UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

SIGNIFICADOS SOBRE LA DERIVADA QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Autor:

Jhonatan Parra Naranjo

Asesor:

Walter Fernando Castro Gordillo

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Enseñanza de las Ciencias y las Artes

Medellín, Colombia

2020

Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios

Jhonatan Parra Naranjo

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Educación

Asesor:
Walter Fernando Castro Gordillo

Línea de Investigación:
Educación Matemática
Grupo de Investigación:
Matemática, Educación y Sociedad (MES)

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación, Departamento de Enseñanza de las Ciencias y las Artes
Medellín, Colombia
2020

Dedicatoria

A mis Padres, Nancy Naranjo y Ariel Parra, quienes siempre me han acompañado y motivado en este proceso formativo, ayudándome a cumplir un sueño más, gracias por inculcar en mí la perseverancia y dedicación, gracias por creer en mí.

A mí prometida Marcela Gómez por su amor y apoyo incondicional, por creer en mi profesión.

A mi gran amigo Luis Fernando Avendaño por su sincera amistad y ejemplo a seguir.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera expresar agradecimiento a mi asesor el *Dr. Walter Fernando Castro Gordillo*, por confiar en mis posibilidades, por sus aportes en el conocimiento y disposición para compartir su experiencia personal y académica, por el apoyo y permanente aliento durante el proceso investigativo. Agradezco su dedicación y perseverancia al trabajo académico, su paciencia, consejos y fino sentido del humor.

A los profesores *Dr. John Henry Durango Urrego y Dr. Carlos Mario Jaramillo López*, agradezco su devoción al trabajo académico, discusiones y aportes realizados a esta investigación.

A los *profesores de la Maestría en Educación Matemática*, en especial a los que participan del Seminario Permanente, por la disposición y conocimientos compartidos durante y para el desarrollo, y culminación del trabajo investigativo.

Agradezco al *Dr. Carlos Mario Jaramillo López, Dr. Gilberto Obando y Dr. René Londoño* por las observaciones y sugerencias realizadas al instrumento de investigación, que permitieron generar una nueva versión de este.

Agradezco a *Sapiencia: Agencia de Educación Superior de Medellín*, por los recursos otorgados para hacer posible mi formación.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

GRÁFICAS

RESUMEN

Esta investigación se interesa por caracterizar significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso universitario de cálculo diferencial, debido a dificultades manifestadas cuando resuelven problemas de cálculo en que interviene la derivada, pues sus múltiples significados y formas de representación pueden estar en la base de las dificultades reportadas (Artigue, 1998, 1995).

La investigación presenta un enfoque cualitativo. Se propone la conformación y aplicación de un cuestionario que permita analizar e identificar prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, objetos matemáticos primarios y posible configuración cognitiva, que posibilita verificar puntos críticos como disparidad de interpretaciones, que requieren procedimientos de "ajuste" de significado y cambios a nivel personal o institucional en cuanto al estudio de la derivada (Godino, 2002).

Para lograr el objetivo central de la investigación, el estudio se llevó a cabo en cuatro momentos: 1) Criterios para la elección de las tareas, apoyados en el significado epistémico global de la derivada (Pino-Fan, 2014) y en investigaciones que se han realizado sobre la enseñanza y el aprendizaje sobre la derivada (Artigue, 1995; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Siyepu, 2015; Fuentealba, 2017); 2) Tareas del cuestionario, donde se presenta para cada tarea una descripción de los significados que pueden o no ser exhibidos; 3) Aplicación del cuestionario a una muestra de 20 estudiantes de diversas carreras y 4) Análisis de datos mediante las herramientas proporcionadas por el Enfoque Onto-semiótico de la instrucción y cognición Matemática (EOS).

Los resultados del trabajo de investigación aportan nuevos conocimientos respecto a los significados que los estudiantes manifiestan sobre la derivada. Además, proporciona perspectivas que permiten el diseño de estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Palabras clave: derivada, significado personal, significado parcial, significado global y configuración.

ABSTRACT

This research is interested in characterizing meanings on the derivative expressed by students who have taken the course of differential calculus at the university level, due to difficulties manifested when solving calculation problems in which the derivative intervenes, since its multiple meanings and forms of representation can be at the base of the reported difficulties (Artigue, 1998, 1995).

The research presents a qualitative approach. The conformation and application of a questionnaire is proposed that allows to analyze and identify mathematical practices carried out by students, primary mathematical objects and possible cognitive configuration, which makes it possible to verify critical points such as conflicts of meaning or disparity of interpretations, which require procedures of "adjustment" of meaning and changes at the personal or institutional level regarding the study of the derivative (Godino, 2002).

To achieve the central objective of the research, the study was carried out in four moments: 1) Criteria for the choice of tasks, supported by the global epistemic meaning of the derivative (Pino-Fan, 2014) and in the research that they have done about teaching and learning about the derivative (Artigue, 1995; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Siyepu, 2015; Fuentealba, 2017); 2) Tasks of the questionnaire, where a description of the meanings that may or may not be displayed is presented for each task; 3) Application of the questionnaire to a sample of 20 students from different areas of knowledge and 4) Data analysis using the tools provided by the OSA (Ontosemiotic approach).

The results of the research provide new knowledge regarding the meanings that students express about the derivative. In addition, it provides perspectives that allow the design of strategies for teaching and learning the derivative.

Keywords: derivative, personal meaning, partial meaning, global meaning and configuration.

1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación se refiere a significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario, debido a que la enseñanza que enfatiza o preferencia significados parciales de la derivada como lo son aspectos procedimentales y memorísticos puede afectar la formación matemática futura y constituirse en un impedimento para acceder a la educación superior, y ser eventualmente un factor de deserción universitaria debido a que dificulta la construcción de nuevos conocimientos (Gamboa, Castillo y Hidalgo, 2019) y finalmente como lo reporta Vergel-Ortega, Hernández y Rincón-Leal (2016) "los problemas de enseñanza-aprendizaje de cálculo, son persistentes por lo que es alarmante la deserción" (p. 34)

Para analizar esta problemática es necesario reconocer diversos significados de la derivada, pues tiene como efecto, que los estudiantes logren una comprensión completa de la derivada, que es un concepto fundamental para abordar el cálculo integral, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, física, y otros cursos propuestos en primeros semestres de carreras como licenciaturas en matemáticas, física, ingenierías, contaduría, economía, química, entre otras.

La investigación de esta problemática se realizó por el interés de aportar a la investigación en Educación Matemática, respecto al efecto negativo que conlleva en los estudiantes universitarios no conocer diversos significados sobre la derivada. Algunos de estos efectos son la reprobación, deserción, costos y pérdida de oportunidades (Flores, Valencia, Dávila y García, 2008).

El trabajo de investigación tiene un carácter cualitativo y se abordó en cuatro momentos; el primer momento, llamado, *Criterios para la elección de las tareas*, apoyados en el significado epistémico global de la derivada (Pino-Fan, 2014) y en las investigaciones que se han realizado sobre la enseñanza y el aprendizaje sobre la derivada (Artigue, 1995; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Siyepu, 2015; Fuentealba, 2017) el cual permite que las tareas seleccionadas pongan en juego diversos significados sobre la derivada, y que permitan obtener información a partir de diferentes representaciones y respectivos significados; descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular; tanto para la función como para su derivada.

En el segundo momento, denominado, *Tareas del Cuestionario,* se presenta para cada tarea una descripción de los significados que pueden o no ser exhibidos. Se expone el análisis del contenido evaluado por cada tarea por medio de un "análisis onto-semiótico" mediante las herramientas proporcionadas por el EOS.

Un tercer momento, denominado, *Aplicación del Cuestionario*, consistió en el trabajo de campo, realizado con 20 estudiantes que cursaron y aprobaron cálculo diferencial. Los participantes pertenecen a diversas carreras, tales como ingenierías y ciencias de la economía. Para su elección se tuvieron en cuenta la motivación e interés de los estudiantes por participar del proceso investigativo.

El cuarto momento, consistió en el *Análisis de Datos* mediante las herramientas proporcionadas por el EOS. Los datos obtenidos mediante el cuestionario, corresponden a las soluciones presentadas por los estudiantes a cada tarea propuesta, que fueron analizadas a partir de los objetos matemáticos primarios y prácticas matemáticas.

El propósito de la investigación es caracterizar significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario, que se logró analizando prácticas matemáticas de los estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario, identificando objetos matemáticos primarios emergentes de las prácticas matemáticas y posible configuración cognitiva, y finalmente, estableciendo significados personales sobre la derivada.

El Capítulo 1, *Planteamiento del problema*, presenta la problemática que define el interés por realizar la investigación, se sustenta en referentes teóricos y algunos antecedentes que brindan significación al trabajo de investigación y permiten relevancia a la pregunta de investigación *¿Cuáles significados sobre la derivada manifiestan* *estudiantes que han cursado cálculo diferencial?* En este capítulo se definen la pregunta y el objetivo de la investigación.

El Capítulo 2, *Marco teórico*, enuncia elementos teóricos y conceptuales, propios del modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007), asociado con la pregunta y los objetivos de investigación. Estos elementos orientan la postura personal del investigador, frente al problema de investigación.

El Capítulo 3, *Metodología*, describe el enfoque, el carácter cualitativo de la investigación, el método, y el cuestionario (instrumento) empleado, para recoger la información, cumplir los objetivos y resolver la pregunta de investigación. También se presenta la descripción de las tareas propuestas a los estudiantes.

En el Capítulo 4, *Análisis*, se interpreta cualitativamente la información de las soluciones propuestas por los estudiantes en los cuestionarios 1 y 2, mediante el Enfoque Onto-Semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). También se realiza la caracterización de los significados de los estudiantes sobre la derivada, análisis de las prácticas matemáticas e identificación de los objetos matemáticos primarios emergentes de las prácticas matemáticas y posible configuración cognitiva.

En el Capítulo 5, *Conclusiones*, se presentan los resultados obtenidos en el proceso investigativo, se da respuesta a la pregunta de investigación y se informa la consecución de los objetivos de la investigación. También se enuncian algunas propuestas para futuras investigaciones, relacionadas con el problema de esta investigación.

1.1. Planteamiento del problema

Durante casi 20 años, la investigación en Educación Matemática (Artigue, 1998, 1995; Font, 2005; Moreno, 2005; Ordóñez y Buendía, 2007; Renata, 2013; Fuentealba, Badillo y Sánchez, 2015; Castro y Cadavid, 2016) ha indagado sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de nivel universitario, especialmente del cálculo, debido a que este es la base para el desarrollo profesional del estudiante en carreras en las que la matemática puede o no ser central, sin embargo, se encuentra presente en diversos planes de estudio (Camarena, 2009; Renata, 2013). Las investigaciones reportadas permiten identificar algunas dificultades manifestadas por estudiantes, como por ejemplo la falta de interés, debido a la brecha entre "la realidad del estudiante y su entorno" y otros cursos ofrecidos en las carreras universitarias (Camarena, 2010). También se reportan informes sobre avances en los procesos de enseñanza que abordan algunas dificultades en el aprendizaje (Artigue, 2003; Vasco, 2006; Camarena, 2009; Camarena, 2010).

El cálculo fue un gran logro en el siglo XVII, su formalización fue un acontecimiento significativo en la historia de las matemáticas, debido a que ayudó a resolver algunos problemas de la ciencia, tales como mecánica celeste, física del movimiento, entre otros, y ha servido desde entonces para la investigación de problemas científicos.

El cálculo ayudó a estudiar el movimiento, antes de su formalización no existía una herramienta para estudiar el movimiento y la variación, promedio e instantánea, pero con el cálculo se logró describir el movimiento y estudiar la dinámica del mismo. El cálculo fue fundamental para estudiar, modelar, resolver problemas y lograr aplicaciones en las ciencias exactas y naturales. Flores, Valencia, Dávila y García (2008) afirman:

> El conocimiento y manejo del cálculo marca una diferencia cualitativa muy importante en la formación de una persona y en su capacidad para utilizar las matemáticas en otras ciencias y la ingeniería. Podemos afirmar, sin lugar a dudas,

que un buen curso de cálculo cambia la percepción del estudiante universitario. (p. 7)

Con la inclusión del cálculo en los planes de estudio de carreras tanto técnicas como científicas surge el problema didáctico de su enseñanza y de su aprendizaje. El cálculo es una herramienta que debe poder ser usada por los futuros profesionales para estudiar y modelar problemas de sus campos de estudio (Romo, 2009). Es así, que la enseñanza del cálculo es un desafío para la educación matemática actual, tanto para docentes como para estudiantes. Sin embargo, la enseñanza del cálculo se tropieza con la preferencia por el conocimiento procedimental (Moreno, 2005; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Pino-Fan, Godino y Font, 2011) sobre el conocimiento conceptual. Diversos estudios (García y Dolores, 2012; Klymchuk, Zverkova, Gruenwald, y Sauerbier, 2010) reportan dificultades de estudiantes cuando aprenden cálculo. Vrancken, Engler, y Müller (2012) informan dificultadas manifestadas por estudiantes cuando intentan utilizar los conceptos del cálculo en la solución de problemas en áreas específicas de sus carreras.

Existen múltiples factores que inciden en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo en bachillerato y universidad, por tal razón se estudian algunas dificultades expuestas en investigaciones y las estrategias empleadas para reducirlas.

Hitt (2003) manifiesta que existen temas que están relacionados con el cálculo, y el manejo incorrecto de algunos de sus subconceptos, obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios del cálculo, como son, el concepto de función, límite, máximos y mínimos, continuidad, derivada e integral, que genera limitaciones para realizar aplicaciones del cálculo. Para brindar una aproximación a la solución se propone la visualización matemática, que se centra en procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, o computadora, generadas a partir de diferentes representaciones matemáticas promoviendo interacción entre estas, para una mejor comprensión de los conceptos involucrados.

Sanabria (2013) refiere a problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo debido a la transición Álgebra-Cálculo, manifiesta que no existe un desarrollo continuo y regular, ocasionando conflictos semióticos en el paso del algebra escolar al cálculo diferencial (Artigue,1995). Para aportar a este problema se han llevado a cabo reformas curriculares, implementación de tecnología en el aula e innovaciones didácticas, sin embargo, la comprensión del cálculo sigue siendo un problema en la educación matemática. Sanabria (2013) propone estudiar y clasificar los conceptos de número, igualdad, álgebra, función y límite a partir de la detección de dificultades, obstáculos y rupturas, y su clasificación en semióticos, didácticos, epistemológicos, culturales, entre otros, para fortalecer nociones elementales y conceptos previos al aprendizaje del cálculo diferencial.

La tendencia a enseñar el cálculo de forma algorítmica, es asumida como no acertada, iniciar con métodos rigurosos de demostración, y con este método, evaluar los estudiantes genera un aprendizaje limitado. Para hacer frente a este problema se proponen problemas contextualizados con la realidad del estudiante y aplicaciones tecnológicas; software que facilite las representaciones gráficas y algebraicas de las nociones del cálculo (Artigue, 1995; Moreno, 2005).

Diversas investigaciones (Artigue 1995, 1998; Hitt, 2003; Moreno, 2005; Font, 2005; Sanabria, 2013; Vrancken, 2014; Hitt, 2018) reportan sobre la dificultad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas-cálculo, principalmente porque se realiza fuera de contexto de la carrera profesional del estudiante, además de que la enseñanza se centra en una práctica algorítmica o en la aplicación de métodos para realizar demostraciones y ejercicios (Renata, 2013).

Por ejemplo, en el caso de las ingenierías, el estudiante debe lograr modelar problemas de ingeniería, se deben enlazar los conocimientos que recibió en los cursos de matemáticas con las asignaturas propias de la ingeniería, de lo contrario, se crearía un sentimiento de frustración.

Para reducir la dificultad expuesta Camarena (2010) propone una teoría educativa denominada “La Matemáticas en el Contexto de las Ciencias” esta aborda la problemática del aprendizaje y enseñanza de la matemática, y reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, y entre la matemática y las competencias laborales y profesionales, así como la vinculación con actividades de la vida cotidiana, que fortalece el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos, debido a que el estudiante debe transitar entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir y asirse del conocimiento.

La enseñanza y aprendizaje del cálculo es un campo denso dentro de la investigación en educación matemática, por lo cual el trabajo investigativo se centra en la derivada, debido a que es uno de los conceptos fundamentales en el estudio del cálculo (Pino-Fan, 2011, Sánchez-Matamoros, García y Llinares 2006; Hitt, 2003), y su estudio forma parte de los syllabus matemáticos en las carreras técnicas y científicas (Romo, 2009) en el mundo. Sus múltiples significados y formas de representación pueden estar en la base de las dificultades reportadas, por ejemplo, Artigue (1998, 1995) informa que los estudiantes operan de forma algorítmica cuando resuelven problemas que incluyen la derivada, y resalta la dificultad de los estudiantes para relacionar diferentes representaciones y símbolos.

Algunos estudios reportan que la enseñanza de la derivada ha tomado giros indeseables (Moreno, 2005), tal como la algebrización de su estudio, que la reduce a procedimientos algorítmicos que no incluyen aspectos conceptuales. Se prioriza el uso de fórmulas y procedimientos computacionales para obtener expresiones algebraicas equivalentes. No reconocer otros significados de la derivada, tiene como efecto que los estudiantes no logren una comprensión completa de la derivada, que es un concepto fundamental para abordar el cálculo integral, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, física, y otros cursos propuestos en primeros semestres de carreras como licenciaturas en matemáticas, física, ingenierías, contaduría, economía, química, entre otras. Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros (2015) destacan que la enseñanza centrada en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo ha afectado la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes. Font y Godino (2006) reportan que los estudiantes solo reconocen algunos significados parciales sobre la derivada.

1.2. Problema

La enseñanza que enfatiza usualmente aspectos procedimentales y memorísticos puede afectar la formación matemática futura y constituirse en un impedimento para acceder a la educación superior, y ser eventualmente un factor de deserción universitaria debido a que dificulta la construcción de nuevos conocimientos (Gamboa, Castillo y Hidalgo, 2019) y finalmente como lo reporta Vergel-Ortega, Hernández y Rincón-Leal (2016) “los problemas de enseñanza-aprendizaje de cálculo, son persistentes por lo que es alarmante la deserción” (p. 34). Alrededor del 36 % de los estudiantes que desertan de sus estudios superiores lo hacen al final de su primer año (Sapiencia, 2017). Gaona (2013) reporta que en el Instituto Tecnológico de Querétaro, el 80% de los estudiantes, de las carreras de ingeniería, reprueban la materia de cálculo diferencial en el primer semestre, y aproximadamente el 40% se ve obligado por reglamento a dejar sus estudios en el tercer semestre, debido a la reprobación de esa materia. Mundialmente, la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial presentan una problemática debido a los altos índices de reprobación y deserción, tanto en los países industrializados como en los países en desarrollo. Se reportan índices de reprobación y deserción superiores al 50%, lo que significa, costos y pérdida de oportunidades (Flores, Valencia, Dávila, García 2008).

Por otra parte, Castro y Cadavid (2016) reportan que de aproximadamente 1200 estudiantes que toman el curso de cálculo diferencial, cada semestre en diferentes carreras de la Universidad Tecnológica de Pereira, solo es aprobado por el 56% de los estudiantes, lo cual representa altos índices de reprobación en los cursos de matemáticas que incluyen cálculo diferencial. Botello y Parada (2013) reportan que alrededor del 70% de los estudiantes de ingenierías y otras carreras afines en la Universidad Industrial de Santander que matriculan cálculo I, la reprueban hasta en cuatro ocasiones, lo que genera deserción en esta asignatura.

Diversas universidades han incluido el estudio de la derivada a partir de los primeros cursos de matemática como por ejemplo la Universidad de Tecnología en Western Cape, Sudáfrica, (Siyepu, 2015), la Universidad de Tabuk, Arabia Saudita, (Albalawi, 2018), Universidad tecnológica de Pereira (Castro y Cadavid 2016), Instituto Tecnológico de Querétaro (Gaona, 2013) y la Universidad Industrial de Santander (Botello y Parada, 2013). Por lo cual según lo reportado en SAPIDES (2013) las falencias en las competencias académicas respecto a los planes de estudio, en el caso de las ingenierías, generan altos índices de deserción.

Cabe preguntarse si el cálculo diferencial ubicado en los primeros semestres y la complejidad latente en la enseñanza y aprendizaje de este, se encuentra relacionado con la deserción. Aunque son varias las razones por las cuales un estudiante puede o no desertar se asume que la deserción ocurre por razones académicas, con lo cual un estudio que investigue sobre los significados que surgen durante el estudio del cálculo diferencial podría ser útil para paliar los efectos negativos de las pérdidas de cursos originados en una comprensión deficiente de los objetos matemáticos.

Otero, Bolívar y Palacios (2016) informan que la asignatura que presenta mayor deserción es cálculo diferencial, con un total del 16% de los estudiantes que la cursan por primera vez, en promedio 1 de cada 5 estudiantes se retira del programa académico, igualmente Hernández-Quintana y Cuevas (2015) exponen que el problema de reprobación en el Instituto Tecnológico de Chihuahua II debido a la asignatura de cálculo diferencial no desciende. Hay reportes internacionales (Bressoud, Mesa, y Rasmussen, 2015) en los que se informa que el cálculo es un filtro para el acceso de amplios sectores estudiantiles a las carreras técnicas y a las carreras profesionales. Lo presentado exhibe que el efecto negativo de una comprensión deficiente de las ideas y procedimientos del cálculo, en específico, de la derivada es indeseable en los índices de aprobación y permanencia estudiantil en primeros cursos universitarios.

Una manera de disminuir el efecto negativo descrito anteriormente refiere a indagar por los *significados*[1] que los estudiantes, que han tomado y aprobado cursos de cálculo, manifiestan, y contrastarlos con los *significados de referencia institucional*[2], para adecuar los procesos de formación matemática, en particular, con énfasis en el cálculo y *la derivada*[3]. Estudiar los significados que sobre la derivada tienen estudiantes universitarios puede ayudar a identificar inconsistencia entre los significados aprendidos por los estudiantes y los significados de referencia institucional que se utilizan para aprobar o reprobar a los estudiantes cuando toman cursos matemáticos de nivel superior o cuando toman cursos durante los años vocacionales. Si bien existen otros factores que afectan la permanencia de los estudiantes en el curso, en la carrera o en la universidad, nuestro estudio enfatiza la variable cognitiva.

Se considera posible disminuir las tasas de deserción y aumentar tanto la retención como la graduación. Se puede suponer que una buena experiencia académica durante los primeros semestres de la universidad es un predictor para la permanencia de los estudiantes en la universidad (Torres y Zúñiga, 2012) ya que los costos económicos, tanto para las universidades como para el sistema universitario público y privado, derivados de deserción estudiantil ascienden a US$11.1 billones de dólares al año (Carvajal, López y Trejos 2016).

[1] *Significados* de los estudiantes refiere a la totalidad del sistema de prácticas matemáticas que el sujeto manifiesta o expresa, respecto a la derivada, a propósito de las evaluaciones propuestas (Godino, Batanero y Font, 2007).

[2] *Significados de referencia institucional* refiere al sistema de prácticas que se usa como referencia para construir el significado pretendido por la institución, respecto a la derivada. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico de la derivada (Godino, Batanero y Font, 2007).

[3] *La derivada* será comprendida a partir de nueve sistemas de prácticas, dentro de los cuales cada uno lleva asociado una configuración epistémica (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales) formadas por elementos matemáticos primarios (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones para constituir un significado parcial de la derivada (Godino, Batanero y Font, 2007: Pino-Fan, 2014).

1.3. Antecedentes

La derivada ha sido objeto de numerosas investigaciones, y el cálculo como curso fundamental en la ingeniería (Londoño, Kakes, y Decena, 2013; Tallman, Carlson, Bressoud y Pearson, 2016; Badillo, Fuentealba, Sánchez, 2015, Sanchez-Matamoros, García y Llinares, 2008, Pinto y Parraguez, 2015, 2016; Ávila, Ávila, Bravo, 2016; Brijlall, 2013; Ordóñez y Buendía, 2007; Cabezas y Mendoza, 2016; Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2018). A continuación, se presentan investigaciones agrupadas por temáticas de indagación cuyo objeto de estudio refiere a la derivada.

1.3.1. Conocimiento procedimental de la derivada. La investigación de Londoño, Kakes y Decena, (2013) reporta sobre la resolución de problemas y conocimientos sobre la derivada. Exponen que los estudiantes tienen dificultades para aplicar teoremas y definiciones tales como puntos críticos, función creciente y decreciente y criterios de la primera derivada.

Tallman, Carlson, Bressoud y Pearson (2016) caracterizan los exámenes finales de cálculo I en colegios y universidades de EE. UU. Clasifican las preguntas del examen individual de acuerdo con la demanda cognitiva requerida para responder, la representación del enunciado de la tarea, la solución, y el formato de las preguntas. Reportan siete categorías intelectuales: recordar, recordar y aplicar el procedimiento, comprender, aplicar la comprensión, analizar, evaluar y crear, la representación del ítem incluye las categorías: aplicado / modelado, simbólico, tabular, gráfico, definición / teorema, prueba, ejemplo / contraejemplo y explicación, y formato del ítem con las categorías opción múltiple, respuesta corta y amplia abierta.

Los autores reportan algunas limitaciones acerca de la instrucción recibida por los estudiantes que desarrollan el examen, además las tareas que requieren comprensión de un concepto particular son susceptibles de ser procesadas si el método de solución se práctica de forma repetitiva. Los departamentos de matemáticas pretenden reducir las tasas de fracaso en los cursos introductorios, esta pretensión se manifiesta en el diseño de exámenes poco exigentes cognitivamente, Además, los docentes proponen tareas orientadas conceptualmente para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, que no se refleja en los exámenes que están diseñados para evaluar los resultados del aprendizaje.

Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros (2015) reportan que la enseñanza centrada en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, ha afectado la comprensión del concepto de derivada; consideran que algunos significados de la derivada se pueden representar en dos dualidades: analítico/gráfico y puntual/global. Afirman que es necesario considerar los elementos matemáticos, los modos de representación y las relaciones lógicas que se establecen entre dichos elementos para caracterizar la derivada.

Pinto y Parraguez (2015) afirman que el tratamiento algorítmico no beneficia a los estudiantes en los primeros años de universidad. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) exponen que es importante analizar la comprensión del concepto de derivada y cómo se desarrolla, debido a la falta de información que ayude a describir el desarrollo de la comprensión de la derivada. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006, 2008) resaltan la dificultad para aprender sobre la derivada, debido a que los estudiantes no han construido significados adecuados sobre el concepto de derivada, lo cual significa que la construcción de un significado parcial de la derivada puede generar dificultades en el desempeño en cursos de cálculo, además, los estudiantes pueden presentar concepciones previas correctas o incorrectas de determinados conceptos, que están representados de forma verbal, gráfica, tabular y simbólica que influyen en la construcción de los significados de los estudiantes. Es necesario comprender los procesos por medio de los cuales los estudiantes dotan de significado al objeto matemático derivada.

1.3.2. Dificultades en la comprensión de la derivada. Sánchez-Matamoros (2014) informa que la comprensión de la derivada se dificulta debido a la presencia de diferentes acepciones, o significados, tales como: pendiente de la tangente a la curva, límite del cociente incremental, carácter puntual (derivada en un punto), global, relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada y las relaciones entre f' y f''.

Los autores intentan caracterizar tanto niveles de desarrollo de la comprensión de la derivada como la naturaleza del concepto. Consideran que las representaciones son factores relevantes para establecer relaciones entre los elementos de la derivada, concretamente "la «síntesis» de la información gráfica y analítica es considerada una característica del nivel de desarrollo de la comprensión de la derivada" (Sánchez-Matamoros, 2014, p. 42).

Siyepu (2015) presenta un análisis de los errores exhibidos por estudiantes de matemáticas inscritos en Ingeniería Química, cuando calculan derivadas de funciones trigonométricas, y afirma que el concepto de derivada se puede representar, gráficamente, como la pendiente de una línea tangente a la curva en un punto; verbalmente, como la tasa de cambio instantánea; físicamente, como velocidad y simbólicamente, como el límite del cociente de diferencia. Los estudiantes de cálculo se inclinan a operar con símbolos y realizar procedimientos erróneos, que no están respaldados por una comprensión conceptual, que genera errores en la interpretación y por ende en las relaciones que se presentan en un problema, los resultados arrojaron poco acercamiento con los signos operacionales básicos, para tratar de forma algorítmica las funciones trigonométricas ocasionando dificultades para comprender conceptos avanzados como la derivada a nivel universitario.

Jojo, Maharaj y Brijlall (2012) reportan dificultades para la composición y descomposición de funciones, que afecta su comprensión de la regla de la cadena. Los estudios anteriores informan sobre los efectos negativos, sobre el aprendizaje de la derivada, cuando se preferencia el tratamiento algorítmico, sin embargo, existen otros factores como cursos de álgebra y trigonometría, y temas sobre funciones y límites, que pueden afectar el aprendizaje de la derivada si son abordados correctamente, de lo contrario se pueden prever algunas dificultades.

1.3.3. Representación simbólica, gráfica y numérica de la derivada. Santos y Thomas (2003) consideran que la representación es fundamental para la comprensión de la matemática. Para estos autores la comprensión refiere a representar un objeto matemático de 'diferentes maneras', que expone diferentes significados, por lo cual la formación de representaciones múltiples fomenta la comprensión significativa, en tanto que ofrece diversos significados del mismo objeto matemático.

González y Radillo (2014) informan sobre las representaciones semióticas que consideran pertinentes para la enseñanza de la derivada de una función, y que según su investigación, fortalecen y complementan los significados matemáticos. Lo anterior se soporta en la necesidad de diversas representaciones y relaciones de un objeto matemático para mejorar la comprensión, en este caso de la derivada, debido a que la solución de un problema requiere traducciones entre las representaciones, como por ejemplo pasar de una representación numérica a tabular. En ocasiones es conveniente percibir que la función x^3 es derivable en $x = 0$ mediante su representación gráfica que por su representación simbólica.

Hähkiöniemi (2004) afirma que los estudiantes, mediante las representaciones perceptivas como la pendiente de la tangente y la tasa de cambio, pueden comprender el concepto de derivada. Esto mediante interacciones entre las representaciones internas y externas que manifiestan por medio de producciones y representaciones externas, en otras palabras, construcciones mentales de la realidad percibida y relaciones cada vez más acertadas entre los significados externos e internos, en este caso de la función y la función derivada.

Los autores referidos informan sobre aspectos relacionados con la comprensión estudiantil y sobre los significados de la derivada. Sus hallazgos son importantes en tanto que el cálculo está en la base de la explicación de modelos de crecimiento poblacional, circuitos eléctricos, estabilidad de soluciones numéricas, reacciones químicas, modelos de competencia de mercados, etc., con lo cual su estudio es un requisito para los estudiantes de la mayoría de carreras universitarias. Se espera que los estudiantes sean expuestos a un significado holístico de referencia para la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) y prepararlos para reconocer la derivada y usarla tanto en diversos contextos intra-matemáticos como extra-matemáticos (Font y Godino, 2006).

Significado ‘holístico’ refiere a exhibir el conjunto de significados asociados a la derivada. Dicho de otra manera, representación, relación y aplicación simbólica, gráfica y numérica de la derivada (Representaciones perceptivas y simbólicas), a condición de que llegados a este punto se fomente una sólida formación matemática, debido a que es necesaria para cualquier profesional (Romo, 2009) en cuanto a la importancia de desarrollar competencias profesionales y laborales en los estudiantes y proponer o mejorar estrategias para la enseñanza del cálculo por ser una herramienta importante para la formación (Ruiz, 2009) conviene identificar los significados manifestados por estudiantes, que han tomado el curso de cálculo diferencial.

Determinar el conjunto de significados manifestados por los estudiantes respecto a la derivada, es importante para que las instituciones que participan en la investigación reconozcan los tipos de significados que preferencia en sus cursos, y en consecuencia propongan modificaciones para tales cursos, si fuera el caso, para así mejorar la enseñanza y el aprendizaje y se reduzca posiblemente la deserción. La adecuación de los significados estudiados con los usos de la derivada, que da cuenta de diversas interpretaciones, es coherente con una formación matemática que atienda a usos intra y extra-matemáticos (Font y Godino, 2006).

Por lo tanto, se establece la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles significados sobre la derivada manifiestan estudiantes que han cursado cálculo diferencial?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Caracterizar significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario.

1.4.2. Objetivos específicos

- Analizar prácticas matemáticas de los estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario.
- Identificar objetos matemáticos primarios emergentes de las prácticas matemáticas y posible configuración cognitiva.

2. MARCO TEÓRICO

Para el logro de los objetivos propuestos, en esta investigación se ha adoptado el modelo teórico conocido como enfoque Onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007) para definir el sistema de prácticas personales e institucionales como "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 334), tales prácticas pueden ser realizadas por una persona o dentro del contexto de una institución, así las prácticas institucionales y personales son definidas por Godino y Batanero (1994) como "El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I" (p. 337), y "Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación Pp(C)" (p. 339).

El EOS adopta un matiz pragmático en cuanto los objetos matemáticos y el significado de estos objetos se encuentran vinculados con los problemas y las actividades que se realizan para su solución, ya que son considerados como símbolos de unidades culturales ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos dentro de una institución. Los tipos de significados que se proponen dentro de una institución (Godino, Batanero y Font, 2007) son:

Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas implementadas efectivamente por el docente.

Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

> *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. (p. 5)

Respecto a los significados personales (Godino, Batanero y Font, 2007) proponen los siguientes:

> *Global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales en las que estudiantes logran manifestar potencial respecto a objetos matemáticos.
> *Declarado*: da cuenta de las prácticas expresadas efectivamente a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluye tanto las correctas como las incorrectas a partir del punto de vista institucional.
> *Logrado*: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen. (p. 5)

2.1. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos, como símbolos, gráficas etc., y no ostensivos como proposiciones y conceptos que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma gráfica, oral textual o incluso gestual. De los sistemas de práctica matemática emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. El EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007):

Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,…).

Situaciones-Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios,…).

Conceptos-Definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada,…).

Proposiciones (enunciados sobre conceptos,…).

Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…).

Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,…). (p. 7)

Los seis tipos de entidades primarias mencionadas anteriormente se organizan en entidades más complejas, como teorías etc., amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática, además, están relacionados entre sí formando redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas, en el EOS estas relaciones se conocen con el nombre de configuración personal (cognitiva) e institucional (epistémica).

Se considera una entidad primaria como relativa, pues media entre entidades funcionales y relativas a los usos del lenguaje como marcos institucionales y contextos de uso, donde cada objeto de acuerdo con el nivel de análisis puede estar compuesto por entidades de los distintos tipos (Godino, Batanero y Font, 2007).

2.2. Significados y tipos de significados

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos desde una perspectiva pragmática, en el que los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales emergentes de un sistema prácticas o sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que evolucionan con el tiempo. El significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas, que una persona o institución realiza ligada a situaciones problema en la cual el objeto interviene (Godino, Batanero y Font, 2007) por lo cual el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal. Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera: “Significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado” (p. 340) y “Significado de un objeto personal Op es el sistema de prácticas personales de una persona P para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado” (p. 341).

Con respecto al objeto derivada, el significado que le atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas matemáticas que lleve a cabo la institución y se diferencia al significado subyacente de las prácticas matemáticas de otra institución.

Los sistemas de prácticas matemáticas se analizan desde dos puntos de vista, el primero considera las prácticas y la faceta personal de un sujeto, y el segundo considera las prácticas y la faceta institucional. Cuando esta noción se aplica a la descripción de conocimientos de un sujeto particular se debe diferenciar entre un sistema global de prácticas matemáticas y uno de prácticas institucionales. Las primeras las pone en juego un sujeto en referencia a un objeto matemático, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional, mientras que las segundas refieren a diferenciar entre las prácticas implementadas efectivamente, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia de las logradas referidas a las pautas institucionales establecidas.

2.3. Dimensiones de los objetos matemáticos

Los objetos matemáticos que intervienen y emergen de la práctica matemática pueden ser considerados a partir de las dimensiones duales Personal – institucional, Ostensivo – no ostensivo, Expresión – contenido, Extensivo – intensivo, Unitario – sistémico (Godino, 2002). Estas facetas se presentan de manera dual y dialéctica. Se consideran como cualidades atribuibles a los objetos matemáticos primarios, que habilita diferentes “miradas” de los objetos matemáticos. La Figura 1 presenta las diversas nociones teóricas descritas. La investigación actual se centra en las dimensiones; Personal – institucional, Ostensivo – no ostensivo, Expresión – contenido, propuestas por Godino (2002).

2.3.1. Personal – institucional. Si se trata de la manifestación de un sujeto, hablamos de objetos personales, al ser portadores de rasgos de su conocimiento, por el contrario si se trata de documentos curriculares, libros de texto o explicaciones en clase por parte del profesor, se consideran objetos institucionales, sin embargo, las interacciones entre los estudiantes que conforman un grupo pueden generar una regulación interna, produciéndose o no acoplamientos, que permite obtener información acerca de la referencia institucional a partir de las manifestaciones de uno o varios estudiantes.

2.3.2. Ostensivo – no ostensivo. Los objetos matemáticos tienen una faceta ostensiva, esto refiere a lo perceptible, mediante entidades lingüísticas (escritura, gráficas, sonidos, gestos, notaciones, símbolos) que permiten a los no ostensivos su constitución y funcionamiento. Los objetos institucionales y personales tienen naturaleza no ostensiva, pero que mediante el juego del lenguaje se posibilitan en la práctica matemática.

2.3.3. Expresión – contenido. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. La relación se instaura entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio como conceptos y proposiciones.

Figura 1: Dimensiones de los objetos matemáticos

Fuente: Tomada de Font (2005, p. 115)

2.4. Significado epistémico global de la derivada

La derivada surgió en la historia para tratar básicamente de resolver tres tipos de problemáticas: 1) problemas sobre tangentes, 2) problemas sobre máximos y mínimos, y 3) problemas sobre velocidades (Pino-Fan, 2014), sin embargo, estas problemáticas no siempre fueron estudiadas con las mismas técnicas, y no siempre con el grado de generalización que se conoce actualmente, por ejemplo las fluxiones; por lo cual, la noción de *configuración epistémica* proporcionada por el EOS permite la identificación y descripción de los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada. Las prácticas se presentan en la solución de problemas, es decir, identificar el significado parcial o significado global de referencia de la derivada asociado a determinada configuración de objetos y procesos, por lo cual, el conjunto de significados del objeto derivada subyacentes a las distintas configuraciones (significados parciales) conformarán el significado epistémico global para el objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino, Castro, Godino y Font, 2013).

El significado global de referencia se define a partir del significado global (también denominado significado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático) (Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

Mediante una revisión histórico documental a partir de la matemática griega hasta el siglo XX, realizada por Pino-Fan, Godino y Font (2011) se efectuó un análisis de los objetos matemáticos primarios intervinientes en los distintos problemas que fueron abordados en distintas épocas y que culminaron con el surgimiento de dicha noción, a partir de la cual se identificaron nueve “configuraciones epistémicas” que serán entendidas como el sistema de prácticas matemáticas, asumidas como “Toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

El objeto matemático (derivada) emerge de diversos sistemas de prácticas (contextos de uso; sistema de prácticas institucionales y sistema de prácticas personales), dicho objeto puede tener varias configuraciones epistémicas que a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto lo cual permite la descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la práctica matemática, así como los que emergen de ella (Pino-Fan, Godino y Font 2011):

1) Tangente en la matemática griega (CE1)
2) Variación en la edad media (CE2)
3) Métodos algebraicos para hallar tangentes (CE3)
4) Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE4)
5) Ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE5)
6) Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE6)
7) Cálculo de fluxiones (CE7)
8) Cálculo de diferencias (CE8)
9) Derivada como límite (CE9) (p. 170).

Para el EOS el significado de un concepto se entiende a partir de la perspectiva pragmatista, de acuerdo a los sistemas de prácticas en los que dicho objeto interviene, en otras palabras, el significado sistémico, que está ligado a las diferentes situaciones problema, donde existe la posibilidad de encontrar diferentes significados.

En el presente trabajo de investigación se retoma la idea de ‘configuración epistémica’ y se propone adecuarla al caso que nos ocupa. Por ejemplo, algunas de las configuraciones presentadas por Pino-Fan, Font y Godino (2010) no se adecuan al caso de los significados reconocidos en libros de texto y en las afirmaciones curriculares en documentos tales como los expedidos por MEN (2015).

3. METODOLOGÍA

El estudio de los significados que sobre la derivada manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial es importante debido a que posibilita verificar puntos críticos como conflictos de significado o disparidad de interpretaciones que requieren procedimientos de "ajuste" de significado y cambios a nivel personal o institucional en cuanto al estudio de la derivada (Godino, 2002), lo anterior es posible a la luz de la investigación cualitativa debido a que permite modificar la relación entre investigación y teoría (Vasilachis, 2006).

El trabajo de investigación tiene un carácter cualitativo, debido a que el interés radica en *caracterizar los significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial*, mediante la conformación y aplicación de un cuestionario que permita analizar e identificar prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, objetos matemáticos primarios y posible configuración cognitiva. La investigación cualitativa permite aproximación a la interpretación y descripción de los significados sobre la derivada, y como los estudiantes perciben y experimentan el objeto matemático derivada en sus diversas representaciones y acepciones (Guba y Lincoln, 2002). Este paradigma es apropiado en Educación Matemática para presentar un análisis interpretativo respecto a significados manifestados por estudiantes.

Esta investigación se soporta en el paradigma interpretativo (Vasilachis, 2006) debido a que favorece la captación del significado personal, el análisis de los sistemas de práctica a partir de una postura pragmática propuesta por el EOS, y la comprensión de los fenómenos asociados a los significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial.

Para el estudio cualitativo la investigación se apoya en las técnicas de análisis "herramientas teóricas" proporcionadas por el EOS, que se describen en el capítulo 2. El EOS permite tanto la caracterización, como las relaciones entre significados, mediante el análisis de los sistemas de prácticas que manifiesta un sujeto ante situaciones problema, en este caso *tareas*, a partir de los objetos matemáticos primarios emergentes de los sistemas de prácticas (operativas, discursivas y regulativas), a saber los objetos matemáticos primarios según Godino Batanero y Font (2007) son: elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos-definiciones, proposiciones procedimientos y argumentos, relacionados entre sí formando redes de objetos, en el EOS estas relaciones se conocen con el nombre de configuración personal e institucional.

Comparar los significados atribuidos a la derivada por una institución y una persona permite identificar conflictos semióticos. Estos conflictos se refieren a toda diferencia de significados atribuidos a una misma declaración (significado personal, significado institucional) y así expresar e interpretar las dificultades y limitaciones en el aprendizaje.

3.1. Contexto y participantes

La Institución Universitaria M, lugar donde se realizó la investigación, es de carácter público y pertenece a la ciudad de Medellín, acreditada por el Ministerio de Educación Nacional, cuenta con tres facultades que ofrecen cursos que incluyen la derivada como tema de estudio y evaluación. Las Facultades son: Facultad de Ciencia Económicas y Administrativas, Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas y Facultad de Ingenierías.

La investigación se realizó con veinte estudiantes de diversas áreas del conocimiento como ingenierías y ciencias de la economía, que cursaron y aprobaron cálculo diferencial. La escogencia de la población se realizó de forma intencional (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Los criterios de selección se basaron en la disponibilidad en cuanto a tiempo y espacio del profesor encargado del curso para el desarrollo del trabajo de campo. También se tuvo en cuenta la motivación e interés de los estudiantes por participar en la investigación.

3.2. Momentos

3.2.1. Criterios para la elección de las tareas. Con base en el significado epistémico global de la derivada (Pino-Fan, 2014) y en las investigaciones que se han realizado sobre la enseñanza y el aprendizaje sobre la derivada (Artigue, 1995; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Siyepu, 2015; Fuentealba, 2017), es posible proponer criterios que permitan caracterizar significados sobre la derivada manifestados por estudiantes universitarios.

El primer criterio denominado representatividad de los campos de problemas propuestos, refiere a tareas que pongan en juego significados sobre la derivada. Su importancia radica en los objetos y significados conocidos previamente en la solución de situaciones problema (Pino-Fan, Godino y Font 2011).

Pino-Fan (2014) propone los siguientes campos de problemas:

Campo de Problemas 1 (CP1): Problemas que involucran el cálculo de tangentes.
Campo de Problemas 2 (CP2): Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de cambio.
Campo de Problemas 3 (CP3): Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de variación.
Campo de Problemas 4 (CP4): Problemas que involucran la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.
Campo de Problemas 5 (CP5): Cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. (p. 141)

El segundo criterio, se refiere a tareas que permitan obtener información a partir de diferentes representaciones y respectivos significados, se proponen tareas que activen diferentes representaciones y significados de la derivada.

El tercer criterio refiere a que las tareas seleccionadas respondan a diferentes tipos de representación en los tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular; tanto para la función como para su derivada, subprocesos que según Font (1999) intervienen en el cálculo de la función derivada:

1. Traducciones entre las distintas formas de representar $f(x)$
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$

La Tabla 1 presenta las relaciones y procesos entre las diferentes formas de representación para $f(x)$ y $f'(x)$.

Tabla 1. *Relaciones y procesos entre diferentes formas de representación para $f(x)$ y $f'(x)$*

a / **de**	Descripción verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica
Descripción verbal	Múltiples descripciones	Procesos de solución a las tareas a partir de la interpretación de tabular	Esbozo de la gráfica	modelo
Tabular	Interpretación de relaciones numéricas	Información tabular/Adaptaciones	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de gráfica	Adaptaciones de la información tabular	Cambios de escala	Ajuste gráfico
Simbólica	Interpretación de $f(x)$ y $f'(x)$	Cálculo de la información tabular a partir de valores obtenidos de $f(x)$ y $f'(x)$	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Fuente: Tomada y modificada de Font (1999)

La Tabla 2 presenta diferentes representaciones que intervienen en el tercer criterio para la selección de las tareas. Se consideran simultáneamente la función $f(x)$ y la función derivada $f'(x)$ mediante la representación verbal de $f(x)$, verbal de $f'(x)$, simbólica de $f(x)$, simbólica de $f'(x)$, tabular de $f(x)$, tabular de $f'(x)$ y gráfica de $f(x)$, gráfica de $f'(x)$.

En la Tabla 2 se presentan las traducciones entre las diferentes formas de representación de $f(x)$, el camino que lleva de una forma de representar la función $f(x)$ a su representación como función derivada $f'(x)$, el tránsito de una función derivada $f'(x)$ a su primitiva $f(x)$, y las diferentes traducciones entre la función derivada $f'(x)$.

Tabla 2. *Traducciones entre diferentes formas de representación de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$*

A / De	Descripción verbal en términos de $f(x)$	Descripción verbal en términos de $f'(x)$	Tabular $f(x)$	Tabular $f'(x)$	Gráfica $f(x)$	Gráfica $f'(x)$	Expresión simbólica $f(x)$	Expresión simbólica $f(x)$
Descripción verbal en términos de $f(x)$								
Descripción verbal en términos de $f'(x)$								
Tabular $f(x)$								
Tabular $f'(x)$								
Descripción verbal en términos de $f(x)$								
Gráfica $f'(x)$								
Gráfica de $f(x)$								
Expresión simbólica $f'(x)$								
Expresión simbólica $f(x)$								

Fuente: Tomada y modificada de Font (1999)

3.2.2. Análisis onto-semiótico a las tareas del cuestionario. Se presenta cada tarea que conformará el instrumento para la recolección de datos. Se exhibe para cada tarea una descripción de los significados que pueden o no ser exhibidos por estudiantes, atendiendo a los tres criterios mencionados para la selección de las tareas. Se expone el análisis del contenido evaluado por cada tarea mediante un "análisis onto-semiótico" para lo cual se usan herramientas teóricas proporcionadas por el enfoque onto-semiótico presentadas en el marco teórico. Se enfatiza en los objetos matemáticos primarios, y sus significados, a saber, elementos lingüísticos, situaciones problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, las situaciones problema planteadas en cada tarea son el origen de los significados, sin embargo, cada objeto matemático primario depende de las prácticas y de los contextos de uso.

3.2.2.1. Tarea 1. Definición de derivada. La Tarea 1 es una adaptación de Pino-Fan (2013) y ha sido implementada en otras investigaciones (Badillo, 2003; Hähkiöniemi, 2006) para explorar los significados de los estudiantes sobre la derivada. El propósito es conocer los diversos significados de la derivada, además de las representaciones que puedan realizar para complementar la definición expuesta, como por ejemplo, gráfica, tabular, verbal y simbólica. Se considera que en algunas respuestas estudiantiles solo se presente una representación, por ejemplo, simbólica. La Tabla 3 presenta la descripción general de la Tarea 1.

Tabla 3. *Análisis Onto-semiótico Tarea 1*

Análisis Onto-semiótico Tarea 1
Tarea 1: Significados de la derivada
¿Qué significa la derivada? a) ¿Qué significado tiene la pendiente de la recta tangente? b) ¿Qué significado tiene la velocidad instantánea?
Objetivo: Explorar los significados sobre la derivada. Se espera que los estudiantes exhiban diversos significados de la derivada.
Objetos matemáticos primarios
Debido a las múltiples interpretaciones y representaciones que pueden surgir, no se establecen posibles objetos matemáticos primarios, sin embargo, se esperan descripciones principalmente

verbales. Se admite que algunos estudiantes realicen diversas representaciones sobre el significado de la derivada como puede ser gráfico, simbólico y tabular, lo que permite evidenciar algunas relaciones entre objetos matemáticos primarios.

Fuente: Elaboración propia

3.2.2.2. Tarea 2. Análisis de la tasa de variación instantánea. La Tarea 2 es tomada de Sánchez-Matamoros (2004) la cual se presenta mediante la expresión simbólica $f(x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$, para calcular la tasa de variación instantánea *(TVI)* en $x = 1$. La Tabla 4 presenta un análisis onto-semiótico de la Tarea 2 en la cual se aprecia que la solución de la tarea requiere el uso de elementos matemáticos relacionados con la expresión simbólica de la derivada en un punto, como lo son elementos relativos a la tasa de variación instantánea, que puede también ser exhibido a partir del paso del límite a través de la tasa de variación instantánea, además, el uso de representaciones simbólicas, gráficas, verbales y tabulares, por medio de argumentaciones validas que justifiquen sus procedimientos.

Los significados de la derivada asociados con la tasa de variación instantánea, y con ésta, procesos como derivada de una función en un punto, derivada de una función en un intervalo, y reglas de derivación como derivada del cociente de dos funciones, y pendiente de la recta tangente.

Tabla 4. *Análisis Onto-semiótico Tarea 2*

Análisis Onto-semiótico Tarea 2
Tarea 2: Análisis de la tasa de variación instantánea.
Encontrar la tasa de variación instantánea de $f\ (x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$ en el punto $(1, f(1))$
Objetivo: Explorar los significados de la derivada como tasa de variación instantánea por medio del límite del cociente incremental, además del significado en un punto como recta tangente o como función derivada.
Objetos matemáticos primarios
Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos, mediante el registro escrito)
• La expresión "¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto

$(1, f(1))$? Enuncia que se desea conocer la tasa de variación de una función en un instante dado.

- La tarea se puede interpretar a partir del límite del cociente incremental en el punto $(1, f(1))$.
- La tarea se puede resolver a partir de la derivada del cociente.
- La expresión “$f(x)$” se refiere a la representación simbólica- algebraica de una función.
- La expresión “$(1, f(1))$” declara que se debe realizar el cálculo mediante el concepto de tasa de variación instantánea o recta tangente a la curva en el punto $x = 1$ y la representación cartesiana de $(1, f(1))$.

Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)

- Función. Particularizada en una función racional, expresada de forma algebraica como $f(x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$
- Función. Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada valor x en un conjunto denominado dominio un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto.
- Recta tangente. La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $p(2, 3)$ es aquella recta con pendiente $m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o - ∞.
- Recta tangente: Recta cuya pendiente se puede asumir como el límite del cociente incremental.
- Recta tangente: Expresión de la forma $y = mx + n$, m es la pendiente de la recta, donde $f'(x) = m$.
- La recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x = a$ si y sólo si $mx + b$ es el resto del cociente $p(x)/(x - a)2$
- Derivada en un punto. Entendida como la pendiente (m) de la recta tangente en un punto.
- Derivada en un punto. Definida formalmente como $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.
- Función derivada. Definida formalmente como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos

conceptos)

- $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces $f'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g\prime(x)}{[g(x)]^2}$
- El significado de la derivada en un punto c es la tasa de variación instantánea en dicho punto $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$
- La derivada de una función en un punto se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente.
- La pendiente de una recta tangente a una gráfica de una función se corresponde con la derivada de la función en la abscisa del punto de tangencia.

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Cálculo de la primera derivada de $f(x)$
- Evaluar $f'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g\prime(x)}{[g(x)]^2}$ en el punto $(1, f(1))$
- Cálculo de la derivada en el punto $(1, f(1))$ mediante $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$, por lo tanto $f'(1)$: $f\ '(1) \ = \ lim\,(f(1 + h) - f(1))/h \ = \ -1$

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

- calculando la tasa de variación instantánea en $x = 1$, que coincide con $f'(1)$: $f'(1) \ = \ lim\,(f(1 + h) - f(1))/h \ = \ -1$

Fuente: Elaboración propia

3.2.2.3. Tarea 3. Derivada en un punto por aproximación numérica. La Tarea 3, tomada de Sánchez-Matamoros (2004) explora la aproximación a la derivada de una función descrita por los valores de la tabla, en los puntos $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{x = 2}$ por medio de valores numéricos de la función $\boldsymbol{f(x)}$. La tarea sugiere los significados vinculados al cálculo de la derivada en un punto por aproximación numérica a través de la expresión simbólica de la derivada como límite del cociente incremental y con esto las derivadas laterales, que deben existir y ser iguales para que $\boldsymbol{f'(2)}$ y $\boldsymbol{f'(1)}$ existan. En la Tabla 5 se presenta el análisis onto-semiótico de Tarea 3.

Tabla 5. *Análisis Onto-semiótico Tarea 3*

Análisis Onto-semiótico Tarea 3

Tarea 3: Derivada en un punto por aproximación numérica

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

Objetivo: Explorar los significados de la derivada en un punto por aproximación numérica, además de interpretaciones a partir de la representación tabular.

Objetos matemáticos primarios

Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos mediante el registro escrito)

- La expresión “Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$” y “A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?” enuncia la posibilidad de realizar el cálculo de la derivada de f por aproximación en un punto (límite del cociente incremental).
- La representación tabular de la función f se presenta como una herramienta para lograr calcular la derivada en $x = 2$ y $x = 1$
- El comportamiento de la función f es descrito por medio de los valores presentados en la tabla.

Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)

- Derivada de una función en un punto. La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = 2$ se simboliza como $f'(2)$ y está dada por $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, siempre que el límite exista.
- Derivada de una función en un punto. La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = 1$ se simboliza como $f'(1)$ y está dada por $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, siempre que el límite exista.
- Derivada en un punto. La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es

el valor del límite, si existe, del cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero. Una función es continua en un punto si existe límite en él, y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

- Función derivada. Conjunto de pendientes de las rectas tangentes a la función dada en los distintos puntos del dominio en que está definida.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.
- Continuidad, crecimiento, decrecimiento, extremos de la función. Dados de manera intuitiva mediante la forma de la gráfica de la función.
- Limites laterales. Para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y coincidir.
- El significado de los signos en la notación para límites laterales se interpreta de la siguiente manera:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ Significa que el límite, cuando x tiende a a por la derecha es igual a L.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ Significa que el límite, cuando x tiende a a por la izquierda es igual a L.

- Derivadas laterales. Una función es derivable en un punto si las derivadas laterales en el punto existen y son iguales.

Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos conceptos)

- La derivada por la derecha de $f(x)$ en los puntos $x = 2$ y $x = 1$ se simboliza como $f'(2)^+$ y $f'(1)^+$ respectivamente, y está dada por:

$$f'(2)^+ = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f'(1)^+ = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Si el límite existe.

- La derivada por la izquierda de $f(x)$ en los puntos $x = 2$ y $x = 1$ se simboliza como $f'(2)^-$ y $f'(1)^-$ respectivamente, y está dada por:

$$f'(2)^- = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f'(1)^- = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Si el límite existe.

- La continuidad de f en $x = a$ implica que se cumplan estas tres condiciones:

Existe el límite de la función $f(x)$ en $x = a$ y $a \in D_f$

El límite de la función cuando x tiende a a existe. Es decir $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

El límite de la función cuando x tiende a a es igual a la función evaluado en a. Es decir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Derivada en un punto como límite del cociente incremental.
- Existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental (como proceso, aproximación a través de las tablas de valores) para que f sea derivable.

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

Aproximación a la derivada de f en $x = 2$ por la izquierda:

$f'(2^-) = lim \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} cuando\ (x \to 2^-), luego\ f'(2^-) = 4$

Aproximación a la derivada de f en $x = 2$ por la derecha:

$f'(2^+) = lim\ (f(x) - f(2))/(x - 2)\ cuando\ (x \to 2^+)\ luego\ f'(2^+) = 4$

$f'(2-) = f'(2+) = 4$, luego el valor de la derivada de f en $x = 2$ es $f'(2) = 4$

La solución del ítem b) se realiza con ayuda de la tabla de valores, encontramos una aproximación por la izquierda y otra por la derecha:

Aproximación a la derivada de f en $x = 1$ por la izquierda: $f'(1^-) = lim\ (f(x) - f(1))/(x - 1)\ cuando\ (x \to 1^-),\ luego\ f'(1^-) = 1$

$f'(1^-) = lim\ (f(x) - f(1))/(x - 1)\ cuando\ (x \to 1^-), \quad luego\ f'(1^-) = 1$

Aproximación a la derivada de f en $x = 1$ por la derecha:

$f'(1^+) = lim\ (f(x) - f(1))/(x - 1)\ cuando\ (x \to 1^+)\ luego\ f'(1^+) = -2$

$f(1^-) = 1\ y\ f'(1^+) = -2$, luego no existe la derivada de f en $x = 1$, $f'(1)$, ya que: $f'(1^-) \neq f'(1^+)$.

Fuente: Elaboración propia

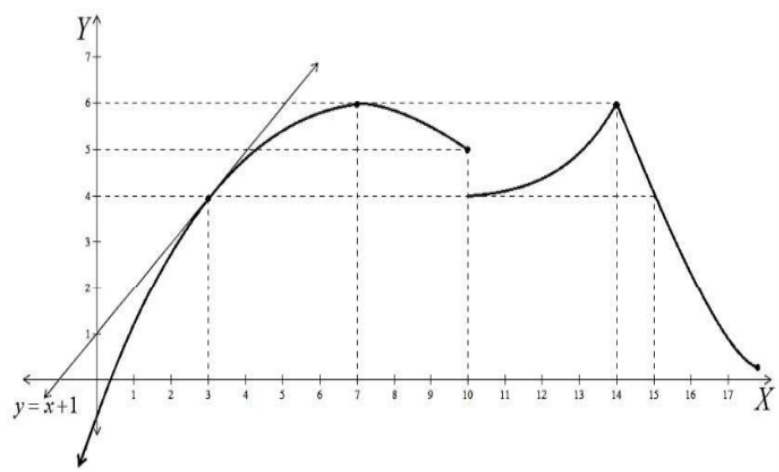
3.2.2.4. Tarea 4. Comportamiento global y local de la función. La Tarea 4, tomada y modificada de Sánchez-Matamoros (2004) está centrada en determinar la derivada en $f'(3), f'(7), f'(10)$ y $f'(14)$, a partir del gráfico de f en el cual se evidencian diferentes tipos de comportamiento de la función, un máximo en $x = 7$, una discontinuidad de salto con f definida en un extremo en $x = 10$, entre otros. Esta tarea es de interés debido a que aporta información relevante no solo de la derivada en un punto, la función derivada en un intervalo y la coordinación de ambas informaciones, sino también del estudiante, ya que debe identificar, describir y justificar a partir de la gráfica de una función características de la derivada de f' lo que posibilita analizar las relaciones que el estudiante establece de f' a f y f a f', además de los significados de la derivada como razón de cambio o pendiente de la recta tangente y su relación y aplicación al cálculo de máximos y mínimos, derivabilidad y continuidad, crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y picos. En la Tabla 6 se presenta el análisis onto-semiótico de la Tarea 4.

Tabla 6. *Análisis Onto-semiótico Tarea 4*

Análisis Onto-semiótico Tarea 4

Tarea 4: Comportamiento global y local de la función

Tarea 4: Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10)\ y\ f'(14)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

Objetivo: Explorar los significados de la primera derivada relacionados a la recta tangente, y las relaciones f' a f y f a f' a partir de la representación gráfica de una función para determinar si este significado de referencia se presenta en la solución de los estudiantes.

Objetos matemáticos primarios

Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos mediante el registro escrito)

La expresión “Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10)\ y\ f'(14)$”. Refiere a calcular la derivada de f' a partir de la gráfica de f en cada punto, además, la expresión “Explicando cómo los obtienes” enuncia que se puede dar solución a la tarea planteada no solo con el significado de la recta tangente, sino también como:

- Función derivada.
- Razones instantáneas de cambio.
- Derivada en un punto.
- Derivadas laterales.
- Puntos críticos y picos.
- Valores máximos y mininos de una función.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Criterio de la primera derivada
- La abscisa y la ordenada del punto de tangencia son conocidas.
- La expresión “Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido” Enuncia la realización del esbozo de la gráfica de f' a partir del gráfico de f, lo anterior se realiza con la solución del ítem a.

Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)

- Recta tangente: Recta cuya pendiente se puede asumir como el límite del cociente incremental.
- Recta tangente: Expresión de la forma $y = mx + n$, m es la pendiente de la recta, donde $f'(x) = m$.
- Recta tangente. La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $p(a, b)$ es aquella recta con pendiente $m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o -∞
- Pendiente. Inclinación de la recta.
- Pendiente. Tangente del ángulo formado entre la recta y el eje x.
- Razón de cambio. La razón de cambio de y con respecto a x es cero cuando la función presenta un máximo o un mínimo relativo. Es una forma de interpretar la derivada en un punto.
- Derivadas laterales. Una función es derivable en un punto si las derivadas laterales en el punto existen y son iguales.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto

de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.

- Limites laterales. Para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y coincidir.
- El significado de los signos en la notación para límites laterales se interpreta de la siguiente manera:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ Significa que el límite, cuando x tiende a a por la derecha es igual a L.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ Significa que el límite, cuando x tiende a a por la izquierda es igual a L

- Discontinuidad inevitable. Una discontinuidad es inevitable si existen los límites laterales en $x = a$, pero son diferentes.
- Discontinuidad esencial. Una discontinuidad es esencial si no existe alguno de los límites laterales en $x = a$.
- Discontinuidad evitable. Una discontinuidad es evitable en un punto x = a si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y este es finito.
- Tangente horizontal. Recta tangente a la función dada paralela al eje x, es decir, con pendiente igual a cero. Caso particular de la derivada en un punto.

Análisis gráfico

- Valores máximos y mininos de una función. Sea f una función definida en un dominio D, y sea c un numero real que pertenece a D, entonces:

$f(c)$ es un valor máximo absoluto de f en D si $f(c) \geq f(x)$, para todo x en D.

$f(c)$ es un valor mínimo absoluto de f en D si $f(c) \leq f(x)$, para todo x en D.

Una función f alcanza un máximo relativo en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b), f(x) \leq f(c)$.

Una función f alcanza un mínimo relativo en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b), f(x) \geq f(c)$.

- Crecimiento y decrecimiento.

Una función f es creciente en un intervalo I, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.

Una función f es decreciente en un intervalo I, si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.

- Puntos críticos y picos

Se dice que $x = c$ es un punto crítico de f, si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no está definida.

Se dice que $(c, f(c))$ es un pico de la función f si $f'(c)$ no existe. En este caso la recta tangente a la gráfica de la función en este punto no existe o es vertical.

- Criterio de la primera derivada. Sea f una función continua en el intervalo (a, b) y $c \in (a, b)$, tal que c es un punto crítico de f.

Si $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, es decir, si f es creciente para $a < x < c$ y f es decreciente para $c < x < b$, entonces, f tiene un máximo relativo en c.
Si $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, es decir, si f es decreciente para $a < x < c$ y f es creciente para $c < x < b$, entonces, f tiene un mínimo relativo en c.

Propiedades/Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos conceptos)

- $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$
- $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ es constante en $[a, b]$
- $f'(x) = 0$ en $x = a \in D_f$ si en $x = a$ f presenta un máximo o un mínimo.
- $f'(x) = m \forall x \in (a, b), m \in R \leftrightarrow f$ es una función lineal en $[a, b]$ de la forma $f(x) = mx + k$
- Sea f derivable en (a, b) si f cóncava entonces f' decrece en (a, b), y si f convexa en (a, b) entonces f' crece en (a, b).
- Operador derivada: f parábola entonces f' recta.
- El significado de la derivada en un punto c es la tasa de variación instantánea en dicho punto $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- La derivada de una función en un punto se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente.
- La pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función se corresponde con la derivada de la función en la abscisa del punto de tangencia.
- El que la gráfica de f esté formada por ramas de parábolas indica que la gráfica de f' son trozos de recta. Esto puede implicar poner en relación la idea de que la parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y por tanto la función derivada (aplicando las reglas de derivación) es $f'(x) = 2ax + b$, con la idea de que las gráficas de las funciones del tipo $2ax + b$ son rectas.

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Calcular la pendiente de la recta tangente a una función en un punto $(y = mx + b)$ es la derivada de f en ese punto $f'(a) = m$.
- El que la gráfica de f esté formada por ramas de parábolas indica que la gráfica de f' son trozos de recta. Esto puede implicar poner en relación la idea de que la parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y por tanto la función derivada (aplicando las reglas de derivación) es $f'(x) = 2ax + b$, con la idea de que las gráficas de las funciones del tipo $2ax + b$ son rectas.

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

- La pendiente de la recta tangente a una función en un punto a $[y = mx + b]$ es la derivada de f en ese punto $f'(a) = m$. Lo que implica que $f'(3) = 1$, la gráfica de f' pasa por el punto (3,1).
- Si la función tiene un máximo local implica que la pendiente de la recta tangente pasa de positiva a negativa por lo que valdrá cero en el máximo, lo que implica que la gráfica de f' cortará al eje OX (f' tiene un cero en $x = 7$).
- Si la función tiene una discontinuidad de salto, no es derivable (ya que si fuera derivable implicaría que es continua). El uso de esta idea implica pues el uso de la equivalencia de "f derivable implica f continua" y la negación de la implicación (f no continua implica f no derivable). El que f no sea derivable implica que no existe la gráfica. En el punto $x = 10$, a la izquierda del punto la pendiente de la recta tangente es negativa y la concavidad de f es hacia abajo; y a la derecha del punto la pendiente es positiva y la concavidad es para arriba. Esto implica que la gráfica de f' en $x = 10$ tendrá también una discontinuidad que hace cambiar de signo a la gráfica (de negativo a positivo). Además, el punto $(10, a)$ en la gráfica de f' vendrá dado por la "cantidad de concavidad" hacia arriba de f en $x = 10$. Si la rama de la parábola a la derecha de $x = 10$ podemos considerar que es el mínimo de la parábola, entonces el punto de arranque de la gráfica f' en $x = 10$ (es decir el valor de f' (10)) será tendiendo a cero (tomando el valor de cero en el límite del cociente incremental por la derecha).
- En $x = 14$ gráfica de f tiene un pico (un máximo) sin cambio de concavidad eso implica que $x = 14$ la gráfica de f' tiene un cambio de signo (de positivo a negativo) pero no existe ya que los límites laterales del cociente incrementar de f son diferentes.
- La solución de ítem b) se presenta mediante la gráfica de f la cual está formada por ramas

de parábolas indica que la gráfica de f' son trozos de recta. Esto supone poner en relación la idea de que la parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y por tanto la función derivada (aplicando las reglas de derivación) es $f'(x) = 2ax + b$, con la idea de que las gráficas de las funciones del tipo $2ax + b$ son rectas.

- La función f es cóncava en el intervalo (0,7) implica que la función derivada será decreciente en (0,7).
- En el intervalo (7,10) la f'es decreciente.
- En el intervalo (7,14) al ser la gráfica de f creciente sabemos que la gráfica de f' es positiva y como la concavidad de f es hacia arriba entonces sabemos que la gráfica de f' es creciente [si f es creciente implica $f' > 0$] [si f es convexa implica f' creciente; si f es cóncava implica f' decreciente]

Fuente: Elaboración propia

3.2.2.5. Tarea 5. Intervalos de concavidad. La Tarea 5 tomada y modificada de Purcell, Rigdon y Varberg (2007) se reconoce como un ejercicio común en los libros de cálculo ya que se lograría solucionar aplicando algunos teoremas o proposiciones de la derivada, sin embargo, la tarea explora los significados de la derivada como pendiente de la recta tangente y límite del cociente incremental, además de las relaciones simbólicas entre $f, f'y\, f''$ y su correcta interpretación, a saber, análisis de la primera derivada a partir de la expresión simbólica; valores máximos y mínimos de una función, crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y picos, y análisis de la segunda derivada a partir de la expresión simbólica, concavidad y puntos de inflexión. La tarea se propone como un complemento a las tareas propuestas a partir de la representación simbólica, tabular y verbal. En la Tabla 7 se presenta el análisis onto-semiótico de la Tarea 5.

Tabla 7. *Análisis Onto-semiótico Tarea 5*

Análisis Onto-semiótico Tarea 5
Tarea 5: Intervalos de concavidad
Determinar los intervalos de concavidad de la siguiente función: $f(x) = -x^3 - x + 7$
Objetivo: Explorar el significado de la segunda derivada respecto a la información que se puede obtener acerca de la concavidad de $f(x)$, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y puntos de inflexión.

Determinar si este significado de referencia se manifiesta en las soluciones de los estudiantes.

Objetos matemáticos primarios
Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos Mediante el registro escrito) • La expresión "Determinar los intervalos de concavidad de la siguiente función: $f(x) = -x^3 - x + 7$" Enuncia que se debe calcular la primera y segunda derivada de $f(x)$ como una premisa. • La expresión simbólica $f(x) = -x^3 - x + 7$ refiere al concepto de función cúbica, expresada algebraicamente. • Procedimientos simbólicos (manipulación de elementos algebraicos). • La tarea presenta una pregunta clave mediante la cual pueden relacionarse dos significados de la derivada. • La función $f(x)$ presenta algunas concavidades. • La función $f(x)$ presenta puntos de inflexión.
Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición) • Función. Particularizada en función cúbica expresada de forma algebraica como $f(x) = -x^3 - x + 7$ • Función. Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto denominado dominio un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. • Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio. • Intervalos de concavidad. Si $f(x) = -x^3 - x + 7$ es una función dos veces derivable en un intervalo abierto (a, b) entonces presenta algunas concavidades. • Puntos de inflexión. Son aquellos en los cuales la gráfica cambia de concavidad • Valores máximos y mínimos de una función. Sea f una función definida en un dominio D, y sea c un numero real que pertenece a D, entonces: $f(c)$ es un valor máximo absoluto de f en D si $f(c) \geq f(x)$, para todo x en D. $f(c)$ es un valor mínimo absoluto de f en D si $f(c) \leq f(x)$, para todo x en D. Una función f alcanza un máximo relativo en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b), f(x) \leq f(c)$.

Una función f alcanza un mínimo relativo en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b), f(x) \geq f(c)$.

- Crecimiento y decrecimiento.

Una función f es creciente en un intervalo I, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.

Una función f es decreciente en un intervalo I, si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.

- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.

Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos conceptos)

- Reglas de derivación. Para encontrar la representación gráfica y algebraica de la función derivada.
- Si $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es cóncava hacia arriba.
- Si $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es cóncava hacia abajo.
- Un punto $(c, f(c))$ sobre la gráfica de una función $f(x)$ es un punto de inflexión si cumple algunas de las siguientes afirmaciones:

  $f''(x) > 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) < 0$ para $c < x < b$

  $f''(x) < 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) > 0$ para $c < x < b$

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Cálculo de la primera derivada y la segunda derivada de $f(x) = -x^3 - x + 7$
- Se iguala a cero la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión.
- Se evalúa $f(x) = -x^3 - x + 7$ en el punto resultante.

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

$f(x) = -x^3 - x + 7$

$f'(x) = -3x^2 - 1$

$f''(x) = -6x^1$

Igualando la segunda derivada a cero tenemos:

$-6x = 0$, entonces $x = 0$

$f(0) = -0^3 - 0 + 7$

Intervalo	$(-\infty, \mathbf{0})$	$(\mathbf{0}, \infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-1}$	**1**
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) = -6(-1) = 6 > 0$	$f''(1) = -6(1) = 6 < 0$
Conclusión	**Cóncava hacia arriba**	**Cóncava hacia abajo**

Fuente: Elaboración propia

3.2.2.6. Tarea 6. Extremos relativos. La Tarea 6 tomada y modificada de Purcell, Rigdon y Varberg (2007) explora los significados de la derivada como límite del cociente incremental, pendiente de la recta tangente; máximos y mínimos relativos y tasas instantáneas de cambio, a partir de la aplicación de reglas para derivar, teoremas y proposiciones. La línea que diferencia la Tarea 7 y la Tarea 8 es muy fina, debido a la interpretación que se debe realizar para generar una posible solución y la correcta interpretación de f'' expresada simbólicamente. La Tarea 8 indaga y permite conocer la actividad matemática de los estudiantes y las relaciones que establecen entre f, f' y f''. En la Tabla 8 se presenta el análisis onto-semiótico de la Tarea 6.

Tabla 8. *Análisis Onto-semiótico Tarea 6*

Análisis Onto-semiótico Tarea 6
Tarea 6: Extremos relativos
Hallar los extremos relativos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$
Objetivo: Explorar el significado de la segunda derivada respecto a la información que se puede obtener de una función $f(x)$ acerca de los extremos relativos para aplicaciones de la derivada en el cálculo de máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, (convexidad positiva, convexidad negativa) puntos críticos y puntos de inflexión. Determinar si este significado de referencia se manifiesta en las soluciones de los estudiantes.
Objetos matemáticos primarios

Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos Mediante el registro escrito)

- La expresión "Hallar los extremos relativos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$" Enuncia que se deben encontrar los valores de x para los cuales $f(x)$ toma el máximo valor local, y el mínimo valor local.
- $f(x)$ refiere a una expresión simbólica que representa una función polinómica que tiene crestas y valles, que corresponden a puntos específicos cuyas coordenadas debemos hallar.
- La expresión simbólica $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ refiere al concepto de función de cuarto grado, expresada algebraicamente.
- Procedimientos simbólicos (manipulación de elementos algebraicos).
- La función $f(x)$ presenta extremos relativos.
- La función $f(x)$ presenta puntos críticos.

Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)

- Función. Particularizada en función cubica expresada de forma algebraica como $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$
- Función. Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto denominado dominio un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.
- Extremos relativos de una función:

Se dice que la función f tiene un valor máximo relativo en un punto c, si c pertenece a (a, b), tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a (a, b). El valor máximo relativo de f en (a, b) es $d = f(c)$.

Se dice que la función f tiene un valor mínimo relativo en un punto c, si c pertenece a (a, b), tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x perteneciente a (a, b). El valor mínimo relativo de f en (a, b) es $d = f(c)$.

- Puntos de inflexión. Son aquellos en los cuales la gráfica cambia de concavidad
- Valores máximos y mininos de una función. Sea f una función definida en un dominio D, y sea c un numero real que pertenece a D, entonces:

$f(c)$ es un valor máximo absoluto de f en D si $f(c) \geq f(x)$, para todo x en D.

$f(c)$ es un valor mínimo absoluto de f en D si $f(c) \leq f(x)$, para todo x en D.

Una función f alcanza un máximo relativo en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b), f(x) \leq f(c)$.

Una función f alcanza un mínimo relativo en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b), f(x) \geq f(c)$.

- Crecimiento y decrecimiento.
- Una función f es creciente en un intervalo I, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.
- Una función f es decreciente en un intervalo I, si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.

Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos conceptos)

- Dada f una función dos veces derivable en un intervalo abierto que contiene a c tal que c es un punto crítico de f , es decir, $f'(c) = 0$. Entonces:

Si $f'' > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

Si $f'' = 0$, entonces el criterio no decide.

- Reglas de derivación. Para encontrar la representación gráfica y algebraica de la función derivada.
- Si $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es cóncava hacia arriba.
- Si $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es cóncava hacia abajo.
- Un punto $(c, f(c))$ sobre la gráfica de una función $f(x)$ es un punto de inflexión si cumple algunas de las siguientes afirmaciones:

$f''(x) > 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) < 0$ para $c < x < b$

$f''(x) < 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) > 0$ para $c < x < b$

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Cálculo de la primera derivada y se iguala a cero para hallar los puntos críticos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$
- Cálculo de la primera derivada de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, y se iguala a cero para hallar los puntos donde la derivada es igual a cero.
- Se utiliza el criterio de la segunda derivada para saber si los números hallados en el

procedimiento anterior son máximos o mínimos relativos.

- Enunciar criterio de la segunda derivada.

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

$f'(x) = -12x^3 - 12x^2 - 24x$

$-12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$

$12x(x-2)(x+1) = 0.$

Los números críticos son: $x = 0, x = 2, x = -1$

Calculando la segunda derivada tenemos:

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$

Para $x = 0$

$f''(0)$=-24

$x = 0$ es un máximo relativo

Para $x = 2$

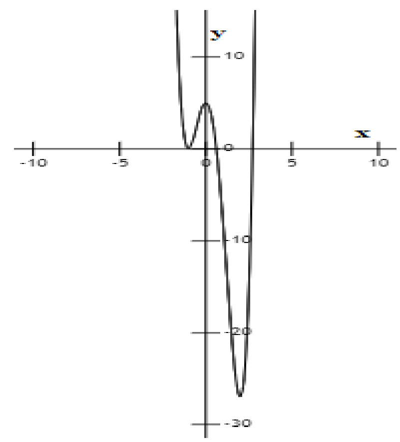
$f''(2)$=-24

$x = 2$ es un mínimo relativo

Para $x = -1$

$f''(-1)$=36

$x = -1$ es un mínimo relativo.



Fuente: Elaboración propia

3.2.2.7. Tarea 7. Relaciones entre f, f' y f''. La Tarea 7, tomada y modificada de Apóstol (1996) explora las relaciones que establecen los estudiantes entre f, f' y f'' a partir de una representación tabular, además, de la aplicación de las reglas de derivación, derivada de funciones compuestas (regla de la cadena) y derivadas de orden superior. La Tarea 7 permite el reconocimiento de la práctica matemática en la solución de la tarea a partir de la configuración de objetos y significados. En la Tabla 9 se presenta el análisis onto-semiótico de Tarea 7.

Tabla 9. *Análisis Onto-semiótico Tarea 7*

Análisis Onto-semiótico Tarea 7

Tarea 7: Relaciones entre $f, f' y\ f''$

Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Poner $g(x) = xf(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x\ =\ 0, 1, 2$. Explica como la has construido.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
4	6	3	0

Objetivo: Explorar la relación de significados entre la función $f(x)$, primera derivada de $f(x)$ y segunda derivada de $f(x)$, presentados de forma simbólica algebraica/analítica y tabular.
Determinar el significado algebraico al utilizar la derivada de forma simbólica algebraica/analítica (derivadas de funciones compuestas) con ayuda de la regla de la cadena.

Objetos matemáticos primarios

Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos Mediante el registro escrito)

- La expresión "Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Poner $g(x) = xf(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x\ =\ 0, 1, 2$" Enuncia que:
- La información necesaria para realizar la tarea se encuentra explícita de forma tabular.
- La expresión "$g(x) = xf(x^2)$" enuncia que se debe calcular $g'(x)$ y $g''(x)$ para construir la tabla para g, g' y g'' cuando $x\ =\ 0, 1, 2$.

Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)

- Función. Particularizada en función simbólica $g(x) = xf(x^2)$ expresada de forma algebraica/analítica.
- Función. Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto denominado dominio un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto

de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.

- Regla de la cadena. Si la función $g(x)$ es derivable en x y $f(x)$ es derivable en $g(x)$, entonces, la funcion compuesta $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x y se expresa como $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$. A $g'(x)$ se le llama derivada interna.

Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos conceptos)

- $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x y se expresa como $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Cálculo de la primera derivada de $g(x)$
- Cálculo de la segunda derivada de $g(x)$
- Establecer relaciones entre $f, f'y\, f''$ para hallar una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

$g(x) = xf(x^2)$

$g'(x) = f(x^2) + 2x^2 f'(x^2)$

$g''(x) = 2xf'(x^2) + 4xf'(x^2) + 2x^2(2x)f''(x^2) = 6xf'(x^2) + 4x^3 f''(x^2)$

x	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$
0	0	0	0
1	1	3	10
2	12	$6 + 8(3) = 30$	$12(3) + 32(0) = 36$

Fuente: Elaboración propia

3.2.2.8. Tarea 8. Razón de cambio. La Tarea 8 tomada y modificada de Purcell, Rigdon y Varberg (2007) es otra de las aplicaciones de la derivada, en la cual se relacionan dos variables que cambian con el tiempo. La tarea explora el significado de la derivada como razón instantánea de cambio, además, el uso de representaciones verbales, simbólicas, y la modelación que según Godino, Batanero y Font (2007) es considerada como un mega proceso, puesto que involucra procesos elementales como; representación, argumentación, idealización y generalización. En la Tabla 10 se presenta el análisis onto-semiótico de la Tarea 8.

Tabla 10. *Análisis Onto-semiótico Tarea 8*

Análisis Onto-semiótico Tarea 8
Tarea 8: Razón de Cambio
Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que éste forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de $1{,}5\ cm/s$, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$?
Objetivo: Explorar los significados asociados a la tasa instantánea de cambio a partir de una situación planteada por medio de un enunciado representada de forma simbólica.
Objetos matemáticos primarios
Elementos lingüísticos (refiere a términos, expresiones, notaciones, gráficos, símbolos Mediante el registro escrito) • La expresión "Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que éste forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de $1{,}5\ cm/s$, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$?" Enuncia que: • Región circular refiere al área de un círculo de radio variable. • "el radio crece" refiere al cambio del valor del radio. • "ritmo" refiere a la relación entre longitud y tiempo.
Elementos conceptuales (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición) • Ecuación que representa el área del círculo, $A = \pi r^2$ • Razón de cambio, refiere a la derivada • Aumenta, refiere al signo positivo para la derivada. • Diferenciales. Relaciona una función con sus derivadas, relaciones que existen entre variables relacionadas de diversas situaciones. Estas relaciones se determinan mediante el incremento y, por ende, con las diferenciales. • Diferencial de una función. Sea $y = f(x)$ en donde f es una fincion derivable, entonces la diferencial dx es una variable independiente, además dx=Δx. • La diferencial dy se define como $dy = f'(x)dx$

- Derivación implícita. Es un proceso en el que se supone que y es una función derivable de x, y que utiliza la regla de la cadena.

Proposiciones (son enunciados que se realizan sobre conceptos, además de relacionar diversos conceptos)

$dy = f'(x)dx$

Procedimientos (formas; técnicas de cálculo, operaciones o algoritmos, mediante las cuales se genera una solución a la tarea)

- Se debe conocer la ecuación que determina el área del círculo.
- Se escribe la ecuación que determina el área del círculo.
- La ecuación que representa el área del círculo se debe derivar respecto al tiempo.
- Se deriva con respecto al tiempo.

Argumentos (se entiende argumento en este trabajo, como una posible solución a la tarea planteada que pone en juego, lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos)

Una posible solución o solución esperada.

$A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\,\pi r \frac{dr}{dt}$$

Se reemplazan $r = 4$ y $\frac{dr}{dt} = 1{,}5\ cm/s$ en $\frac{dA}{dt}$

$$\frac{dA}{dt} = 2\,\pi(4cm)(1{,}5\frac{cm}{s})$$

$\frac{dA}{dt} = 12\pi\ cm^2/s$, el área del circulo crece a un ritmo de $12\pi\ cm^2/s$ cuando $r = 4cm$

Fuente: Elaboración propia

3.2.3. Tareas que conforman el cuestionario

Las ocho tareas que conforman el cuestionario fueron seleccionadas de diversas investigaciones (Sánchez-Matamoros, 2004; Pino-Fan, 2014; Purcell, Varberg y Castillo, 1993) que fueron enviadas a profesores e investigadores para recibir sugerencias y comentarios que permitieron mejorar y validar el cuestionario. El cuestionario se dividió en dos partes, de manera que cada uno está conformado de acuerdo con los criterios descritos anteriormente para la selección de las tareas descritas anteriormente. En la Tabla 11 se presentan los dos cuestionarios.

En el Cuestionario 1 se presentan las siguientes equivalencias entre las tareas que lo conforman: **Tarea 1:** Significados de la derivada, equivale a la Tarea 1 de la Tabla 12. **Tarea 2:** Análisis de la tasa de variación instantánea equivale a la Tarea 2 de la Tabla 12. **Tarea 3:** Derivada en un punto por aproximación numérica equivale a la Tarea 3 de la Tabla 12. **Tarea 4:** Relaciones entre $f, f' y\ f''$ equivale a la Tarea 7 de la Tabla 12.

En el Cuestionario 2 se presentan las siguientes equivalencias entre las tareas que lo conforman: **Tarea 1:** Comportamiento global y local de la función equivale a la Tarea 4 de la Tabla 12. **Tarea 2:** Intervalos de concavidad equivale a la Tarea 5 de la Tabla 12. **Tarea 3:** Extremos relativos equivale a la Tarea 6 de la Tabla 12. **Tarea 4:** Razón de Cambio equivale a la Tarea 8 de la Tabla 12.

Tabla 11. *Cuestionario 1 y Cuestionario 2*

CUESTIONARIO 1
Tarea 1: Significados de la derivada
¿Qué significa la derivada? c) ¿Qué significado tiene la pendiente de la recta tangente? d) ¿Qué significado tiene la velocidad instantánea?

Tarea 2: Análisis de la tasa de variación instantánea.
Encontrar la tasa de variación instantánea de $f\ (x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$ en el punto $(1, f(1))$

Tarea 3: Derivada en un punto por aproximación numérica

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

Tarea 4: Relaciones entre $f, f' y f''$

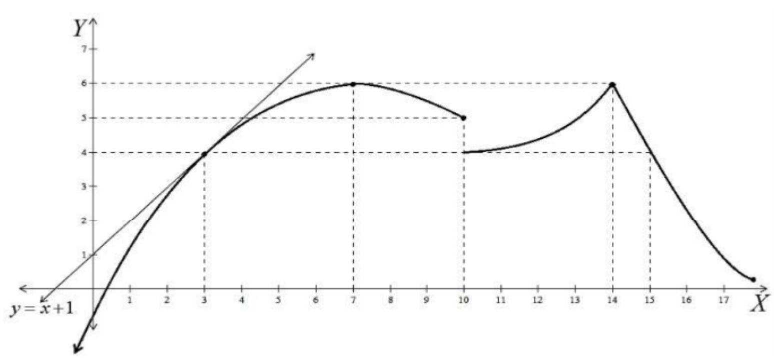
Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Poner $g(x) = xf(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$. Explica como la has construido.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{f''(x)}$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
4	6	3	0

CUESTIONARIO 2

Tarea 1: Comportamiento global y local de la función

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10)$ y $f'(14)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

Tarea 2: Intervalos de concavidad
Determinar los intervalos de concavidad de la siguiente función: $f(x) = -x^3 - x + 7$

Tarea 3: Extremos relativos
Hallar los extremos relativos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Tarea 4: Razón de Cambio
Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que éste forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de 1,5 cm/s, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$?

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 12 tomada y modificada de Pino-Fan, (2014) permite caracterizar y operar las tareas sobre la derivada, con base en los criterios establecidos para la selección de las tareas propuestas.

La notación T1 a T8 significa Tarea 1 a Tarea 8, las cuales se presentan relacionadas a continuación a partir de la representación de la tarea a las representaciones que se activan en el posible planteamiento que realicen los estudiantes como en la solución propuesta, en términos de los significados más utilizados.

Tabla 12. *Soluciones esperadas; Significados sobre la derivada*

Campos de problemas/ Tareas contenidas en los campos de problemas.	Solución esperada / Representación de la tarea		Representaciones para $f(x)$ y $f'(x)$ Correspondientes a la solución esperada							
			$f(x)$				$f'(x)$			
			Verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica	Verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica
CP1: Problemas que involucran el cálculo de tangentes. Tarea 1 Tarea 4	$f(x)$	Verbal	T1				T1	T1	T1	T1
		Tabular								
		Gráfica							T4	
		Simbólica								
	$f'(x)$	Verbal								
		Tabular								
		Gráfica								
		Simbólica								
CP2: Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de cambio. Tarea1 Tarea 8	$f(x)$	Verbal	T1				T1,T8	T1,	T1, T8	T1, T8
		Tabular								
		Gráfica								
		Simbólica								
	$f'(x)$	Verbal								
		Tabular								
		Gráfica								
		Simbólica								
CP3: Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de variación. Tarea1, Tarea 3, Tarea 6, Tarea 7	$f(x)$	Verbal	T1				T1	T1	T1	T1
		Tabular							T3	T3
		Gráfica							T6	T6
		Simbólica						T7	T7	T2, T7
	$f'(x)$	Verbal								
		Tabular						T7	T7	T7
		Gráfica								
		Simbólica						T7	T7	T7
CP4: Problemas que involucran la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc. Tarea1, Tarea 4,Tarea 5, Tarea 6	$f(x)$	Verbal	T1				T1	T1	T1	T1
		Tabular								
		Gráfica							T4	T4
		Simbólica					T5,T6	T5,T6	T5,T6	T5, T6
	$f'(x)$	Verbal								
		Tabular								
		Gráfica								
		Simbólica								
CP5: Cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Tarea 1, Tarea 3, Tarea 5, Tarea 6, Tarea 7.	$f(x)$	Verbal	T1				T1	T1	T1	T1
		Tabular						T7	T3,T7	T3, T7
		Gráfica							T4	T4
		Simbólica					T5, T6	T5, T6,T7	T5, T6, T7	T5, T6, T7
	$f'(x)$	Verbal								
		Tabular						T7	T7	T7
		Gráfica								
		Simbólica						T7	T7	T7

Fuente: Tomada y modificada de Pino-Fan (2014)

3.2.4. Aplicación del cuestionario

El trabajo de campo con los estudiantes que participaron de la investigación, en el cual se obtuvieron datos sobre significados de la derivada que manifiestan estudiantes universitarios, para ser analizados y generar conclusiones acerca de los objetivos marcados en la investigación, tuvo una duración de dos horas y fue implementado por el docente encargado del curso.

3.2.5. Análisis de datos

Se pretende interpretar el objeto investigativo mediante las herramientas proporcionadas por el EOS descritas en el capítulo 2, los datos se interpretan a partir de los objetos matemáticos primarios y posible configuración cognitiva a través de las dimensiones duales Personal – institucional, Ostensivo – no ostensivo, Expresión – contenido Godino (2002). Ver Figura 2, sección 6.3.

3.2.6. Unidad de análisis de los datos

Corresponde a las soluciones presentadas por los estudiantes a cada tarea propuesta, y a partir de estas interpretar significados, objetos matemáticos primarios y posible configuración cognitiva.

4. ANÁLISIS

4.1. Valores y variables consideradas

En la investigación se consideran dos variables: 'grado de corrección' y 'significados'; la variable grado de corrección refiere a la solución de la tarea, se asignaron valores 0, 1, 2, 3, 4 según si la respuesta era: no responde, incorrecta, parcialmente correcta, correcta o novedosa; las características de lo que fue considerado una respuesta como no responde, incorrecta, parcialmente correcta o novedosa para cada tarea se presenta en la Tabla 14.

La variable 'grado de corrección' en la solución de las tareas permitió agrupar las respuestas de los estudiantes según el tipo de configuración que se manifestó en la solución, lo que facilitó la descripción de algunos tipos de configuración cognitiva. La variable 'significados', está asociada con los objetos matemáticos primarios identificados por el investigador en la solución de la tarea y el posible tipo de configuración cognitiva en la cual se especifican los objetos y procesos puestos en juego; esta variable fue principalmente de tipo descriptiva y depende tanto de los objetos matemáticos primarios como de los significados asociados a éstos en las diferentes tareas.

Cada cuestionario fue aplicado a diez estudiantes que cursaron y aprobaron cálculo diferencial. Como se muestra en la Tabla 13, no se encontraron diferencias significativas en las puntuaciones.

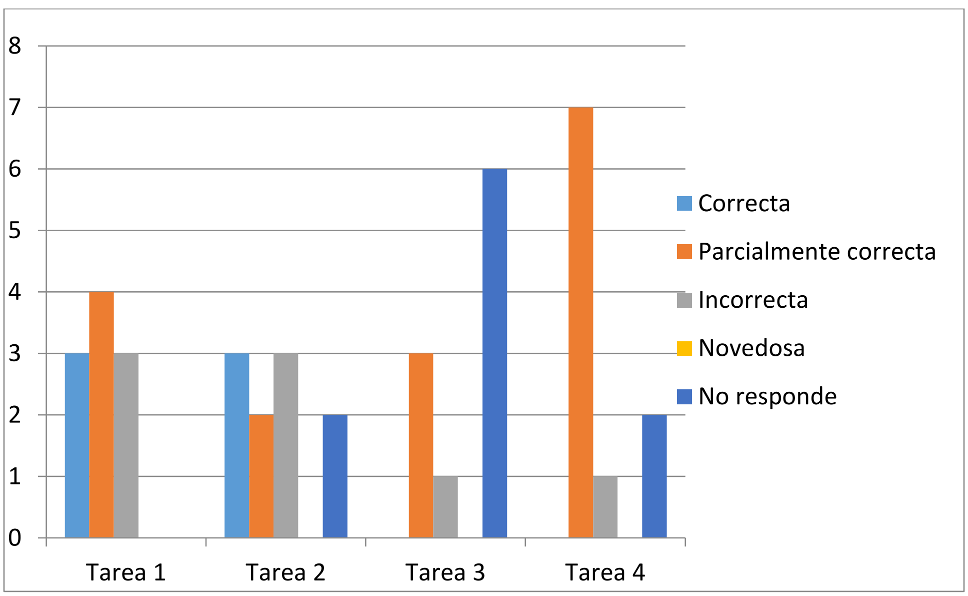
4.2. Análisis de los datos

Usando las herramientas del enfoque Onto-semiótico (EOS) se realizó un análisis de las producciones individuales de los estudiantes, cada conjunto de diez estudiantes respondió al Cuestionario 1 y Cuestionario 2. La Tabla 13 y las Gráfica C1 y C2 presentan las tareas del Cuestionario 1 y el Cuestionario 2 enumeradas de uno a cuatro, con su correspondiente número de respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas, novedosas y no responde, de acuerdo con la solución de cada estudiante.

Tabla 13. *Caracterización de soluciones de los estudiantes por tarea*

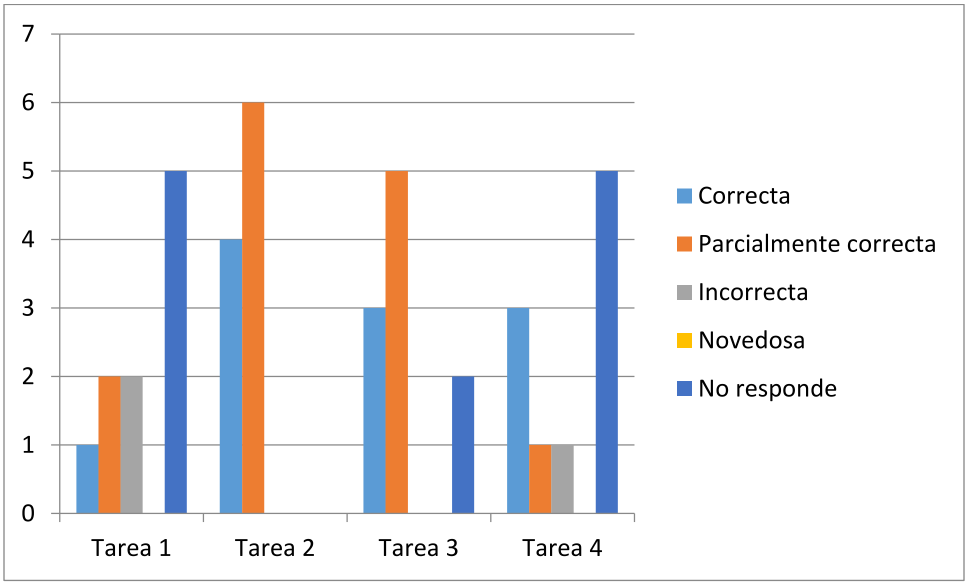
CARACTERIZACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES POR TAREAS						
	Tipo de solución / Tarea	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Novedosa	No responde
Cuestionario 1	Tarea 1	3	4	3	0	0
	Tarea 2	3	2	3	0	2
	Tarea 3	0	3	1	0	6
	Tarea 4	0	7	1	0	2
Cuestionario 2	Tarea 1	1	2	2	0	5
	Tarea 2	4	6	0	0	0
	Tarea 3	3	5	0	0	2
	Tarea 4	3	1	1	0	5

Fuente: Elaboración propia



Gráfica 1: Respuestas Cuestionario 1

Fuente: Elaboración propia



Gráfica 2: Respuestas Cuestionario 2

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 13 y las Gráficas 1 y 2, muestran las frecuencias obtenidas en cada tarea del Cuestionario 1 y Cuestionario 2, respecto a las variables correcta, parcialmente correcta, incorrecta, novedosa y no responde. Es posible inferir una tendencia a que las respuestas de los estudiantes se enmarcan como parcialmente correctas, lo que indica que manifiestan significados incompletos en la solución de las tareas o diferentes a los esperados.

La Tabla 14 presenta los valores 0, 1, 2, 3, 4 si la respuesta es: no responde, incorrecta, parcialmente correcta, correcta o novedosa. Los valores asignados ayudan a establecer comparaciones entre el Cuestionario 1 y Cuestionario 2 en cuanto a dificultad y criterios establecidos para la elección de las mismas (Pino-Fan, 2014) como lo son las representaciones necesarias para resolver cada cuestionario y tendencia a un tipo de solución, lo que significa que mediante los valores asignados se puede concluir si existe desequilibrio de significados requeridos entre las tareas propuestas en cada cuestionario para dar solución.

Tabla 14. *Valores asignados a respuestas de los estudiantes*

Valor	Solución	Descripción
4	Novedosa	Presenta una solución a la tarea con significados sobre la derivada correctos, pero que no están contemplados en las soluciones esperadas.
3	Correcta	Manifiesta uno o varios significados sobre la derivada.
2	Parcialmente correcta	Manifiesta significados incompletos en la solución de las tareas o diferentes a los esperados.
1	Incorrecta	Manifiesta conflictos de significado, referentes a que no corresponden a la tarea planteada.
0	No responde	No manifiesta ningún significado sobre la derivada.

Fuente: Tomada y modificada de Pino-Fan (2014)

Puntos obtenidos en el Cuestionario 1 y Cuestionario 2 con base en los valores asignados en la Tabla 12.

Tabla 15. *Puntuación de tareas de acuerdo al grado de corrección por cuestionario*

Puntuación de las tareas de acuerdo al grado de corrección por cuestionario									
	Tipo de solución / Tarea	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Novedosa	No responde	Puntos por tarea	Total puntos por cuestionario
Cuestionario 1	Tarea 1	9	8	3	0	0	20	**58**
	Tarea 2	9	4	3	0	0	16	
	Tarea 3	0	6	1	0	0	7	
	Tarea 4	0	14	1	0	0	15	
Cuestionario 2	Tarea 1	3	4	2	0	0	9	**64**
	Tarea 2	12	12	0	0	0	24	
	Tarea 3	9	10	0	0	0	19	
	Tarea 4	9	2	1	0	0	12	

Fuente: Elaboración propia

A partir de la información suministrada por la Tabla 15, se puede apreciar que no se presentaron diferencias significativas en los puntos obtenidos entre el Cuestionario 1 y Cuestionario 2, además, en ambos cuestionarios la Tarea 2 presentó mayor frecuencia en cuanto a respuestas correctas y parcialmente correctas.

Para el análisis de los cuestionarios se presenta con antelación las principales representaciones manifestadas por los estudiantes (Tabla 17 y Tabla 18), además, la Tabla 16 para analizar cada tarea y documentar los significados que manifiestan los estudiantes sobre la derivada.

Tabla 16. *Conocimientos y consignas manifestados por estudiantes*

Conocimiento de la derivada	Consigna
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado. Código **A**
Representaciones	Resuelve las tareas utilizando diferentes representaciones. Código **B**
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos. Código **C**
Conceptos propiedades	Identifica los conceptos y propiedades para solucionar las tareas. Código **D**
Argumentos	Explica y justifica las soluciones. Código **E**
Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas avanzados. Código **F**

Fuente: Tomada y modificada de Godino (2009)

Se presenta una matriz para el Cuestionario 1 y otra matriz para el Cuestionario 2 (Tabla 17; matriz Cuestionario 1 y Tabla 18; matriz Cuestionario 2) que favoreció la caracterización de las soluciones propuestas por los estudiantes en términos de las representaciones más utilizadas en la solución de las tareas y las principales consignas presentadas en la Tabla 16.

Tabla 17: *Caracterización de soluciones propuestas por los estudiantes al Cuestionario 1*

CUESTIONARIO 1												
SOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES			REPRESENTACIONES PARA $f(x)$ Y $f'(x)$									
			$f(x)$				$f'(x)$					
Representación de la tarea			Verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica	Verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica	Verbal y Simbólica	Simbólica y Tabular
$f(x)$	Verbal	Tareas 1					10 D,C,A					
	Tabular	Tarea 3					1 E			2 D	1 A, B,C, D	
	Gráfica											
	Simbólica	Tareas 2								8 D		
$f'(x)$	Verbal											
	Tabular											
	Gráfica y Simbólica											
$f(x)$	Verbal											
	Gráfica											
	Tabular y Simbólica	Tarea 4						1D		2 D		5 A,B,C, D

Fuente: Tomada y modificada de Pino-Fan (2014)

Tabla 18. *Caracterización de soluciones propuestas por los estudiantes al Cuestionario 2*

CUESTIONARIO 2													
SOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES			REPRESENTACIONES PARA $f(x)$ Y $f'(x)$										
			$f(x)$				$f'(x)$						
Representación de la tarea			Verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica	Verbal	Tabular	Gráfica	Simbólica	Verbal y Simbólica	Simbólica y gráfica	Simbólica, gráfica y verbal
$f(x)$	Verbal	Tarea 4					1D			6D			
	Tabular												
	Gráfica												
	Simbólica	Tarea 2								2D	1 A, B, C, D ,E	7 A, B, C	
$f'(x)$	Verbal												
	Tabular												
	Gráfica y Simbólica												
$f(x)$	Verbal												
	Gráfica	Tarea 1								3D	1 A, B, C, D ,E	1 A, B, C	
	Tabular												
	Simbólica	Tarea 3								5D			3 A, B, C, D ,E

Fuente: Tomada y modificada de Pino-Fan (2014)

La Tabla 17 y Tabla 18 resumen el análisis de la representación de cada tarea propuesta a los estudiantes, además, las representaciones utilizadas para la solución propuesta mediante los conocimientos y consignas propuestos en la Tabla 16. Cada matriz ilustra que el tipo de representación utilizada por los estudiantes con mayor frecuencia es la verbal y simbólica, cuando la representación de la tarea propuesta es verbal y gráfica-simbólica. Se reconoce la dificultad de presentar soluciones a las tareas mediante la representación tabular y simbólica cuando la representación de la tarea es tabular.

4.3. Análisis Cuestionario 1 y Cuestionario 2 e interpretación de los objetos matemáticos primarios

Se presenta el análisis del Cuestionario 1 y Cuestionario 2, mediante la presentación de tablas que reportan tanto el grado de corrección de cada tarea propuesta, como la descripción y análisis de los objetos matemáticos primarios, así como una posible configuración cognitiva manifestada por el grupo de estudiantes respecto a cada tarea. Lo anterior permitió identificar las principales prácticas matemáticas manifestadas por los estudiantes.

De acuerdo con la perspectiva adoptada en el EOS, a continuación se presenta un análisis detallado de los objetos matemáticos primarios que intervienen en la solución de las tareas y los significados otorgados a estos objetos. Se utilizaron las dimensiones duales representadas en la Figura 2 expresión (significante) – contenido (significado): antecedente (objeto) y consecuente, ostensivo-no ostensivo y personal-institucional (Godino, 2002) para soportar el análisis a lo manifestado por los estudiantes que dan respuesta a cada tarea, mediante un proceso de significación de acuerdo con las acciones establecidas. Se presentan interpretaciones como expresión o antecedente; *Interpretación de los elementos lingüísticos, Interpretación de los conceptos, Interpretación de los procedimientos e Interpretación de las proposiciones,* las acciones de los sujetos están mediadas por el criterio *regulativo (conceptos, proposiciones),* donde los argumentos intervienen como justificación de los procedimientos, proposiciones y definiciones, apoyados en lo *operativo* *(procedimientos)*, soportado en una relación bicondicional con lo *discursivo (lenguaje).* Lo anterior permite la descripción de la actividad matemática.

Figura 2: Miradas duales a objetos matemáticos primarios

Fuente: Elaboración propia

4.3.1. Análisis Tarea 1 Cuestionario 1: Significados de la derivada. La Tabla 19 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección en sus respuestas.

Tabla 19: *Grado de corrección Tarea 1 Cuestionario 1*

Grado de corrección	Tarea 1		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	
Correcta	3	30%	
Parcialmente correcta	4	40%	**Propósito del concepto**
Incorrecta	3	30%	
No responde	0	0%	

Fuente: Elaboración propia

La configuración epistémica representada en la Figura 3 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 1, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 3 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizada por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

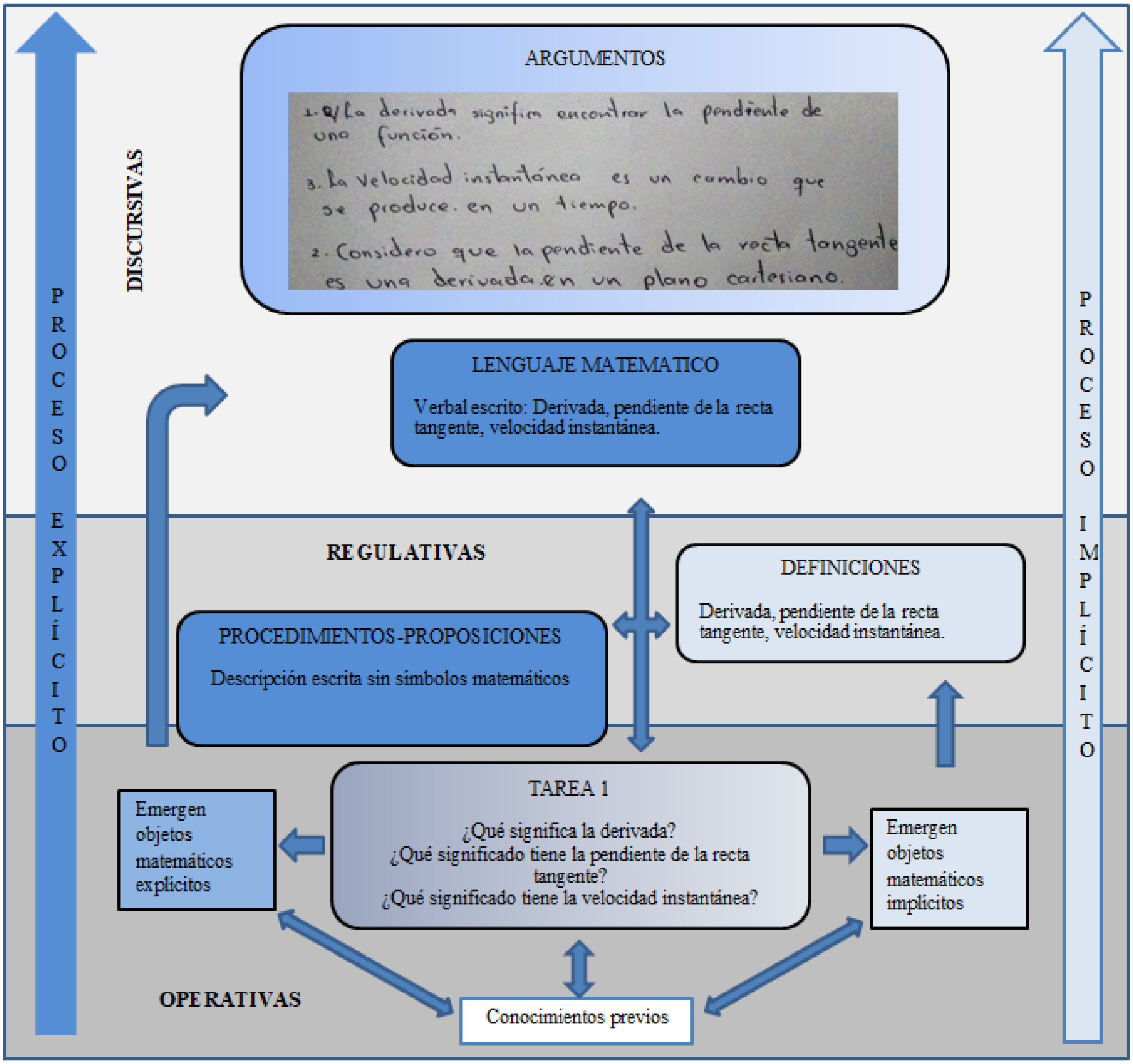


Figura 3: Configuración cognitiva Tarea 1 Cuestionario 1, significados de la derivada

Fuente: Elaboración propia

Tabla 20: *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 1 Cuestionario 1*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Verbal escrito: Derivada, pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea.	Definiciones aisladas sin una relación formal o empírica establecida por el estudiante.	Diferentes usos de la derivada según sea el caso, ejemplo: problemas físicos y matemáticos.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Verbal escrito: Derivada, pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea.	Definiciones aisladas sin una relación formal o empírica establecida por el estudiante.	Definición implícita-descriptiva.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Descripción escrita sin símbolos matemáticos de cada expresión.	Definiciones y creencias acerca de la derivada en diversos contextos.	Define la derivada para dar validez a los argumentos.
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
Derivada es equivalente a la pendiente de la recta tangente.	Definiciones y creencias acerca de la derivada en diversos contextos.	Son las respuestas a las cuestiones planteadas.

Fuente: Elaboración Propia

Expresión - contenido: La Tabla 20 permite evidenciar que los estudiantes utilizan la representación verbal sin símbolos matemáticos, las definiciones son implícitas y su uso es descriptivo. Las definiciones propuestas muestran la complejidad de los estudiantes frente a la cantidad de significados parciales de la derivada y la posibilidad de relacionarlos o expresar un ‘macro significado’. Las proposiciones manifestadas se relacionan con lo procedimental y se soportan en la situación que se proponga, debido a que no se evidencia relación entre las respuestas presentadas para los ítems de la tarea.

Ostensivo - no ostensivo: los estudiantes pretenden utilizar el significado de derivada, significado de la recta tangente y velocidad instantánea como definiciones aisladas, y transforman las definiciones no ostensivas (implícitas) en procedimientos ostensivos de carácter descriptivo.

Personal - institucional: se preferencia la descripción verbal y la representación verbal en cuanto a los objetos matemáticos emergentes personales. Al analizar las respuestas otorgadas por los diez estudiantes se evidencian maneras de 'actuar' compartidas que reciben un cierto grado de regulación interna en el grupo de diez estudiantes, 'cogniciones institucionales' reguladas y adaptadas a nivel institucional.

El propósito de la Tarea 1 era explorar significados sobre la derivada. Los estudiantes manifestaron definiciones-proposiciones diferentes para cada ítem de la tarea, mediante la representación verbal. Como se puede evidenciar en la Tabla 19, los estudiantes no tuvieron dificultad para responder a la tarea, solo tres estudiantes respondieron de forma incorrecta, sin embargo, se puede apreciar una aproximación al significado de la pendiente de la recta tangente, pero es de notar conflictos de significado o significados incompletos, puesto que los significados no son del todo incorrectos. La Figura 4 es un ejemplo de lo escrito.

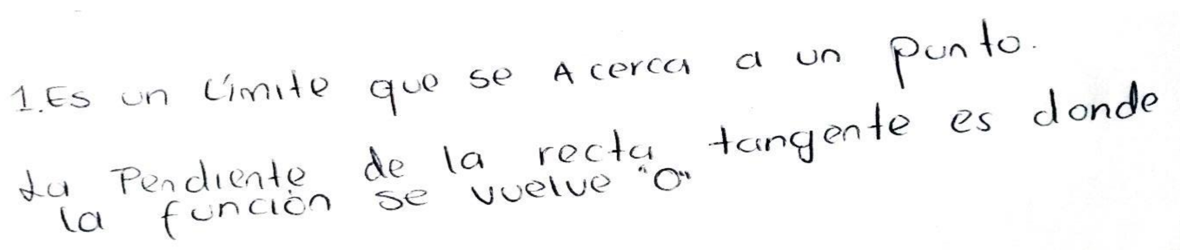
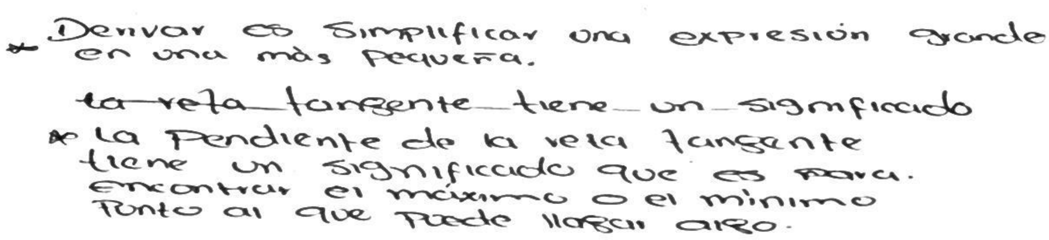

1.Es un Límite que se Acerca a un punto.
La Pendiente de la recta tangente es donde la función se vuelve "0"

Figura 4: Significado manifestado por estudiante E4 en la Tarea 1 Cuestionario 1

Fuente: Tomado de definiciones escritas por el estudiante E4

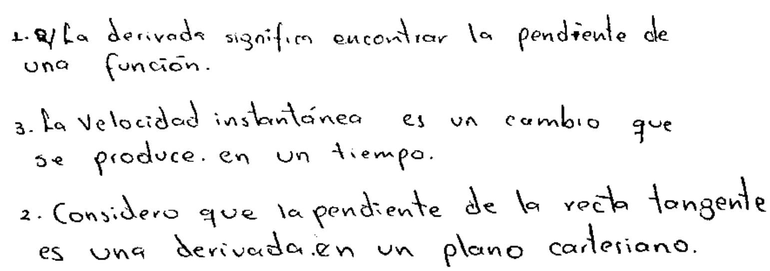
Otros estudiantes, Figura 5, dotan de significado a la expresión verbal "pendiente de la recta tangente" debido a que la consideran más apropiada para hallar máximos y mínimos, y "la derivada" solo la asumen como una técnica para simplificar una expresión.



* Derivar es simplificar una expresión grande en una màs pequeña.
~~la reta tangente tiene un significado~~
* la pendiente de la reta tangente tiene un significado que es para. encontrar el máximo o el mínimo punto al que puede llegar algo.

Figura 5: Significado manifestado por estudiante E5 en la Tarea 1 Cuestionario 1
Fuente: Tomado de definiciones escritas por el estudiante E5

Los significados de la derivada frecuentemente mencionados fueron velocidad instantánea, variación: cambio de una función y pendiente de la recta tangente, además tres de los diez estudiantes manifiestan tres significados: la derivada, la derivada como velocidad instantánea y la derivada como pendiente de la recta tangente. La acepción de la derivada como límite del cociente incremental no fue manifestada. La representación recurrente fue la verbal.



1. La derivada significa encontrar la pendiente de una función.
3. La velocidad instantánea es un cambio que se produce. en un tiempo.
2. Considero que la pendiente de la recta tangente es una derivada.en un plano cartesiano.

Figura 6: Significado manifestado por estudiante E6 en la Tarea 1 Cuestionario 1
Fuente: Tomado de definiciones escritas por el estudiante E6

En algunas respuestas solo se proporcionan listados de posibles significados, lo cual era parte del objetivo de la tarea, estos listados se contrastan con otros significados requeridos para resolver las tareas propuestas, además, se identifican conflictos de significado-Figura 4- y se obtiene un conjunto de significados que permiten identificar el significado personal que los estudiantes manifiestan sobre la derivada.

Debido a las características de la tarea, no es fácil establecer una o varias configuraciones de objetos matemáticos que incluyan las múltiples definiciones, conceptos y argumentos manifestados, sin embargo, se presentan objetos matemáticos en la respuestas proporcionadas por los estudiantes con una finalidad, una aplicación a diversas situaciones planteadas en la Tarea 1 y en las demás tareas, razón por la cual se identifica y propone la configuración cognitiva denominada *propósito del concepto*. Para la anterior configuración cognitiva analizamos un ejemplo prototípico.

Este tipo de solución presenta argumentos que surgen a partir de la proposición presentada mediante los elementos lingüísticos que emergen a partir de interpretaciones y representaciones respecto a la derivada, debido a lo anterior se evidencia que la mayoría de los significados sobre la derivada se presentan con un propósito, por ejemplo afirmaciones sobre la velocidad instantánea como “es la velocidad en tiempo mínimo”, “es un intervalo de tiempo pequeño”, “la velocidad instantánea [sic] es una velocidad muy minima [sic] que tiene un valor (0) quiere decir que es muy rápida” evocan problemas sobre física.

Afirmaciones sobre la pendiente de la recta tangente como “Es la recta que muestra hacia donde varia o cambia la función”, “…es una derivada en un plano cartesiano.”, “…es para encontrar el máximo o el mínimo punto al que puede llegar algo.” las anteriores afirmaciones evocan un uso matemático.

Por último, las afirmaciones sobre derivada como: “La derivada significa convertir una recta secante a una recta tangente, es una pendiente.”, “…Es una variación y un cambio en una pendiente”, “La derivada significa encontrar la pendiente de una función”, “es una variación, cambio de una función.”, evocan un significado geométrico.

Lo anterior sugiere la idea de que la representación y práctica matemática con la cual el estudiante resuelve las tareas propuestas, depende de la representación y enunciado de la tarea propuesta, es decir, la solución depende de un amplio espectro de significados y representaciones, que el estudiante pueda manifestar.

Las respuestas a la tarea muestran la dificultad de establecer un ‘concepto’ macro sobre la derivada que incluya y relacione a otros significados parciales; para los estudiantes los significados parciales refieren a significados no relacionados que no forman parte ni de un entramado ni de una configuración epistémica, lo anterior puede representar para los estudiantes diferentes significados no relacionados.

Los procedimientos dan cuenta de una desconexión entre significados, se manifiesta una brecha entre la definición, procedimiento (*regulativas*) y los objetos argumentativos (*discursivo*) en cuanto a la parcialidad en los procedimientos y la poca presencia de simbología matemática. Los estudiantes proceden con la solución de la tarea, con la solución de cada ítem de forma parcial.

4.3.2. Análisis Tarea 2 Cuestionario 1: Análisis de tasa de variación instantánea. La Tabla 21 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 21. *Grado de corrección Tarea 2 Cuestionario 1*

Grado de corrección	Tarea 2		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	**Técnica-simbólica**
Correcta	3	30%	
Parcialmente correcta	2	20%	
Incorrecta	3	30%	
No responde	2	20%	

Fuente: Elaboración propia

La configuración epistémica representada en la Figura 7 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 2, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 7 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

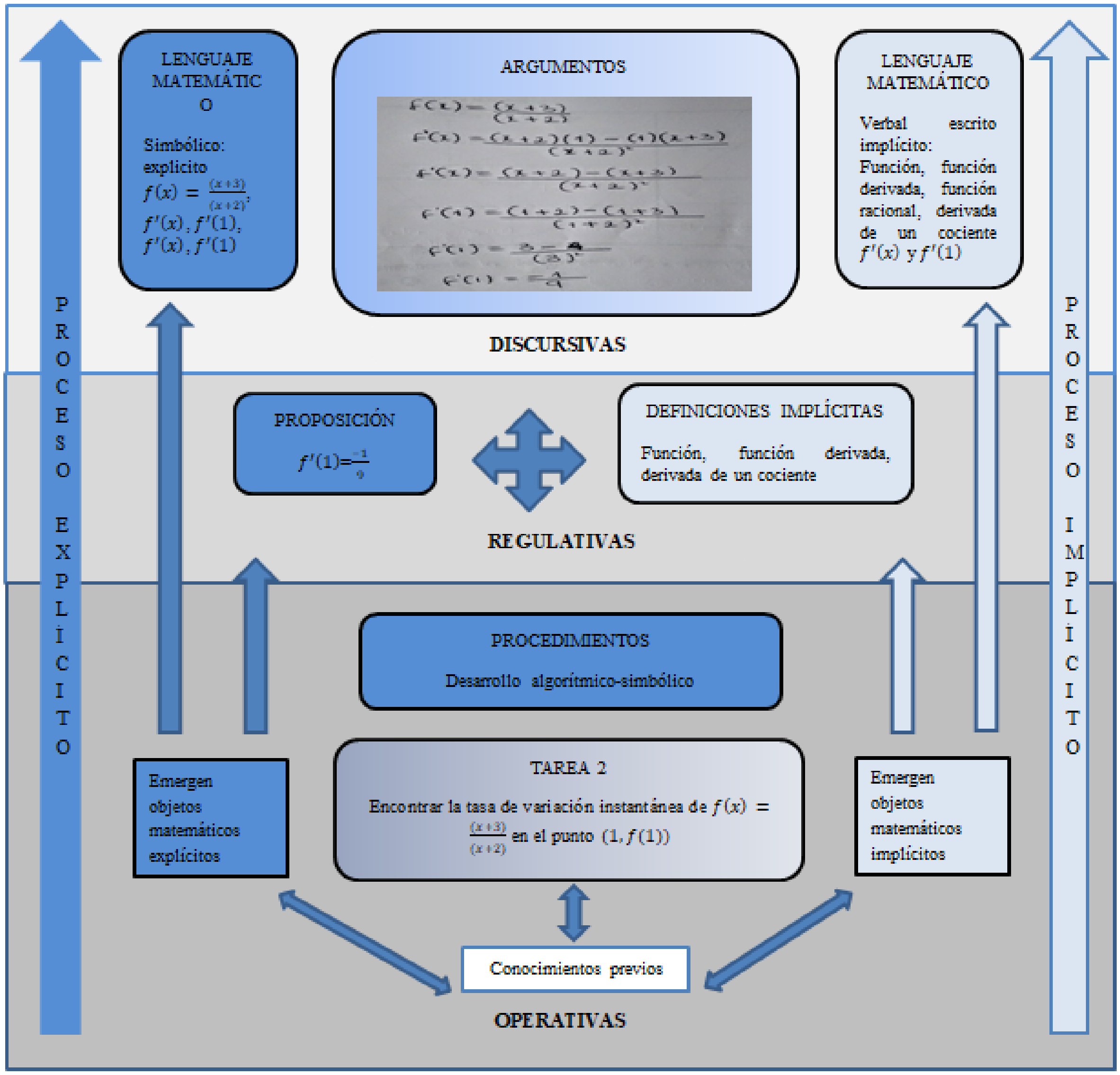


Figura 7: Configuración cognitiva Tarea 2 Cuestionario 1, análisis de la tasa de variación instantánea

Fuente: Elaboración propia

Tabla 22. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 2 Cuestionario 1*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico: explícito $f(x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}, f'(x), f'(1)$ Verbal escrito implícito: Función, función derivada, función racional, derivada de un cociente.	Reglas para derivar un cociente. Definiciones implícitas en el procedimiento.	Derivada de un cociente. Reglas para derivar un cociente de forma simbólica.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Verbal escrito: Función, función derivada, derivada de un cociente.	Aplicación de la regla para derivar un cociente.	Definición implícita-descriptiva y algorítmica.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Técnica para derivar un cociente.	Derivar $f(x)$ y reemplazar $x = 1$ en $f'(x)$	Derivar funciones de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
$f'(1) = \frac{-1}{9}$	Derivar $f(x)$ y reemplazar $x = 1$ en $f'(x)$.	Respuesta a la tarea propuesta.

Fuente: Elaboración Propia

Ostensivo - No ostensivo: los elementos lingüísticos referidos en la Figura 7 y Tabla 22, dan cuenta de la diversidad de objetos que se ponen en juego para presentar la solución a la Tarea 2. Se observa que estos elementos refieren a la función, función derivada y a la derivada de un cociente, además, los estudiantes relacionan la tarea propuesta y su solución mediante la regla para derivar un cociente. Lo anterior se evidencia en el argumento presentado por el estudiante E10 en cuanto a una notación simbólica correcta de función y función derivada que sustentan la emergencia de objetos matemáticos implícitos conceptuales como función racional, función y función derivada asumidas como no ostensivas en la solución de la tarea.

Expresión - Contenido: los elementos conceptuales implícitos y explícitos identificados en la solución de la Tarea 2, requieren de conocimientos relativos a la derivada de un cociente. La tarea se presenta de forma simbólica, en la cual se identifica que una forma de lograr resolver la tarea es mediante la derivada de un cociente, este hecho dentro del EOS se sustenta en prácticas mediadas por proposiciones y definiciones implícitas, que justifican su uso mediante los argumentos.

Personal - Institucional: en las soluciones de la Tarea 2, ocho de los diez estudiantes manifestaron la representación simbólica mediante la regla para derivar un cociente. Los estudiantes que presentaron una solución incorrecta aplicaron la regla para derivar un cociente de forma memorística, debido a que no recordaban cómo se debía escribir en cuanto a signos y símbolos matemáticos de suma y resta, sin embargo, tenían conocimiento de cómo proceder como se observa en la Figura 8.

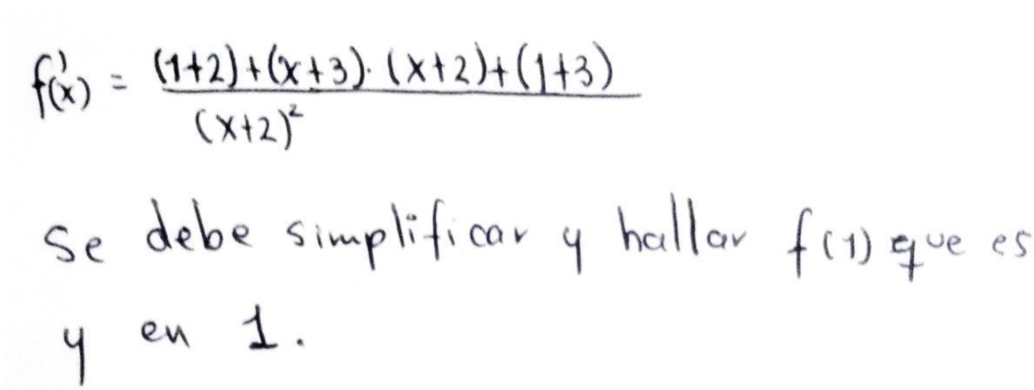


Figura 8: Significado manifestado por estudiante E6 en la Tarea 2 Cuestionario 1

Fuente: Tomado de definiciones escritas por el estudiante E6

Con la Tarea 2 se pretendía explorar los significados de la derivada como tasa de variación instantánea por medio del límite del cociente incremental, además del significado en un punto como recta tangente o como función derivada. Se observa que el 50% de los estudiantes resolvieron la tarea de forma satisfactoria. Según la Tabla 5, la representación utilizada por los estudiantes sin importar si la respuesta es correcta, es la simbólica, como se evidencia en la Figura 9, a través de un proceso algorítmico, en el cual se usa un lenguaje simbólico-algebraico de tipo notacional para realizar los procedimientos.

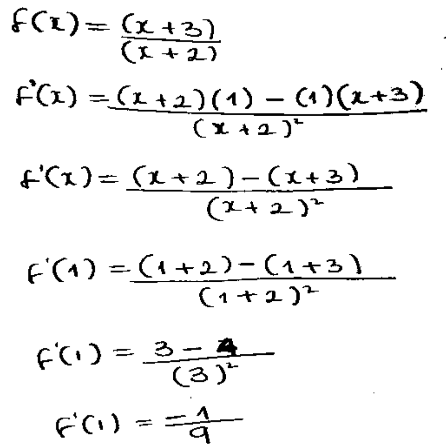


Figura 9: Significado manifestado estudiante E10 en la Tarea 2 Cuestionario 1

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E10

Las respuestas de los estudiantes, que se ubican en el grado de corrección "incorrecto", manifiestan significados aproximados, con lo cual no todo lo manifestado por ellos se considera incorrecto, debido a que exponen inicios correctos en la solución de la tarea y se equivocan en el proceso, sumando o multiplicando. Se infiere que manifiestan un proceso memorístico que genera errores y conflictos de significado.

La solución de la Tarea 2 se centra en una práctica procedimental, que generó errores en la solución de la tarea, no por el aspecto procedimental, sino por la preferencia de procedimientos memorísticos (Artigue, 1995), lo anterior evidencia dificultades en la comprensión del concepto de derivada, precisamente, denota un significado incompleto de la derivada, y la configuración cognitiva *Técnica-simbólica*, 'fisurada'.

Las dificultades se hacen evidentes cuando la solución de la tarea reclama un significado de la derivada, como puede ser a partir de su expresión simbólica como el límite del cociente incremental (Fuentealba, Sánchez-Matamoros y Badillo, 2015), sin embargo, si los estudiantes comprenden el significado de la derivada en sus distintos modos de representación y posibles conversiones (Font, 1999) podrían haber favorecido la solución de la Tarea 2. En las soluciones que dieron los estudiantes a la Tarea 2, se identificó la configuración cognitiva denominada *técnica-simbólica*. Para la anterior configuración cognitiva analizamos un ejemplo prototípico.

Las principales argumentaciones que surgen para la solución a partir de las proposiciones presentadas mediante los elementos lingüísticos emergen de "¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto $(1, f(1))$?" y la principal característica de este tipo de soluciones radica en el uso y manipulación algorítmica de elementos simbólicos, las respuestas se basan en técnicas para derivar, reglas de derivación y derivada de un cociente, de lo que surgen a priori relaciones y traducciones de objetos matemáticos emergentes a partir de la representación de la tarea, como parte fundamental que entrelaza la manipulación algorítmica y los elementos simbólicos, que se configuran de acuerdo a la representación de la tarea y los significados sobre la derivada de los estudiantes (Fuentealba, Sánchez-Matamoros y Badillo, 2015)

Como se puede observar en la Figura 9, el estudiante inicia con la representación simbólica de la función "$f\ (x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$" y luego calcula mediante la regla de derivación de un cociente la derivada de la función, la cual es un elemento lingüístico representativo en la solución. El estudiante establece como único concepto la derivada de un cociente, y como único argumento la solución de la tarea.

Se resalta en la Tarea 2 la importancia del enunciado y la representación que se presenta en este, debido a que los estudiantes manifiestan significados respecto a la derivada dependiendo del tipo de enunciado, por lo cual para que se logre la solución a tareas, de acuerdo con la demanda cognitiva, se requiere que los estudiantes usen la representación del enunciado de la tarea (Tallman, Carlson, Bressoud y Pearson, 2016) y establezcan relaciones entre los diferentes objetos matemáticos (Badillo, Fuentealba, Sánchez, 2015).

4.3.3. Análisis Tarea 3 Cuestionario 1: Derivada en un punto por aproximación numérica. La Tabla 23 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 23. *Grado de corrección Tarea 3 Cuestionario 1*

Grado de corrección	Tarea 3		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	**Tasa de variación instantánea**
Correcta	0	0%	
Parcialmente correcta	3	30%	
Incorrecta	1	10%	
No responde	6	60%	

Fuente: Elaboración propia

La configuración epistémica representada en la Figura 10 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 3, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 10 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

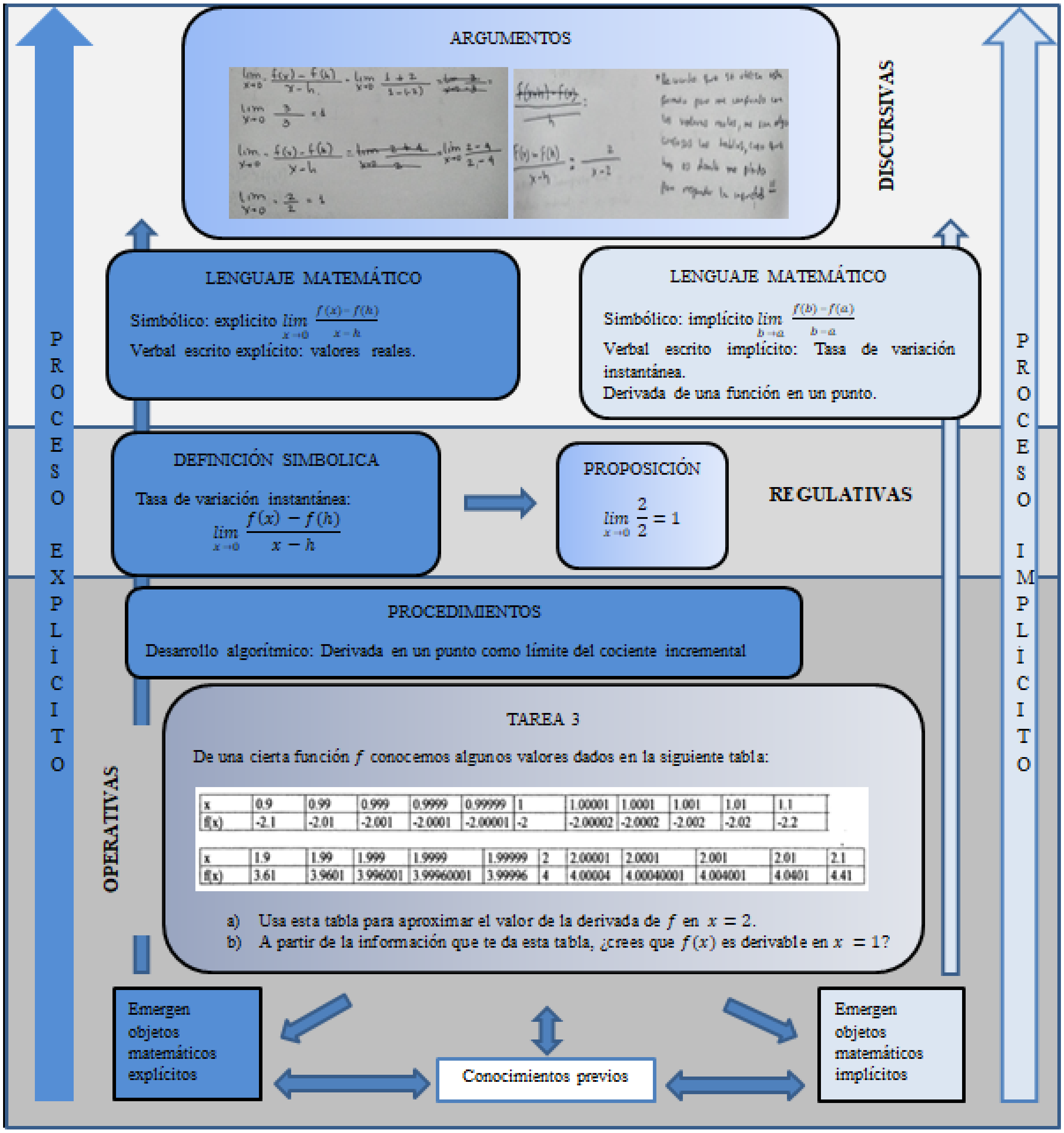


Figura 10: Configuración cognitiva Tarea 3 Cuestionario 1, derivada en un punto por aproximación numérica

Fuente: Elaboración propia

Tabla 24. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 3 Cuestionario 1*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico: explícito $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(h)}{x-h}$ Simbólico: implícito $\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Verbal escrito explícito: Valores reales. Verbal escrito implícito: Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto.	Emplear la expresión del límite del cociente incremental para calcular el valor de la derivada en $x = 2$ y $x = 1$.	Concepto del límite del cociente incremental de forma memorística y algorítmica, para determinar en el punto $x = 2$ y $x = 1$.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico: explícito $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(h)}{x-h}$ Verbal escrito explícito: valores reales. Verbal escrito implícito: Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto. Simbólico: implícito $\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Definir simbólicamente la tasa de variación instantánea en la cual se reemplazan algunos valores para obtener una posible solución.	Herramienta simbólica en la cual al reemplazar algunos valores reales (números) se obtiene otro valor numérico.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Solución mediante el límite del cociente incremental.	Emplear la expresión del límite del cociente incremental para calcular el valor de la derivada en $x = 2$ y $x = 1$.	Hallar la derivada de la función $f(x)$ expresada de forma tabular mediante el límite del cociente incremental.
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
Solución propuesta a través del límite del cociente incremental.	Solucionar de forma algorítmica memorística para obtener un valor numérico.	Respuesta a las cuestiones planteadas.

Fuente: Elaboración Propia

En la Tarea 3, cuatro estudiantes manifestaron soluciones y seis estudiantes no dieron respuesta, sin embargo, en las respuestas que han sido “clasificadas” como correctas y parcialmente correctas se asignan los siguientes atributos contextuales (dualidades): solo tres estudiantes presentaron una solución parcialmente correcta y la solución presento objetos matemáticos ostensivos como el simbólico-explícito “$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(h)}{x-h}$”, que permite a los objetos matemáticos Simbólico implícito $\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ su constitución y funcionamiento (Font, 2005), además la generalidad en la solución es la declaración verbal escrita en la cual manifiestan recordar el procedimiento más no aspectos como la forma correcta de representar la tasa de variación o el límite del cociente incremental.

Se identificaron diversos elementos lingüísticos en las soluciones proporcionadas Figura 10, en los cuales se reconoce el uso de conceptos/definiciones en su representación simbólica, identificados en la solución, además, el uso de proposiciones-procedimientos que justifican el argumento.

Los estudiantes que presentaron solución a la Tarea 3 coincidieron en un error de representación simbólica de la tasa de variación instantánea y el límite del cociente incremental, que refiere a la ‘combinación’ de las representaciones. Lo anterior se muestra en la Figura 11.

La representación manifestada por los estudiantes que hace alusión al límite del cociente incremental y la representación de la tarea de forma simbólica y tabular, establece un proceso a seguir cuando la información que proporciona la tarea es presentada por medio de la representación tabular. Los cuatro estudiantes que manifestaron una posible solución coinciden en el proceso para lograr solucionar la Tarea 3, el significado atribuido de acuerdo con las representaciones de la tarea refiere a que la derivada presenta diferentes significados parciales vistos como ‘herramientas’ a utilizar de acuerdo a la solución.

No se evidencia un proceso de interpretación de la tarea e intento de análisis por medio de otro significado parcial que no sea el límite del cociente incremental. Los estudiantes, en la Tarea 3, seis de ellos, tienen dificultades cuando necesitan utilizar el significado de la derivada, a través de su expresión simbólica como límite del cociente incremental, lo que indica que estos estudiantes no han construido un significado adecuado del concepto de derivada, además, se observan conflictos de significado, Figura 11, en la interpretación de la derivada cuando la representación del enunciado de la tarea se presenta en forma tabular, en la cual se indaga por su carácter puntual (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008).

Personal – institucional: Se percibe una regla institucional marcada por la forma de proceder frente a la Tarea 3, en cuanto a la utilización del límite del cociente incremental cuando la información está representada de forma tabular, se presentan posibles soluciones semejantes y por lo tanto sistemas de prácticas compartidos en el seno institucional.

La Tarea 3 tenía como propósito explorar los significados de la derivada en un punto por aproximación numérica, además de interpretaciones a partir de la representación tabular. En las soluciones que dieron los estudiantes a la Tarea 3, se identificó la configuración cognitiva denominada *tasa de variación instantánea*, sin embargo, los estudiantes no manifestaron una práctica matemática ajustada a la situación planteada. Para la anterior configuración cognitiva analizamos ejemplos prototípicos.

El eje central de este tipo de solución son las argumentaciones que surgen a partir de la proposición presentada mediante los elementos lingüísticos "Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$" y "A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?".

En las soluciones presentadas en la Tarea 3 fueron recurrentes respuestas como "no recuerdo", "no comprendo cómo crear la función para luego evaluar $f(x)$ en 2" lo cual es equivalente a que un 70% de los estudiantes manifiesta no recordar cómo realizar la tarea, sin embargo, la estudiaron en el curso de cálculo diferencial, como se puede observar en la Figura 11.

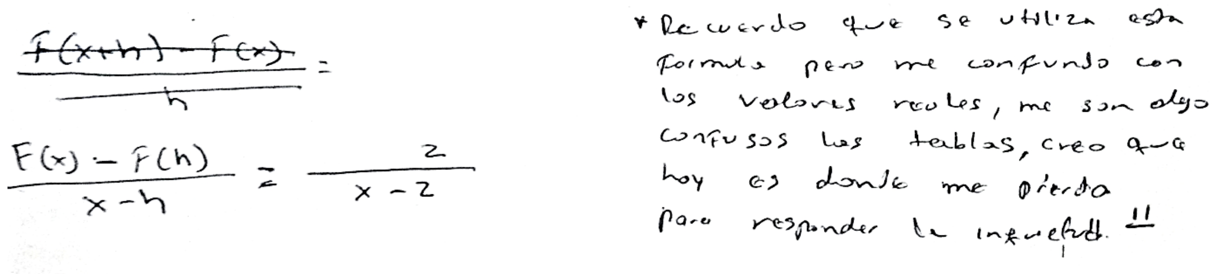


Figura 11: Significado manifestado por estudiante E8 en la Tarea 3 Cuestionario 1

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E8

La característica de este tipo de solución es el uso de argumentaciones apoyadas en la noción de tasa de variación instantánea. En la Figura 12 se puede observar como el estudiante utiliza elementos lingüísticos simbólicos que hacen referencia al concepto de tasa de variación instantánea, representada simbólicamente como $\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. La derivada la interpreta como razón de cambio. El estudiante presenta procedimientos algorítmicos-simbólicos en la solución de la tarea, lo anterior deja en evidencia que los significados que construyen los estudiantes están vinculados a determinados modos de representación, además, los significados no están relacionados. Los estudiantes no coordinan el paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$ y tampoco, traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$ (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Font, 1999)

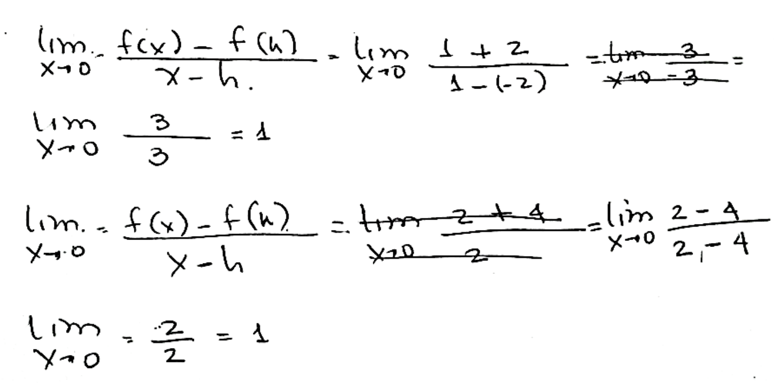


Figura 12: Significado manifestado por estudiante E7 en la Tarea 3 Cuestionario 1

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E7

En el significado que emerge de la derivada como tasa de variación instantánea se evidencian objetos matemáticos como elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que representan un acercamiento al dominio conceptual por parte del estudiante, sin embargo, pasar de la representación tabular a la simbólica genera dificultades en los estudiantes, debido a que los estudiantes utilizan procedimientos analíticos y algorítmicos y no los argumentos visuales u otras formas de representar la derivada, dado que "los objetos matemáticos no son accesibles directamente por medio de los sentidos, es fundamental el papel que juegan las representaciones en la construcción de conocimiento matemático" (Vrancken, Engler y Müller, 2012, pág.236), esto es, los modos de representación influyen en la construcción y "operativización" de los significados que manifiestan los estudiantes (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008), debido a que no los relacionan.

En la Figura 12 se presenta que la práctica matemática del estudiante E7 consiste en asignar valores a "$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(h)}{x-h}$" y calcular el valor de la derivada en $x = 2$. El estudiante halla los valores para $x = 2$ y $x = 1$ de forma incorrecta. Se evidencia el elemento lingüístico "$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(h)}{x-h}$" y conceptos como razón de cambio y tasa instantánea de variación, que evidencia y valida el procedimiento realizado por el estudiante el cual consistió en asignar valores sin una atribución de significado apropiada en función de la información presentada en la tabla de la Tarea 3.

Se observa que el estudiante no justifica el uso de elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y procedimientos que emplea en la solución, y establece como único argumento la solución simbólica, esto debido a como lo menciona Sánchez, (2014) la comprensión de la derivada se dificulta debido a diferentes perspectivas como pendiente de la tangente a la curva, límite del cociente incremental, carácter puntual (derivada en un punto), global, relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada y las relaciones entre f' y f''.

Las soluciones presentadas evidencian que los estudiantes tienen conflictos de significados para relacionar de forma correcta diferentes acepciones de la derivada como la tasa de variación instantánea y el límite del cociente incremental, como para establecer conexiones entre estas acepciones y la representación tabular de la función, lo que evidencia desconexión entre los significados que ellos 'recordaban' haber estudiado en otros cursos.

4.3.4. Análisis Tarea 4 Cuestionario 1: Relaciones entre $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f'}$ y $\boldsymbol{f''}$. La Tabla 25 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 25. *Grado de corrección Tarea 4 Cuestionario 1*

Grado de corrección	Tarea 4		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	**Algorítmica**
Correcta	0	0%	
Parcialmente correcta	7	70%	
Incorrecta	1	10%	
No responde	2	20%	

Fuente: Elaboración Propia

La configuración epistémica representada en la Figura 13 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 4, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. La Figura 13 presenta los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

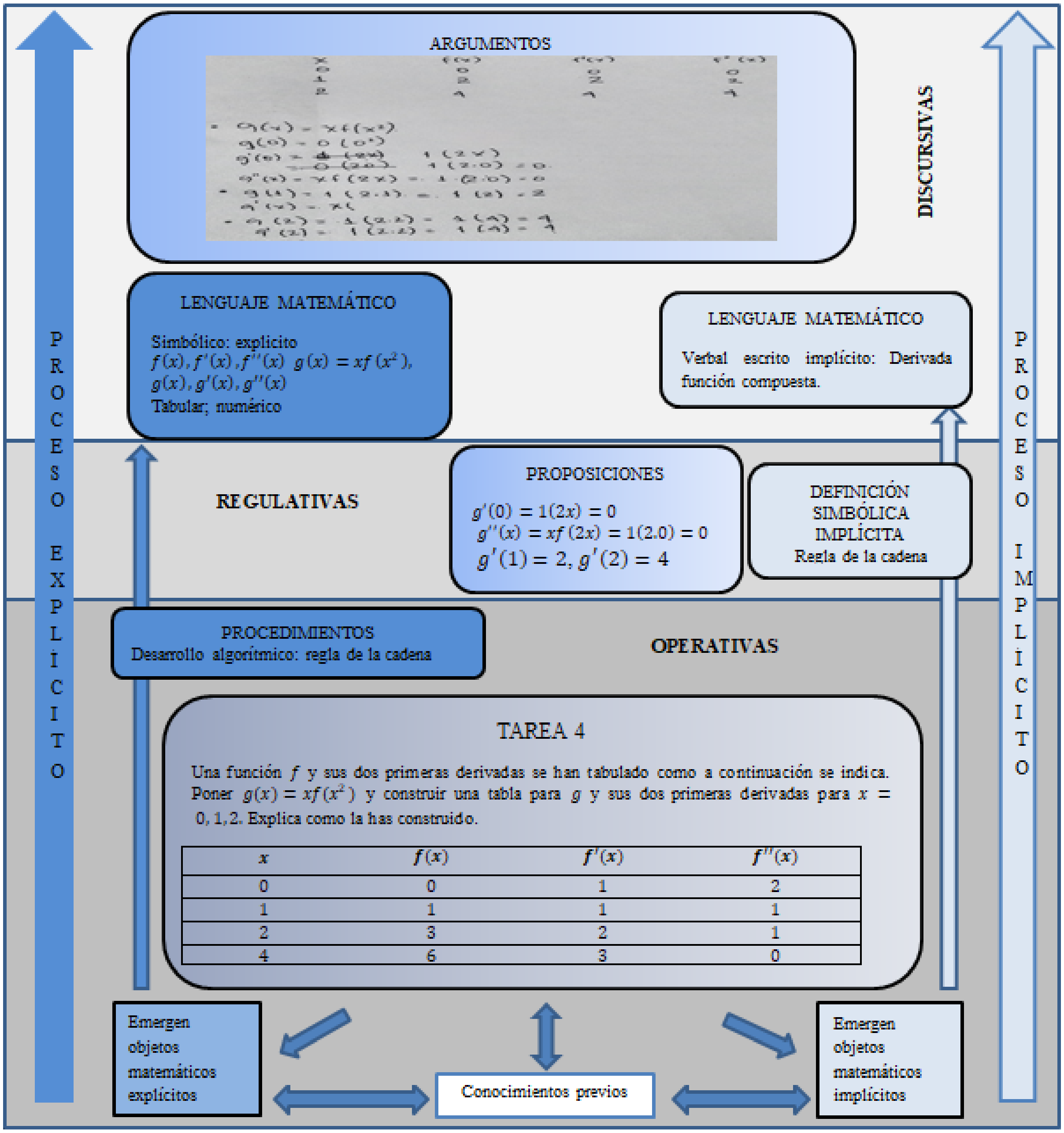


Figura 13: Configuración cognitiva Tarea 4 Cuestionario 1, relaciones entre f, f' y f''

Fuente: Elaboración propia

Tabla 26. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 4 Cuestionario 1*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico: explícito $f(x), f'(x), f''(x)$ $g(x) = xf(x^2), g(x), g'(x), g''(x)$ Tabular; numérico Verbal escrito implícito: Derivada función compuesta.	Regla de la cadena.	Hallar la expresión simbólica para la primera y segunda derivada.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Regla de la cadena.	Aplicación de la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.	La solución como posible herramienta para reemplazar los valores propuestos de la tarea expresados de forma tabular.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Desarrollo algorítmico de la regla de la cadena.	Se logran obtener expresiones simbólicas y con estas valores numéricos para $g(x), g'(x), g''(x)$.	Permite obtener expresiones simbólicas para $f(x), f'(x), f''(x)$.
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
$g'(0) = 1(2x) = 0$ y $g''(x) = xf(2x) = 1(2.0) = 0$ $g'(1) = 2, g'(2) = 4$	Derivadas incorrectas, se presentan procedimientos incorrectos que vislumbran la intencionalidad de aplicar regla de la cadena.	Se usa para hallar $g(x), g'(x), g''(x)$.

Fuente: Elaboración Propia

El propósito de la Tarea 4 es explorar la relación de significados entre la función $f(x)$, primera derivada de $f(x)$ y segunda derivada de $f(x)$, presentados de forma simbólica algebraica/analítica y tabular, y determinar el significado algebraico al utilizar la derivada de forma simbólica algebraica/analítica (derivadas de funciones compuestas) con ayuda de la regla de la cadena. En las soluciones que dieron los estudiantes a la Tarea 4, se identificó la configuración cognitiva denominada *técnica-algorítmica*. Para la anterior configuración cognitiva analizamos un ejemplo prototípico.

La característica principal de este tipo de solución refiere a las argumentaciones que surgen a partir de la proposición presentada mediante los elementos lingüísticos “Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Poner $g(x) = xf(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$” y “$g(x) = xf(x^2)$” y se realizan mediante procedimientos algorítmicos. En la Figura 16 se presenta un ejemplo.

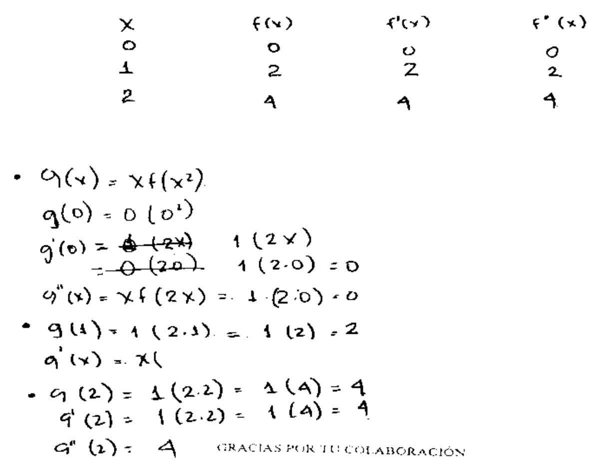


Figura 14: Significado manifestado por estudiante E7 en la Tarea 4 Cuestionario 1

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E7

Como se observa en la Figura 14, el estudiante proporciona valores para $g(x) = xf(x^2)$, $g'(x)$ y $g''(x)$ y calcula los valoreas con base en la función f representada de forma tabular, finalmente el estudiante concluye presentando una tabla para g y sus dos primeras derivadas. La representación simbólica de las dos primeras derivadas de g , usada por el estudiante, es incorrecta.

Es posible identificar en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes elementos lingüísticos recurrentes como el simbólico $g(x) = xf(x^2)$, y tabular, además, conceptos como regla de la cadena y la función derivada, que se manifiestan mediante elementos lingüísticos “$g'(0) = 1(2x)$” y “$g''(x) = xf(2x) = 1(2.0) = 0$”que muestran evidencia del procedimiento analítico-algorítmico, que consistió en el cálculo mediante regla de la cadena de la primera y segunda derivada de g.

Se observa que el estudiante E7 no justifica el uso de elementos lingüísticos conceptos, proposiciones y procedimientos que emplea en la solución, el estudiante resuelve la tarea, pero se equivoca cuando halla la primera y segunda derivada, por lo cual la solución presentada es incorrecta. Los estudiantes se inclinan a operar de forma rutinaria, manipulación de símbolos y procedimientos, manifestando un significado parcial de la derivada, un significado memorístico, que no está respaldado por una comprensión de los conceptos involucrados, generando inconvenientes para la solución de problemas no rutinarios, en los cuales se requiere de un significado holístico. Se manifiesta la necesidad de comprender el concepto de derivada antes de iniciar con reglas como la regla para derivar una constante, la regla de la suma y la diferencia, la regla del producto, la regla del cociente y regla de la cadena (Siyepu, 2015)

Se observa que ocho estudiantes proporcionaron respuestas a la Tarea 4, intentando derivar $g(x)$ mediante la regla de la cadena. Se presentó con frecuencia en las Tareas 1, 2 y 3 del Cuestionario 1 y se confirma en la Tarea 4 que los estudiantes reconocen como proceder a para proponer solución a las tareas, pero presentan ‘vacíos’ en aspectos como la derivada de una función del tipo $g(x) = xf(x^2)$ en cuanto a procedimientos algorítmicos.

Los estudiantes manifiestan objetos matemáticos ostensivos -Figura 15-, que dan cuenta de la implementación de regla de la cadena como posible solución. Los estudiantes parecen ignorar y no relacionar diferentes significados de la derivada que les permitan establecer otra forma de proceder o ‘recordar’ como realizar determinada tarea.

Las respuestas de los estudiantes permiten analizar la práctica matemática a partir de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y los valores proporcionados en la tabla de la tarea propuesta. Los estudiantes proporcionan por medio de “reglas” la derivada de $g(x)$ de forma parcialmente correcta y posible representación tabular -Figura 14-.

En la solución destacan objetos matemáticos lingüísticos simbólicos y verbales que dan cuenta de la práctica implementada, que consiste en derivar una función compuesta por medio de la ‘técnica’ regla de la cadena y sustituir valores presentes en la tabla propuesta en la Tarea 4. Queda implícito en su procedimiento la definición de función compuesta y la regla de la cadena.

Los estudiantes demostraron tener conocimientos necesarios para la solución de la Tarea 4, sin embargo, cuando los procedimientos son avanzados se necesita de conocimientos más ‘completos’, es decir de un significado holístico de la derivada a partir de diversas representaciones, gráfica, tabular, simbólica y verbal, ya sea a través de su expresión simbólica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

4.3.5. Análisis Tarea 1 Cuestionario 2: Comportamiento global y local de la función. La Tabla 27 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 27. *Grado de corrección Tarea 1 Cuestionario 2*

Grado de corrección	Tarea 1		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	**Análisis gráfico-simbólico**
Correcta	1	10%	
Parcialmente correcta	2	20%	
Incorrecta	2	20%	
No responde	5	50%	

Fuente: Elaboración Propia

La configuración epistémica representada en la Figura 15 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 1, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 15 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

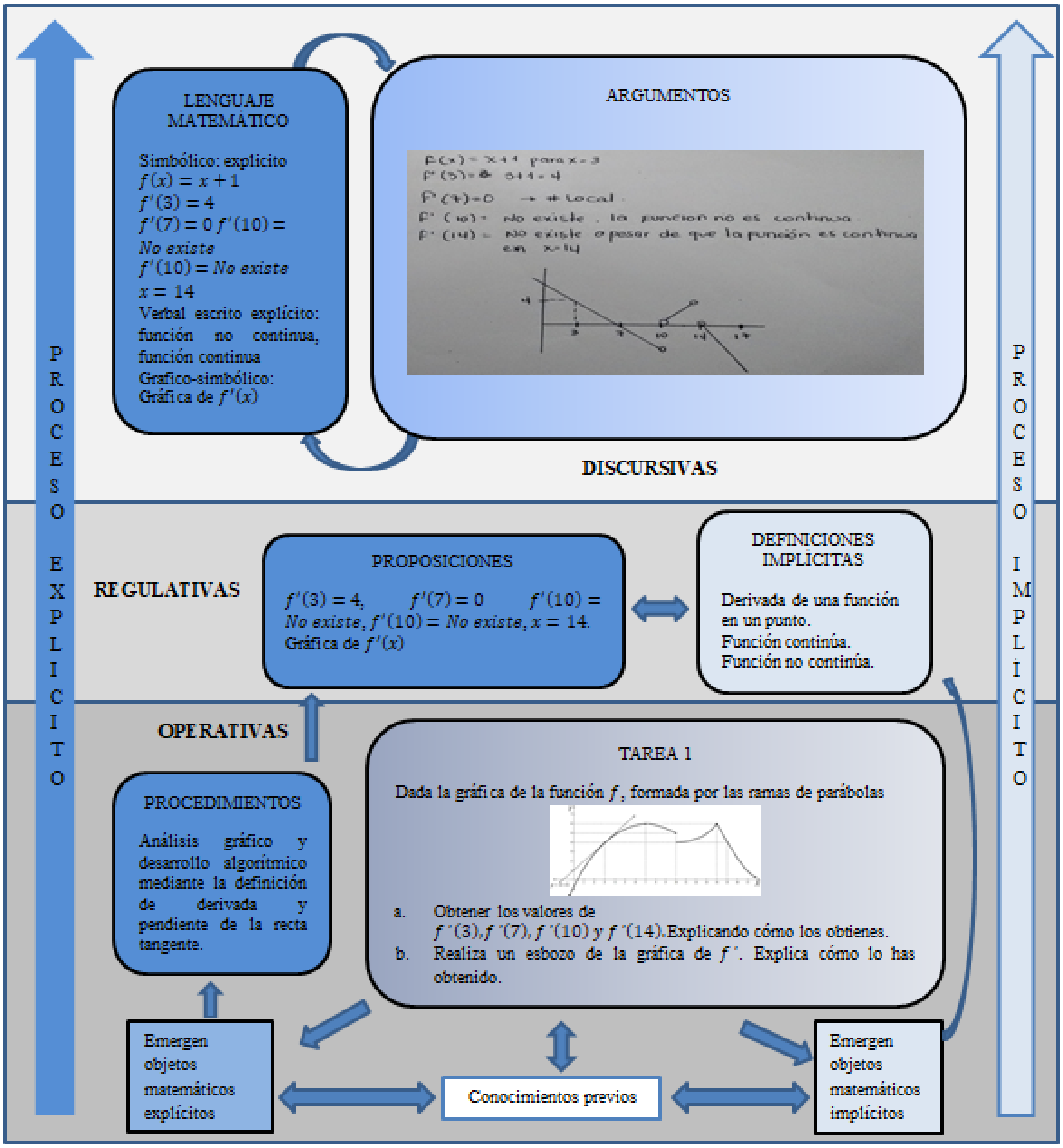


Figura 15: Configuración cognitiva Tarea 1 Cuestionario 2, comportamiento global y local de la función

Fuente: Elaboración propia

Tabla 28. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 1 Cuestionario 2*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico: explícito $f(x) = x + 1$ $f'(3) = 4$ $f'(7) = 0\ f'(10) = No\ existe$ $f'(10) = No\ existe$ $x = 14$ Verbal escrito explícito: función no continua, función continua Gráfico-simbólico: Gráfica de $f'(x)$	Análisis gráfico y simbólico de la función y función derivada.	Calcular la derivada de f' a partir de la gráfica de f en cada punto.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Derivada de una función en un punto. Función continúa. Función no continúa.	Cálculo de la derivada en $f\,'(3), f\,'(7), f\,'(10)\ y\ f\,'(14)$.	La derivada como criterio para obtener la gráfica de $f'(x)$.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Cálculo de la derivada en $f\,'(3), f\,'(7), f\,'(10)\ y\ f\,'(14)$ mediante el análisis gráfico.	Criterios de la primera derivada.	Gráfica de $f'(x)$.
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
$f(x) = x + 1$ $f'(3) = 4$ $f'(7) = 0\ f'(10) =$ $No\ existe$ $f'(10) = No\ existe$ $x = 14$	Con la información obtenida logran graficar $f'(x)$.	Gráfica de $f'(x)$.

Fuente: Elaboración Propia

El propósito de la Tarea 1 era explorar los significados de la primera derivada relacionados con la recta tangente, y las relaciones f' a f y f a f', a partir de la representación gráfica de una función para determinar si este significado de referencia se presenta en la solución de la tarea.

Las relaciones establecidas por los estudiantes de los objetos matemáticos primarios emergentes en la Tarea 1 (Figura 15), permiten establecer la configuración cognitiva *Análisis gráfico- simbólico,* que se caracteriza por las representaciones que emergen de la tarea, la cual posee un leguaje matemático gráfico, simbólico y verbal escrito en el cual se establece que la gráfica de f está conformada por ramas de parábolas, lo cual permite establecer relaciones entre la gráfica de f y f'.

Posteriormente a partir de los procedimientos con base en reglas/criterios, principalmente conceptos y "técnicas para derivar" los estudiantes proporcionan una posible gráfica para f'. Para la solución propuesta priman los objetos matemáticos de carácter gráfico, simbólico y verbal, que dan cuenta del "sentido" de la práctica matemática de los estudiantes, la cual consiste en "relacionar" f y f' y generar "conexiones" entre las gráficas de f y f' mediante lenguaje matemático simbólico, este procedimiento se hace evidente en la Figura 16 cuando el estudiante señala "No existe. La función no es continua".

En la descripción anterior queda implícito el uso de conceptos como "Una función es derivable en un punto si las derivadas laterales en el punto existen y son iguales" y proposiciones como "$f'(x) = m \forall x \in (a, b), m \in R \leftrightarrow f$ es una función lineal en $[a, b]$ de la forma", "Operador derivada: f parábola entonces f' recta", "El que la gráfica de f este formada por ramas de parábolas indica que la gráfica de f' son trozos de recta. Esto puede implicar poner en relación la idea de que la parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y por tanto la función derivada (aplicando las reglas de derivación) es $f'(x) = 2ax + b$, con la idea de que las gráficas de las funciones del tipo $2ax + b$ son rectas"

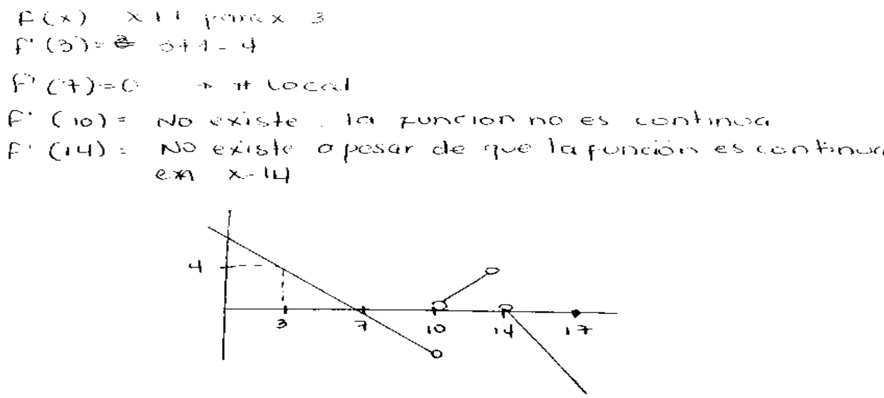


Figura 16: Significado manifestado por estudiante E4 en la Tarea 1 Cuestionario 2

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E4

La solución presentada por los estudiantes a la Tarea 1 permite identificar diferentes representaciones de la derivada como la verbal, gráfica y simbólica, además, se evidencian traducciones entre las distintas formas de representar $f(x)$ a partir de la representación gráfica propuesta a la representación simbólica y verbal. Los estudiantes realizan descripción verbal y gráfica de la función derivada en la cual se evidencia el paso de una representación de $f(x)$ gráfica a una forma de representación de $f'(x)$ gráfica mediada por la representación simbólica. Realizan la primera interpretación de la gráfica mediante la interpretación de la recta tangente en un punto a la gráfica de $f(x)$ (Font, 1999).

Los estudiantes con respuestas parcialmente correctas y correctas asocian objetos matemáticos no ostensivos como la recta tangente a una curva con el valor de la derivada en un punto a atreves del análisis gráfico y simbólico. Se observa que el estudiante que proporcionó la respuesta correcta utiliza traducciones simbólicas y gráficas entre $f(x)$ y $f(x)$, $f(x)$ y $f'(x)$ y $f'(x)$ y $f(x)$ mediante criterios conceptuales como valores máximo y mínimo de una función, crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y picos, y análisis con criterio de la primera derivada.

Esta tarea pone de manifiesto la posibilidad de los estudiantes de establecer conexiones entre objetos matemáticos ostensivos, presentados por la tarea con diferente representación, al igual que conexiones entre los objetos matemáticos que emergen de los estudiantes y que son manifestados con representaciones diferentes que interactúan bajo criterios definiciones/conceptos que permiten al estudiante proponer un argumento (solución válida), además, se generan conexiones entre objetos matemáticos no ostensivos en cuanto a las relaciones establecidas entre la continuidad y discontinuidad de $f(x)$ y la continuidad y discontinuidad de $f'(x)$.

Se presentan relaciones en la solución a igual 'nivel' en cuanto a que la solución de la tarea demanda que los procedimientos locales como hallar la derivada en $x = 7$ sea un factor de análisis general de la función $f(x)$, es decir se presenta una solución puntual y global de la Tarea 4 (Sánchez-Matamoros, 2004). La solución descrita demanda establecer relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada, lo cual ocasionó dificultades a los estudiantes en cuanto a la conversión necesaria, esta situación se observa en la Tabla 27, donde se evidencia que el 50% de los estudiantes no respondió a la tarea.

Siete de los diez estudiantes logran resolver ejercicios sobre derivadas, con la aplicación correcta de reglas de derivación (Artigue, 1995), sin embargo, presentan dificultades cuando la representación de la tarea se presenta de forma gráfica, y se demanda (Font, 1999) traducir la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada, traducciones que están mediadas por notación simbólica como $f'(x)$ y $f(x)$. La dificultad radica en que los estudiantes no asocian significados de la derivada, no los relacionan ni traducen, mediados por las representaciones, o no han construido un significado adecuado sobre la derivada (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008).

La característica central en este tipo de tarea son argumentaciones a las proposiciones emergentes por las representaciones gráfica y simbólica y a elementos lingüísticos como "Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10)\ y\ f'(14)$. Explicando cómo los obtienes" y "Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido". La actividad matemática depende de los significados sobre la derivada y las relaciones que se establecen entre estos, mediados por las representaciones.

4.3.6. Análisis Tarea 2 Cuestionario 2: Intervalos de concavidad. La Tabla 29 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 29. *Grado de corrección Tarea 2 Cuestionario 2*

Grado de corrección	Tarea 2		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	**Conexión simbólico-algorítmico**
Correcta	4	40%	
Parcialmente correcta	6	60%	
Incorrecta	0	0%	
No responde	0	0%	

Fuente: Elaboración Propia

La configuración epistémica representada en la Figura 17 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 2, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 18 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

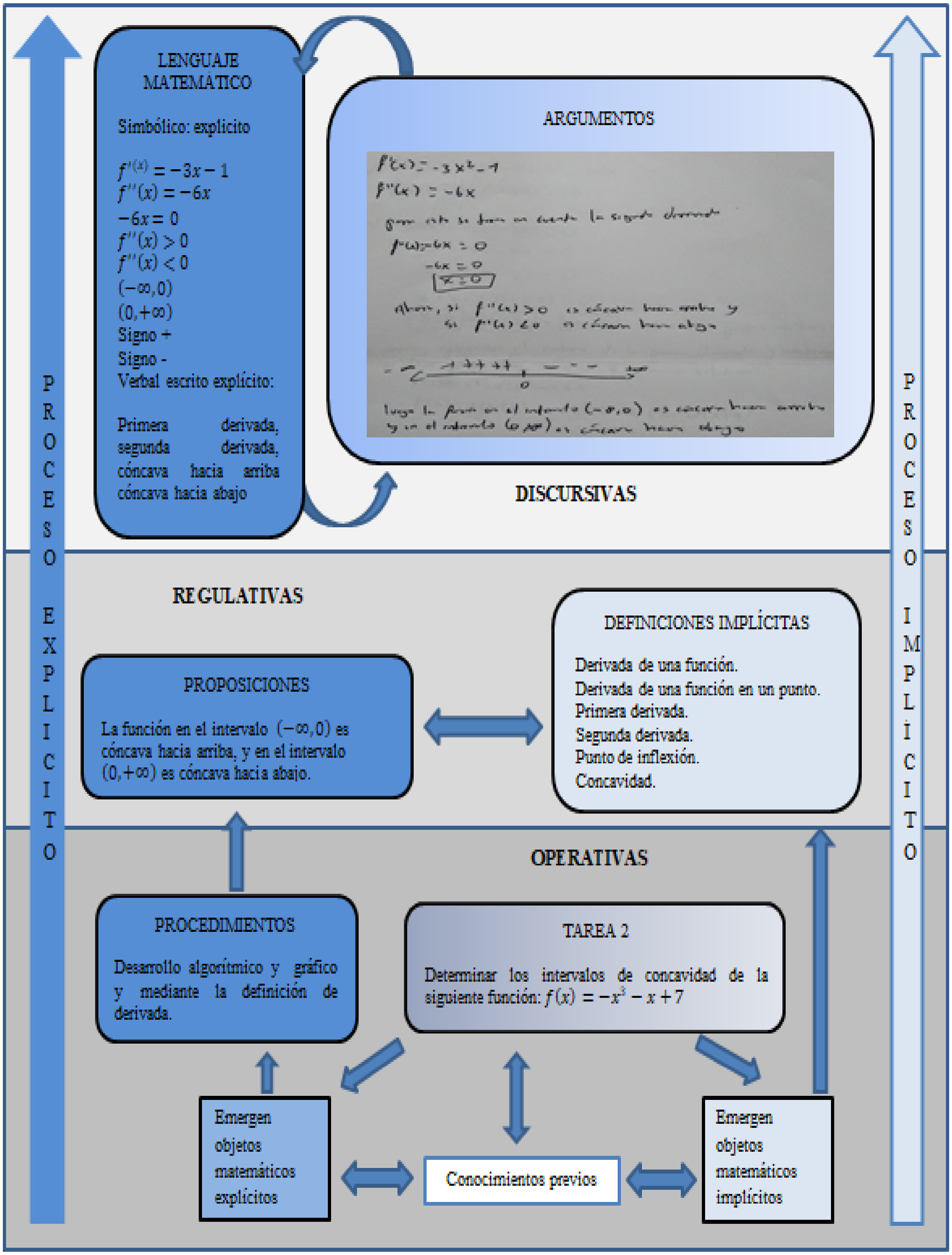


Figura 17: Configuración cognitiva Tarea 2 Cuestionario 2, intervalos de concavidad

Fuente: Elaboración propia

Tabla 30. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 2 Cuestionario 2*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico: explícito $f'(x) = -3x - 1$ $f''(x) = -6x$ $-6x = 0$ $f''(x) > 0$ $f''(x) < 0$ $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$ Signo + Signo - Verbal escrito explícito: Primera derivada, segunda derivada, cóncava hacia arriba cóncava hacia abajo.	Análisis simbólico-algorítmico y gráfico de la primera y segunda derivada.	Criterio de la primera y segunda derivada para determinar los puntos de inflexión.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Conceptos implícitos. Derivada de una función. Derivada de una función en un punto. Primera derivada. Segunda derivada. Punto de inflexión. Concavidad.	Cálculo algorítmico de la primera y segunda derivada.	Representación simbólica y gráfica de los intervalos de concavidad.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Simbólico-algorítmico, interpretación de la primera y segunda derivada mediante lenguaje matemático verbal escrito. A partir de lo anterior se propone la representación gráfica.	Cálculo algorítmico de la primera y segunda derivada con lo cual interpretan los resultados.	Hallar los intervalos de concavidad.
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
La función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es cóncava hacia arriba, y en el intervalo $(0, +\infty)$ es cóncava hacia abajo.	Proponer una solución que justifique los procedimientos.	Solución a la Tarea 2.

Fuente: Elaboración Propia

El propósito de la Tarea 2 era explorar el significado de la segunda derivada respecto a la información que se puede obtener acerca de la concavidad de $f(x)$, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y puntos de inflexión.

A partir del análisis de las respuestas proporcionadas a la Tarea 2, es posible establecer una regularidad en los procedimientos realizados por los ocho estudiantes tanto en los procedimientos empleados como en el desarrollo de estos, igualmente en las representaciones simbólicas y gráficas. En la Figura 18 y 19 se presentan 2 soluciones.

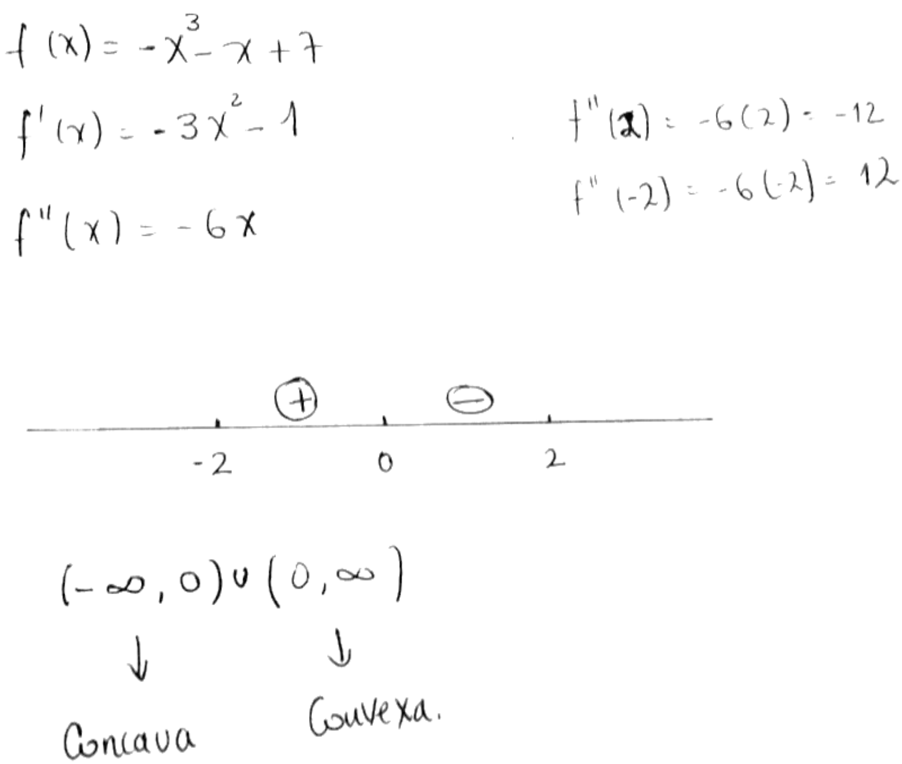


Figura 18: Significado manifestado por estudiante E7 en la Tarea 2 Cuestionario 2

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E7

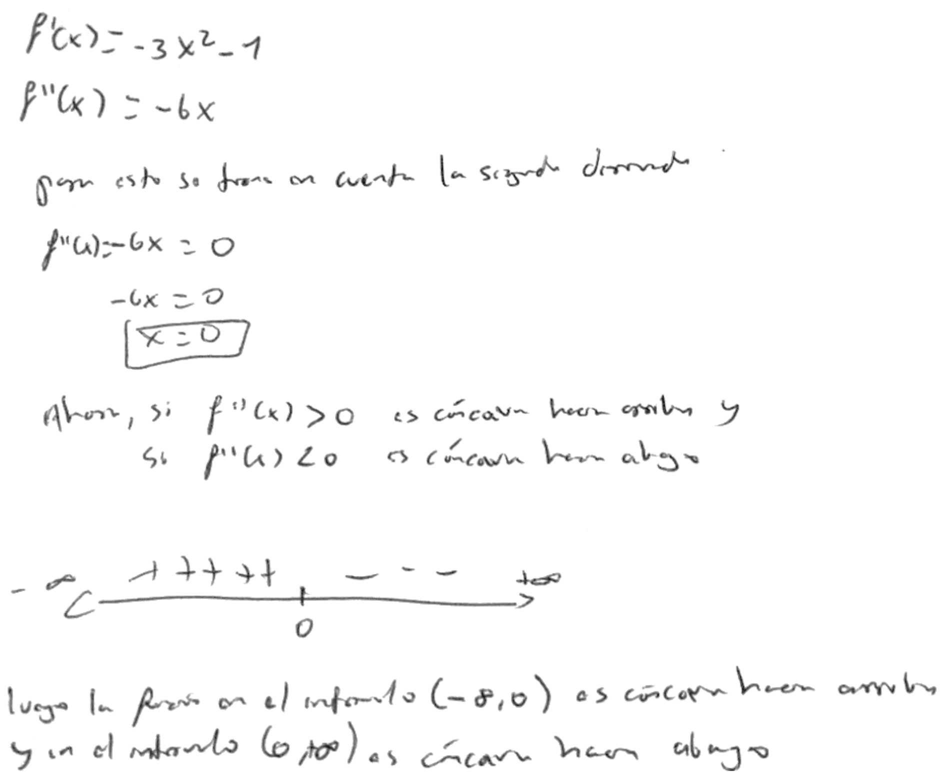


Figura 19: Significado manifestado por estudiante E9 en la Tarea 2 Cuestionario 2

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E9

Se presenta la configuración cognitiva *Conexión simbólico-algorítmica*, en la cual predominan elementos lingüísticos simbólicos y el lenguaje verbal escrito, que refieren a reglas para derivar dos veces $f(x)$ e interpretar cada derivada, además de relacionarlas para encontrar los intervalos de concavidad. Como puede observarse en la Figura 19 la práctica matemática desarrollada por los estudiantes inicia con la derivada de la función y luego declara "para esto se tiene en cuenta la segunda derivada" y manifiesta que "$f''(x) > 0$ es cóncava hacia arriba y si $f''(x) < 0$ es cóncava hacia abajo" y finalmente manifiesta como solución "luego la función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es cóncava hacia arriba y en el intervalo $(0, +\infty)$ es cóncava hacia abajo". Los procedimientos utilizados de forma regular por los estudiantes establecen que al encontrar el punto de inflexión, el punto resultante de la segunda derivada se evalúa en la función.

En la descripción anterior queda implícito el uso de definiciones/conceptos como "Puntos de inflexión. Son aquellos en los cuales la gráfica cambia de concavidad" y "Intervalos de concavidad. Si $f(x) = -x^3 - x + 7$ es una función dos veces derivable en un intervalo abierto (a, b) entonces presenta algunas concavidades" y de forma explícita e importante para la solución las proposiciones "Si $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es cóncava hacia arriba y si $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es cóncava hacia abajo".

En la práctica matemática los estudiantes logran establecer conexiones-traducciones (Font, 1999) entre la primera y segunda derivada mediante la representación necesaria entre $f'(x)$ y $f''(x)$, para determinar el punto de inflexión, y relacionar mediante los símbolos matemáticos $f''(x)$ y $f(x)$.

A partir de las manifestaciones de los estudiantes, evidenciadas cuando por medio de 'conexiones-traducciones' entre $f'(x)$ y $f''(x)$, y $f''(x)$ y $f(x)$ presentan un análisis correcto de la derivada representada mediante símbolos matemáticos de manera 'general-global y puntual' "$(x = 0)$" de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$, se evidencian traducciones entre las formas de representar $f(x)$ y $f'(x)$, de la representación simbólica a la gráfica y de la gráfica a la simbólica apoyados en el lenguaje matemático verbal. La relevancia de las representaciones surge cuando los estudiantes se enfrentan a tareas que demandan aspectos conceptuales (Tallman, Carlson, Bressoud y Pearson, 2016) sobre procedimentales, esto es, objetos matemáticos que permiten la transición de sistemas de prácticas matemáticas algorítmicos y rutinarios, a sistemas de prácticas matemáticas teóricas con el concepto derivada, caracterizados por la representación y las relaciones entre diferentes objetos matemáticos que emergen de las practicas matemáticas (Badillo, Fuentealba, Badillo y Sánchez, 2015; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Pinto y Parraguez, 2016).

El argumento en el sistema de prácticas matemáticas, de acuerdo con el EOS, que utilizaron los estudiantes para dar solución a la tarea, involucra la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, a partir de la representación simbólica de $f(x)$, lo cual implica relacionar y generar equivalencias entre las representaciones de los significados de la derivada, esto es una de las principales dificultades de los estudiantes para interpretar resultados obtenidos de forma algorítmica (Pino-Fan, 2014).

4.3.7. Análisis Tarea 3 Cuestionario 2: extremos relativos. La Tabla 31 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 31. *Grado de corrección Tarea 3 Cuestionario 2*

Grado de corrección	Tarea 3		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	1	10%	**Simbólica algorítmica-gráfica**
Correcta	2	20%	
Parcialmente correcta	5	50%	
Incorrecta	0	0%	
No responde	2	20%	

Fuente: Elaboración Propia

La configuración epistémica representada en la Figura 20 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 3, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 20 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

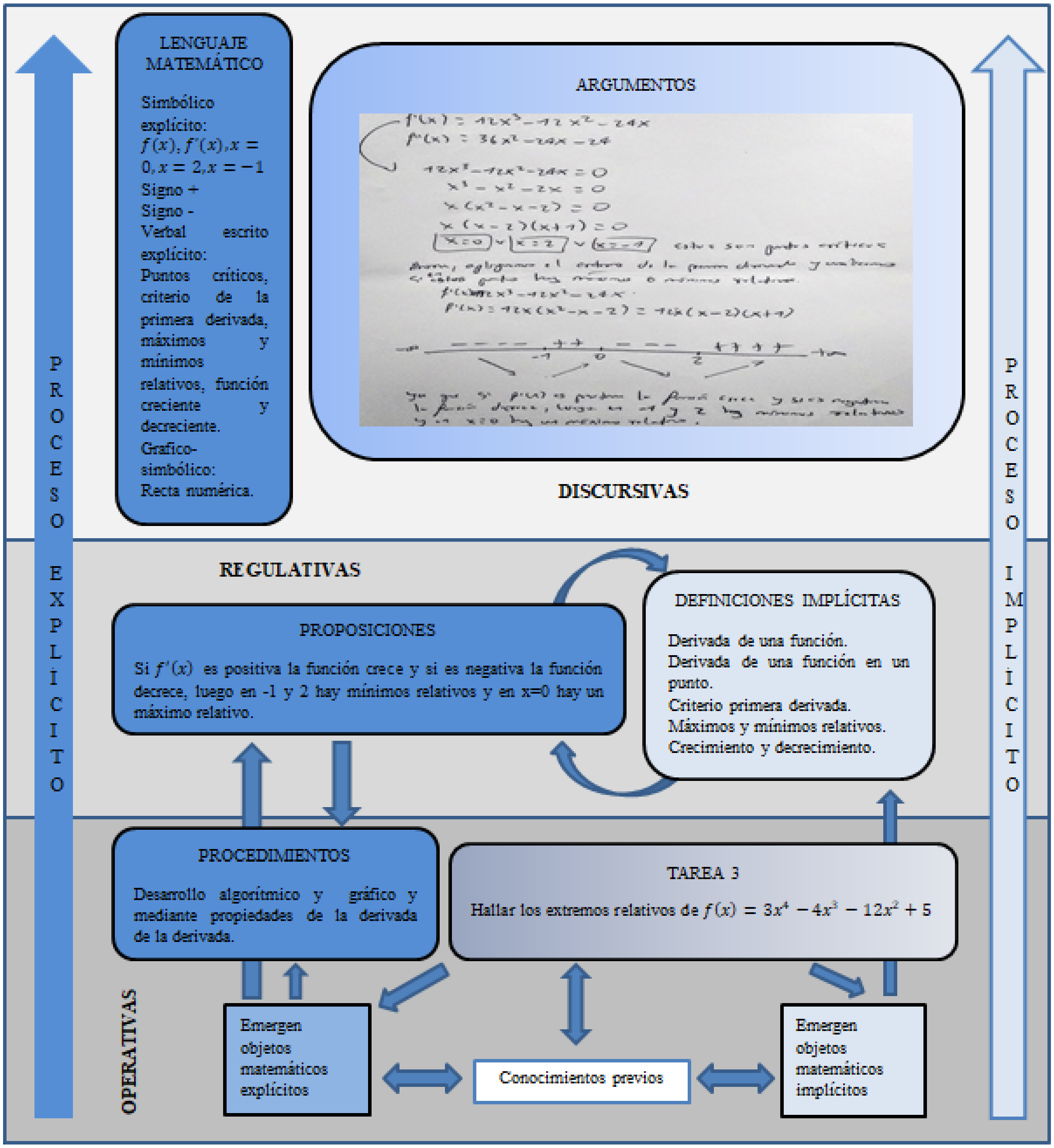


Figura 20: Configuración cognitiva Tarea 2 Cuestionario 2, extremos relativos

Fuente: Elaboración propia

Tabla 32. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 3 Cuestionario 2*

Interpretación de los elementos lingüísticos

Expresión	Acciones de los estudiantes (Criterio)	Interpretación del objeto matemático
Simbólico explícito: $f(x), f'(x), x = 0, x = 2, x = -1$ Signo +, Signo – Verbal escrito explícito: Puntos críticos, criterio de la primera derivada, máximos y mínimos relativos, función creciente y decreciente. Gráfico-simbólico: Recta numérica.	Análisis simbólico-algorítmico y gráfico de la primera y segunda derivada la cual es importante ya que brinda información acerca de los mínimos y máximos relativos.	Criterio de la primera en la cual esta se iguala a cero para obtener los puntos críticos, y segunda derivada para determinar si los puntos críticos son mínimos o máximos relativos.

Interpretación de los conceptos

Expresión	Acciones de los estudiantes (Criterio)	Interpretación del objeto matemático
Definiciones implícitas: Derivada de una función. Derivada de una función en un punto. Criterio primera derivada. Máximos y mínimos relativos. Crecimiento y decrecimiento.	Cálculo algorítmico de la primera y segunda derivada, se determinan los puntos críticos y se procede con una representación gráfica de los puntos críticos mediante la recta numérica.	Representación simbólica y gráfica de los extremos relativos.

Interpretación de los procedimientos

Procedimientos	Acciones de los estudiantes (Criterio)	Uso
Cálculo algorítmico de la primera y segunda derivada. Se iguala a cero la primera derivada y se obtienen los puntos críticos	Cálculo algorítmico de la primera y segunda derivada con lo cual interpretan los resultados y determinan los puntos críticos. Un estudiante resuelve la tarea propuesta sin utilizar el criterio de la segunda derivada. La resuelve factorizando $f'(x)$.	Hallar los extremos relativos.

Interpretación de las proposiciones

Proposición	Acciones de los estudiantes (Criterio)	Uso
Si $f'(x)$ es positiva la función crece y si es negativa la función decrece, luego en -1 y 2 hay mínimos relativos y en $x = 0$ hay un máximo relativo.	Proponer una solución que justifique los procedimientos.	Solución a la Tarea 2.

Fuente: Elaboración Propia

El propósito de la Tarea 3 era explorar el significado de la segunda derivada respecto a la información que se puede obtener de una función $f(x)$ acerca de los extremos relativos para aplicaciones de la derivada en el cálculo de máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento (convexidad positiva, convexidad negativa) puntos críticos y puntos de inflexión.

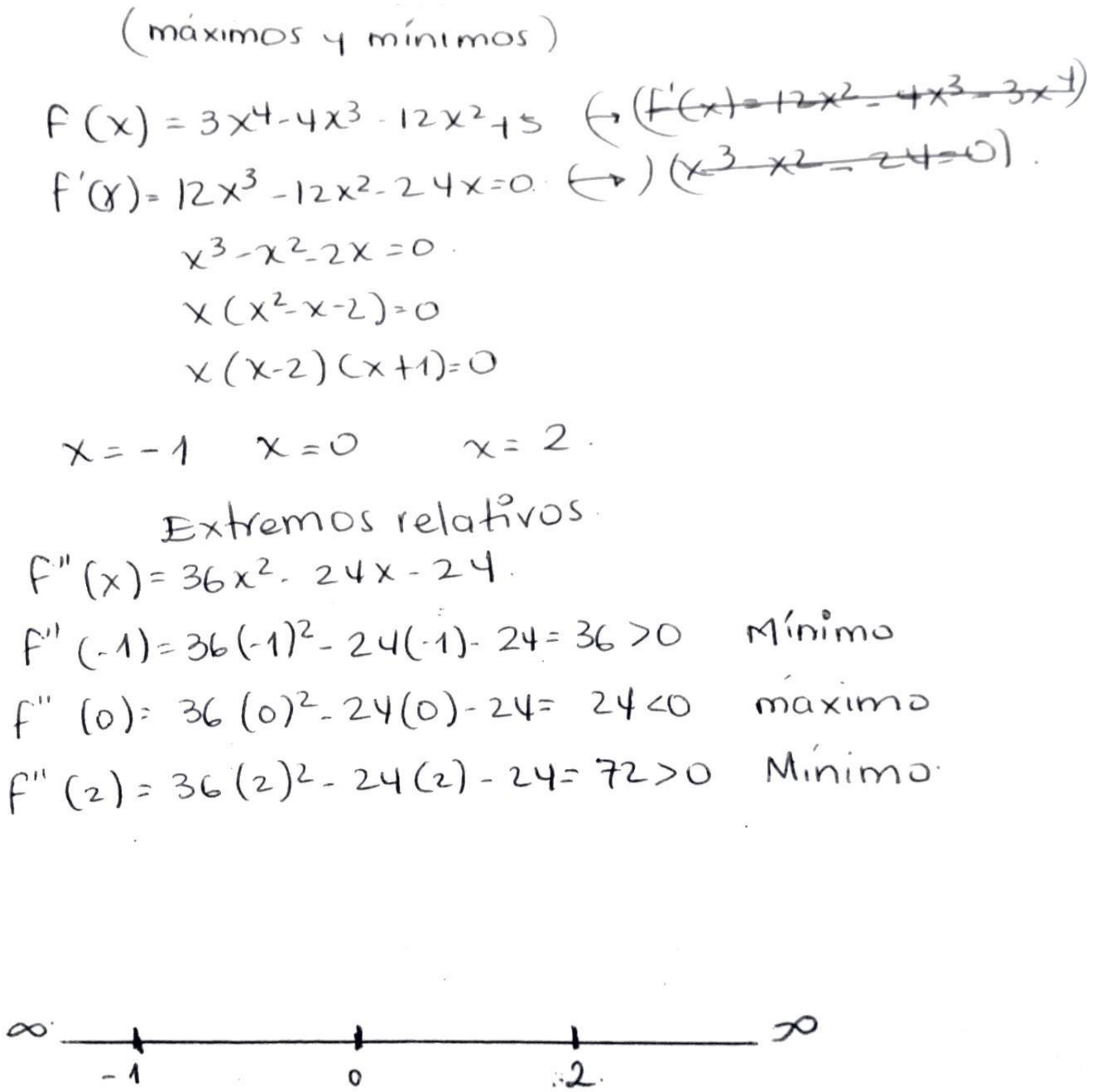
En las soluciones propuestas por los estudiantes a la Tarea 3, se identificó una forma de solución común que se realiza por medio de los criterios de la primera y segunda derivada y otra que solo requiere del criterio de la primera derivada, para luego factorizar $f'(x)$ y determinar los extremos relativos.

En la solución de la tarea se identificaron dos configuraciones cognitivas, una denominada *Simbólica algorítmica-gráfica* propuesta por siete de los diez estudiantes que realizaron la Tarea con los criterios de la primera y segunda derivada, y la otra *Analítica verbal simbólica-gráfica* asociada a un estudiante que realizó la tarea sin utilizar los criterios de la segunda derivada, lo realizó, factorizando.

Las características principales de la configuración *Simbólica algorítmica-gráfica* es el carácter algorítmico procedimental a partir de la representación simbólica de $f(x)$. Se trata de respuestas en las que se procede mediante criterios establecidos respecto a la primera y segunda derivada, los cuales establecen los procedimientos a seguir mediante conceptos no ostensivos como derivada de una función, derivada de una función en un punto, máximos y mínimos relativos, y crecimiento y decrecimiento de una función, para obtener información sobre los extremos relativos.

La práctica matemática de los siete estudiantes se caracteriza por seguir los procedimientos “Cálculo de la primera derivada y se iguala a cero para hallar los puntos críticos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, y aplicación del criterio de la segunda derivada para saber si los números hallados en el procedimiento anterior son máximos o mínimos relativos”.

En la práctica matemática de los siete estudiantes es posible identificar tanto el uso de objetos matemáticos lingüísticos como el uso frecuente de elementos simbólicos como $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$, y la gráfica de la recta numérica para representar mediante los puntos críticos y los símbolos de positivo "+" y negativo "-" cuando $f'(x)$ crece o decrece, y así justificar los extremos relativos. Los elementos lingüísticos descritos anteriormente hacen referencia a conceptos y a proposiciones que se detallan a continuación en la Figura 21.


(máximos y mínimos)

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5 \quad \leftarrow (\cancel{f'(x) = 12x^2 - 4x^3 - 3x^4})$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \quad \leftarrow) (\cancel{x^3 - x^2 - 24 = 0})$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x-2)(x+1) = 0$

$x = -1 \quad x = 0 \quad x = 2$

Extremos relativos

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$

$f''(-1) = 36(-1)^2 - 24(-1) - 24 = 36 > 0$ Mínimo

$f''(0) = 36(0)^2 - 24(0) - 24 = 24 < 0$ maximo

$f''(2) = 36(2)^2 - 24(2) - 24 = 72 > 0$ Mínimo

Figura 21: Significado manifestado por estudiante E4 en la Tarea 3 Cuestionario 2

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E4

En la Figura 21se puede observar que el estudiante identifica un procedimiento a realizar que se relaciona con hallar máximos y mínimos. Entre los conceptos se destacan la derivada de una función, derivada de una función en un punto, criterio de la primera derivada, máximos y mínimos relativos, y crecimiento y decrecimiento. Dichos conceptos permiten al estudiante generar proposiciones como “Dada una función dos veces derivable en un intervalo abierto que contiene a c tal que c es un punto crítico de f, es decir, $f'(c) = 0$. Entonces: si $f'' > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c y si $f'' = 0$, entonces el criterio no decide.

En general un aspecto a resaltar es que las respuestas propuestas a la tarea seguían el mismo ‘patrón’ en sus procedimientos. Respecto a la Tarea 2 del Cuestionario 2 que indaga por los intervalos de concavidad y la Tarea 3 del cuestionario 2, los estudiantes diferencian entre la misma representación de $f'(x)$ de forma simbólica, atribuyendole otro significado.

La configuración cognitiva *Analítica verbal simbólico-gráfica* presenta una característica diferente a la descrita en la configuración *Simbólica algorítmica-gráfica* en cuanto a un procedimiento en la solución, ya que para obtener los extremos relativos el estudiante no utiliza el criterio de la segunda derivada, sino que deriva $f(x)$ y factoriza $f'(x)$=0 con lo cual obtiene los extremos relativos.

Como se puede observar en la Figura 22, el estudiante aunque en un primer momento encuentra la primera y segunda derivada de $f(x)$ mediante ‘técnicas’ de derivación y declara que $x = 0$, $x = -1$ y $x = 2$ son puntos críticos, retorna sobre los resultados obtenidos y los analiza mediante el criterio de la primera derivada para determinar si crece o decrece $f'(x)$, y así obtener los extremos relativos.

En la Figura 22 se observa que el estudiante utiliza los mismos objetos matemáticos en cuanto a conceptos, a excepción de los criterios de la segunda derivada que conforman la configuración *Simbólica algorítmica-gráfica*.

La proposición empleada por los estudiantes E4 y E9 en cuanto a la factorización de $f'(x)$=0, es interesante debido a que permitió hallar los extremos relativos de la función de una forma poco convencional. Es importante resaltar que los estudiantes establecen con mayor frecuencia relaciones entre las conexiones y traducciones de las representaciones entre $f(x)$ y $f(x)$, $f(x)$ y $f'(x)$, $f'(x)$ y $f'(x)$, y $f'(x)$ y $f''(x)$ cuando estas se presentan de forma simbólica (polinomio) y las diferentes acepciones que le asocian implícitamente como por ejemplo la recta tangente a una curva a diferencia de cuando se presentan de forma gráfica, en donde a pesar de que también asocian la acepción de la derivada como la recta tangente a una curva, se presentan menos respuestas correctas o parcialmente correctas.

Los siete estudiantes que resolvieron la Tarea 3, recurrieron a la justificación verbal de sus respuestas, analizando cada valor obtenido, que según Fuentealba, Badillo, y Sánchez (2015) del sistema de prácticas matemáticas emergen objetos matemáticos caracterizados y relacionados con otros objetos matemáticos previamente, lo que indica que los estudiantes reconocen las representaciones y las dotan de significado para incluirlas en el sistema de prácticas, y decidir si el problema puede resolverse utilizando determinado significado.

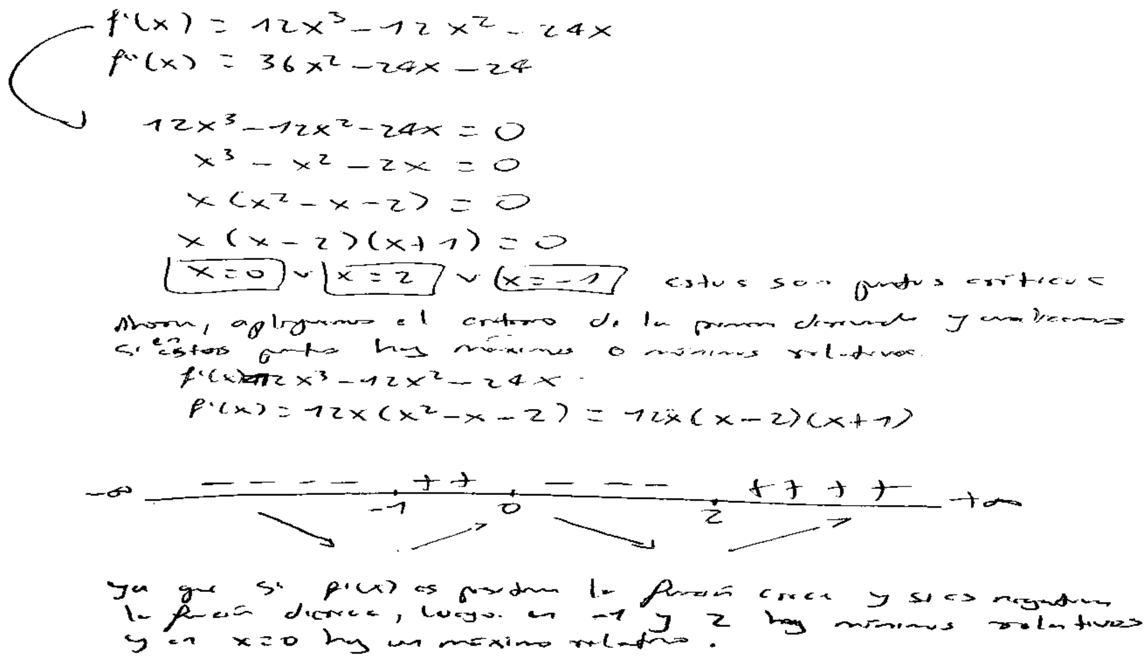


Figura 22: Significado manifestado por estudiante E9 en la Tarea 3 Cuestionario 2

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E9

Los estudiantes que lograron resolver la tarea a partir de diferentes modos de representación, contenidos en el argumento (Figura 22) y significados que convergen en la solución propuesta, muestran coherencia y flexibilidad en el uso de objetos matemáticos que asocian diferentes representaciones y por lo tanto significados de la derivada, esto se interpreta según Hähkiöniemi (2004) como que los estudiantes conciben y comprenden un concepto por medio de las representaciones internas mediante la interpretación que se tenga de las representaciones externas. Las concepciones de los estudiantes se desarrollan a partir de representaciones perceptuales y simbólicas, gráficas, tabulares y verbales, relacionando estas representaciones.

4.3.8. Análisis Tarea 4 Cuestionario 2: Razón de Cambio. La Tabla 33 recoge los resultados manifestados por los estudiantes respecto al grado de corrección de sus respuestas.

Tabla 33. *Grado de corrección Tarea 4 Cuestionario 2*

Grado de corrección	Tarea 4		Configuración cognitiva: Significados de la derivada
	Frecuencia	Porcentaje	
Novedosa	0	0%	**Cálculo simbólico analítico-algorítmico**
Correcta	3	30%	
Parcialmente correcta	1	10%	
Incorrecta	1	10%	
No responde	5	50%	

Fuente: Elaboración Propia

La configuración epistémica representada en la Figura 23 recoge los objetos matemáticos que emergen de la Tarea 4, manifestados por los diez estudiantes que presentan una solución a la tarea. En la Figura 23 se presentan los procesos para la solución, el tipo de representación utilizado por los estudiantes, objetos matemáticos y configuración cognitiva.

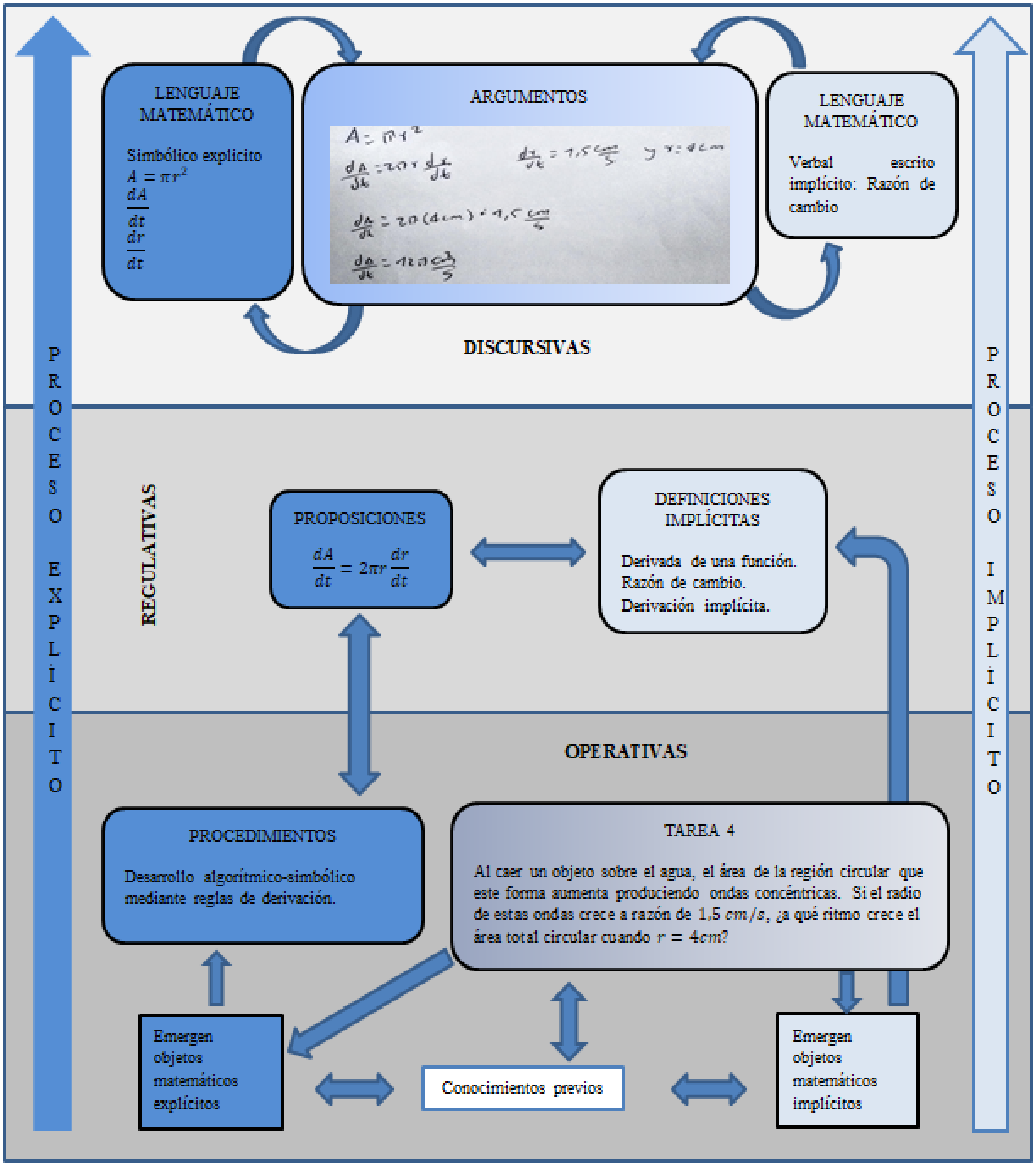


Figura 23: Configuración cognitiva Tarea 4 Cuestionario 2, razón de cambio

Fuente: Elaboración propia

Tabla 34. *Interpretación de objetos matemáticos primarios presentes en la Tarea 4 Cuestionario 2*

Interpretación de elementos lingüísticos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Simbólico explícito $A = \pi r^2, \frac{dA}{dt}, \frac{dr}{dt}$ Verbal escrito implícito: Razón de cambio.	Cálculo simbólico: analítico-algorítmico (aplicación de la derivada).	Expresión que relaciona dos o más variables que cambian con el tiempo.
Interpretación de conceptos		
Expresión	Acciones de los estudiantes	Interpretación del objeto matemático
Definiciones implícitas: Derivada de una función. Razón de cambio. Derivación implícita.	Derivada de $\frac{dA}{dt}, \frac{dr}{dt}$	Expresión matemática que permite calcular a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$.
Interpretación de procedimientos		
Procedimientos	Acciones de los estudiantes	Uso
Desarrollo algorítmico y gráfico mediante propiedades de la derivada.	Operar de forma algorítmica-analítica los símbolos $A = \pi r^2, \frac{dA}{dt}, \frac{dr}{dt}$ Para establecer relaciones y traducciones entre el lenguaje verbal escrito de la Tarea y el lenguaje verbal escrito matemático (simbólico).	Relacionar objetos matemáticos simbólicos mediante traducciones entre representaciones de la derivada como razón de cambio.
Interpretación de proposiciones		
Proposición	Acciones de los estudiantes	Uso
$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$	Operar de forma algorítmica-analítica los símbolos $A = \pi r^2, \frac{dA}{dt}, \frac{dr}{dt}$	Expresión matemática que permite calcular a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$.

Fuente: Elaboración Propia

En las soluciones propuestas a la Tarea 4 se identificó la configuración cognitiva *Cálculo simbólico analítico-algorítmico*. La particularidad de la tarea y de su solución es el carácter analítico-simbólico a partir de la descripción que se presenta en Tarea 4 "el área de la región circular que esta forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de 1,5 cm/s" la cual activa procedimientos analíticos mediante símbolos que refieren a la razón de cambio. La Figura 23 presenta una descripción general de como los estudiantes relacionan los objetos matemáticos primarios que emergen de la tarea, en la cual se puede observar la práctica matemática que desarrollan los estudiantes.

Lo interesante de la práctica matemática que presenta el estudiante E9, como se observa en la Figura 24, son las relaciones que establece entre en la descripción del problema de forma verbal y su traducción a símbolos matemáticos. Realiza la traducción implícita de estos a la acepción razón de cambio (en este caso, la razón de cambio representada de forma simbólica como un objeto matemático no ostensivo).

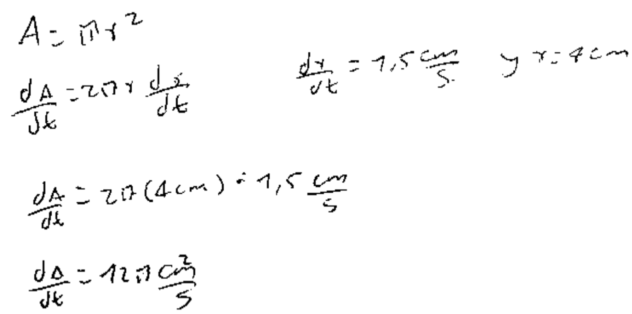


Figura 24: Significado manifestado por estudiante E9 en la Tarea 4 Cuestionario 2

Fuente: Tomado de la solución del estudiante E9

En la práctica matemática se identifican objetos matemáticos lingüísticos de carácter simbólico ostensivo tales como "$A = \pi r^2$, $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$", que posibilitan conceptos no ostensivos como razón de cambio. La 'conexión' que se presenta entre los objetos ostensivos y no ostensivos en la solución propuesta permite generar un procedimiento algorítmico-simbólico mediante reglas de derivación, que permite que la proposición $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$, relacione y posibilite la traducción entre los elementos lingüísticos verbales escritos, el procedimiento y la solución.

Las respuestas que se enmarcan en este tipo de configuración cognitiva están transversalizadas por procedimientos y argumentos basados en la interpretación de la tarea propuesta y la representación de esta, que permite el análisis y las propiedades de la derivada acordes con la situación a resolver.

Los tres estudiantes que lograron proponer soluciones a la tarea no presentaron mayor dificultad, demostraron procedimientos algorítmicos y argumentos que sustentaban los procedimientos, sin embargo en otras tareas propuestas que eran presentadas mediante representación gráfica y tabular no se evidencia la acepción de la derivada como razón de cambio, lo cual sugiere que a nivel personal e institucional se preferencia procedimientos de acuerdo a la representación de la tarea, perdiéndose la posibilidad de presentar la solución a la tarea mediante otras acepciones de la derivada, sin embargo se reconoce que las soluciones propuestas se realizaron mediante una representación apropiada, además de asociarse al significado de la derivada razón de cambio.

Los dos estudiantes que presentaron soluciones parcialmente correctas e incorrectas, y los cinco que no respondieron, no manifiestan significados de la derivada (Vrancken, Engler y Müller, 2012), para la solución de problemas en donde se requiera la interpretación física. No solo basta recordar, pues se presentan ejercicios algorítmicos, rutinarios y aun así se evidencia una incorrecta aplicación de la derivada o la interpretación incorrecta de su resultado (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner, 2016) dado que "los objetos matemáticos no son accesibles directamente por medio de los sentidos, es fundamental el papel que juegan las representaciones en la construcción de conocimiento matemático" (Vrancken, Engler y Müller, 2012, pág.236), coordinando sistemas de representación pertenecientes a diferentes registros.

Santos y Thomas (2003) exponen la representación como fundamental para la comprensión de la derivada sin desconocer que un objeto matemático se concibe mediante lenguaje, símbolos, gráficos y artefactos. Afirman que la comprensión se evidencia cuando un estudiante tiene la capacidad de representar un problema de diferentes maneras, lo que implica soluciones desde diferentes perspectivas, generando así un significado para las diferentes situaciones problemáticas, por lo cual la formación de representaciones múltiples fomenta la comprensión de un significado holístico de la derivada.

4.4. Consideraciones finales: discusión

La aplicación del Cuestionario 1 y Cuestionario 2, para caracterizar significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario, arrojó puntuaciones significativas para la investigación; Cuestionario 1, cincuenta y ocho puntos, y cuestionario 2, sesenta y cuatro puntos.

Las tareas pertenecientes al Cuestionario 1 y cuestionario 2, fueron enmarcadas en los campos de problemas CP1: Problemas que involucran el cálculo de tangentes, CP2: Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de cambio, CP3: Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de variación, CP4: Problemas que involucran la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones y CP5:Cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

Las representaciones de las tareas del Cuestionario 1 y Cuestionario 2, permiten evidenciar, más allá de los significados necesarios para dar solución a las tareas propuestas, la importancia de la representación que el estudiante propone para presentar la solución. El éxito en la solución radica tanto en la capacidad de establecer traducciones y conversiones entre la representación de las tareas y la representación de la solución, como en la articulación, las relaciones, las 'equivalencias' que conllevan a un mismo significado.

Las características de los problemas planteados exponen la derivada a partir de diferentes representaciones como límite del cociente incremental, que puede ser abordado de forma simbólica-algorítmica, esto es manipulación de símbolos de forma rutinaria o analítica en la cual se estudia su carácter puntual o global y la derivada a partir de su aspecto gráfico, como pendiente de la recta tangente a la curva (Sánchez-Matamoros García y Llinares, 2008). Las características planteadas acerca de la derivada son enlazadas por los estudiantes mediante un lenguaje verbal, descriptivo, y de forma general en la solución de las tareas, mediante representación simbólica.

En la solución de las tareas predomina la representación verbal, activada de forma frecuente cuando la representación de la tarea es verbal o gráfica, funciona como justificación o argumento complementario a la representación simbólica emergente de la representación de la tarea propuesta. La representación verbal es el 'puente' entre las traducciones y conversiones entre $f \to f, f \to f', f' \to f', f' \to f''$ y $f'' \to f''$ y en ocasiones es la solución como en la Tarea 1 del Cuestionario 1. El papel de la representación verbal es significativo como hallazgo en la investigación debido a que permitió conocer objetos matemáticos no ostensivos predominantes como lo son los conceptos implicados en la solución de las tareas y la importancia en la solución y análisis por parte de los estudiantes a cada tarea.

El análisis que permite realizar el EOS a las representaciones de los objetos matemáticos primarios manifestadas por los estudiantes, posibilita configurar los significados manifestados de cada tarea en un macro significado representativo de las soluciones presentadas por los estudiantes, denominado y compuesto por tres aspectos que permiten la manifestación de significados:

- *Interacción de 'sub-representaciones' no ostensivas de objetos matemáticos*
- *Objetos matemáticos convergentes en las proximidades de la representación inicial de la tarea*
- *Representación inicial de la tarea, con interacciones a priori de objetos matemáticos que se configuran como significado implícito inicial requerido para la solución de la tarea*

Este macro significado se soporta en el argumento como solución de la tarea, que cumple con la función de reunir de forma ordenada y coherente los objetos matemáticos ostensivos y no ostensivos, permitiendo emerger el significado de los estudiantes en cada tarea.

Es importante mencionar que en está macro configuración se presenta la relación de diversos significados de la derivada, que se evidencia en los campos de problema propuestos por Pino-Fan, Godino y Font (2011) debido a que como lo afirma Pino-Fan (2014)

> La representatividad de los campos de problemas está vinculada con la idoneidad epistémica, pues la primera hace referencia a la variedad de situaciones que favorecen la discusión de los conceptos matemáticos, mientras que la idoneidad epistémica refiere a los objetos y significados puestos en juego en la resolución de las situaciones problema. (p. 141)

En las soluciones propuestas por los estudiantes a las tareas del Cuestionario 1 y el Cuestionario 2, se evidencia mediante las prácticas matemáticas y las configuraciones cognitivas establecidas a través de las herramientas proporcionadas por el EOS, que para solucionar una tarea determinada, como la Tarea 4, perteneciente al cuestionario 2 inscrita en el campo de problemas CP4: Problemas que involucran la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos y análisis de gráficas de funciones, los estudiantes utilizan las representaciones de los objetos matemáticos emergentes de la Tarea 4, y por supuesto característicos y representativos del campo de problemas CP4, para realizar conversiones entre representaciones, de gráfico a simbólico e instaurarse por un momento en el campo de problemas CP5:Cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación, en el que realizaban operaciones y utilizaban conceptos, para luego retornar al campo de problemas en el cual se inscribe la tarea y representarla de forma gráfica.

El trabajo investigativo arrojo resultados valiosos relacionados con las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven las tareas, principalmente cuando necesitan construir el argumento final, en el cual convergen las diversas representaciones de los objetos matemáticos primarios, y con estos los significados que el estudiante le asigna a cada objeto matemático para proponer la práctica matemática, que posibilita relacionar significados de los objetos matemáticos emergentes ostensivos o no ostensivos formando la configuración cognitiva. Es precisamente esta configuración la que permite vislumbrar que las dificultades de los estudiantes participantes de la investigación, radican en el obstáculo de solo conocer algunos significados parciales de la derivada, y más a fondo, en la diversidad de representaciones presentes en un significado parcial de la derivada, esto es, el conflicto para generar un argumento, dotarlo de significado y lograr, traducirlo, generar conversiones que permita ‘acoplarlo’ a otros significados.

No solo basta con que los estudiantes manifiesten un significado holístico de la derivada, para dar solución a determinadas tareas, se necesita generar en los estudiantes la posibilidad de que en cada configuración cognitiva, logren establecer argumentos mediante representaciones verbales, gráficas, simbólicas y tabulares que permitan mayor cohesión en el significado holístico de la derivada.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta tesis indaga por los significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios. Una vez realizada la investigación que se realizó utilizando conceptos y herramientas del enfoque Onto-semiótico de la instrucción y la cognición matemática, se encontraron significados, sobre la derivada, que los estudiantes preferencian.

Los significados sobre la derivada han sido investigados durante más de 20 años, a causa de los diversos problemas para su enseñanza y aprendizaje. El problema de investigación se ha centrado en los significados que manifiestan sobre la derivada estudiantes universitarios que han cursado y aprobado cálculo diferencial. Se considera necesario analizar cuales significados manifiestan estudiantes sobre la derivada debido a que sus múltiples significados y formas de representación pueden estar en la base de las dificultades manifestadas por los estudiantes y que podrían afectar el desempeño y permanencia de los estudiantes.

Por medio de una revisión de antecedentes de investigación presentada en el apartado 1.3 se revisan aspectos vinculados a conocimiento procedimental, dificultades en la comprensión de la derivada y la representación simbólica, gráfica y numérica de la derivada, se establece el estado en la investigación en educación matemática, enseñanza y aprendizaje. Se pone de manifiesto los problemas que surgen de las preferencias por algunos significados parciales de la derivada y no por un significado holístico.

Los resultados emergen de la pregunta de investigación planteada en el capítulo 1, *¿Cuáles significados sobre la derivada manifiestan estudiantes que han cursado cálculo diferencial?* Para contribuir a la enseñanza y aprendizaje de la derivada a maestros en formación, maestros en ejercicio, y estudiantes.

De acuerdo con los hallazgos se aprecia que los estudiantes manifiestan la comprensión de significados parciales sobre la derivada. Los sistemas de representación preferidos para manifestar tal comprensión son el simbólico y verbal, como se evidencia en la Tabla 17: *Caracterización de las de las soluciones propuestas por los estudiantes al Cuestionario 1* y Tabla 18: *Caracterización de las de las soluciones propuestas por los estudiantes al Cuestionario 2*, sin embargo, se aprecian manifestaciones, aunque también simbólicas y verbales, menos frecuentes, como es el caso de la Tarea 3 del Cuestionario 1, debido a que la tarea es propuesta mediante representación tabular y tres estudiantes presentan solución parcialmente correcta, como se evidencia en la Tabla 23: *Grado de corrección de Tarea 3 Cuestionario 1*, de forma simbólica y verbal. La importancia de comentar la Tarea 3 radica en la dificultad manifiesta para pasar de representación tabular de la función a representación simbólica y verbal, como se aprecia en la Tabla 23, seis estudiantes no respondieron a la tarea. Los estudiantes asumen las relaciones y procesos entre las diferentes formas de representación tabular-simbólica, de forma memorística como se evidencia en la Figura 11: Significado manifestado por estudiante E8 en la tarea 3 Cuestionario 1.

Las principales acciones de los estudiantes para responder a las tareas presentadas mediante representación tabular fueron emplear la expresión del límite del cociente incremental, definir simbólicamente la tasa de variación instantánea en la cual se reemplazan algunos valores y solucionar de forma algorítmica memorística para obtener un valor numérico mediante la aplicación de reglas para derivar, como por ejemplo la regla de la cadena. Su principal uso fue hallar la derivada de la función $f(x)$ expresada de forma tabular mediante el límite del cociente incremental, y su reiterada interpretación fue asumir el concepto del límite del cociente incremental de forma memorística y algorítmica como posible herramienta para reemplazar los valores propuestos de la tarea expresados de forma tabular y obtener expresiones simbólicas, como se evidencia en la Tabla 24 y Tabla 26.

La Tarea 1 del Cuestionario 2, presentada mediante representación gráfica y simbólica no diverge en cuanto a representación de la solución de los sistemas de representación simbólico y gráfico, preferidos por los estudiantes y menos aún las tareas presentadas mediante representación simbólica. La diferencia se origina en las conversiones y traducciones que realizan los estudiantes en la Tarea 1 para proponer una solución, debido a que demanda establecer relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada pasando de la función representada de forma gráfica a la representación simbólica, para obtener finalmente la gráfica de $f'(x)$, lo anterior transversalizado por criterios conceptuales como valores máximo y mínimo de una función, crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y picos, y análisis con criterio de la primera derivada como se evidencia en la Figura 15: Configuración cognitiva Tarea 1 Cuestionario 2, Comportamiento global y local de la función.

Se considera importante las relaciones entre los significados parciales de la derivada con su posible representación simbólica, gráfica, tabular y verbal, y las traducciones y conversiones entre las representaciones, pues como se evidencia en el apartado 4.2, Tabla 13 y Gráfica 1, los estudiantes responden a las tareas con mayor frecuencia de acuerdo a la variable grado de corrección, correcta y parcialmente correcta, cuando logran traducir, convertir y por ende relacionar la representación gráfica y tabular con la representación simbólica, donde manifiestan diferentes procedimientos como se aprecian en la Tabla 1, Tabla 2, Tabla 24 y Tabla 26.

Sobre los objetivos, en el capítulo 1 del trabajo de investigación se presentaron el objetivo general y objetivos específicos. Se contempla como objetivo general *Caracterizar significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario*.

Para dar cumplimiento al objetivo general se formularon los siguientes objetivos específicos:

1. *Analizar prácticas matemáticas de los estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario.*
2. *Identificar objetos matemáticos primarios emergentes de las prácticas matemáticas y posible configuración cognitiva.*

A continuación, se expone el origen de los objetivos, y su repercusión en la respuesta a la pregunta de investigación, y se plantea en qué medida se lograron cada uno de los objetivos específicos.

Para lograr los objetivos propuestos se adopta el Enfoque Onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática propuesto en el capítulo 2, como herramienta teórica central del trabajo investigativo; se propone para el análisis de los objetos matemáticos primarios que emergen del sistema de prácticas matemáticas, además, el estudio histórico-epistemológico del objeto derivada, realizado por Pino-Fan (2014) para identificar las prácticas que permitieron el origen y evolución de la derivada mediante la noción de configuración epistémica que proporciona el EOS.

Lo expuesto a lo largo de este trabajo, permite resaltar la derivada, como fundamental para el diseño curricular de un curso de cálculo diferencial y futuros cursos como cálculo integral y ecuaciones diferenciales en diversas carreras permeadas por el conocimiento matemático, precisamente, la derivada, pues se requiere que los estudiantes manifiesten diversos significados a partir de diferentes representaciones, traducciones y conversiones. Lo anterior se afirma con base en las configuraciones propuestas a partir del análisis de las prácticas matemática de cada una de las ocho tareas en el apartado 4.3. De forma puntual, analizar los sistemas de prácticas operativas y discursivas de los estudiantes, permitió caracterizar significados sobre la derivada cuando los estudiantes resuelven tareas que involucren la derivada, mediante la identificación de los objetos matemáticos primarios, ya que las relaciones y procesos que se evidencian entre estos permite asignar una mirada a partir de tres enfoques; ostensivo-no ostensivo, personal-institucional y expresión-contenido, a los sistemas de prácticas que se establecen a partir de los cuestionarios.

El logro del objetivo específico *Analizar prácticas matemáticas de los estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial a nivel universitario*, ha sido conseguido como resultado de la aplicación del Cuestionario 1 y Cuestionario 2 presentado en el capítulo 3, que permitió evidenciar los sistemas de prácticas de preferencia por el grupo de estudiantes que participaron de la investigación, del objetivo específico 1 se concluye que los estudiantes preferencian prácticas algorítmicas-rutinarias, evidenciado en la frecuencia de respuestas correctas y parcialmente correctas, cuando la tarea se presentaba mediante la representación simbólica, como se aprecia en la Tabla 24. En la investigación se consideran dos variables: 'grado de corrección' y 'significados'; la variable grado de corrección refiere a la solución de la tarea, y se asignaron valores 0, 1, 2, 3, 4 según si la respuesta era: no responde, incorrecta, parcialmente correcta o novedosa. Las características de lo que fue considerado una respuesta como: no responde, incorrecta, parcialmente correcta o novedosa para cada tarea se presenta en la Tabla 14, con ayuda de la Tabla 16 para identificar los significados y consignas manifestados por los estudiantes.

Lo anterior indica que los estudiantes no manifiestan significados que permitan desarrollar o llevar a la práctica, de forma ostensiva, definiciones, teoremas y diferentes representaciones respecto a la derivada, es decir, se aprecian procedimientos algorítmicos basados en objetos matemáticos no ostensivos como propiedades y conceptos en cada configuración presentada de cada una de las ocho tareas analizadas en el apartado 4.3.

El aporte del objetivo específico 1 en respuesta a la pregunta de investigación es la posibilidad de describir las prácticas matemáticas y significados preferenciados por los estudiantes a partir de los objetos matemáticos primarios, esto se hace evidente en los apartados 4.3.1 y 4.3.4, en los que se aprecian las configuración cognitivas, permeadas por procedimientos algorítmicos, memorísticos, mediante conceptos en su mayoría no ostensivos, además, dificultades para establecer traducciones entre las representaciones, lo anterior surge a partir de las relaciones y descripciones entre objetos matemáticos que permiten establecer la preferencia por la representación de la derivada como la simbólica y verbal, y por tanto la práctica matemática 'mecánica' algorítmica. La conclusión que emerge a partir del objetivo específico 1, es que, de acuerdo a la representación de la tarea y la posible solución, surge la 'condición' o 'necesidad' de representar la solución de la tarea mediante la representación inicial de la tarea, ya sea, verbal, simbólica, tabular o gráfica, donde las traducciones, relaciones y procesos entre las diferentes formas de representación de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ más frecuente fue la verbal como se observa en la

Tabla 1 y Tabla 2, también evidenciable en las ocho configuraciones propuestas, cada una utilizada para representar las interacciones, 'puentes' entre las representaciones utilizadas para dar solución a las tareas propuestas.

Sobre el objetivo específico 2, *Identificar objetos matemáticos primarios emergentes de las prácticas matemáticas y posible configuración cognitiva*, el EOS proporciona herramientas que permiten el análisis de los objetos matemáticos primarios emergentes del sistema de prácticas y los significados personales de los estudiantes (configuración cognitiva). Lo anterior posibilito la identificación sistemática de las soluciones propuestas por los estudiantes, y de los elementos lingüísticos como términos, expresiones, notaciones y gráficos en su registro, escrito, conceptos-definiciones introducidos mediante definiciones o descripciones, proposiciones mediante enunciados sobre conceptos, procedimientos, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, y argumentos que consisten en enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo. De esta manera se evidencia en la solución de cada tarea objetos matemáticos ostensivos y no ostensivos, que se relacionan y caracterizan la configuración cognitiva en cuanto a significados personales e institucionales que convergen en prácticas matemáticas semejantes en el grupo de estudiantes que participan de la investigación. La principal característica de las configuraciones identificadas mediante el EOS es la no representación de los objetos matemáticos conceptos-definiciones de forma ostensiva, estos se evidenciaron solo mediante la representación verbal de los estudiantes para la justificación de las proposiciones, lo anterior se observa en el apartado 4.3.

Como respuesta a los objetivos se identificaron ocho sistemas de prácticas, que siguiendo los supuestos teóricos del enfoque onto-semiótico, representan un significado parcial del objeto matemático derivada. Cada uno de los ocho sistemas de prácticas comprende la configuración cognitiva representativa del grupo de estudiantes (ver Figuras: 3, 7, 10, 13, 15, 17, 20, 23). La descripción y análisis que da cuenta del logro del objetivo específico 1 y objetivo específico 2, son las ocho configuraciones cognitivas, que dan lugar a los ocho significados parciales de la derivada, y se encuentra en el apartado 4.3. Cada esquema representado en las figuras, evidencia la complejidad de los significados parciales y holístico de la derivada, mostrando las relaciones entre los objetos matemáticos primarios emergentes de sistemas de práctica, que representan la configuración cognitiva.

El cumplimiento del objetivo específico1 y objetivo específico 2, fue importante para la investigación, ya que también es un aporte para profesores y estudiantes sobre la derivada, debido a que los significados pretendidos por una institución y por el profesor serán parte de los significados de los estudiantes. La conformación de los cuestionarios y el análisis Onto-semiótico de cada tarea propuesta en el apartado 3.2.2, además de las respuestas de los estudiantes, muestran la complejidad de las relaciones entre objetos matemáticos primarios emergentes y su representación, asignada por el estudiante, cuando son puestos en juego en la solución de las tareas. Que los profesores e instituciones conozcan esta complejidad, favorece la formación de profesionales en pregrados universitarios que propongan en su plan de estudios cálculo diferencial, permitiendo proporcionar diversos significados parciales y posiblemente un significado holístico de la derivada.

A pesar de los hallazgos en la investigación, quedan algunas preguntas por responder y sobre las cuales, investigaciones en Educación Matemática centradas en significados sobre la derivada en la formación de profesionales de diversas áreas, podrían continuar, a favor de la necesidad del significado holístico de la derivada en estudiantes.

Respecto a los significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes que han cursado cálculo diferencial, aún quedan cuestiones abiertas que pueden ser el inicio de nuevas investigaciones, y ser la continuidad del presente trabajo investigativo. A continuación se presentan algunas cuestiones abiertas que podrían investigarse para seguir avanzando en el trabajo de investigación.

Relaciones entre los diversos significados parciales de la derivada, la profundización que se debe otorgar al estudio de las configuraciones cognitivas de los significados parciales que manifiestan los estudiantes. Se hace necesaria la búsqueda de configuraciones ‘macro’ entre significados a nivel personal e institucional, que ayuden a generar procesos de formación que permitan la conformación solida de un significado holístico.

Exploración del objeto matemático primario "Argumentos" mediante la argumentación matemática. A lo largo del trabajo investigativo se abordaron y analizaron los objetos matemáticos primarios emergentes de los sistemas de prácticas respecto al objeto matemático derivada, sin embargo se debería seguir avanzando en aspectos respecto a los argumentos, comprendidos como la estructura de la solución de las tareas propuestas y posible significado de la derivada, a saber, integrar a la presente investigación: *el lenguaje común, el lenguaje matemático y el razonamiento matemático*, permitirían dilucidar mejor los significados parciales de la derivada. Lo anterior propuesto debido a la tendencia por la justificación y representación verbal de los estudiantes, a partir de la representación verbal, gráfica, simbólica y tabular.

6. REFERENCIAS

Albalawi, A. (2018). The effect of using flipped classroom in teaching Calculus on students' achievements at University of Tabuk. *International Journal of Research in Education and Science*, *4*(1), 198-207.

Apostol, T. (1989). *Análisis matemático.* Barcelona, España: Reverté.

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, (pp. 97-140).

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *1*(1), 40-55.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la asociación matemática venezolana*, *10*(2), 117-134.

Ávila, R., Ávila, J. y Bravo, J. (2016). Los significados de función y función derivada desarrollados por los estudiantes al estudiar la variación en el contexto de los problemas de ingeniería. En Mariscal, Elizabeth (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 93-104). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. *Doctoral, Universitat Autonoma de Barcelona, Barcelona-España*.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., y Törner, G. (2016). Teaching and learning of Calculus. In *Teaching and Learning of Calculus* (pp. 1-37).

Bressoud, D., Mesa, V. y Rasmussen, C. (Eds.). (2015). *Insights and recommendations from the MAA national study of college calculus*. MAA Press.

Brijlall, D. y Ndlovu, Z. (2013). High school learners' mental construction during solving optimisation problems in Calculus: a South African case study. *South African Journal of Education*, *33*(2).

Botello, C. y Parada, S. (2013) Diseño de una alternativa de acompañamiento y seguimiento a estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial en la Universidad Industrial de Santander. En Roa, S., Fiallo, J. y Parada, S. (Eds) Memoria del 4o Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. (p.p. 79-82) ISBN: 978-958-57843-4-5

Cabezas, C. y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de cálculo inicial. *Formación universitaria, 9*(6), 13-26.

Otero, R., y Bolívar, S., y Palacios, J. (2016). Análisis de la retención de estudiantes de ingeniería basado en la pérdida consecutiva de una misma asignatura. Un enfoque de Cadenas de Markov. Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias, V(16),7-18.[fecha de Consulta 6 de Abril de 2020]. ISSN: 1856-8327. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2150/215048805002

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa*, *9*(46).

Camarena, P. (2010). Aportaciones de Investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en Ingeniería. *Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica. IPN*.

Carvajal, P., López, A. y Trejos, A. (2016). ¿Cuánto Cuesta La Deserción Estudiantil?: Sistema De Cálculo De Costos Monetarios Del Abandono Estudiantil (Sissemae).

Castro, W. y Cadavid, G. (2016). Una concepción institucional sobre la derivada en la Universidad Tecnológica de Pereira, en el curso de Matemáticas I. *Entre Ciencia e Ingeniería*, *10*(20), 9-14.

Flores, R., Valencia, M., Dávila, G. y García, M. (2008). Fundamentos del cálculo. *México, Editorial Garabatos*.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques: aplicacions a les derivades*. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-128). Córdoba: SEIEM.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *8*(1).

Fuentealba, C. (2017). Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios.

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios.

Gamboa, R., Castillo, M., y Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. Actualidades Investigativas en Educación, 19(1), 104-136.

Gaona, M. (2013). Factores académicos que explican la reprobación en Cálculo diferencial. *Conciencia Tecnológica*, (46), 29-35.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. In *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (pp. 229-238). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

García, M. y Dolores, C. (2012). *Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 385-393). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v*. 20, pp. 13- 31.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

González, L y Radillo, M. (2014) Una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada de una función, mediante actividades de visualización. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, México, n. 27, p. 925-932.

Guba, E. y Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. *Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social*, 113-145.

Hähkiöniemi, M. (2004). Perceptual and symbolic representations as a starting point of the acquisition of the derivative. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 73-80).

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, L. (2014). Metodología de la investigación. Sexta edición por McGRAW-HILL.

Hernández-Quintana, A. y Cuevas, J. (2015). Reflexión sobre el nivel de competencia en matemáticas básicas por parte de estudiantes de cálculo diferencial en educación superior. In *Congreso Virtual sobre Tecnología, Educación y Sociedad* (Vol. 1, No. 5).

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo', Morelia*.

Hitt, F. (2018). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista electrónica AMIUTEM*, *2*(2), 1-19.

Jojo, M., Maharaj, A. y Brijlall, D. (2012). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of the Chain Rule--Work in Progress. *Online Submission*.

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., y Sauerbier, G. (2010). University students' difficulties in solving application problems in calculus: Student perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 81-91.

Londoño, N., Kakes, A. y Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. En R. Flores (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol. 26, pp. 933-940). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2015). Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas. Recuperado el 13 de abril de 2016 de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article339975.html

Moreno, M. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros.* En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 81-96). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Ordóñez, A. y Buendía, G. (2007). Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas. En C. Crespo, P. Lestón. T. Ochoviet y C. Oropeza (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 20, pp. 427-431). México: Clame.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 129-150.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. *Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México*, 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *13*(1).

Pinto, I., y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy.

Pinto, I., y Parraguez, M. (2016). Elementos articuladores para los modos de comprender el concepto de derivada.

Purcell, E., Varberg, D. y Castillo, H. (1993). *Cálculo con geometría analítica* (No. QA303. P87. 1973.). Prentice-Hall Hispanoamericana.

Retana, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, *37*(1), 29-42.

Romo, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs* (Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot-Paris VII).

Ruiz, E. (2009). Diseño de estrategias de enseñanza para el concepto de variación en áreas de ingeniería. *Innovación Educativa*, *9*(46), 27-39.

Sanabria, N. (2013). Dificultades detectadas al pasar del algebra al cálculo en educación matemática. *Infancias Imágenes, 12*(1), 44-50.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Sánchez-matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. In *En M. T. Gonzales, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds). Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41–53). Salamanca: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *24*(1), 85-98.

Santos, A. y Thomas, M. (2003). Representational ability and understanding of derivative. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME), Honolulu*, Vol. 2, 325–332.

Sapiencia. (2017). Deserción en la educación superior. (J. Mejía, Ed.) ODES (5), 2-17.

Siyepu, S. W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education, 2*(1), 16.

SPADIES (Sistema para la prevención de la deserción en la Educación Superior) (2013). Deserción estudiantil. Recuperado el 25 de septiembre de 2012 de: http://spadies.mineducacion.gov.co/spadies/consultas_predefinidas.html?2

Tallman, M. A., Carlson, M. P., Bressoud, D. M., y Pearson, M. (2016). A characterization of calculus I final exams in US colleges and universities. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 105-133.

Torres, F. y Zúñiga, J. (2012). Deserción en la educación superior en Colombia durante la primera década del siglo XXI: ¿por qué ha aumentado tanto? *La educación superior: Retos y perspectivas*, 307-342.

Vasco, C., (2006). Siete retos de la educación colombiana para el periodo de 2006 a 2019. *Universidad EAFIT. Medellín*, *10*.

Vasilachis, I. (2006). La investigación cualitativa. *Estrategias de investigación cualitativa*, 23-64.

Vergel-Ortega, M., Hernández, R. y Rincón-Leal, O. (2016). Influencia de curso precálculo y actividades de apoyo institucional en desarrollo de competencias y creencias en matemáticas. *Eco matemático*, *7*(1), 33-47.

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación universitaria*, *11*(2), 25-34.

Vrancken, S. (2014). La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación.

Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2012). La comprensión de la derivada en estudiantes de ingeniería agronómica. Logros y dificultades.

ANEXOS

Anexo 1

Planilla de observaciones para validar el instrumento por expertos

Planilla de observaciones para validar el instrumento del trabajo de investigación titulado significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios										
El objetivo de esta planilla es validar el instrumento por expertos.										
El objetivo de la investigación es identificar significados que sobre la derivada manifiestan estudiantes que han tomado el curso de cálculo diferencial.										
Criterios a evaluar	Tarea 1		Tarea 2		Tarea 3		Tarea 4		Tarea 5	
	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Claridad en la redacción										
Coherencia interna										
Sesgo (inducción a respuesta)										
Redacción adecuada a la población en estudio										
Contribuye a los objetivos de la investigación										
Contribuye a medir el constructo en estudio										
Criterios a evaluar	Tarea 6		Tarea 7		Tarea 8		Tarea 9		Tarea 10	
	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Claridad en la redacción										
Coherencia interna										
Sesgo (inducción a respuesta)										
Redacción adecuada a la población en estudio										
Contribuye a los objetivos de la investigación										
Contribuye a medir el constructo en estudio										
Observaciones a las tareas:										
Consideraciones generales sobre el instrumento										

Las instrucciones orientan claramente para responder el cuestionario	Si	No
La secuencia de tareas es coherente		
La cantidad de tareas es adecuada		
Las representaciones verbales, gráficas, tabulares y simbólicas son adecuadas		
Observaciones generales		
Instrumento validado por:		
Firma:		
Correo electrónico:		

Anexo 2

Cuestionario completo enviado a expertos

CUESTIONARIO

SIGNIFICADOS SOBRE LA DERIVADA QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

ESTUDIANTE:	Jhonatan Parra Naranjo
	E-mail: jhonatanp9@hotmail.com
LÍNEA DE FORMACIÓN:	Educación matemática
GRUPO DE INVESTIGACIÓN:	Matemática, Educación y Sociedad (MES)
ASESOR/ORIENTADOR:	Walter Fernando Castro Gordillo

Queremos agradecer de antemano el apoyo que pueda brindarnos para llevar a cabo una etapa importantes en el desarrollo de nuestro proyecto investigativo titulado “Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios”

En este sentido, requerimos de su colaboración para evaluar cada tarea que compone el cuestionario, nos interesa saber su punto de vista de cada tarea sobre los siguientes aspectos:

- Relevancia de cada una de las tareas con las cuales se evalúan los significados del objeto matemático derivada.
- Relevancia de cada una de las representaciones con las cuales se evalúa el enunciado y la solución.

- Ausencia de algún contenido importante.
- Redacción y comprensión de los enunciados.
- Sugerencias.

Si consideras que el cuestionario debería incluir otras tareas, diferentes a las planteadas, para completar y mejorar te agradeceríamos que las incluyeras al final de este documento.

CUESTIONARIO

SIGNIFICADOS SOBRE LA DERIVADA QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Instrucciones

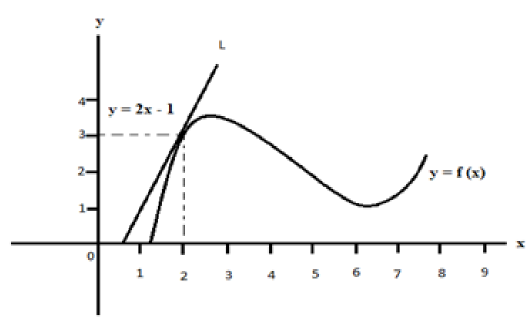
- Lee con atención cada una de las tareas y responde. Trata de ser ordenado en la solución y redacción de tus procedimientos.
- Utiliza bolígrafo de tinta negra
- Utiliza solo una página en blanco para tus respuestas.
- Es importante que NO borres nada de lo que escribas. Aquello que creas que esté erróneo, solo táchalo.

Tarea 1. ¿Qué significa para ti la derivada?

¿Qué significado tiene la pendiente de la recta tangente?
¿Qué significado tiene la velocidad instantánea?

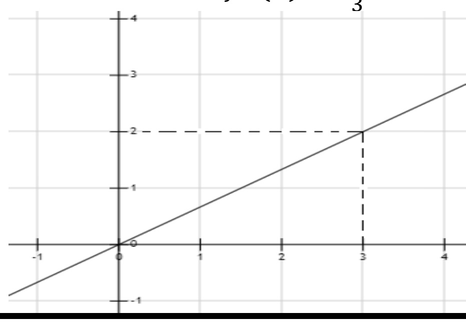
Tarea 2. Encontrar la tasa de variación instantánea de $f\ (x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$ en el punto $(1, f(1))$

Tarea 3. Suponga que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto $(2{,}3)$ como aparece en la figura. Encontrar $f(2)$ y $f'(2)$.

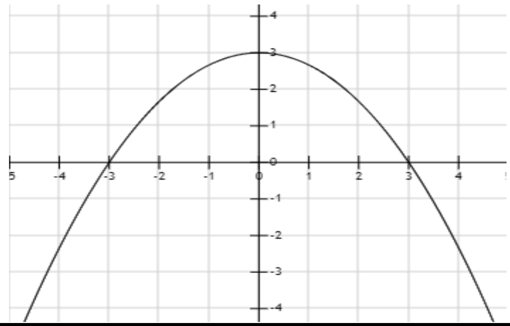


Tarea 4. La gráfica 1, corresponde a la función derivada de $f(x)$. La expresión analítica de la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \frac{2}{3}x$. Indica cuál de las gráficas A, B, C corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

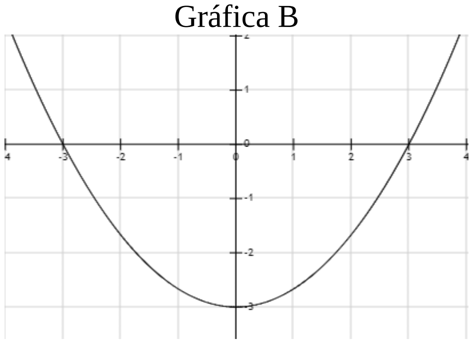
Gráfica 1: $f'(x) = \frac{2}{3}x$



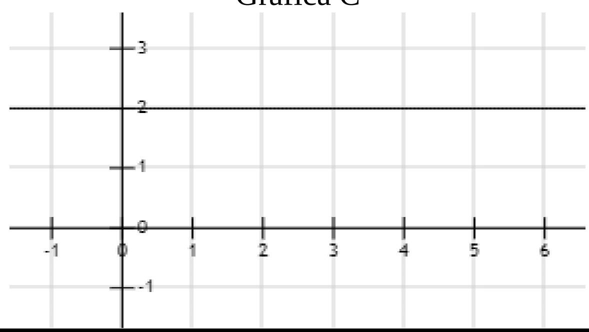
Gráfica A



Gráfica B



Gráfica C



Tarea 5. De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

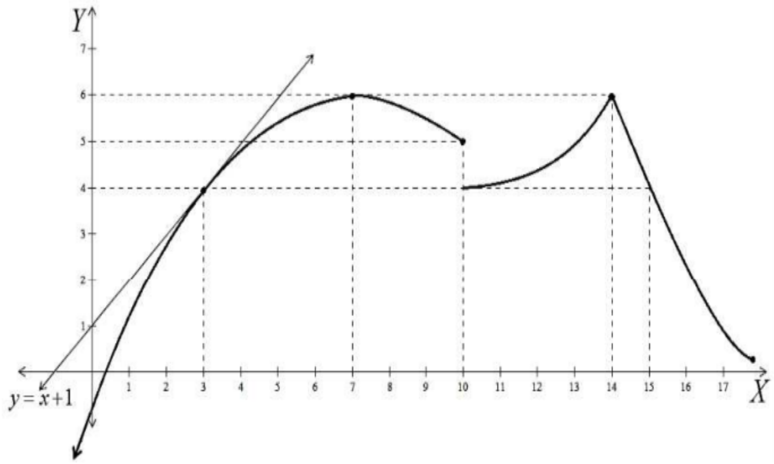
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$.

b) A partir de la información suministrada por esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

Tarea 6. Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas:



a) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10)\ y\ f'(14)$. Y explica cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

Tarea 7. Determinar los intervalos de concavidad de la siguiente función: $f(x) = -x^3 - x + 7$

Tarea 8. Hallar los extremos relativos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Tarea 9. Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Escribir $g(x) = xf(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$. Explica cómo has logrado los resultados.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{f''(x)}$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
4	6	3	0

Tarea 10. Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que este forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de 1,5 cm/s, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$? Realiza una gráfica que ilustre la correspondiente situación.

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

Anexo 3

Cuestionario 1 y Cuestionario 2

CUESTIONARIO 1

SIGNIFICADOS SOBRE LA DERIVADA QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

ESTUDIANTE: **Jhonatan Parra Naranjo**

E-mail: **jhonatanp9@hotmail.com**

LÍNEA DE FORMACIÓN: Educación matemática

GRUPO DE INVESTIGACIÓN: Matemática, Educación y Sociedad (MES)

ASESOR/ORIENTADOR: Walter Fernando Castro Gordillo

Instrucciones

- Lee con atención cada una de las tareas y responde. Trata de ser ordenado en la solución y redacción de tus procedimientos.
- Utiliza bolígrafo de tinta negra
- Utiliza solo una página en blanco para tus respuestas.
- Es importante que NO borres nada de lo que escribas. Aquello que creas que esté erróneo, solo táchalo.

1. a) ¿Qué significa para ti la derivada?
   b) ¿Qué significado tiene la pendiente de la recta tangente?
   c) ¿Qué significado tiene la velocidad instantánea?

2. Encontrar la tasa de variación instantánea de $f\ (x) = \frac{(x+3)}{(x+2)}$ en el punto $(1, f(1))$

3. De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

c) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$.

d) A partir de la información suministrada por esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

4. Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Escribir $g(x) = xf(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$. Explica cómo has logrado los resultados.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{f''(x)}$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
4	6	3	0

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

CUESTIONARIO 2

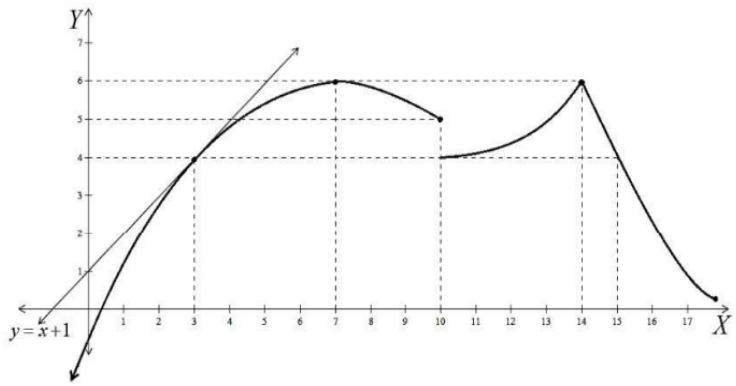
SIGNIFICADOS SOBRE LA DERIVADA QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

ESTUDIANTE:	**Jhonatan Parra Naranjo**
	E-mail: jhonatanp9@hotmail.com
LÍNEA DE FORMACIÓN:	Educación matemática
GRUPO DE INVESTIGACIÓN:	Matemática, Educación y Sociedad (MES)
ASESOR/ORIENTADOR:	Walter Fernando Castro Gordillo

Instrucciones

- Lee con atención cada una de las tareas y responde. Trata de ser ordenado en la solución y redacción de tus procedimientos.
- Utiliza bolígrafo de tinta negra
- Utiliza solo una página en blanco para tus respuestas.
- Es importante que NO borres nada de lo que escribas. Aquello que creas que esté erróneo, solo táchalo.

1. Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas:



   c) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10)$ y $f'(14)$. Y explica cómo los obtienes.
   d) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

2. Determinar los intervalos de concavidad de la siguiente función: $f(x) = -x^3 - x + 7$

3. Hallar los extremos relativos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

4. Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que este forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de 1,5 cm/s, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4cm$? Realiza una gráfica que ilustre la correspondiente situación.

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN