Matemáticas operativas

Norman César Mercado Cruz

Dashiell Henao Gómez

Enrique Godoy Bonilla

Guías de autoevaluación

Rector de la Universidad de Antioquia
Alberto Uribe Correa

Vicerrector de Docencia
Óscar Sierra Rodríguez

Decano de la Facultad de Ingeniería
Elkin Libardo Ríos Ortiz

Vicedecano de la Facultad de Ingeniería
Carlos Alberto Palacio Tobón

Coordinador del Programa de Educación Ude@
Luis Ignacio Ordóñez Mutis

Asesor Metodológico del Programa de Educación Ude@
Guillermo León Ospina Gómez

Autores
Norman César Mercado Cruz
Dashiell Henao Gómez
Enrique Godoy Bonilla

Jefe del Departamento de Recursos de Apoyo e Informática (DRAI)
Juan Diego Vélez Serna

Coordinadora de Producción
Lyda Yaneth Contreras Olivares

Corrector de estilo
Daniel Aldana Estrada

Diagramación y diseño
Duván Mejía Zapata
Maribel Salazar estrada

Impresión
Imprenta Universidad de Antioquia

Primera edición, septiembre de 2010

ISBN: 978-958-8748-10-8

Impreso en Medellín (Colombia)

Presentación

La presente guía tiene como objetivo fundamental que el estudiante, de manera responsable, resuelva los cuestionarios correspondientes a cada uno de los módulos. Se sugiere que responda los diferentes cuestionarios y al final mire las respuestas. Lo que se pretende es que vuelva a resolver aquellos ejercicios en los que cometió errores y de esta manera consolide sus conocimientos.

La guía de autoevaluación configura un proceso que incluye verificación, diagnóstico, reflexión, corrección y retroalimentación como fases fundamentales que permiten identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en cuanto al conocimiento adquirido, buscando mejorar sus niveles de desempeño para garantizar certeza y calidad en la aplicación de dichos conocimientos en situaciones problemáticas que emerjan en su entorno.

La guía de autoevaluación tiene como propósito llevar al estudiante a que practique, ponga a prueba y verifique por sí mismo el grado de apropiación que ha logrado sobre una temática específica, todo ello apoyado en una completa y clara retroalimentación que los docentes hacen de cada uno de los puntos que incluyen las actividades propuestas.

Una guía de autoevaluación en Ude@ puede estar integrada por diferentes tipos de actividades: ejercicios para resolver a partir de desarrollo matemático, cuestionarios de relación de columnas, actividades de falso y verdadero, actividades de complementación, análisis de casos, historietas, tiras cómicas, entre otros; e incluye como proceso de retroalimentación no sólo las respuestas correctas a los ejercicios y cuestionarios planteados, sino las sustentaciones de por qué las demás opciones no eran correctas.

En síntesis, la guía de autoevaluación se plantea con el fin de que el estudiante tenga la oportunidad de verificar los conocimientos adquiridos durante cada semana; las actividades propuestas están relacionados en su totalidad con la temática abordada en este lapso de tiempo y le ayudarán a recordar o a afianzar aquellos conceptos y/o procedimientos que le permitan acercarse con mayor propiedad a una prueba real de conocimientos.

La idea es que el estudiante desarrolle la autoevaluación las veces que desee hasta que logre obtener el nivel de acierto deseado. No obstante y aunque la retroalimentación de cada actividad muestra las respuestas correctas para cada caso, se le sugiere al aprendiz abstenerse de revisarlas mientras no haya intentado —como mínimo una vez— resolver la actividad a partir de su propio conocimiento, ya sea eligiendo una respuesta correcta entre las opciones presentadas o desarrollando los ejercicios a lápiz para después verificar el respectivo procedimiento y resultado.

Guía para el módulo 1: Conjuntos numéricos y aritmética

Esta guía comprende las semanas 1 y 2.

La evaluación consta de 20 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 15 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "La suma de los primeros tres números primos es par". Se debe hacer la suma de los tres primeros números primos $(2 + 3 + 5)$ y responder de la siguiente manera: "Verdadero, porque la suma es 10, que es un número par". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque $2 + 3 + 5 = 10$ es un número par.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. La suma de dos números primos es siempre par.

F	V

2. El producto de dos números primos es siempre impar.

F	V

3. El mínimo común múltiplo de 18 y 45 es 90.

F	V

4. El decimal periódico 0.242424… se representa mediante el racional 8/33.

F	V

5. Al simplificar la expresión $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-1/2}}$, el resultado es 2/3.

F	V

6. Al simplificar $((a/b)^{-1})^{-1}(b/a)$, el resultado es 1.

F	V

7. Al simplificar $\sqrt{32}-\sqrt{8}+\sqrt[4]{64}$, el resultado es $4\sqrt{2}$.

F	V

8. Al racionalizar la expresión $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, el resultado es 3.

F	V

9. El producto de dos números irracionales es siempre irracional.

F	V

10. La suma de números irracionales puede ser un número irracional.

F	V

11. Al simplificar $\left(\dfrac{1/2-1/3}{1/2+1/3}\right)^{-1}$, el resultado es 5.

F	V

12. Al simplificar $(1/3)^{-2}(1-2/3)^{2}$, el resultado es 1.

F	V

13. Al efectuar la operación $(2^{-1/3})^{6}$, el resultado es 4/3.

F	V

14. Al efectuar la operación $\left(\frac{3^{2/3}}{2^{1/3}}\right)^3$, el resultado es 9/2.

F	V

15. Al simplificar $(\sqrt[3]{64/27})^{-2}$, el resultado es 16/9.

F	V

16. Al simplificar $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$, el resultado es $\frac{ab}{a+b}$.

F	V

17. Al simplificar $(2^{1/2})(3^{1/3})$, el resultado es $6^{5/6}$.

F	V

18. Al simplificar $\left(\frac{a^n b^{n+1}}{a^{n+1} b^{n+2}}\right)^{-1}$, el resultado es *ab*.

F	V

19. La medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{3}$ es un número racional.

F	V

20. Al simplificar $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}\right)^{-1}$, el resultado es $-1/3$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Con respecto a los conjuntos numéricos, una de las siguientes afirmaciones es falsa:

   a. El conjunto de los números primos es un subconjunto de los naturales impares.
   b. El conjunto de los reales es cerrado para el producto.
   c. El producto de dos números irracionales puede dar como resultado un número racional.
   d. La medida de la diagonal de un cuadrado de lado $l = \sqrt{2}$ es un número racional.

2. El mínimo común múltiplo de los naturales $n = 84$ y $m = 210$ es:

   a. 840.
   b. 420.
   c. 210.
   d. 105.

3. El máximo común divisor de los naturales $n = 84$ y $m = 210$ es:

   a. 42.
   b. 35.
   c. 21.
   d. 7.

4. El resultado de efectuar la operación $\dfrac{(\sqrt{2} \cdot 3^{1/4})^2}{\sqrt{2}+1}$ es:

   a. $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} - 1)$.
   b. $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 1)$.
   c. $2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{2} + 3)$.
   d. $2\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{2} + 3)$.

5. Al simplificar la expresión $\dfrac{a \cdot b^{-1}}{c^{1/3}} \div \dfrac{ab^{-2}}{c^{7/3}}$, el resultado es:

   a. abc^2.
   b. bc^2.
   c. ac^2.
   d. c^2.

6. El área de la superficie de un recipiente cilíndrico cerrado de radio en la base R y altura H viene dada por $A = 2\pi RH + 2\pi R^2$. Sabiendo que el radio de la base mide 15 cm y la altura 40 cm, la medida en metros cuadrados del área es:

   a. 0.165π.
   b. 1.65π.
   c. 16.5π.
   d. 165π.

7. La distancia en metros recorrida por una partícula al cabo de un tiempo t viene dada por $d = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde V_0 es la velocidad inicial y se mide en metros sobre segundo, mientras que a es la aceleración y se mide en metros sobre segundo al cuadrado. Una partícula pasa por un punto A con una velocidad inicial de 10 m/s y se acelera a razón de 2 m/s^2. La distancia recorrida al cabo de cinco minutos es:

   a. $9.3 \cdot 10^2$.
   b. $9.3 \cdot 10^3$.
   c. $9.3 \cdot 10^4$.
   d. $9.3 \cdot 10^5$.

8. La capacidad de un recipiente en forma de paralelepípedo recto es el producto de las tres dimensiones: *abc*. Sabiendo que las dimensiones de un recipiente son $a = 25$ cm, $b = 50$ cm y $c = 60$ cm, el máximo volumen de agua en litros que el recipiente puede contener es:

   a. 7.500.
   b. 750.
   c. 75.
   d. 7.5.

9. La capacidad del recipiente de la figura 1 viene dada por:

$$V = \frac{hL}{2}(B + b).$$

   Sabiendo que las dimensiones en centímetros son $b = 25$, $B = 50$, $h = 60$ y $L = 100$, el máximo volumen de agua en litros que el recipiente puede contener es:

   a. $2.25 \cdot 10^4$.
   b. $2.25 \cdot 10^3$.
   c. $2.25 \cdot 10^2$.
   d. $2.25 \cdot 10^1$.

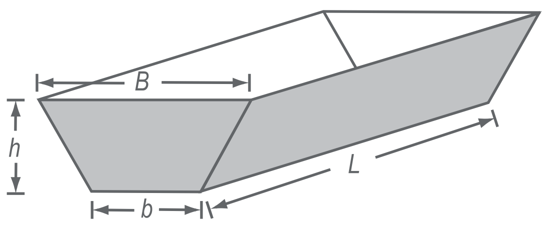


Figura 1

10. El recipiente de la figura 2 está lleno de agua. En un instante determinado se abre un orificio de área *a* en el fondo permitiendo que el agua fluya. Se estima que si $g = 10$ m/s^2, el tiempo de vaciado en segundos está dado por:

$$t_v = \frac{DL}{3a}\sqrt{\frac{D}{g}}.$$

   Sabiendo que las dimensiones en centímetros son $D = 40$ y $L = 108$, y que el área del orificio es 1 cm^2, el tiempo de vaciado en minutos es:

   a. 40.
   b. 44.
   c. 48.
   d. 53.

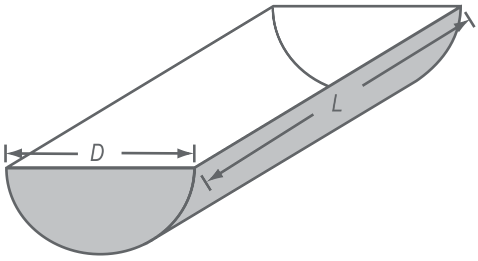


Figura 2

11. Para un péndulo simple, que oscila pequeños ángulos, el periodo de oscilación (en segundos) está dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. La longitud del péndulo en metros es L, g es la aceleración de la gravedad y se supone que $g = 10$ m/s^2. Si la longitud del péndulo es de 50 cm, el periodo de la oscilación es:

   a. $2\pi\sqrt{5}$.
   b. $\pi\sqrt{5}$.
   c. $\pi/\sqrt{5}$.
   d. $\pi/2\sqrt{5}$.

12. La producción, en unidades, de cierta fábrica está dada por $Q(k, L) = 10k^{1/3} L^{2/3}$. En la expresión anterior, k es el capital medido en miles de pesos y L es la fuerza laboral medida en horas/trabajador. Suponiendo que el capital es de 125.000 pesos y que la fuerza laboral es 4.096, el número de unidades producidas es:

   a. $1.28 \cdot 10^3$.
   b. $1.28 \cdot 10^4$.
   c. $1.28 \cdot 10^5$.
   d. $1.28 \cdot 10^6$.

13. El tiempo de vida media de un material radiactivo es el tiempo que se requiere para que una muestra dada se reduzca a la mitad. En un instante determinado se tiene una muestra de 10 g de una sustancia y se sabe que el tiempo de vida media es de 3 años. Al cabo de 15 años, la cantidad remanente en gramos es:

   a. 5/4.
   b. 5/8.
   c. 5/16.
   d. 5/32.

14. Las temperaturas centígrada y fahrenheit están relacionadas mediante las fórmulas siguientes:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32),$$
$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32).$$

Las medidas son iguales cuando la temperatura es:

a. 40.
b. 20.
c. -20.
d. -40.

15. Se dispone de 10 cm de alambre para armar un triángulo rectángulo isósceles. El área del triángulo, en centímetros cuadrados, es:

a. $10 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.
b. $10 \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.
c. $25 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.
d. $25 \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a															
b															
c															
d															

Guía para el módulo 2: Sucesiones

Esta guía comprende la semana 3.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "La suma de los primeros 20 números naturales es 210". Se debe aplicar la fórmula de la suma de los 20 términos de una sucesión aritmética de razón $d = 1$ (o sea, $S_{20} = 20 + \frac{20(19)}{2} = 20 + 190 = 210$) y responder de la siguiente manera: "Verdadero, porque al aplicar la fórmula se obtiene como resultado 210". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque al aplicar la fórmula se obtiene como resultado 210.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Una sucesión está definida mediante su primer término $a_1 = 2$ y la fórmula de recurrencia $a_{n+1} = (a_n + 4)/2$. El tercer término de la sucesión es 7/2.

F	V

2. Si los términos 1, x, 7 están en progresión aritmética, entonces $x = 4$.

F	V

3. Si los términos 2, x, y, 1/4 están en progresión geométrica, entonces $y = 1/2$.

F	V

4. Si los términos 3, x, y, 8/9 están en progresión geométrica, entonces $x + y = 8/3$.

F	V

5. Al simplificar $\frac{(5!)(3!)}{(4!)(2!)}$, el resultado es 15.

F	V

6. Al simplificar $\frac{C_{5,3}}{C_{4,2}}$, el resultado es 5/3.

F	V

7. El resultado de evaluar la suma $\sum_{k=0}^{3}(-1/2)^k$ es 5/8.

F	V

8. Al desarrollar el binomio $(1-\sqrt{2})^3$, el resultado es $7+5\sqrt{2}$.

F	V

9. El tercer término del desarrollo de $(x - \sqrt{2})^4$ es de tercer grado.

F	V

10. La suma de los números naturales pares menores o iguales que 24 es 312.

F	V

11. Al simplificar $\frac{C_{5,2}}{C_{5,3}}$, el resultado es 1.

F	V

12. Al simplificar $\binom{6}{3} - \binom{4}{2}$, el resultado es 14.

F	V

13. Al simplificar $\binom{n}{1} - \binom{n-1}{2}$, el resultado es $\frac{n-1}{2}$.

F	V

14. Al simplificar $\binom{n}{2} + \binom{n}{3}$, el resultado es $\frac{n^3 + n}{6}$.

F	V

15. Si $\binom{n}{6} = \binom{n}{4}$, entonces $n = 10$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. El término *n*-ésimo de una sucesión es $\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$; por lo tanto, el tercer elemento es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 5.

2. El primer término de una sucesión es $a_1 = 1/2$ y los demás se generan mediante la fórmula recursiva $a_{n+1} = \frac{2}{1 + a_n}$, con $n \geq 1$. El cuarto elemento de la sucesión es:

   a. 6/7.
   b. 14/13.
   c. 21/2.
   d. 54/53.

3. Cuando se desarrolla el binomio $(1-\sqrt{5})^4$, el resultado es:

   a. $56+24\sqrt{5}$.
   b. $-56+24\sqrt{5}$.
   c. $56-24\sqrt{5}$.
   d. $-56-24\sqrt{5}$.

4. El término n-ésimo de una sucesión es $a_n=\dfrac{n!}{2^n}$; por lo tanto, el cociente a_{n+1}/a_n es:

   a. $2\cdot(n+1)$.
   b. $n+1$.
   c. $(n+1)/2$.
   d. $2n+1$.

5. Una cantidad P de dinero se invierte con una tasa de interés compuesto anual r, de tal manera que al cabo de n años la cantidad futura es $F(n)=P\,(1+r)^n$. Sabiendo que la tasa de interés es $r=0.2$, al cabo de seis años la cantidad futura es, aproximadamente:

   a. El doble de la invertida.
   b. El triple de la invertida.
   c. El cuádruplo de la invertida.
   d. El quíntuplo de la invertida.

Los ejercicios 6 y 7 hacen referencia a la siguiente situación: una cantidad a es directamente proporcional a una cantidad b si se verifica que $a=kb$. La constante de proporcionalidad es k.

6. Sabiendo que $b=24$ cuando $a=60$, el valor de b cuando $a=12$ es:

   a. 4.8.
   b. 7.2.
   c. 20.
   d. 24.

7. Sabiendo que $b=x$ cuando $a=5x$, el valor de b cuando $a=12x$ es:

   a. $2.4x$.
   b. 2.4.
   c. $1.2x$.
   d. 1.2.

Los ejercicios 8 y 9 hacen referencia a la siguiente situación: una cantidad a es inversamente proporcional a una cantidad b si se verifica que $a = k/b$. La constante de proporcionalidad es k.

8. Sabiendo que $b = 4.5$ cuando $a = 1.4$, el valor de a cuando $b = 1.5$ es:

   a. 14/3.
   b. 3/14.
   c. 21/5.
   d. 5/21.

9. Sabiendo que $b = x$ cuando $a = 5x$, el valor de b cuando $a = 12x$ es:

   a. $5x/12$.
   b. $5/12x$.
   c. $12/5x$.
   d. $12x/5$.

10. El décimo término de la progresión aritmética 22, 19, 16, ... es:

    a. -15.
    b. -10.
    c. -5.
    d. 0.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 3: Fundamentos de álgebra

Esta guía comprende las semanas 4 y 5.

La evaluación consta de 20 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "Al simplificar la expresión algebraica $\dfrac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3 - y^3}$ el resultado es un polinomio". Se debe factorizar tanto el numerador como el denominador y luego simplificar, así: $\dfrac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3 - y^3} = \dfrac{x(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)} = \dfrac{x}{x - y}$, con $x \neq y$, y responder de la siguiente manera: "Falso, porque el resultado es una expresión racional". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque el resultado es una expresión racional.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Al simplificar la expresión $2 - [x - (1 - x) + (2 - x)]$ se obtiene $1 - x$.

F	V

2. Al simplificar la expresión $\dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 2}$ se obtiene $\dfrac{2 + x}{x + 1}$.

F	V

3. Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} \div \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6}$ se obtiene $\dfrac{1 + x}{x - 1}$.

F	V

4. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x}{\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$ se obtiene $\sqrt{x+y}-\sqrt{y}$.

F	V

5. El factor racionalizante de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}$ es $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}$.

F	V

6. Al simplificar $\left(\dfrac{9-x^2}{x^2-x-2}\right)\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}\right)$, el resultado es 1.

F	V

7. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x-4}{2-\sqrt{2x-4}}$ se obtiene $-(2+\sqrt{2x-4})/2$.

F	V

8. El factor racionalizante de $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$ es $1-\sqrt[3]{2}$.

F	V

9. El factor racionalizante de $\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x+2}}$ es $1+\sqrt[3]{x+2}$.

F	V

10. El factor racionalizante de $\dfrac{5}{\sqrt[4]{x-1}}$ es $\sqrt[4]{(x-1)^3}$.

F	V

11. Al factorizar completamente la expresión xy^3-x^4, uno de los factores es x^2-xy+y^2.

F	V

12. Al factorizar completamente la expresión $2x^2y^4+7xy^2+3$, uno de los factores es xy^2+3.

F	V

13. Al factorizar completamente la expresión $4x^4+4x^2y^2-x^2y^4-y^6$, uno de los factores es y^2+2x.

F	V

14. Al factorizar completamente la expresión $x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4$, uno de los factores es $x^2 - xy + y^2$.

F	V

15. Al simplificar la expresión $1 + x + x^2 - \dfrac{x^3}{x+1}$, el resultado es $\dfrac{1+x^2}{1+x}$.

F	V

16. Al simplificar la expresión $1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{x+1}$, el resultado es $\dfrac{1}{1+x}$.

F	V

17. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}\right) \div \left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1}\right)$, el resultado es -2.

F	V

18. Al simplificar la expresión $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2} + \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x+1}{x-2}$, el resultado es $\dfrac{-2}{x-2}$.

F	V

19. Al simplificar la expresión $\dfrac{\dfrac{2y}{3x-2y}+1}{\dfrac{2x+2y}{3x-2y}+1}$, el resultado es $\dfrac{1}{2x}$.

F	V

20. Al simplificar la expresión $\dfrac{\dfrac{1}{x^3+y^3}}{1-\dfrac{x}{x+\dfrac{y^2}{x-y}}}$, el resultado es $\dfrac{1}{y^2(x+y)}$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Al simplificar la expresión $\left(x-\dfrac{x-1}{x}\right)\left(\dfrac{x}{x^3+1}\right)$, el resultado es:

   a. 1.
   b. x.
   c. $x/(x+1)$.
   d. $1/(x+1)$.

2. Uno de los factores de la expresión $4xy^2 - x^3y^4$ es:

   a. x^2.
   b. y^3.
   c. $xy+2$.
   d. $4+x^2y^2$.

3. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{y-2x^2-x\sqrt{y}}{y-4x^2}$.
   b. $\dfrac{y+2x^2+3x\sqrt{y}}{y-4x^2}$.
   c. $\dfrac{y-2x^2+x\sqrt{y}}{y-4x^2}$.
   d. $\dfrac{y-2x^2-x\sqrt{y}}{y+4x^2}$.

4. Al simplificar la expresión $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+2}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$.
   b. $\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}$.
   c. $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$.
   d. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$.

5. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)$, el resultado es:

   a. x.
   b. $-x$.
   c. $1/x$.
   d. $-1/x$.

6. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)$, el resultado es:

   a. $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.
   b. $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.
   c. $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.
   d. $\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$.

7. Al simplificar la expresión $x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{x+\dfrac{1}{x}}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{-1}{x^3+x}$.
   b. $\dfrac{1}{x^3+x}$.
   c. $\dfrac{-2x^4}{x^3+x}$.
   d. $\dfrac{2x^4}{x^3+x}$.

8. Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2y^3-x^3y^2}{2x^3-x^2y-xy^2}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{xy^2}{y+2x}$.
   b. $\dfrac{x^2y^2}{y+2x}$.
   c. $\dfrac{-xy^2}{y+2x}$.
   d. $\dfrac{-x^2y^2}{y+2x}$.

9. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$, el resultado es:

   a. $-x$.
   b. x.
   c. -1.
   d. 1.

10. Al simplificar la expresión $\dfrac{(x-1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}$, el resultado es:

    a. $(\sqrt{x}-1)/(x+1)$.
    b. $(\sqrt{x}+1)/(x+1)$.
    c. $(\sqrt{x}-1)/(x-1)$.
    d. $(\sqrt{x}+1)/(x-1)$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 4: Polinomios en una variable y ecuaciones polinómicas

Esta guía comprende las semanas 6 y 7.

La evaluación consta de 20 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 20 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "Al expandir la suma $\sum_{k=0}^{2} \frac{(2k-1)x^k}{k!}$, el resultado es el polinomio $-1 + x + 3x^2$. Se debe expandir la sumatoria, así: $\sum_{k=0}^{2} \frac{(2k-1)x^k}{k!} = \frac{(2(0)-1)x^0}{0!} + \frac{(2(1)-1)x^1}{1!} + \frac{(2(2)-1)x^2}{2!}$, simplificar $-1 + x + 3x^2/2$ y responder de la siguiente manera: "Falso, porque el resultado es $-1 + x + 3x^2/2$". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque el resultado es $-1 + x + 3x^2/2$.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Si $P(x) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k x^k/(k+1)$, entonces $P(2) = 5/3$.

F	V

2. La solución de la ecuación $2x - 3 = 4(x - 2)$ es 5/2.

F	V

3. La solución de la ecuación $\frac{3x-2}{2} - \frac{x+1}{3} = 2x + 1$ es 14/5.

F	V

4. La ecuación $6x^2 + x - 2 = 0$ tiene raíces reales distintas.

F	V

5. La ecuación $x^2 + x + 2 = 0$ tiene raíces reales iguales.

F	V

6. La suma de las raíces de la ecuación $2x^2 + 3x - 2 = 0$ es 3/2.

F	V

7. El producto de las raíces de la ecuación $3x^2 - 2x + 2 = 0$ es 2/3.

F	V

8. La ecuación $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$ sólo tiene una raíz real.

F	V

9. La ecuación $x - 1 - \sqrt{x - 1} = 0$ tiene como soluciones $x = 2$, $x = -1$.

F	V

10. La gráfica de $y = P(x) = x^2 + x + 1$ no corta al eje de abscisas.

F	V

11. Un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$ es $2x - 1$.

F	V

12. El resto de dividir $4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ entre $x + 1$ es 4.

F	V

13. El polinomio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$ tiene al menos un cero real.

F	V

14. El vértice de la parábola $P(x) = 2x^2 - x - 3$ está en el primer cuadrante.

F	V

15. La parábola $P(x) = 2x^2 - x + 3$ no corta al eje de abscisas.

F	V

16. El polinomio $P(x) = x^4 - 4$ tiene cuatro ceros reales.

F	V

17. El residuo de dividir $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$ por $x + 1$ es -3.

F	V

18. El polinomio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$ es divisible por $x + 2$.

F	V

19. El polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ tiene tres raíces en el campo de los enteros.

F	V

20. El polinomio $x^4 + 1$ no tiene raíces reales.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Con relación a la parábola $P(x) = 2 + x - x^2$, es falso que:

   a. Se abra hacia abajo.
   b. Tenga dos raíces racionales.
   c. La abscisa del vértice sea 1/2.
   d. La ordenada del vértice sea 2.

2. La ecuación $x + 1 = \sqrt{x^2 - 3}$:

   a. Tiene dos raíces reales.
   b. No tiene reales.
   c. Tiene una raíz racional y una compleja.
   d. Tiene dos raíces complejas.

3. La ecuación $x + 1 = \sqrt{2x^2 - 3}$ tiene:

   a. Una raíz real.
   b. Una raíz racional.
   c. Una raíz racional y una compleja.
   d. Dos raíces complejas.

4. La ecuación $x + 1 = |3x + 2|$ tiene:

   a. Dos raíces racionales.
   b. Una raíz racional y otra irracional.
   c. Una raíz racional y una compleja.
   d. Dos raíces complejas.

5. La ecuación $x - 3 = |2x + 4|$ tiene:

   a. Dos raíces racionales.
   b. Una raíz racional y otra irracional.
   c. Cero raíces.
   d. Dos raíces complejas.

6. La ecuación $x - 3 = |2x - 4|$ tiene:

   a. Dos raíces racionales.
   b. Una raíz racional y otra irracional.
   c. Una raíz racional y una compleja.
   d. Cero raíces.

Las preguntas 7-10 hacen referencia al polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 16x + 15$.

7. El número de raíces racionales del polinomio es:

   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. 3.

8. El residuo de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 4.

9. El cociente de dividir el polinomio por $2x + 3$ es:

   a. $x^2 + 2x + 3$.
   b. $x^2 + 2x + 4$.
   c. $x^2 + 2x + 5$.
   d. $x^2 + 2x + 6$.

10. El cociente de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

   a. $2x^2 + 5x + 11$.
   b. $2x^2 + 5x + 12$.
   c. $2x^2 + 5x + 13$.
   d. $2x^2 + 5x + 14$.

Las preguntas 11-15 hacen referencia al polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x + 5$.

11. El residuo de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. 3.

12. El residuo de dividir el polinomio por $x - 1$ es:

   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. 3.

13. El cociente de dividir el polinomio por $x + 2$ es:

   a. $x^3 - 4x^2 - 2x + 2$.
   b. $x^3 - 4x^2 - 2x - 2$.
   c. $x^3 - 4x^2 + 2x + 2$.
   d. $x^3 - 4x^2 + 2x - 2$.

14. El cociente de dividir el polinomio por $x - 2$ es:

   a. $x^3 - 6x + 10$.
   b. $x^3 - 6x - 10$.
   c. $x^3 + 6x - 10$.
   d. $x^3 + 6x + 10$.

15. El número de raíces reales del polinomio es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 4.

Las preguntas 16-20 hacen referencia al polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 5$.

16. El residuo de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. 3.

17. El residuo de dividir el polinomio por $x - 1$ es:

   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. 3.

18. El cociente de dividir el polinomio por $x + 2$ es:

   a. $x^3 - 4x^2 - 12x + 22$.
   b. $x^3 - 4x^2 + 12x + 22$.
   c. $x^3 - 4x^2 + 12x - 22$.
   d. $x^3 - 4x^2 - 12x - 22$.

19. El cociente de dividir el polinomio por $x - 2$ es:

   a. $x^3 - 4x + 10$.
   b. $x^3 - 4x - 10$.
   c. $x^3 + 4x - 10$.
   d. $x^3 + 4x + 10$.

20. El número de raíces reales del polinomio es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 4.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 5: Fracciones

Esta guía comprende las semanas 8 y 9.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero el alumno de justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: “La fracción $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ es irreductible”. Se debe notar que el denominador se puede factorizar como $(x+1)(x+2)$ y responder de la siguiente manera: “Falso, porque se puede descomponer en fracciones parciales”. Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque se puede descomponer en fracciones parciales.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Un polo de la fracción $\frac{x-1}{x^2-2x-8}$ es $x=2$.

F	V

2. Un cero de la fracción $\frac{x^2-x-2}{2x^3-x^2+2x-1}$ es $x=-1$.

F	V

3. La fracción $\frac{x-8}{x^2-x-6}$ es equivalente a $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}$.

F	V

4. La fracción $\dfrac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 6}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x+1}$.

F	V

5. La fracción $\dfrac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4}$ no tiene polos reales.

F	V

6. Los ceros de la fracción $\dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 1}$ son 0, 1, -2.

F	V

7. Los polos de la fracción $\dfrac{x^3 + 8}{x^3 - x}$ son 0, 1, -1.

F	V

8. La fracción $\dfrac{x^3}{x^2-4}$ es equivalente a $x+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}$.

F	V

9. La fracción $\dfrac{x^2+1}{x^2-x-6}$ es equivalente a $1+\dfrac{9/5}{x-3}-\dfrac{4/5}{x+2}$.

F	V

10. La fracción $\dfrac{4}{x^4+4x^2}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+4}$.

F	V

11. El cociente de dividir $3x^3+x-1$ entre x^2+3x es $3x-9$.

F	V

12. El residuo de dividir $3x^3+x-1$ entre x^2+3x es $28x$.

F	V

13. La fracción $\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$ es equivalente a $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$.

F	V

14. La fracción $\dfrac{4}{x^4-16x^2+16}$ se puede expresar mediante las fracciones parciales $\dfrac{A}{(x+2)^2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}$.

F	V

15. La fracción $\dfrac{3x^3+2x+6}{x^4+2x^2+1}$ se puede expresar mediante las fracciones parciales $\dfrac{A}{x^2+1}+\dfrac{Bx}{(x^2+1)^2}$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Uno de los polos de la fracción $\dfrac{x^2+2x+5}{x^3-4x^2-x+4}$ es:

   a. $0+j1$.
   b. $0-j1$.
   c. $4+j0$.
   d. $-4+j10$.

2. Uno de los ceros de la fracción $\dfrac{x^2+2x+5}{x^3-4x^2-x+4}$ es:

   a. $1+j2$.
   b. $-1-j2$.
   c. $-1+j3$.
   d. $-1-j3$.

3. El residuo de dividir $3x^3+3x^2-1$ entre x^2+3x es:

   a. $-18x-1$.
   b. $-18x+1$.
   c. $18x-1$.
   d. $18x+1$.

4. El cociente de dividir $3x^3+3x^2-1$ entre x^2+3x es:

   a. $3x-6$.
   b. $3x+6$.
   c. $-3x-6$.
   d. $-3x+6$.

5. Una de las fracciones parciales asociadas a la fracción $\dfrac{3x^3+2x+6}{x^4+2x^2+1}$ es:

   a. $\dfrac{A}{x^2+1}$.
   b. $\dfrac{A}{(x^2+1)^2}$.
   c. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+1)^2}$.
   d. $\dfrac{Ax}{(x^2+1)^2}$.

6. Una de las fracciones parciales asociadas a la fracción $\dfrac{2x+3}{x^6-1}$ es:

   a. $\dfrac{A}{x^2-1}$.
   b. $\dfrac{A}{x^2+x+1}$.
   c. $\dfrac{Ax}{x^2+x+1}$.
   d. $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}$.

7. La descomposición en fracciones parciales de la fracción $\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ es:

   a. $\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x}{x^2+2}$.

   b. $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{x}{x^2+2}$.

   c. $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+2}$.

   d. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+2}$.

8. La descomposición en fracciones parciales de la fracción $\dfrac{3}{x^4+3x^2}$ es:

   a. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+3}$.

   b. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+3}$.

   c. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+3}$.

   d. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2+3}$.

9. La descomposición en fracciones parciales de la fracción $\dfrac{x^3-2x^2+x-1}{x^3+x}$ es:

   a. $1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

   b. $1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$.

   c. $1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

   d. $1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$.

10. La fracción continuada asociada a la fracción $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}$ es:

a. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}$.

b. $x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}$.

c. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}$.

d. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 6: Sistemas de ecuaciones

Esta guía comprende las semanas 10 y 11.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$ no tiene solución". Se debe eliminar la variable y, así: $2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$, y dado que el discriminante es negativo, se debe responder: "Verdadero, porque el discriminante de la ecuación cuadrática es negativo". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque el discriminante de la ecuación cuadrática es negativo (disc < 0).

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Las rectas del plano $x + y = 1$ y $2x - y = 0$ se cortan en el punto (1/3, 2/3).

F	V

2. La recta del plano $x - y = 2$ y la curva $x^2 - y = 4$ se cortan en el punto $(-3, 5)$.

F	V

3. La recta del plano $2x + y = 1$ y la curva $x^2 + y^2 = 4$ se cortan en dos puntos.

F	V

4. Las rectas del plano $3x - 2y = 1$ y $6x - 4y = 3$ no se cortan.

F	V

5. Las rectas del plano $x + 2y = 1$ y $3x + 6y = 3$ son coincidentes.

F	V

6. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 65 \\ x^2 + y^2 + xy = 2275 \end{cases}$ tiene como solución $x = 15$, $y = 5$.

F	V

7. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 6 \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$ tiene como solución $x = 8$, $y = 2$.

F	V

8. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 4/y = 1 \\ y + 4/x = 25 \end{cases}$ tiene como solución $x = 1/5$, $y = 4/5$.

F	V

9. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ x^2+y^2-xy=133 \end{cases}$ tiene como solución $x=9$, $y=4$.

F	V

10. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=4 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ tiene como solución $x=5$, $y=4$.

F	V

11. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+2y-z=5 \\ 2x-5y+2z=10 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ tiene como solución $x=2$, $y=2$, $z=5$.

F	V

12. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y-x=1 \\ \sqrt{2x+y}+x=3 \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

13. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - x = 1 \\ |\,2x + 4\,| = y \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

14. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = x - 1 \\ y = x \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

15. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = x + 2 \\ y = x \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Una parábola del plano pasa por los puntos (0, 2), (1, 1), (2, −2). La ecuación de la parábola es:

   a. $y = x^2 - x + 2$.
   b. $y = -x^2 - x + 2$.
   c. $y = -x^2 + 2$.
   d. $y = x^2 + 2$.

2. Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas diferentes. Una de ellas produce un rendimiento de 20% anual y la otra 15% anual. Si dispone de 60 millones de pesos y desea que el monto de los intereses sea de 11 millones, la cantidad de millones que debe invertir en la cuenta que paga el 20% es:

   a. 20.
   b. 30.
   c. 40.
   d. 50.

3. Un número de dos cifras es seis unidades menor que siete veces la suma de sus dígitos. Si los dígitos se intercambian, el resultado excede en tres unidades a once veces el dígito de las unidades del número original. El número es:

   a. 46.
   b. 58.
   c. 64.
   d. 85.

4. Se tiene una fracción cualquiera. Si se resta 4 al numerador y se suma 3 al denominador, el valor de la fracción es 1/2. Si al numerador y al denominador se les suma 2 unidades, el resultado es 2/3. La fracción es:

   a. 19/27.
   b. 24/37.
   c. 25/39.
   d. 26/41.

5. Mariela invirtió parte de su dinero al 10% y el resto al 15%. El ingreso obtenido por ambas inversiones totalizó 45.000 pesos. De haber intercambiado sus inversiones habría obtenido ingresos por un monto de 55.000 pesos. La cantidad que invirtió, en miles de pesos, fue:

   a. 100.
   b. 200.
   c. 300.
   d. 400.

6. Se tiene un lote rectangular. Si la longitud se aumenta en 4 m y el ancho se disminuye en 3 m, el área disminuye en 35 m^2. Si la longitud se disminuye en 3 m y el ancho se aumenta en 2 m, el área permanece igual a la original. La menor de las dimensiones del lote, en metros, es:

   a. 28.
   b. 30.
   c. 42.
   d. 45.

7. Hace ocho años la edad de Luis era cuatro veces la edad de Héctor, y dentro de dos años será el doble. La edad de Héctor dentro de dos años será:

   a. 13.
   b. 15.
   c. 28.
   d. 30.

8. El punto de apoyo de una palanca está situado de tal manera que dos cargas de 80 y 120 kg, colocadas en sus extremos, quedan equilibradas. Si se agregan 40 kg a la carga menor y se desea conservar el equilibrio, la otra carga debe alejarse 2 m del punto de apoyo. La longitud de la palanca, en metros, es:

   a. 8.
   b. 12.
   c. 20.
   d. 24.

9. Un avión recorrió 4.200 km en seis horas con el viento a favor y al regreso tardó siete horas. La rapidez del viento, en km/h, es:

   a. 5.
   b. 7.5.
   c. 10.
   d. 12.5.

10. Las tarifas de entrada a un parque de diversiones son de 10.000 pesos para adultos y de 6.000 pesos para niños. Un domingo cualquiera entraron 2.000 personas y se recaudaron 18 millones de pesos. El número de adultos que entraron es:

    a. 500.
    b. 1.000.
    c. 1.500.
    d. 2.000.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 7: Funciones exponenciales y logarítmicas

Esta guía comprende la semana 12.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "La ecuación $\log_2(3x + 1) - \log(x) = 2$ tiene como solución única $x = 1$". Se deben aplicar las propiedades de los logaritmos, así: $\log_2\left(\frac{3x+1}{x}\right) = 2 \Rightarrow \frac{3x+1}{x} = 4 \Rightarrow x = 1$, y dado que este valor satisface la ecuación dada, se debe responder: "Verdadero, porque $x = 1$ satisface la ecuación dada". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque $x = 1$ satisface la ecuación, así: $\log_2(4) - \log(1) = 2$.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. El punto (0, 1) pertenece a la curva $y = 2^{-x/3}$.

F	V

2. Al evaluar la función $f(x) = 4^{x-1}$ en $x = 0$, el resultado es $f(0) = 1/4$.

F	V

3. Al evaluar la función $f(x) = 9^{x-1}$ en $x = 1/2$, el resultado es $f(1/2) = -1/\sqrt{3}$.

F	V

4. Al evaluar la función $f(x) = \log_3(\sqrt{x})$ en $x = 27$, el resultado es $f(27) = 3/2$.

F	V

5. Al evaluar la función $f(x) = \log_2(1/x)$ en $x = 25$, el resultado es $f(25) = 2$.

F	V

6. El valor exacto de $10^{2\log(5)}$ es 25.

F	V

7. Al simplificar la expresión $\log_2(16) - \frac{1}{2}\log_3(81) + 2\log_5(125)$, el resultado es 8.

F	V

8. La solución de la ecuación $2^{2x-1} = 4$ es $x = 2/3$.

F	V

9. Las soluciones de la ecuación $\log_x(3) = 2$ son $x = \pm\sqrt{3}$.

F	V

10. La solución de la ecuación $\log(x) = -1$ es $x = 0.1$.

F	V

11. La ecuación $\log(x) + \log(x - 15) = 2$ tiene dos soluciones.

F	V

12. La ecuación $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(2x + 2) = 1$ tiene una sola solución.

F	V

13. La inversa de la función $f(x) = 2e^{-x} + 3$ es $f^{-1}(x) = \ln(x - 3)$, con $x > 3$.

F	V

14. La inversa de la función $f(x) = \log(2x - 3) + 1$ es $f^{-1}(x) = 0.2x + 1.5$.

F	V

15. Una de las soluciones de la ecuación $e^{2x^2 - 3x + 1} = 1$ es $x = 1$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. La ecuación $4^{2x^2} = 8 \cdot 16^x$:

   a. No tiene soluciones reales.
   b. Tiene una sola solución real.
   c. Tiene dos soluciones reales diferentes.
   d. Tiene una solución real y una compleja.

2. La ecuación $7^{x^2} = 49^{x - 1/2}$:

   a. No tiene soluciones reales.
   b. Tiene una sola solución real.
   c. Tiene dos soluciones reales diferentes.
   d. Tiene una solución real y una compleja.

3. La ecuación $\log_{2x}(3x) = 1/2$, con $x > 0$:

   a. No tiene soluciones en el dominio dado.
   b. Tiene una sola solución en el dominio dado.
   c. Tiene dos soluciones diferentes en el dominio dado.
   d. Tiene una solución real y una compleja en el dominio dado.

4. La ecuación $4^x - 2^{x+2} = 32$:

   a. No tiene soluciones reales.
   b. Tiene una sola solución real.
   c. Tiene dos soluciones reales diferentes.
   d. Tiene una solución real y una compleja.

5. La inversa de la función $f(x) = 4(1 - 2^{-x})$ es:

   a. $f^{-1}(x) = 2 - \log_2 (4 - x)$.
   b. $f^{-1}(x) = 2 + \log_2 (4 - x)$.
   c. $f^{-1}(x) = 2 - \log_2 (4 + x)$.
   d. $f^{-1}(x) = 2 + \log_2 (4 + x)$.

Los ejercicios 6-10 hacen referencia a las funciones $f(x) = 2^{-x/2}$ y $g(x) = \log_2 (x + 1)$.

6. El valor numérico de $f(3) \cdot g(3)$ es:

   a. $\sqrt{2}$.
   b. $2/\sqrt{2}$.
   c. $1/\sqrt{2}$.
   d. $-\sqrt{2}$.

7. El valor numérico de $g(3)/f(3)$ es:

   a. $\sqrt{2}$.
   b. $2\sqrt{2}$.
   c. $3\sqrt{2}$.
   d. $4\sqrt{2}$.

8. El valor numérico de $f(g(3))$ es:

   a. 0.
   b. 1/2.
   c. 1.
   d. 2.

9. El valor numérico de $f(8) \cdot g(7)$ es:

   a. 1/16.
   b. 1/8.
   c. 3/16.
   d. 1/4.

10. La inversa de $g(x)$ pasa por el punto:

   a. (3, 6).
   b. (3, 7).
   c. (3, 8).
   d. (3, 9).

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 8: Funciones trigonométricas: parte I

Esta guía comprende las semanas 13 y 14.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "El periodo de la función $f(t) = 10$ sen (πt) es $T = 2$". Se debe aplicar la fórmula $T = 2\pi/\omega$, y dado que $\omega = \pi$, se debe responder: "Verdadero, porque $T = 2\pi/\pi = 2$ es el periodo de la función". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque si $\omega = \pi$ y $T = 2\pi/\omega$, entonces $T = 2$.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. El periodo de la función $f(t) = 10$ sen $(2t)$ es $T = 2\pi$.

F	V

2. Para la función $f(t) = 10$ sen $(t + 4\pi)$, se verifica que $f(\pi/2) = 1$.

F	V

3. Para la función $f(t) = 2$ sen (t) cos (t), se verifica que $f(\pi/4) = 1$.

F	V

4. Al simplificar la expresión $\dfrac{2\,\text{sen}\,(\pi/6) - 3\cos^2(\pi/4)}{2 + \text{sen}^2(\pi/3) + \cos^2(\pi/3)}$, el resultado es $-1/6$.

F	V

5. Sabiendo que sen $(\theta) = 1/3$, se sigue que $\tan(\theta) = \sqrt{8}$.

F	V

6. Sabiendo que $\alpha + \beta = \pi/2$, se sigue que sen $(\alpha) = \cos(\beta)$.

F	V

7. Sabiendo que $\alpha + \beta = \pi$, se sigue que $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$.

F	V

8. Sabiendo que sen $(\alpha) = 4/5$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\cos(\alpha) = 3/5$.

F	V

9. Sabiendo que $\cos(\alpha) = -3/5$, con $\pi/2 < \alpha < \pi$, se sigue que $\tan(\alpha) = 3/4$.

F	V

10. Sabiendo que $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$, se sigue que $\alpha = \pi/3 \vee \alpha = 4\pi/3$.

F	V

11. Sabiendo que $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\operatorname{sen}(2\alpha) = \sqrt{3}/16$.

F	V

12. Sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha) = 2/3$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\cos(2\alpha) = 1/9$.

F	V

13. Sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha) = 2/3$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\cos(\alpha/2) = 1/3$.

F	V

14. Sabiendo que sen $(\alpha) = -\frac{2}{3}$, con $\pi < \alpha < 3\pi/2$, se sigue que tan $(\alpha/2) = (3 - \sqrt{5})/2$.

F	V

15. Sabiendo que sec $(\alpha) = 1.5$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que sec $(2\alpha) = 3$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

Los ejercicios 1-3 hacen referencia a un ángulo θ del primer cuadrante tal que sen $(\theta) = 9/10$.

1. El valor de sec (2θ) es:

   a. $-31/50$.
   b. $31/50$.
   c. $50/31$.
   d. $-50/31$.

2. El valor de cos $(2\theta + \pi/2)$ es:

   a. $-9\sqrt{19}/50$.
   b. $9\sqrt{19}/50$.
   c. $-50/9\sqrt{19}$.
   d. $50/9\sqrt{19}$.

3. El valor de tan $(\theta/2)$ es:

   a. $(10 + \sqrt{19})/9$.
   b. $(10 - \sqrt{19})/9$.
   c. $(-10 + \sqrt{19})/9$.
   d. $-(10 + \sqrt{19})/9$.

Los ejercicios 4-5 hacen referencia a un ángulo θ del primer cuadrante tal que cos $(\theta) = 4/9$.

4. El valor de sen $(2\theta + \pi/3)$ es:

   a. $(8\sqrt{65} - 49\sqrt{3})/162$.
   b. $(8\sqrt{65} + 49\sqrt{3})/162$.
   c. $-(8\sqrt{65} + 49\sqrt{3})/162$.
   d. $(-8\sqrt{65} - 49\sqrt{3})/162$.

5. El valor de tan $(\theta/2 + \pi)$ es:

   a. $5/\sqrt{65}$.
   b. $-5/\sqrt{65}$.
   c. $\sqrt{65}/5$.
   d. $-\sqrt{65}/5$.

6. Se tiene la expresión $((\cot(x) - \csc(x))^2$. Al expresarla en términos de las funciones seno y coseno, el resultado simplificado es:

   a. $\dfrac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}$.
   b. $\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$.
   c. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}$.
   d. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}$.

7. Se tiene la expresión $\dfrac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$. Al expresarla en términos de las funciones seno y coseno, el resultado simplificado es:

   a. sen $(2x)$.
   b. 2 sen (x).
   c. cos $(2x)$.
   d. 2 cos (x).

8. Se tiene la expresión sen $(x + y) -$ sen $(x - y)$. Al aplicar las fórmulas de adición, el resultado simplificado es:

   a. sen (x) cos (y).
   b. sen (y) cos (x).
   c. 2 sen (y) cos (x).
   d. 2 sen (x) cos (y).

9. Se tiene la expresión $\dfrac{\text{sen}\,(x+y)-\text{sen}\,(x-y)}{\cos\,(x+y)+\cos\,(x-y)}$. Al aplicar las fórmulas de adición, el resultado simplificado es:

   a. tan (y).
   b. tan (x).
   c. cot (x).
   d. cot (y).

10. Se tiene la expresión 2 sen (3x) sen (x). Al aplicar las fórmulas correspondientes al producto, el resultado simplificado es:

    a. cos (2x) − cos (4x).
    b. cos (2x) + cos (4x).
    c. sen (2x) − sen (4x).
    d. sen (2x) + sen (4x).

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 9: Funciones trigonométricas: parte II

Esta guía comprende la semana 15.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "La ecuación sen $(2x) + \cos(x) = 0$ tiene dos soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$". Se debe resolver la ecuación, teniendo en cuenta que sen $(2x) = 2$ sen $(x) \cos(x)$, asì:

$$2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) + \cos(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos(x)(2 \operatorname{sen}(x) + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos(x) = 0 \vee \operatorname{sen}(x) = -1/2.$$

Teniendo en cuenta lo estudiado, se tienen las siguientes soluciones: $\pi/2$, $3\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$. Dado que realmente hay cuatro soluciones, se debe responder: "Falso, porque al resolver la ecuación resultan cuatro soluciones". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque al resolver la ecuación resultan cuatro soluciones.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Uno de los valores de arcsen (1/2) es $\pi/6$.

F	V

2. El valor de arctan ($\pi/4$) es 1.

F	V

3. La ecuación $2\cos(x) + 1 = 0$ tiene como soluciones $x = 2\pi/3 \vee x = 4\pi/3$ en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

4. La ecuación $\tan^2(x) - \tan(x) = 0$ tiene cuatro soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

5. La ecuación $\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$ tiene cuatro soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

6. La inversa de la función $f(x) = 2\, sen\,(x + \pi)$ es $f^{-1}(x) = \pi + \operatorname{arcsen}(x/2)$.

F	V

7. La ecuación $\sqrt{3 + 2\,\mathrm{sen}(x)} = \mathrm{sen}(x)$ no tiene soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

8. La ecuación $\sqrt{-2+3\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{sen}(x)$ no tiene soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

9. La expresión $\cos(2\cos^{-1}(x))$ es equivalente a $2x^2 - 1$.

F	V

10. La expresión $\tan^2(\cos^{-1}(x))$ es equivalente a $\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

F	V

11. Las medidas de los lados de un triángulo son $a = 4$, $b = 6$, $c = 7$. El ángulo comprendido por los lados c y b es $\alpha = \operatorname{arccos}(23/28)$.

F	V

12. Las medidas de dos de los lados de un triángulo son $a = 4$, $b = 6$ y el ángulo comprendido por ellos es $\gamma = \pi/6$. La medida del otro lado es $2\sqrt{7}$.

F	V

13. Las medidas de dos de los lados de un triángulo son $a = 4$, $b = 6$ y el ángulo comprendido por ellos es $\gamma = \pi/3$. La medida en grados de uno de los otros dos ángulos es $\operatorname{arcsen}(\sqrt{7})$.

F	V

14. La medida de uno de los lados de un triángulo es $a = 4$ y los ángulos adyacentes son $\gamma = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$. La medida del lado opuesto al ángulo γ es $8/(1 + \sqrt{3})$.

F	V

15. La medida de uno de los lados de un triángulo es $a = 4$ y los ángulos adyacentes son $\gamma = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$. La medida del lado opuesto al ángulo β es $4\sqrt{2}/(1 + \sqrt{3})$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. La expresión tan (2 arcsen (x)) es equivalente a:

   a. $\dfrac{2x(1-x^2)}{1-2x^2}$.

   b. $\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

   c. $\dfrac{2x(1-x^2)}{1+2x^2}$.

   d. $\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1+2x^2}$.

2. La inversa de la función $f(x) = 1 - 3 \text{ sen } (x/2 + \pi/3)$ es:

   a. $f^{-1}(x) = 2 \text{ arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) - 2\pi/3.$
   b. $f^{-1}(x) = -2 \text{ arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) - 2\pi/3.$
   c. $f^{-1}(x) = -2 \text{ arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) + 2\pi/3.$
   d. $f^{-1}(x) = 2 \text{ arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) + 2\pi/3.$

3. Las soluciones de la ecuación $\text{sen}^2 (x) + \cos (x) = 1$, en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, son:

   a. $x = 0 \vee x = \pi/2.$
   b. $x = 0 \vee x = 3\pi/2.$
   c. $x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2.$
   d. $x = 0 \vee x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2.$

4. El número de soluciones de la ecuación $2 \text{ sen}^3 (x) - \text{sen } (x) = 0$, en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, es:

   a. 2.
   b. 4.
   c. 6.
   d. 8.

5. El número de soluciones de la ecuación $\sqrt{1 + \cos(x)} = \text{sen}(x)$, en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 4.

Las preguntas 6-7 hacen referencia a las figuras 1 y 2.

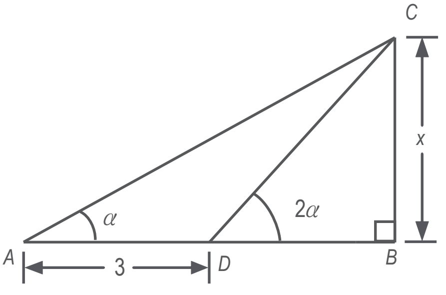


Figura 1

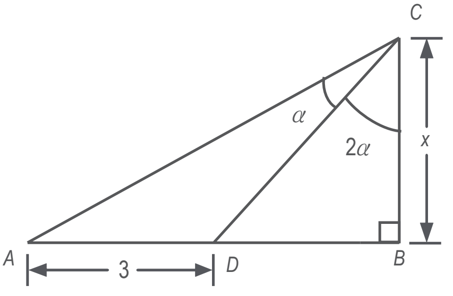


Figura 2

6. El valor de x en la figura 1, con $\alpha = 30°$, es:

   a. $\sqrt{3}/2$.
   b. $\sqrt{3}$.
   c. $3\sqrt{3}/2$.
   d. $2\sqrt{3}$.

7. El valor de x en la figura 2, con $\alpha = 22.5°$, es:

   a. $\sqrt{2}/2$.
   b. $\sqrt{2}$.
   c. $3\sqrt{2}/2$.
   d. $2\sqrt{2}$.

Las preguntas 8-10 hacen referencia a las figuras 3 y 4.

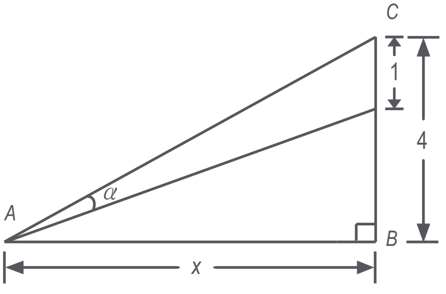


Figura 3

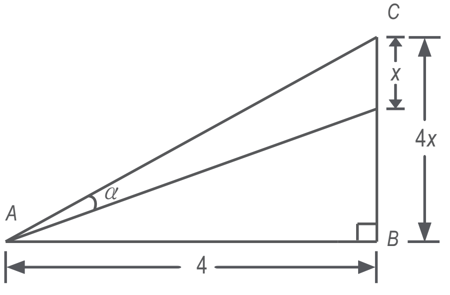


Figura 4

8. El valor de α en la figura 3, con $x = 2$, es:

   a. arctan (1/2).
   b. arctan (3/8).
   c. arctan (1/4).
   d. arctan (1/8).

9. El valor de α en la figura 4, con $x = 1$, es:

   a. arctan (1/7).
   b. arctan (2/7).
   c. arctan (3/7).
   d. arctan (4/7).

10. El valor de x en la figura 4, con $\tan(\alpha) = 1/10$, es:

   a. $(5-\sqrt{13})/3$.
   b. $2(5-\sqrt{13})/3$.
   c. $3(5-\sqrt{13})/3$.
   d. $4(5-\sqrt{13})/3$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Guía para el módulo 10: Álgebra de los números complejos

Esta guía comprende la semana 16.

La evaluación consta de 15 preguntas en la modalidad de falso o verdadero y 10 de escogencia múltiple. En las preguntas de falso o verdadero se debe justificar la veracidad o falsedad de una proposición dada. Por ejemplo: "La ecuación $2z+\overline{z}+2-j2=0$ tiene como solución $z = 3 + j2$". Se debe resolver la ecuación, teniendo en cuenta que $z = x + jy, \overline{z} = x - jy$, así:

$$2(x+jy)+x-jy+2-j2=0 \Rightarrow$$
$$3x+2=0$$
$$y-2=0.$$

Lo anterior implica que $x = -2/3$ y $y = 2$, con lo que la afirmación es falsa. Se debe responder: "Falso, porque al resolver la ecuación resulta $z = -2/3 + j2$". Según el formato, se respondería así:

F	V	Porque al resolver la ecuación resulta $z = -2/3 + j2$.

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. El módulo de $3+j4+(2-j3)^2$ es $2\sqrt{17}$.

F	V

2. El valor principal del argumento de $3+j4+(2-j3)^2$ es arctan (4).

F	V

3. La parte real de $2 - j3 + 5\,\underline{/30^\circ}$ es 9/2.

F	V

4. La parte imaginaria de $2 - j3 + 5\,\underline{/30^\circ}$ es $-1/2$.

F	V

5. El módulo de $\overline{5 + j4} + (2 + j3)^2$ es 8.

F	V

6. El valor principal del argumento de $\overline{5 + j4} + (2 + j3)^2$ es $3\pi/2$.

F	V

7. La parte real de $2\,\underline{/60^\circ} + 4\,\underline{/30^\circ}$ es $1 + 2\sqrt{3}$.

F	V

8. La parte imaginaria de $2\underline{/60^\circ} + 4\underline{/30^\circ}$ es $2 + \sqrt{3}$.

F	V

9. Para la función $f(z) = z^2 + 2\overline{z} + 4 - j2$ se verifica que $f(0 + j2) = j6$.

F	V

10. Para la función $f(z) = z^2 + 2\overline{z} + 4 - j2$ se verifica que $f(1 + j1) = 6 - j2$.

F	V

11. Al resolver la ecuación $2\overline{z} + z + 2 - j2 = 0$, el resultado es $z = -2/3 - j2$.

F	V

12. Al resolver la ecuación $z^2 + z + 2 = 0$, una de las soluciones es $z = -1/2 + j\sqrt{7}/2$.

F	V

13. Al resolver la ecuación $z^2 + jz + j2 = 0$, una de las soluciones es $z = \sqrt{2} + j1$.

F	V

14. Una de las raíces cúbicas del número complejo $3 + j3\sqrt{3}$ es $\sqrt[3]{36} \angle 20°$.

F	V

15. Una de las raíces cúbicas del número complejo $27 \angle 30°$ es $3 + j0$.

F	V

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

Los ejercicios 1-5 hacen referencia a los números complejos $z_1 = 6 + j8$, $z_2 = 2 + j3$.

1. El resultado de la operación $z_1^2 + \overline{z_2}$ es:

   a. $-26 + j93$.
   b. $-26 - j93$.
   c. $26 + j93$.
   d. $26 - j93$.

2. El resultado de la operación $\overline{z_1 \cdot z_2} - z_2$ es:

   a. $-14 + j37$.
   b. $-14 - j37$.
   c. $14 + j37$.
   d. $14 - j37$.

3. El resultado de la operación $z_1/z_2 - \overline{z_2}$ es:

   a. $(-10 - j37)/13$.
   b. $(-10 + j37)/13$.
   c. $(10 - j37)/13$.
   d. $(10 + j37)/13$.

4. Una de las raíces cúbicas de $z_1 - 3\overline{z_2}$ es:

   a. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/0}$.
   b. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/30}$.
   c. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/60}$.
   d. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/90}$.

5. Una de las raíces cúbicas de $z_1 - z_2^2$ es:

   a. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/6.66^\circ}$.
   b. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/126.66^\circ}$.
   c. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/246.66^\circ}$.
   d. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/53.33^\circ}$.

Las preguntas 6-7 hacen referencia a las funciones $f(z) = z^2 + 2z + j3$ y $g(z) = z^2 + j3$.

6. El resultado de efectuar la operación $f(1 + j1) \cdot g(0 - j2)$ es:

   a. $-29 - j22$.
   b. $-29 + j22$.
   c. $29 - j22$.
   d. $29 + j22$.

7. Uno de los ceros de $g(z)$ es:

   a. $0 + j\sqrt{3}$.
   b. $0 - j\sqrt{3}$.
   c. $\sqrt{3/2} + j\sqrt{3/2}$.
   d. $\sqrt{3/2} - j\sqrt{3/2}$.

8. Una de las soluciones de la ecuación $z^2 + (1 - j)z - j1 = 0 + j0$ es:

   a. $-1 + j0$.
   b. $1 + j0$.
   c. $-1 + j1$.
   d. $-1 - j1$.

9. Una de las soluciones de la ecuación $z^2 + z + 1 - j1 = 0 + j0$ es:

   a. $-1 + j0$.
   b. $1 + j0$.
   c. $-1 + j1$.
   d. $-1 - j1$.

10. Una de las soluciones de la ecuación $z^2 + jz - 1 - j1 = 0 + j0$ es:

   a. $-1 + j0$.
   b. $1 + j0$.
   c. $1 + j1$.
   d. $1 - j1$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Soluciones para el módulo 1: Conjuntos numéricos y aritmética

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. La suma de dos números primos es siempre par.

F	V

Porque siendo el número 2 el único primo par, al sumarlo con otro primo el resultado es impar.

2. El producto de dos números primos es siempre impar.

F	V

Porque siendo el número 2 el único primo par, al multiplicarlo por otro primo el resultado es par.

3. El mínimo común múltiplo de 18 y 45 es 90.

F	V

Porque $90/18 = 5$ y $90/45 = 2$. Puesto que los cocientes son primos entre sí, 90 es el MCM.

4. El decimal periódico 0.242424… se representa mediante el racional 8/33.

F	V

Porque cuando el período de repetición es de dos cifras, el fraccionario asociado es $24/99 = 8/32$.

5. Al simplificar la expresión $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 - 1/2}}$, el resultado es 2/3.

F	V

Se efectúan las operaciones de abajo hacia arriba, así: $1 - 1/2 = 1/2$; $1/(1/2) = 2$; $1 + 2 = 3$; resulta 1/3.

6. Al simplificar $((a/b)^{-1})^{-1}(b/a)$, el resultado es 1.

F	V

$((a/b)^{-1})^{-1} = a/b \Rightarrow (a/b) \cdot (b/a) = 1.$

7. Al simplificar $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt[4]{64}$, el resultado es $4\sqrt{2}$.

F	V

$\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt[4]{64} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

8. Al racionalizar la expresión $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, el resultado es 3.

F	V

$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$.

9. El producto de dos números irracionales es siempre irracional.

F	V

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

10. La suma de números irracionales puede ser un número irracional.

F	V

El conjunto de los irracionales es cerrado para la suma.

11. Al simplificar $\left(\dfrac{1/2 - 1/3}{1/2 + 1/3}\right)^{-1}$, el resultado es 5.

F	V

$\left(\dfrac{1/2 - 1/3}{1/2 + 1/3}\right)^{-1} = \dfrac{1/2 + 1/3}{1/2 - 1/3} = \dfrac{5/6}{1/6} = 5$.

12. Al simplificar $(1/3)^{-2}(1 - 2/3)^2$, el resultado es 1.

F	V

$(1/3)^{-2}(1 - 2/3)^2 = 3^2 \cdot (1/3)^2 = 1$.

13. Al efectuar la operación $(2^{-1/3})^6$, el resultado es 4/3.

F	V

$(2^{-1/3})^6 = 2^{-6/3} = 2^{-2} = 1/4$.

14. Al efectuar la operación $\left(\dfrac{3^{2/3}}{2^{1/3}}\right)^3$, el resultado es 9/2.

F	V

$$\left(\frac{3^{2/3}}{2^{1/3}}\right)^3 = \frac{3^{6/3}}{2^{3/3}} = \frac{3^2}{2^1} = \frac{9}{2}.$$

15. Al simplificar $(\sqrt[3]{64/27})^{-2}$, el resultado es 16/9.

F	V

$(\sqrt[3]{64/27})^{-2} = (\sqrt[3]{27/64})^{2} = (3/4)^2 = 9/16.$

16. Al simplificar $(a^{-1} + b^{-1})$, el resultado es $\dfrac{ab}{a+b}$.

F	V

$$(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = (1/a + 1/b)^{-1} = \left(\frac{b+a}{ab}\right)^{-1} = \frac{ab}{a+b}.$$

17. Al simplificar $(2^{1/2})(3^{1/3})$, el resultado es $6^{5/6}$.

F	V

$(2^{1/2})(3^{1/3}) = (2^{3/6}) \cdot (3^{2/6}) = (2^3 \cdot 3^2)^{1/6} = 72^{1/6}.$

18. Al simplificar $\left(\dfrac{a^n b^{n+1}}{a^{n+1} b^{n+2}}\right)^{-1}$, el resultado es ab.

F	V

$$\left(\frac{a^n b^{n+1}}{a^{n+1} b^{n+2}}\right)^{-1} = \frac{a^{n+1} b^{n+2}}{a^n b^{n+1}} = ab.$$

19. La medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{3}$ es un número racional.

F	V

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$, que es irracional.

20. Al simplificar $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}\right)^{-1}$, el resultado es $-1/3$.

F	V

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=-\,1/3.$$

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Con respecto a los conjuntos numéricos, una de las siguientes afirmaciones es falsa:

   a. El conjunto de los números primos es un subconjunto de los naturales impares.
   b. El conjunto de los reales es cerrado para el producto.
   c. El producto de dos números irracionales puede dar como resultado un número racional.
   d. La medida de la diagonal de un cuadrado de lado $l=\sqrt{2}$ es un número racional.

   La explicación es la siguiente

   a. Es falsa porque el número 2 es primo y no es impar.
   b. Es verdad porque el conjunto de los reales es cerrado para el producto.
   c. Es verdad. Un contraejemplo es $(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)=1$.
   d. Es verdad porque la medida de la diagonal de un cuadrado de lado $l=\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$.

2. El mínimo común múltiplo de los naturales $n=84$ y $m=210$ es:

   a. 840.
   b. 420.
   c. 210.
   d. 105.

   Al factorizar los números, se tiene:

   $84=2^2\cdot 3\cdot 7$
   $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

   Se toman los factores no comunes y los comunes con mayor exponente, con lo que:

   $MCM=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420.$

3. El máximo común divisor de los naturales $n = 84$ y $m = 210$ es:

    a. 42.
    b. 35.
    c. 21.
    d. 7.

    Con base en la factorización previa, se toman los factores comunes con su menor exponente, con lo que:

    $$MCD = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

4. El resultado de efectuar la operación $\dfrac{(\sqrt{2} \cdot 3^{1/4})^2}{\sqrt{2}+1}$ es:

    a. $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} - 1)$.
    b. $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 1)$.
    c. $2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{2} + 3)$.
    d. $2\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{2} + 3)$.

    La operación es la siguiente:

    $$\frac{(\sqrt{2} \cdot 3^{1/4})^2}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}^2 \cdot 3^{1/2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$
    $$= \frac{2\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1).$$

5. Al simplificar la expresión $\dfrac{a \cdot b^{-1}}{c^{1/3}} \div \dfrac{ab^{-2}}{c^{7/3}}$, el resultado es:

    a. abc^2.
    b. bc^2.
    c. ac^2.
    d. c^2.

    La operación es la siguiente:

    $$\frac{a \cdot b^{-1}}{c^{1/3}} \div \frac{ab^{-2}}{c^{7/3}} = \frac{a}{b \cdot c^{1/3}} \div \frac{a}{b^2 \cdot c^{7/3}} = \left(\frac{a}{b \cdot c^{1/3}}\right) \cdot \left(\frac{b^2 \cdot c^{7/3}}{a}\right) = b \cdot c^{6/3} = bc^2.$$

6. El área de la superficie de un recipiente cilíndrico cerrado de radio en la base R y altura H viene dada por $A = 2\pi RH + 2\pi R^2$. Sabiendo que el radio de la base mide 15 cm y la altura 40 cm, la medida en metros cuadrados del área es:

   a. 0.165π.
   b. 1.65π.
   c. 16.5π.
   d. 165π.

   La operación es la siguiente:

   $$A = [2\pi\,(15)\cdot\ (40) + 2\pi\,(15)^2]\text{ cm}^2 = 1650\pi\text{ cm}^2 = 0.165\text{ m}^2.$$

7. La distancia en metros recorrida por una partícula al cabo de un tiempo t viene dada por $d = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde V_0 es la velocidad inicial y se mide en metros sobre segundo, mientras que a es la aceleración y se mide en metros sobre segundo al cuadrado. Una partícula pasa por un punto A con una velocidad inicial de 10 m/s y se acelera a razón de 2 m/s^2. La distancia recorrida al cabo de cinco minutos es:

   a. $9.3 \cdot 10^2$.
   b. $9.3 \cdot 10^3$.
   c. $9.3 \cdot 10^4$.
   d. $9.3 \cdot 10^5$.

   La operación es la siguiente, teniendo en cuenta que 5 minutos son 300 segundos:

   $$d = \left[10 \cdot 300 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 300^2\right] = 93.000 = 9.3 \cdot 10^4.$$

8. La capacidad de un recipiente en forma de paralelepípedo recto es el producto de las tres dimensiones: abc. Sabiendo que las dimensiones de un recipiente son $a = 25$ cm, $b = 50$ cm y $c = 60$ cm, el máximo volumen de agua en litros que el recipiente puede contener es:

   a. 7.500.
   b. 750.
   c. 75.
   d. 7.5.

   La operación es la siguiente:

   $$V = a\cdot\ b\ \cdot\ c = 25\cdot\ 50\cdot\ 60\text{ cm}^3 = 75.000\text{ cm}^3 = 75\text{ litros}.$$

9. La capacidad del recipiente de la figura 1 viene dada por:

$$V = \frac{hL}{2}(B + b).$$

Sabiendo que las dimensiones en centímetros son $b = 25$, $B = 50$, $h = 60$ y $L = 100$, el máximo volumen de agua en litros que el recipiente puede contener es:

a. $2.25 \cdot 10^4$.
b. $2.25 \cdot 10^3$.
c. $2.25 \cdot 10^2$.
d. $2.25 \cdot 10^1$.

La operación es la siguiente:

$$V = \frac{60 \cdot 100}{2} \cdot (50 + 25)\ \text{cm}^3 = 225.000\ \text{cm}^3 = 225\ \text{litros}.$$

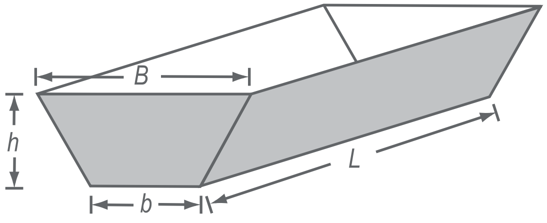


Figura 1

10. El recipiente de la figura 2 está lleno de agua. En un instante determinado se abre un orificio de área a en el fondo permitiendo que el agua fluya. Se estima que si $g = 10$ m/s^2, el tiempo de vaciado en segundos está dado por:

$$t_v = \frac{DL}{3a}\sqrt{\frac{D}{g}}.$$

Sabiendo que las dimensiones en centímetros son $D = 40$ y $L = 108$, y que el área del orificio es 1 cm^2, el tiempo de vaciado en minutos es:

a. 40.
b. 44.
c. 48.
d. 53.

La operación es la siguiente:

$$t_v = \frac{40 \cdot 108}{3} \cdot \sqrt{\frac{40}{10}}\ \text{s} = 2.880\ \text{s} = \frac{2.880}{60}\ \text{min} = 48\ \text{min}.$$

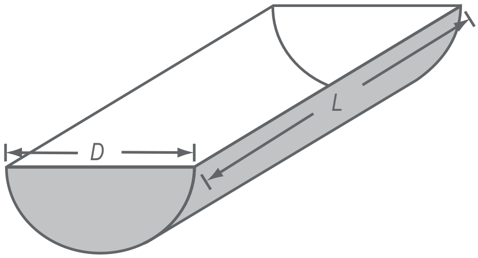


Figura 2

11. Para un péndulo simple, que oscila pequeños ángulos, el periodo de oscilación (en segundos) viene dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. La longitud del péndulo en metros es L, g es la aceleración de la gravedad y se supone que $g = 10$ m/s^2. Si la longitud del péndulo es de 50 cm, el periodo de la oscilación es:

    a. $2\pi\sqrt{5}$.
    b. $\pi\sqrt{5}$.
    c. $\pi/\sqrt{5}$.
    d. $\pi/2\sqrt{5}$.

    La operación es la siguiente:

    $$T = 2\pi\sqrt{0.5/10} = 2\pi\sqrt{1/20} = \pi/\sqrt{5}\ \text{s}.$$

12. La producción, en unidades, de cierta fábrica está dada por $Q(k, L) = 10k^{1/3}L^{2/3}$. En la expresión anterior, k es el capital medido en miles de pesos y L es la fuerza laboral medida en horas/trabajador. Suponiendo que el capital es de 125.000 pesos y que la fuerza laboral es 4.096, el número de unidades producidas es:

    a. $1.28 \cdot 10^3$.
    b. $1.28 \cdot 10^4$.
    c. $1.28 \cdot 10^5$.
    d. $1.28 \cdot 10^6$.

    La operación es la siguiente:

    $$Q(125.000, 4.096) = 10 \cdot 125.000^{1/3} \cdot 4.096^{2/3} = 10 \cdot 50 \cdot 256 = 128.000$$
    $$= 1.28 \cdot 10^5.$$

13. El tiempo de vida media de un material radiactivo es el tiempo que se requiere para que una muestra dada se reduzca a la mitad. En un instante determinado se tiene una muestra de 10 g de una sustancia y se sabe que el tiempo de vida media es de 3 años. Al cabo de 15 años, la cantidad remanente en gramos es:

    a. 5/4.
    b. 5/8.
    c. 5/16.
    d. 5/32.

    La siguiente tabla muestra el procedimiento:

Tiempo	Gramos
0	10
3	5
6	5/2
9	5/4
12	5/8
15	5/16

14. Las temperaturas centígrada y fahrenheit están relacionadas mediante las fórmulas siguientes:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32),$$

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32).$$

    Las medidas son iguales cuando la temperatura es:

    a. 40.
    b. 20.
    c. -20.
    d. -40.

    El procedimiento es el siguiente:

$$T = \frac{5}{9}(T - 32) \Rightarrow 9T = 5T - 160 \Rightarrow 4T = -160 \Rightarrow T = -40.$$

15. Se dispone de 10 cm de alambre para armar un triángulo rectángulo isósceles. El área del triángulo, en centímetros cuadrados, es:

    a. $10 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.
    b. $10 \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.
    c. $25 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.
    d. $25 \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.

    El procedimiento es el siguiente:

    Si x es la medida de cada cateto, la longitud de la hipotenusa es $x\sqrt{2}$, con lo que el perímetro es $2x + x\sqrt{2} = 10 \Rightarrow x = 10/(2 + \sqrt{2})$. Puesto que el área es $x^2/2$, se tiene:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{50}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{50}{4+4\sqrt{2}+2} = \frac{50}{6+4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{25}{3+2\sqrt{2}}.$$

Racionalizando el denominador, resulta:

$$A = \left(\frac{25}{3+2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) = \frac{25(3-2\sqrt{2})}{9-8} = 25(3-2\sqrt{2}).$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a															
b															
c															
d															

Soluciones para el módulo 2: Sucesiones

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Una sucesión está definida mediante su primer término $a_1 = 2$ y la fórmula de recurrencia $a_{n+1} = (a_n + 4)/2$. El tercer término de la sucesión es 7/2.

F	V

Con base en la fórmula se tiene que $a_2 = (2 + 4)/2 = 3 \Rightarrow a_3 = (3 + 4)/2 = 7/2$.

2. Si los términos 1, x, 7 están en progresión aritmética, entonces $x = 4$.

F	V

Debe cumplirse que $7 - x = x - 1 \Rightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$.

3. Si los términos 2, x, y, 1/4 están en progresión geométrica, entonces $y = 1/2$.

F	V

La razón de la progresión es $x/2$, con lo que $y = x \cdot x/2 = x^2/2$.
Ahora, dado que $1/4 = (x^2/2) \cdot (x/2)$, se tiene que $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1/2$.

4. Si los términos 3, x, y, 8/9 están en progresión geométrica, entonces $x + y = 8/3$.

F	V

La razón de la progresión es $x/3$, con lo que $y = x \cdot x/3 = x^2/3$
Ahora, dado que $8/9 = x^3/9$, se tiene que $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4/3 \Rightarrow x + y = 10/3$.

5. Al simplificar $\dfrac{(5!)(3!)}{(4!)(2!)}$, el resultado es 15.

F	V

Se desarrollan los factoriales y se simplifica, así: $\dfrac{5! \cdot 3!}{4! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4!} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{2!}} = 15$.

6. Al simplificar $\dfrac{C_{5,3}}{C_{4,2}}$, el resultado es 5/3.

F	V

Se calculan los números combinatorios, así:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}!\cdot 2} = 10;$$
$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}!}{\cancel{2}!\cdot 2} = 6.$$

se concluye que el cociente es 5/3.

7. El resultado de evaluar la suma $\sum_{k=0}^{3}(-1/2)^k$ es 5/8.

F	V

$$\sum_{k=0}^{3}(-1/2)^k = (-1/2)^0 + (-1/2)^1 + (-1/2)^2 + (-1/2)^3$$
$$= 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 = 5/8.$$

8. Al desarrollar el binomio $(1-\sqrt{2})^3$, el resultado es $7 + 5\sqrt{2}$.

F	V

$$(1-\sqrt{2})^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 1\cdot\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3$$
$$= 1 - 3\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}.$$

9. El tercer término del desarrollo de $(x-\sqrt{2})^4$ es de tercer grado.

F	V

A partir de la fórmula, el tercer término de la expansión del binomio es de segundo grado: $C_{4,2}(x)^{4-2}(-\sqrt{2})^2 = C_{4,2}\cdot 2x^2$.

10. La suma de los números naturales pares menores o iguales que 24 es 312.

F	V

Se trata de una progresión aritmética con 12 términos, siendo 2 el primer término. Aplicando la fórmula de la suma, se tiene:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Rightarrow S_{12} = 12\cdot 2 + \frac{12\cdot 11}{2}\cdot 2 = 156.$$

11. Al simplificar $\dfrac{C_{5,2}}{C_{5,3}}$, el resultado es 1.

F	V

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \Rightarrow \binom{5}{3} = \binom{5}{2} \Rightarrow \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3!\cdot 2!}{5!}.$$

12. Al simplificar $\dbinom{6}{3} - \dbinom{4}{2}$, el resultado es 14.

F	V

Desarrollando los números combinatorios, se tiene:

$$\binom{6}{3} - \binom{4}{2} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} - \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 20 - 6 = 14.$$

13. Al simplificar $\dbinom{n}{1} - \dbinom{n-1}{2}$, el resultado es $\dfrac{n-1}{2}$.

F	V

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} &= \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} - \frac{(n-1)!}{2!\cdot(n-3)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)!}{1!\cdot(n-1)!} - \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{2!\cdot(n-3)!}\\ &= n - \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2!} = \frac{2n-(n^2-3n+2)}{2}\\ &= \frac{-n^2+5n-2}{2}.\end{aligned}$$

14. Al simplificar $\dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{3}$, el resultado es $\dfrac{n^3+n}{6}$.

F	V

$$\begin{aligned}\binom{n}{2} + \binom{n}{3} &= \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} + \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)(n-2)!}{2!\cdot(n-2)!} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{3!\cdot(n-3)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)}{2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)}{2}\left(1 + \frac{n-2}{3}\right) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

15. Si $\binom{n}{6} = \binom{n}{4}$, entonces $n = 10$.

F	V

$$\frac{n!}{6!\cdot(n-6)!} - \frac{n!}{4!\cdot(n-4)!} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{n!}{6\cdot 5\cdot 4!\cdot(n-6)!} - \frac{n!}{4!\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)!} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{n!}{4!\cdot(n-6)!}\left(\frac{1}{6\cdot 5} - \frac{1}{(n-4)\cdot(n-5)}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$n^2 - 9n + 20 - 30 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+1) = 0 \Rightarrow n = 10.$$

B. Escogencia múltiple

Debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. El término n-ésimo de una sucesión es $\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$; por lo tanto, el tercer elemento es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 5.

   El procedimiento es el siguiente:

$$a_3 = \frac{(1+\sqrt{5})^3 - (1-\sqrt{5})^3}{2^3\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow$$
$$= \frac{(1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot 1\cdot\sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^3) - (1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot 1\cdot\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3)}{8\cdot\sqrt{5}}$$
$$= \frac{(1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}) - (1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5})}{8\cdot\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{8\cdot\sqrt{5}} = 2.$$

2. El primer término de una sucesión es $a_1 = 1/2$ y los demás se generan mediante la fórmula recursiva $a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}$, con $n \geq 1$. El cuarto elemento de la sucesión es:

   a. 6/7.
   b. 14/13.
   c. 21/2.
   d. 54/53.

El procedimiento es el siguiente:

$$a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{1+1/2} = 4/3 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{1+4/3} = 6/7 \Rightarrow$$
$$a_4 = \frac{2}{1+6/7} = 14/13.$$

3. Cuando se desarrolla el binomio $(1-\sqrt{5})^4$, el resultado es:

   a. $56 + 24\sqrt{5}$.
   b. $-56 + 24\sqrt{5}$.
   c. $56 - 24\sqrt{5}$.
   d. $-56 - 24\sqrt{5}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{5})^4 &= 1^4 - 4\cdot 1^3\cdot\sqrt{5} + 6\cdot 1^2\cdot\sqrt{5}^2 - 4\cdot 1\cdot\sqrt{5}^3 + \sqrt{5}^4\\ &= 1 - 4\sqrt{5} + 30 - 20\sqrt{5} + 25 = 56 - 24\sqrt{5}.\end{aligned}$$

4. El término n-ésimo de una sucesión es $a_n = \frac{n!}{2^n}$; por lo tanto, el cociente a_{n+1}/a_n es:

   a. $2\cdot(n+1)$.
   b. $n+1$.
   c. $(n+1)/2$.
   d. $2n+1$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$a_{n+1}/a_n = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{(n+1)!\cdot 2^n}{n!\cdot 2^{n+1}} = \frac{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n}{n!\cdot 2\cdot 2^n} = \frac{n+1}{2}.$$

5. Una cantidad P de dinero se invierte con una tasa de interés compuesto anual r, de tal manera que al cabo de n años la cantidad futura es $F(n) = P\,(1+r)^n$. Sabiendo que la tasa de interés es $r = 0.2$, al cabo de seis años la cantidad futura es, aproximadamente:

   a. El doble de la invertida.
   b. El triple de la invertida.
   c. El cuádruplo de la invertida.
   d. El quíntuplo de la invertida.

El procedimiento es el siguiente:

$$F(n) = P(1 + r)^n \Rightarrow F(6) = P(1.2)^6 \cong 3P.$$

Los ejercicios 6 y 7 hacen referencia a la siguiente situación: una cantidad a es directamente proporcional a una cantidad b si se verifica que $a = kb$. La constante de proporcionalidad es k.

6. Sabiendo que $b = 24$ cuando $a = 60$, el valor de b cuando $a = 12$ es:

   a. 4.8.
   b. 7.2.
   c. 20.
   d. 24.

   El procedimiento es el siguiente: primero se calcula el valor de k, así: $k = a/b = 60/24 = 5/2$. Si $a = 12 \Rightarrow b = a/k = 12/(5/2) = 24/5 = 4.8$.

7. Sabiendo que $b = x$ cuando $a = 5x$, el valor de b cuando $a = 12x$ es:

   a. $2.4x$.
   b. 2.4.
   c. $1.2x$.
   d. 1.2.

   El procedimiento es el siguiente: primero se calcula el valor de k, así: $5x/x = 5$.
   Si $a = 12x \Rightarrow b = 12x/5 = 2.4x$.

Los ejercicios 8 y 9 hacen referencia a la siguiente situación: una cantidad a es inversamente proporcional a una cantidad b si se verifica que $a = k/b$. La constante de proporcionalidad es k.

8. Sabiendo que $b = 4.5$ cuando $a = 1.4$, el valor de a cuando $b = 1.5$ es:

   a. 14/3.
   b. 3/14.
   c. 21/2.
   d. 5/21.

   El procedimiento es el siguiente: primero se calcula el valor de k, así:

   $$k = a \cdot b = (9/2) \cdot (7/2) = 63/4. \text{ Si } b = 3/2 \Rightarrow a = k/b = (63/4)(3/2) = 21/2.$$

9. Sabiendo que $b = x$ cuando $a = 5x$, el valor de b cuando $a = 12x$ es:

   a. $5x/12$.
   b. $5/12x$.
   c. $12/5x$.
   d. $12x/5$.

   El procedimiento es el siguiente: primero se calcula el valor de k, así: $k = a \cdot b = 5x^2$. Si $a = 12x \Rightarrow\ b = k/a = 5x^2/12x = 5x/12$.

10. El décimo término de la progresión aritmética 22, 19, 16, ... es:

   a. -15.
   b. -10.
   c. -5.
   d. 0.

   El procedimiento es el siguiente: la razón es $d = 19 - 22 = -3$, con lo que el décimo término es $a_{10} = 22 + 9 \cdot\ (-3) = -5$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a						■	■		■	
b	■	■			■					
c			■	■				■		■
d										

Soluciones para el módulo 3: Fundamentos de álgebra

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Al simplificar la expresión $2 - [x - (1 - x) + (2 - x)]$ se obtiene $1 - x$.

F	V
	■

Al simplificar se tiene:

$$2 - [x - (1 - x) + (2 - x)] = 2 - x + (1 - x) - (2 - x) = 2 - x + 1 - x - 2 + x = 1 - x.$$

2. Al simplificar la expresión $\dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 2}$ se obtiene $\dfrac{2 + x}{x + 1}$.

F	V
■	

Al simplificar se tiene:

$$\frac{4 - x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{(2 + x)(2 - x)}{(x - 2)(x + 1)} = -\frac{(2 + x)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} = -\frac{x + 2}{x + 1} \text{ si } x \neq 2.$$

3. Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} \div \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6}$ se obtiene $\dfrac{1 + x}{x - 1}$.

F	V
■	

Al simplificar se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} \div \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} \cdot \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x + 1)} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 2)} \text{ si } x \neq -1, 3. \end{aligned}$$

4. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x}{\sqrt{y} + \sqrt{x + y}}$ se obtiene $\sqrt{x + y} - \sqrt{y}$.

F	V
■	

Al simplificar se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{y} + \sqrt{x + y}} &= \frac{x(\sqrt{y} - \sqrt{x + y})}{(\sqrt{y} + \sqrt{x + y})(\sqrt{y} - \sqrt{x + y})} \\ &= \frac{x(\sqrt{y} - \sqrt{x + y})}{y - (x + y)} = \frac{x(\sqrt{y} - \sqrt{x + y})}{-x}. \end{aligned}$$

5. El factor racionalizante de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}$ es $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}$.

F	V

El factor racionalizante es $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}$.

6. Al simplificar $\left(\dfrac{9-x^2}{x^2-x-2}\right)\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}\right)$, el resultado es 1.

F	V

$$\begin{aligned}\left(\frac{9-x^2}{x^2-x-2}\right)\left(\frac{x^2-4}{x^2-x-6}\right) &= \left(\frac{(3+x)(3-x)}{(x-2)(x+1)}\right)\left(\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)}\right)\\ &= \frac{-(3+x)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{-(x+3)}{x+1} \text{ si } x \neq -2, 2, 3.\end{aligned}$$

7. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x-4}{2-\sqrt{2x-4}}$ se obtiene $-(2+\sqrt{2x-4})/2$.

F	**V**

$$\begin{aligned}\frac{x-4}{2-\sqrt{2x-4}} &= \frac{x-4}{2-\sqrt{2x-4}}\cdot\frac{2+\sqrt{2x-4}}{2+\sqrt{2x-4}} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{2x-4})}{4-(2x+4)}\\ &= \frac{(x-4)(2+\sqrt{2x-4})}{-2x+8} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{2x-4})}{-2(x-4)}\\ &= \frac{(2+\sqrt{2x-4})}{-2},\ x \neq 4.\end{aligned}$$

8. El factor racionalizante de $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$ es $1-\sqrt[3]{2}$.

F	V

El factor racionalizante es $1+\sqrt[3]{2}$.

9. El factor racionalizante de $\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x+2}}$ es $1+\sqrt[3]{x+2}$.

F	V

El factor racionalizante es $1+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

10. El factor racionalizante de $\dfrac{5}{\sqrt[4]{x-1}}$ es $\sqrt[4]{(x-1)^3}$.

F	V

$\sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot \sqrt[4]{(x-1)} = x - 1.$

11. Al factorizar completamente la expresión $xy^3 - x^4$, uno de los factores es $x^2 - xy + y^2$.

F	V

$xy^3 - x^4 = x(y^3 - x^3) = x(y - x)(y^2 + xy + x^2).$

12. Al factorizar completamente la expresión $2x^2y^4 + 7xy^2 + 3$, uno de los factores es $xy^2 + 3$.

F	V

$2x^2y^4 + 7xy^2 + 3 = (2xy^2 + 1)(xy^2 + 3).$

13. Al factorizar completamente la expresión $4x^4 + 4x^2y^2 - x^2y^4 - y^6$, uno de los factores es $y^2 + 2x$.

F	V

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^2y^2 - x^2y^4 - y^6 &= 4x^2(x^2 + y^2) - y^4(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(4x^2 - y^4) \\ &= (x^2 + y^2)(2x - y^2)(2x + y^2). \end{aligned}$$

14. Al factorizar completamente la expresión $x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4$, uno de los factores es $x^2 - xy + y^2$.

F	V

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - x^2y^2) = (x^2 + 2y^2 + xy)(x^2 + 2y^2 - xy). \end{aligned}$$

15. Al simplificar la expresión $1 + x + x^2 - \dfrac{x^3}{x+1}$, el resultado es $\dfrac{1 + x^2}{1 + x}$.

F	V

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{x+1} &= \frac{(1 + x + x^2)(x + 1) - x^3}{x + 1} \\ &= \frac{x + 1 + x^2 + x + x^3 + x^2 - x^3}{x + 1} = \frac{1 + 2x + 2x^2}{x + 1}. \end{aligned}$$

16. Al simplificar la expresión $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{x+1}$, el resultado es $\dfrac{1}{1+x}$.

F	V

$$1-x+x^2-\frac{x^3}{x+1}=\frac{(1+x)(1-x+x^2)-x^3}{x+1}=\frac{1+x^3-x^3}{x+1}=\frac{1}{x+1}.$$

17. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right)\div\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}\right)$, el resultado es -2.

F	V

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)\div\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right)\\&=\left(\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right)\div\left(\frac{(x-1)x-(x+1)x}{(x-1)(x+1)}\right)\\&=\left(\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}\right)\div\left(\frac{x^2-x-x^2-x}{(x-1)(x+1)}\right)\\&=\left(\frac{4x}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\left(\frac{(x-1)(x+1)}{-2x}\right)=-2.\end{aligned}$$

18. Al simplificar la expresión $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-2}$, el resultado es $\dfrac{-2}{x-2}$.

F	V

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{x^2-3x+2}+\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}+\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}\\&=\frac{1+x(x-2)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{1+x^2-2x-x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{2-2x}{(x-1)(x-2)}\\&=-\frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2}{x-2}.\end{aligned}$$

19. Al simplificar la expresión $\dfrac{\dfrac{2y}{3x-2y}+1}{\dfrac{2x+2y}{3x-2y}+1}$, el resultado es $\dfrac{1}{2x}$.

F	V

$$\frac{\dfrac{2y}{3x-2y}+1}{\dfrac{2x+2y}{3x-2y}+1}=\frac{\dfrac{2y+3x-2y}{3x-2y}}{\dfrac{2x+2y+3x-2y}{3x-2y}}=\frac{2y+3x-2y}{2x+2y+3x-2y}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

20. Al simplificar la expresión $\dfrac{\dfrac{1}{x^3+y^3}}{1-\dfrac{x}{x+\dfrac{y^2}{x-y}}}$, el resultado es $\dfrac{1}{y^2(x+y)}$.

F	V

$$\frac{\frac{1}{x^3+y^3}}{1-\frac{x}{x+\frac{y^2}{x-y}}}=\frac{\frac{1}{x^3+y^3}}{1-\frac{x}{\frac{x(x-y)+y^2}{x-y}}}=\frac{\frac{1}{x^3+y^3}}{1-\frac{x(x-y)}{x^2-xy+y^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{x^3+y^3}}{\frac{x^2-xy+y^2-x(x-y)}{x^2-xy+y^2}}=\frac{\frac{1}{x^3+y^3}}{\frac{y^2}{x^2-xy+y^2}}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{y^2(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{1}{y^2(x+y)}.$$

B. Escogencia múltiple

Debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Al simplificar la expresión $\left(x-\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{x^3+1}\right)$, el resultado es:

   a. 1.
   b. x.
   c. $x/(x+1)$.
   d. $1/(x+1)$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\left(x-\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{x^3+1}\right)=\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)\left(\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=\frac{1}{x+1}.$$

2. Uno de los factores de la expresión $4xy^2-x^3y^4$ es:

   a. x^2.
   b. y^3.
   c. $xy+2$.
   d. $4+x^2y^2$.

El procedimiento es el siguiente:

$$4xy^2 - x^3y^4 = xy^2(4 - x^2y^2) = xy^2(2 + xy)(2 - xy).$$

3. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{y - 2x^2 - x\sqrt{y}}{y - 4x^2}$.

   b. $\dfrac{y + 2x^2 + 3x\sqrt{y}}{y - 4x^2}$.

   c. $\dfrac{y - 2x^2 + x\sqrt{y}}{y - 4x^2}$.

   d. $\dfrac{y - 2x^2 - x\sqrt{y}}{y + 4x^2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x} = \frac{x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}\cdot\frac{\sqrt{y}+2x}{\sqrt{y}+2x} = \frac{x\sqrt{y}+2x^2+y+2x\sqrt{y}}{y-4x^2} = \frac{3x\sqrt{y}+2x^2+y}{y-4x^2}.$$

4. Al simplificar la expresión $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+2}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$.

   b. $\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}$.

   c. $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$.

   d. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x+2} &= \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}\\ &= \frac{x-1+x(x+2)-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{x-1+x^2+2x-x^2-2x-1}{(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{x-2}{x^2+3x+2}.\end{aligned}$$

5. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)$, el resultado es:

   a. x.
   b. $-x$.
   c. $1/x$.
   d. $-1/x$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{x}{x^2-(x^2-1)}=x.$$

6. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)$, el resultado es:

   a. $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.
   b. $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.
   c. $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.
   d. $\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)&=\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\div\left(\frac{x^3-y^3}{xy}\right)\\&=\left(\frac{(x-y)(x+y)}{xy}\right)\cdot\left(\frac{xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\right)=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}.\end{aligned}$$

7. Al simplificar la expresión $x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{x+\dfrac{1}{x}}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{-1}{x^3+x}$.
   b. $\dfrac{1}{x^3+x}$.
   c. $\dfrac{-2x^4}{x^3+x}$.
   d. $\dfrac{2x^4}{x^3+x}$.

El procedimiento es el siguiente:

$$x-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x+\frac{1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}-\frac{x^2}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}-\frac{x^3}{x^2+1}$$
$$=\frac{(x^2-1)(x^2+1)-x^4}{x(x^2+1)}$$
$$=\frac{x^4-1-x^4}{x(x^2+1)}=\frac{-1}{x(x^2+1)}.$$

8. Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2y^3-x^3y^2}{2x^3-x^2y-xy^2}$, el resultado es:

   a. $\dfrac{xy^2}{y+2x}$.
   b. $\dfrac{x^2y^2}{y+2x}$.
   c. $\dfrac{-xy^2}{y+2x}$.
   d. $\dfrac{-x^2y^2}{y+2x}$.

El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{x^2y^3-x^3y^2}{2x^3-x^2y-xy^2}=\frac{x^2y^2(y-x)}{x(2x^2-xy-y^2)}=\frac{x^2y^2(y-x)}{x(x-y)(2x+y)}=\frac{x^2y^2}{x(2x+y)}$$
$$=\frac{xy^2}{2x+y}.$$

9. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$, el resultado es:

   a. $-x$.
   b. x.
   c. -1.
   d. 1.

El procedimiento es el siguiente:

$$\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\div\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)$$
$$=\frac{x}{x^2-(x^2-1)}=x.$$

10. Al simplificar la expresión $\dfrac{(x-1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}$, el resultado es:

   a. $(\sqrt{x}-1)/(x+1)$.
   b. $(\sqrt{x}+1)/(x+1)$.
   c. $(\sqrt{x}-1)/(x-1)$.
   d. $(\sqrt{x}+1)/(x-1)$.

El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}.$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Soluciones para el módulo 4: Polinomios en una variable y ecuaciones polinómicas

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Si $P(x) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k x^k/(k+1)$, entonces $P(2) = 5/3$.

F	V
F	

Primero que todo se expande el polinomio, así:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k x^k/(k+1) = \frac{(-1)^0 x^0}{0+1} + \frac{(-1)^1 x^1}{1+1} + \frac{(-1)^2 x^2}{2+1}$$
$$= 1 - x/2 + x^2/3.$$

Evaluando en $x = 2$, se tiene: $P(2) = 1 - 1 + 4/3 = 4/3$.

2. La solución de la ecuación $2x - 3 = 4(x - 2)$ es $5/2$.

F	V
	V

Se procede de la siguiente manera:

$$2x - 3 = 4(x-2) \Rightarrow 2x - 3 = 4x - 8 \Rightarrow -3 + 8$$
$$= 4x - 2x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 5/2.$$

3. La solución de la ecuación $\frac{3x-2}{2} - \frac{x+1}{3} = 2x + 1$ es $14/5$.

F	V
F	

$$\frac{3x-2}{2} - \frac{x+1}{3} = 2x + 1 \Rightarrow 3(3x-2) - 2(x+1)$$
$$= 2x + 1 \Rightarrow 9x - 6 - 2x - 2 - 2x - 1$$
$$= 0 \Rightarrow 5x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9/5.$$

4. La ecuación $6x^2 + x - 2 = 0$ tiene raíces reales distintas.

F	V
	V

Se calcula el discriminante, así: $Disc = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$; puesto que el discriminante es positivo, las raíces son reales y diferentes.

5. La ecuación $x^2 + x + 2 = 0$ tiene raíces reales iguales.

F	V

Se calcula el discriminante, así: $Disc = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2) = -7$; puesto que el discriminante es negativo, las raíces son complejas conjugadas.

6. La suma de las raíces de la ecuación $2x^2 + 3x - 2 = 0$ es $3/2$.

F	V

Suma $= -b/a = -3/2$.

7. El producto de las raíces de la ecuación $3x^2 - 2x + 2 = 0$ es $2/3$.

F	V

Producto $= c/a = 2/3$.

8. La ecuación $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$ sólo tiene una raíz real.

F	V

Factorizando el polinomio se tiene:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) + 4(x-3) = 0 \Rightarrow$$
$$(x-3)(x^2+4) = 0.$$

9. La ecuación $x - 1 - \sqrt{x-1} = 0$ tiene como soluciones $x = 2$, $x = -1$.

F	V

Se desarrolla la ecuación de la siguiente manera:

$$x - 1 - \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow (x-1) = \sqrt{x-1} \Rightarrow$$
$$(x-1)^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - x + 1 \Rightarrow$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2.$$

10. La gráfica de $y = P(x) = x^2 + x + 1$ no corta al eje de abscisas.

F	V

$Disc = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$; puesto que el discriminante es negativo, la parábola no corta el eje de abscisas.

11. Un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$ es $2x - 1$.

F	V

Evaluamos el polinomio en $x = 1/2$, así:

$$P(1/2) = 4(1/2)^3 + 5(1/2)^2 + 1/2 - 2 = 4/8 + 5/4 + 1/2 - 2 = 1/4.$$

Con base en el teorema del residuo, $2x - 1$ no es un factor.

12. El resto de dividir $4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ entre $x + 1$ es 4.

F	V

Evaluamos el polinomio en $x = -1$, así:

$$P(-1) = 4(-1)^3 - 2(-1)^2 + 5(-1) - 3 = -4 - 2 - 5 - 3 = -14.$$

Con base en el teorema del residuo, el resto es -14.

13. El polinomio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$ tiene al menos un cero real.

F	V

Es verdad desde el punto de vista conceptual.
Todo polinomio de grado impar tiene, al menos, una raíz real.

14. El vértice de la parábola $P(x) = 2x^2 - x - 3$ está en el primer cuadrante.

F	V

Se calcula el vértice, así:

$$h = -b/2a = 1/4 \Rightarrow k = 2(1/4)^2 - (1/4) - 3 = 1/8 - 1/4 - 3 = -25/8.$$

Se concluye que el vértice está en el tercer cuadrante.

15. La parábola $P(x) = 2x^2 - x + 3$ no corta al eje de abscisas.

F	V

Es cierto que no corta al eje de abscisas ya que:

$$Disc = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23.$$

16. El polinomio $P(x) = x^4 - 4$ tiene cuatro ceros reales.

F	V

Factorizando se tiene:

$$P(x) = x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Sólo tiene dos raíces reales: $\pm\sqrt{2}$.

17. El residuo de dividir $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$ por $x + 1$ es -3.

F	V

Evaluamos el polinomio en $x = -1$, así:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3 \Rightarrow P(-1) = -3 - 2 + 1 - 3 = -7$$

18. El polinomio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$ es divisible por $x + 2$.

F	V

Evaluando el polinomio en $x = -2$, así:

$$P(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) - 3 = -24 - 8 + 2 - 3 = -33.$$

19. El polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ tiene tres raíces en el campo de los enteros.

F	V

Factorizando el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)x(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, 2.$$

20. El polinomio $x^4 + 1$ no tiene raíces reales.

F	V

El polinomio no es factorizable en los reales.

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Con relación a la parábola $P(x) = 2 + x - x^2$, es falso que:

    a. Se abra hacia abajo.
    b. Tenga dos raíces racionales.
    c. La abscisa del vértice sea 1/2.
    d. La ordenada del vértice sea 2.

    La explicación es la siguiente:

    - La opción **a** es verdadera ya que *a* es negativa.
    - La opción **b** es verdadera ya que $P(x) = -(x^2 - x - 2) = -(x-2)(x+1)$, con lo que las dos raíces son 2, -1.
    - La abscisa del vértice es $h = -b/2a = -1/2(-1) = 1/2$, con lo que la opción **c** es verdadera.
    - La ordenada del vértice es $k = P(1/2) = 2 + 1/2 - 1/4 = 5/4$, con lo que la opción falsa es la **d**.

2. La ecuación $x + 1 = \sqrt{x^2 - 3}$:

    a. Tiene dos raíces reales.
    b. No tiene raíces.
    c. Tiene una raíz racional y una compleja.
    d. Tiene dos raíces complejas.

    El procedimiento es el siguiente:

    $$\begin{aligned} x + 1 = \sqrt{x^2 - 3} &\Rightarrow (x+1)^2 = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \\ &= x^2 - 3 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2, \end{aligned}$$

    pero x = -2 no satisface la ecuación.

3. La ecuación $x + 1 = \sqrt{2x^2 - 3}$ tiene:

    a. Una raíz real.
    b. Una raíz racional.
    c. Una raíz racional y una compleja.
    d. Dos raíces complejas.

El procedimiento es el siguiente:

$$x + 1 = \sqrt{2x^2 - 3} \Rightarrow (x + 1)^2$$
$$= 2x^2 - 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5},$$

pero $1 - \sqrt{5}$ no satisface la ecuación.

4. La ecuación $x + 1 = |3x + 2|$ tiene:

   a. Dos raíces racionales.
   b. Una raíz racional y otra irracional.
   c. Una raíz racional y una compleja.
   d. Dos raíces complejas.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$x + 1 = |3x + 2| \Rightarrow$$

   (a). Si $3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x + 1 = 3x + 2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -1/2$.
   Cumple que $3(-1/2) + 2 = 1/2 > 0$.

   (b). Si $3x + 2 < 0 \Rightarrow x + 1 = -3x - 2 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -3/4$.
   Cumple que $3(-3/4) + 2 = -1/4 < 0$. Por lo tanto, las raíces son $-1/2$ y $-3/4$.

5. La ecuación $x - 3 = |2x + 4|$ tiene:

   a. Dos raíces racionales.
   b. Una raíz racional y otra irracional.
   c. Cero raíces.
   d. Dos raíces complejas.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$x - 3 = |2x + 4| \Rightarrow$$

   (a). Si $2x + 4 \geq 0 \Rightarrow x - 3 = 2x + 4 \Rightarrow x = -7$.
   No cumple porque $2(-7) + 4 = -1 < 0$.

   (b). Si $2x + 4 < 0 \Rightarrow x - 3 = -2x - 4 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -1/3$.
   No cumple porque $2(-1/3) + 4 = 10/3 > 0$. Por lo tanto, no tiene raíces.

6. La ecuación $x - 3 = |2x - 4|$ tiene:

   a. Dos raíces racionales.
   b. Una raíz racional y otra irracional.
   c. Una raíz racional y una compleja.
   d. Cero raíces.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$x - 3 = |2x - 4| \Rightarrow$$

   (a). Si $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x - 3 = 2x - 4 \Rightarrow x = 1$.
   No cumple porque $2(1) - 4 = -2 < 0$.

   (b). Si $2x - 4 < 0 \Rightarrow x - 3 = -2x + 4 \Rightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = 7/3$.
   No cumple porque $2(7/3) - 4 = 2/3 > 0$. Por lo tanto, no tiene raíces.

Las preguntas 7-10 hacen referencia al polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 16x + 15$.

7. El número de raíces racionales del polinomio es:

   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. 3.

   El procedimiento consiste en hacer los siguientes razonamientos:

   (a). El polinomio no tiene raíces positivas ya que al evaluarlo en un número positivo el residuo es positivo, es decir, nunca es cero.
   (b). Se prueba con las posibles raíces reales negativas, así:

   $$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 + 7(-1)^2 + 16(-1) + 15 \\ &= -2 + 7 - 16 + 15 = 4, \\ P(-2) &= 2(-2)^3 + 7(-2)^2 + 16(-2) + 15 \\ &= -16 + 28 - 32 + 15 = -5. \end{aligned}$$

   Puesto que hay un cambio de signo en el residuo entre $x = -2$ y $x = -1$, se prueba con $-3/2$, así:

   $$\begin{aligned} P(-3/2) &= 2(-3/2)^3 + 7(-3/2)^2 + 16(-3/2) + 15 \\ &= -54/8 + 63/4 - 48/2 + 15 = 0. \end{aligned}$$

Efectuamos división sintética con $-3/2$ y se obtiene que:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + 7x^2 + 16x + 15 = (x + 3/2)(2x^2 + 4x + 10) \\ &= (2x + 3)(x^2 + 2x + 5). \end{aligned}$$

(c). Puesto que el discriminante del factor cuadrático es negativo, se concluye que dos de las raíces del polinomio son complejas conjugadas.

8. El residuo de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 4.

   Se usa el desarrollo anterior.

9. El cociente de dividir el polinomio por $2x + 3$ es:

   a. $x^2 + 2x + 3$.
   b. $x^2 + 2x + 4$.
   c. $x^2 + 2x + 5$.
   d. $x^2 + 2x + 6$.

   Se usa el desarrollo anterior.

10. El cociente de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

    a. $2x^2 + 5x + 11$.
    b. $2x^2 + 5x + 12$.
    c. $2x^2 + 5x + 13$.
    d. $2x^2 + 5x + 14$.

    Se efectúa la división sintética.

Las preguntas 11-15 hacen referencia al polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x + 5$.

11. El residuo de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

    a. 0.
    b. 1.
    c. 2.
    d. 3.

    El procedimiento consiste en efectuar la división sintética o usar el teorema del residuo.

12. El residuo de dividir el polinomio por $x - 1$ es:

    a. 0.
    b. 1.
    c. 2.
    d. 3.

    El procedimiento consiste en efectuar la división sintética o usar el teorema del residuo.

13. El cociente de dividir el polinomio por $x + 2$ es:

    a. $x^3 - 4x^2 - 2x + 2$.
    b. $x^3 - 4x^2 - 2x - 2$.
    c. $x^3 - 4x^2 + 2x + 2$.
    d. $x^3 - 4x^2 + 2x - 2$.

    El procedimiento consiste en efectuar la división sintética.

14. El cociente de dividir el polinomio por $x - 2$ es:

    a. $x^3 - 6x + 10$.
    b. $x^3 - 6x - 10$.
    c. $x^3 + 6x - 10$.
    d. $x^3 + 6x + 10$.

    El procedimiento consiste en efectuar la división sintética.

15. El número de raíces reales del polinomio es:

    a. 1.
    B. 2.
    c. 3.
    d. 4.

    Puesto que ± 1 son raíces reales, $x^2 - 1$ es un factor cuadrático. Al hacer la división se encuentra que el otro factor cuadrático es $x^2 - 2x - 5$ cuyo discriminante es positivo. En conclusión, el polinomio tiene cuatro raíces reales.

Las preguntas 16-20 hacen referencia al polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 5$.

16. El residuo de dividir el polinomio por $x + 1$ es:

 a. 0.
 b. 1.
 c. 2.
 d. 3.

 El procedimiento consiste en efectuar la división sintética o usar el teorema del residuo.

17. El residuo de dividir el polinomio por $x - 1$ es:

 a. 0.
 b. 1.
 c. 2.
 d. 3.

 El procedimiento consiste en efectuar la división sintética o usar el teorema del residuo.

18. El cociente de dividir el polinomio por $x + 2$ es:

 a. $x^3 - 4x^2 - 12x + 22$.
 b. $x^3 - 4x^2 + 12x + 22$.
 c. $x^3 - 4x^2 + 12x - 22$.
 d. $x^3 - 4x^2 - 12x - 22$.

 El procedimiento consiste en efectuar la división sintética.

19. El cociente de dividir el polinomio por $x - 2$ es:

 a. $x^3 - 4x + 10$.
 b. $x^3 - 4x - 10$.
 c. $x^3 + 4x - 10$.
 d. $x^3 + 4x + 10$.

 El procedimiento consiste en efectuar la división sintética.

20. El número de raíces reales del polinomio es:

 a. 1.
 b. 2.
 c. 3.
 d. 4.

 Puesto que ± 1 son raíces reales, $x^2 - 1$ es un factor cuadrático. Al hacer la división se encuentra que el otro factor cuadrático es $x^2 - 2x - 5$ cuyo discriminante es negativo. En conclusión, el polinomio tiene dos raíces reales y dos complejas conjugadas.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a										
b										
c										
d										

Soluciones para el módulo 5: Fracciones

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Un polo de la fracción $\dfrac{x-1}{x^2-2x-8}$ es $x=2$.

F	V

Al factorizar el denominador, resulta: $den = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$; los polos son $4, -2$.

2. Un cero de la fracción $\dfrac{x^2-x-2}{2x^3-x^2+2x-1}$ es $x=-1$.

F	V

Al factorizar el numerador, resulta: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$; los ceros son $2, -1$.

3. La fracción $\dfrac{x-8}{x^2-x-6}$ es equivalente a $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}$.

F	V

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{x-8}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow$$
$$A(x+2)+B(x-3)=x-8\Rightarrow$$
$$a+B=1,\ 2A-3B=-8\Rightarrow A=-1,\ B=2\Rightarrow$$
$$\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}.$$

4. La fracción $\dfrac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 6}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x+1}$.

F	V

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} = \frac{2x^2 + x - 2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow$$
$$Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = 2x^2 + x - 2 \Rightarrow$$
$$A + C = 2, -A + B = 1, -B = -2 \Rightarrow$$
$$B = 2, A = 1, C = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1}.$$

5. La fracción $\dfrac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4}$ no tiene polos reales.

F	V

El discriminante del denominador es: $Disc = 4 - 16 = -12$.
Los polos son complejos conjugados.

6. Los ceros de la fracción $\dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 1}$ son 0, 1, -2.

F	V

Factorizando el numerador, se tiene:

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{x^2 + 1} = \frac{x(x-1)(x+2)}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

Los ceros son 0, 1, -2.

7. Los polos de la fracción $\dfrac{x^3 + 8}{x^3 - x}$ son 0, 1, -1.

F	V

Se factoriza el denominador, así:

$$\frac{x^3 + 8}{x^3 - x} = \frac{x^3 + 8}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^3 + 8}{x(x-1)(x+1)}.$$

Los polos son 0, 1, -1.

8. La fracción $\dfrac{x^3}{x^2-4}$ es equivalente a $x+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}$.

F	V

Primero se efectúa la división, así:

$$\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{4x}{x^2-4}.$$

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{4x}{x^2-4}=\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow A(x+2)+B(x-2)\Rightarrow 4x\Rightarrow$$
$$A+B=4,2A-2B=0\Rightarrow A=2,B=2\Rightarrow\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}.$$

9. La fracción $\dfrac{x^2+1}{x^2-x-6}$ es equivalente a $1+\dfrac{9/5}{x-3}-\dfrac{4/5}{x+2}$.

F	V

Primero se efectúa la división, así:

$$\frac{x^2+1}{x^2-x-6}=1+\frac{x+7}{x^2-x-6}.$$

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}=\frac{x+7}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow A(x+2)+B(x-3)$$
$$=x+7\Rightarrow A+B=1,2A-3B=7\Rightarrow A=2,B=1\Rightarrow$$
$$\frac{x^2+1}{x^2-x-6}=1+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+2}.$$

10. La fracción $\dfrac{4}{x^4+4x^2}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+4}$.

F	V

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{4}{x^4+4x^2}=\frac{4}{x^2(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\Rightarrow$$
$$Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2=4\Rightarrow$$
$$A+C=0,B+D=0,4A=0,4B=4\Rightarrow A=0,B=1,C=0,D=-1\Rightarrow$$
$$\frac{4}{x^4+4x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+4}.$$

11. El cociente de dividir $3x^3 + x - 1$ entre $x^2 + 3x$ es $3x - 9$.

F	V

Se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +0x^2 & +x & +1 & x^2+3x \\ \cline{5-5} -3x^3 & -9x^2 & & & 3x-9 \\ \cline{1-4} / & -9x^2 & +x & -1 & \\ & 9x^2 & +27x & & \\ \cline{2-4} & & 28x & -1 & \end{array}$$

Cociente: $3x - 9$.
Residuo: $28x - 1$.

12. El residuo de dividir $3x^3 + x - 1$ entre $x^2 + 3x$ es $28x$.

F	V

El residuo de la división es $28x - 1$.

13. La fracción $\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ es equivalente a $x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}$.

F	V

Efectuando paso a paso las divisiones, se tiene:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{\dfrac{x^2 + 1}{x}} = x + \frac{1}{x + \dfrac{1}{x}}.$$

14. La fracción $\dfrac{4}{x^4 - 16x^2 + 16}$ se puede expresar mediante las fracciones parciales $\dfrac{A}{(x+2)^2} + \dfrac{B}{(x-2)^2}$.

F	V

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^4 - 8x^2 + 16} &= \frac{4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4}{(x-2)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

15. La fracción $\dfrac{3x^3+2x+6}{x^4+2x^2+1}$ se puede expresar mediante las fracciones parciales $\dfrac{A}{x^2+1}+\dfrac{Bx}{(x^2+1)^2}$.

F	V

Mediante el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{3x^3+2x+6}{x^4+2x^2+1}=\frac{3x^3+2x+6}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Uno de los polos de la fracción $\dfrac{x^2+2x+5}{x^3-4x^2-x+4}$ es:

   a. $0+j1$.
   b. $0-j1$.
   c. $4+j0$.
   d. $-4+j10$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{x^2+2x+5}{x^3-4x^2-x+4}=\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-4)-(x-4)}=\frac{x^2+2x+5}{(x^2-1)(x-4)}$$
$$=\frac{x^2+2x+5}{(x-1)(x+1)(x-4)}.$$

   Se sigue que $4+j0$ es un polo.

2. Uno de los ceros de la fracción $\dfrac{x^2+2x+5}{x^3-4x^2-x+4}$ es:

   a. $1+j2$.
   b. $-1-j2$.
   c. $-1+j3$.
   d. $-1-j3$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$x^2+2x+5=0 \Rightarrow \text{raíces } -1\pm j2.$$

   Se sigue que $-1-j2$ es un cero.

3. El residuo de dividir $3x^3 + 3x^2 - 1$ entre $x^2 + 3x$ es:

   a. $-18x - 1$.
   b. $-18x + 1$.
   c. $18x - 1$.
   d. $18x + 1$.

   Se aplica el algoritmo de la división

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +3x^2 & +0x & -1 & x^2+3x \\ \cline{5-5} -3x^3 & -9x^2 & & & 3x-6 \\ \cline{1-4} / & -6x^2 & +0x & -1 & \\ & 6x^2 & +18x & & \\ \cline{2-4} & & 18x & -1 & \end{array}$$

   Cociente: $3x - 6$.
   Residuo: $18x - 1$.

4. El cociente de dividir $3x^3 + 3x^2 - 1$ entre $x^2 + 3x$ es:

   a. $3x - 6$.
   b. $3x + 6$.
   c. $-3x - 6$.
   d. $-3x + 6$.

   Se tiene en cuenta el procedimiento previo.

5. Una de las fracciones parciales asociadas a la fracción $\dfrac{3x^3 + 2x + 6}{x^4 + 2x^2 + 1}$ es:

   a. $\dfrac{A}{x^2 + 1}$.
   b. $\dfrac{A}{(x^2 + 1)^2}$.
   c. $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2}$.
   d. $\dfrac{Ax}{(x^2 + 1)^2}$.

   Factorizando el denominador y teniendo en cuenta el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{3x^3 + 2x + 6}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{3x^3 + 2x + 6}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)}.$$

6. Una de las fracciones parciales asociadas a la fracción $\dfrac{2x+3}{x^6-1}$ es:

   a. $\dfrac{A}{x^2-1}$.
   b. $\dfrac{A}{x^2+x+1}$.
   c. $\dfrac{Ax}{x^2+x+1}$.
   d. $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}$.

   Factorizando el denominador y teniendo en cuenta el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{2x+3}{x^6-1}=\frac{2x+3}{(x^3-1)(x^3+1)}=\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}\Rightarrow$$
$$\frac{2x+3}{x^6-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}.$$

7. La descomposición en fracciones parciales de la fracción $\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ es:

   a. $\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x}{x^2+2}$.
   b. $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{x}{x^2+2}$.
   c. $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+2}$.
   d. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+2}$.

   Factorizando el denominador y teniendo en cuenta el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}\Rightarrow$$
$$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)=x^3+x^2+x+2\Rightarrow$$
$$A+C=1, B+D=1, A+2C=1, B+2D=2\Rightarrow$$
$$A=1, B=0, C=0, D=1\Rightarrow\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+1}.$$

8. La descomposición en fracciones parciales de la fracción $\dfrac{3}{x^4+3x^2}$ es:

a. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+3}$.

b. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+3}$.

c. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+3}$.

d. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2+3}$.

Factorizando el denominador y teniendo en cuenta el procedimiento de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{3}{x^4+3x^2}=\frac{3}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}\Rightarrow$$
$$Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2=3\Rightarrow$$
$$A+C=0, B+D=0, 3A=0, 3B=3\Rightarrow B=1, A=0, C=0, D=-1\Rightarrow$$
$$\frac{3}{x^4+3x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x^2+3}.$$

9. La descomposición en fracciones parciales de la fracción $\dfrac{x^3-2x^2+x-1}{x^3+x}$ es:

a. $1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

b. $1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$.

c. $1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

d. $1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$.

Primero se hace la división, así:

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^3+x}=1-\frac{2x^2+1}{x^3+x}.$$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x}=\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\Rightarrow A(x^2+1)+(Bx+C)x=2x^2+1\Rightarrow$$
$$A+B=2, C=0, A=1\Rightarrow B=1\Rightarrow\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow$$
$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^3+x}=1-\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

10. La fracción continuada asociada a la fracción $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}$ es:

a. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$.

b. $x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$.

c. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

d. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$.

El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}=x+\frac{x^2+1}{x^3+2x}=x+\frac{1}{\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}}=x+\frac{1}{x^2+\dfrac{x}{x+1}}$$
$$=x+\frac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}.$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a				■				■	■	
b		■					■			
c	■		■		■					■
d						■				

Soluciones para el módulo 6: Sistemas de ecuaciones

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Las rectas del plano $x + y = 1$ y $2x - y = 0$ se cortan en el punto (1/3, 2/3).

F	V

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, se tiene:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 0 \\ \hline 3x & & & = & 1 \end{array}$$

$x = 1/3 \Rightarrow y = 2/3$.

2. La recta del plano $x - y = 2$ y la curva $x^2 - y = 4$ se cortan en el punto $(-3, 5)$.

F	V

Despejando x en la primera ecuación resulta $x = y + 2$ y sustituyendo en la segunda, se tiene:

$$(y+2)^2 - y = 4 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 - y = 4 \Rightarrow y^2 + 3y = 0 \Rightarrow$$
$$y(y+3) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = -3 \Rightarrow x = 2 \vee x = -1 \Rightarrow$$

Los puntos de corte son: $(2, 0)$ y $(-1, -3)$.

3. La recta del plano $2x + y = 1$ y la curva $x^2 + y^2 = 4$ se cortan en dos puntos.

F	V

Despejando y en la primera ecuación resulta $y = 1 - 2x$ y sustituyendo en la segunda, se tiene:

$$x^2 + (1-2x)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 4 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Aplicamos la fórmula cuadrática, así:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+60}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{10}.$$

Se concluye que el sistema tiene dos soluciones reales.

4. Las rectas del plano $3x - 2y = 1$ y $6x - 4y = 3$ no se cortan.

F	V

Se multiplica la primera ecuación por -2 y se suma con la segunda, así:

$$\begin{array}{rcrcr} -6x & + & 4y & = & -2 \\ 6x & - & 4y & = & 3 \\ \hline & & 0 & = & 1 \end{array}$$

La contradicción $0 = 1$ significa que las rectas no se cortan.

5. Las rectas del plano $x + 2y = 1$ y $3x + 6y = 3$ son coincidentes.

F	V

Se multiplica la primera ecuación por -3 y se suma con la segunda, así:

$$\begin{array}{rcrcr} -3x & - & 6y & = & -3 \\ 3x & + & 6y & = & 3 \\ \hline & & 0 & = & 0 \end{array}$$

La tautología $0 = 0$ significa que las rectas son coincidentes.

6. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 65 \\ x^2 + y^2 + xy = 2275 \end{cases}$ tiene como solución $x = 15$, $y = 5$.

F	V

Para que una pareja sea solución de un sistema se requiere que cumpla con las dos ecuaciones. En nuestro caso, la pareja (15, 5) no satisface la primera ecuación. En efecto, $15 + 5 + \sqrt{75} \neq 65$.
Puede verse que la pareja satisface la segunda ecuación.

7. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 6 \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$ tiene como solución $x = 8$, $y = 2$.

F	V

Para que una pareja sea solución de un sistema se requiere que cumpla con las dos ecuaciones. En nuestro caso, el estudiante puede verificar lo afirmado.

8. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 4/y = 1 \\ y + 4/x = 25 \end{cases}$ tiene como solución $x = 1/5$, $y = 4/5$.

F	V

Para que una pareja sea solución de un sistema se requiere que cumpla con las dos ecuaciones. En nuestro caso se puede verificar que la pareja no satisface la primera ecuación, así:

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{4/5} = \frac{1}{5} + \frac{5}{1} = \frac{26}{5} \neq 1.$$

9. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 133 \end{cases}$ tiene como solución $x = 9$, $y = 4$.

F	V

Para que una pareja sea solución de un sistema se requiere que cumpla con las dos ecuaciones. En nuestro caso se puede verificar que la pareja no satisface la segunda ecuación, así: $81 + 16 - 36 = 61 \neq 133$.

10. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ tiene como solución $x = 5$, $y = 4$.

F	V

Para que una pareja sea solución de un sistema se requiere que cumpla con las dos ecuaciones. En nuestro caso se puede verificar que la pareja no satisface la primera ecuación, así:

$$\sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2 \neq 4.$$

11. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ tiene como solución $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

F	V

Se despeja z en la primera ecuación $z = 3x + 2y - 5$ y se sustituye en las otras dos, así:

$$2x - 5y + 2(3x + 2y - 5) = 10 \Rightarrow 8x - y = 20,$$
$$x + y + (3x + 2y - 5) = 3 \Rightarrow 4x + 3y = 8.$$

En las ecuaciones resultantes se elimina x, resultando $y = -4/7$, con lo que la tripleta dada no es solución del sistema.

12. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - x = 1 \\ \sqrt{2x + y} + x = 3 \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

Se despeja y en la primera ecuación $y = x + 1$, y se sustituye en la otra, así:

$$\sqrt{2x + x + 1} + x = 3 \Rightarrow \sqrt{3x + 1} = 3 - x \Rightarrow 3x + 1 = (3 - x)^2 \Rightarrow$$
$$3x + 1 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x - 1) = 0 \Rightarrow$$
$$x = 8 \vee x = 1 \Rightarrow y = 9 \vee y = 2$$

El estudiante puede ver que la pareja (8, 9) no satisface la segunda ecuación original, con lo que la única solución es la pareja (1, 2).

13. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - x = 1 \\ |2x + 4| = y \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

Por definición de valor absoluto, se tiene:

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 \text{ si } 2x + 4 \geq 0 \\ -2x - 4 \text{ si } 2x + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow |2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 \text{ si } x \geq -2 \\ -2x - 4 \text{ si } x < -2 \end{cases}$$

Se analizan los dos casos, así:

a. $x \geq\ 2$. Resolviendo de manera simultánea se sigue que $x = -3$, la cual no cumple con la condición.
b. Resolviendo de manera simultánea se sigue que $x = -5/3$, la cual no cumple con la condición. Se concluye que el sistema no tiene soluciones reales.

14. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = x - 1 \\ y = x \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se tiene $x^2 - x + 1 = 0$, cuyo discriminante es negativo, es decir, el sistema no tiene soluciones reales.

15. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = x + 2 \\ y = x \end{cases}$ tiene dos soluciones reales.

F	V

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se tiene $x^2 - x - 2 = 0$, cuyo discriminante es positivo, es decir, el sistema tiene dos soluciones reales.

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. Una parábola del plano pasa por los puntos (0, 2), (1, 1), (2, -2). La ecuación de la parábola es:

   a. $y = x^2 - x + 2$.
   b. $y = -x^2 - x + 2$.
   c. $y = -x^2 + 2$.
   d. $y = x^2 + 2$.

   La explicación es la siguiente:

   Todas las parábolas pasan por el punto (0, 2).
   La parábola de la opción **c** pasa por los puntos (1, 1) y (2, -2).

2. Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas diferentes. Una de ellas produce un rendimiento de 20% anual y la otra 15% anual. Si dispone de 60 millones de pesos y desea que el monto de los intereses sea de 11 millones, la cantidad de millones que debe invertir en la cuenta que paga el 20% es:

   a. 20.
   b. 30.
   c. 40.
   d. 50.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea x la cantidad que invierte al 20% y y la que invierte al 15%, de tal manera que $x + y = 60$. El producido total, que es de 11 millones, se calcula como $0.2x + 0.15y = 11$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se tiene que $0.2x + 0.15(60 - x) = 11 \Rightarrow 0.05x = 2 \Rightarrow x = 40, y = 20$.

3. Un número de dos cifras es seis unidades menor que siete veces la suma de sus dígitos. Si los dígitos se intercambian, el resultado excede en tres unidades a once veces el dígito de las unidades del número original. El número es:

   a. 46.
   b. 58.
   c. 64.
   d. 85.

El procedimiento es el siguiente:

Sea x la cifra de las unidades y y la cifra de las decenas. Esto nos lleva a que:

(1). $10y + x = 7(x + y) - 6$.
(2). $10x + y = 11x + 3$.

El sistema de ecuaciones se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se encuentra que el número original es 85.

4. Se tiene una fracción cualquiera. Si se resta 4 al numerador y se suma 3 al denominador, el valor de la fracción es 1/2. Si al numerador y al denominador se les suma 2 unidades, el resultado es 2/3. La fracción es:

   a. 19/27.
   b. 24/37.
   c. 25/39.
   d. 26/41.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea x el numerador y y el denominador. Esto nos lleva a que:

   (1). $\dfrac{x-4}{y+3} = \dfrac{1}{2}$.
   (2). $\dfrac{x+2}{y+2} = \dfrac{2}{3}$.

   El sistema de ecuaciones se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema se encuentra que la fracción original es 24/37.

5. Mariela invirtió parte de su dinero al 10% y el resto al 15%. El ingreso obtenido por ambas inversiones totalizó 45.000 pesos. De haber intercambiado sus inversiones habría obtenido ingresos por un monto de 55.000 pesos. La cantidad que invirtió, en miles de pesos, fue:

   a. 100.
   b. 200.
   c. 300.
   d. 400.

El procedimiento es el siguiente:

Sea x la cantidad que invierte al 10% y y la que invierte al 15%, de tal manera que:

(1). $0.10x + 0.15y = 45.$
(2). $0.10y + 0.15x = 55.$

El sistema se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} 10x + 15y = 4.500 \\ 15x + 10y = 5.500 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resulta $x = 300$, $y = 100$.
La inversión total fue de 400.000 pesos.

6. Se tiene un lote rectangular. Si la longitud se aumenta en 4 m y el ancho se disminuye en 3 m, el área disminuye en 35 m^2. Si la longitud se disminuye en 3 m y el ancho se aumenta en 2 m, el área permanece igual a la original. La menor de las dimensiones del lote, en metros, es:

a. 28.
b. 30.
c. 42.
d. 45.

El procedimiento es el siguiente:

Sea x la longitud y y el ancho, de tal manera que el área del terreno es xy. Con base en el enunciado se tiene:

(1). $(x + 4)(y - 3) = xy - 35.$
(2). $(x - 3)(y + 2) = xy.$

Desarrollando los productos se tiene:

(1). $(x + 4)(y - 3) = xy - 35 \Rightarrow -3x + 4y = -23.$
(2). $(x - 3)(y + 2) = xy \Rightarrow 2x - 3y = 6.$

El sistema se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 23 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resulta $x = 45$, $y = 28$.

7. Hace ocho años la edad de Luis era cuatro veces la edad de Héctor, y dentro de dos años será el doble. La edad de Héctor dentro de dos años será:

   a. 13.
   b. 15.
   c. 28.
   d. 30.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea x la edad actual de Luís y y la edad actual de Héctor, de tal manera que:

   (1). $x - 8 = 4(y - 8)$.
   (2). $x + 2 = 2(y + 2)$.

   El sistema se puede escribir en la forma:

   $$\begin{cases} x - 4y = -24 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema resulta $x = 28$, $y = 13$.
   Dentro de dos años la edad de Héctor será 15.

8. El punto de apoyo de una palanca está situado de tal manera que dos cargas de 80 y 120 kg, colocadas en sus extremos, quedan equilibradas. Si se agregan 40 kg a la carga menor y se desea conservar el equilibrio, la otra carga debe alejarse 2 m del punto de apoyo. La longitud de la palanca, en metros, es:

   a. 8.
   b. 12.
   c. 20.
   d. 24.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea x el brazo de la carga menor y y el brazo de la carga mayor. El equilibrio implica que $80x = 120y \Rightarrow 2x = 3y$. Por otro lado, se tiene que $120(x - 2) = 120(y + 2) \Rightarrow x - 2 = y + 2 \Rightarrow x = y + 4$.

   Puesto que $x = 3y/2$, resulta $x = 12$, $y = 8$, con lo que la longitud de la palanca es 20.

9. Un avión recorrió 4.200 km en seis horas con el viento a favor y al regreso tardó siete horas. La rapidez del viento, en km/h, es:

   a. 5.
   b. 7.5.
   c. 10.
   d. 12.5.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea x la velocidad del viento y y la velocidad normal del avión. Esto nos conduce a las ecuaciones:

   (a). $4.200 = 6(x + y)$.
   (b). $4.200 = 7(-x + y)$.

   El sistema se puede expresar como:

$$\begin{cases} x + y = 700 \\ -x + y = 600 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema se encuentra que $x = 5$, $y = 650$.

10. Las tarifas de entrada a un parque de diversiones son de 10.000 pesos para adultos y de 6.000 pesos para niños. Un domingo cualquiera entraron 2.000 personas y se recaudaron 18 millones de pesos. El número de adultos que entraron es:

   a. 500.
   b. 1.000.
   c. 1.500.
   d. 2.000.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea x el número de adultos y y el número de niños, con lo que $x + y = 2.000$. Con base en el enunciado se tiene que $10.000x + 6.000y = 18.000.000$.

   El sistema de ecuaciones se puede expresar como:

$$\begin{cases} x + y = 2.000 \\ 10x + 6y = 18.000 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema resulta $x = 1.500$, $y = 500$.

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Soluciones para el módulo 7: Funciones exponenciales y logarítmicas

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. El punto (0, 1) pertenece a la curva $y = 2^{-x/3}$.

F	V

Al sustituir $x = 0$ en la ecuación resulta $y = 2^{-0/3} = 2^0 = 1$.

2. Al evaluar la función $f(x) = 4^{x-1}$ en $x = 0$, el resultado es $f(0) = 1/4$.

F	V

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4^{0-1} = 4^{-1} = 1/4$.

3. Al evaluar la función $f(x) = 9^{x-1}$ en $x = 1/2$, el resultado es $f(1/2) = -1/\sqrt{3}$.

F	V

$x = 1/2 \Rightarrow f(1/2) = 9^{1/2-1} = \dfrac{1}{9^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = 1/3$.

4. Al evaluar la función $f(x) = \log_3(\sqrt{x})$ en $x = 27$, el resultado es $f(27) = 3/2$.

F	V

$x = 27 \Rightarrow f(27) = \log_3(\sqrt{27}) = \log_3(27^{1/2}) = \dfrac{1}{2}\log_3(3)^3 = 3/2$.

5. Al evaluar la función $f(x) = \log_2(1/x)$ en $x = 25$, el resultado es $f(25) = 2$.

F	V

$x = 25 \Rightarrow f(25) = \log_2(1/25) = \log_2(1) - \log_2(25) = 0 - \log_2(25)$.

Puesto que 25 no es una potencia entera de 2, la afirmación es falsa.

6. El valor exacto de $10^{-2\log(5)}$ es 25.

F	V

$10^{-2\log(5)} = 1/10^{\log(25)} = \frac{1}{25} \neq 25$, por lo que la afirmación es falsa.

7. Al simplificar la expresión $\log_2(16) - \frac{1}{2}\log_3(81) + 2\log_5(125)$, el resultado es 8.

F	V

$$\log_2(16) - \frac{1}{2}\log_3(81) + 2\log_5(125) = \log_2(2^4) - \frac{1}{2}\log_3(3^4) + 2\log_5(5^3)$$
$$= 4 - \frac{1}{2}\cdot 4 + 2\cdot 3 = 4 - 2 + 6 = 8.$$

8. La solución de la ecuación $2^{2x-1} = 4$ es $x = 2/3$.

F	V

$2^{2x-1} = 4 \Rightarrow 2^{2x-1} = 2^2 \Rightarrow 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3/2$.

9. Las soluciones de la ecuación $\log_x(3) = 2$ son $x = \pm\sqrt{3}$.

F	V

$\log_x(3) = 2 \Rightarrow 3 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

No se toma el signo negativo ya que la base de un logaritmo debe ser positiva.

10. La solución de la ecuación $\log(x) = -1$ es $x = 0.1$.

F	V

$\log(x) = -1 \Rightarrow 10^{-1} = x = 0.1$.

11. La ecuación $\log(x) + \log(x - 15) = 2$ tiene dos soluciones.

F	V

$\log(x) + \log(x - 15) = 2 \Rightarrow \log(x(x-15)) = 2 \Rightarrow \log(x^2 - 15x) = \log(100) \Rightarrow$
$x^2 - 15x - 100 = 0 \Rightarrow (x - 20)(x + 5) = 0 \Rightarrow x = 20 \vee x = -5$.

El valor $x = -5$ no se tiene en cuenta ya que los números negativos no tienen logaritmo.

12. La ecuación $\log_2(x^2-1)-\log_2(2x+2)=1$ tiene una sola solución.

F	V

$$\log_2(x^2-1)-\log_2(2x+2)=1 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x^2+1}{2x+2}\right)=1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{2x+2}=2 \Rightarrow$$
$$x^2-1=4x+4 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow x=5 \vee x=-1.$$

El valor $x=-1$ no se toma en cuenta ya que el cero no tiene logaritmo.

13. La inversa de la función $f(x)=2e^{-x}+3$ es $f^{-1}(x)=\ln(x-3)$, con $x>3$.

F	V

Se aplica el procedimiento, así:

$$2e^{-x}+3=y \Rightarrow 2e^{-x}=y-3 \Rightarrow e^{-x}=\frac{y-3}{2} \Rightarrow e^{x}=\frac{2}{y-3} \Rightarrow$$
$$x=\ln\left(\frac{2}{y-3}\right) \Rightarrow y=\ln\left(\frac{2}{x-3}\right) \Rightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{2}{x-3}\right);\ x>3.$$

14. La inversa de la función $f(x)=\log(2x-3)+1$ es $f^{-1}(x)=0.2x+1.5$.

F	V

Se aplica el procedimiento, así:

$$\log(2x-3)+1=y \Rightarrow \log(2x-3)=y-1 \Rightarrow$$
$$2x-3=10^{y-1} \Rightarrow 2x=3+10^{y-1} \Rightarrow x=\frac{3+10^{y-1}}{2} \Rightarrow \frac{3+10^{x-1}}{2}=y \Rightarrow$$
$$f^{-1}(x)=\frac{3+10^{x-1}}{2}.$$

15. Una de las soluciones de la ecuación $e^{2x^2-3x+1}=1$ es $x=1$.

F	V

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$e^{2x^2-3x+1}=1 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow (x-1)(2x-1)=0 \Rightarrow x=1 \vee x=1/2.$$

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. La ecuación $4^{2x^2} = 8 \cdot 16^x$:

   a. No tiene soluciones reales.
   b. Tiene una sola solución real.
   c. Tiene dos soluciones reales diferentes.
   d. Tiene una solución real y una compleja.

   El procedimiento es el siguiente:

   Aplicando las propiedades de los exponentes, se tiene:

   $$4^{2x^2} = 8 \cdot 16^x \Rightarrow 2^{4x^2} = 2^3 \cdot 2^{4x} \Rightarrow 2^{4x^2} = 2^{3+4x} \Rightarrow 4x^2 = 3 + 4x \Rightarrow$$
   $$4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow (2x+1)(2x-3) = 0 \Rightarrow x = -1/2 \vee x = 3/2.$$

2. La ecuación $7^{x^2} = 49^{x-1/2}$:

   a. No tiene soluciones reales.
   b. Tiene una sola solución real.
   c. Tiene dos soluciones reales diferentes.
   d. Tiene una solución real y una compleja.

   El procedimiento es el siguiente:

   Aplicando las propiedades de los exponentes, se tiene:

   $$7^{x^2} = 49^{x-1/2} \Rightarrow 7^{x^2} = 7^{2(x-1/2)} \Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$
   $$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

3. La ecuación $\log_{2x}(3x) = 1/2$, con $x > 0$:

   a. No tiene soluciones en el dominio dado.
   b. Tiene una sola solución en el dominio dado.
   c. Tiene dos soluciones diferentes en el dominio dado.
   d. Tiene una solución real y una compleja en el dominio dado.

   El procedimiento es el siguiente:

   Aplicando la relación entre la función logarítmica y la función exponencial, se tiene:

   $$\log_{2x}(3x) = 1/2 \Rightarrow 3x = (2x)^{1/2} \Rightarrow 9x^2 = 2x \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$
   $$x(9x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 9/2.$$

   Puesto que $x > 0$, se sigue que la ecuación tiene una sola solución real.

4. La ecuación $4^x - 2^{x+2} = 32$:

   a. No tiene soluciones reales.
   b. Tiene una sola solución real.
   c. Tiene dos soluciones reales diferentes.
   d. Tiene una solución real y una compleja.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$4^x - 2^{x+2} = 32 \Rightarrow (2^x)^2 - 4(2^x) - 32 = 0 \Rightarrow (2^x - 8)(2^x + 4) = 0 \Rightarrow$$
   $$2^x = 8 \Rightarrow x = 3.$$

5. La inversa de la función $f(x) = 4(1 - 2^{-x})$ es:

   a. $f^{-1}(x) = 2 - \log_2(4 - x)$.
   b. $f^{-1}(x) = 2 + \log_2(4 - x)$.
   c. $f^{-1}(x) = 2 - \log_2(4 + x)$.
   d. $f^{-1}(x) = 2 + \log_2(4 + x)$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$4(1 - 2^{-x}) = y \Rightarrow 1 - 2^{-x} = \frac{y}{4} \Rightarrow 1 - \frac{y}{4} = 2^{-x} \Rightarrow \frac{4-y}{4} = \frac{1}{2^x} \Rightarrow$$
   $$2^x = \frac{4}{4-y} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{4}{4-y}\right) \Rightarrow x = \log_2(4) - \log_2(4-y) \Rightarrow x = 2 - \log_2(4-y) \Rightarrow$$
   $$y = 2 - \log_2(4-x) \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \log_2(4-x).$$

Los ejercicios 6-10 hacen referencia a las funciones $f(x) = 2^{-x/2}$ y $g(x) = \log_2(x+1)$.

6. El valor numérico de $f(3) \cdot g(3)$ es:

   a. $\sqrt{2}$.
   b. $2/\sqrt{2}$.
   c. $1/\sqrt{2}$.
   d. $-\sqrt{2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$f(x) = 2^{-x/2} \Rightarrow f(3) = 2^{-3/2} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
   $$g(x) = \log_2(x+1) \Rightarrow g(3) = \log_2(4) = 2.$$

   Se concluye que:

   $$f(3) \cdot g(3) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. El valor numérico de $g(3)/f(3)$ es:

   a. $\sqrt{2}$.
   b. $2\sqrt{2}$.
   c. $3\sqrt{2}$.
   d. $4\sqrt{2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$f(3)/g(3) = 2/\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

8. El valor numérico de $f(g(3))$ es:

   a. 0.
   b. 1/2.
   c. 1.
   d. 2.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$g(3) = 2 \Rightarrow f(2) = 2^{-2/2} = 2^{-1} = 1/2.$$

9. El valor numérico de $f(8) \cdot g(7)$ es:

   a. 1/16.
   b. 1/8.
   c. 3/16.
   d. 1/4.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$f(x) = 2^{-x/2} \Rightarrow f(8) = 2^{-8/2} = 2^{-4} = 1/16$$
   $$g(x) = \log_2(x+1) \Rightarrow g(7) = \log_2(8) = 3.$$

   Se concluye que:

   $$f(8) \cdot g(7) = \frac{1}{16} \cdot 3 = 3/16.$$

10. La inversa de $g(x)$ pasa por el punto:

    a. (3, 6).
    b. (3, 7).
    c. (3, 8).
    d. (3, 9).

    El procedimiento es el siguiente:

    $$\log_2(x+1) = y \Rightarrow x + 1 = 2^y \Rightarrow x = 2^y - 1 \Rightarrow y = 2^x - 1 \Rightarrow$$
    $$g^{-1}(x) = 2^x - 1 \Rightarrow g^{-1}(3) = 2^3 - 1 = 7.$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a					■					
b		■	■	■				■		■
c	■					■			■	
d							■			

Soluciones para el módulo 8: Funciones trigonométricas: parte I

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. El periodo de la función $f(t) = 10 \text{ sen } (2t)$ es $T = 2\pi$.

F	V

Puesto que la frecuencia fundamental es $\omega = 2$, el periodo es $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$.

2. Para la función $f(t) = 10 \text{ sen } (t + 4\pi)$, se verifica que $f(\pi/2) = 1$.

F	V

Puesto que el periodo de la función es 2π, se verifica que $f(t) = 10 \text{ sen } (t + 4\pi) = 10 \text{ sen } t$; al evaluar la ecuación en $t = \pi/2$, se encuentra que $f(\pi/2) = 10 \text{ sen } (\pi/2) = 10$.

3. Para la función $f(t) = 10 \text{ sen } (t) \cos (t)$, se verifica que $f(\pi/4) = 1$.

F	V

Al evaluar la función, se tiene:

$$f(t) = 2 \text{ sen}(t) \cos(t) \Rightarrow f(\pi/4) = 2 \cdot \text{sen}(\pi/4) \cdot \cos(\pi/4) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

4. Al simplificar la expresión $\dfrac{2 \text{ sen } (\pi/6) - 3 \cos^2 (\pi/4)}{2 + 2 \text{ sen}^2 (\pi/3) + \cos^2 (\pi/3)}$, el resultado es $-1/6$.

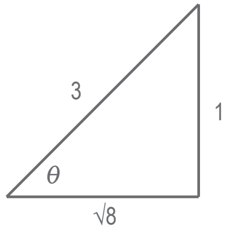
F	V

$$\frac{2 \text{ sen } (\pi/6) - 3 \cos^2 (\pi/4)}{2 + \text{sen}^2 (\pi/3) + \cos^2 (\pi/3)} = \frac{2 \cdot (1/2) - (\sqrt{2}/2)^2}{2 + (\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{1 - 1/2}{2 + 3/4 + 1/4}$$
$$= \frac{1/2}{3} = 1/6.$$

5. Sabiendo que sen (θ) = 1/3, se sigue que $\tan(\theta) = \sqrt{8}$.

F	V

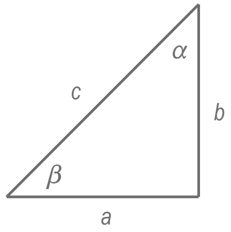
A partir de sen (θ) = 1/3 se dibuja el triángulo y se concluye que $\tan(\theta) = 1/\sqrt{8}$.



6. Sabiendo que $\alpha + \beta = \pi/2$, se sigue que sen (α) = cos (β).

F	V

En la figura es claro que los ángulos son complementarios y que sen (α) = cos (β) = b/c.



7. Sabiendo que $\alpha + \beta = \pi$, se sigue que cos (α) = −cos (β).

F	V

Puesto que los ángulos son suplementarios, uno de ellos está en el primer cuadrante y el otro en el segundo. Puesto que en el segundo cuadrante el coseno es negativo, se verifica la proposición.

Puede justificarse también de la siguiente manera:

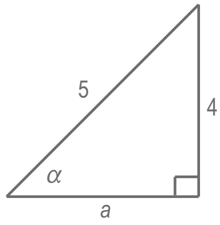
$$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\alpha)$$
$$= -\cos(\alpha).$$

8. Sabiendo que sen $(\alpha) = 4/5$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que cos $(\alpha) = 3/5$.

F	V

Usamos el triángulo y vemos que la afirmación es verdadera:

$$a = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$$
$$\cos(\alpha) = 3/5.$$

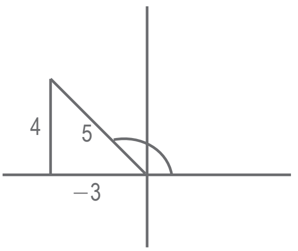


9. Sabiendo que cos $(\alpha) = -3/5$, con $\pi/2 < \alpha < \pi$, se sigue que tan $(\alpha) = 3/4$.

F	V

Usamos el triángulo en el segundo cuadrante y verificamos que la proposición es falsa:

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{-3}.$$



10. Sabiendo que $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$, se sigue que $\alpha = \pi/3 \vee \alpha = 4\pi/3$.

F	V

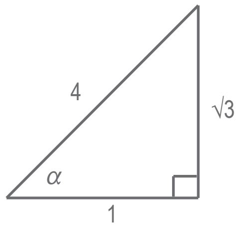
La tangente es positiva en el primer y el tercer cuadrante, con lo que $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi)$; puesto que $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, se sigue que $\tan(\pi/3 + \pi) = \sqrt{3}$.

11. Sabiendo que $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\text{sen}(2\alpha) = \sqrt{3}/16$.

F	V

Usamos el triángulo y vemos que la afirmación es falsa:

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

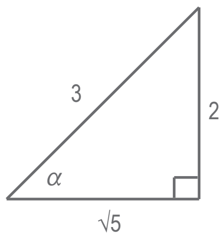


12. Sabiendo que $\text{sen}(\alpha) = 2/3$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\cos(2\alpha) = 1/9$.

F	V

Usamos el triángulo y vemos que la afirmación es verdadera:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = 1/9.$$



13. Sabiendo que $\text{sen}(\alpha) = 2/3$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\cos(\alpha/2) = 1/3$.

F	V

Se aplica la fórmula para el coseno del ángulo mitad, así:

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} \Rightarrow \cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}.$$

14. Sabiendo que sen $(\alpha) = -2/3$, con $\pi < \alpha < 3\pi/2$, se sigue que $\tan(\alpha/2) = (3 - \sqrt{5})/2$.

F	V

Se aplica la fórmula para el tangente del ángulo mitad, teniendo en cuenta que el coseno es negativo.

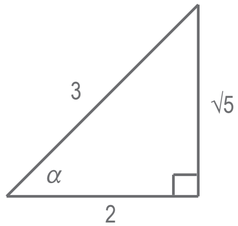
$$\tan(\alpha/2) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{1 - \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{3+\sqrt{5}}{-2}.$$

15. Sabiendo que $\sec(\alpha) = 1.5$, con $0 < \alpha < \pi/2$, se sigue que $\sec(2\alpha) = 3$.

F	V

Aplicando la fórmula para el coseno del ángulo doble se sigue que la proposición es falsa:

$$\sec(2\alpha) = \frac{1}{\cos(2\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)} = \frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{5}{9}} = -9.$$



B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

Los ejercicios 1-3 hacen referencia a un ángulo θ del primer cuadrante tal que sen $(\theta) = 9/10$.

1. El valor de $\sec(2\theta)$ es:

   a. $-31/50$.
   b. $31/50$.
   c. $50/31$.
   d. $-50/31$.

El procedimiento es el siguiente:

Si el ángulo está en el primer cuadrante, su coseno es positivo y viene dado por $\cos(\theta) = \sqrt{19}/10$. El coseno del ángulo doble es $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$, con lo que:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) = 19/100 - 81/100 = -62/100 = -31/50.$$

$$\Rightarrow \sec(2\theta) = -50/31.$$

2. El valor de $\cos(2\theta + \pi/2)$ es:

   a. $-9\sqrt{19}/50$.
   b. $9\sqrt{19}/50$.
   c. $-50/9\sqrt{19}$.
   d. $50/9\sqrt{19}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Se aplica la fórmula de adición del coseno, así:

$$\cos(2\theta + \pi/2) = \cos(2\theta)\cos(\pi/2) - \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\pi/2) = -\operatorname{sen}(2\theta).$$

   Ahora se aplica la fórmula del seno del ángulo doble, así:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = 2\cdot(9/10)\cdot(\sqrt{19}/10) = \frac{9\sqrt{19}}{50}.$$

3. El valor de $\tan(\theta/2)$ es:

   a. $(10 + \sqrt{19})/9$.
   b. $(10 - \sqrt{19})/9$.
   c. $(-10 + \sqrt{19})/9$.
   d. $-(10 + \sqrt{19})/9$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Se aplica la fórmula de la tangente del ángulo mitad, así:

$$\tan(\theta/2) = \frac{1 - \cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{1 - \sqrt{19}/10}{9/10} = \frac{10 - \sqrt{19}}{9}.$$

Los ejercicios 4-5 hacen referencia a un ángulo θ del primer cuadrante tal que $\cos(\theta) = 4/9$.

4. El valor de $\operatorname{sen}(2\theta + \pi/3)$ es:

   a. $(8\sqrt{65} - 49\sqrt{3})/162$.
   b. $(8\sqrt{65} + 49\sqrt{3})/162$.
   c. $-(8\sqrt{65} + 49\sqrt{3})/162$.
   d. $(-8\sqrt{65} - 49\sqrt{3})/162$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Si el ángulo está en el primer cuadrante el seno es positivo y viene dado por $\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{65}/9$. A continuación se aplica la fórmula de adición para el seno, así:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\theta + \pi/3) &= \operatorname{sen}(2\theta)\cos(\pi/3) + \operatorname{sen}(\pi/3)\cos(2\theta)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\theta).\end{aligned}$$

   En la expresión anterior se tiene que:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\cdot(\sqrt{65}/9)\cdot(4/9) = \frac{8\sqrt{65}}{81}.$$

$$\cos(2\theta) = 16/81 - 65/81 = -49/81.$$

   Al sustituir se tiene:

$$\operatorname{sen}(2\theta + \pi/3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{65}}{81} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-49}{81} = \frac{8\sqrt{65} - 49\sqrt{3}}{162}.$$

5. El valor de $\tan(\theta/2 + \pi)$ es:

   a. $5/\sqrt{65}$.
   b. $-5/\sqrt{65}$.
   c. $\sqrt{65}/5$.
   d. $-\sqrt{65}/5$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Se aplica la fórmula de adición para la tangente, así:

$$\tan(\theta/2 + \pi) = \frac{\tan(\theta/2) + \tan(\pi)}{1 - \tan(\theta/2)\tan(\pi)}.$$

Puesto que $\tan(\pi) = 0$, se tiene:

$$\tan(\theta/2 + \pi) = \tan(\theta/2) = \frac{1 - \cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \Rightarrow$$
$$= \frac{1 - 4/9}{\sqrt{65}/9} = \frac{5}{\sqrt{65}}.$$

6. Se tiene la expresión $((\cot(x) - \csc(x))^2$. Al expresarla en términos de las funciones seno y coseno, el resultado simplificado es:

   a. $\dfrac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}$.
   b. $\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$.
   c. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}$.
   d. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Se escribe la expresión en términos de senos y cosenos y se desarrollan las operaciones, así:

$$(\cot(x) - \csc(x))^2 = \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 = \frac{(\cos(x) - 1)^2}{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

   Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, se tiene:

$$(\cot(x) - \csc(x))^2 = \frac{(1 - \cos(x))^2}{1 - \cos^2(x)} = \frac{(1 - \cos(x))^2}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}$$
$$= \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}.$$

7. Se tiene la expresión $\dfrac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$. Al expresarla en términos de las funciones seno y coseno, el resultado simplificado es:

   a. $\operatorname{sen}(2x)$.
   b. $2\operatorname{sen}(x)$.
   c. $\cos(2x)$.
   d. $2\cos(x)$.

Se procede como en el caso anterior, así:

$$\frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{2\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}}.$$

La expresión anterior se puede expresar como:

$$\frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{2\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\dfrac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{2\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\dfrac{1}{\cos^2(x)}} = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$= \operatorname{sen}(2x).$$

La expresión encontrada corresponde al seno del ángulo doble.

8. Se tiene la expresión $\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)$. Al aplicar las fórmulas de adición, el resultado simplificado es:

 a. $\operatorname{sen}(x)\cos(y)$.
 b. $\operatorname{sen}(y)\cos(x)$.
 c. $2\operatorname{sen}(y)\cos(x)$.
 d. $2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$.

 El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)\\ &\quad - (\operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)).\end{aligned}$$

 Al simplificar la expresión anterior, se tiene:

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen}(y)\cos(x).$$

9. Se tiene la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$. Al aplicar las fórmulas de adición, el resultado simplificado es:

 a. $\tan(y)$.
 b. $\tan(x)$.
 c. $\cot(x)$.
 d. $\cot(y)$.

El procedimiento es el siguiente:

Primero se desarrolla el numerador, así:

$$\begin{aligned}&\text{sen}\,(x+y)-\text{sen}\,(x-y)\\&=\text{sen}\,(x)\cos(y)+\text{sen}\,(y)\cos(x)-(\text{sen}\,(x)\cos(y)-\text{sen}\,(y)\cos(x))\\&=2\,\text{sen}\,(y)\cos(x).\end{aligned}$$

Ahora se desarrolla el denominador, así:

$$\begin{aligned}&\cos(x+y)+\cos(x-y)\\&=\cos(x)\cos(y)-\text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y)+(\cos(x)\cos(y)+\text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y))\\&=2\cos(x)\cos(y).\end{aligned}$$

Al reemplazar se obtiene:

$$\frac{\text{sen}\,(x+y)-\text{sen}\,(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=\frac{2\,\text{sen}\,(y)\cos(x)}{2\cos(x)\cos(y)}=\tan(y).$$

10. Se tiene la expresión 2 sen $(3x)$ sen (x). Al aplicar las fórmulas correspondientes, el resultado simplificado es:

a. $\cos(2x)-\cos(4x)$.
b. $\cos(2x)+\cos(4x)$.
c. $\text{sen}\,(2x)-\text{sen}\,(4x)$.
d. $\text{sen}\,(2x)+\text{sen}\,(4x)$.

El procedimiento consiste en expresar el producto en términos de sumas, así:

$$\text{sen}\,(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\Rightarrow$$
$$2\,\text{sen}\,(3x)\,\text{sen}\,(x)=\cos(3x-x)-\cos(3x+x)=\cos(2x)-\cos(4x).$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a				■	■		■		■	■
b		■	■			■				
c								■		
d	■									

Soluciones para el módulo 9: Funciones trigonométricas: parte II

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. Uno de los valores de arcsen (1/2) es $\pi/6$.

F	V

sen $(\pi/6) = 1/2$.

2. El valor de arctan $(\pi/4)$ es 1.

F	V

arctan $(\pi/4) = 1 \Rightarrow$ tan $(1) = \pi/4$.

3. La ecuación $2\cos(x) + 1 = 0$ tiene como soluciones $x = 2\pi/3 \vee x = 4\pi/3$ en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

$2\cos(x) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = -1/2 \Rightarrow$
$x = \pi - \arccos(1/2) \vee x = \pi + \arccos(1/2) \Rightarrow$
$x = \pi - \pi/3 \vee x = \pi + \pi/3 \Rightarrow x = 2\pi/3 \vee x = 4\pi/3.$

4. La ecuación $\tan^2(x) - \tan(x) = 0$ tiene cuatro soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

$$\tan^2(x) - \tan(x) = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} = 0; \cos(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x)(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) = 0 \Rightarrow$$
$$\operatorname{sen}(x) = 0 \vee \operatorname{sen}(x) = \cos(x) \Rightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = \pi/4 \vee x = 3\pi/4.$$

5. La ecuación $\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$ tiene cuatro soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

$\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x)(\cos(x) - 2) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow$
$x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2.$

6. La inversa de la función $f(x) = 2\,sen\,(x + \pi)$ es $f^{-1}(x) = \pi + \text{arcsen}\,(x/2)$.

F	V

Se aplica el procedimiento, así:

$$y = 2\,\text{sen}\,(x + \pi) \Rightarrow \text{sen}\,(x + \pi) = y/2 \Rightarrow x + \pi = \text{arcsen}\,(y/2) \Rightarrow$$
$$x = \text{arcsen}\,(y/2) - \pi \Rightarrow y = \text{arcsen}\,(x/2) - \pi \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{arcsen}\,(x/2) - \pi.$$

7. La ecuación $\sqrt{3 + 2\,\text{sen}\,(x)} = \text{sen}\,(x)$ no tiene soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

$$\sqrt{3 + 2\,\text{sen}\,(x)} = \text{sen}\,(x) \Rightarrow 3 + 2\,\text{sen}\,(x) = \text{sen}^2\,(x) \Rightarrow$$
$$\text{sen}^2\,(x) - 2\,\text{sen}\,(x) - 3 = 0 \Rightarrow (\text{sen}\,(x) - 3)(\text{sen}\,(x) + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\text{sen}\,(x) = -1 \Rightarrow x = 3\pi/2.$$

La solución obtenida es extraña ya que $\sqrt{3 - 2} = 1 \neq -1$.
Lo anterior significa que la proposición es verdadera.

8. La ecuación $\sqrt{-2 + 3\,\text{sen}\,(x)} = \text{sen}\,(x)$ no tiene soluciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

F	V

$$\sqrt{-2 + 3\,\text{sen}\,(x)} = \text{sen}\,(x) \Rightarrow -2 + 3\,\text{sen}\,(x) = \text{sen}^2\,(x) \Rightarrow$$
$$\text{sen}^2\,(x) - 3\,\text{sen}\,(x) + 2 = 0 \Rightarrow (\text{sen}\,(x) - 1)(\text{sen}\,(x) - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\text{sen}\,(x) = 1 \Rightarrow x = \pi/2.$$

La solución obtenida es válida ya que $\sqrt{3 - 2} = 1$.
Lo anterior significa que la proposición es falsa.

9. La expresión $\cos\,(2\cos^{-1}(x))$ es equivalente a $2x^2 - 1$.

F	V

Se parte la función inversa, así:

$$\theta = \cos^{-1}(x) \Rightarrow \cos\,(\theta) = x \Rightarrow \text{sen}\,(\theta) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Se aplica la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\cos\,(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1.$$

10. La expresión $\tan^2(\cos^{-1}(x))$ es equivalente a $\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

F	V

Se parte la función inversa, así:

$$\theta = \cos^{-1}(x) \Rightarrow \cos(\theta) = x \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \tan^2(\theta) = \frac{1-x^2}{x}.$$

11. Las medidas de los lados de un triángulo son $a = 4$, $b = 6$, $c = 7$. El ángulo comprendido por los lados c y b es $\alpha = \operatorname{arccos}(23/28)$.

F	V

Se aplica la ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{36+49-16}{84} = \frac{69}{84} = \frac{23}{28}.$$

12. Las medidas de dos de los lados de un triángulo son $a = 4$, $b = 6$ y el ángulo comprendido por ellos es $\gamma = \pi/6$. La medida del otro lado es $2\sqrt{7}$.

F	V

Se aplica la ley de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \Rightarrow c^2 = 16 + 36 - 48\cos(\pi/3) = 52 - 24\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}}.$$

13. Las medidas de dos de los lados de un triángulo son $a = 4$, $b = 6$ y el ángulo comprendido por ellos es $\gamma = \pi/3$. La medida en grados de uno de los otros dos ángulos es $\operatorname{arcsen}(\sqrt{7})$.

F	V

Se aplica la ley de cosenos y luego la de senos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \Rightarrow c^2 = 16 + 36 - 24 = 28 \Rightarrow c = 2\sqrt{7} \Rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{4\operatorname{sen}(\pi/3)}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

14. La medida de uno de los lados de un triángulo es $a = 4$ y los ángulos adyacentes son $\gamma = 45°$, $\beta = 60°$. La medida del lado opuesto al ángulo γ es $8/(1 + \sqrt{3})$.

F	V

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 45° - 60° = 75° \Rightarrow$$

Se aplica la ley de senos:

$$\frac{4}{\operatorname{sen}(75°)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(45°)} \Rightarrow c = \frac{4\operatorname{sen}(45°)}{\operatorname{sen}(75°)}$$
$$\operatorname{sen}(75°) = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen}(45)\cos(30) + \operatorname{sen}(30)\cos(45)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow c = \frac{4\operatorname{sen}(45°)}{\operatorname{sen}(75°)}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{3} + 1}.$$

15. Las medida de uno de los lados de un triángulo es $a = 4$ y los ángulos adyacentes son $\gamma = 45°$, $\beta = 30°$. La medida del lado opuesto al ángulo β es $4\sqrt{2}/(1 + \sqrt{3})$.

F	V

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 45° - 30° = 105° \Rightarrow$$

Se aplica la ley de senos:

$$\frac{4}{\operatorname{sen}(105°)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(30°)} \Rightarrow b = \frac{4\operatorname{sen}(30°)}{\operatorname{sen}(105°)}$$
$$\operatorname{sen}(105°) = \operatorname{sen}(60° + 45°) = \operatorname{sen}(60)\cos(45) + \operatorname{sen}(45)\cos(60)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow b = \frac{2}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}.$$

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

1. La expresión tan (2 arcsen (x)) es equivalente a:

   a. $\dfrac{2x(1-x^2)}{1-2x^2}$.

   b. $\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

   c. $\dfrac{2x(1-x^2)}{1+2x^2}$.

   d. $\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1+2x^2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$\text{sea } \theta = \operatorname{arcsen}(x) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = x \Rightarrow \cos(\theta) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Ahora, la expresión a evaluar es:

   $$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\dfrac{x^2}{1-x^2}}.$$

   Al simplificar, resulta:

   $$\tan(2\operatorname{arcsen}(x)) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$$

2. La inversa de la función $f(x) = 1 - 3\operatorname{sen}(x/2 + \pi/3)$ es:

   a. $f^{-1}(x) = 2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) - 2\pi/3$.

   b. $f^{-1}(x) = -2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) - 2\pi/3$.

   c. $f^{-1}(x) = -2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) + 2\pi/3$.

   d. $f^{-1}(x) = 2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x}{3}\right) + 2\pi/3$.

El procedimiento es el siguiente:

$$y = 1 - 3\,\text{sen}\,(x/2 + \pi/3) \Rightarrow 3\,\text{sen}\,(x/2 + \pi/3) = 1 - y \Rightarrow \text{sen}\,(x/2 + \pi/3) = \frac{1-y}{3} \Rightarrow$$

$$x/2 + \pi/3 = \text{arcsen}\left(\frac{1-y}{3}\right) \Rightarrow x/2 = \text{arcsen}\left(\frac{1-y}{3}\right) - 2\pi/3.$$

Se concluye que:

$$f^{-1}(x) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1-x}{3}\right) - 2\pi/3.$$

3. Las soluciones de la ecuación $\text{sen}^2(x) + \cos(x) = 1$, en el intervalo $0 \le x < 2\pi$, son:

    a. $x = 0 \vee x = \pi/2$.
    b. $x = 0 \vee x = 3\pi/2$.
    c. $x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2$.
    d. $x = 0 \vee x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2$.

    El procedimiento es el siguiente:

$$\text{sen}^2(x) + \cos(x) = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2(x) + \cos(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) - \cos^2(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos(x)(1 - \cos(x)) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = 1 \Rightarrow x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2 \vee x = 0.$$

4. El número de soluciones de la ecuación $2\,\text{sen}^3(x) - \text{sen}(x) = 0$, en el intervalo $0 \le x < 2\pi$, es:

    a. 2.
    b. 4.
    c. 6.
    d. 8.

    El procedimiento es el siguiente:

$$2\,\text{sen}^3(x) - \text{sen}(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(x)(2\,\text{sen}^2(x) - 1) \Rightarrow \text{sen}(x) = 0 \vee \text{sen}^2(x) = 1/2 \Rightarrow$$
$$\text{sen}(x) = 0 \vee \text{sen}(x) = \pm\sqrt{2}/2 \Rightarrow$$
$$x = 0 \vee x = \pi \vee x = \pi/4 \vee x = 3\pi/4 \vee x = 5\pi/4 \vee x = 7\pi/4.$$

5. El número de soluciones de la ecuación $\sqrt{1+\cos(x)} = \operatorname{sen}(x)$, en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, es:

   a. 1.
   b. 2.
   c. 3.
   d. 4.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$\sqrt{1+\cos(x)} = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow 1+\cos(x) = \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow 1+\cos(x) = 1-\cos^2(x) \Rightarrow$$
   $$\cos(x)+\cos^2(x) = 0 \Rightarrow \cos(x)(1+\cos(x)) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = -1 \Rightarrow$$
   $$x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2 \vee x = \pi.$$

   La solución $x = 3\pi/2$ se descarta.

Las preguntas 6-7 hacen referencia a las figuras 1 y 2.

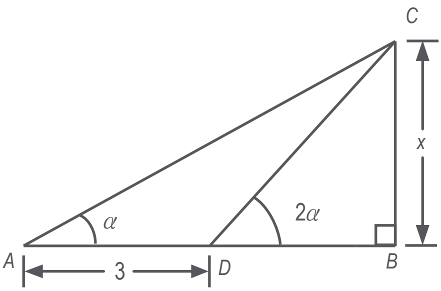


Figura 1

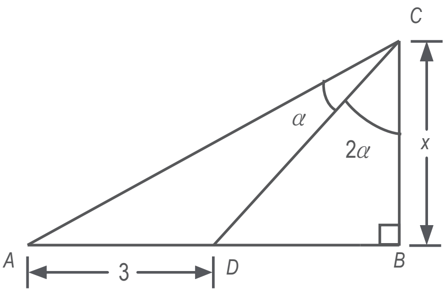


Figura 2

6. El valor de x en la figura 1, con $\alpha = 30°$, es:

   a. $\sqrt{3}/2$.
   b. $\sqrt{3}$.
   c. $3\sqrt{3}/2$.
   d. $2\sqrt{3}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea $DB = y$, con lo que $\tan(\alpha) = \dfrac{x}{3+y}$ y $\tan(2\alpha) = \dfrac{x}{y}$. Ahora nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, así:

   $$\tan(30) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x}{3+y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}\,y \Rightarrow 3x - \sqrt{3}\,y = 3\sqrt{3},$$
   $$\tan(60) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{3}\,y = 0.$$

   Al resolver el sistema se tiene que $x = 3\sqrt{3}/2$.

7. El valor de x en la figura 2, con $\alpha = 22.5°$, es:

   a. $\sqrt{2}/2$.
   b. $\sqrt{2}$.
   c. $3\sqrt{2}/2$.
   d. $2\sqrt{2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

   Sea $DB = y$, con lo que $\tan(2\alpha) = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan(45) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x$.

   Ahora planteamos la otra ecuación, así:

   $$\tan(3\alpha) = \frac{x+3}{x} \Rightarrow \tan(67.5°) = \frac{x+3}{x}.$$

   Para despejar x se calcula

   $$\tan(67.5°) = \tan(135°/2) = \frac{1-\cos(135°)}{\operatorname{sen}(135°)} = 1 + \sqrt{2}.$$

   Finalmente se encuentra que $x = 3\sqrt{2}/2$.

Las preguntas 8-10 hacen referencia a las figuras 3 y 4.

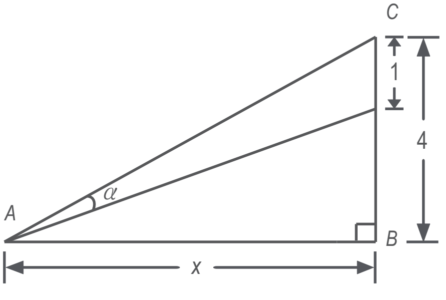


Figura 3

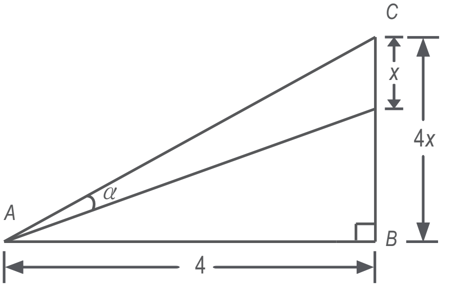


Figura 4

8. El valor de α en la figura 3, con $x = 2$, es:

   a. arctan (1/2).
   b. arctan (3/8).
   c. arctan (1/4).
   d. arctan (1/8).

   El procedimiento es el siguiente:

   El ángulo α es la diferencia $\alpha = \arctan(4/x) - \arctan(3/x)$. Puesto que $x = 2$, se tiene:

   $$\alpha = \arctan(2) - \arctan(3/2).$$

   Ahora se aplica la fórmula de la tangente de una diferencia, así:

   $$\tan(\alpha) = \frac{2 - 3/2}{1 + 2 \cdot 3/2} = 1/8.$$

9. El valor de α en la figura 4, con $x = 1$, es:

   a. arctan (1/7).
   b. arctan (2/7).
   c. arctan (3/7).
   d. arctan (4/7).

   El procedimiento es el siguiente:

   El ángulo α es la diferencia $\alpha = \arctan(4x/4) - \arctan(3x/4)$. Puesto que $x = 1$, se tiene:

   $$\alpha = \arctan(1) - \arctan(3/4).$$

   Ahora se aplica la fórmula de la tangente de una diferencia, así:

   $$\tan(\alpha) = \frac{1 - 3/4}{1 + 1 \cdot 3/4} = 1/7.$$

10. El valor de x en la figura 4, con $\tan(\alpha) = 1/10$, es:

   a. $(5 - \sqrt{13})/3$.
   b. $2(5 - \sqrt{13})/3$.
   c. $3(5 - \sqrt{13})/3$.
   d. $4(5 - \sqrt{13})/3$.

El procedimiento es el siguiente:

El ángulo α es la diferencia $\alpha = \arctan(4x/4) - \arctan(3x/4)$.

Ahora se aplica la fórmula de la tangente de una diferencia, así:

$$\tan(\alpha) = \frac{x - \frac{3x}{4}}{1 + x \cdot \frac{3x}{4}} = \frac{\frac{x}{4}}{1 + \frac{3x^2}{4}} = \frac{x}{3x^2 + 4}.$$

Puesto que $\tan(\alpha) = 1/10$, resulta la ecuación cuadrática $3x^2 - 10x + 4 = 0$, cuya solución válida es:

$$x = (5 - \sqrt{13})/3\,.$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Soluciones para el módulo 10: Álgebra de los números complejos

A. Falso o verdadero

Justifique la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones:

1. El módulo de $3 + j4 + (2 - j3)^2$ es $2\sqrt{17}$.

F	V

Primero que todo se desarrolla el binomio, así:

$$z = 3 + j4 + (2 - j3)^2 = 3 + j4 + (4 - 2 \cdot 2 \cdot j3 + (j3)^2)$$
$$= 3 + j4 + (4 - j12 - 9) = -2 - j8.$$

El módulo del número es:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

2. El valor principal del argumento de $3 + j4 + (2 - j3)^2$ es arctan (4).

F	V

Puesto que el número complejo está en el tercer cuadrante, el valor principal del argumento es $\theta = \pi + \arctan(4)$.

3. La parte real de $2 - j3 + 5 \angle 30^\circ$ es 9/2.

F	V

La parte polar se expresa en forma cartesiana, así:

$$z = 2 - j3 + 5\cos(30^\circ) + j5\,\mathrm{sen}\,(30^\circ) = 2 - j3 + 5\sqrt{3}/2 + j5/2$$
$$= (2 + 5\sqrt{3}/2) + j(-0.5).$$

Se observa que la parte real es $2 + 5\sqrt{3}/2$.

4. La parte imaginaria de $2 - j3 + 5 \angle 30^\circ$ es $-1/2$.

F	V

La parte polar se expresa en forma cartesiana, así:

$$z = 2 - j3 + 5\cos(30^\circ) + j5\,\mathrm{sen}\,(30^\circ) = 2 - j3 + 5\sqrt{3}/2 + j5/2$$
$$= (2 + 5\sqrt{3}/2) + j(-0.5).$$

Se observa que la parte imaginaria es -0.5.

5. El módulo de $\overline{5+j4}+(2+j3)^2$ es 8.

F	V

Primero que todo se desarrolla el binomio, así:

$$z=\overline{5+j4}+(2+j3)^2=5-j4+(4+j12-9)=0+j8\Rightarrow\left|z\right|=8.$$

6. El valor principal del argumento de $\overline{5+j4}+(2+j3)^2$ es $3\pi/2$.

F	V

Primero que todo se desarrolla el binomio, así:

$$z=\overline{5+j4}+(2+j3)^2=5-j4+(4+j12-9)=0+j8\Rightarrow\left|z\right|=8.$$

El valor principal del argumento es $\pi/2$, ya que la parte imaginaria es positiva.

7. La parte real de $2\,\underline{/60^\circ}+4\,\underline{/30^\circ}$ es $1+2\sqrt{3}$.

F	V

La parte polar se expresa en forma cartesiana, así:

$$\begin{aligned} z &= 2\underline{/60^\circ}+4\underline{/30^\circ}\Rightarrow\\ &= 2\cos(60^\circ)+j2\,\text{sen}\,(60^\circ)+4\cos(30^\circ)+j4\,\text{sen}\,(30^\circ)\Rightarrow\\ z &= 2(1/2)+j2(\sqrt{3}/2)+4(\sqrt{3}/2)+j4(1/2)=(1+2\sqrt{3})+j(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Se observa que la parte real es $1+2\sqrt{3}$.

8. La parte imaginaria de $2\,\underline{/60^\circ}+4\,\underline{/30^\circ}$ es $2+\sqrt{3}$.

F	V

La parte polar se expresa en forma cartesiana, así:

$$\begin{aligned} z &= 2\underline{/60^\circ}+4\underline{/30^\circ}\Rightarrow\\ &= 2\cos(60^\circ)+j2\,\text{sen}\,(60^\circ)+4\cos(30^\circ)+j4\,\text{sen}\,(30^\circ)\Rightarrow\\ z &= 2(1/2)+j2(\sqrt{3}/2)+4(\sqrt{3}/2)+j4(1/2)=(1+2\sqrt{3})+j(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Se observa que la parte imaginaria es $2+\sqrt{3}$.

9. Para la función $f(z) = z^2 + 2\overline{z} + 4 - j2$ se verifica que $f(0 + j2) = j6$.

F	V

$$f(z) = z^2 + 2\overline{z} + 4 - j2 = (x + jy)^2 + 2(x - jy) + 4 - j2$$
$$= x^2 + j2xy - y^2 + 2x - j2y + 4 - j2$$
$$= (x^2 - y^2 + 2x + 4) + j(2xy - 2y - 2) \Rightarrow$$
$$f(0 + j2) = (0^2 - 2^2 + 2 \cdot 0 + 4) + j(2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2) = 0 - j6.$$

Se observa que $f(0 + j2) = 0 - j6$.

10. Para la función $f(z) = z^2 + 2\overline{z} + 4 - j2$ se verifica que $f(1 + j1) = 6 - j2$.

F	V

$$f(z) = z^2 + 2\overline{z} + 4 - j2 = (x + jy)^2 + 2(x - jy) + 4 - j2$$
$$= x^2 + j2xy - y^2 + 2x - j2y + 4 - j2$$
$$= (x^2 - y^2 + 2x + 4) + j(2xy - 2y - 2) \Rightarrow$$
$$f(1 + j1) = 6 - j2.$$

Se observa que $f(1 + j1) = 6 - j2$.

11. Al resolver la ecuación $2\overline{z} + z + 2 - j2 = 0$, el resultado es $z = -2/3 - j2$.

F	V

$$2\overline{z} + z + 2 - j2 = 0 \Rightarrow 2(x - jy) + x + jy + 2 - j2 \Rightarrow$$
$$(2x + x + 2) + j(-2y + y - 2)) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \wedge -y - 2 = 0 \Rightarrow$$
$$x = -2/3,\ y = -2 \Rightarrow z = -2/3 - j2.$$

12. Al resolver la ecuación $z^2 + z + 2 = 0$, una de las soluciones es $z = -1/2 + j\sqrt{7}/2$.

F	V

Se procede expresando la función en la forma $u(x, y) + jv(x, y) = 0$:

$$z^2 + z + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + j2xy + x + jy + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - y^2 + x + 2 = 0 \wedge 2xy + y = 0.$$

La segunda ecuación se analiza de la siguiente manera:

$$2xy + y = 0 \Rightarrow y(2x + 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = -1/2.$$

La solución $y = 0$ se descarta ya que implicaría que $x^2 + x + 2 = 0$, lo cual no es posible.

La solución $x = -1/2 \Rightarrow y^2 = 7/4 \Rightarrow\ y = \pm\sqrt{7}/2$.

Las dos soluciones de la ecuación son:

$z_1 = -\,1/2 + j\sqrt{7}\,/2.$
$z_2 = -\,1/2 - j\sqrt{7}\,/2.$

13. Al resolver la ecuación $z^2 + jz + j2 = 0$, una de las soluciones es $z = \sqrt{2} + j1$.

F	V

Se procede expresando la función en la forma $u(x, y) + jv(x, y) = 0$:

$$f(z) = z^2 + jz + j2 \Rightarrow f(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + j(x + jy) + j2 \Rightarrow$$
$$f(x + jy) = x^2 - y^2 - y + j(2x + x + 2)$$
$$f(\sqrt{2} + j1) = 2 - 1 - 1 + j(3\sqrt{2} + 2) = 0 + j(3\sqrt{2} + 2).$$

Para que $z = \sqrt{2} + j1$ sea solución de la ecuación se requiere que $f(\sqrt{2} + j1)$ sea idénticamente igual a $0 + j0$, por lo tanto no es raíz.

14. Una de las raíces cúbicas del número complejo $3 + j3\sqrt{3}$ es $\sqrt[3]{36}\;\underline{/\,20^\circ}$.

F	V

El procedimiento para calcular las raíces cúbicas del número complejo $3 + j3\sqrt{3}$ es:

$$z^3 = 3 + j3\sqrt{3} \Rightarrow z^3 = \sqrt{9 + 27}\;\underline{/\,\tan^{-1}(\sqrt{3}) + 2k\pi} \Rightarrow$$
$$z^3 = \sqrt{36}\;\underline{/\,\pi/3 + 2k\pi}$$
$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{36}}\;\underline{/\,(\pi/3 + 2k\pi)/3};\ k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$
$$z_k = \begin{cases} \sqrt[6]{36}\;\underline{/\,\pi/9} \\ \sqrt[6]{36}\;\underline{/\,7\pi/9} \\ \sqrt[6]{36}\;\underline{/\,13\pi/9} \end{cases} \Rightarrow z_k = \begin{cases} \sqrt[6]{36}\;\underline{/\,20^\circ} \\ \sqrt[6]{36}\;\underline{/\,140^\circ} \\ \sqrt[6]{36}\;\underline{/\,260^\circ} \end{cases}$$

15. Una de las raíces cúbicas del número complejo $27\;\underline{/\,30^\circ}$ es $3 + j0$.

F	V

El procedimiento para calcular las raíces cúbicas del número complejo $27\;\underline{/\,30^\circ}$ es:

$$z^3 = 27 \Rightarrow z^3 = 27\;\underline{/\,30^\circ + k \cdot 360^\circ}$$
$$z_k = 3\;\underline{/\,(30^\circ + k \cdot 360^\circ)/3};\ k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_k = \begin{cases} 3\;\underline{/\,10^\circ} \\ 3\;\underline{/\,130^\circ} \\ 3\;\underline{/\,250^\circ} \end{cases}$$

B. Escogencia múltiple

Se debe escoger la opción y rellenar la casilla correspondiente en la tabla que aparece al final del cuestionario.

Los ejercicios 1-5 hacen referencia a los números complejos $z_1 = 6 + j8$, $z_2 = 2 + j3$.

1. El resultado de la operación $z_1^2 + \overline{z_2}$ es:

   a. $-26 + j93$.
   b. $-26 - j93$.
   c. $26 + j93$.
   d. $26 - j93$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$z = z_1^2 + \overline{z_2} = (6 + j8)^2 + 2 - j3 = 36 - 64 + j96 + 2 - j3 = -26 + j93.$$

2. El resultado de la operación $\overline{z_1 \cdot z_2} - z_2$ es:

   a. $-14 + j37$.
   b. $-14 - j37$.
   c. $14 + j37$.
   d. $14 - j37$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$z = \overline{z_1 \cdot z_2} - z_2 = \overline{(6 + j8) \cdot (2 + j3)} - (2 + j3) = \overline{-12 + j34} - 2 - j3$$
   $$= -12 + j34 - 2 - j3 = -14 - j37.$$

3. El resultado de la operación $z_1/z_2 - \overline{z_2}$ es:

   a. $(-10 - j37)/13$.
   b. $(-10 + j37)/13$.
   c. $(10 - j37)/13$.
   d. $(10 + j37)/13$.

   El procedimiento es el siguiente:

   $$z = z_1/z_2 - \overline{z_2} = \frac{6 + j8}{2 + j3} - (2 - j3) = \frac{(6 + j8)(2 - j3)}{(2 + j3)(2 - j3)} - 2 + j3 = \frac{36 - j2}{13} - 2 + j3$$
   $$= \frac{36 - j2 - 26 + j39}{13} = \frac{10 + j37}{13}.$$

4. Una de las raíces cúbicas de $z_1 - 3\overline{z_2}$ es:

   a. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/0}$.
   b. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/30}$.
   c. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/60}$.
   d. $\sqrt[3]{17}\,\underline{/90}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$z^3 = z_1 - 3\overline{z_2} = 6 + j8 - 3(2 - j3) = 6 + j8 - 6 + j9 = 0 + j17 \Rightarrow z^3 = 17\,\underline{/90^\circ} \Rightarrow$$

$$z_k = \sqrt[3]{17}\,\underline{/(90^\circ + k \cdot 360^\circ)/3};\ k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$z_k = \begin{cases} \sqrt[3]{17}\,\underline{/30^\circ} \\ \sqrt[3]{17}\,\underline{/150^\circ} \\ \sqrt[3]{17}\,\underline{/270^\circ} \end{cases}$$

5. Una de las raíces cúbicas de $z_1 - z_2^2$ es:

   a. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/6.66^\circ}$.
   b. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/126.66^\circ}$.
   c. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/246.66^\circ}$.
   d. $\sqrt[6]{137}\,\underline{/53.33^\circ}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$z^3 = z_1 - z_2^2 = 6 + j8 - (2 + j3)^2 = 6 + j8 - (-5 + j12) = 11 - j4 \Rightarrow$$

$$z^3 = \sqrt{137}\,\underline{/160^\circ} \Rightarrow$$

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{137}}\,\underline{/(160^\circ + k \cdot 360^\circ)/3};\ k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$z_k = \begin{cases} \sqrt[6]{137}\,\underline{/53.33^\circ} \\ \sqrt[6]{137}\,\underline{/173.33^\circ} \\ \sqrt[6]{137}\,\underline{/293.33^\circ} \end{cases}$$

Las preguntas 6-7 hacen referencia a las funciones $f(z) = z^2 + 2z + j3$ y $g(z) = z^2 + j3$.

6. El resultado de efectuar la operación $f(1 + j1) \cdot g(0 - j2)$ es:

   a. $-29 - j22$.
   b. $-29 + j22$.
   c. $29 - j22$.
   d. $29 + j22$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$f(z) = z^2 + 2z + j3 \Rightarrow$$
$$f(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + 2(x + jy) + j3 = (x^2 - y^2 + 2x) + j(2xy + 2y + 3)$$
$$f(1 + j1) = 2 + j7$$
$$g(z) = z^2 + j3 \Rightarrow$$
$$g(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + j3 = (x^2 - y^2) + j(2xy + 3) \Rightarrow$$
$$g(0 - j2) = -4 + j3$$
$$f(1 + j1) \cdot g(0 - j2) = (2 + j7) \cdot (-4 + j3) = -29 - j22.$$

7. Uno de los ceros de $g(z)$ es:

   a. $0 + j\sqrt{3}$.
   b. $0 - j\sqrt{3}$.
   c. $\sqrt{3/2} + j\sqrt{3/2}$.
   d. $\sqrt{3/2} - j\sqrt{3/2}$.

   El procedimiento es el siguiente:

$$g(z) = z^2 + j3 \Rightarrow$$
$$g(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + j3 = (x^2 - y^2) + j(2xy + 3) \Rightarrow$$
$$x^2 - y^2 = 0 \wedge 2xy + 3 = 0$$
$$\text{Si } y = x \Rightarrow 2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x \neq y$$
$$\text{Si } y = -x \Rightarrow -2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3/2} \Rightarrow$$
$$z_1 = \sqrt{3/2} - j\sqrt{3/2}$$
$$z_2 = -\sqrt{3/2} + j\sqrt{3/2}.$$

8. Una de las soluciones de la ecuación $z^2 + (1 - j)z - j1 = 0 + j0$ es:

   a. $-1 + j0$.
   b. $1 + j0$.
   c. $-1 + j1$.
   d. $-1 - j1$.

El procedimiento es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&f(z) = z^2 + (1 - j)z - j1 \Rightarrow \\
&f(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + (1 - j)(x + jy) - j1 \\
&\qquad\qquad = (x^2 - y^2 + j2xy) + (1 - j)(x + jy) - j1 \Rightarrow \\
&f(x + jy) = (x^2 - y^2 + x + y) + j(2xy + y - x - 1) \Rightarrow \\
&x^2 - y^2 + x + y = 0 \\
&2xy + y - x - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Al resolver el sistema, $x = 0$ o $x = -1$.

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z_1 = -1 + j0.$$

9. Una de las soluciones de la ecuación $z^2 + z + 1 - j1 = 0 + j0$ es:

a. $-1 + j0$.
b. $1 + j0$.
c. $-1 + j1$.
d. $-1 - j1$.

El procedimiento es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&f(z) = z^2 + z + 1 - j1 \Rightarrow \\
&f(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + x + jy + 1 - j1 \\
&\qquad\qquad = (x^2 - y^2 + x + 1) + j(2xy + y - 1) \Rightarrow \\
&\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ 2xy + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 = -1 - j1
\end{aligned}
$$

10. Una de las soluciones de la ecuación $z^2 + jz - 1 - j1 = 0 + j0$ es:

a. $-1 + j0$.
b. $1 + j0$.
c. $1 + j1$.
d. $1 - j1$.

El procedimiento es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&f(z) = z^2 + jz - 1 - j1 \Rightarrow \\
&f(x + jy) = x^2 - y^2 + j2xy + j(x + jy) - 1 - j1 = x^2 - y^2 + j2xy + jx - y - 1 - j1 \Rightarrow \\
&\qquad\qquad = (x^2 - y^2 - y - 1) + j(2xy + x - 1) \Rightarrow \\
&\begin{cases} x^2 - y^2 - y - 1 = 0 \\ 2xy + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 1 + j0
\end{aligned}
$$

Tabla de respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

Ude@

Educación virtual

Para ser, saber y saber hacer