de primaria. Por otro lado, se busca comprender, mediante situaciones-problema, entrevistas, análisis de libros de texto, etc., ciertos procesos cognitivos que permitan analizar dichas habilidades y sus relaciones a nivel individual.

Segundo, hacemos uso de formas de valoración contextuales de los procesos cognitivos relacionados con las habilidades de interés. Para ello, analizamos los resultados de los test teniendo en cuenta el proceso educativo previo y algunas investigaciones relacionadas. Los resultados de este análisis nos sirven para planear entrevistas personalizadas que arrojen luz sobre las correlaciones halladas en los test.

Tercero, analizamos los datos numéricos con herramientas de estadística exploratoria. Existen dos razones principales para ello: de un lado, no contamos con una muestra aleatoria y representativa que nos permita hacer estadística inferencial; de otro lado, más allá de determinar tendencias globales, nos interesa buscar indicios de los mecanismos que subyacen a la relación entre habilidades espaciales y aritméticas.

La investigación está limitada al contexto particular de una institución de educación básica primaria en la ciudad de Ibagué (Tolima - Colombia), aunque se espera que algunos de sus resultados y metodología se puedan trasferir a o convertirse en punto de partida para otras investigaciones en habilidades y sus relaciones. Los resultados obtenidos se confrontan con resultados de investigaciones similares para enmarcar las conclusiones dentro del campo de estudio de las habilidades en Educación Matemática.

Este capítulo se estructura de la siguiente manera: presentamos primero una visión general de la metodología utilizada; analizamos después las etapas cuantitativa y cualitativa en detalle; finalmente, concluimos con algunas observaciones acerca de las similitudes teóricas entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético.

4.2 Diseño explicativo secuencial

Existe evidencia estadística de que ciertas habilidades espaciales son predictoras de habilidades aritméticas en estudiantes de primaria y preescolares (Verdine et al., 2014). Sin embargo, es un hecho polémico si la ejercitación de habilidades espaciales mejora las habilidades aritméticas en niños de primaria. Cheng y Mix (2014) han reportado un caso en el que se confirma la relación. Hawes, Moss, Caswell y Poliszczuk (2015), por el contrario, reportan no haber encontrado ninguna relación significativa en un caso de estudio similar. Esto sugiere que existen otras variables que influyen en la relación y no han sido aún debidamente consideradas.

En los estudios mencionados se usaron metodologías exclusivamente cuantitativas; debido a esto, algunas cuestiones importantes en el campo de la Educación Matemática permanecen como preguntas abiertas: ¿Qué procesos cognitivos permitirían explicar dicha relación? y ¿Cómo influye el contexto educativo en las habilidades estudiadas?

Para responder a estas preguntas, planteamos una metodología mixta con un diseño explicativo secuencial (Creswell, 2012, p. 541). El diseño complementa los estudios cuantitativos que reportan la relación con un estudio cualitativo que busca complementar conceptualmente los resultados cuantitativos obtenidos. La Figura 3 presenta un esquema del diseño utilizado.

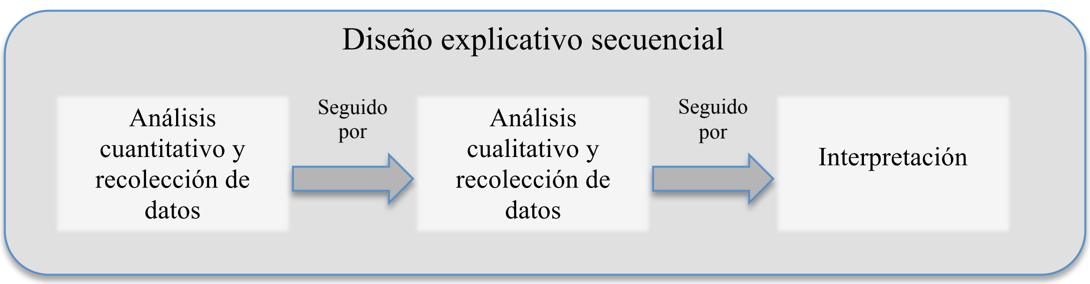


Figura 3. Diseño explicativo secuencial

Procedemos en las siguientes secciones a introducir los sujetos y el contexto en el que se dio la investigación y a analizar cada una de las etapas del diseño.

4.3 Sujetos y contexto

Los sujetos de la investigación fueron 65 estudiantes del grado segundo de primaria de las jornadas matutina y vespertina de la Institución Educativa Colegio de San Simón en la ciudad de Ibagué – Colombia; 32 niños fueron asignados aleatoriamente al grupo experimental y 33 al grupo de control. El promedio de edad de los estudiantes fue de 7 años. El trabajo de campo se realizó entre febrero y marzo de 2017. En el mes de febrero se realizó tanto un proceso de observación de las clases de matemáticas como un estudio del material escrito relacionado (libros, cuadernos, ejercicios, etc.); los test y las entrevistas se realizaron en el mes de marzo, una vez terminadas las clases que involucraban la enseñanza de procesos de suma y resta.

Se seleccionó un grupo de estudiantes de segundo de primaria porque es en este grado de escolaridad que los niños aprenden los algoritmos básicos de la suma y la resta. La edad promedio de los estudiantes coincide con aquella de los sujetos de dos investigaciones importantes relacionadas con la nuestra (Cheng y Mix, 2014; Hawes et al., 2015).

Una investigación suplementaria, cuyos resultados se mencionarán como complemento a las conclusiones obtenidas, se realizó con 58 estudiantes de tercer grado de la misma institución en marzo de 2016; el promedio de edad de los estudiantes era de 8 años, que es la edad superior del rango de edades de las investigaciones de Cheng y Mix (2014) y Hawes et al. (2015). En este caso, solo se realizó el estudio de tipo cuantitativo.

En los resultados mostrados no se presenta información confidencial de ninguno de los participantes de la investigación. Toda la información que se publica fue aprobada por la institución educativa donde se realizó el trabajo de campo. El tratamiento y análisis de la información se realizó de tal manera que no indujera a la identificación de ningún sujeto particular, restringiendo nuestros análisis a los aspectos bajo investigación.

Los sujetos escogidos representan una muestra intencional, seleccionada de acuerdo con criterios de accesibilidad y con los criterios de carácter cognitivo ya expuestos. No se usaron técnicas probabilísticas de muestreo y, en consecuencia, las conclusiones se extienden solo a la población objeto de estudio, aunque, como estudio de caso, los hallazgos derivados del estudio pueden ser un instrumento para inferir características de otros estudiantes en contextos semejantes.

4.4 Etapa cuantitativa

Se hace uso de una metodología pre-test post-test con grupos experimental y de control. Estudiantes de segundo grado de primaria presentan pre y post-test de aritmética (sumas y restas, ver Figura 4); el grupo experimental realiza ejercicios de rotación mental de figuras en el intermedio de los test (ver Figura 5); mientras tanto, el grupo de control realiza actividades tales como crucigramas y sopas de letras.

4.4.1 Test

Los test aritméticos han sido usados en Cheng y Mix (2014) y se retoman aquí con autorización de las autoras. Los ítems en cada test incluyen problemas de adición de un solo dígito (p. ej., 6 + 1 = __ , 8 – 5 = __), problemas de adición de dos y tres dígitos (p. ej., 41 + 8, 672 – 527 = __) y problemas de término ausente (p. ej., 9 - __ = 2, 42 + __ = 48). Hay en total 4 test con diferentes ítems pero con el mismo tipo de problemas. Los test completos se encuentran en el Anexo 7.1.

La clasificación de los ítems en el párrafo anterior fue utilizada por Cheng y Mix (2014) para realizar sus análisis estadísticos. En el caso de nuestra investigación, la clasificación de los ejercicios se hizo de acuerdo a las hipótesis planteadas en la Sección 2.5 acerca de

$$5 + 1 = \boxed{} \qquad 11 - \boxed{} = 4$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ +\ \ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 95 \\ -\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$10 + 3 + 5 = \boxed{} \qquad 13 + 5 - 7 = \boxed{}$$

$$\begin{array}{r} 232 \\ +121 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 672 \\ -345 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ \boxed{} \\ \hline 39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ -\ \boxed{} \\ \hline 86 \end{array}$$

Figura 4. Algunos ejercicios de los test de aritmética

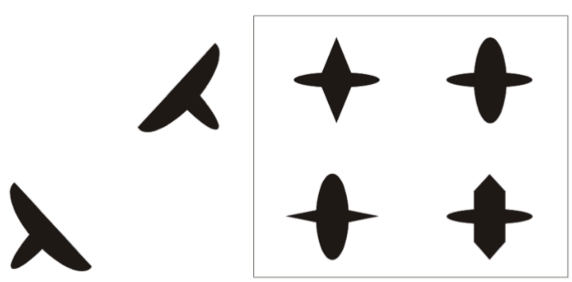


Figura 5. Ejercicio de rotación mental para estudiantes del grupo experimental. Las dos figuras de la parte izquierda generarán -al unirse- una de las figuras de la parte derecha

las posibles causas de las relaciones entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético. La Tabla 1 muestra los posibles mecanismos que relacionan las dos habilidades bajo estudio, los criterios que se usaron para evaluarlos y los ítems considerados en cada caso.

Tabla 1
Clasificación de ítems de los test de aritmética y mecanismo explicativo relacionado

Mecanismo explicativo de la relación entre habilidades	Tipo de ejercicio bajo análisis	Ítems (ver test en los anexos)
Memoria de trabajo	Ejercicios de acarreo	12, 14, 21, 23
Transformación de expresiones aritméticas	Ejercicios de término ausente	5-10, 24-27
Lectura correcta de expresiones aritméticas	Ejercicios de sustracción	1, 4, 14, 17, 23
	Ejercicios de término ausente	5, 7, 9, 24, 25
	Ejercicios de operaciones combinadas	18, 19

La explicación del tipo de ejercicio seleccionado en cada caso se encuentra en la Sección 5, donde se analizan y presentan los resultados obtenidos.

Los ejercicios de rotación mental son tomados del test 'Children's Mental Transformation Task'[4] y han sido usados en (Ehrlich, Levine y Goldin-Meadow, 2006), (Levine, Huttenlocher, Taylor y Langrock, 1999) y (Cheng y Mix, 2014). La batería completa de ejercicios de rotación mental se encuentra en el Anexo 2.

[4] http://www.spatiallearning.org/index.php/testsainstruments, consultado el 11/06/2017.

Previamente a la aplicación de los test se comprobó con los profesores de la institución y con el Proyecto Educativo Institucional[5] que los ítems de los test se correspondían con los temas enseñados y los abarcaban de forma comprehensiva.

4.4.2 Pre-test

El pre-test consiste en una sesión de aproximadamente 30 minutos en la cual los estudiantes responden un test de aritmética. A los estudiantes se les indica y permite rayar las hojas del test según sus necesidades y el tiempo para responder es extendido en aproximadamente 10 minutos para quienes lo necesiten.

Se les indica que no se trata de una evaluación a calificar y que lo que se busca es comprender la forma en la que están haciendo sumas y restas para, con esa información, buscar mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Antes del inicio del test se presentó una explicación del significado de algunos ejercicios cuyo formato no era usual para los estudiantes. Se usaron ejercicios con cálculos simples y se hizo énfasis en la interpretación del formato del ejercicio, más que en el cálculo implicado. Con ello se trata de garantizar que comprenden lo que se les pregunta. De cualquier manera, en el transcurso de la sesión se responden preguntas que tengan que ver con la interpretación de los ítems del test. Las preguntas que surgen acerca de la validez del resultado de una operación se responden con frases tales como: ‘si tú crees que está bien,

[5] El Ministerio de Educación de Colombia define el Proyecto Educativo Institucional como: “la carta de navegación de las escuelas y colegios, en donde se especifican entre otros aspectos los principios y fines del establecimiento, los recursos docentes y didácticos disponibles y necesarios, la estrategia pedagógica, el reglamento para docentes y estudiantes y el sistema de gestión” (http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-79361.html, página consultada el 10 de junio de 2017)

escribe ese resultado'. Finalmente, se les informa a los estudiantes que pueden hacer cálculos y anotaciones en las hojas de respuestas.

Cuando se reciben los test, se comprueba que todas las preguntas hayan sido respondidas; en caso contrario, se le pide al estudiante que responda los ítems pendientes. Si un estudiante toma más tiempo del planeado se le informa que el test va a ser recogido en unos minutos, tiempo después del cual se le pide que lo entregue y se le informa que habrá un nuevo test donde podrá trabajar en ejercicios similares.

4.4.3 Intervención

Entre 3 y 5 días después del pre-test se efectúa una segunda sesión con dos actividades: primero, se divide aleatoriamente el grupo en sub-grupos experimental y de control y se procede a trabajar en ejercicios de rotación mental con los estudiantes del grupo experimental y en crucigramas y sopas de letras con los estudiantes del grupo de control; segundo, cinco minutos después de finalizado el trabajo con los dos sub-grupos, se realiza un nuevo test de aritmética (post-test). Este protocolo se sigue atendiendo las sugerencias metodológicas del experimento realizado por Cheng y Mix (2014).

La primera de las actividades la denominamos 'intervención' y será analizada en esta sección. La segunda actividad la denominamos 'post-test' y será abordada en la siguiente sección.

Para los estudiantes del grupo experimental, la intervención consiste en el desarrollo de 32 ejercicios de rotación mental; un ejercicio típico de rotación se muestra en la Figura 5 (pág. 60). Al inicio se les explica a los estudiantes lo que deben hacer y se comprueba con el desarrollo en grupo de los primeros dos ejercicios que han comprendido lo que se les pregunta; para ello, se usan láminas separadas con cada una de las piezas de la figura a unir y se les muestra el proceso de rotación y unión de las dos partes, comprobando que identifican la respuesta correcta.

Durante el desarrollo de la actividad de rotación mental, los estudiantes pueden interactuar entre ellos y con el profesor y el investigador y cualquier pregunta que hagan se puede responder, ya que la actividad se considera principalmente formativa y desprovista de carácter evaluativo.

Los estudiantes del grupo de control trabajan en crucigramas y sopas de letras para niños y sus dudas son también respondidas.

4.4.4 Post-test

Cinco minutos después de finalizada las actividades de la intervención se procede a trabajar en el post-test de aritmética. Nuevamente se destinan 30 minutos, extensibles con 10 minutos adicionales, para que respondan el test. Se les permite rayar las hojas de respuestas y las dudas acerca del significado de las preguntas son respondidas.

4.5 Etapa cualitativa

En la etapa cualitativa de la investigación nos centramos en descubrir los mecanismos que puedan explicar las relaciones entre habilidades de rotación espacial y habilidades aritméticas. Para ello, analizamos los resultados de la etapa previa (cuantitativa) teniendo como marco conceptual el Enfoque Onto-Semiótico. También realizamos entrevistas con estudiantes seleccionados de acuerdo a los resultados de los test para investigar las posibles causas a nivel individual que expliquen la relación.

Comenzamos por hacer un análisis epistémico (institucional) de un ítem representativo de los test de aritmética y un ejercicio de rotación; buscamos con esto evidenciar los procesos y objetos matemáticos que, desde un punto de vista institucional, deben ser puestos en juego por los estudiantes para resolver las situaciones propuestas. Esta referencia institucional nos sirve de guía para indagar a nivel individual, a través de entrevistas, los procesos cognitivos utilizados por los estudiantes.

Las entrevistas nos permiten partir de los procesos de comunicación de los estudiantes cuando están inmersos en situaciones-problema específicas e identificar prácticas matemáticas operativas (de lectura e interpretación) y discursivas (de reflexión sobre las prácticas operativas) tendientes a la solución de la situación-problema propuesta. Con base en la información así obtenida, podemos analizar los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos usados por los estudiantes que sean relevantes para determinar los mecanismos que subyacen a la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético.

Analizaremos en las dos siguientes secciones tareas visuales y de cálculo aritmético relacionadas con habilidades espaciales y aritméticas. Nos apoyamos en los conceptos de 'sistemas de prácticas' y 'configuraciones de objetos y procesos' ligados a cada tarea, dos ideas claves (Godino, 2012, p. 52) para abordar análisis epistémicos y cognitivos que permitan encontrar similitudes en el desarrollo de los dos tipos de tareas (ver en la Sesión 3.2 la definición de estos conceptos). El objetivo es comprender por qué ciertas habilidades espaciales podrían estar asociadas con habilidades aritméticas.

4.5.1 Configuración onto-semiótica de una tarea de rotación mental

En esta sección presentamos los resultados de un análisis de los objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución de una tarea[6] visual por niños de segundo grado de primaria (7-8 años de edad). Consideraremos prácticas que se prevén por parte de los estudiantes (análisis epistémico) y pondremos especial atención a los procesos y objetos no ostensivos implicados, los cuales nos permitirán reconocer elementos comunes con prácticas aritméticas. Con este método de análisis se trata de identificar de manera sistemática los procesos de interpretación (significación) que se ponen en juego en cada una de las prácticas por un sujeto epistémico (o ideal) para responder a la tarea. Un análisis similar se puede hacer con las respuestas efectivas dadas por los estudiantes, las cuales se pueden comparar con el análisis *a priori* realizado.

El enunciado de la tarea es: "Miren las 2 figuras en la parte inferior de la hoja (Figura 6). Si se unen, crearán una nueva figura. Escojan entre las cuatro figuras superiores la forma que se generará."

Una posible secuencia de prácticas discursivas y operativas (previstas) realizadas por un niño de segundo grado de primaria sería la siguiente:

1. Observo que las figuras superiores están de pie (son más altas que anchas), con un pico (ángulo interno menor a 180 grados) hacia arriba.

[6] Usamos en este capítulo el término 'tarea' como sinónimo de 'ejercicio'. 'Tarea' es un término adecuado para hacer referencia a una situación-problema en el Enfoque Onto-Semiótico. 'Ejercicio' es un término usual para hacer referencia a un ítem de un test. Dado que los objetos estudiados se consideran desde esta doble perspectiva, optamos por usar los términos 'tareas' o 'ejercicios' para referirnos a ellos de acuerdo con el contexto específico en que se mencionen.

2. Observo las figuras de abajo y las uno por los lados mayores para obtener una figura de pie, con el pico hacia arriba.
3. Observo que abajo (en la base de la figura formada) hay dos esquinas (ángulos rectos) y que arriba (parte superior de la figura formada) hay un pico.
4. La figura que se crea es igual (congruente) a la figura completa de abajo a la derecha, porque su parte de abajo tiene dos esquinas (ángulos rectos) y tiene un pico hacia arriba (ángulo interno menor a 180 grados), igual que la figura generada. Ninguna de las otras figuras es así.

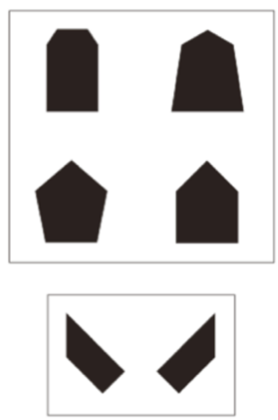


Figura 6. Ejercicio de rotación mental. Las dos figuras inferiores generarán -al unirse- una de las cuatro figuras superiores

Las prácticas operativas y discursivas puestas en acción, así como los objetos no ostensivos involucrados en dichas prácticas se muestran en la Tabla 2. La columna 'uso e intencionalidad de las prácticas' reporta tanto el papel que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo como su intencionalidad.

Tabla 2

Configuración de objetos matemáticos y significados de una tarea visual

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)	Uso e intencionalidad de las prácticas
Enunciado		
Miren las 2 figuras en la parte inferior de la hoja. Si se unen, crearán una nueva figura.	*Conceptos*: Figura; partes de una unidad; composición de una unidad.	Descripción de la tarea a realizar.
Escojan entre las cuatro figuras superiores la figura que se generará	*Conceptos:* Selección y descarte de opciones; razonamiento visual.	Cuestión problemática de la tarea.
Resolución		
1) Observo que las figuras superiores están de pie (son más altas que anchas), con un pico (ángulo interno menor a 180 grados) hacia arriba.	*Conceptos:* Orientación espacial (estar de pie); magnitud longitud; ángulo (pico); magnitud amplitud angular. *Procedimientos:* Descripción de las características de figuras; comparación de longitudes.	Observación de las posibles respuestas para determinar las características de la solución.
2) Observo las figuras de abajo y las uno por los lados mayores para obtener una figura de pie, con el pico hacia arriba.	*Conceptos:* composición de figuras; relación de orden (de las longitudes de los lados); *Procedimiento:* unir (como trasladar y rotar las figuras)	Unión de las figuras de acuerdo a las posibles soluciones
3) Observo que abajo (base de la figura formada) hay dos esquinas (ángulos rectos) y que arriba (parte superior de la figura formada) hay un pico.	*Conceptos:* Ángulos rectos (esquinas); magnitud de un ángulo (pico); base de una figura (como lado en el que se apoya).	Descripción de la figura generada

4. La figura que se crea es igual (congruente) a la figura completa de abajo a la derecha, porque su parte de abajo tiene dos esquinas (ángulos rectos) y tiene un pico hacia arriba (ángulo interno menor a 180 grados), igual que la figura generada. Ninguna de las otras figuras es así.	*Concepto:* congruencia de figuras. *Proposición:* la figura que se crea es igual a… *Argumento:* porque su parte de abajo tiene… *Procedimiento:* comparación de figuras, selección de la respuesta correcta por identificación y descarte de las otras opciones.	Comparación con las figuras-solución y selección de la respuesta correcta.

4.5.2 Configuración onto-semiótica de una tarea aritmética

Procederemos en esta sección a hacer un análisis detallado de los objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución de una tarea aritmética por niños de tercer grado de primaria; consideraremos prácticas que se prevén por parte de los estudiantes (análisis epistémico). Pondremos especial atención a los procesos y objetos no ostensivos implicados, lo cual nos permitirá -en la siguiente sección- hacer un proceso comparativo de las prácticas puestas en acción tanto en las tareas aritméticas como en las tareas visuales.

El enunciado de la tarea es: "*Resuelve la siguiente suma*"

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\;\;6 \\ \hline \end{array}$$

Figura 7. Tarea de suma

Una posible secuencia de prácticas discursivas y operativas (previstas) realizadas por un niño de segundo grado de primaria sería la siguiente:

1. Observo la tarea. Debo sumar (signo '+') usando el procedimiento de suma en columnas.
2. Sumo los dos dígitos de la columna de la derecha (9+6).
3. Escribo el último dígito (5) del resultado de la suma debajo de la línea de respuesta.
4. Como la suma fue superior a nueve (9), pongo un uno (1) encima de la siguiente columna a la izquierda.
5. Sumo los números de la siguiente columna, incluyendo el uno (1) que puse, y obtengo cinco (5).
6. Como no hay más columnas para sumar, terminé la suma y el resultado es cincuenta y cinco (55).

Las prácticas operativas y discursivas puestas en acción, así como los objetos no ostensivos involucrados en dichas prácticas se muestran en la Tabla 3. La columna 'uso e intencionalidad de las prácticas' reporta tanto el papel que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo como su intencionalidad. Se consideran varias estrategias posibles de los estudiantes en el momento de sumar dos dígitos. Otras estrategias alternativas en los algoritmos de resolución podrían surgir y analizarse como resultado de una investigación guiada por las herramientas ontosemióticas propuestas en este documento.

Tabla 3

Configuración de objetos matemáticos y significados de una tarea aritmética

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)	Uso e intencionalidad de las prácticas
Enunciado		
Resuelve la siguiente suma $\begin{array}{r} 49 \\ +\ \ 6 \\ \hline \end{array}$	*Conceptos*: Números naturales; suma de números naturales;	Descripción de la tarea a realizar.
Resolución		
1) Observo la tarea. Debo sumar (signo '+') usando el procedimiento de suma en columnas.	*Conceptos:* Operación de suma; Suma en columnas (interpretación del diagrama suma en columnas). *Proposiciones:* Debo sumar… *Argumentos:* Símbolo de suma; distribución espacial de los operandos. *Procedimiento:* selección de un algoritmo (suma en columnas).	Planeación de la tarea a realizar.
2) Sumo los dos dígitos de la columna de la derecha (9+6).	*Concepto:* suma de números naturales. *Procedimiento alternativo 1:* Conteo verbal o material; etiquetación y partición (contado/no-contado) de números (Gelman y Gallistel, 1986, p. 77). *Concepto:* Parte/todo; secuencia estable de números. *Procedimiento alternativo 2:* uso de hechos aritméticos (tabla de adición).	Proceso aditivo central al algoritmo de suma en columna.

	Procedimiento alternativo 3: uso de reglas aritméticas (p.ej., descomposición y asociación de números: 9+6=9+(5+1)= (9+1)+5=10+5=15).	
3) Escribo el último dígito (5) del resultado de la suma debajo de la línea de respuesta.	*Concepto:* notación posicional (unidades y decenas) *Procedimiento:* escritura alineada parcial de la respuesta	Respuesta parcial de la suma
4) Como la suma fue superior a nueve (9), pongo un uno (1) encima de la siguiente columna a la izquierda.	*Conceptos:* Valor posicional; notación posicional. *Procedimiento:* escribir acarreo. *Argumento:* porque la primera suma parcial es mayor que 9 …	Acarreo como indicación de una suma cuyo resultado excede nueve (9).
5) Sumo los números de la siguiente columna, incluyendo el uno (1) que puse, y obtengo cinco (5).	*Concepto:* suma de números naturales. *Procedimientos:* similares a los de los puntos 2) y 3).	Paso siguiente en el proceso iterativo del algoritmo.
6) Como no hay más columnas para sumar, terminé la suma y el resultado es cincuenta y cinco (55).	*Conceptos:* iteración; condición final de un proceso iterativo. *Proposición:* La suma es 55. *Argumento:* Como no hay más columnas…	Fin del proceso iterativo y respuesta.

4.5.3 Identificación de concordancias y conexiones

Analizaremos las posibles conexiones entre los dos tipos de tareas presentados en los apartados anteriores, centrados en los conceptos de representación y función semiótica. Una representación es una correspondencia abstracta (relación) que establece un sujeto entre dos entidades (expresión y contenido). La noción de función semiótica en el EOS hace referencia a una representación cuyas entidades pueden ser cualquier tipo de objeto matemático (símbolos, problemas, conceptos, definiciones, etc.) y cuya relación puede ser "de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos)" (Font et al., 2007, p. 6).

En un contexto institucional de enseñanza de las matemáticas, el sujeto-estudiante aprehende los significados de las representaciones institucionales de forma gradual. Por ejemplo, cuando debe establecerse una función semiótica entre un problema de enunciado verbal y la operación matemática que permite solucionarlo, el sujeto debe aprender a reconocer el 'núcleo semántico' del problema y abstraer el contexto en el cual es presentado. Muchos estudiantes en los primeros años escolares confunden el núcleo del problema con su contexto y establecen una función semiótica diferente de la pretendida institucionalmente. Para ejemplificar este error, nos referimos a Baruk (1985), quien reporta haber planteado a niños de primero y segundo grado de primaria el siguiente problema: "En un barco hay 26 ovejas y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?". De 97 estudiantes interrogados, 76 respondieron combinando los números dados en el enunciado.

Haciendo referencia a este tipo de errores y a la noción de contrato didáctico (Brousseau, 1986), Godino (2010) comenta: "[…] muchos estudiantes responden a una cuestión, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas" (p. 37).

En el caso de la tarea aritmética ejemplificada, existen convenciones didácticas implícitas en cada institución educativa que pueden generar errores por parte de los estudiantes. Por ejemplo, considerar el mismo número de dígitos en los sumandos presentados en sumas verticales o proponer siempre una sola operación (suma o resta) en tareas que incluyen más de 2 sumandos. Cuando a los estudiantes se les presentan tareas de cálculo aritmético que no siguen esas convenciones implícitas, es posible que cometan errores al no prestar suficiente atención a los símbolos presentes en la expresión visual, dando por el contrario más atención a las convenciones implícitas asociadas a dichas expresiones en su proceso de aprendizaje.

Planteamos la hipótesis, apoyados en nuestra experiencia investigativa previa, de que una vez que los estudiantes realizan tareas de rotación espacial como la ya ejemplificada, su percepción visual se hace más aguda y pueden llegar a 'leer' e interpretar correctamente los símbolos presentes en ciertas tareas aritméticas, a pesar de las convenciones implícitas potencialmente conflictivas asociadas a ellas.

Más específicamente, el análisis de la configuración de objetos y significados presentes en las dos tareas permite identificar semejanzas teóricas entre las prácticas operativas y discursivas que se prevé que los estudiantes realicen para dar respuesta a las tareas. Para la tarea visual los estudiantes unen, descomponen y crean una figura; identifican posiciones-arriba y abajo- y obtienen configuraciones con ciertas características que son determinantes en la solución de la tarea; deben encontrar elementos figurales y relaciones entre ellos. Estas acciones centran la atención del estudiante en aspectos visuales de las figuras geométricas, pues de su identificación y de las acciones sobre ellas depende el resultado. Estas acciones, realizadas sobre otro tipo de configuraciones -números y operaciones-, podrían favorecer la identificación de elementos visuales (símbolos) y facilitar su interpretación semiótica pretendida.

Por otro lado, podría darse una generalización de las funciones semióticas implicadas en las acciones de carácter geométrico que se ponga en juego en las acciones de carácter numérico. En especial, los procesos de descomposición y recomposición de figuras pueden estar relacionadas conceptualmente con las operaciones de descomposición y asociación que utilizan algunos estudiantes al sumar (p.ej., $9+6 = 9+(5+1) = (9+1)+5 = 10+5 = 15$). Esta relación podría dar cuenta del mejor desempeño aritmético de algunos estudiantes después de que trabajan en tareas de rotación espacial.

4.6 Interpretación de resultados

Los resultados cuantitativos serán interpretados de acuerdo con los análisis estadísticos realizados y al análisis epistémico elaborado. En el próximo capítulo se evaluarán tanto los resultados cuantitativos como los cualitativos y se valorará su grado de concordancia mutua, así como su grado de concordancia con otras investigaciones y con las reflexiones teóricas presentadas a lo largo del trabajo de investigación.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

5.1 Introducción

Los datos de la etapa cuantitativa se analizaron teniendo en cuenta tanto los resultados globales de los test, como los tipos de problema aritmético planteados. Se buscó con ello no solo considerar el cálculo aritmético de los estudiantes como un proceso único, sino identificar la diversidad de habilidades que implica cada una de las operaciones aritméticas planteadas en virtud de su complejidad y de su formato. Se consideraron varias clasificaciones de las operaciones aritméticas de acuerdo con reportes de investigaciones precedentes y de acuerdo con las elaboraciones teóricas de los capítulos precedentes.

Las conclusiones que se obtuvieron de los datos cuantitativos se contrastaron con los datos obtenidos en la etapa cualitativa. Los datos cualitativos están conformados por un análisis del texto guía de matemáticas, por el Proyecto Educativo Institucional (PEI) del colegio, por un cuaderno de campo que recoge observaciones de las clases de matemáticas de los estudiantes durante el mes previo al desarrollo de los test y por cinco entrevistas a estudiantes seleccionados después de recolectada y analizada la información cuantitativa.

5.2 Estadísticas globales

Los resultados del pre-test y el post-test para los estudiantes de segundo grado (investigación principal) y tercer grado (investigación suplementaria) se presentan en la Tabla 4 (ver la sesión 4.3 para más información acerca de los sujetos involucrados en el estudio).

Tabla 4

Medias y desviaciones estándar (DS) de los test de aritmética

	Grupo Experimental		Diferencia	**Grupo de control**		Diferencia
Grado	Pre-test (DS)	Post-test (DS)	Post-pre	Pre-test (DS)	Post-test (DS)	Post-pre
Segundo (7 años)	12,80 (4,51)	14,2 (5,86)	1,40	13,75 (4,25)	15,87 (7,20)	2,12
Tercero (8 años)	15,86 (3,68)	18,60 (4,42)	2,74	17,00 (2,87)	19,50 (2,56)	2,50

Cada test contiene 27 preguntas cuya puntuación es 0 ó 1 (incorrecto o correcto). La suma de las puntuaciones de cada ítem representa la puntuación total del test. Se presentan las medias y las desviaciones estándar en cada caso

Para los estudiantes de segundo grado (investigación principal), hubo una diferencia de 0,72 puntos a favor del grupo de control, lo que representa un mayor incremento entre el pre-test y el post-test para dicho grupo. La diferencia es, a nuestro juicio, pequeña; porcentualmente representa un 2,6% del puntaje total del test. Este hecho nos permite concluir que, en el caso de los estudiantes de segundo, la intervención no reportó ningún cambio importante en la capacidad de cálculo aritmético *en su conjunto*. Es decir, la influencia de ejercicios de rotación espacial sobre habilidades *generales* de cálculo aritmético no es apreciable en este caso y con este instrumento.

Para los estudiantes de tercer grado (investigación suplementaria), la diferencia entre los grupos experimental y de control es todavía menor. El grupo experimental aventaja al grupo de control en menos del 1% del puntaje total del test. En este caso, concluimos también que la influencia de ejercicios de rotación espacial sobre habilidades *generales* de cálculo aritmético no es significativa.

Cheng y Mix (2014) usaron un instrumento de medida similar y encontraron una diferencia significativa a favor del grupo experimental en niños de 7 años. Concluyeron que la preparación en habilidades de rotación mental tiene un efecto positivo sobre habilidades de cálculo aritmético. Consideramos que ese estudio representa una investigación particular en un contexto específico y que nuestros resultados no lo contradicen; por el contrario, lo complementan en el sentido en que sugieren considerar otras variables contextuales que permitan explicar la diferencia en los resultados. En términos del Enfoque Onto-Semiótico, la faceta cognitiva (personal) debe ser analizada junto a la faceta epistémica (institucional), ya que representan una dualidad y por lo tanto coexisten en cada caso bajo análisis.

Hawes, Moss, Caswell y Poliszczuk (2015) reportaron que, tras una preparación en habilidades de rotación mental durante seis semanas con niños de 7 años, no observaron efectos significativos en sus habilidades de cálculo aritmético. Hasta donde tenemos conocimiento, no ha sido aún investigado si un periodo de entrenamiento más prolongado puede arrojar resultados diferentes.

Los resultados que presentamos complementan las conclusiones de la Ciencia Cognitiva según las cuales existe una relación entre habilidades espaciales y aritméticas. Presentamos un caso en el cual el entrenamiento en habilidades espaciales no reporta un efecto positivo global sobre habilidades aritméticas a corto plazo; esto a pesar de existir evidencia de que habilidades de rotación mental permiten predecir habilidades de cálculo aritmético a largo plazo (Farmer, Verdine, Lucca, Davies y Dempsey, 2013; Young, Levine y Mix, 2014).

5.3 Memoria de trabajo

Caviola, Mammarella y Cornoldi (2012) informan que la Memoria de Trabajo juega un papel importante en los cálculos aritméticos mentales que involucran acarreo en niños de tercer y cuarto grados de primaria. Esta conclusión es coherente con la afirmación de que tanto la Memoria de Trabajo como los cálculos aritméticos implican el uso y orquestación de varios conceptos, procedimientos y mecanismos de almacenamiento temporal y procesamiento de información. Esto es particularmente cierto para los cálculos aritméticos con acarreo, los cuales representan los ejercicios más complejos de los test realizados desde un punto de vista tanto procedimental como conceptual.

Un análisis de los resultados en problemas de acarreo (ítems 12, 14, 21 y 23, Anexo 7.1), tanto en el pre-test como en el post-test, puede darnos indicios de la influencia de los ejercicios de rotación mental sobre las habilidades de cálculo aritmético a través de la Memoria de Trabajo.

En la Tabla 5 se consignan las sumas de las puntuaciones de los cuatro ejercicios del test que requieren el uso del acarreo.

Tabla 5
Puntuaciones en ejercicios de acarreo

	Grupo Experimental		**Diferencia**	**Grupo de control**		**Diferencia**
Grado	Pre-test	Post-test	Post-pre	Pre-test	Post-test	Post-pre
Segundo (7 años)	49	61	12	58	62	4
Tercero (8 años)	80	89	9	85	83	-2

Los resultados, para los niños de segundo de primaria, pueden ser interpretados de la siguiente manera: uno de cada tres niños del grupo experimental respondió correctamente un ejercicio más de acarreo en el post-test respecto al pre-test. En el caso del grupo de control, la proporción fue de uno de cada ocho niños. Este hecho muestra una mejora notoria de los niños del grupo experimental respecto a los niños del grupo de control en ejercicios de acarreo. Dicho resultado apoya la suposición de la influencia de habilidades de rotación mental sobre habilidades de cálculo aritmético a través de la Memoria de Trabajo.

Para los niños de tercero, uno de cada tres niños del grupo experimental respondió correctamente un ejercicio más de acarreo en el post-test respecto al pre-test, mientras que para los niños del grupo de control no hubo diferencia entre el pre-test y el post-test en ese tipo de ejercicios. Nuevamente, el resultado con los niños de tercero apoya la suposición de la Memoria de Trabajo como un mecanismo explicativo de la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético (Para una explicación teórica de esta relación, ver Sección 2.5.1.)

Dado que la Memoria de Trabajo es un concepto de la Ciencia Cognitiva y nuestro objetivo de investigación está relacionado con conceptos de Educación Matemática, nos limitamos a afirmar que los resultados mencionados en los párrafos anteriores apoyan las conclusiones de Caviola, Mammarella y Cornoldi (2012). No profundizamos en la etapa cualitativa en estos resultados ya que requeriríamos de instrumentos de medida propios de la Ciencia Cognitiva, lo cual está fuera del alcance de nuestra investigación.

5.4 Razonamiento diagramático

Como ya hemos mencionado anteriormente, algunas investigaciones apoyan la relación entre habilidades de rotación mental (Cheng y Mix, 2014) y visuales (Jiang et al., 2014) por un lado, y habilidades de cálculo aritmético por el otro. Dicha relación está soportada en habilidades de razonamiento diagramático y en habilidades de lectura de expresiones matemáticas, respectivamente.

Para evaluar esta hipótesis, planteamos el análisis de resultados de algunos ítems de los test de aritmética que involucran expresiones 'no canónicas'. Se trata de ejercicios cuyo formato de presentación no es familiar para los estudiantes y puede por lo tanto inducirlos a errores.

5.4.1 Transformación de expresiones aritméticas

Cheng y Mix (2014) informaron que el entrenamiento en habilidades de rotación mental conlleva una mejora considerable en la solución de ejercicios de término ausente (por ejemplo, 5 + __ = 11) en niños de 7 años. Las investigadores plantearon la hipótesis de que esto se debe posiblemente a que los estudiantes aprendieron a 'rotar' la expresión matemática y transformarla a un formato más familiar (__ = 11-5). En nuestros test contamos con 10 ejercicios de ese tipo (ítems 5-10, 24-27, Anexo 7.1). En la Tabla 6 se consignan las sumas de las puntuaciones de los 10 ejercicios.

Tabla 6
Puntuaciones en ejercicios de término ausente

	Grupo Experimental		**Diferencia**	**Grupo de control**		**Diferencia**
Grado	Pre-test	Post-test	Post-pre	Pre-test	Post-test	Post-pre
Segundo (7 años)	194	196	2	184	203	19
Tercero (8 años)	276	273	-3	291	283	-8

Observamos que las diferencias en las puntuaciones para el grupo experimental son mínimas, lo que nos permite concluir que la preparación en habilidades de rotación mental no tuvo incidencia sobre los ejercicios de término ausente.

Consideramos que para realizar un procedimiento de 'rotación de una expresión', no solo es necesaria cierta destreza procedimental, sino también la certeza de la equivalencia de la expresión original y la resultante. En el caso de los niños de segundo de primaria, ni su texto guía (Calderón y Jerez, 2012) contiene este tipo de manipulación de expresiones, ni observamos que sus maestras realizaran procedimientos similares durante las clases de aritmética previas a la realización de los test. Era por tanto de esperarse que los estudiantes desconocieran el procedimiento de 'rotación de una expresión' y, por lo tanto, no lo aplicaran. Aquí nuevamente, las facetas personal e institucional deben ser ambas tenidas en cuenta al analizar la situación bajo estudio.

5.4.2 Lectura de expresiones no canónicas

De acuerdo con McNeil y Alibali (2004), los estudiantes tienden a re-ordenar expresiones matemáticas que se presentan en una forma no canónica y re-interpretarlas en un formato familiar para ellos. Por ejemplo, la expresión $3 + 5 = 6 + \_\_$ es transformada en $3 + 5 + 6 = \_\_$. Este fenómeno se puede interpretar a la luz del concepto de optimización cognitiva:

los estudiantes han relacionado el concepto de suma (información esencial) con un formato específico (información no esencial) y su interpretación –y solución- de expresiones de adición incluye factores no relevantes que los llevan a cometer errores.

Planteamos la hipótesis de que el entrenamiento en habilidades de rotación mental puede ayudar a evitar errores de optimización cognitiva a través de una mejor lectura –e interpretación- de los signos en expresiones aritméticas. Para validar esta hipótesis, analizamos la incidencia de los ejercicios de rotación mental en errores debidos a interpretaciones incorrectas de expresiones aritméticas.

La Tabla 7 muestra el número de errores cometidos por los estudiantes en la interpretación de tres tipos de expresiones que no les eran suficientemente familiares: expresiones con término ausente (ítems 2, 7, 9, 24, 25, Anexo 7.1), expresiones de sustracción donde se hace una lectura incorrecta del signo menos (ítems 1, 4, 14, 17, 23, Anexo 7.1) y expresiones con operaciones combinadas (ítems 18, 19, Anexo 7.1). En total, se analizaron 12 ejercicios relacionados con este tipo de errores.

Se consideraron solamente errores debidos a re-interpretación incorrecta de las expresiones presentadas; por ejemplo, *14 - 2 – 6 =* ***22***. Es claro que en esta expresión se interpretó el signo de sustracción como uno de adición. Este error tiene sentido en el contexto bajo estudio, ya que con los estudiantes nunca se trabajaron ejercicios de sustracción con más de dos operandos, lo que sí sucedió con ejercicios de adición.

No se nota una diferencia apreciable entre los grupos experimental y de control respecto a la corrección de errores en expresiones de término ausente, lo que refuerza la conclusión de que la ejercitación en rotación mental no muestra incidencia sobre este tipo de expresiones en el contexto escolar bajo análisis.

Tabla 7
Errores en la interpretación de expresiones aritméticas

	Grupo Experimental		Diferencia	Grupo de control		Diferencia
Tipo de ejercicio y error	Pre-test	Post-test	Post-pre	Pre-test	Post-test	Post-pre
Término ausente (interpretación de la operación) ej. 4 + **10** = 6	22	6	16	22	8	14
Sustracción (interpretación de signos) ej. 9 – 3 = **12**	34	19	15	34	26	8
Operaciones combinadas (interpretación de signos) Ej. 18 + 2 – 8 = **28**	10	4	6	15	11	4

Por el contrario, los errores por interpretación de signos (filas 4 y 5) sí mostraron un cambio favorable al grupo experimental. Porcentualmente, la incidencia de este tipo de errores se redujo un 52% en el grupo experimental, contra un 24% en el grupo de control.

En el caso de operaciones combinadas, la reducción de errores en el grupo experimental fue de 60%, mientras en el grupo de control fue de 26%. Este tipo de ejercicios representa un caso típico de errores por optimización cognitiva (véase la sección 2.6) en el contexto estudiado. Ni el texto guía (Calderón y Jerez, 2012) contenía, ni las maestras trabajaron, operaciones de suma y resta combinadas durante el proceso de enseñanza aritmética previo a la realización de los test. Si bien los ejercicios de operaciones combinadas fueron comprensibles para los estudiantes, como lo demuestra el gran número de respuestas acertadas, también es cierto que el formato de estas expresiones matemáticas no era típico para ellos.

En conclusión, hubo una influencia importante de la ejercitación en habilidades de rotación mental sobre errores debidos a la lectura incorrecta de expresiones aritméticas no canónicas. Específicamente, los errores se dieron con relación a la interpretación de la operación matemática a realizar. Dado que los ejercicios de rotación mental realizados con el grupo experimental exigen gran agudeza visual y cuidado en detalles visuales, consideramos que estos dos factores explican la mejora en la lectura e interpretación de símbolos aritméticos mostradas por el grupo experimental. En este caso, lo ostensivo (expresión matemática escrita) y lo no ostensivo (operación matemática implicada) fueron una fuente de errores debido a la incorrecta asociación entre símbolos y significados.

5.5 Vínculos entre ejercicios de rotación mental y ejercicios de cálculo aritmético

El análisis de tareas aritméticas y espaciales realizado en el capítulo de metodología sugiere algunas relaciones conceptuales y procedimentales entre la resolución de ejercicios de rotación espacial y la resolución de ejercicios de cálculo aritmético. El proceso de entrevistas se centró en determinar tanto la existencia de dichos vínculos como el grado de comprensión de estas u otras relaciones por parte de los estudiantes. Las preguntas de las entrevistas son guiadas por los procedimientos, proposiciones, argumentos y conceptos que, desde un punto de vista institucional, deberían utilizar los estudiantes para resolver los problemas propuestos (ver Tabla 2, p.68 y Tabla 3, p.71)

Interrogados por el procedimiento seguido para la resolución de los ejercicios de rotación, se hizo notorio el hecho de que es un proceso de difícil verbalización por parte de los estudiantes. A continuación presentamos algunos extractos de entrevistas donde se hace clara la falta de expresividad y fluidez para explicar el procedimiento realizado, a pesar de que, en general, el resultado del proceso es satisfactorio. La Figura 8 presenta un ejercicio de rotación espacial correspondiente a los diálogos presentados en la Tabla 8.

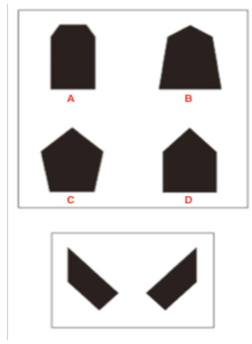


Figura 8. Ejercicio de rotación mental. Las dos figuras inferiores generarán -al unirse- una de las cuatro figuras superiores

Tabla 8

Diálogos durante la discusión sobre un ejercicio de rotación espacial

Investigador: ¿Me puedes explicar cómo se hace este ejercicio?
Estudiante 1: [Silencio y pausa]. No me acuerdo.
Investigador: Sí, tú puedes recordarlo.
Estudiante 1: [Pausa]. ¡Este! [señalando la figura C]
Investigador: ¿No te parece mejor esta opción? [señalando la figura D]
Estudiante 1; ¡ah! Sí.
Investigador: Y ¿porqué te parece mejor?
Estudiante 1: porque tiene las dos punticas [refiriéndose a la parte superior de la figura D]
Investigador: Este también tiene las dos punticas [señalando la figura C].
Estudiante 1: [Pausa larga]. ¡Ah! ¡Ya sé! Porque no tiene esto grande [señalando el ancho de la Figura D en la parte media]
Investigador: Entonces, ¿cuál es la solución?
Estudiante 1: ¡Esta! [señalando la figura C]
Investigador: ¿Recuerdas cómo se hacía este ejercicio y cuál era el resultado?
Estudiante 2: Me daría de resultado este [señalando la figura A]
Investigador: ¿Por qué?
Estudiante 2: ¡ah!, no. Ese no es, ¡es este! [señalando la figura D]
Investigador: ¿Por qué?

Estudiante 2: Porque no tiene las cositas [refiriéndose a la parte superior de la figura A].
Investigador: Pero este otro [señalando la solución C] tiene punticas. ¿Por qué no es este?
Estudiante 2: Porque no es igual a este [señalando la figura D]
Investigador: ¿En qué sentido no es igual?
Estudiante 2: [Pausa larga]
Investigador: Tú tienes razón, es ese. Pero, ¿por qué no sería este? [señalando la figura C]
Estudiante 2: [Pausa larga] Porque no son iguales.

Nota: El investigador había interactuado previamente con el estudiante 1 y sabía que tenía un carácter tímido y reservado, por lo cual lo impulsó, de forma cordial, a expresarse.

Los objetos matemáticos que identificamos en los diálogos presentados se consignan en la Tabla 9.

Tabla 9

Identificación de objetos matemáticos emergentes de un ejercicio de rotación espacial

Lenguaje
Estudiante 1: [verbal] punticas (vértice), grande (ancho); [gestual] señalamiento de opciones de respuesta, descripción gestual de propiedades de las figuras, pausas al hablar.
Estudiante 2: [verbal] resultado, cositas (vértice), igual. [gestual] señalamiento de opciones de respuesta, descripción gestual de propiedades de las figuras, pausas al hablar.
Conceptos
Estudiante 1: amplitud (ancho).
Estudiantes 1 y 2: figura, partes de una unidad, composición de una unidad, congruencia de figuras, selección y descarte de opciones, razonamiento visual, ángulo, vértice (punticas, cositas).
Proposiciones
Estudiantes 1 y 2: Señalamiento de la solución propuesta.
Procedimientos
Estudiante 1: descripción de características de figuras, comparación de longitudes, comparación de figuras.
Estudiante 2: descripción de características de figuras, conteo de vértices, comparación de figuras.
Argumentos
Estudiante 1: porque tiene las dos punticas [refiriéndose al vértice superior de la figura], Porque no tiene esto grande [señalando el ancho de la figura]
Estudiante 2: Porque no tiene las cositas [refiriéndose a la ausencia de un vértice superior en la figura, porque no son iguales [comparando la solución con la figura mentalmente ensamblada].

Dos hechos importantes se pueden deducir de los diálogos presentados y los objetos matemáticos de ellos deducidos. Primero, el proceso de verbalización y conceptualización de procedimientos de rotación mental y comparación de figuras es complejo para los estudiantes, como se puede observar por las pausas por ellos realizadas y por la intervención constante del investigador en busca de explicaciones. Segundo, gran parte de los ejercicios involucran comparación de características de las figuras (número de vértices, magnitudes de ángulos, ancho), proceso que conlleva observación de detalles figurales.

La dificultad en la verbalización y conceptualización de la solución de ejercicios de rotación mental hace que este tipo de conocimiento de los estudiantes se pueda clasificar como conocimiento implícito. El concepto de conocimiento implícito revela la existencia de estructuras cognitivas que no son fácilmente verbalizables por los sujetos que las poseen (Frensch y Rünger, 2012). Seger (1994) define el conocimiento implícito como conocimiento no episódico de información compleja adquirido de forma incidental y sin conciencia de haber aprendido. Pensamos que un análisis basado en la comunicación verbal, como el realizado en esta investigación, puede y debe ser complementado en futuras investigaciones con otras herramientas de análisis que permitan estudiar más a fondo la forma en que este conocimiento es adquirido y su relación con el conocimiento consciente y verbalizable del estudiante.

Continuando con nuestro análisis, los diálogos presentados muestran que la resolución de ejercicios de rotación mental por parte de los estudiantes implica procesos de comparación de figuras y suponen procedimientos de discernimiento de detalles visuales. Este hecho puede estar implicado en el descenso del número de errores debidos a lectura incorrecta de expresiones aritméticas por parte de los estudiantes del grupo experimental. Por un lado, el formato de las expresiones aritméticas presentadas ‘induce’ un tipo de operación aritmética; por otro lado, la capacidad renovada de discernimiento de detalles visuales -debida a los ejercicios de rotación mental- permite ‘leer’ correctamente el símbolo de la operación y realizar el proceso aritmético indicado.

La Tabla 10 presenta dos diálogos, con estudiantes del grupo experimental, relativos a la resolución de ejercicios aritméticos donde se muestra que hubo (en el pre-test) una lectura incorrecta de las expresiones matemáticas, la cual fue corregida en los ejercicios aritméticos posteriores a la sesión de ejercicios de rotación mental (post-test).

Tabla 10
Diálogos durante la discusión sobre ejercicios aritméticos

Investigador: Repasemos un poco los ejercicios de sumas y restas. ¿Cómo hiciste este ejercicio? [4 + __ = 6]
Estudiante 3: Cuánto le falta a cuatro para llegar a seis.
Investigador: Correcto. ¿Cuánto le falta a cuatro para llegar a seis?
Estudiante 3: dos.
Investigador: Ok. Entonces miremos lo que hiciste: [hoja de respuestas: 4 + **10** = 6]. ¿Por qué pusiste diez?
Estudiante 3: [Pausa larga]
Investigador: ¿Cómo lo hiciste? ¿Por qué pusiste diez ahí?
Estudiante 3: [Pausa larga]
Investigador: ¿No será que sumaste cuatro más seis y te dio diez?
Estudiante 3: Sí.
Investigador: Ok. Miremos otro ejercicio. ¿Cómo se hace este? [7 + __ = 14]
Estudiante 3: Cuánto le falta a siete para llegar a catorce.
Investigador: Bien. ¿Cuánto le falta?
Estudiante 3: [Cuenta con los dedos]. ¡Siete!
Investigador: Ok. La respuesta es siete, pero pusiste veintiuno [7 + **21** = 14]. ¿Qué hiciste?
Estudiante 3: ¡Sumé!
Investigador: ¿Qué debías hacer en este ejercicio? [14 – 2 – 6 = __]
Estudiante 4: Tocaba quitarle dos y seis

Investigador: Bien. Y este, ¿cómo se hacía? [18 + 2 – 8 = __]

Estudiante 4: Tocaba sumarle dos y tocaba quitarle ocho.

Investigador: Eso era. Vamos a ver cómo hiciste este [14 – 2 – 6 = **22**]. Aquí hiciste catorce menos dos menos seis y te dio veintidós. ¡Los sumaste! Pero había que…

Estudiante 4: ¡Restar!

Investigador: Aquí [18 + 2 – 8 = **28**] hiciste dieciocho más dos, veinte; *más* 8, veintiocho. Sumaste, pero debías…

Estudiante 4: ¡Restar!

Los objetos matemáticos que identificamos en los diálogos presentados se consignan en la Tabla 11.

Tabla 11
Identificación de objetos matemáticos emergentes de ejercicios de cálculo aritmético

Lenguaje
Estudiante 3: faltar, llegar a, sumar. [Simbólico] 4, 6, 10, 7, 14, +, = . [Gestual] suma con ayuda de los dedos.
Estudiante 4: quitarle, sumarle, restar. [Simbólico] 2, 6, 8, 14, 22, 28, +, -, = .
Conceptos
Estudiantes 3 y 4: números naturales, suma de números naturales, resta de números naturales.
Proposiciones
Estudiante 3: Cuánto le falta a cuatro para llegar a seis (como interpretación de una expresión matemática)
Estudiante 4: Tocaba quitarle dos y seis, Tocaba sumarle dos y tocaba quitarle ocho (como interpretación de una expresión matemática)
Procedimientos
Estudiante 3: suma, interpretación de expresiones matemáticas.
Estudiante 4: suma, resta, interpretación de expresiones matemáticas.
Argumentos
Estudiante 3: ¡Sumé! (como explicación de un procedimiento).
Estudiante 4: [había que] restar (como explicación de un procedimiento).

Como se puede observar en el análisis de los ejercicios de cálculo aritmético, un factor importante en su solución es el de la correcta lectura de los símbolos matemáticos. Los errores a este respecto son comprensibles y previsibles en niños de 7 años. Esto debido a que trabajan en operaciones aritméticas por primera vez en forma sistemática y por lo tanto no están habituados a la simbología.

Pudimos observar también que su interpretación de las expresiones fue correcta y decidida en las entrevistas (después de la sesión de rotación mental), lo que no sucedió en el pre-test (antes de la sesión de rotación mental).

Pensamos que existe evidencia suficiente (cuantitativa y cualitativa) para afirmar que una parte importante de la influencia positiva de los ejercicios de rotación mental sobre las capacidades de cálculo aritmético se debe a un incremento en la capacidad de observación de detalles visuales y, consecuentemente, de lectura de símbolos matemáticos.

Los objetos matemáticos emergentes en los diálogos con los estudiantes nos permiten afirmar que poseen el conocimiento y la comprensión de conceptos necesaria para afrontar los ejercicios propuestos, ya que pueden establecer las funciones semióticas necesarias para la solución de las situaciones problema propuestas. Sin embargo, su habilidad de cálculo aritmético se ve afectada por el proceso de lectura de los símbolos matemáticos, aspecto que limita las prácticas que el sujeto es capaz de realizar adecuadamente (el lector puede remitirse a las definiciones de conocimiento y habilidad dadas en la Sesión 2.4).

Respecto a la hipótesis planteada en el Capítulo 16 de que la composición y la descomposición de figuras en los ejercicios de rotación mental pondrían en juego conceptos aritméticos correspondientes que son útiles en el proceso de adición por distribución y asociación de números (por ejemplo, $9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15$), no hallamos evidencia de dicha relación. Tanto en las entrevistas como durante el desarrollo de los test, observamos que la mayor parte de los estudiantes realizan procesos de conteo con los dedos y no parecen recurrir a procesos de descomposición de cantidades.

5.6 Apreciaciones finales

Hemos analizado a la luz de los resultados las tres hipótesis propuestas en el capítulo 16 acerca de posibles mecanismos que puedan explicar relaciones entre habilidades de rotación mental y habilidades de cálculo aritmético.

El análisis cuantitativo refuerza las investigaciones precedentes respecto a la relación entre habilidades de rotación mental y cálculo aritmético a través de la Memoria de trabajo. Los ejercicios aritméticos con mayor complejidad procedimental y conceptual se ven positivamente influenciados en el grupo experimental. La Memoria de trabajo, al implicar procesos de almacenamiento y procesamiento de información, tendría una relación directa con los aspectos procedimentales de las dos habilidades estudiadas, permitiendo una transferencia de habilidades entre la una y la otra.

Tanto el análisis cualitativo como el cuantitativo tienden a confirmar nuestra hipótesis de que las habilidades visuales involucradas en los ejercicios de rotación mental tienen una influencia positiva sobre las habilidades de cálculo aritmético. El mecanismo que subyace a esta relación sería el aumento en la agudeza para los detalles visuales que implican los ejercicios de rotación mental; dicha agudeza permite, en el momento de leer expresiones aritméticas, evitar una lectura incorrecta debida al formato general de la expresión y centrarse en la información a nivel de símbolos individuales.

Ni el análisis cualitativo ni el cuantitativo nos permitieron extraer conclusiones acerca de la posible relación entre habilidades de rotación mental y de cálculo aritmético a través del mecanismo conceptual compartido de composición y descomposición tanto de figuras como de números. Creemos que en el caso particular bajo estudio es poco probable que este mecanismo tenga una influencia notoria, ya que la mayor parte de los estudiantes utilizan los dedos para contar y no parecen aplicar estrategias de distribución y asociación de números en el proceso.

6. CONCLUSIONES

En la presente investigación hemos buscado combinar resultados de dos campos de investigación diferentes: la Ciencia Cognitiva y la Educación Matemática. La relación entre habilidades puramente espaciales (rotación mental) y habilidades puramente numéricas (cálculos aritméticos), que a primera vista parece no tener explicación desde el punto de vista de la Educación Matemática, ha arrojado resultados interesantes y aplicables a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Hemos aportado evidencia a favor de las investigaciones en Ciencia Cognitiva que consideran que la Memoria de Trabajo es un mecanismo compartido por las habilidades de rotación mental y las habilidades de cálculo aritmético y que puede, por lo tanto, servir como mecanismo explicativo de las relaciones entre ellas.

Respecto a la hipótesis, planteada por Van Nes y van Eerde (2010), de que la composición y descomposición de figuras en ejercicios de rotación mental pondrían en juego conceptos aritméticos correspondientes que son útiles en el proceso de adición por distribución y asociación de números (por ejemplo, $9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15$), no hemos encontrado evidencias ni a favor ni en contra. Es posible que dicha relación se manifieste en estudiantes de grados superiores de educación primaria. En el caso de niños de segundo de primaria, quienes hasta ahora están comenzando a comprender y a memorizar los procedimientos de adición y substracción, es poco probable que usen propiedades de la suma y de la resta (distributiva y asociativa en este caso) al realizar operaciones aritméticas.

La hipótesis planteada por Cheng y Mix (2014) respecto a la posible 'rotación' y re-interpretación de ecuaciones por parte de los estudiantes que recibieron entrenamiento en ejercicios de rotación mental (ej. 5 + __ = 11 reinterpretada como __ = 11-5)., tampoco fue comprobada. Dicha rotación de términos alrededor del signo igual no fue explicada por los docentes en el proceso de enseñanza previa a la realización de los test aritméticos y por lo tanto es poco probable que los estudiantes la hayan usado.

El mecanismo explicativo de la relación entre habilidades de rotación mental y habilidades aritméticas que más concordó con los resultados obtenidos fue el del incremento en la agudeza para los detalles visuales que implican los ejercicios de rotación mental y que mejora la lectura de expresiones aritméticas. Este hecho ayuda a los estudiantes a evitar una lectura incorrecta influenciada por el formato general de las expresiones y a centrarse en la información a nivel de símbolos individuales.

Creamos el concepto de optimización cognitiva para explicar dicho mecanismo. Definimos la optimización cognitiva como la estrategia mediante la cual una persona interpreta un símbolo en un contexto dado usando información esencial (conceptual) y no esencial (contextual).

Para ejemplificar este nuevo concepto, hicimos referencia a varios estudios que han reportado que los niños tienden a interpretar erróneamente algunas expresiones matemáticas debido a su formato no convencional. Por ejemplo, "3 + 5 = 6 + __" es re-interpretado en el formato más familiar "3 + 5 + 6 = __" (McNeil y Alibali, 2004); "5+3 * 21" puede ser interpretado como "5*3 + 21" debido a que la distancia de los operandos escritos no respeta la convención de unir más los productos y separar más las sumas (Braithwaite et al., 2016).

En ambos casos, el formato escrito de las expresiones (información no esencial) se utiliza para interpretar su significado, mientras que los símbolos individuales (que transmiten información conceptual) no se tienen en cuenta para dar un significado correcto a la expresión. Estos son ejemplos de errores de optimización cognitiva.

Estos errores de optimización cognitiva pueden surgir de los procesos de enseñanza. Muy frecuentemente, los maestros explican ciertos conceptos a los estudiantes introduciendo información no esencial (por ejemplo, formatos canónicos de expresiones aritméticas) en cada ejemplo. Los estudiantes, a su vez, incorporan esta información y la interpretan como una parte esencial de los conceptos ilustrados.

Teniendo en cuenta el concepto de optimización cognitiva, debemos tener cuidado al enseñar un tema en particular. La ilustración de un concepto debe ser variada e incluir todas las características fundamentales, evitando la generalización de aspectos que no sean fundamentales para el concepto (López, 1990).

De todos modos, pensamos que la optimización cognitiva es un aspecto natural del aprendizaje y debemos aprovecharlo evitando sus riesgos potenciales. Por supuesto, al evaluar a los estudiantes, tenemos que reflexionar sobre nuestros métodos de enseñanza y asumir la responsabilidad por los errores -quizá inconscientes- durante el proceso de enseñanza.

En conclusión, hemos dado respuesta a nuestra pregunta de investigación presentando evidencia empírica y desarrollando el concepto de optimización cognitiva. Concluimos que las habilidades de rotación mental influyen positivamente en las habilidades de cálculo aritmético al corregir errores de lectura de expresiones con formatos no canónicos. El análisis de las prácticas previstas por parte de los estudiantes y las posteriores entrevistas nos permitieron postular que hay un incremento en la percepción visual por parte de los estudiantes que realizaron ejercicios de rotación mental y que dicho incremento se traduce en una mejor lectura de símbolos matemáticos, lo cual contribuye a evitar errores de optimización cognitiva en la lectura de expresiones aritméticas.

El Enfoque Onto-semiótico nos permitió delinear adecuadamente las facetas ostensiva y no ostensiva de las expresiones aritméticas y descubrir algunas fallas que se presentan en la lectura y conceptualización de expresiones aritméticas por parte de los niños. Mostramos también cómo esas fallas se ven reducidas por el desarrollo de habilidades de rotación mental. La dualidad personal-institucional, nos posibilitó descubrir el origen de esas fallas en los procesos de enseñanza y aprendizaje vistos en conjunto. De esta manera, una relación entre lo espacial y lo aritmético, la cual no es obvia, fue descubierta en los procesos de lectura de expresiones aritméticas no canónicas.

Consideramos que nuestra aproximación empírica y metodológica al problema de investigación hace un aporte al campo de la Educación Matemática al considerar investigaciones de la Ciencia Cognitiva y traerlas al terreno educativo mediante metodologías mixtas y un enfoque teórico inclusivo.

Los resultados de nuestra investigación contribuyen en la reflexión de la enseñanza escolar de la aritmética y aportan un nuevo concepto (optimización cognitiva) que debería ser considerado a la hora de evaluar políticas de enseñanza, aprendizaje y valoración de conocimientos aritméticos en niños de primaria.

Hemos utilizado el concepto de optimización cognitiva en una situación particular, pero creemos que puede generalizarse a otras situaciones educativas y de aprendizaje, abriendo nuevas miradas a futuras investigaciones en educación.

7. ANEXOS

7.1 Test de Aritmética

$5 + 1 = \boxed{}$ $7 - 0 = \boxed{}$

$0 + 9 = \boxed{}$ $9 - 8 = \boxed{}$

$2 + \boxed{} = 5$ $7 - \boxed{} = 3$

$8 + \boxed{} = 13$ $11 - \boxed{} = 4$

$6 + \boxed{} = 14$ $18 - \boxed{} = 9$

Form A - 1

$$\begin{array}{r} 33 \\ +\quad 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\quad 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ -\quad 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ -\quad 7 \\ \hline \end{array}$$

Form A - 2

$7 + 8 + 2 = \boxed{}$

$10 + 3 + 5 = \boxed{}$

$9 - 6 - 1 = \boxed{}$

$14 - 4 - 3 = \boxed{}$

$13 + 5 - 7 = \boxed{}$

Form A - 3

$$\begin{array}{r} 232 \\ +121 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 347 \\ +536 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 459 \\ -\ 215 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 672 \\ -\ 345 \\ \hline \end{array}$$

Form A - 4

$$\begin{array}{r} 32 \\ + \boxed{} \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ + \boxed{} \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ - \boxed{} \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 94 \\ - \boxed{} \\ \hline 86 \end{array}$$

$6 + 1 = \boxed{}$ $5 - 0 = \boxed{}$

$0 + 8 = \boxed{}$ $8 - 5 = \boxed{}$

$3 + \boxed{} = 6$ $9 - \boxed{} = 2$

$7 + \boxed{} = 12$ $12 - \boxed{} = 9$

$9 + \boxed{} = 15$ $16 - \boxed{} = 8$

Form B - 1

$$\begin{array}{r} 41 \\ +\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ +\ \ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ -\ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ -\ \ 9 \\ \hline \end{array}$$

Form B - 2

$8 + 5 + 3 = \square$

$10 + 6 + 2 = \square$

$8 - 2 - 3 = \square$

$13 - 3 - 5 = \square$

$12 + 4 - 6 = \square$

$\begin{array}{r} 124 \\ +223 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 348 \\ +517 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 459 \\ -\ 126 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 672 \\ -\ 527 \\ \hline \end{array}$

Form B - 4

$$\begin{array}{r} 4\,2 \\ +\quad \square \\ \hline 4\,8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\,7 \\ +\quad \square \\ \hline 6\,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\,7 \\ -\quad \square \\ \hline 8\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\,5 \\ -\quad \square \\ \hline 6\,7 \end{array}$$

$7 + 1 = \boxed{}$

$6 - 0 = \boxed{}$

$0 + 4 = \boxed{}$

$9 - 3 = \boxed{}$

$4 + \boxed{} = 6$

$8 - \boxed{} = 3$

$7 + \boxed{} = 14$

$13 - \boxed{} = 4$

$5 + \boxed{} = 11$

$17 - \boxed{} = 5$

Form C - 1

$$\begin{array}{r} 22 \\ +\quad 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\quad 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ -\quad 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ -\quad 6 \\ \hline \end{array}$$

Form C - 2

$$7 + 6 + 2 = \boxed{}$$

$$11 + 5 + 3 = \boxed{}$$

$$9 - 3 - 4 = \boxed{}$$

$$14 - 2 - 6 = \boxed{}$$

$$18 + 2 - 8 = \boxed{}$$

Form C - 3

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\,134 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 246 \\ +\,527 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ -\ 324 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 671 \\ -\ 238 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ + \boxed{} \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ + \boxed{} \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ - \boxed{} \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ - \boxed{} \\ \hline 78 \end{array}$$

Form C - 5

$8 + 1 = \boxed{}$	$4 - 0 = \boxed{}$
$0 + 5 = \boxed{}$	$7 - 3 = \boxed{}$
$3 + \boxed{} = 8$	$9 - \boxed{} = 2$
$6 + \boxed{} = 12$	$12 - \boxed{} = 3$
$7 + \boxed{} = 11$	$17 - \boxed{} = 9$

Form D - 1

$\begin{array}{r} 24 \\ +\quad 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ +\quad 8 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 77 \\ -\quad 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 93 \\ -\quad 8 \\ \hline \end{array}$

Form D - 2

$$5 + 3 + 1 = \boxed{}$$

$$11 + 2 + 4 = \boxed{}$$

$$8 - 2 - 1 = \boxed{}$$

$$13 - 3 - 5 = \boxed{}$$

$$15 + 3 - 8 = \boxed{}$$

Form D - 3

$$\begin{array}{r} 132 \\ +\,225 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 234 \\ +\,518 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 558 \\ -\,227 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 672 \\ -\,347 \\ \hline \end{array}$$

Form D - 4

$$\begin{array}{r} 25 \\ + \ \square \\ \hline 29 \end{array}$$

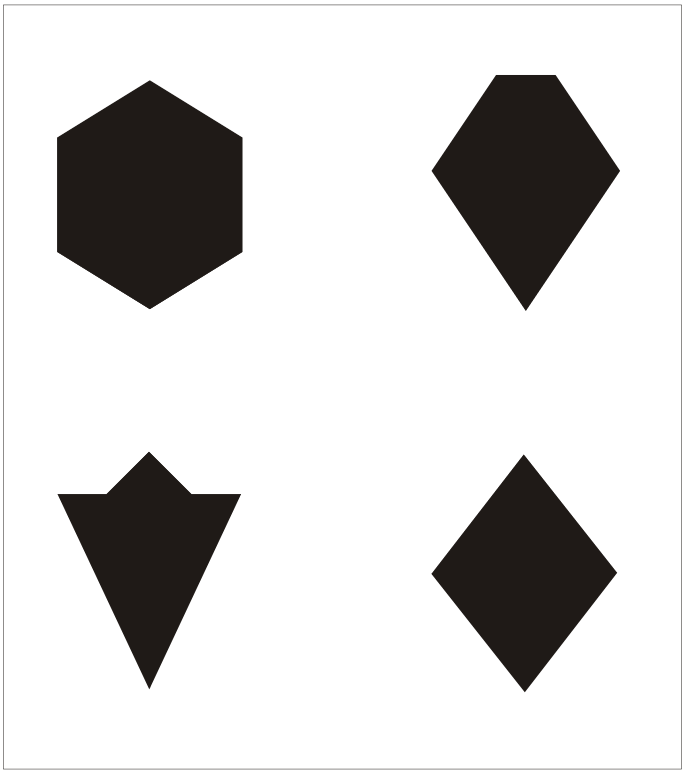
$$\begin{array}{r} 47 \\ + \ \square \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ - \ \square \\ \hline 72 \end{array}$$

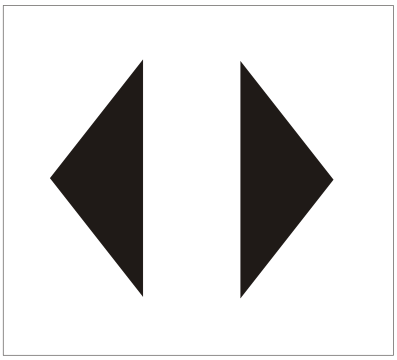
$$\begin{array}{r} 92 \\ - \ \square \\ \hline 88 \end{array}$$

Form D - 5

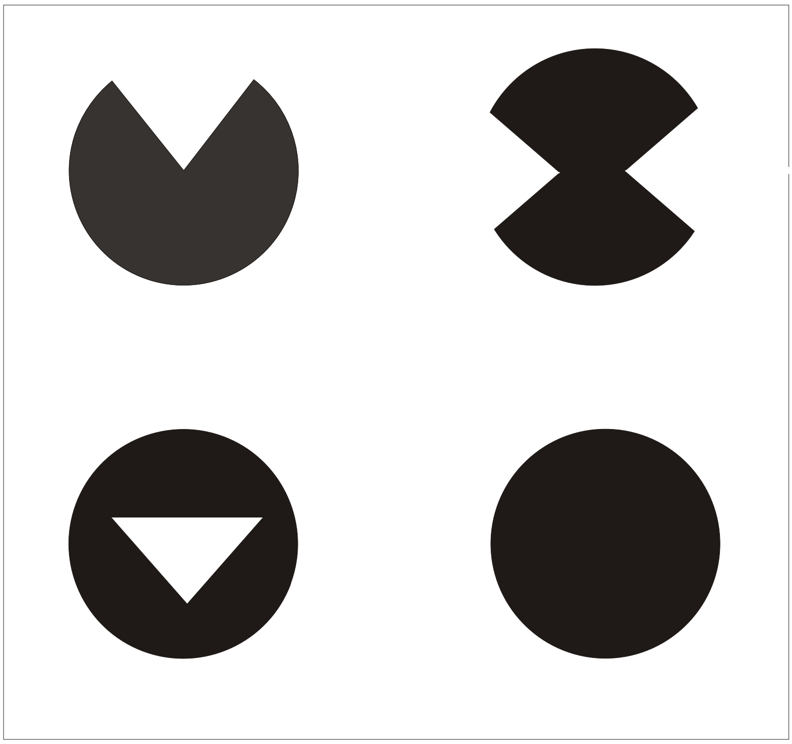
7.2 Ejercicios de Rotación Mental



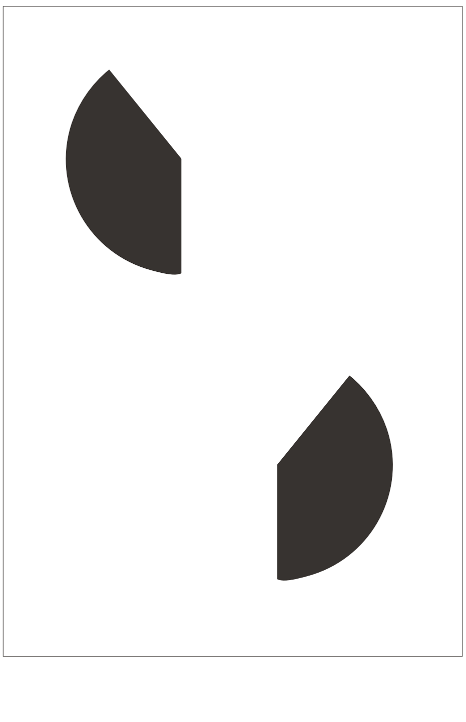
1



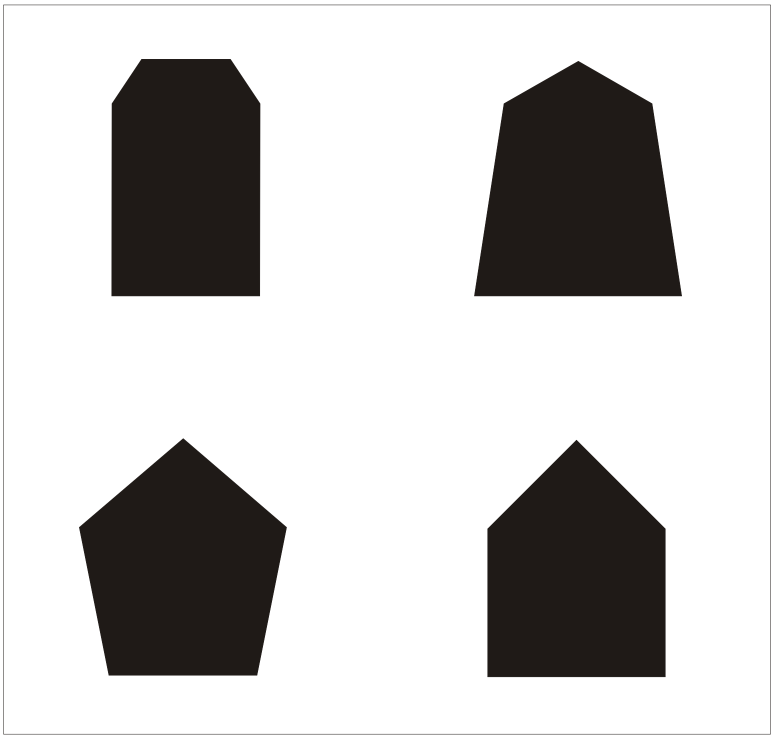
2



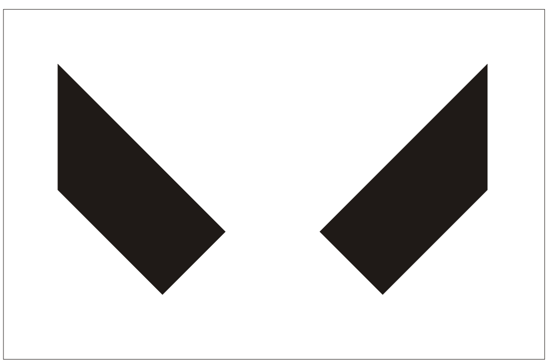
3



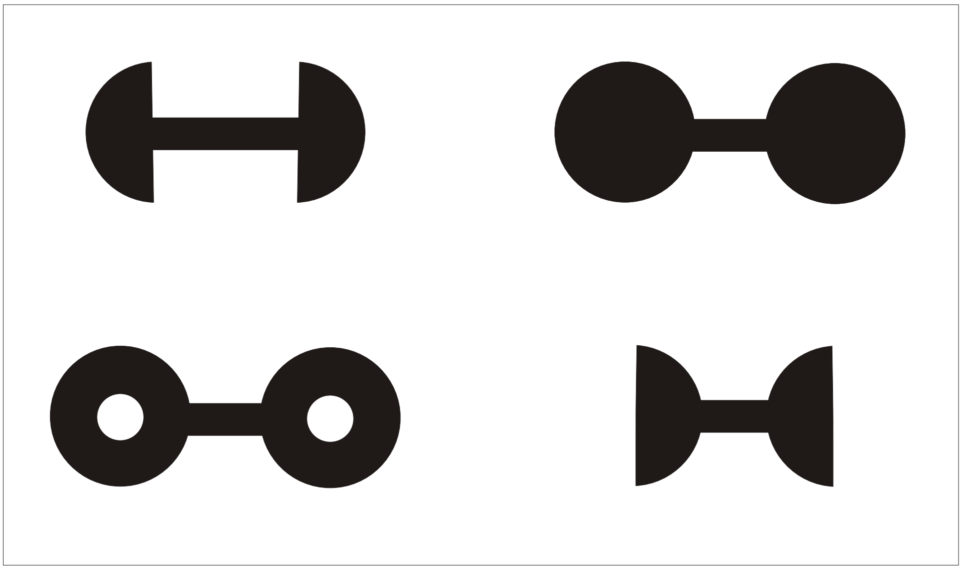
4



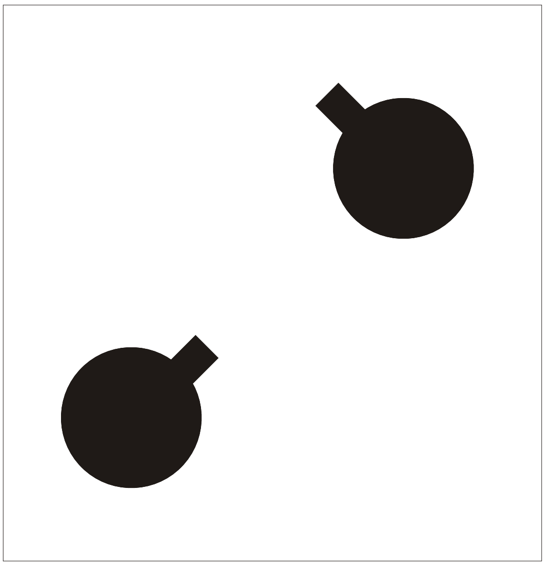
5



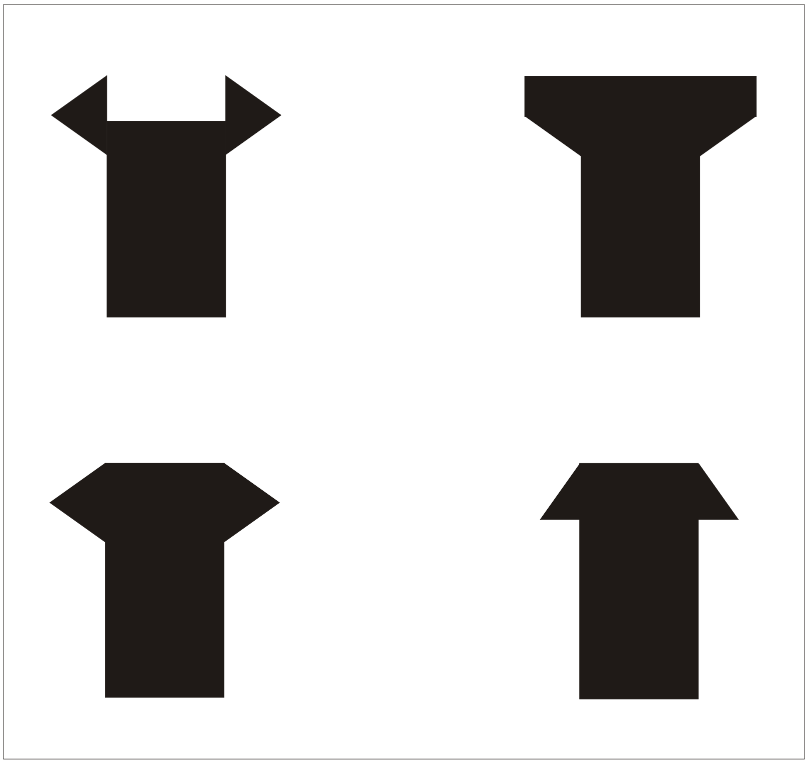
6



7

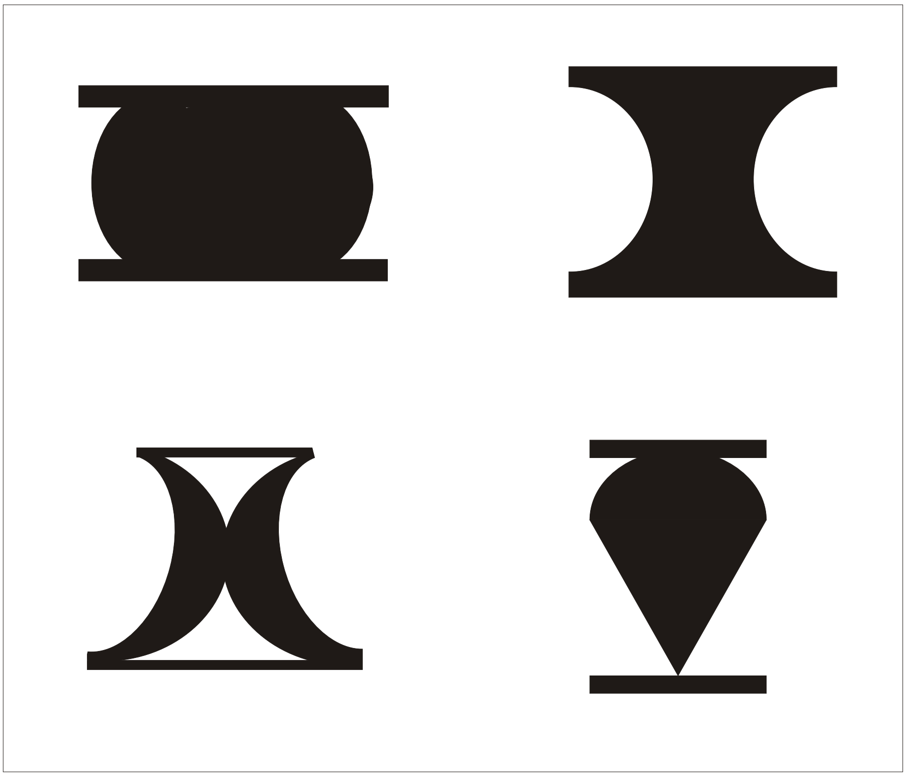


8

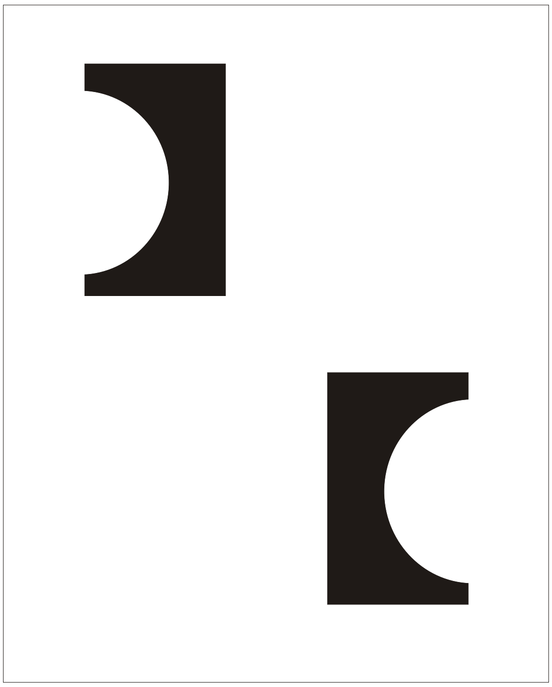


9

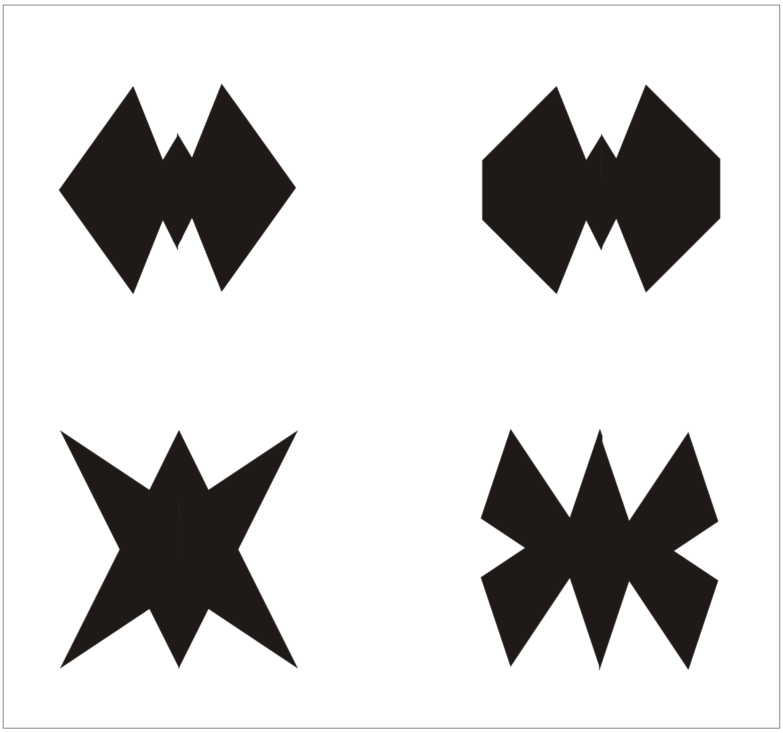
10



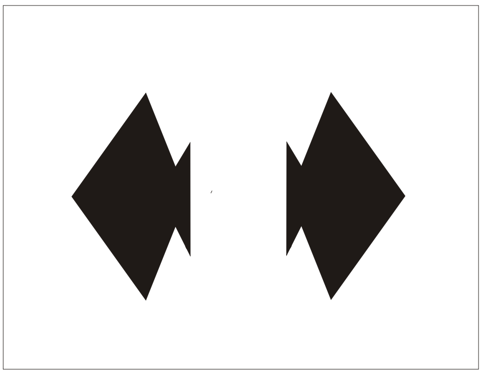
11



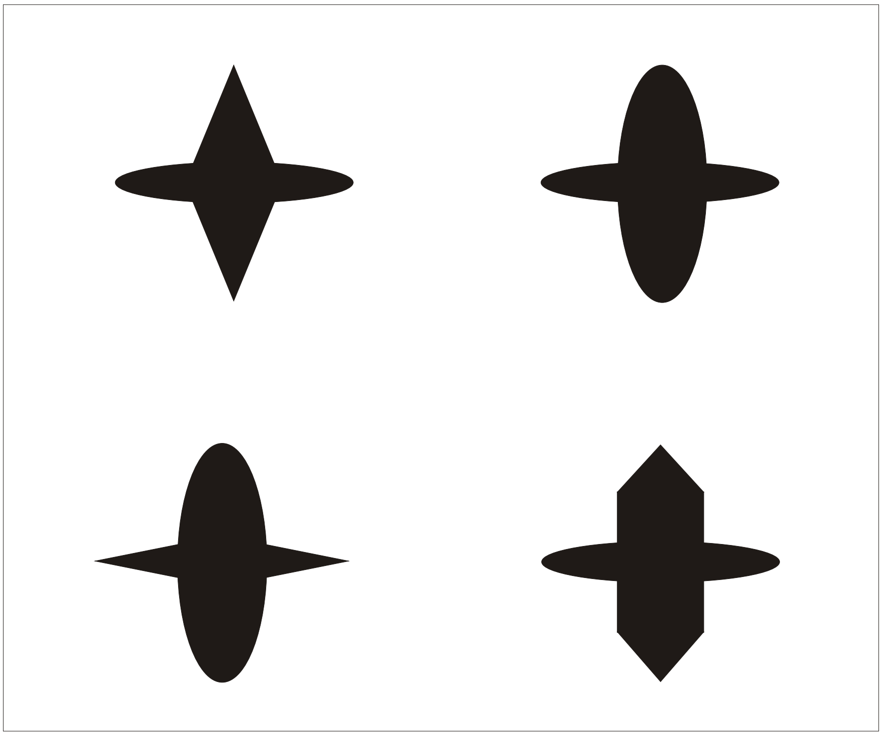
12



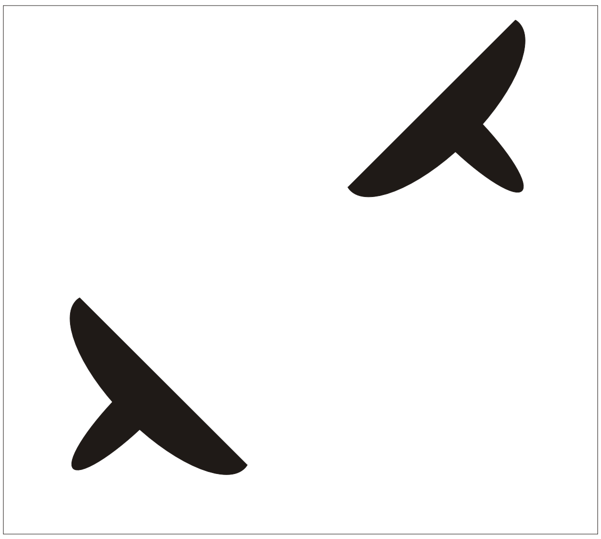
13



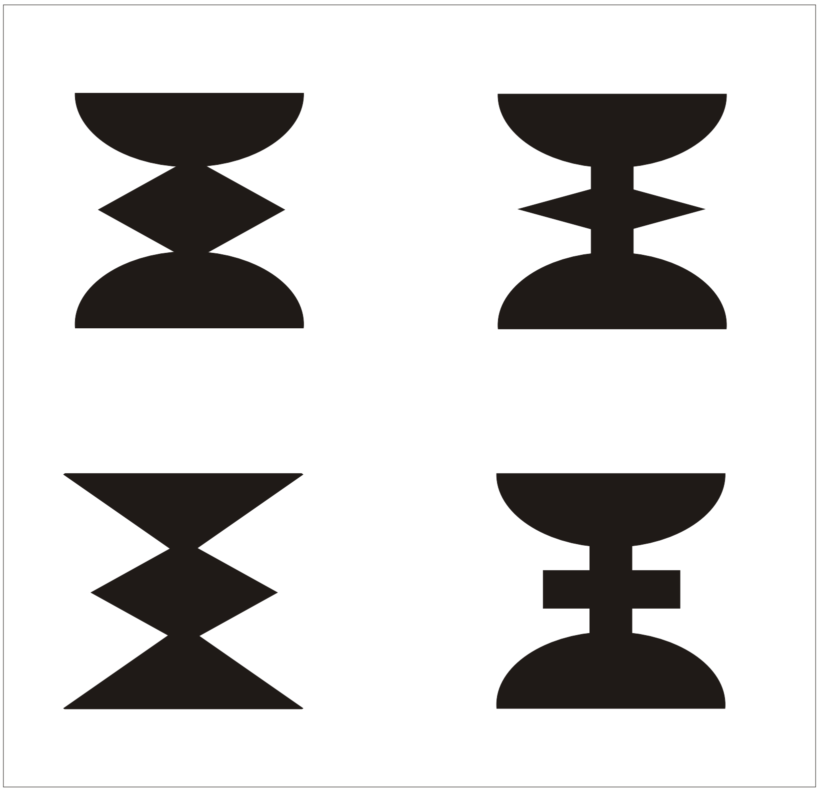
14



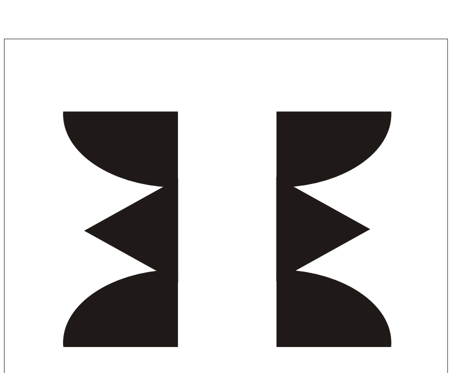
15



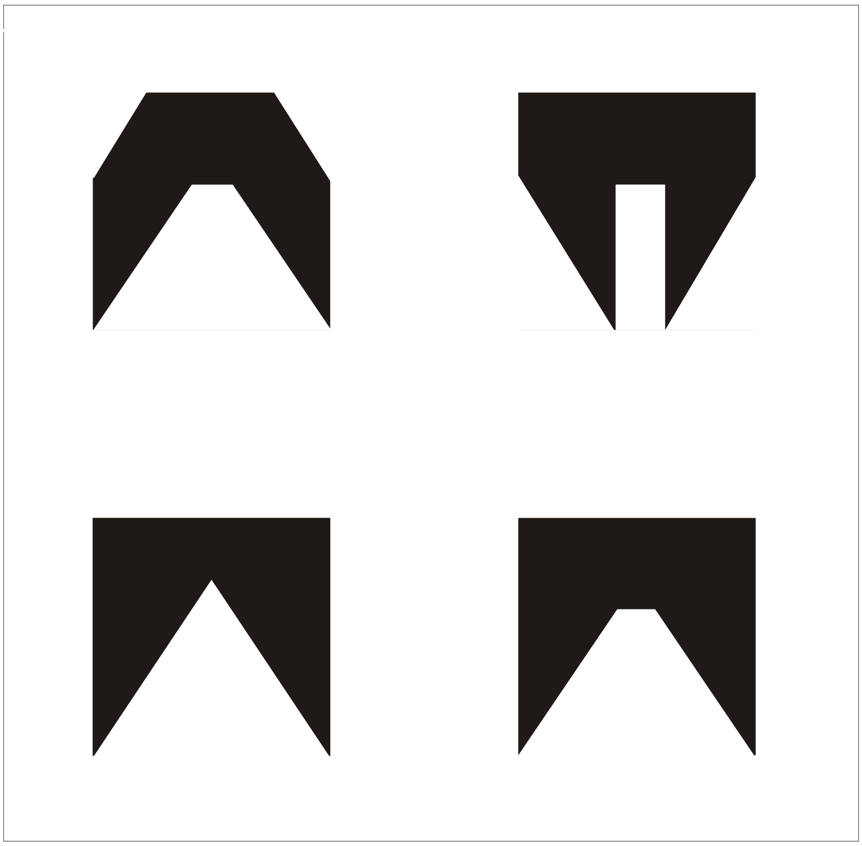
16



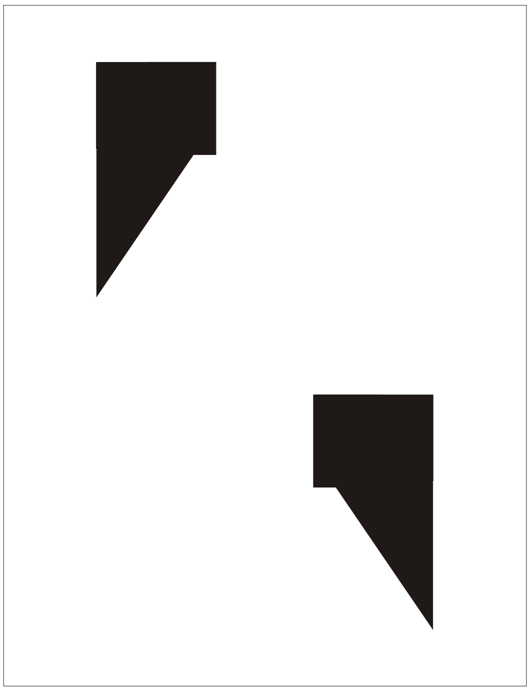
17



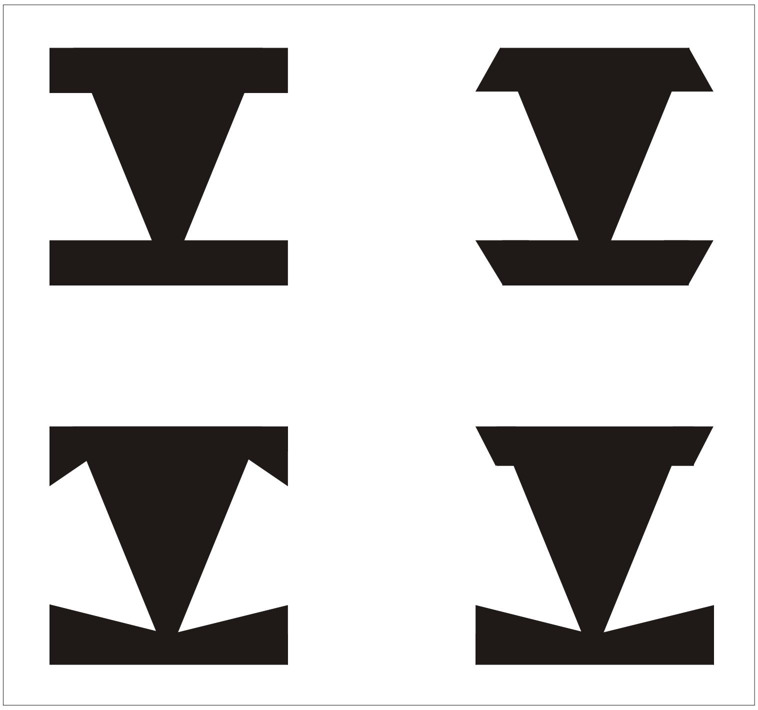
18



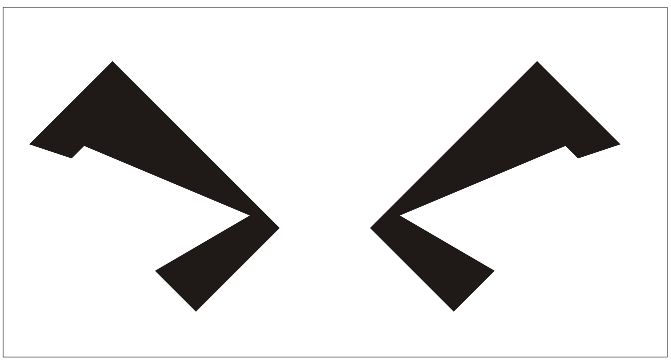
19



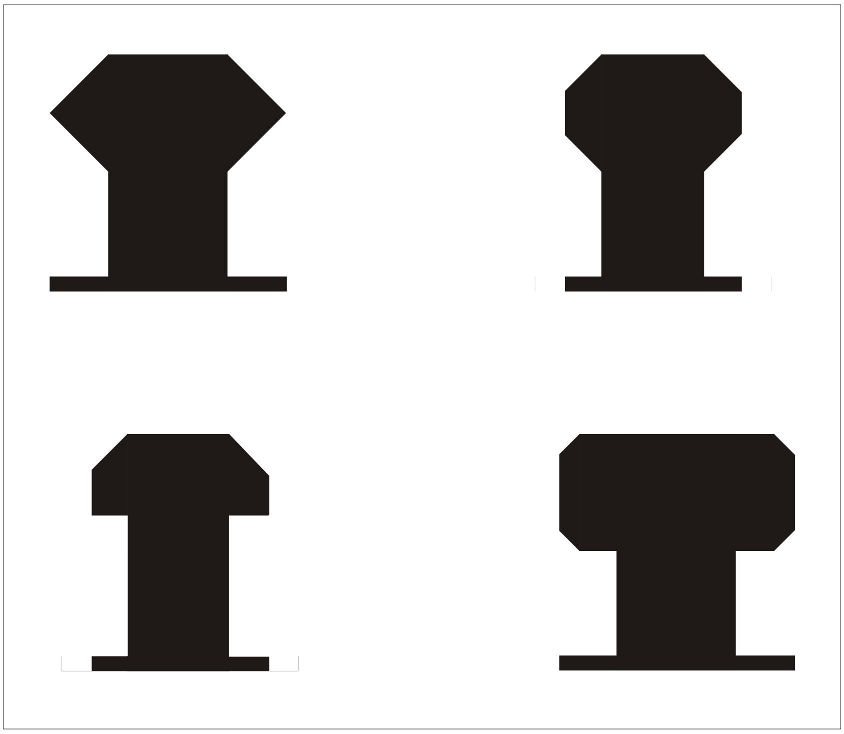
20



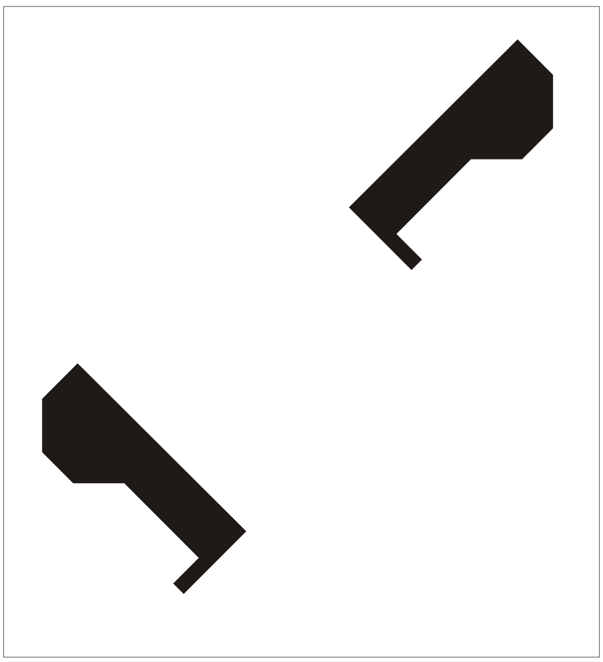
21



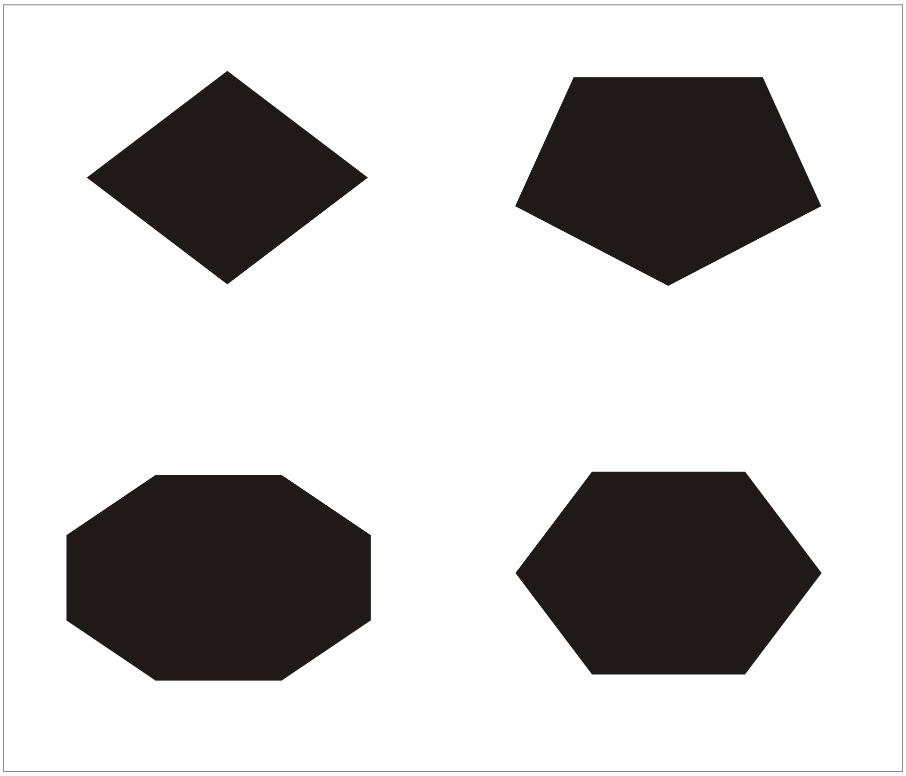
22



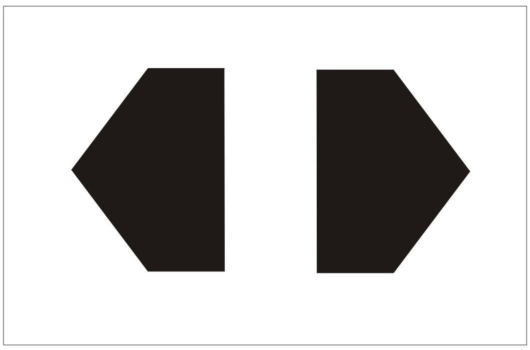
23



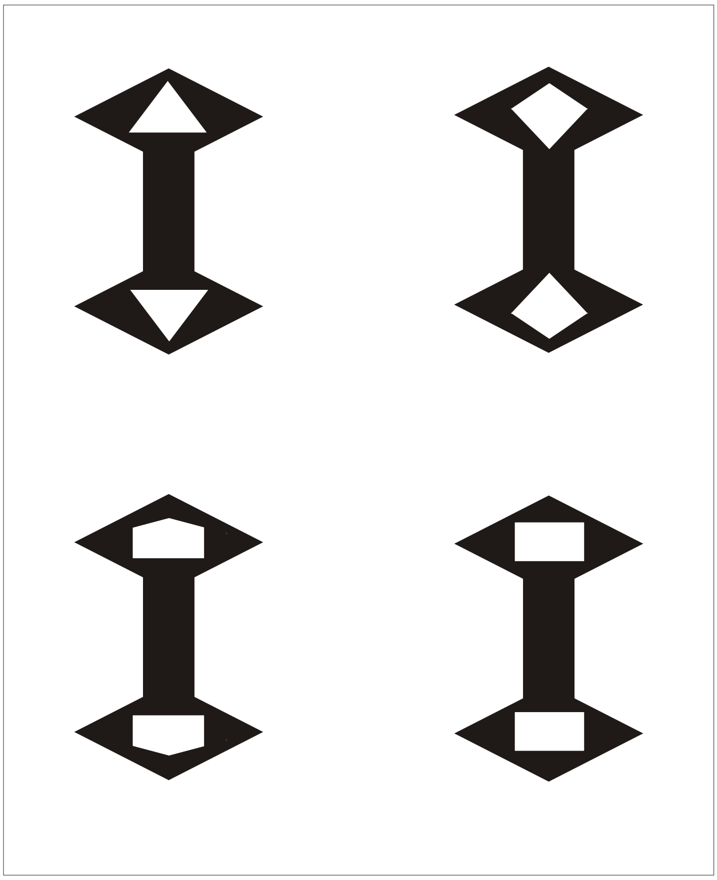
24



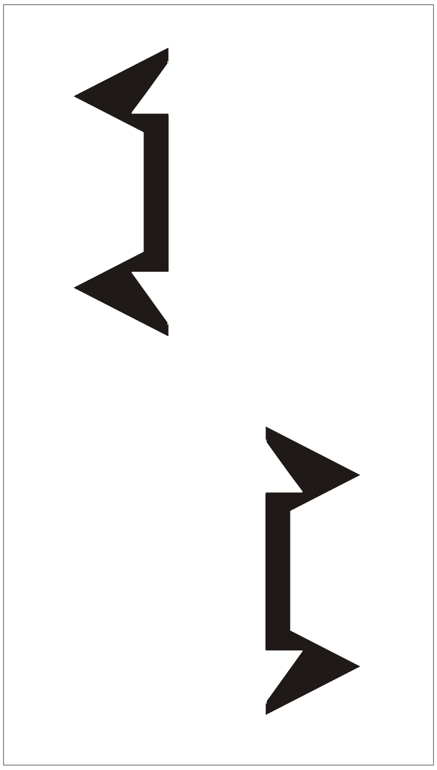
25



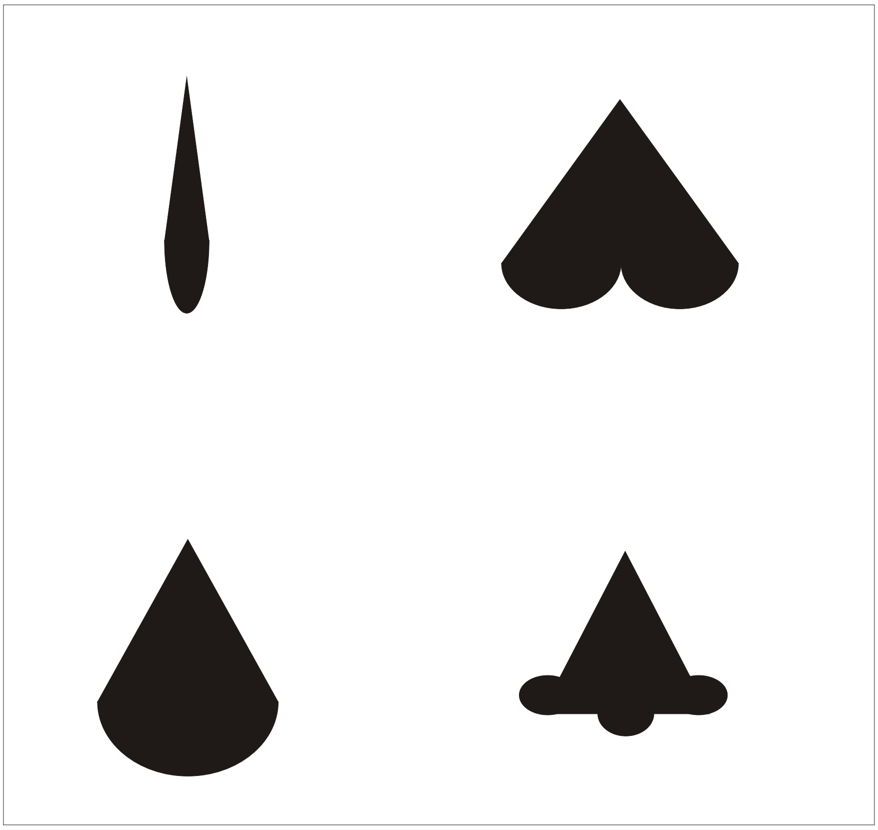
26



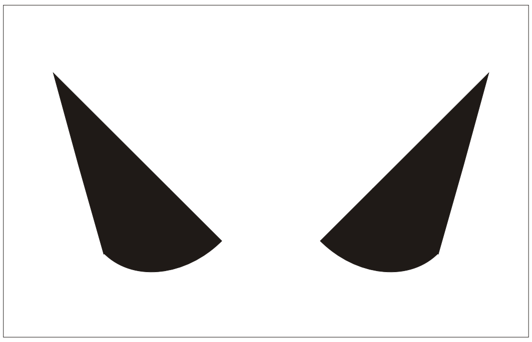
27



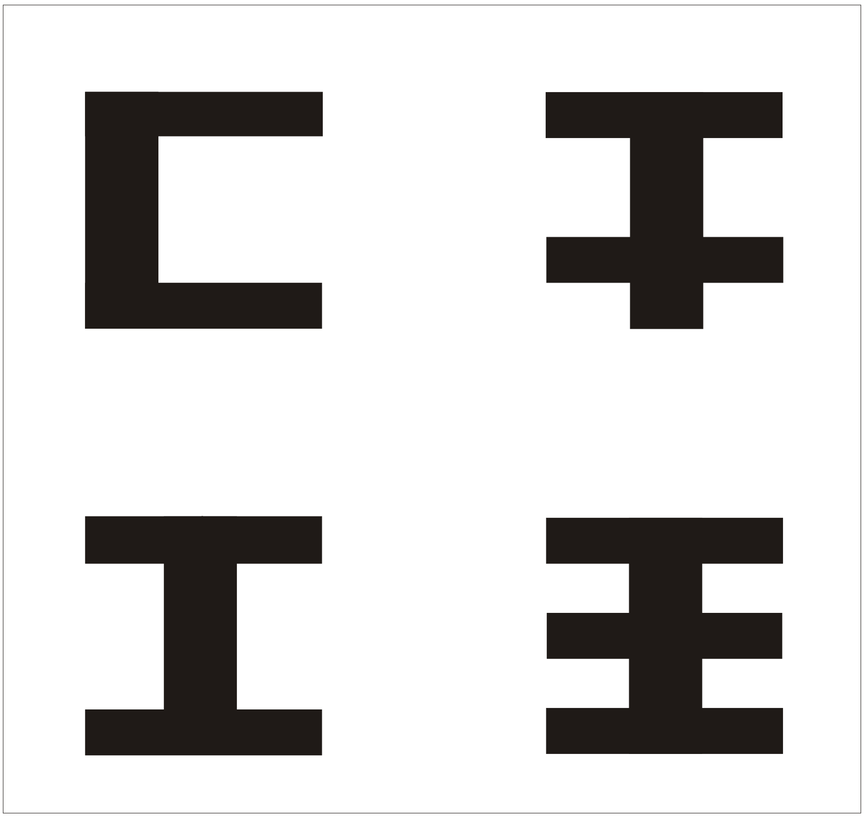
28



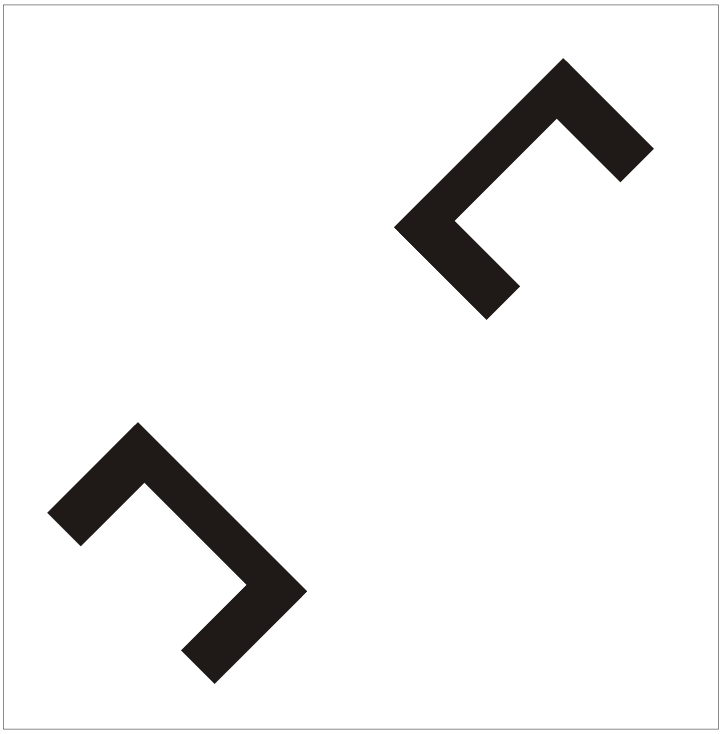
29



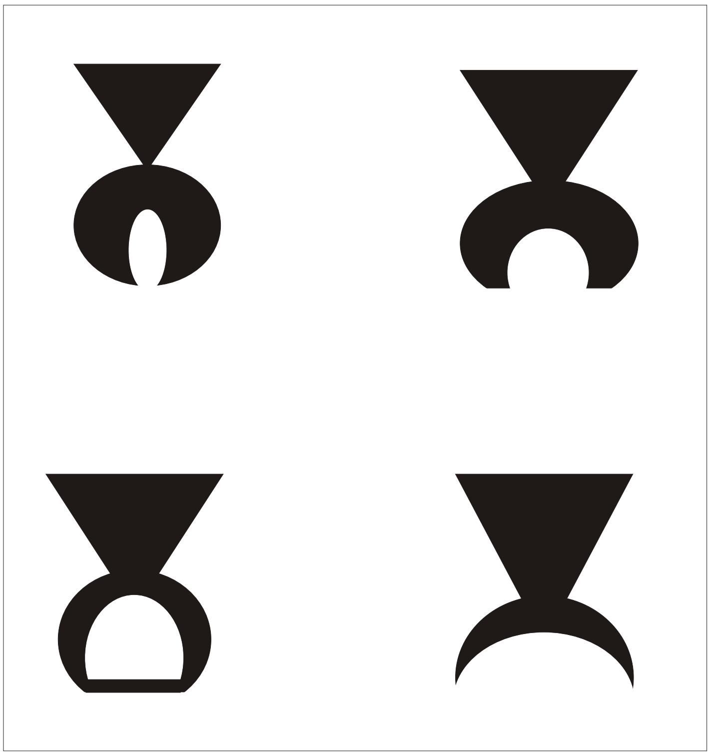
30



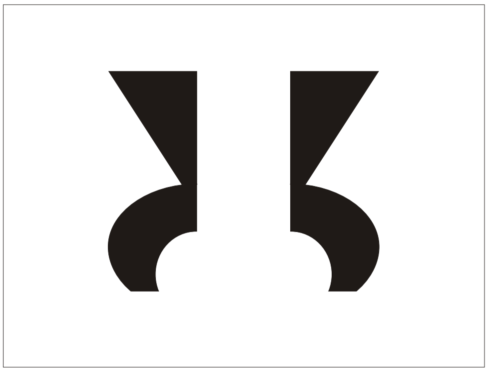
31



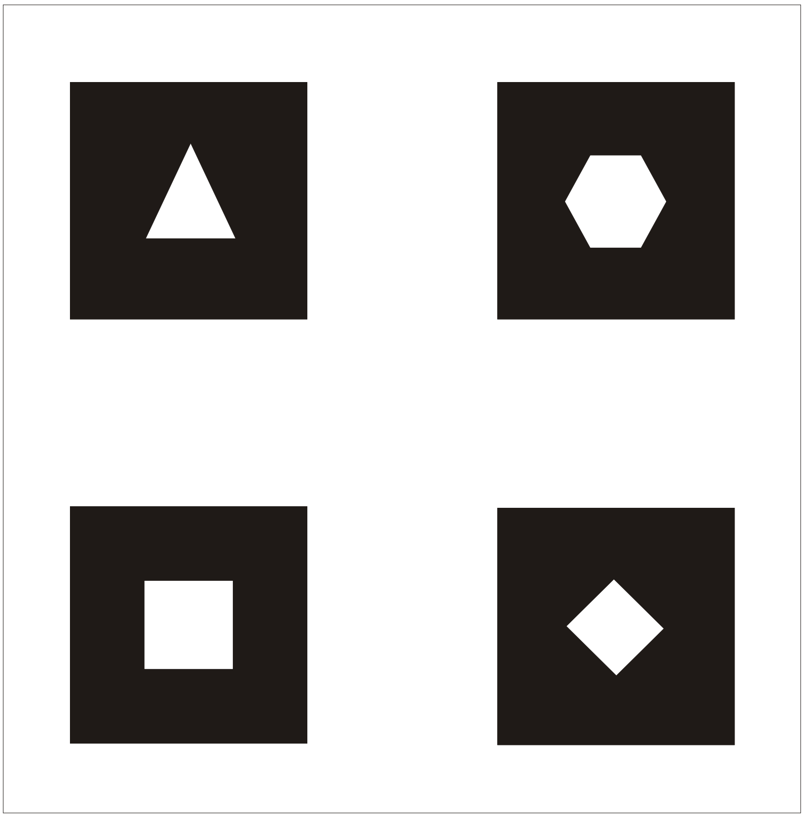
32



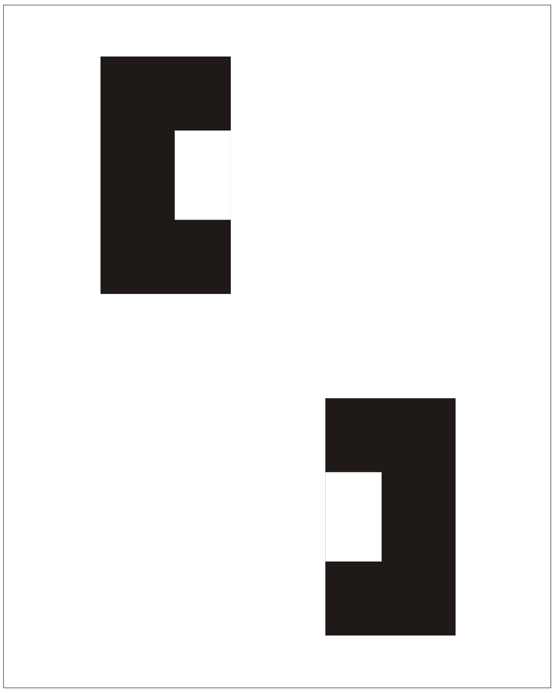
33



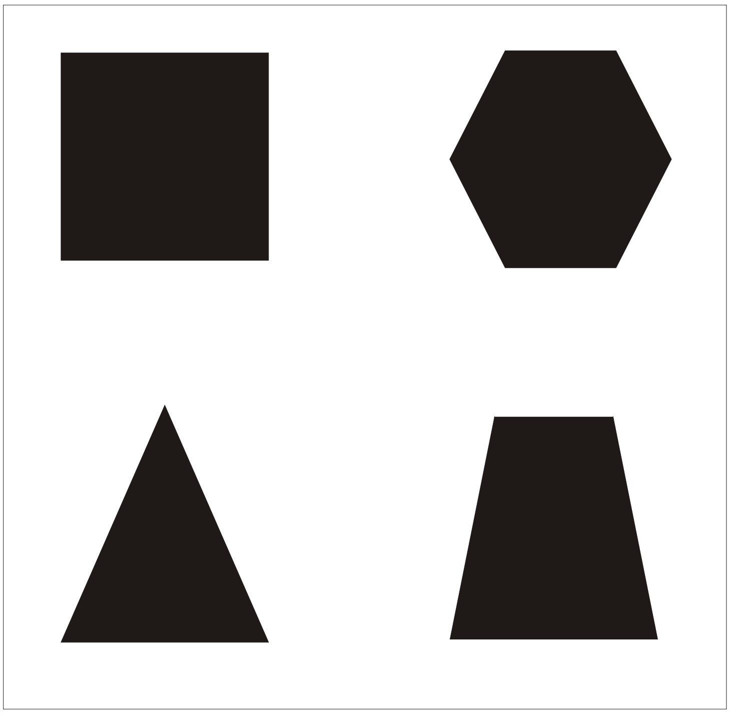
34



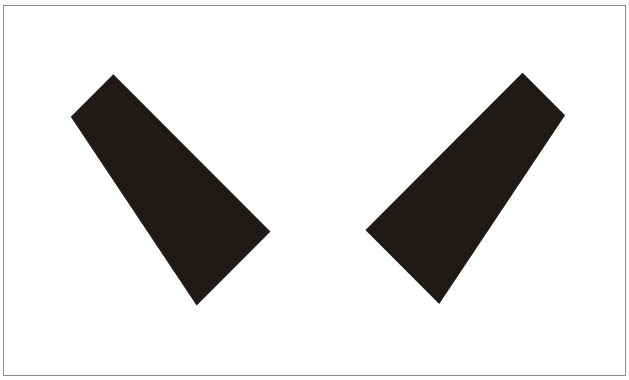
35



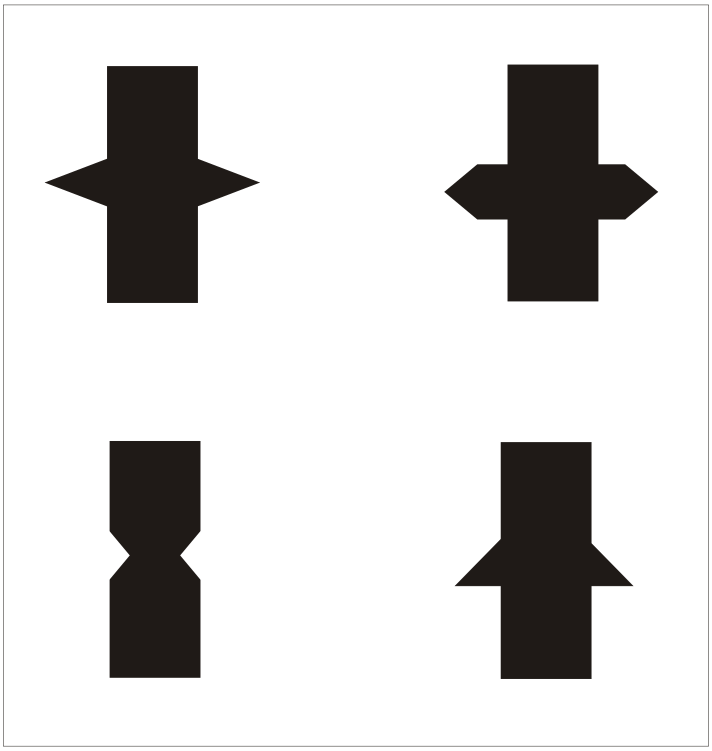
36



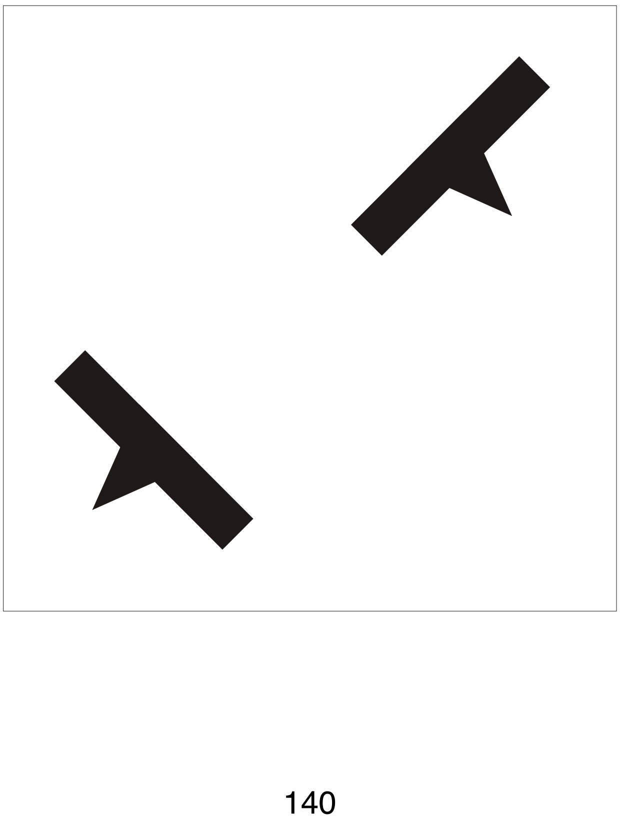
37



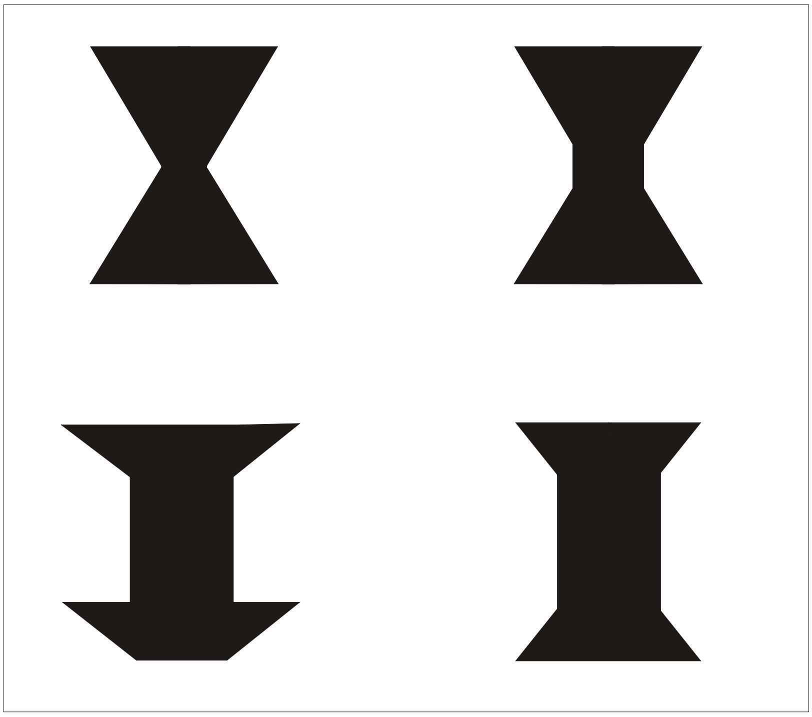
38



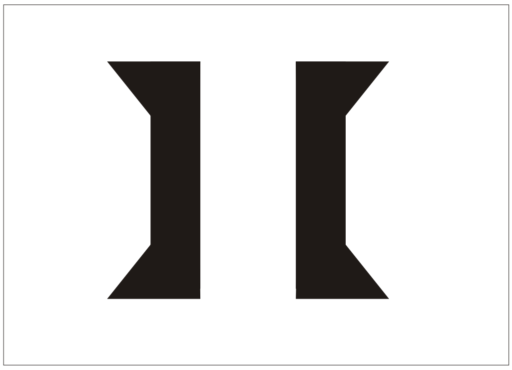
39



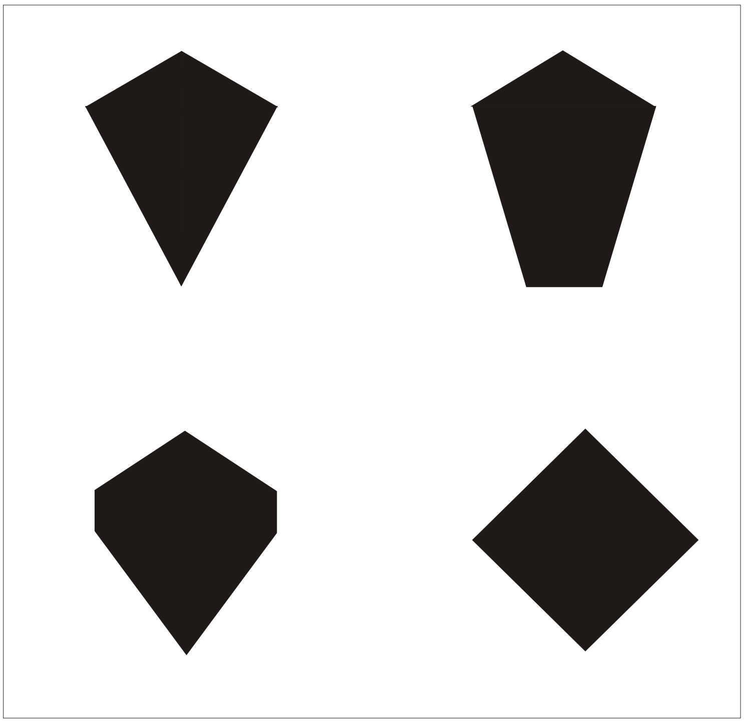
40



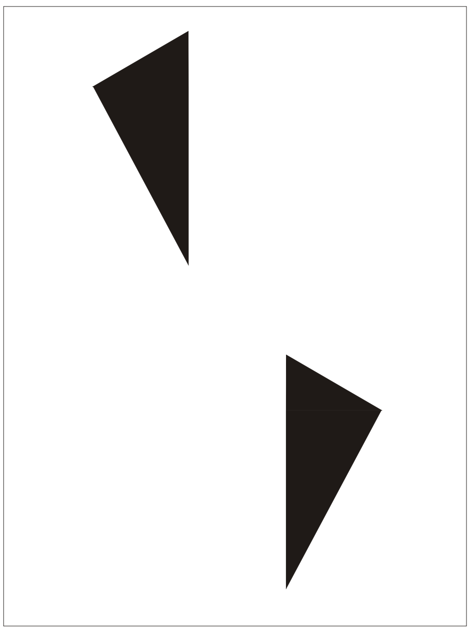
41



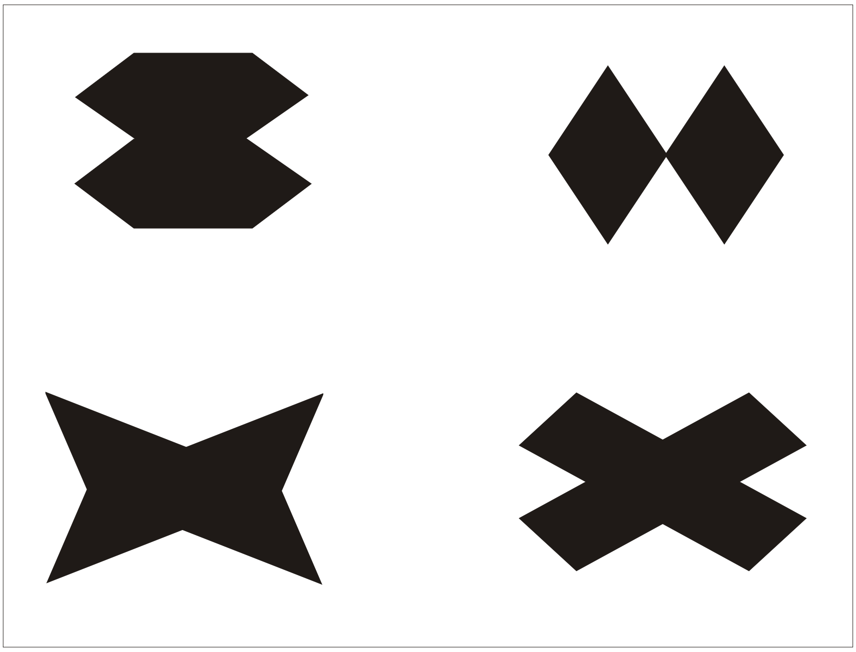
42



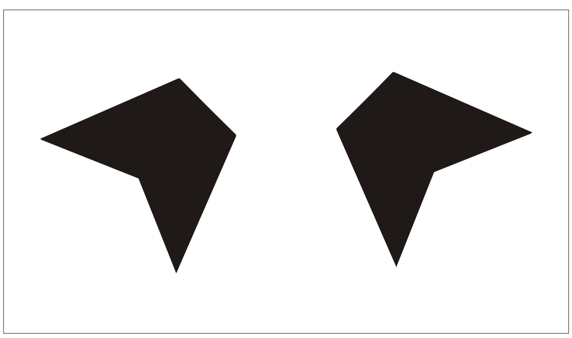
43



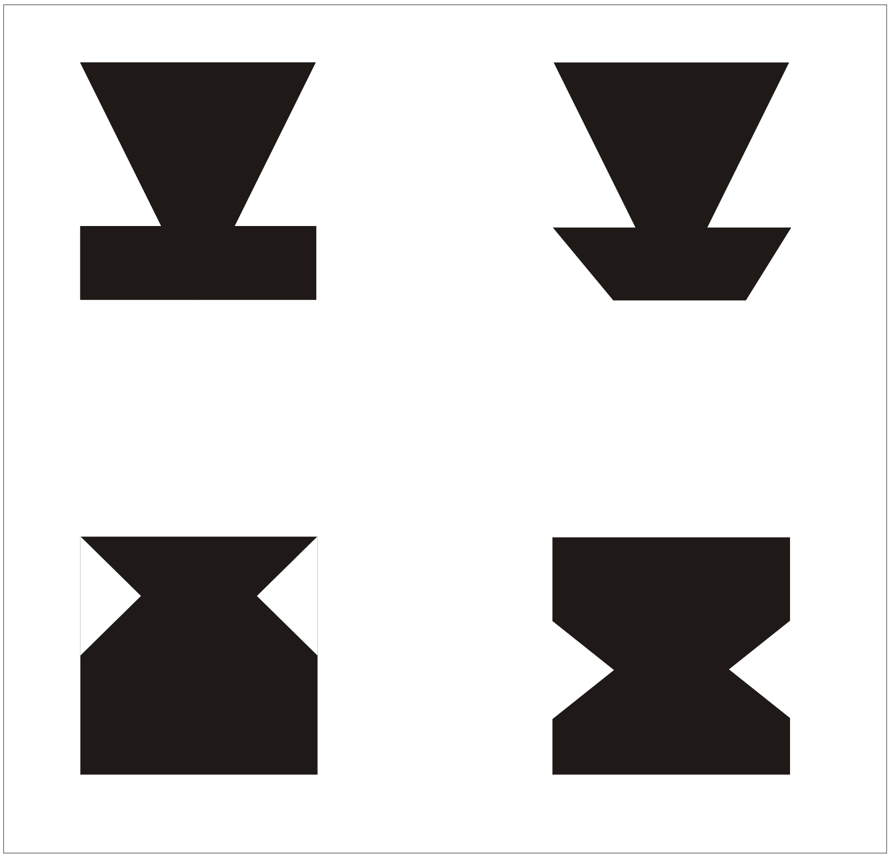
44



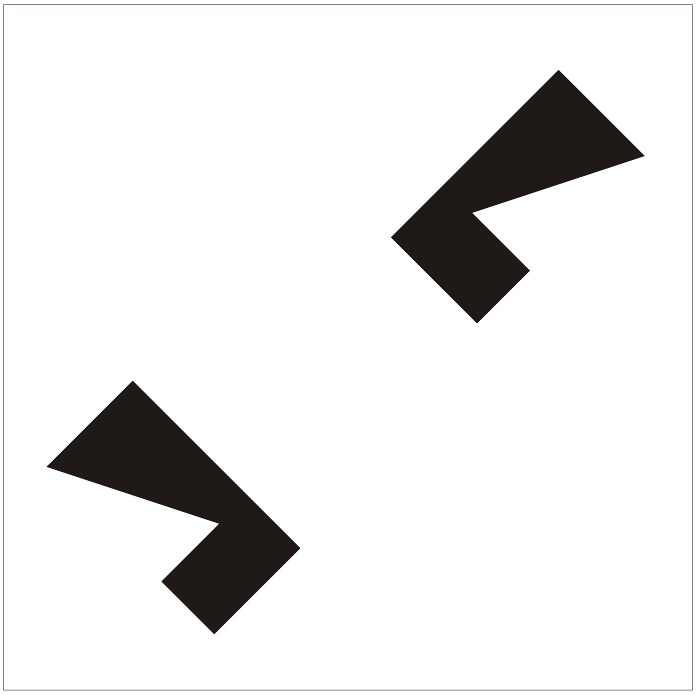
45



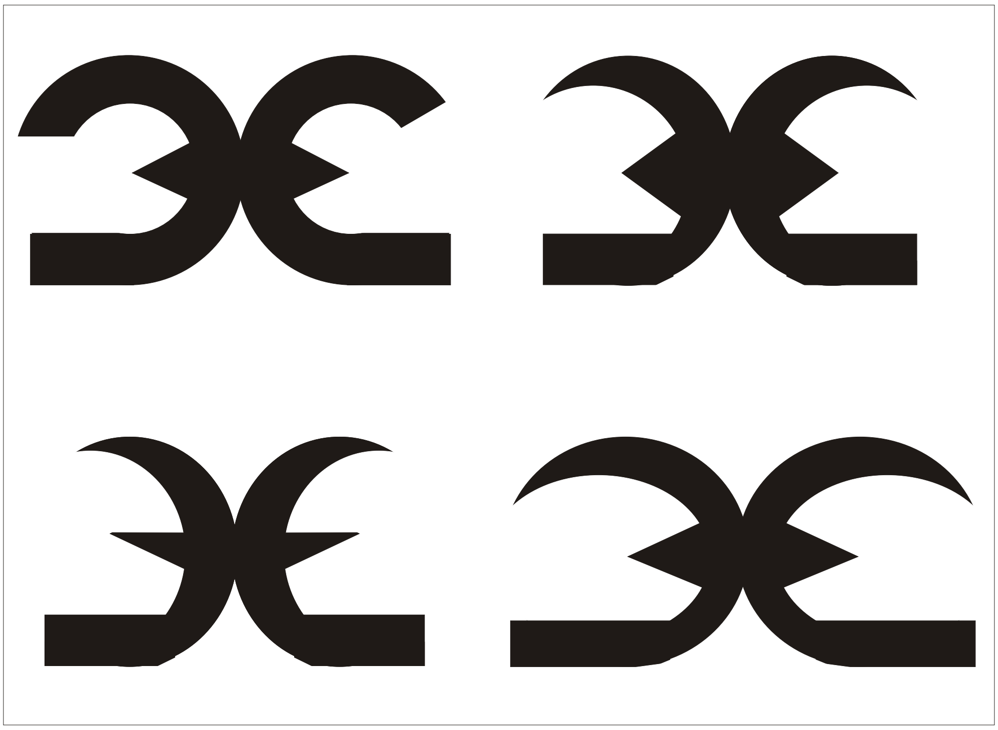
46



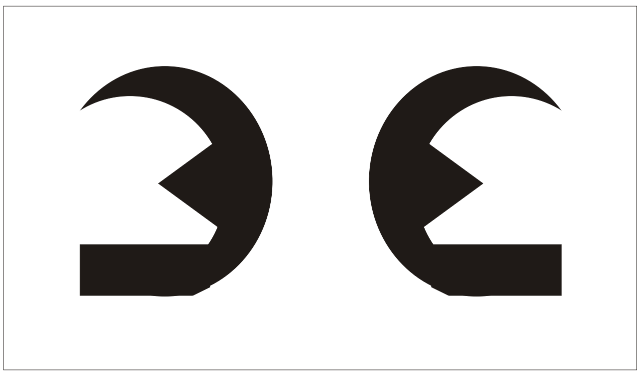
47



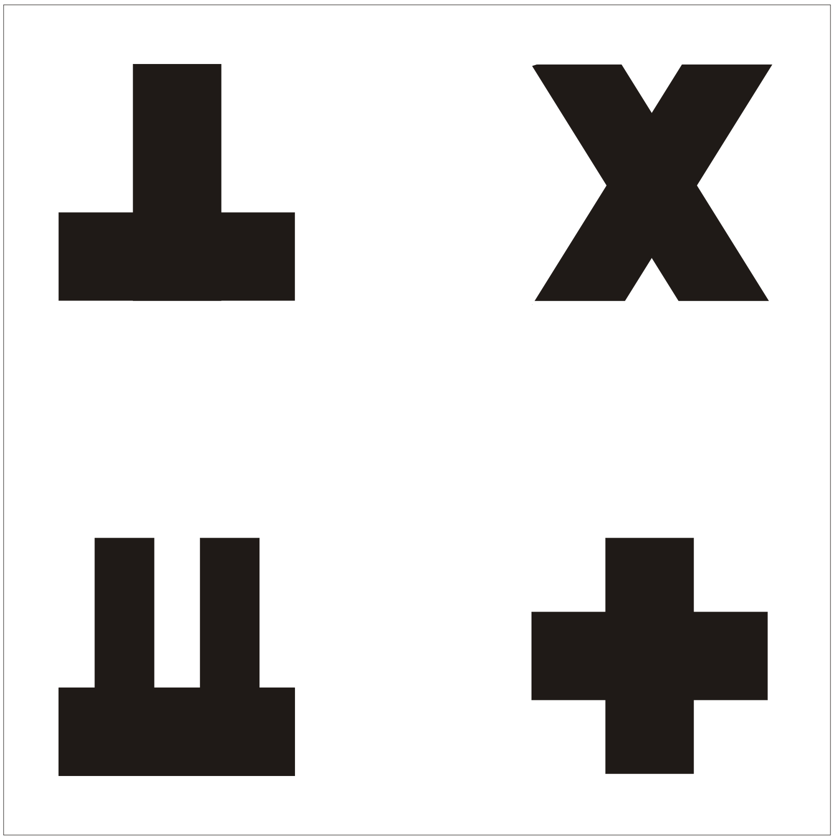
48



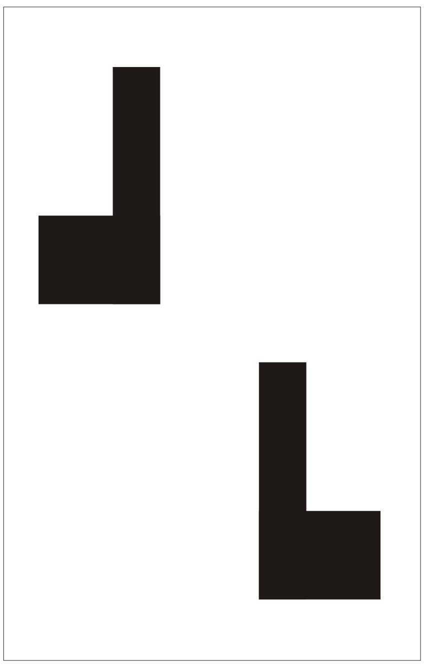
49



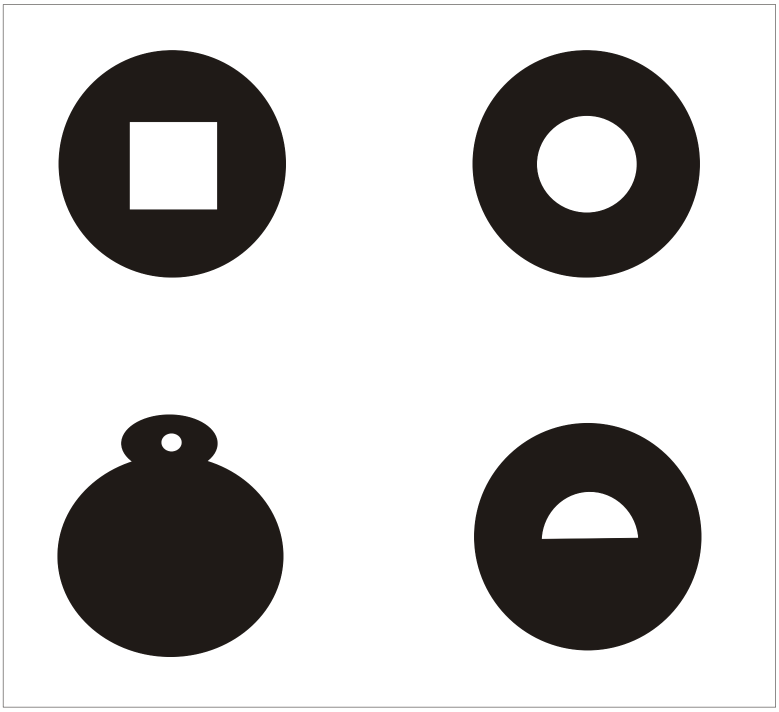
50



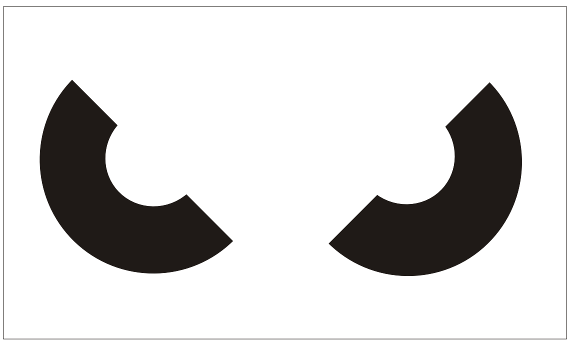
51



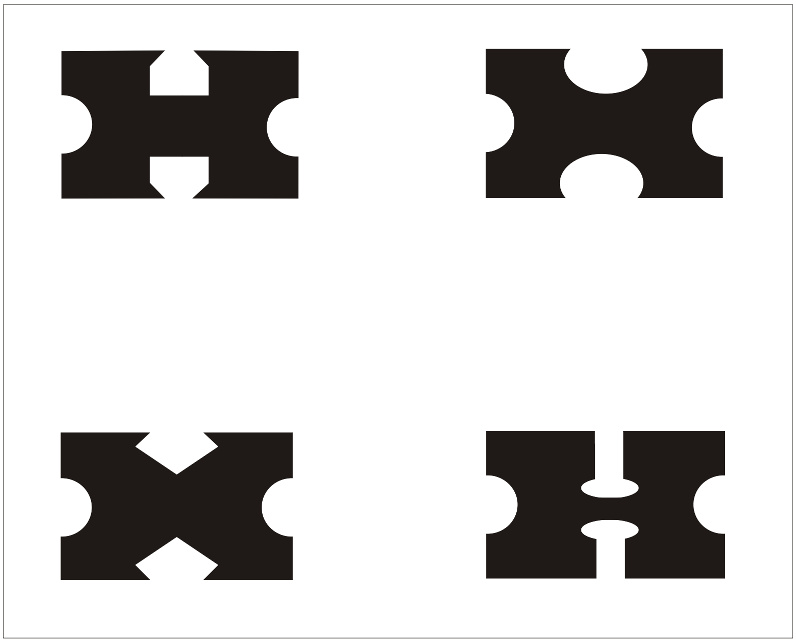
52



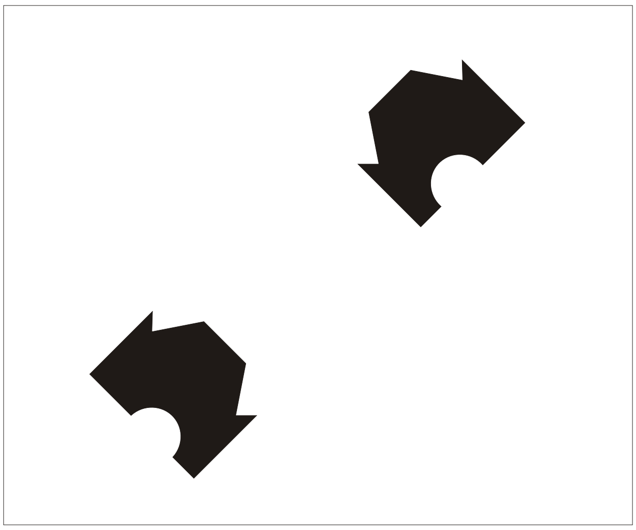
53



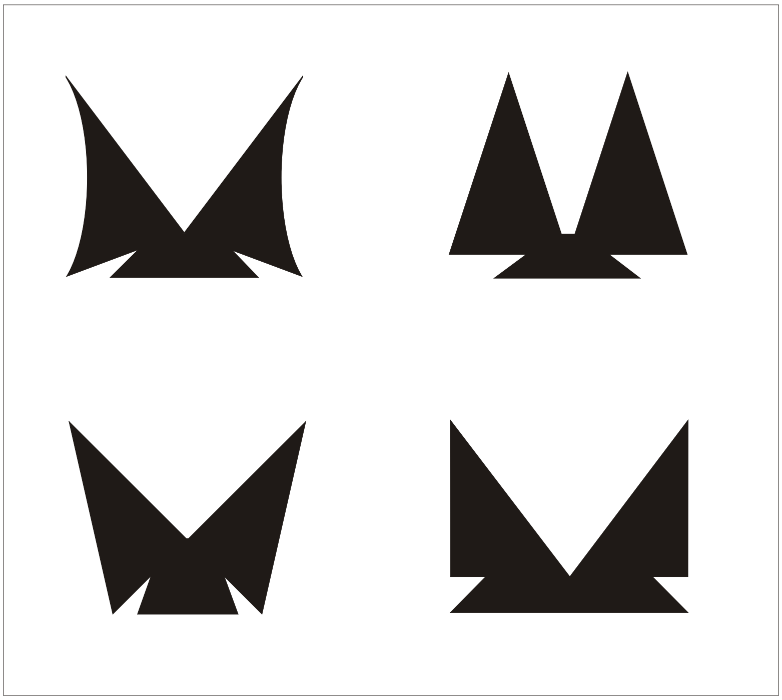
54



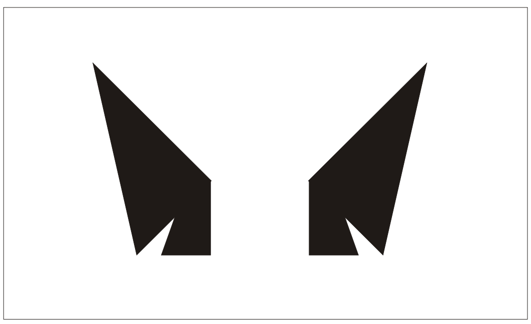
55



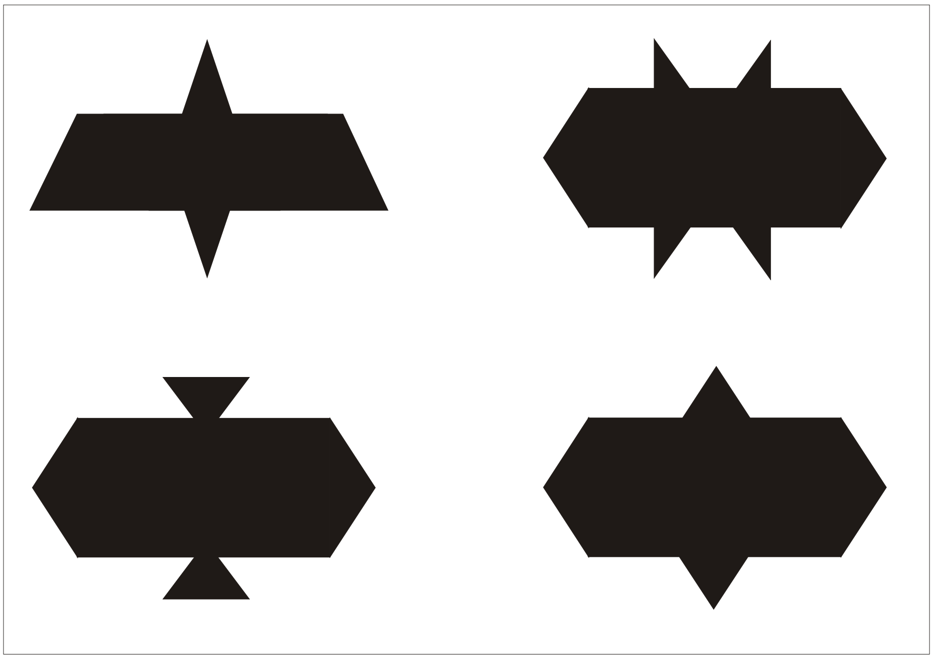
56



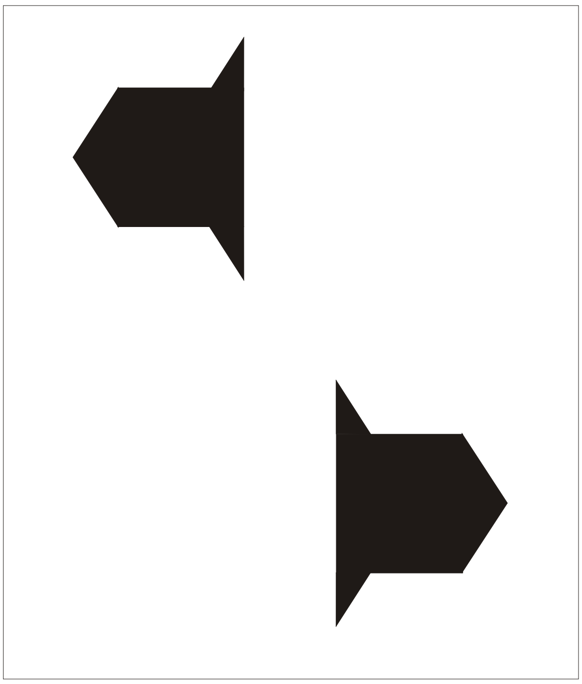
57



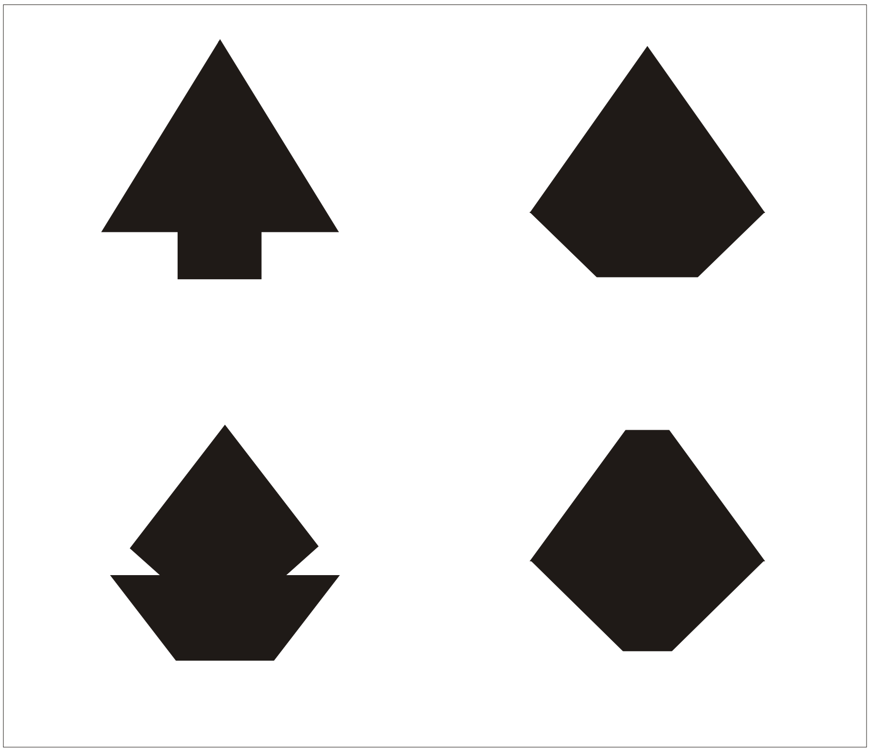
58



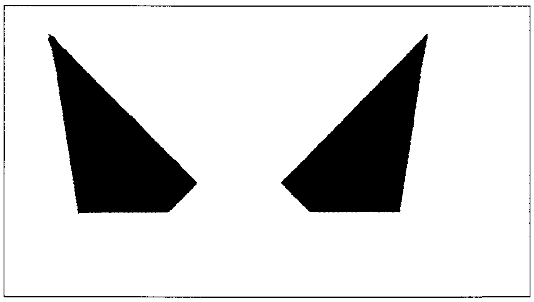
59



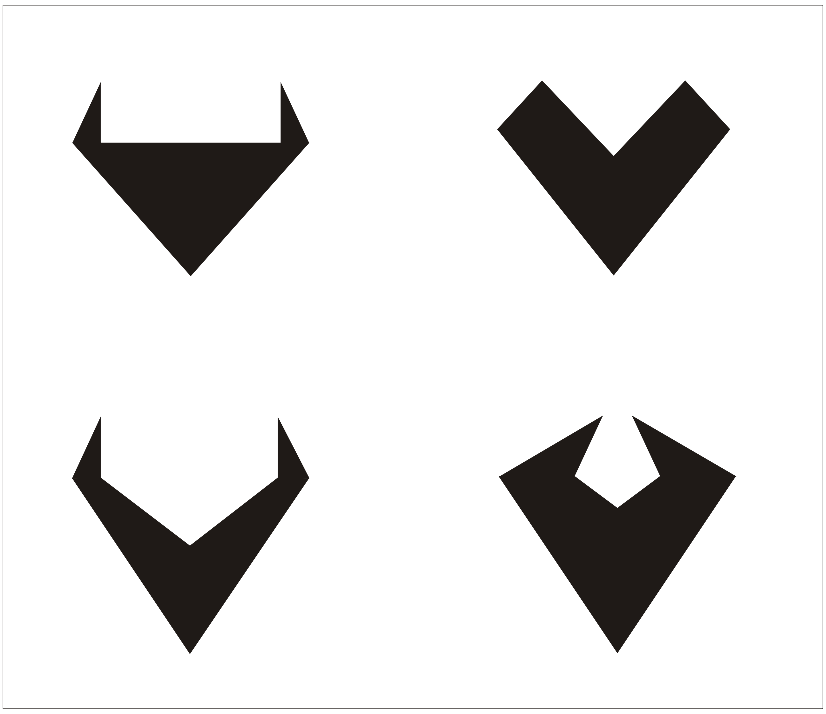
60



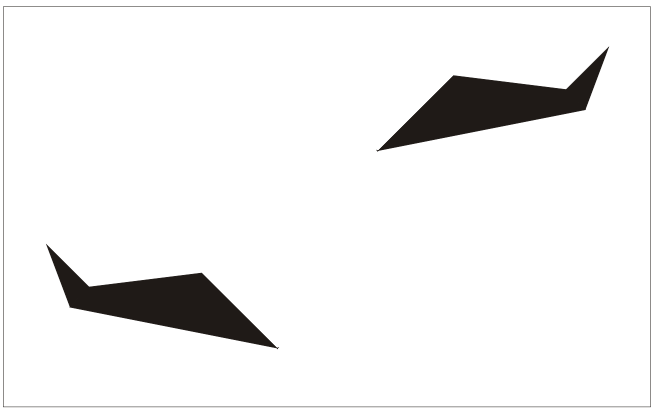
61



62



63



64

8. REFERENCIAS

Ansari, D., Garcia, N., Lucas, E., Hamon, K., & Dhital, B. (2005). Neural correlates of symbolic number processing in children and adults. *Neuroreport*, *16*(16), 1769–1773. https://doi.org/10.1097/01.wnr.0000183905.23396.f1

Ashkenazi, S., Rosenberg-Lee, M., Metcalfe, A., Swigart, A., & Menon, V. (2013). Visuo-spatial working memory is an important source of domain-general vulnerability in the development of arithmetic cognition. *Neuropsychologia*, *51*(11), 2305–17. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2013.06.031

Baddeley, A. (2007). *Working memory, thought, and action* (1st ed.). Oxford: Oxford University Press.

Barker, R. (1968). *Ecological psychology: Concepts and methods for studying the environment of human behavior*. Stanford, California: Stanford University Press.

Barker, R., & Wright, H. (1949). Psychological Ecology and the Problem of Psychosocial Development. *Child Development*, *20*(3), 131–143.

Baroody, A., & Ginsburg, H. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 199–212.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris: Editions du seuil.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*(1), 13–15.

Billett, S. (1996). Situated learning: Bridging sociocultural and cognitive theorising.

Learning and Instruction, *6*(3), 263–280. https://doi.org/10.1016/0959-4752(96)00006-0

Booth, J., & Siegler, R. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, *42*(1), 189–201. https://doi.org/10.1037/0012-1649.41.6.189

Braine, M. (1962). Piaget on reasoning: A methodological critique and alternative proposals. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *27*(2), 41–63.

Braithwaite, D., Goldstone, R., & Maas, H. (2016). Non-formal mechanisms in mathematical cognitive development: The case of arithmetic. *Cognition*, *149*(1), 40–55. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2016.01.004

Bresgi, L., Alexander, D., & Seabi, J. (2017). The predictive relationships between working memory skills within the spatial and verbal domains and mathematical performance of Grade 2 South African learners. *International Journal of Educational Research*, *81*, 1–10. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.10.004

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathematiques*, *7*(2), 33–115.

Byrnes, J., & Wasik, B. (2009). Factors predictive of mathematics achievement in kindergarten, first and third grades: An opportunity-propensity analysis. *Contemporary Educational Psychology*, *34*(2), 167–183. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.01.002

Calderón, S., & Jerez, J. (2012). *Proyecto sé Matemáticas 2*. (Y. Martínez, Ed.). Bogotá, DC.: Ediciones SM.

Casey, B., Dearing, E., Dulaney, A., Heyman, M., & Springer, R. (2014). Young girls' spatial and arithmetic performance: The mediating role of maternal supportive interactions during joint spatial problem solving. *Early Childhood Research Quarterly*, *29*(4), 636–648. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2014.07.005

Caviola, S., Mammarella, I., & Cornoldi, C. (2012). The involvement of working memory in children's exact and approximate mental addition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *112*(2), 141–160. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.02.005

Cheng, Y., & Mix, K. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, *15*(1), 2–11. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4324/9780203324899

Cobb, P. (1987). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 109–124.

Coffield, F. (2000). The structure below the surface. In F. Coffield (Ed.), *The necessity of informal learning* (pp. 1–11). Bristol: The Policy Press.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. *Education* (6th ed., Vol. 55). Routledge. https://doi.org/10.1111/j.1467-8527.2007.00388_4.x

Cohen, N., Eichenbaum, H., Deacedo, B., & Corkin, S. (1985). Different Memory Systems Underlying Acquisition of Procedural and Declarative Knowledge. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *444*(1), 54–71. https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1985.tb37579.x

Creswell, J. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating* *quantitative* (4th ed.). Pearson.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky and Pedagogy*. London: RoutledgeFalmer.

De Smedt, B., Taylor, J., Archibald, L., & Ansari, D. (2010). How is phonological processing related to individual differences in children's arithmetic skills? *Developmental Science*, *13*(3), 508–520. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2009.00897.x

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & Language*, *16*(1), 16–36. https://doi.org/10.1111/1468-0017.00154

Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetical abilities: Implications for psychology, neuroscience and education*. New York: Psychology Press. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4324/9780203324899

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. (R. Duval & A. Sáenz-Ludlow, Eds.) (1st ed.). Bogotá, DC.: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Eco, U. (1988). *Signo*. Barcelona, España.: Editorial Labor.

Eco, U. (1991). *Tratado de Semiótica General* (5th ed.). Bercelona: Editorial Lumen.

Ehrlich, S., Levine, S., & Goldin-Meadow, S. (2006). The importance of gesture in children's spatial reasoning. *Developmental Psychology*, *42*(6), 1259–68. https://doi.org/10.1037/0012-1649.42.6.1259

Eraut, M. (2000). Non-formal learning and tacit knowledge in professional work. *The British Journal of Educational Psychology*, *70*(September), 113–36. https://doi.org/10.1348/000709900158001

Ercikan, K., & Roth, W. (2006). What good is polarizing research into qualitative and quantitative? *Educational Researcher*, *35*(5), 14–23. https://doi.org/10.3102/0013189X035005014

Farmer, G., Verdine, B., Lucca, K., Davies, T., & Dempsey, R. (2013). Putting the pieces together: Spatial skills at age 3 predict to spatial and math performance at age 5. In *Poster presented at the 2013 Meeting of The Society for Research in Child Development Conference*. Seattle, WA.

Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the Learning of Mathematics, Montreal*, *27*(2), 2–7. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2015). Representations in Matematics Education: an onto-semiotic approach. *Jornal Internacional de Estudos Em Educação Matemática*, *2*(1), 58–86.

Frensch, P., & Rünger, D. (2012). Implicit Learning, *12*(1), 13–18. https://doi.org/10.1111/1467-8721.01213

Ganley, C., & Vasilyeva, M. (2011). Sex differences in the relation between math performance, spatial skills, and attitudes. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *32*(4), 235–242. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2011.04.001

Geary, D., Hoard, M., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, *78*(4), 1343–1359. https://doi.org/10.1111/j.1467-

8624.2007.01069.x

Geist, K., Geist, E., & Kuznik, K. (2012). The Patterns of Music. *Young Children*, *67*(1), 74–79.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1986). *The child's understanding of number* (2nd ed.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *22*(2/3), 237, 284. Retrieved from http://www.ugr.es/~batanero/%5Cnhttps://www.instec.cu/maestrias/ingenieria/Biblioteca virtual/01 - Disciplina Ciencias Sociales/Teoría Socio-Política/Enfoque ontosemiótico.pdf

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas*. *Trabajo de investigación presentado para optar a la catedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada*.

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. *Departamento de Didáctica de la Matemática.* Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49–68). Jaén.

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. In *Actas del Segundo Congreso International Virtual* *sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1–2), 127–135.

Godino, J., Fernández, T., Gonzato, M., & Cajaraville, J. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de Las Ciencias*, *30*(2), 109–130.

Godino, J., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the Learning of Elementary Arithmetic Concepts Difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247–265. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9278-x.

Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial*. Editorial de la Universidad de Granada.

Gorard, S. (2006). Towards a judgement-based statistical analysis. *British Journal of Sociology of Education*, *27*(1), 67–80. https://doi.org/10.1080/01425690500376663

Gorard, S. (2013). All evidence is equal: the flaw in statistical reasoning. *Journal of Chemical Information and Modeling*, *53*(9), 1689–1699. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Grabner, R., Ansari, D., Koschutnig, K., Reishofer, G., Ebner, F., & Neuper, C. (2009). To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia*, *47*(2), 604–608. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2008.10.013

Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., & Poliszczuk, D. (2015). Effects of mental rotation training on children's spatial and mathematics performance: A randomized controlled study. *Trends in Neuroscience and Education*, *4*(3), 60–68.

Holloway, I., & Ansari, D. (2010). Developmental Specialization in the Right Intraparietal Sulcus for the Abstract Representation of Numerical Magnitude. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *22*(11), 2627–2637. https://doi.org/10.1162/jocn

Holt, J. (1968). How Children Learn. *The English Journal*, *57*, 589. https://doi.org/10.2307/812676

Jiang, M., Cooper, J., & Alibali, M. (2014). Spatial factors influence arithmetic performance: The case of the minus sign. *Quarterly Journal of Experimental Psychology (2006)*, (May 2014), 1–17. https://doi.org/10.1080/17470218.2014.898669

Johnson, R., & Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, *33*(7), 14–26.

Jordan, N., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The Importance of Number Sense to Mathematics Achievement in First and Third Grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82–88. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Klingberg, T. (2010). Training and plasticity of working memory. *Trends in Cognitive Sciences*, *14*(7), 317–324. https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.05.002

Kucian, K., Aster, M., Loenneker, T., Dietrich, T., & Martin, E. (2008). Development of neural networks for exact and approximate calculation: A FMRI study. *Developmental*

Neuropsychology, *33*(4), 447–473. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1080/87565640802101474

Kyttälä, M., Aunio, P., Lehto, J., & Luit, J. (2003). Visuospatial working memory and early numeracy. *Educational and Child Psychology*, *20*(3), 65–76.

Lachance, J., & Mazzocco, M. (2006). A longitudinal analysis of sex differences in math and spatial skills in primary school age children. *Learning and Individual Differences*, *16*(3), 195–216. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2005.12.001

Larkin, J., & Simon, A. (1987). Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words. *Cognitive Science*, *11*(1), 65–99. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(87)80026-5

Laski, E., Casey, B., Yu, Q., Dulaney, A., Heyman, M., & Dearing, E. (2013). Spatial skills as a predictor of first grade girls' use of higher level arithmetic strategies. *Learning and Individual Differences*, *23*(1), 123–130. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2012.08.001

LeFevre, J., DeStefano, D., Coleman, B., & Shanahan, T. (2005). Mathematical cognition and working memory. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (p. 528). New York: Psychology Press.

Levine, S., Huttenlocher, J., Taylor, A., & Langrock, A. (1999). Early Sex Differences in Spatial Skill. *Developmental Psychology*, *35*(4), 940–949. https://doi.org/10.1037/0012-1649.35.4.940

López, M. (1990). *¿ Sabes enseñar a describir, definir, argumentar?* (1st ed.). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Lowrie, T., Logan, T., & Ramful, A. (2017). Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. *The British Journal of Educational Psychology*. https://doi.org/10.1111/bjep.12142

McKenzie, B., Bull, R., & Grey, C. (2003). The effects of phonological and visual-spatial interference on children's arithmetical performaNCE. *Educational and Child Psychology*, *20*(3), 93–108.

McLean, J., & Hitch, G. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 240–260. https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2516

McNeil, N., & Alibali, M. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, *28*(3), 451–466. https://doi.org/10.1016/j.cogsci.2003.11.002

McNeil, N., & Alibali, M. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, *76*(4), 883–899. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x

McNeil, N., Fuhs, M., Keultjes, M., & Gibson, M. (2011). Influences of problem format and SES on preschoolers' understanding of approximate addition. *Cognitive Development*, *26*(1), 57–71. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2010.08.010

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. (Ministerio de Educación Nacional, Ed.).

MEN. (2010). Competencias ciudadanas. Retrieved September 29, 2017, from http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-235147.html

Messick, S. (1989). Validity. In R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (3rd ed., pp. 13–103). New York: American Council on Education/Macmillan.

Messick, S. (1990). Validity of test interpretation and use. *ETS Research Report Series*, *1*, 1487–1495. Retrieved from http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.2333-8504.1990.tb01343.x/abstract

Mislevy, R. (2008). How Cognitive Science Challenges the Educational Measurement. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, *6*(1–2), 124–141. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1080/15366360802131635

Mix, K., & Cheng, Y. (2012). The Relation between Space and Math: Develomental and Educational Implications. In J. B. Benson (Ed.), *Advances in Child Development and Behavior* (Vol. 42, pp. 197–243). Burlington: Elsevier.

Miyake, A., Friedman, N., & Rettinger, D. (2001). How are visuospatial working memory, executive functioning, and spatial abilities related? A latent-variable analysis. *Journal of Experimental Psychology*, *130*(4), 621–640. https://doi.org/10.1037//0096-3445.130.4.621

Morgan, P., Farkas, G., & Wu, Q. (2009). Five-Year Growth Trajectories of Kindergarten in Mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, *42*(4), 306–321. https://doi.org/10.1177/0022219408331037

Morrison, A., & Chein, J. (2011). Does working memory training work? The promise and challenges of enhancing cognition by training working memory. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(1), 46–60. https://doi.org/10.3758/s13423-010-0034-0

Popescu, T., Krause, B., Terhune, D., Twose, O., Page, T., Humphreys, G., & Cohen

Kadosh, R. (2016). Transcranial random noise stimulation mitigates increased difficulty in an arithmetic learning task. *Neuropsychologia*, *81*(1), 255–264. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2015.12.028

Praet, M., Titeca, D., Ceulemans, A., & Desoete, A. (2013). Language in the prediction of arithmetics in kindergarten and grade 1. *Learning and Individual Differences*, *27*(1), 90–96. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.07.003

Raghubar, K., Barnes, M., & Hecht, S. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 110–122. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.10.005

Rasmussen, C., & Bisanz, J. (2005). Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, *91*(2), 137–157. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.01.004

Rittle-Johnson, B., Wagner Alibali, M., Haverty, L., Heffernan, N., Koedinger, K., Nhouy vanis-vong, A., … Thompson, D. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*, *91*(1), 175–189. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175

Rivera, S., Reiss, A., Eckert, M., & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: Evidence for increased functional specialization in the left inferior parietal cortex. *Cerebral Cortex*, *15*(11), 1779–1790. https://doi.org/10.1093/cercor/bhi055

Robinson, D. (2004). An interview with Gene V. Glass. *Educational Researcher*, *33*(3), 26–30. https://doi.org/10.3102/0013189X033003026

Sáenz-Ludlow, A. (2016). Una cadena colectiva de significación en la conceptualización de fracciones. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 193–235). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Schneider, E., Maruyama, M., Dehaene, S., & Sigman, M. (2012). Eye gaze reveals a fast, parallel extraction of the syntax of arithmetic formulas. *Cognition*, *125*(3), 475–490. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2012.06.015

Schoenfeld, A. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in (mathematics) education* (pp. 435–487). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (2007). Method. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 69–107). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Schunk, D. (1996). *Learning Theories*. New Jersey: Prentice Hall Inc.

Seger, C. (1994). Implicit Learning. *Psychological Bulletin*, *115*(2), 163–196.

Seo, K., & Ginsburg, H. (2003). "You've got to carefully read the math sentence...": Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 161–187). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, *171*(3972), 701–703. https://doi.org/10.1126/science.171.3972.701

Shin, S. (1994). *The logical status of diagrams*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (p. 827-876). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_23

Simmons, F., Willis, C., & Adams, A. (2012). Different components of working memory have different relationships with different mathematical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*(2), 139–55. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.08.011

Stieff, M., & Uttal, D. (2015). How Much Can Spatial Training Improve STEM Achievement? *Educational Psychology Review*, *27*(4), 607–615. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9304-8

Uttal, D., Meadow, N., Tipton, E., Hand, L., Alden, A., Warren, C., & Newcombe, N. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, *139*(2), 352–402. https://doi.org/10.1037/a0028446

Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E., & Van Luit, J. (2015). Verbal and visual-spatial working memory and mathematical ability in different domains throughout primary school. *Memory & Cognition*, *43*(3), 367–78. https://doi.org/10.3758/s13421-014-0480-4

Van Nes, F., & van Eerde, D. (2010). Spatial structuring and the development of number sense: A case study of young children working with blocks. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(3), 145–159. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.08.001

Verdine, B., Irwin, C., Golinkoff, R., & Hirsh-Pasek, K. (2014). Contributions of executive function and spatial skills to preschool mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *126*(1), 37–51. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.02.012

Vukovic, R., & Lesaux, N. (2013). The relationship between linguistic skills and arithmetic knowledge. *Learning and Individual Differences*, *23*(1), 87–91. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2012.10.007

Young, C., Levine, S., & Mix, K. (2014). Linear Estimation and Mental Rotation Predict Children's Early Math Abilities. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*.

Zhang, X. (2016). Linking language, visual-spatial, and executive function skills to number competence in very young Chinese children. *Early Childhood Research Quarterly*, *36*(1), 178–189. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.12.010