Artículo de investigación | Research Article

Significados de la función pretendidos por el *currículo de matemáticas chileno*

magis

12

VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

Intended Meanings of the Function in the Chilean Mathematics Curriculum

Fecha de recepción: 19 DE OCTUBRE DE 2016 / Fecha de aceptación: 10 DE ABRIL DE 2018 / Fecha de disponibilidad en línea: ENERO DE 2019

doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Luis Roberto Pino-Fan
luis.pino@ulagos.cl
Universidad de Los Lagos, Chile
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408

Yocelyn Elizabeth Parra-Urrea
yocelynparra@gmail.com
Universidad de Los Lagos, Chile
https://orcid.org/0000-0002-1880-5945

Walter Fernando Castro-Gordillo
walter.castro@udea.edu.co
Universidad de Antioquia, Colombia
https://orcid.org/0000-0002-7890-681X

Resumen

En esta investigación, analizamos la representatividad de los significados pretendidos para la función por el currículo chileno de matemáticas. Para ello, se realiza tanto la reconstrucción del significado holístico de referencia, mediante una revisión documental de estudios histórico-epistemológicos, como la determinación del significado pretendido por el currículo chileno de matemáticas, para la función, a través del análisis de sus programas de estudio y de libros de texto sugeridos. Los resultados permiten evaluar la riqueza matemática de los significados pretendidos por el currículo chileno, además de proporcionar información que los profesores deberían conocer para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes.

Palabras clave

Plan de estudios; libro de texto; valoración del currículo; cálculo; función matemática

Abstract

This research analyzes the representativeness of the intended meanings for the function in the Chilean mathematics curriculum. To do so, two things are carried out: the reconstruction of the reference holistic meaning through a documentary review of historical-epistemological studies, and the determination of the intended meaning for the function in the Chilean mathematics curriculum by analyzing the study programs and the suggested textbooks. The results allow to evaluate the mathematical richness of the intended meanings in the Chilean curriculum. In addition, they provide information that teachers should know in order to appropriately manage the student's learning.

Keywords

Curriculum; textbooks; curriculum evaluation; calculus; mathematical function

Para citar este artículo / To cite this article

Pino-Fan, L. R.; Parra-Urrea, Y. E. & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *11* (23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

Antecedentes

Diversas investigaciones han informado sobre dificultades en la comprensión del objeto matemático *función*, asociadas con su enseñanza y aprendizaje. La noción de *función* es muy importante, debido a su naturaleza unificante y modelizadora. Sin embargo, es un concepto complejo debido, entre otros aspectos, a la multiplicidad de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción (Ramos de Pacia, 2005). Algunas investigaciones sobre las dificultades cognitivas de los estudiantes cuando abordan la noción de *función* (Akkoç & Tall, 2005), se refieren al desconocimiento de la diversidad de representaciones asociadas con esta noción. Otras investigaciones evidencian cómo el uso limitado de representaciones en los procesos de enseñanza, en los cuales predomina el registro algebraico, impide a los estudiantes transitar desde un registro hacia otro (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992), sin considerar que la articulación de registros de representación es fundamental para la comprensión de los objetos matemáticos, incluido el de *función* (Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007; Even, 1998; Gagatsis, Elia & Andreou, 2003; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia & Philippou, 2016; Sierpinska, 1992). En Chile se evidencian dificultades en la comprensión de objetos matemáticos asociados con el álgebra, y en este contexto curricular el estudio de las funciones es tratado, en general, desde un punto de vista estrictamente formal, lo que genera obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena Díaz, 2001). Laura García Quiroga, Rosa Alicia Vázquez Cedeño y Moisés Hinojosa Rivera (2004) señalan que el cambio o traducción entre registros es una dificultad que enfrentan los estudiantes, sobre todo cuando el cambio se efectúa del registro gráfico al algebraico. Esta misma dificultad manifestada por estudiantes chilenos fue reportada por Ismenia Guzmán Retamal (1990), con estudiantes de 14 a 16 años.

Por otro lado, centrarse en el estudio de procesos algorítmicos conlleva la consideración de la *función* como una fórmula, con una pobre y limitada significación, donde la construcción de tablas será un simple requisito y la graficación no tendrá interpretación (Artigue, 1998). Una de las dificultades descritas por Luisa Ruiz Higueras (1998) refiere a que en ocasiones los estudiantes no logran identificar o considerar como funciones aquellas cuya generalidad y arbitrariedad no permite expresarlas algebraicamente o mediante gráficas cartesianas. En este sentido, Shlomo Vinner (1992, citado en Parra-Urrea, 2015) informa sobre concepciones estudiantiles sobre la *función*, entre ellas: "La correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades. No se considera una correspondencia arbitraria como función". "Un cambio en la variable independiente debe sistemáticamente reflejarse en la variable dependiente, por tanto, una función constante no es tal, ya que $f(x) = 2$ no depende de x y además no hay variación". "Una función debe tener un término algebraico, una fórmula o una ecuación. Es una manipulación realizada sobre la variable independiente para obtener la variable dependiente. Luego, una correspondencia funcional definida por trozos no es una función sino varias". "La gráfica de una función debe ser regular, y sin cambios bruscos. Cambios imprevistos en la gráfica indican que no es función". "Una función es una correspondencia uno a uno", etc. Las concepciones de este tipo indican que los estudiantes no logran dar sentido a la noción matemática, lo cual dificulta su comprensión.

Algunos estudios sobre propuestas para la enseñanza de la *función* establecen la necesidad de abordarla a partir de situaciones contextualizadas,

Descripción del artículo | Article description
En este artículo de investigación científica, derivado del proyecto *Exploración, caracterización y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores de enseñanza media en formación inicial, sobre las nociones clave del cálculo*, se presenta el estudio de los significados propuestos por el currículo de matemáticas de Chile sobre la noción de función. Para poder determinar estos significados, se utiliza una metodología diseñada e implementada por dos de los autores de este documento, la cual está basada en aspectos epistemológicos y antropológicos. Esta metodología permite estudiar la representatividad de los significados de la función propuestos por el currículo chileno, respecto de los significados de referencia (determinados mediante estudios histórico-epistemológicos) de esa noción.

para promover el estudio y análisis de la variación en fenómenos de cambio, en los cuales la noción de *función* tendría un papel vinculado con sus orígenes epistemológicos, además de que es conveniente establecer una relación entre la noción de *función* y otros objetos matemáticos previamente trabajados en el currículo escolar (Deulofeu, 2001; Ruiz Higueras, 1998).

Por otro lado, estudios sobre el conocimiento de los profesores sobre la *función* (Even, 1993; Hatisaru & Erbas, 2015; Wilson, 1994) informan que la mayoría de los profesores desconocen aspectos conceptuales sobre ella, aprueban definiciones informales y las perciben como definiciones matemáticamente formales, identifican ejemplos estándar de funciones, y manifiestan dificultades para identificar fenómenos físicos que se modelan con relaciones funcionales. Del mismo modo, la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente, y muy pocos estudiantes pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. La naturaleza arbitraria implica que las funciones no tienen por qué ser definidas en algún conjunto específico de objetos, es decir, no requieren ser definidas sobre conjuntos numéricos usuales. Mientras que la naturaleza arbitraria de las funciones está implícita en la definición de una función, la exigencia de univalencia —cada elemento en el dominio está relacionado con un único elemento (imagen) en el rango— se indica explícitamente. En el desarrollo histórico de la noción de función, la univalencia no fue requerida al principio. Hans Freudenthal (1983) atribuye este requisito al deseo de los matemáticos de mantener las cosas manejables. "El desarrollo de análisis avanzados creó la necesidad de lidiar con diferenciales de órdenes superiores a uno y, por tanto, de distinguir variables independientes de dependientes. En tal caso, se hizo demasiado difícil trabajar con símbolos multivaluados, y el requisito de univalencia se añadió a la definición de una función" (Even, 1993, p. 96).

Por otra parte, los profesores manifiestan la creencia sobre que el uso de metáforas dinámicas facilita la comprensión de la *función*, sin embargo, esto puede ocasionar que los estudiantes estructuren su conocimiento en términos metafóricos. Aunque el uso de las metáforas permite comprender ciertos aspectos, también oculta otros (Font Moll & Acevedo Nanclares, 2003).

El objetivo de este artículo es analizar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de *función* respecto del "significado holístico de referencia" (Pino-Fan, Godino & Font Moll, 2011) de este objeto matemático. Para esto, se asume el significado holístico de la *función* reconstruido en Yocelyn Elizabeth Parra-Urrea (2015), y cuya síntesis se presenta en este documento. De esta forma, se compara el significado holístico de la *función* con el significado pretendido por el currículo chileno de matemáticas. Para el análisis de los significados pretendidos por el currículo, utilizamos algunas nociones del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos (Godino, Batanero Bernabeu & Font Moll, 2007), las cuales se presentan en la siguiente sección. La información reportada proporcionará herramientas para que los profesores de matemáticas reconozcan la eventual limitación semiótica de la representación curricular de conceptos matemáticos tanto de los programas de estudio como de los libros de texto.

Marco teórico y metodológico

En esta investigación, hemos adoptado el modelo teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos (Font Moll, D. Godino & Gallardo Romero, 2013; Godino & Batanero Bernabeu, 1994; Godino, Batanero Bernabeu & Font Moll, 2007).

El EOS incluye un modelo epistemológico, antropológico y sociocultural de la matemática, además de un modelo cognitivo e instruccional que, a través de sus herramientas teóricas, permite realizar análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Para el EOS, los sistemas de prácticas juegan un rol central tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Para Juan D. Godino y Carmen Batanero Bernabeu (1994), los sistemas de prácticas son entendidos como "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 334). Vicenç Font Moll, Juan D. Godino y Jesús Gallardo Romero (2013) afirman que "las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas" (p. 104).

El EOS considera los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas (Godino & Batanero Bernabeu, 1994). En esta investigación, hemos utilizado los aspectos teórico-metodológicos, basados en el EOS, que presentan Luis Roberto Pino-Fan, Walter Castro Gordillo, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll (2013) para el análisis curricular de los significados pretendidos sobre cierta noción matemática. Esos aspectos teórico-metodológicos se construyen sobre la base de la noción de *configuración ontosemiótica*, la cual permite analizar y describir los objetos matemáticos primarios (*i.e.*, elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre funciones, propuestas en el currículo chileno de matemáticas. La configuración ontosemiótica puede ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos matemáticos primarios activados en una práctica institucional o personal, respectivamente (Pino-Fan, Godino & Font Moll, 2015). Para el estudio de la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia de la *función*, utilizamos la noción de *configuración epistémica.* El significado de un objeto matemático se define como el "sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene" (Pino-Fan, 2014, p. 45).

La interpretación semiótica de las prácticas permite considerar tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font Moll, Wilhelmi & Lurduy, 2011). Así, Juan D. Godino y Carmen Batanero Bernabeu (1994) establecen que los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados con los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, "el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia" (Pino-Fan, Castro Gordillo, Godino & Font Moll, 2013, p. 147).

Ahora bien, para la implementación en el aula de los significados del objeto *función*, el profesor toma como referencia los significados pretendidos por el currículo de matemáticas (Pino-Fan, Castro Gordillo, Godino & Font Moll, 2013), de donde se deriva la importancia de que los significados pretendidos por el currículo sean representativos del *verdadero* significado de la noción de *función* (significado holístico de referencia). Así, cabe preguntarnos: ¿los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno, sobre la noción de *función*, son representativos del significado holístico de referencia de este objeto matemático? Para responder este interrogante se requiere transitar por dos niveles:

1. El primer nivel refiere al estudio del significado histórico-epistemológico, mediante el cual se podrán obtener los diversos significados parciales de la noción de *función* que conforman el significado holístico de referencia (Pino-Fan, Godino & Font Moll, 2011).
2. El segundo nivel refiere al estudio del significado de la noción de *función* pretendido por el currículo de matemáticas. En este nivel se deberá incluir un estudio sobre la representatividad del significado holístico de referencia de los significados pretendidos por el currículo.

Para estudiar el significado pretendido por el currículo chileno sobre la noción de *función*, consideramos como currículo a la dupla *libros de texto, programas de estudio*, tal como lo sugieren Luis Roberto Pino-Fan, Walter Castro Gordillo, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll (2013) en su estudio, puesto que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los maestros, así como para su estilo de enseñanza (Cooney, 1985). Eric Love y David Pimm (1996) lo señalan de la siguiente manera: "El libro es todavía, en gran medida, la tecnología más extendida y usada en las clases de matemáticas. …el libro de texto ha moldeado nuestra noción de la matemática y cómo debe enseñarse" (p. 402). A continuación, presentamos la metodología utilizada para abordar el nivel dos descrito anteriormente.

magis PÁGINA 204
VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

Criterios específicos para la caracterización de los significados de la *función* en el currículo chileno

Para el desarrollo de la segunda fase del estudio, adoptamos la metodología propuesta por Pino-Fan, Castro Gordillo, Godino y Font Moll (2013), la cual propone cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares:

Representatividad de los campos de problemas propuestos. En una primera etapa de nuestro estudio, analizamos y clasificamos los tipos de problemas propuestos tanto en los programas de estudio como en los libros de texto. Es posible considerar *a priori* seis campos de problemas (cada uno de ellos relacionado con un significado parcial) identificados a partir del estudio histórico-epistemológico y que se pueden resumir en los siguientes: a) Problemas que movilizan la *función* como correspondencia; b) Problemas que movilizan la *función* como relación entre variables; c) Problemas que movilizan la *función* como representación gráfica; d) Problemas que movilizan la *función* como expresión analítica; e) Problemas que movilizan la *función* como correspondencia arbitraria; y f) Problemas que movilizan la *función* desde un punto de vista conjuntista.

Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas. Para esta fase, consideramos los hallazgos de las investigaciones (*e.g.*, Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007; Even, 1998) en relación con las representaciones que se deberían contemplar idóneamente para abordar el estudio de la noción de *función*. Así, encontramos que para la noción de *función* deberían considerarse las siguientes representaciones: verbal, gráfica, simbólica, tabular e icónica. Para facilitar el análisis del tipo de representaciones activadas en la dupla *programas de estudios-libros de texto*, hemos adaptado la tabla IV que proponen Luis Roberto Pino-Fan, Walter Castro Gordillo, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll (2013, p. 141), resultando la tabla 1. Como previas, entendemos las representaciones que deben ser interpretadas y decodificadas por el estudiante, con la finalidad de abordar y comprender la tarea. Como emergentes, entendemos aquellas representaciones que surgen como parte de las respuestas de los estudiantes (o respuestas que se espera que surjan, si se considera desde un punto de vista institucional).

Tabla 1
Representaciones previas y emergentes de la noción función

Representaciones para *f(x)*						
Previas \ Emergentes		*f(x)*				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
f(x)	Verbal					
	Gráfica					
	Simbólica					
	Tabular					
	Icónica					

Fuente: adaptación de la tabla IV presentada en Luis Roberto Pino-Fan, Walter Castro Gordillo, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll (2013, p. 141)

VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos. Para realizar este estudio se utilizó la noción de configuración ontosemiótica epistémica descrita anteriormente.

Representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia. El diseño instruccional es una de las tareas del profesor, en la que se involucran diversos aspectos, como los epistémicos (contenidos), los cognitivos o los instruccionales. El conjunto de contenidos matemáticos que se proponen en los programas de estudios y en los textos, corresponde a una elección por parte de la institución. Esos contenidos matemáticos y los significados conferidos a estos en los textos representan a los significados institucionales de referencia. Para que la instrucción sea epistémicamente idónea, este conjunto de objetos y significados institucionales de referencia deben representar al significado holístico de la *función*. "El énfasis en determinados significados y objetos matemáticos, y el desconocimiento de otros, puede resultar en un cubrimiento epistémico parcializado que puede afectar la idoneidad del proceso de instrucción" (Pino-Fan, Castro Gordillo, Godino & Font Moll, 2013, p. 132).

Significados de la noción de *función* desde el punto de vista histórico-epistemológico

Para Luis Roberto Pino-Fan, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll (2011), los significados parciales de los objetos matemáticos están asociados con las configuraciones epistémicas que se movilizaron para resolver ciertas situaciones problema, en determinados períodos históricos, y que dieron paso al surgimiento, evolución, formalización y generalización de un determinado objeto matemático, en nuestro caso, la *función*. En particular, en un estudio previo (Parra-Urrea, 2015), hemos realizado una revisión de los estudios histórico-epistemológicos que se han desarrollado sobre la *función*, además hemos contemplado el trabajo de Rolf Biehler (2005) sobre la reconstrucción de los significados de la noción de *función* desde el punto de vista didáctico, para determinar que la noción de *función* tiene al menos seis significados parciales (los cuales conforman el significado holístico de referencia para este objeto matemático):

La función como correspondencia: la noción de función como correspondencia tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de *número*. Durante la época antigua, el conteo implicaba una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar; de esta manera, comienzan a desarrollarse las primeras manifestaciones que contienen algunos aspectos propios de la noción de función (Sastre Vázquez, Rey & Boubée, 2008). En este sentido, se entenderá por correspondencia aquello que asocia elementos entre dos conjuntos. Un problema cuyas características tanto en el planteamiento como en las posibles soluciones movilizan esta acepción del objeto matemático función, fue el de las tablas numéricas babilónicas (2000 a.C.-500 a.C.), que establecían cálculos tan llamativos como los de la suma de n términos de una progresión geométrica.

La función como relación entre magnitudes variables: la noción de función como relación entre magnitudes variables está asociada al estudio de fenómenos que incluyen cambio, como el calor, la luz, la distancia, la velocidad, etc., que pueden poseer distintos grados de intensidad y cambian continuamente entre ciertos límites dados. A partir de estas indagaciones se estableció la noción de cantidades variables dependientes e independientes (Ruiz Higueras, 1998). El estudio de tablas numéricas obtenidas a partir de mediciones de valores cambiantes de diferentes magnitudes, condujo a una primera aproximación de ciertas relaciones funcionales, es decir, pasar de una simple tabulación de datos empíricos a la búsqueda de regularidades implica la existencia de un cierto "instinto de funcionalidad" (Ruiz Higueras, 1998, p. 192). El análisis de regularidades en las relaciones entre magnitudes cambiantes (variables) constituye una fuente central para establecer un acercamiento a la noción de función (Biehler, 2005). Todas las situaciones ligadas con los fenómenos naturales en que intervienen magnitudes físicas variables son las situaciones que, desde la matemática prehelénica, movilizan esta acepción de la noción de función.

La función como representación gráfica: esta acepción de la noción de función surge de la intención de representar la relación de variación entre magnitudes físicas por medio de gráficas. Nicole d'Oresme en el siglo XIV desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas, según la cual una relación entre magnitudes se representa mediante una figura que pretende evidenciar la intensidad de una cualidad en relación con otra de la cual depende. Oresme establece que "Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua" (Adolf P. Youschkevitch, 1976, citado en Ruiz Higueras, 1998, p. 159). Por otro lado, la idea de función como curva es parte del significado de función como expresión gráfica. Según Luisa Ruiz Higueras (1998), "…tomando sucesivamente infinitas diversas cantidades para la línea *x*, encontraremos también infinitas para la línea *y*, y así, tendremos una infinidad de diversos puntos por medio de los cuales describiremos la línea curva pedida" (p. 194). Rolf Biehler (2005) señala que un problema que subyace a la idea de función como el trazo de una curva a mano alzada, es la intención de asociar a cada curva una expresión algebraica; sin embargo, responder a esta problemática implicaría recurrir a métodos numéricos y a la búsqueda de condiciones que aseguren la existencia de dicha expresión —que se corresponde con el análisis funcional—.

La función como expresión analítica: la primera consideración de la función como expresión analítica es la que establece Leibniz Johann Bernoulli en 1718. Posteriormente, apoyado en las nociones de su maestro Bernoulli, Leonhard Euler propone la siguiente definición de función:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes (Leonhard Euler, citado por Dhombres, Dahan-Dalmedico, Bkouche, Houzel & Guillemot, 1987, p. 194).

Para otorgar mayor generalidad a esta definición, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios para el argumento. Según Euler, una función asumida como una expresión analítica se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, las potencias y raíces. A ellas adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, $\ln z$ y las funciones trigonométricas (Ruiz Higueras, 1998). Euler estableció funciones algebraicas y trascendentes, las primeras formadas por operaciones algebraicas, y las últimas formadas por operaciones trascendentes. Euler complementó esta clasificación con la introducción de funciones uniformes y multiformes, pares e impares, y definió criterios para su determinación. Sin embargo, al restringir la función como expresión analítica, consideraba que todas las

magis
PÁGINA 208
VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

funciones podían ser representadas por una serie de potencias: $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots + a_nz^n + \cdots$. Más tarde se amplía la expresión analítica para potencias de la variable z, no solo enteras, sino cualesquiera, afirmando que toda función de z puede ser transformada en una expresión de la forma: $f(z) = Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \cdots$ (siendo α, β, γ, ... números cualesquiera). No es de extrañar esta afirmación tan rotunda, ya que, en la época de Euler, casi todas las funciones utilizadas eran analíticas. Los problemas cuyas características movilizan esta acepción de la noción de *función*, propios del cálculo infinitesimal, son los que se intentaron resolver a través de una profunda interconexión entre las ideas físicas y matemáticas. En *El método de fluxiones y series infinitas* (*Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, basado a su vez en las ideas de aproximación e interpolación), Isaac Newton muestra que ciertas funciones pueden ser descritas tanto mediante sumas infinitas como por los aspectos geométricos representativos ligados a dichas expresiones algebraicas.

La función como correspondencia arbitraria: durante el siglo XIX se crearon las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como correspondencias de tipo muy general.

Esta nueva acepción de la noción de función es definida ampliamente por Gustav Lejeune Dirichlet, quien la enuncia de la siguiente manera:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que se atribuye un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable dependiente x (Gustav Lejeune Dirichlet, 1837, citado en Boyer, 1986, p. 687).

Para evidenciar lo arbitraria que podía ser la regla de correspondencia, Dirichlet propuso una función de 'muy mal comportamiento': Sean c y d dos números reales distintos; cuando x sea racional sea $y = c$, y cuando x es irracional sea $y = d$. Esta función es tan patológica que es discontinua para todos los valores de x (Ruiz Higueras, 1998). Posteriormente, Riemann propone la siguiente definición:

> Se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que una a x y a y (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1858, citado en Ruiz Higueras, 1998, p. 183).

La función a partir de la Teoría de Conjuntos: a finales del siglo XIX, surge la teoría de conjuntos con Georg Cantor. Su impacto se extiende al desarrollo de la topología, el álgebra y el análisis funcional entre otros. La influencia que dicha teoría posee sobre la noción de función, permite establecer la definición formal de este objeto matemático: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un único elemento de Y. Se dice también que f es una aplicación de X en Y. Para un elemento genérico $x \in X$ denotaremos habitualmente por $f(X)$ el elemento Y correspondiente a ese x, y se dirá también que $f(X)$ es el valor de la función f en x, esto se expresa a veces mediante la igualdad $y = f(X)$. En el intento de precisar y dar mayor rigor a la definición de este objeto matemático, se llega a la determinación de una función como la terna f = (G, X, Y), en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las siguientes condiciones: a) $G \subseteq X \times Y$; ; b) Para todo $x \in X$ existe una y solo una $y \in Y$, tal que (x, y) ∈ G, *G* es la gráfica de la función *f*. El único elemento *y* de Y tal que (x, y) ∈ G se llama valor de la función *x* en *y*, y se utiliza para designarlo $y = f(x)$. Es evidente que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma (x, *f* (x)) donde x ∈ X, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función. A X se le denomina conjunto de partida de *f*, y a Y conjunto de llegada de *f* (Luisa Ruiz Higueras, 1998, citada en Parra-Urrea, 2015, p. 23). Uno de los problemas surge cuando el significado de la noción de función refiere a las situaciones de variación que debían ser modeladas funcionalmente, dentro de cualquier dominio científico, es decir, extender la definición a una relación entre conjuntos arbitrarios (Ruiz Higueras, 1998).

Análisis del significado de función pretendido por el currículo chileno

En este apartado, presentamos el análisis del currículo chileno de matemáticas para determinar los significados pretendidos para la *función*. Para esto, analizamos los programas de estudios y libros de texto sugeridos en las propuestas curriculares chilenas, para los niveles de octavo año básico a cuarto año medio (figura 1). Sin embargo, por motivos de espacio, únicamente presentamos el análisis detallado de la propuesta curricular de octavo año básico, puesto que en este nivel educativo aparece por primera vez la noción de *función*. Para los otros niveles educativos —primero a cuarto año medio—, se presenta una síntesis de los significados pretendidos para la noción de *función*.

Figura 1
Propuesta curricular del Ministerio de Educación chileno

Nivel	Propuesta Curricular del Ministerio de Educación de Chile	
8º Básico	Programa de estudio	Mineduc. (2011a). *Programa de Estudio para Octavo Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación*. Santiago de Chile.
	Texto escolar	Bennett, J.; Burger, E.; Chard, D.; Hall, E.; Kennedy, P.; Renfro, F.; Roby, T.; Scheer, J. & Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8º*. Chile: Galileo Libros Ltda.
1º Medio	Programa de estudio	Mineduc. (2011b). *Programa de Estudio para Primer Año Medio. Unidad de Currículum y Evaluación.* Santiago de Chile.
	Texto escolar	Elgueta, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 1º Medio*. Chile: SM Chile S. A.
2º Medio	Programa de estudio	Mineduc (2011c). *Programa de Estudio para Segundo Año Medio. Unidad de Currículum y Evaluación*. Santiago de Chile.
	Texto escolar	Muñoz, G.; Jiménez, L. & Rupin, P. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 2º Medio*. Chile: SM Chile S. A.
3º Medio	Programa de estudio	Mineduc. (2015a). Programa de Estudio para *Tercer Año Medio. Unidad de currículum y evaluación vigencia de documentos curriculares 2015.*
	Texto escolar	Saiz, O. & Blumenthal, V. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 3º Medio*. Chile: Ediciones Cal y Canto.
4º Medio	Programa de estudio	Mineduc. (2015b). Programa de Estudio para *Cuarto Año Medio. Unidad de currículum y evaluación vigencia de documentos curriculares 2015.*
	Texto escolar	Muñoz, G.; Gutiérrez, V. & Muñoz, S. (2015). Texto del estudiante. Matemática 4º Medio. Chile: Santillana del Pacífico S. A.

Fuente: elaboración propia

Análisis de la propuesta curricular para octavo año básico

A continuación, se detalla el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de octavo año básico, considerando la dupla *programas de estudios - libros de texto*.

Análisis del programa de estudio

El Programa de Estudios (PE) de octavo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro unidades, cada una de estas asociadas con un eje temático. La noción de *función* se aborda en la Unidad 4 relacionada con el eje temático de álgebra. En esa unidad, los aprendizajes esperados uno y dos están directamente vinculados con el estudio de la noción de *función*: 1) Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos; 2) Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas. Para cada uno de estos aprendizajes esperados se plantean indicadores (figura 2) sobre aquello que los estudiantes deberán ser capaces de hacer cuando hayan logrado estos aprendizajes.

VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

Figura 2
Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:
AE 01	
Planear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos.	› Identifican las variables que están involucradas en situaciones de la vida cotidiana. › Despejan una variable en función de la otra en ecuaciones que tienen dos incógnitas. › Evalúan ecuaciones planteadas en función del contexto del problema.
AE 02	
Reconocer funciones en diversos contextos y representar diversas situaciones a través de ellas.	› Identifican el dominio y recorrido de una función. › Identifican variables dependientes de otras variables en diversas situaciones. › Dan ejemplos de funciones en contextos cercanos. › Utilizan notaciones empleadas en funciones para expresar dependencias de variables.

Fuente: Chile, Ministerio de Educación, Mineduc, Unidad de Currículum y Evaluación (2011a, p. 74)

El propósito de la unidad 4 de Álgebra es:

> […] los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Por una parte, la idea es desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vincularlo a conceptos matemáticos ya trabajados en años anteriores. Por otra parte, en el trabajo propuesto los estudiantes deben reconocer conceptos claves, como dominio y recorrido, lo que introduce algunos elementos de lenguaje conjuntista (Mineduc, 2011a, p. 73).

Asimismo, como contenidos se proponen: "Situaciones de variación proporcional y no proporcional; Situaciones de proporcionalidad directa e inversa; Concepto de función y sus diferentes representaciones; Dominio y recorrido de funciones; Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita" (Mineduc, 2011a). Con base en lo anterior, podría decirse que el PE para octavo básico pretende introducir la noción de función como *relación entre variables* para posteriormente definir la noción de función desde un punto de vista conjuntista. Esta reflexión cobra fuerza cuando el Mineduc (2011a) señala:

> Interesa que los alumnos analicen las funciones desde la relación entre dos variables y, en particular, distingan entre variables dependientes e independientes. Se abandona la clásica progresión que se iniciaba con una rigurosa definición de producto cartesiano, para luego definir el concepto de relación y terminar presentando las funciones como un caso particular de las relaciones. Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el dominio y recorrido de una función. Aunque el currículo no propone como tema el uso del lenguaje conjuntista, si el docente lo estima conveniente puede utilizar aquellos términos y conceptos relacionados con teoría de conjuntos que sean necesarios y faciliten el aprendizaje (p. 76).

Con respecto a los conceptos, podemos ver que ya se mencionan algunos clave para el estudio de las funciones, tales como relaciones, variables (independientes y dependientes), proporcionalidad, dominio, recorrido, entre otros. En cuanto a las representaciones, aunque se señala que se estudiarán diferentes representaciones de la función, no hay evidencia explícita del tipo concreto de representaciones (aunque en los ejemplos de actividades solo se ilustra el uso de las representaciones verbal y simbólica). Para poder describir los otros elementos de la configuración epistémica (tipos de problemas, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos), para los cuales no se encuentra evidencia explícita en el programa de estudio, es necesario analizar el libro de texto sugerido para este nivel educativo.

Análisis del texto escolar

El libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación para octavo básico (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer & Waits, 2014) presenta el estudio de las funciones en el capítulo 6: *Gráficos de funciones, ecuaciones y análisis de proporcionalidad*. A continuación, presentamos el análisis de la segunda parte del capítulo 6, que introduce por primera vez la noción de función en el currículo de matemáticas de Chile.

Configuración ontosemiótica epistémica

El primer elemento de la configuración ontosemiótica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Identificamos tres tipos de problemas: 1) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 2) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 3) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos *adquiridos.* Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema son de tipo verbal, tabular, simbólico y, en menor medida, gráfico. Desde el inicio de la sección dos del capítulo 6, se introducen los *conceptos/definiciones* de función, valor de entrada, valor de salida, dominio, recorrido, variable dependiente, variable independiente, tabla y par ordenado. Por ejemplo, la noción de función es introducida por primera vez mediante la siguiente definición: "Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente *x* un solo valor de la variable *y*. Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada" (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer & Waits, 2014, p. 206). Esta definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la "máquina" que produce un único valor de salida para cada valor de entrada, la cual es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito anteriormente), que permite ejemplificar la definición introducida (figura 3).

VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

Figura 3

Ejemplo de problema tipo 1

Una función puede representarse como una regla escrita con palabras, como "*duplica el número y luego suma nueve al resultado*" o mediante una ecuación con dos variables.

$f(x)=2x+9$

Fuente: Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert K. Waits (2014, p. 206)

Otras definiciones introducidas, que llevan implícitas concepciones conjuntistas para la noción de función, son las de dominio y recorrido:

> Una variable representa el valor de entrada y la otra representa el valor de salida. El conjunto que se forma con todos los valores que pueden ser sustituidos en la variable de entrada recibe el nombre de dominio de la función y el conjunto de valores que resultan de una sustitución se llaman recorrido de la función, es decir, es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y) a partir de los valores de la variable independiente (x) (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer & Waits, 2014, p. 206).

Podemos describir las *propiedades/proposiciones* que identificamos con el ejemplo de la figura 4. Dichas proposiciones describen la regla de correspondencia, sea por medio de las relaciones dentro de las tablas o por medio de descripciones verbales. Por ejemplo, en la figura 4, las proposiciones "sustituye x por -1 y luego desarrolla", "sustituye x por 0 y luego desarrolla", etc., también hacen referencia a *procedimientos* relacionados con las operaciones que los estudiantes deben realizar para encontrar los valores de y dado x (considerando la respectiva regla de correspondencia). Se resalta el aspecto puntual en este enfoque. Las proposiciones de otro tipo hacen referencia a explicaciones adicionales para la definición dada, o bien a *justificaciones/argumentos* de los procedimientos realizados; por ejemplo: "La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto $\mathbb{R}$". Nótese que si bien se establece una relación entre variables, la asignación de un valor no es explícita.

Figura 4

Ejemplo de problema tipo 2

Completar una tabla de funciones

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$4x - 2$	y
-1	$4(-1) - 2$	-6
0	$4(0) - 2$	-2
3	$4(3) - 2$	10

Sustituye x por −1 y luego desarrolla
Sustituye x por 0 y luego desarrolla
Sustituye x por 3 y luego desarrolla

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto *IR*. Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto *IR*.

Fuente: Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert K. Waits (2014, p. 206)

Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La tabla 2 resume el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para estos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).

Tabla 2

Representaciones previas y emergentes en los problemas de 8° básico

Representaciones para *f(x)*						
Emergentes / Previas		*f(x)*				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
f(x)	Verbal			●	S●	
	Gráfica					
	Simbólica		T●		●	
	Tabular					
	Icónica					

Fuente: adaptación de tabla IV presentada en Luis R. Pino-Fan, Walter F. Castro, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll (2013, p. 141)

Los problemas que se plantean pueden agruparse en cuatro clases, según los tipos de representaciones que involucran. La primera refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente simbólicamente (*e. g.*, figura 5). La segunda clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta tabular, para lo cual el estudiante deberá transitar desde la representación verbal hasta la simbólica para posteriormente pasar del registro simbólico al tabular. Este tránsito de lo verbal a lo simbólico se representa en la tabla con la "S" antes del punto (S●). Un ejemplo de esta segunda clase de problemas se presenta en la figura 5.

Figura 5

Problema contextualizado de reforzamiento (tipo 3)

11. Metodología El norte de Chile recibe un promedio de 11,66mm de lluvia en verano.

a. Escribe una ecuación para hallar *y*, la diferencia de precipitaciones entre la cantidad promedio de lluvias de verano y *x*, las lluvias de verano de un determinado año.

b. Haz una tabla de funciones con los datos de las lluvias de verano de cada año

Fuente: Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert K. Waits (2014, p. 209)

VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220

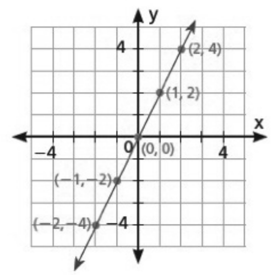
La tercera clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello, el estudiante debe transitar de lo simbólico a lo tabular y de lo tabular a la gráfica de la función, este tránsito se representa con la T antes del punto (T●). Un ejemplo de esta clase de tareas se presenta en la figura 6.

Figura 6
Ejemplo de tarea clase 3: simbólico–tabular–gráfico

Completa la tabla para los funciones y representa gráficamente los pares ordenados resultantes

A $y = 2x$

Valor de entrada	**Regla**	**Valor de salida**	**Par ordenado**
x	2*x*	y	(*x*,*y*)
−2	2(−2)	−4	(−2,−4)
−1	2(−1)	−2	(−1,−2)
0	2(0)	0	(0, 0)
1	2(1)	2	(1, 2)
2	2(2)	4	(2, 4)



Fuente: Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert K. Waits (2014, p. 207)

La cuarta clase de tareas refiere a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma.

Significado de la noción de función pretendido por el currículo de octavo básico

A partir del análisis realizado al Programa de Estudio (PE), es posible deducir que se pretende introducir la noción de función en su acepción de *relación entre variables*. Posteriormente, se afirma que la introducción y el uso de la función en términos conjuntistas se deja a elección de los profesores. No obstante, el libro de texto introduce la función en su acepción de *relación entre variables*. Además, en algunas de las definiciones proporcionadas en el libro de texto se encuentra implícita una aproximación al significado de función desde un punto de vista conjuntista. Sin embargo, ni los tipos de problemas identificados en la caracterización de la configuración epistémica, ni las representaciones activadas en el planteamiento y solución de los problemas dan cuenta del uso de la función en su acepción conjuntista.

Resultados del análisis de la propuesta curricular para primer año medio

A partir del análisis realizado al PE, podemos determinar que la noción de función se pretende definir en su acepción de *relación entre variables*, y bajo el significado de *función como representación gráfica*. Este supuesto cobra fuerza cuando entre los propósitos de la unidad, el Ministerio de Educación (2011b) establece "identificar funciones a través de gráficas" (p. 45), y cuando en sus actividades ejemplificadoras propone "Identificar gráficos que representen una función lineal y una función afín" (p. 52). No obstante, a partir del análisis del libro de texto, los tipos de problemas identificados en la caracterización de las configuraciones ontosemióticas no logran movilizar la noción de función en su acepción gráfica; esto se debe a que las tareas de este tipo más bien aluden a aspectos procedimentales o algorítmicos que no fortalecen el significado de *función como representación gráfica* (Parra-Urrea & Pino-Fan, 2017). Además, se identificó que la noción de función se define como "una relación de *correspondencia* entre dos variables" (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer & Waits, 2014, p. 126). El concepto de 'correspondencia' es identificado por primera vez en este nivel educativo, sin embargo, no se refuerza el estudio de relaciones funcionales definidas en conjuntos distintos a los numéricos usuales. Es decir, no se moviliza la noción de *función como correspondencia arbitraria*.

Resultados del análisis de la propuesta curricular para segundo año medio

A través del análisis realizado al PE, es posible percibir que la noción de función se intenta definir en su acepción de *relación entre variables*, y bajo el significado de *función como representación gráfica*. Esta hipótesis se refuerza cuando el Mineduc (2011c) explicita la necesidad de enfatizar la aplicación de funciones en contextos científicos, naturales y geográficos, para establecer relaciones entre magnitudes. Del mismo modo, señala "analizar gráficamente las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada" (p. 62). Sin embargo, a partir del análisis del libro de texto, no hay muchas tareas que propongan la noción de función como representación gráfica, ya que el tipo de problemas propuestos requieren la construcción de representaciones tabulares asumidas como simple requisito para la graficación, la cual a su vez se presenta carente de significado y de interpretación. Del mismo modo, hemos verificado que, si bien el currículo propone el estudio de funciones trascendentes, no establece la distinción entre este tipo de funciones y las algebraicas, lo cual obstaculiza el abordaje de la noción de función como expresión analítica (Parra-Urrea & Pino-Fan, 2017). Cabe destacar que, en este nivel educativo, la función se define a partir de elementos propios de la teoría conjuntista.

Resultados del análisis de la propuesta curricular para tercer año medio

A partir del análisis realizado al PE, es posible reconocer que la noción de función se pretende definir en su acepción de *relación entre variables*, para luego transitar a la función como *representación gráfica*. Esta reflexión se fortalece cuando el Mineduc (2015a) señala que, "…la función cuadrática se puede apreciar de forma dinámica en dos situaciones: la primera corresponde a una trayectoria parabólica —asociada a la representación gráfica— y la segunda corresponde a situaciones de tiempo versus desplazamientos —asociada a la relación entre variables—" (p. 54). No obstante, a partir del análisis del libro de texto, determinamos que la noción de función se introduce directamente en su acepción de *relación entre variables*. Esta acepción evoluciona a medida que va involucrando tanto en el planteamiento como en el desarrollo de las tareas, elementos propios de la teoría conjuntista. Del mismo modo, hemos encontrado que la noción de función se pretende movilizar como representación gráfica cuando se presentan tareas específicas que en su planteamiento proporcionan la gráfica de una función, y que en sus respuestas requieren la activación de representaciones simbólicas o verbales. Sin embargo, no se evidencian tareas que requieran el paso de una representación gráfica de la función, a representaciones tabulares, simbólicas o icónicas, más bien, las tareas que prevalecen son aquellas para las cuales se proporcionan datos simbólicos de la función y cuyas respuestas deben otorgarse bajo representaciones gráficas. Es decir, los problemas identificados en la caracterización de las configuraciones ontosemióticas se acercan a la noción de función como representación gráfica, aunque esto no se logra del todo.

Resultados del análisis de la propuesta curricular para cuarto año medio

Con el análisis realizado al PE, es posible afirmar que, de acuerdo con los tipos de problemas, definiciones, representaciones, procedimientos y argumentos, propuestos por el PE, la noción de función es presentada directamente mediante el uso de la *teoría de conjuntos*. De otro lado, a partir del análisis del libro de texto, determinamos que, de acuerdo con el tipo de representaciones propuestas y esperadas, la noción de función se acerca a su acepción de *representación gráfica*. Esto se debe a que el planteamiento de las tareas sugeridas proporciona representaciones gráficas de la función y sus respuestas requieren la activación de representaciones verbales, gráficas o simbólicas.

Del mismo modo, algunas tareas transitan de lo gráfico, simbólico o tabular, a representaciones gráficas. Sin embargo, no hay ni tareas que movilicen la función desde una representación gráfica a una representación tabular o icónica, ni tampoco problemas que permitan transitar desde un registro verbal o icónico a la noción de función como representación gráfica. No se propone ni la lectura de gráficas, ni de las tablas, no hay decodificación, etc.

Conclusiones

A partir del análisis realizado, hemos constatado que los significados pretendidos por el currículo chileno de matemáticas sobre la noción de *función* no son representativos del significado holístico de referencia. Tal como se evidenció en Yocelyn Elizabeth Parra-Urrea y Luis Roberto Pino-Fan (2017), el enfoque actual que se da a este objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de *relación entre variables* y en una forma que progresivamente se acerca a la definición de *función a partir de la teoría conjuntista*. Del mismo modo, hemos verificado que a lo largo del currículo chileno se presentan funciones tanto algebraicas como trascendentes; sin embargo, no se explicita la diferencia entre estos tipos de funciones, lo que eventualmente puede obstaculizar la comprensión y uso de la noción de *función como expresión analítica*.

Otro aspecto importante es que la definición de *función* es introducida por primera vez en octavo año básico, sobre la base de la clásica metáfora de la *máquina* que produce un único valor de salida para cada valor de entrada. De acuerdo con Vilma Mesa (2004), los profesores tienden a privilegiar la metáfora de la máquina para ilustrar un proceso de transformación, esto por sobre definiciones esenciales que utilicen términos como el de *relación* y *correspondencia*. Así, se evidencia que el currículo no promueve el estudio de relaciones funcionales definidas en conjuntos distintos a los numéricos usuales (*i.e.*, no moviliza la noción de *función como correspondencia arbitraria*). Lo anterior es consecuencia de que una de las acepciones de la *función* que los estudiantes aprenden esté en relación con el hecho de que la correspondencia que constituye la *función* debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades (Vinner, 1992), lo cual implica que una correspondencia arbitraria no sea considerada por los estudiantes como una *función.*

Cabe destacar que definiciones intuitivas como "Una función es una relación de *correspondencia* entre dos variables" (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, Renfro, Roby, Scheer & Waits, 2014, p. 126) distan de las definiciones *completas* de la noción de *función*, pues conceptos como el de dominio, codominio y recorrido se definen inicialmente de manera aislada, es decir, no se establece una conexión entre estas definiciones y la definición formal de *función*. Además, tal definición es esencialmente errónea, mientras que se define *función* en términos de la asignación dejando de lado el dominio y el codominio. Así, el libro plantea tareas que requieren determinar el dominio y recorrido de 'funciones', sin que estas tres nociones (dominio, recorrido y función) hayan sido conectadas previamente, lo que induce a que los estudiantes movilicen la noción de *función* solo como una regla o expresión algebraica, lo cual hace poco significativos sus aprendizajes.

En las tareas propuestas por el currículo chileno, se usan representaciones gráficas de relaciones definidas en $\mathbb{R}$, para las cuales se solicita determinar su correspondencia con una relación funcional. Además, se proponen gráficas de relaciones funcionales que requieren ser trasladadas en el plano. No obstante, para la resolución de este tipo de tareas, el currículo propone estrategias que aluden a aspectos procedimentales o algorítmicos que no fortalecen el significado de *función como representación gráfica*. Por otro lado, el tipo de tareas o problemas que prevalecen son aquellos para los cuales se proporcionan datos simbólicos de la *función* y cuyas respuestas deben darse como representaciones gráficas.

Los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos por el currículo chileno de matemáticas, mayoritariamente proporcionan representaciones simbólicas, verbales y gráficas de una función, y sus respuestas requieren la activación de representaciones simbólicas o gráficas. Anthony Orton (1983) ya sugería que una aproximación inicial *informal* a los conceptos del cálculo debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Esto no se encuentra en el análisis realizado, pues en la introducción a la noción de *función* (octavo básico), predominan representaciones simbólicas y no hay tareas en las cuales la *función* sea planteada a partir de su *representación gráfica*. En este mismo sentido, David Tall (1992) explicita la conveniencia de que, en lugar de comenzar con la definición del concepto —lo cual ocurre en todos los niveles analizados del currículo chileno—, la cual puede contener palabras o nociones poco familiares para el estudiante, se intente una aproximación para construirla sobre conceptos que jueguen el doble papel de ser familiares para el estudiante y a su vez, lo provean de una base para el desarrollo matemático posterior. Finalmente, debemos señalar que este estudio puede servir para alertar a los profesores sobre la limitada oferta de significados parciales de la *función* que aparece en los libros de texto, lo cual puede afectar una mejor comprensión de los estudiantes. Además, consideramos que este tipo de indagaciones en las cuales se determina una comparación entre los significados pretendidos por el currículo, en relación con una temática específica, y los significados holísticos de referencia, debería ser un criterio para valorar, por ejemplo, libros de texto, programas de curso, y cambios en los significados propuestos por las reformas curriculares. La representatividad de los significados de referencia es un criterio importante para determinar, por ejemplo, la pertinencia epistemológica de nuevas propuestas curriculares.

Agradecimientos y aclaraciones

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Fondecyt de iniciación Nº 11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT, de Chile.

Sobre los autores

Luis Roberto Pino-Fan es doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Actualmente, es profesor-investigador del Departamento de Ciencias Exactas y de los programas de Postgrado en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos, Chile. Su producción científica puede ser consultada en la página web http://www.lrpino-fan.com/

Yocelyn Elizabeth Parra-Urrea es estudiante del Programa de Doctorado en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos. Profesora de la Universidad de San Sebastián, Sede Santiago, Chile.

Walter Fernando Castro-Gordillo es doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Actualmente, es profesor asociado de la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Colombia.

Referencias

Akkoç, H. & Tall, D. (2005). A Mismatch between Curriculum Design and Student Learning: the Case of the Function Concept. In D. Hewitt & A. Noyes (eds.). *Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick*, 1-8. Disponible en: http://www.bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-25-1-01.pdf

Aravena-Díaz, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. (Tesis doctoral). Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals, Universitat de Barcelona, España.

Artigue, M. (1998). Teaching and Learning Elementary Analysis. En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. R. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (eds.). *ICME 8 (1996) Selected Lectures*, 15-29. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática, SAEM Thales. Disponible en: https://www.mathunion.org/icmi/digital-library/icme-proceedings

Bennett, J. M.; Burger, E. B.; Chard, D. J.; Hall, E.; Kennedy, P. A.; Renfro, F. L.; Roby, T.; Scheer, J. K. & Waits, B. K. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8°.* Santiago de Chile: Galileo Libros Ltda.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: the Concept of Function as an Example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (eds.). *Meaning in Mathematics Education*, 61-81. Dordrecht: Kluwer.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Breidenbach, D.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, *23* (3), 247-285. DOI: 10.1007/BF02309532

Chile, Ministerio de Educación, Mineduc, Unidad de Currículum y Evaluación (2011a). *Matemática. Programa de Estudio para Octavo Año Básico*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile. Disponible en: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyname-623.html. Recuperado de: https://8agabrielamistral.webnode.cl/_files/200000045-03c4404be1/Matematica8B_final_web.pd

Chile, Ministerio de Educación, Mineduc, Unidad de Currículum y Evaluación (2011b). *Matemática. Programa de Estudio para Primer Año Medio*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33.pdf

Chile, Ministerio de Educación, Mineduc, Unidad de Currículum y Evaluación (2011c). *Matemática. Programa de Estudio para Segundo Año Medio*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile. Disponible en: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33_1.pdf

Chile, Ministerio de Educación, Mineduc, Unidad de Currículum y Evaluación (2015a). *Matemática. Programa de Estudio actualización 2009 Tercer año Medio (Versión aprobada por el CNED, en actual proceso de edición)*. Edición vigente: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34361_programa.pdf. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33_2.pdf

Chile, Ministerio de Educación, Mineduc, Unidad de Currículum y Evaluación (2015b). *Matemática. Programa de Estudio actualización 2009 Cuarto año Medio (Versión aprobada por el CNED, en actual proceso de edición y diseño)*. Edición vigente: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34362_programa.pdf. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33_3.pdf

Cooney, T. J. (1985). A Beginning Teacher's View of Problem Solving. *Journal of Research in Mathematics Education*, *16* (5), 324-336. http://dx.doi.org/10.2307/749355

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación. *X Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, X JAEM, Zaragoza. Ponencia P41*, 367-377. Disponible en: http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_40/nr_458/a_6226/6226.pdf

Dhombres, J.; Dahan-Dalmedico, A.; Bkouche, R.; Houzel C. & Guillemot, M. (1987). *Mathématique au fil des âges*. Paris: Gauthier-Villars.

Elia, I.; Panaoura, A.; Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2007). Relations between Secondary Pupils' Conceptions about Functions and Problem Solving in Different Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5* (3), 533-556. DOI: 10.1007/s10763-006-9054-7

Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (2), 94-116. DOI: 10.2307/749215

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17* (1), 105-121. doi: 10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Font-Moll, V. & Acevedo-Nanclares, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *21* (3), 405-418. Disponible en: https://core.ac.uk/download/pdf/38990753.pdf

Font-Moll, V.; Godino, J. D. & Gallardo-Romero, J. (2013). The Emergence of Objects from Mathematical Practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82* (1), 97-124. doi: 10.1007/s10649-012-9411-0

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: Springer, D. Reidel Publishing Company.

Gagatsis, A.; Elia, I. & Andreou, S. (2003). Representations and Mathematics Learning: Functions and Number Line. *Euclides*γ, 59, 5-34.

García Quiroga, L.; Vázquez Cedeño, R. A. & Hinojosa Rivera, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Revista Ingenierías*, *7* (24), 27-34. Disponible en: ingenierias.uanl.mx/24/pdfs/24_dificultades_en_el_aprendizaje.pdf

Godino, J. D. & Batanero Bernabeu, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355. Texto disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D.; Batanero Bernabeu, C. & Font Moll, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1), 127-135. DOI: 10.1007/s11858-006-0004-1. Texto disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf

Godino, J. D.; Font Moll, V.; Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (2011). Why is the Learning of Elementary Arithmetic Concepts Difficult? Semiotic Tools for Understanding the Nature of Mathematical Objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77* (2), 247-265.

Guzmán Retamal, I. (1990). Registros en juego en el concepto de función, comportamiento de una muestra de alumnos chilenos. *Cursillo XVII Semana de la Matemática de la Universidad Católica de Valparaíso*.

Hatisaru, V. & Erbas, A. (2015). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15* (4), 703-722. doi: 10.1007/s10763-015-9707-5. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/286459110_Mathematical_Knowledge_for_Teaching_the_Function_Concept_and_Student_Learning_Outcomes

Love, E. & Pimm, D. (1996). 'This is so': A Text on Texts. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel Kreidt, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, 371-409. Dordrecht: Kluwer.

Mesa, V. (2004). Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56* (2-3), 255-286. doi: 10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14* (3), 235-250.

Panaoura, A.; Michael-Chrysanthou, P.; Gagatsis, A.; Elia, I. & Philippou, A. (2016). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15* (4), 723-740. doi: 10.1007/s10763-016-9714-1

Parra-Urrea, Y. E. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. (Tesis de magíster). Universidad de Los Lagos, Chile. Disponible en: http://edumat.ulagos.cl/portal/wp-content/uploads/2018/09/TESIS-MAGI%CC%81STER_YOCELYN-PARRA.pdf

Parra-Urrea, Y. E. & Pino-Fan, L. R. (2017). Análisis ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (eds.). *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/parra.pdf

Pino-Fan, L. R. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/29940

Pino-Fan, L. R.; Castro Gordillo, W. F.; Godino, J. D. & Font Moll, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34* (2), 123-150. Disponible en: http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v34n2/art08.pdf

Pino-Fan, L. R.; Godino, J. D. & Font Moll, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13* (1), 141-178. Disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Pino-Fan_Mat_Pesquisa%202011.pdf

Pino-Fan, L. R.; Godino, J. D. & Font Moll, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema*, *29* (51), 60-89. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n51/1980-4415-bolema-29-51-0060.pdf

Ramos de Pacia, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España. https://www.tdx.cat/handle/10803/1313

Ruiz-Higueras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral publicada). Universidad de Jaén, España.

http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2013/09/La-noci%C3%B3n-de-funci%C3%B3n.-An%C3%A1lisis-epistemol%C3%B3gico-y-did%C3%A1ctico-TESIS-DOCTORAL-Luisa-Ruiz-Higueras_1aParte.pdf, http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2013/09/La-noci%C3%B3n-de-funci%C3%B3n.-An%C3%A1lisis-epistemol%C3%B3gico-y-did%C3%A1ctico-TESIS-DOCTORAL-Luisa-Ruiz-Higueras_2aParte.pdf

Sastre-Vázquez, P.; Rey, G. & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

Sierpinska, A. (1992). Understanding the Notion of Function. En G. Harel & E. Dubinsky (eds.). *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 25-58. New York: Mathematical Association of America, MAA. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/238287243_On_understanding_the_notion_of_function

Tall, D. (1992). *Student's Difficulties in Calculus.* Plenary Presentation in Working Group 3, Seventh International Congress on Mathematical Education, ICME-7, Québec, August 1992. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/242298018_Students'_Difficulties_in_Calculus_Plenary_presentation_in_Working_Group_3_ICME_Quebec_August_1992

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky & G. Harel (eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 195-214. New York: Mathematical Association of America, MAA.

Wilson, M. R. (1994). One Preservice Secondary Teacher's Understanding of Function: The Impact of a Course Integrating Mathematical Content and Pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (4), 346-370. DOI: 10.2307/749238

magis
PÁGINA 220
VOLUMEN 11 / NÚMERO 23 / ENERO-JUNIO DE 2019 / ISSN 2027-1182 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 201-220