

Regularización de Funciones Automórficas de Variedades con Geometría Especial de Kähler

Carlos Arturo Jiménez Orjuela

Asesor
Nelson Vanegas Ph.D

Tesis de Maestría

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física
Medellín
2012

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres y a mis hermanas por tener fe en mí a lo largo de toda mi carrera y por todo el apoyo incondicional que me brindaron. A mis profesores y compañeros de la maestría, en particular a mi asesor Nelson Vanegas quien fue mi guía en este sendero. Y en general a todas aquellas personas que me ayudaron en mi posgrado.

Índice general

1. Introducción	5
2. Elementos de Geometría Diferencial	7
2.1. formas diferenciales	7
2.2. Teoría de Hodge	9
2.3. Grupo de Homología y Co-homología	11
2.4. Variedades complejas	14
3. Funciones modulares y automorfas	22
3.1. Función Zeta de Riemann	22
3.2. Enteros Gaussianos y Función Theta	25
3.3. Transformada de Mellin	30
3.4. Curvas Elípticas y Funciones Modulares	32
4. Breve Presentación En Teoría de Cuerdas	36
4.1. Cuerda bosónica	37
4.1.1. Cuerda abierta con extremos libres	41
4.1.2. Cuerda abierta con extremos fijos	41
4.1.3. Cuerda cerrada	42
4.2. Cuantización de la cuerda bosónica	43
4.2.1. Espectro de la cuerda abierta	44
4.2.2. Espectro de la cuerda cerrada	47
4.3. Teoría de campos conformes	48
4.3.1. Teoría conforme de campos en la cuerda cerrada	51
4.4. Supercuerdas	52
4.4.1. Transformaciones supersimétricas en la hoja de mundo	53
4.4.2. Cuerda abierta-Sector R	55
4.4.3. Cuerda abierta-Sector N-S	56

4.4.4.	Cuerda cerrada	56
4.4.5.	Cuantización canónica	57
4.4.6.	Estados Físicos	58
5.	Geometría especial	62
5.1.	Compactificación	62
5.1.1.	Compactificación y dualidad T	63
5.1.2.	Compactificación sobre Toros	65
5.1.3.	Orbifolds	68
5.2.	Calabi-Yau n-fold	70
5.3.	Espacio de módulos sobre Calabi-Yau	72
5.3.1.	Deformación de los campos antisimétricos	72
5.3.2.	Deformación de la métrica	73
6.	Regularización de funciones Automórficas	74
6.1.	Motivación y planteamiento del problema	74
6.2.	Fórmula de Masa	76
6.3.	Regularización zeta	77
6.4.	Coset $SU(1, 1)/U(1)$	79
6.5.	Coset $SU(1, 2)/SU(2) \times U(1)$	87
6.5.1.	Primera contribución a la función automórfica.	88
6.5.2.	Segunda contribución a la función automórfica	96
7.	Aplicación: Ecuación de Wheeler-De Witt	104
7.1.	Planteamiento del problema	104
7.2.	Algunos resultados interesantes	106
7.3.	Cuatro Contribuciones	107
7.4.	Resultado Final	108
8.	Conclusiones y Perspectivas	111

Capítulo 1

Introducción

La teoría de cuerdas como una teoría de unificación ha sido exitosa en su formalismo, aunque es bien sabido que tal teoría no tiene aun verificación experimental, además no son claros qué experimentos puedan llevarse a cabo para verificar o falsear la teoría de cuerdas. Las principales razones de este inconveniente son las dimensiones extras, la escala de energía tan alta en la que las constantes de acople gauge encuentran un valor común y las escalas de sus parámetros que son del orden de la masa y de la longitud de planck, por otro lado una ventaja de la teoría es el hecho de que surge de manera natural un campo sin masa de espín dos, el cual representa perfectamente a la partícula mediadora de la gravitación, el "gravitón", en este sentido puede y debe considerarse tal teoría como una teoría cuántica de la gravitación. Con el objetivo de hacer fenomenología, recientes estudios se han enfocado en el problema de bajar las dimensiones y la escala de energía para obtener un lagrangiano efectivo en cuatro dimensiones [1].

En supercuerdas las constantes de acople se unifican a nivel árbol a una escala de energía del orden de 10^{18}GeV y la unificación observada suministrada por el modelo estándar adoptando supersimetría es de alrededor de 10^{16}GeV . Para hacer esto consistente se requiere hacer correcciones de umbral a un loop a las ecuaciones del grupo de renormalización para bajar la escala de energía de unificación [2]. Por otro lado el problema extradimensional se resuelve compactificando las dimensiones extras sobre una variedad adecuada, que en el caso que nos compete serán variedades de Kähler, aunque idealmente la compactificación debe hacerse sobre una variedad de Calabi-Yau, su métrica en su forma general no es conocida, por lo cual se realiza

el estudio sobre variedades Kähler las cuales son más manejables y además comparten muchas propiedades con las Calabi-Yau.

Mediante este proceso de bajar la escala de energía y las dimensiones extras, la constante de acople gauge g_a se modifica como:

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = k_a \frac{16\pi^2}{g_{GUT}^2} + b_a \log \frac{M_{GUT}^2}{\mu^2} + \Delta_a, \quad (1.1)$$

donde Δ_a es la corrección de umbral a un loop la cual recibe contribuciones del espectro de los estados masivos de la teoría de cuerdas [1]. Δ_a depende fuertemente del proceso de compactificación y consecuentemente del espacio de módulos, además de estar definida en un espacio de topología no trivial, con grupos de cohomología complejos, es una función multi-periódica, en el caso que nos compete es una función doble-periódica y en este sentido es una función automórfica, que en principio diverge. Es precisamente el proceso de regularización, de eliminar este infinito para casos donde el espacio de módulos tiene geometría especial de Kähler el objeto de estudio de este trabajo.

Las funciones automórficas y las series de Eisenstein que describiremos posteriormente juegan también un papel importante en el cálculo de la energía libre de compactificación de la cuerda heterótica [3], debido a que tal energía debe ser regularizada obteniéndose una expresión similar a la expresión obtenida para nuestra función automórfica, también son importantes los cálculos realizados en correcciones de umbral R^4 en teorías de cuerdas del tipo IIB [4].

En el Capítulo 2 se presentaran los elementos básicos de geometría diferencial como parte de la base fundamental matemática que sostiene la teoría, en el Capítulo 3 se introduce al lector en la teoría de formas modulares con especial atención a la función zeta de Riemann y las series de Eisenstein, el capítulo 4 da una introducción a los elementos importantes de teoría de cuerdas y que serán utilizados mas adelante, y finalmente en el Capítulo 5 se presenta la función automórfica a regularizar utilizando como espacio de módulos el espacio cociente $SU(1, 2)/SU(2) \times U(1)$.

Capítulo 2

Elementos de Geometría Diferencial

2.1. formas diferenciales

Las formas diferenciales ofrecen una manera simple y práctica de llevar a cabo cálculos con tensores antisimétricos evitando el excesivo uso de índices, además la forma de integración junto con el operador de Hodge permite ver mas claramente integrales espaciales, y teoremas tan importantes como el de Green o el de Stoktes quedan escritos de una forma unificada y sencilla.

Se sabe que dada una variedad M de dimensión m , el diferencial dx^μ provee una base para el espacio cotangente $T_P^*(M)$ en el punto P , y en consecuencia para los tensores del tipo $(0,1)$ es decir, el espacio expandido por dx^μ esta compuesto por mapeos que toman vectores tangentes en el espacio $T_P(M)$ y los llevan a los reales, entonces sobre la base de los tensores de rango $(0,1)$ se hace la siguiente definición.

Definición 2.1. *El producto cuña \wedge entre diferenciales se define como un producto tensorial totalmente antisimétrico.*

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{Sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \quad (2.1)$$

donde P es un elemento del grupo simétrico S_r .

Debido a la antisimetría del producto cuña, se obtiene que la cantidad $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ se anula si uno de los índices se repite al menos una

vez.

Este producto forma la base para las r-formas segun la siguiente definici3n

Definici3n 2.2. Una r-forma ω es un tensor de orden r totalmente antisimétrico, el cual se puede expandir como,

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.2)$$

donde los coeficientes $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$ son tomados totalmente antisimétricos.

Por ejemplo, una cero-forma es un escalar

$$\alpha_0 = \phi, \quad (2.3)$$

una 1-forma es un co-vector

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (2.4)$$

y una 2-forma es entonces un tensor de segundo orden totalmente antisimétrico

$$B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.5)$$

A partir de dos formas diferenciales es posible construir una forma diferencial de mayor orden, digamos a partir de la p-forma α_p y la q-forma β_q podemos obtener la (p+q)-forma

$$\gamma_{p+q} = \alpha_p \wedge \beta_q = (-1)^{pq} \beta_q \wedge \alpha_p. \quad (2.6)$$

El espacio de las p-formas en una variedad M sobre un campo A se denota como $\Omega^p(M, A)$ donde el campo A puede ser por ejemplo los reales o los complejos, en el caso de campo real se denota simplemente como $\Omega^p(M)$. La

dimensi3n del espacio $\Omega^p(M)$ es $\binom{m}{r}$,

se introduce entonces naturalmente un operador diferencial,

Definici3n 2.3. la derivada exterior es un mapa $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ de la forma:

$$d = dx^\mu \partial_\mu. \quad (2.7)$$

Por ejemplo la derivada exterior actuando sobre una cero-forma ϕ y la uno-forma $A = A_\mu dx^\mu$ produce

$$d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu,$$

$$dA = dA_\mu dx^\mu = \partial_\nu A_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{1}{2} F_{\nu\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu,$$

donde

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu,$$

es reconocible como el tensor antisimétrico de un campo gauge. No es difícil demostrar que la derivada exterior de un producto de formas puede escribirse así

$$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d\alpha_p \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q, \quad (2.8)$$

y debido a la antisimetría de tal operador, satisface la propiedad $d^2 = 0$.

2.2. Teoría de Hodge

Si una variedad M esta equipada con una métrica Riemanniana g , entonces existe un operador conocido como estrella de Hodge.

Definición 2.4. *Dada una métrica Riemanniana sobre una variedad M , existe una acción estrella de Hodge $*$ sobre la base de formas dada por.*

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!} \epsilon^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\mu_{p+1}, \dots, \mu_n} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (2.9)$$

Así por ejemplo dada la p-forma

$$\alpha_p = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p},$$

el operador estrella de hodge actúa como

$$*\alpha = \frac{\sqrt{g}}{(n-p)! p!} \epsilon^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\mu_{p+1}, \dots, \mu_n} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n},$$

este operador $*$ es un mapa entre espacios de formas diferenciales de diferentes ordenes, entonces

$$* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M),$$

por lo cual se obtiene

$$*^2 : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M).$$

Definición 2.5. *La forma diferencial que define el volumen sobre una variedad Riemanniana es*

$$dV = *1 = \frac{1}{n!} \sqrt{g} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \equiv \sqrt{g} d^n x. \quad (2.10)$$

Definición 2.6. *El producto interno métrico entre dos formas diferenciales es.*

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge *\beta. \quad (2.11)$$

Con lo anterior es posible definir ya una derivada adjunta de la siguiente manera

Definición 2.7. *El operador δ , adjunto a d , con respecto al producto interno Riemanniano se define como:*

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta). \quad (2.12)$$

Definición 2.8. *El laplaciano Δ sobre formas de cualquier grado es,*

$$\Delta \equiv d\delta + \delta d. \quad (2.13)$$

Definición 2.9. *Una forma ω se dice ser armónica si satisface $\Delta\omega = 0$.*

A partir de estas definiciones es posible demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *Una forma armónica ω sobre una variedad Riemanniana compacta satisface*

$$d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0, \quad (2.14)$$

y se le llama forma cerrada y co-cerrada respectivamente.

Existe además otro tipo especial de formas diferenciales, y son aquellas que provienen del diferencial de otra forma de menor grado, a este tipo de formas se les conoce como formas exactas. Entonces definimos los dos conjuntos de formas diferenciales que nos permitirán construir mas adelante el grupo de Co-homología.

Definición 2.11. *Sea $Z^p = \{\omega_p | d\omega = 0\}$ el conjunto de p -formas cerradas, y $B^p = \{\omega_p | \omega_p = d\omega_{p-1}\}$ el conjunto de p -formas exactas.*

2.3. Grupo de Homología y Co-homología

En esta sección se resumen las definiciones importantes del grupo de Homología y Co-homología, que son de gran importancia para el manejo de invariantes topológicos y productos internos que simplifican mucho teoremas tan reconocidos como el Teorema de Stokes como se verá más adelante.

Definición 2.12. Sean p_0, \dots, p_r puntos geoméricamente independientes en \mathbb{R}^m donde $r \leq m$. Se define el r -simplejo $\sigma_r = \langle p_0, \dots, p_r \rangle$ como,

$$\sigma_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\}. \quad (2.15)$$

Geoméricamente los r -simplejos son poliedros elementales en el espacio euclídeo, así por ejemplo $\sigma_0 = \langle p_0 \rangle$ es un punto o un vértice, $\sigma_1 = \langle p_0 p_1 \rangle$ es una línea o una arista, $\sigma_2 = \langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ es un triángulo con su interior incluido, y ésto se generaliza. Estos elementos tienen orientación, en cuyo caso se cambia la notación de $\langle \dots \rangle$ para un r -simplejo desorientado a (\dots) para uno orientado, por ejemplo $(p_0 p_1) = -(p_1 p_0)$ y en general se tiene que $(p_{i_0}, \dots, p_{i_r}) = \text{sgn}(P)(p_0, \dots, p_r)$ donde P es la permutación

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & r \\ i_0 & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}.$$

Definición 2.13. Se define en el espacio euclideo el r -simplejo estándar $\bar{\sigma}_r$ como,

$$\bar{\sigma}_r = \left\{ (x^1, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r \mid x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^r x^\mu \leq 1 \right\}, \quad (2.16)$$

se define además la integración de la r -forma $\omega = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$ (elemento de volumen en \mathbb{R}^r) sobre $\bar{\sigma}_r$ por la siguiente expresión

$$\int_{\bar{\sigma}_r} \omega \equiv \int_{\bar{\sigma}_r} a(x) dx^1 dx^2 \dots dx^r. \quad (2.17)$$

Sea σ_r un r -simplejo en \mathbb{R}^r y $f : \sigma_r \rightarrow M$ un mapa suave sobre una variedad m -dimensional M , f puede no tener inversa véase figura (2.3). Se denota la imagen de σ_r en M como s_r y se le llama r -simplejo singular. Sea $\{s_{r,i}\}$ el conjunto de r -simplejos en M , entonces se define la r -cadena c en M por una suma formal de elementos en $\{s_{r,i}\}$ con coeficientes reales,

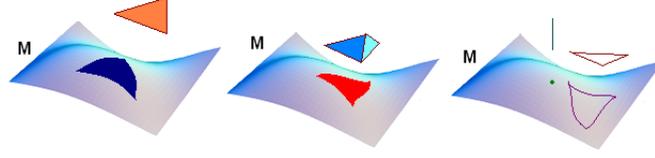


Figura 2.1: Esquemas de posibles embebimientos de r-simplejos en una variedad M

$$c = \sum_i a_i s_{r,i} \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Las r-cadenas en M , forman el grupo cadena $C_r(M)$. Además “ f ” mapea la frontera $\partial\sigma_r$ a un subconjunto de M , es decir $\partial s_r \equiv f(\partial\sigma_r)$ es un conjunto de $(r - 1)$ -simplejos en M y representa la frontera de s_r . ∂s_r representa la frontera geométrica de s_r y la orientación es heredada de los r-simplejos en los reales como se mostró anteriormente. En este sentido se trabaja con el operador $\partial : C_r(M) \rightarrow C_{r-1}(M)$. Es claro que este operador es nilpotente pues $\partial^2 = 0$ es decir, las fronteras no tienen fronteras. Con este operador se definen dos subconjuntos de $C_r(M)$. Una r-cadena c_r es un r-ciclo si no tiene frontera, o sea $\partial c_r = 0$ y es una r-frontera si es frontera de otra, es decir si existe alguna r+1-cadena $c_{r+1}(M)$ tal que $c_r = \partial c_{r+1}$. El conjunto de los r-ciclos forma el grupo ciclo $Z_r(M)$ y el conjunto de las r-fronteras forman el grupo frontera $B_r(M)$. es claro que $B_r(M) \subset Z_r(M)$ pues como se sugirió antes las fronteras no tienen fronteras. Con esto se define el grupo de Homología $H_r(M)$ [5] como un espacio cociente así,

$$H_r(M) \equiv Z_r(M)/B_r(M). \quad (2.19)$$

En pocas palabras el grupo de homología lo conforman aquellos ciclos que no son fronteras ni se pueden reducir a un punto. Recuérdese que un invariante topológico es aquella cantidad que no cambia bajo difeomorfismos. Los grupos frontera y ciclos no son invariantes topológicos pero el grupo de homología si lo es.

Análogo al grupo de Homología se estudiará lo más relevante para el grupo de Co-homología, éste definido sobre la teoría de formas diferenciales.

Una r-forma $\omega \in \Omega^r(M)$ es cerrada si $d\omega = 0$ y es exacta si $\omega = d\eta$ para algún $\eta \in \Omega^{r-1}(M)$.

Definición 2.14. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . El conjunto de r -formas cerradas es llamado el r -ésimo grupo co-ciclo y se denota como $Z^r(M)$. El conjunto de r -formas exactas es llamado el r -ésimo grupo co-frontera y se denota por $B^r(M)$. Debido a que $d^2 = 0$ las formas exactas son también cerradas, por lo cual $B^r(M) \subset Z^r(M)$.

Definición 2.15. El r -ésimo grupo de co-homología de De Rham es definido por:

$$H^r(M; \mathbb{R}) \equiv Z^r(M)/B^r(M). \quad (2.20)$$

Recuérdese que un espacio cociente puede verse como una clase de equivalencia, en este caso sea $\omega \in Z^r(M)$. Entonces $[\omega] \in H^r(M)$ es la clase de equivalencia $\{\eta \in Z^r(M) \mid \eta = \omega + d\psi, \psi \in \Omega^{r-1}(M)\}$. Es decir dos formas son co-homologas si difieren por una forma exacta.

Se habrá notado ya la semejanza entre los grupos de homología y co-homología, pues como sus nombres lo sugieren son espacios duales el uno del otro y tales que $\dim H^r(M) = \dim H_r(M)$, de tal manera que se define un producto interno entre sus elementos de la siguiente manera.

Definición 2.16. Sea M una variedad m -dimensional, $c \in C_r(M)$; $\omega \in \Omega^r(M)$ $1 \leq r \leq m$. Se define el producto interno $(\ , \) : C_r(M) \times \Omega^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por el mapa,

$$c, \omega \rightarrow \Lambda(c, \omega) = (c, \omega) \equiv \int_c \omega, \quad (2.21)$$

este producto es lineal en las dos entradas, y el teorema de Stokes toma la simple forma

$$(c, d\omega) = (\partial c, \omega),$$

lo anterior queda resumido en el siguiente teorema,

Teorema 2.17 (Teorema de De Rham). Si M es una variedad compacta, $H_r(M)$ y $H^r(M)$ son de dimensión finita, y el mapa

$$\Lambda : H_r(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

Es bilineal y no degenerado. Así $H^r(M)$ es el espacio vectorial dual de $H_r(M)$.

Como se mencionó antes, una forma exacta es siempre cerrada, pero una forma cerrada no necesariamente es exacta. El siguiente teorema provee las condiciones bajo las cuales la anterior relación es reciproca.

Teorema 2.18 (Lema de Poincare). Si una vecindad coordinada U de una variedad M es contraíble a un punto $p_0 \in M$, entonces cualquier r -forma cerrada sobre U es también exacta

2.4. Variedades complejas

Las variedades de Calabi-yau son el mejor tipo de variedad sobre la cual se realiza compactificación en teoría de supercuerdas, y tales variedades son esencialmente variedades de Kähler, además, en el proceso de regularización de funciones automórficas se utilizara una geometría especial de kahler.

las variedades de Kähler son un tipo muy especial de variedades complejas, por lo cual se dedica esta sección a las definiciones y teoremas importantes acerca de las variedades complejas.

Para empezar recuérdese de la teoría de variable compleja, que una función o mapa $f = f_1 + if_2 : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ se dice ser holomorfo (o analítico) sobre \mathbb{C}^m si satisface las relaciones de Cauchy-Riemann para $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$ asi,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f_2}{\partial y^\mu} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial f_1}{\partial y^\mu}. \quad (2.22)$$

Definición 2.19. *M es una variedad compleja si*

1. *M es un espacio topológico*
2. *M esta provisto con un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$, donde $\{U_i\}$ es una familia de conjuntos abiertos que cubren M y φ_i es un homeomorfismo de U_i a un subconjunto U'_i de \mathbb{C}^m*
3. *Dada una intersección no vacia de dos abiertos U_i y U_j , el mapa $\psi_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$ de $\varphi_i(U_i U_j)$ a $\varphi_j(U_i U_j)$ es analítico.*

En la anterior definicion "m" es la dimensión compleja de la variedad denotada como $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. La diferencia crucial entre variedades complejas y reales es que la función transición mas que ser C^∞ son holomorfas. Se puede pensar en \mathbb{C}^n como \mathbb{R}^{2n} , por ello una variedad compleja n-dimensional puede verse como una variedad real 2n-dimensional.

Definición 2.20. *Sea $f : M \rightarrow N$ un mapa entre las variedades complejas M,N de dimensiones m y n respectivamente. Sean las cartas $\{(U, \varphi)\}$ de M y $\{(V, \psi)\}$ de N, $p \in U$, $f(p) \in V$. Se escriben las coordenadas de cada carta como $\{z^\mu\} = \varphi(p)$ y $\{w^\nu\} = \psi(f(p))$, con esto se obtiene el mapa $\psi f \varphi^{-1} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$*

1. *Si cada función w^ν es una función holomorfa de z^μ , entonces se dice que f es un mapa holomorfo.*

2. M es biholomorfo a N si existe un difeomorfismo $g : M \rightarrow N$ el cual es también un holomorfismo.
3. Una función holomorfa es un mapa holomorfo $f : M \rightarrow \mathbb{C}$

Teorema 2.21. *Cualquier función holomorfa sobre una variedad compleja compacta es constante.*

Recuérdese de la teoría de variedades reales que $T_p M$ denota el espacio tangente a la variedad M en el punto $p \in M$ y $T_p^* M$ denota el espacio cotangente (dual de $T_p M$) a la variedad M en el punto $p \in M$, el conjunto de todas las funciones reales sobre una variedad diferenciable M se denota como $F(M)$ y el conjunto de todos los campos vectoriales sobre una variedad diferenciable M se denota como $X(M)$. Con el objetivo de aprovechar la teoría de variedades reales es posible pasar de lo real a lo complejo por un método sencillo conocido como complexificación así.

- Sean $g, h \in F(M)$, entonces $f = g + ih$ es una función suave compleja-valorada $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, el conjunto de todas las funciones suaves compleja-valoradas sobre M es conocido como la complexificación de $F(M)$ y se denota como $F(M)^\mathbb{C}$
- Sean $X, Y \in T_p M$, entonces $Z = X + iY$ es un vector complejo en $T_p M^\mathbb{C}$, y denota la complexificación de $T_p M$. Z actúa sobre una función $f = f_1 + if_2 \in F(M)^\mathbb{C}$ como:

$$Z[f] = X[f_1] - Y[f_2] + i\{X[f_2] + Y[f_1]\}$$

- Sean $\omega, \eta \in T_p^* M$, entonces $\zeta = \omega + i\eta$ es un covector en $(T_p^* M)^\mathbb{C}$, y denota la complexificación de $T_p^* M$.
- Sean $X, Y \in X(M)$, entonces $Z = X + iY$ es un campo vectorial complejo el conjunto de todos los campos vectoriales complejos es la complexificación de $X(M)$ y se denota como $X(M)^\mathbb{C}$.

Esto se generaliza para cualquier estructura sobre M , tal como campos tensoriales o formas diferenciales. De lo anterior se muestra que $(T_p^* M)^\mathbb{C} = (T_p^\mathbb{C} M)^*$, por lo cual se hará referencia a este como $T_p^* M^\mathbb{C}$.

Sea M una variedad compleja con $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ y con coordenadas $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$, entonces una base para $T_p M$ y $T_p^* M$ la forman respectivamente los 2-m vectores,

$$\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m; \partial/\partial y^1, \dots, \partial/\partial y^m\}, \quad (2.23)$$

$$\{dx^1, \dots, dx^m; dy^1, \dots, dy^m\}. \quad (2.24)$$

Sin embargo es conveniente trabajar con los 2-m vectores:

$$\partial/\partial z^\mu \equiv \frac{1}{2}\{\partial/\partial x^\mu - i\partial/\partial y^\mu\}, \quad (2.25)$$

$$\partial/\partial \bar{z}^\mu \equiv \frac{1}{2}\{\partial/\partial x^\mu + i\partial/\partial y^\mu\}, \quad (2.26)$$

Como una base para $T_p M^{\mathbb{C}}$. Y correspondientemente la base para $T_p^* M^{\mathbb{C}}$ esta dada por las 2-m formas,

$$dz^\mu \equiv dx^\mu + idy^\mu \quad d\bar{z}^\mu \equiv dx^\mu - idy^\mu. \quad (2.27)$$

Definición 2.22. Sea M una variedad compleja. Defínase sobre el punto $p \in M$ el mapa lineal $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ por,

$$J_p \partial/\partial x^\mu = \partial/\partial y^\mu \quad J_p \partial/\partial y^\mu = -\partial/\partial x^\mu, \quad (2.28)$$

notese que $J_p^2 = -I$, donde I es la identidad sobre $T_p M$. Se verifica que las componentes de J_p en la base (2.23) están dadas por

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Definición 2.23. Se define la estructura cuasicompleja J sobre M como un campo tensorial cuyas componentes en p están dadas por 2.29.

Es fácil ver que en las bases 2.25 y 2.26 J_p toma la siguiente forma,

$$J_p = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Sea $Z \in T_p M^{\mathbb{C}}$, si $Z = Z^\mu \partial / \partial Z^\mu$ entonces $J_p Z = iZ$, y si $Z = Z^\mu \partial / \partial \bar{Z}^\mu$ entonces $J_p Z = -iZ$. en este sentido J_p divide a $T_p M^{\mathbb{C}}$ y en general a todas las estructuras sobre M en dos espacios disjuntos asi:

$$T_p M^{\mathbb{C}} = T_p M^+ \oplus T_p M^-$$

Donde $T_p M^\pm = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}} \mid J_p Z = \pm iZ\}$. Si el vector $Z \in T_p M^+$ entonces se dice que Z es un vector holomórfico, y si el vector $Z \in T_p M^-$ entonces se le llama antiholomórfico. Similar al espacio tangente, $X(M)$ se divide en dos.

$$X(M) = X(M)^+ \oplus X(M)^-$$

donde un campo vectorial Z se puede escribir como, $Z = Z^+ + Z^-$.

Se M una variedad diferenciable, sobre la cual se definen dos q-formas $\omega, \eta \in \Omega_p^q(M)$, con esto defínase la q-forma compleja $\zeta = \omega + i\eta$, el espacio vectorial de las q-formas complejas en $p \in M$ se denota como $\Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$.

Propiedades 2.24. Sean $\zeta = \omega + i\eta \in \Omega^q(M)^{\mathbb{C}}$ y $\xi = \varphi + i\psi \in \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$, entonces se cumple que:

1. $\zeta \wedge \xi = (\omega \wedge \varphi - \eta \wedge \psi) + i(\omega \wedge \psi + \eta \wedge \varphi)$
2. $d\zeta = d\omega + id\eta$
3. $\zeta \wedge \xi = (-1)^{qr} \xi \wedge \zeta$
4. $d(\zeta \wedge \xi) = d\zeta \wedge \xi + (-1)^q \zeta \wedge d\xi$

Definición 2.25. Sea M una variedad compleja de dimensión m , $\omega \in \Omega_p^q M^{\mathbb{C}}$ tal que $q \leq 2m$, r y s dos enteros positivos tales que $r + s = q$ y $V_i \in T_p M^{\mathbb{C}}$, ($1 \leq i \leq q$), entonces se dice que ω es de bigrado (r, s) , o simplemente que es una (r, s) -forma, si $\omega(V_1, \dots, V_q) = 0$ a menos que r de los V_i vectores están en $T_p M^+$ y s de los V_i vectores están en $T_p M^-$. El conjunto de las (r, s) -formas en p es denotado como $\Omega_p^{r, s}(M)$, y cuando se define sobre toda M se denota como $\Omega^{r, s}(M)$.

Una (r, s) -forma se escribe en la base de $\Omega_p^{r, s}(M)$ como

$$\omega = \frac{1}{r!s!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_r}. \quad (2.31)$$

Propiedades 2.26. Se M una variedad compleja con $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, y ω, η formas diferenciales complejas.

1. Si $\omega \in \Omega^{q,r}(M)$, entonces $\bar{\omega} \in \Omega^{r,q}(M)$.
2. Si $\omega \in \Omega^{q,r}(M)$ y $\eta \in \Omega^{q',r'}(M)$, entonces $\omega \wedge \eta \in \Omega^{q+q',r+r'}(M)$.
3. Una q -forma ω se escribe unívocamente como:

$$\omega = \sum_{r+s=q} \omega^{r,s}$$

Donde $\omega^{r,s} \in \Omega^{r,s}(M)$.

4. De lo anterior se obtiene la descomposición

$$\Omega^q(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=q} \Omega^{r,s}(M)$$

Segun lo anterior una q forma ω se escribe como

$$\omega = \sum_{r+s=q} \frac{1}{r!s!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_r}. \quad (2.32)$$

Definición 2.27. Se definen los operadores Dolbeault $\partial : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r+1,s}(M)$ y $\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r,s+1}(M)$ tales que la derivada exterior de una q -forma compleja de la forma (2.32), esta dada por

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{r!s!} \left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} dz^\lambda + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} d\bar{z}^\lambda \right) dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_r} \\ &\equiv \partial\omega + \bar{\partial}\omega \end{aligned}$$

Propiedades 2.28. Sean ω y ξ dos q -formas complejas, entonces se cumple que:

1. $\partial\bar{\partial}\omega = (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega = \bar{\partial}\bar{\partial}\omega = 0$
2. $\partial\bar{\omega} = \overline{\bar{\partial}\omega} \quad \bar{\partial}\bar{\omega} = \overline{\partial\omega}$
3. $\partial(\omega \wedge \xi) = \partial\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge \partial\xi$
4. $\bar{\partial}(\omega \wedge \xi) = \bar{\partial}\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge \bar{\partial}\xi$

Nótese que estos operadores cumplen los requisitos para formar un grupo de cohomología como el que se mencionó en la sección anterior. Por ejemplo $Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ es el conjunto de las (r,s)-formas $\bar{\partial}$ -cerradas y se llama el grupo (r,s)-cociclo, $B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ es el conjunto de las (r,s)-formas $\bar{\partial}$ -exactas y se llama el grupo (r,s)-cofrontera. El (r,s)-ésimo grupo de $\bar{\partial}$ -cohomología se define como:

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) \equiv Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)/B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$$

Definición 2.29. Una métrica Riemanniana g de una variedad compleja M es hermítica si cumple $g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$ en cada punto p sobre M . En este caso (M, g) es una variedad hermítica.

Nótese que con esta métrica $J_p X$ es ortogonal a X

$$g_p(J_p X, X) = g_p(J_p^2 X, J_p X) = -g_p(J_p X, X) = 0.$$

Teorema 2.30. Una variedad compleja siempre admite una métrica hermítica.

Definición 2.31. Sea (M, g) una variedad hermítica. Defínase el campo tensorial Ω cuya acción sobre $X, Y \in T_p M$ es

$$\Omega_p(X, Y) = g_p(J_p X, Y),$$

Se verifica que Ω es antisimétrico, por lo cual define una dos-forma conocida como la forma de Kähler.

Propiedades 2.32. Sea Ω la forma de Kähler de una variedad hermítica con $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, entonces se cumple.

1. Ω es invariante bajo la acción de J .

$$\Omega(JX, JY) = \Omega(X, Y)$$

2. Si el dominio se extiende de $T_p M$ a $T_p M^{\mathbb{C}}$, Entonces Ω es una dos-forma de bigrado (1,1).

- 3.

$$\underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_m$$

Es una $2m$ -forma que no se anula en ningún punto sobre M .

La última propiedad nos permite definir un elemento de volumen y obtener el siguiente teorema.

Teorema 2.33. *Una variedad compleja es orientable.*

Es natural querer sobre una variedad hermítica una conexión que sea compatible con la estructura compleja, es decir que un vector holomórfico continúe siéndolo bajo transporte paralelo. Con esto en mente se construye la llamada conexión hermítica cuyos coeficientes distintos de cero son

$$\Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} = g^{\bar{\nu}\lambda} \partial_{\kappa} g_{\mu\bar{\nu}} \quad \Gamma_{\bar{\kappa}\bar{\mu}}^{\bar{\lambda}} = g^{\lambda\mu} \partial_{\bar{\kappa}} g_{\mu\bar{\nu}}, \quad (2.33)$$

con la conexión ya lista se definen los tensores de torsión y curvatura cuyas componentes no nulas están dadas por

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \quad T_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} = \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} - \Gamma_{\bar{\nu}\bar{\mu}}^{\bar{\lambda}}, \quad (2.34)$$

$$R^{\kappa}_{\lambda\bar{\mu}\nu} = \partial_{\bar{\mu}} \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}, \quad R^{\bar{\kappa}}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}} = \partial_{\bar{\mu}} \Gamma^{\bar{\kappa}}_{\bar{\nu}\bar{\lambda}}. \quad (2.35)$$

Definición 2.34. *Una variedad de Kähler es una variedad hermítica (M, g) cuya forma de Kähler es cerrada. La métrica g es llamada la métrica de Kähler de M .*

Teorema 2.35. *Una variedad hermítica (M, g) es una variedad de Kähler si y solo si la estructura cuasicompleja J satisface:*

$$\nabla_{\mu} J = 0$$

Donde ∇_{μ} es la conexión de Levi-Civita asociada a g .

Definición 2.36. *Sea M una variedad hermítica con $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, se define el producto interno entre $\alpha, \beta \in \Omega^{r,s}(M)$ ($0 \leq r, s \leq m$) como:*

$$(\alpha, \beta) \equiv \int_M \alpha \wedge \bar{*}\beta \quad (2.36)$$

Donde $*$ es el operador estrella de Hodge y $\bar{*} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{m-s, m-r}(M)$ es el operador estrella de Hodge conjugado definido por:

$$\bar{*}\beta \equiv \overline{*}\beta = *\bar{\beta}$$

Definición 2.37. Se definen los operadores adjuntos ∂^\dagger y $\bar{\partial}^\dagger$ de ∂ y $\bar{\partial}$ por

$$(\alpha, \partial\beta) = (\partial^\dagger\alpha, \beta) \quad (\alpha, \bar{\partial}\beta) = (\bar{\partial}^\dagger\alpha, \beta). \quad (2.37)$$

Teorema 2.38. Los operadores de Dolbeault cumplen las siguientes relaciones

$$\partial^\dagger = - * \bar{\partial} * \quad \bar{\partial}^\dagger = - * \partial *, \quad (2.38)$$

$$(\partial^\dagger)^2 = (\bar{\partial}^\dagger)^2 = 0. \quad (2.39)$$

Definición 2.39. Además del operador Laplaciano usual $\Delta = (dd^\dagger + d^\dagger d)$ se definen los laplacianos sobre variedades hermíticas como

$$\Delta_\partial \equiv (\partial + \partial^\dagger)^2 = \partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial, \quad (2.40)$$

$$\Delta_{\bar{\partial}} \equiv (\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)^2 = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}. \quad (2.41)$$

Una (r,s) -forma que satisface $\Delta_\partial\omega = 0$ ($\Delta_\partial\omega = 0$) se dice ser ∂ -armónica ($\bar{\partial}$ -armónica).

Con esto se obtiene la versión compleja de la descomposición de Hodge. sea $Harm_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ el conjunto de (r,s) -formas $\bar{\partial}$ -armónicas, entonces se concluye con el siguiente teorema.

Teorema 2.40 (Teorema de Hodge). $\Omega^{r,s}(M)$ tiene una única descomposición ortogonal.

$$\Omega^{r,s}(M) = \bar{\partial}\Omega^{r,s-1}(M) \oplus \bar{\partial}^\dagger\Omega^{r,s+1}(M) \oplus Harm_{\bar{\partial}}^{r,s}(M). \quad (2.42)$$

Es decir una (r,s) -forma ω se expresa unívocamente como:

$$\omega = \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}^\dagger\beta + \gamma$$

Donde $\alpha \in \Omega^{r,s-1}(M)$, $\beta \in \Omega^{r,s+1}(M)$ y $\gamma \in Harm_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$.

Capítulo 3

Funciones modulares y automorficas

3.1. Función Zeta de Riemann

La función Zeta de Riemann y sus generalizaciones serán de gran utilidad en los procesos de regularización utilizados más adelante. En esta sección se define primero la función Zeta de Riemann restringida y luego mediante los números de Bernoulli se procede a hacer su extensión analítica sobre los complejos.

Definición 3.1. *Se define la función Zeta de Riemann para $Re(s) > 1$ como:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (3.1)$$

O equivalentemente.

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (3.2)$$

Siendo p un número primo.

Estas dos definiciones son equivalentes [6]. Esta función está restringida a que la parte real del argumento sea mayor que uno, lobernoulli que se pretende ahora es extender la función $\zeta(s)$ a una función meromórfica sobre todo el

plano complejo, con una única singularidad ubicada en un polo de orden 1 para $s = 1$ de residuo igual a 1. Para ello es necesario construir antes los números de Bernoulli,

La serie generatriz de los polinomios de Bernoulli es.

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad (3.3)$$

y se define el n-ésimo número de Bernoulli como $B_n \equiv B_n(0)$, por lo cual los números de Bernoulli tienen la serie generatriz

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}, \quad (3.4)$$

es posible reescribir el lado izquierdo de la ecuación (3.4) obteniéndose

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \left(\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}. \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.5) podemos observar dos cosas importantes, la primera es que $B_1 = -\frac{1}{2}$, y la segunda es que $B_n = 0$ si n es impar y ($n > 1$), pues el segundo término de la ecuación es una función par. Es posible construir una fórmula inductiva por medio de la cual se pueden obtener los números de Bernoulli de la siguiente manera

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k = 0 \quad m \geq 1, \quad (3.6)$$

tomando $m = 1$ y $B_1 = -\frac{1}{2}$ se obtiene la condición inicial de $B_0 = 1$. Y a partir de esta ecuación es posible hallar todos los números de Bernoulli y construir así los polinomios de la siguiente manera

$$B_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} x^k. \quad (3.7)$$

Defínase la función $\bar{B}_n(x)$ como una función de variable real x con periodo 1 y que coincide con $B_n(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, es decir $\bar{B}_n(x) = B_n(x - [x])$. Para

establecer la continuación analítica de la función zeta, se utiliza la fórmula de suma de Euler-Maclaurin [6],

$$\begin{aligned} \sum_{r=a}^{b-1} f(r) &= \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_a^b \bar{B}_n(x) f^{(n)}(x) dx \quad a, b, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $a \leq x \leq b$ y $n \geq 1$.

Aplicada a la función $f(r) = r^{-s}$ siendo s un número complejo, $a = 1$ y $b = N \geq 2$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N r^{-s} &= \frac{1 - N^{1-s}}{s-1} + \frac{1 + N^{-s}}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} s(s+1)(s+2)\dots(s+k-2)(1 - N^{-s-k+1}) \\ &- \frac{1}{n!} s(s+1)\dots(s+n-1) \int_1^N \bar{B}_n(x) x^{-s-n} dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nótese que en el caso particular en el que $Re(s) > 1$ y si $N \rightarrow \infty$ el lado izquierdo es la función Zetade Riemann, por lo cual esta expresión es perfecta para realizar una extensión analítica para todo el plano complejo de la función zeta de Riemann. Es necesario ahora establecer un criterio de convergencia para la integral que aparece en la función. Al ser $\bar{B}_n(x)$ periódica en $[1, \infty]$, entonces la serie es convergente para $Re(s) > 1 - n$, es decir el único índice que quedaba libre (n) en la ecuación sirve para fijar el semiplano de convergencia de la serie, entonces la función Zetase encuentra tomando $N \rightarrow \infty$ en la ecuación (3.9). Dicho esto la extensión analítica de la función Zeta de Riemann tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} s(s+1)\dots(s+k-2) \\ &- \frac{1}{n!} s(s+1)\dots(s+n-1) \int_1^\infty \bar{B}_n(x) x^{-s-n} dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

para $Re(s) > 1 - n$.

En el caso particular en el que $n = 2$ se obtiene

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s}{12} - \frac{1}{2}s(s+1) \int_1^\infty \bar{B}_2(x)x^{-s-2}dx, \quad (3.11)$$

convergente para $Re(s) > -1$, donde se encuentra el conocido resultado $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, tomando el caso $n = m + 2$ para $m \geq 1$ se obtiene

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}, \quad (3.12)$$

y conociendo el comportamiento de los números de Bernoulli se puede establecer que para $r = 1, 2, 3, \dots$

$$\zeta(-2r) = 0 \quad \zeta(-2r+1) = -\frac{B_{2r}}{2r}, \quad (3.13)$$

de donde se pueden obtener algunos valores numéricos para la función zeta

$$\begin{aligned} \zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12} \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120} \quad \dots \\ \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \dots = 0. \end{aligned}$$

3.2. Enteros Gaussianos y Función Theta

Dados dos números complejos ω_1 y ω_2 diferentes de cero cuyo radio ω_1/ω_2 es no real, se denota como Γ el conjunto de complejos $z = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ donde $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, se dice que Γ es una red con base (ω_1, ω_2) . La misma red Γ tiene otras infinitas bases dadas por $\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2$ y $\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$, siempre que a, b, c, d sean enteros tales que $ad - bc = 1$ esta condición es equivalente a exigir que $\tau \equiv \omega_2/\omega_1 \in \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ es el plano de Siegel.

En particular la red generada con $(1, i)$ se denota como Λ_4 y es conocida como la red de Gauss. Sus elementos son llamados enteros gaussianos y son de la forma $z = m + in$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). Como toda red, Λ_4 es un grupo conmutativo

y mas aun también es un anillo.

Λ_4 es un subanillo de \mathbb{C} , y se denota también como $\mathbb{Z}[i]$ especificando que se obtiene al adjuntar i al anillo \mathbb{Z} .

Definición 3.2. Sean z y z' dos enteros gaussianos diferentes de cero, se dice que z divide a z' ($z|z'$), o que z' es múltiplo de z , si existe un elemento $u \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $z' = uz$ o sea si z'/z es un entero gaussiano.

Es posible verificar que esta relación es transitiva, es decir si $z|z'$ y $z'|z''$ entonces $z|z''$

Definición 3.3. Se dice que u es un entero Gaussiano unidad, si $1/u$ es también un entero Gaussiano.

De la anterior definición resulta que los enteros gaussianos unidad del anillo $\mathbb{Z}[i]$ son las raíces cuartas de la unidad $(1, -1, i, -i)$

Sin querer entrar en detalle, el concepto de ideal es el de invarianza de un subgrupo bajo la multiplicación de un elemento del grupo, es decir, esto generaliza el concepto de divisibilidad. Dado un grupo \mathcal{G} y un subgrupo \mathcal{H} , se dice que \mathcal{H} es un ideal de \mathcal{G} si \mathcal{H} es estable bajo la multiplicación por cualquier elemento en \mathcal{G} .

Definición 3.4. El ideal principal (z) en $\mathbb{Z}[i]$, es el conjunto de múltiplos de z . Y el cual cumple las siguientes propiedades.

1. Todo ideal diferente de cero en $\mathbb{Z}[i]$ es un ideal principal
2. Sean z y z' enteros Gaussianos diferentes de cero, entonces z divide a z' sii el ideal principal (z) contiene al ideal principal (z')
3. dos ideales principales (z) y (z') son iguales sii z'/z es una unidad en el anillo $\mathbb{Z}[i]$
4. Un ideal principal (z) es igual al ideal $(1) = \mathbb{Z}[i]$ sii z es una unidad.

En el anillo \mathbb{Z} las unidades son ± 1 , todo ideal no nulo es principal, con dos generadores, $n, -n$

Definición 3.5. *Un primo Gaussiano, es cualquier entero gaussiano diferente de cero, el cual no es una unidad en $\mathbb{Z}[i]$, y tal que para cada factorización $\bar{\omega} = \lambda\lambda'$ en enteros gaussianos, entonces λ o λ' es una unidad en $\mathbb{Z}[i]$.*

Una definición alternativa será.

Definición 3.6. *ω es un primo Gaussiano sii $I(\omega)$ es diferente de $\mathbb{Z}[i]$, y donde $I(\omega)$ y $\mathbb{Z}[i]$ son los únicos ideales que contienen a I .*

Teorema 3.7. 1. *Sea ω un primo gaussiano, z un entero gaussiano, si z no es divisible por ω , existen dos enteros gaussianos u, v tal que $uz + v\omega = 1$*

2. *sea z un entero gaussiano diferente de cero y de la unidad en $\mathbb{Z}[i]$, entonces z es un primo gaussiano si se satisface lo siguiente: si z divide a un producto de dos enteros gaussianos este divide a uno de ellos.*

Un entero gaussiano de la forma $z = m + ni$ con $m > 0$ y $n \geq 0$ se llama un entero gaussiano normalizado. Todo entero gaussiano z admite una única factorización de la forma $z = u\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_N$ donde u es una unidad y $\bar{\omega}_j$ son primos gaussianos.

Todo primo ordinario se puede descomponer como el producto de primos gaussianos de la forma $p = u\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_N$ siendo $N(x + iy) = x^2 + y^2$ la norma, entonces se obtiene

$$N(p) = p^2 = N(\bar{\omega}_1) \dots N(\bar{\omega}_N) \quad \wedge \quad N(\bar{\omega}_j > 1) \quad j = 1, \dots, N$$

Se tienen las tres clasificaciones según las tres opciones,

1. $p = u\bar{\omega}^2$ y $N(\bar{\omega}) = p$ entonces se dice que p es ramificado
2. $p = \bar{\omega}\bar{\omega}'$ con $\bar{\omega} \neq \bar{\omega}'$ y donde $(N(\bar{\omega}) = N(\bar{\omega}') = p)$, se dice que p es dividido en $\mathbb{Z}[i]$
3. p es un primo gaussiano normalizado y si $p = zz'$ entonces z o z' son la unidad en $\mathbb{Z}[i]$, en tal caso se dice que p es inerte.

Con estas tres clasificaciones se obtienen los resultados en forma de teorema.

Teorema 3.8. 1. *El único primo ramificado es el número 2.*

2. *los primos divididos son $1 \pmod{4}$ es decir se escriben de la forma $4r + 1$ para $(r \geq 1)$.*

3. *Los primos inertes son $3 \pmod{4}$ es decir se pueden escribir como $4r + 3$ con $(r \geq 1)$.*

En cuanto a la suma de cuadrados se tienen tres resultados importantes.

1. **Fermat** Un entero $n \geq 1$ es una suma de dos cuadrados sii cada primo divisor de n congruente con $3 \pmod{4}$ aparece con un exponente par en la descomposición en factores primos de n .

2. **Gauss** Un entero se representa en términos de números triangulares de la forma,

$$n = \frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2} + \frac{c^2 + c}{2}.$$

3. **Lagrange** Todo entero $n \geq 1$ es una suma de cuatro cuadrados.

Para terminar esta subsección se establecerá la importante fórmula de la suma de Poisson.

Sea $F(x)$ una función real continua e integrable, entonces su transformada de Fourier es $\bar{F}(u)$ tal que,

$$\bar{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-2\pi i x u} dx. \quad (3.14)$$

La fórmula de suma de Poisson establece que.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{F}(m), \quad (3.15)$$

y además que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n + v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{F}(m)e^{2\pi i m v}. \quad (3.16)$$

Para $F(t^{-1}x)$ su transformada es $|t|\bar{F}(tu)$ y se obtiene

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(v + n/t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |t|\bar{F}(mt)e^{2\pi imtv}. \quad (3.17)$$

Si F es pequeño en el infinito, entonces en $t \rightarrow 0$ el miembro izquierdo de la ecuación es $F(v)$ y el derecho es una suma de Riemann,

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(u)e^{2\pi iuv} du, \quad (3.18)$$

lo cual es como se esperaba la transformada inversa de Fourier. Se define el semi-espacio superior de Siegel \mathfrak{h}_g como:

$$\mathfrak{h}_g \equiv \{F \in M_{gg}(\mathbb{C}) = M(g, \mathbb{C}) \mid M = M^t \wedge \text{Im}M > 0\}, \quad (3.19)$$

sobre el cual se define la función Θ de Riemann

$$\Theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n^t \Omega n + 2\pi i n^t z), \quad (3.20)$$

y donde $z \in \mathbb{C}^g$; $\Omega \in \mathfrak{h}_g$.

Esta función tiene las siguientes propiedades de periodicidad para $m \in \mathbb{Z}^g$,

- $\Theta(z + m, \Omega) = \Theta(z, \Omega)$.
- $\Theta(z + \Omega m, \Omega) = e^{-(\pi i m^t \Omega m + 2\pi i m^t z)} \Theta(z, \Omega)$.

Una generalización es la función Θ de Riemann de característica $a, b \in \mathbb{Q}^g$,

$$\Theta \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (z, \Omega) = e^{\pi i a^t \Omega a + 2\pi i a^t (z+b)} \Theta(z + \Omega a + b, \Omega). \quad (3.21)$$

Adicional a esto se pueden definir tres funciones θ relacionadas a la primera

$$\begin{aligned}
\theta_1(v, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi iv} \\
\theta_2(v, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi iv} \\
\theta_3(v, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iv} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Para $q = e^{\pi i \tau}$. De particular interés en este trabajo sera la función θ_3 para la cual se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\theta_3(v + 1, \tau) = \theta_3(v, \tau)$.
2. $\theta_3(v + \tau, \tau) = q^{-1} e^{-2\pi iv} \theta_3(v, \tau)$.
3. $\theta_3(v, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} e^{-\pi iv^2/\tau} \theta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$.

En ocasiones es útil definir $\theta(q) \equiv \theta_3(0, \tau)$ y utilizar la identidad,

$$\theta(e^{\pi i \tau}) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \theta(e^{-\pi i/\tau}) \quad \text{Im}\tau > 0. \tag{3.23}$$

3.3. Transformada de Mellin

La transformada de Mellin de una función $f(x)$ esta dada por la siguiente forma integral,

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx. \tag{3.24}$$

Si se supone que para un x cercano a cero $f(x) = O(x^{-a})$ y para valores de x muy grandes $f(x) = O(x^{-b})$, entonces la integral que define la transformada de Mellin converge para $a < \text{Re}(s) < b$. La transformada inversa es

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(s) x^{-s} ds, \tag{3.25}$$

supongase que la función $\phi(\tau)$, convergente en $\tau \rightarrow \infty$, satisface la ecuación funcional,

$$\phi\left(\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{k=1}^K b_k \tau^{\lambda_k} + \alpha \tau^h \phi(\tau), \quad (3.26)$$

para $\tau > 0$ and $\alpha \neq 0$, λ_k, h, b_k números complejos. Entonces la transformada de Mellin de $\phi(\tau)$ puede ser escrita como la suma $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$, y bajo el cambio de variable ($\tau \rightarrow \frac{1}{\tau}$) se obtiene,

$$\mathbf{M}[\phi(\alpha, s)] = \int_1^\infty \left[\sum_k b_k \tau^{\lambda_k} + \alpha \tau^h \phi(\tau) \right] \tau^{-s-1} d\tau + \int_1^\infty \phi(\tau) \tau^{s-1} d\tau, \quad (3.27)$$

donde se ha utilizado la ecuación funcional nuevamente en el primer término. Integrando con $Re(\lambda_k - s) < 0$ se obtiene.

$$\mathbf{M}[\phi(\alpha, s)] = \sum_k \frac{b_k}{s - \lambda_k} + \int_1^\infty \phi(\tau) \tau^{s-1} d\tau + \alpha \int_1^\infty \phi(\tau) \tau^{h-s-1} d\tau. \quad (3.28)$$

El primer término suministra los polos de la transformada de Mellin en λ_k con residuos b_k . El segundo término es convergente para todos los valores de s . Si se utiliza dos veces la ecuación funcional se encuentra la siguiente ecuación,

$$\phi\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\alpha} \tau^h \phi(\tau) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^K b_k \tau^{h-\lambda_k}, \quad (3.29)$$

que integrando con antes da como resultado

$$\mathbf{M}[\phi(\alpha, s)] = \sum_k \frac{-b_k/\alpha}{s - h + \lambda_k} + \int_1^\infty \phi(\tau) \tau^{s-1} d\tau + \frac{1}{\alpha} \int_1^\infty \phi(\tau) \tau^{h-s-1} d\tau. \quad (3.30)$$

Entonces se concluye que la transformada de Mellin de ϕ como se ha definido, es invariante (hasta un factor de α) bajo $s \rightarrow h - s$, $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$,

$$\mathbf{M}[\phi(\alpha, s)] = \alpha \mathbf{M}\left[\phi\left(\frac{1}{\alpha}, h - s\right)\right]; \quad (3.31)$$

Con polos en λ_k y residuos b_k . Este importante resultado sera utilizado mas adelante en el proceso de regularización de la función θ de Riemann.

3.4. Curvas Elípticas y Funciones Modulares

Una integral elíptica es de la forma:

$$\int R(x, y)dx, \quad (3.32)$$

donde $R(x, y)$ es una función racional en x e y , y además y^2 es un polinomial en x de grado 3 o 4 sin raíces múltiples.

Definición 3.9. *Una función elíptica es una función meromórfica $f(x)$ sobre \mathbb{C} , la cual es doblemente periódica, es decir, es tal que existen dos números complejos ω_1 y ω_2 con su cociente diferente de un real, y se cumple que*

$$f(x + \omega_1) = f(x + \omega_2) = f(x)$$

Sea $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ una red, entonces f es elíptica si $f(x + \omega) = f(x)$ para $(x \in \mathbb{C} \text{ y } \omega \in L)$ L es llamado el periodo de red de f . Por la periodicidad de la función, debe definirse una región fundamental de \mathbb{C}/L como $F = \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x, y < 1\}$.

Antes de proseguir es conveniente establecer algunas definiciones importantes para el buen desarrollo de la teoría subsecuente.

Definición 3.10 (Variedad algebraica). *Una variedad algebraica es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales.*

Definición 3.11 (Curva algebraica). *Una curva algebraica sobre un campo F es la unión de puntos en F^{n+1} determinada por al menos $n - 1$ funciones polinomiales $g(x_1, \dots, x_n)$ independientes en n variables con coeficientes en F donde la curva es definida con $g_i = 0$ para $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$.*

En particular se obtiene que una curva algebraica, es una variedad algebraica de dimensión uno, si además el campo es \mathbb{R} se obtiene entonces una curva ordinaria

Definición 3.12 (Espacio Proyectivo). *El espacio proyectivo n -dimensional sobre un campo k se denota como P_k^n o P^n y es el conjunto de clases de equivalencia de $(n + 1)$ -tuplas (a_0, \dots, a_n) de elementos de k , no todos cero, bajo la relación de equivalencia dada por $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ para $\lambda \in k$, y $\lambda \neq 0$.*

Entonces una curva proyectiva es la curva que se considera sobre el espacio proyectivo.

Definición 3.13 (Curva elíptica). *Una curva elíptica es un curva algebraica proyectiva suave de genus uno, donde existe un punto específico 0.*

Teorema 3.14. *Una curva elíptica sobre \mathbb{C} tiene la forma \mathbb{C}/L donde L es una red.*

Entonces para una red Λ , se tiene que la superficie Riemanniana \mathbb{C}/Λ es una curva compleja de genus uno.

Se procede ahora a definir las funciones y formas modulares.

Una función modular asigna a cada red Λ un número complejo $F(\Lambda)$ tal que $F(\Lambda_1) = F(\Lambda_2)$ si y solo si $\Lambda_2 = \lambda\Lambda_1$ pues Λ_1 y Λ_2 dan lugar a la misma curva compleja de genus uno.

Como se había mencionado, la red $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ es equivalente a la red $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ siempre que $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, así la función modular queda especificada con un solo parámetro,

$$f(\tau) \equiv F(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}). \quad (3.33)$$

Elegir la región fundamental sobre la base (ω_1, ω_2) se refleja en una elección de la región fundamental sobre el parámetro τ como lo sugiere el siguiente teorema [7].

Teorema 3.15. *Dada cualquier función elíptica no constante f , existe un par de bases (ω_1, ω_2) de f , tal que el cociente $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ satisface la condición:*

$$\text{Im}(\tau) > 0 \quad |\tau| \geq 1 \quad \frac{-1}{2} \geq \text{Re}(\tau) < \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

Con $\text{Re}(\tau) \leq 0$ si $|\tau| = 1$

La región fundamental queda entonces especificada como se muestra en la siguiente figura.

Recuérdese que el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ es el grupo de transformaciones lineales simplécticas con entradas enteras

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \wedge ad - bc = 1 \right\}. \quad (3.35)$$

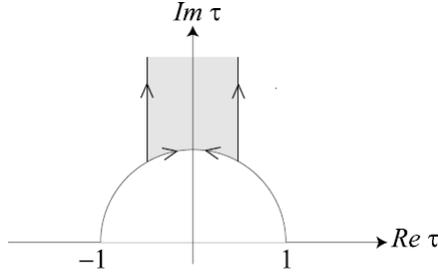


Figura 3.1: Region fundamental en el plano τ

Cuando una matriz que pertenece a este grupo se identifica con su negativa, se obtiene el grupo $PSL_2(\mathbb{Z}) \equiv SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$.

Las funciones modulares son invariantes bajo acción de este grupo

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = f(\tau) \quad \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in PSL_2(\mathbb{Z}) \quad (3.36)$$

tal propiedad es conocida como propiedad de invarianza modular, pues notese que bajo $PSL_2(\mathbb{Z})$ la base (ω_1, ω_2) cambia como $(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = \omega_2(a\tau + b, c\tau + d)$.

El grupo $PSL_2(\mathbb{Z}) \equiv \Gamma_1$ es conocido como el grupo modular total.

Para definir la funciones automórficas es necesario básicamente establecer dos condiciones, una de generalización y otra condición asintótica. La generalización se obtiene al relajar la condición de invarianza modular, ahora se exige que la función sea invariante modular incluyendo un peso así.

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau). \quad (3.37)$$

Las funciones holomórficas $f : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathfrak{h} es el plano de Siegel) que satisfacen 3.37 con una condición en el infinito, son conocidas como funciones automórficas de peso k [8].

Como ejemplo de función automórfica esta la serie de Eisenstein.

$$G_k(\tau) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \sum_{m,n} \frac{1}{(m\tau + n)^k}, \quad (3.38)$$

donde los enteros k, m, n cumplen las siguientes condiciones.

$$k = 2l \quad l = 2, 3, \dots \quad (m, n) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$$

veamos que $G_k(\tau)$ es una función automórfica de peso k ,

$$(c\tau + d)^{-k} G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{(c\tau + d)^{-k}(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \sum_{m,n} \frac{(c\tau + d)^k}{(ma\tau + mb + nc\tau + nd)^k},$$

$$(c\tau + d)^{-k} G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \sum_{m',n'} \frac{1}{(m'\tau + n')^k} \quad (3.39)$$

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k G_k(\tau).$$

Nótese que se ha reorganizado la suma con $m' \equiv ma + nc$ y $n' \equiv mb + nd$. Entonces cumple la condición 3.37 y claramente esta función es asintótica en el infinito, por lo cual podemos afirmar con toda confianza que es una función automórfica de peso k .

Se ha mostrado interés en la serie de Eisenstein pues será de gran importancia en el desarrollo central de los resultados de este trabajo que se mostrarán en el capítulo final.

Capítulo 4

Breve Presentación En Teoría de Cuerdas

Este capítulo no pretende ser un texto guía para el estudio de teoría de cuerdas, para ello se recomiendan los textos citados aquí. El objetivo de este capítulo es establecer de forma clara, coherente y auto contenida las bases fundamentales de la teoría de cuerdas, pues el resultado principal de esta tesis tiene aplicación directa sobre tal teoría.

La teoría de cuerdas es un modelo que describe la materia y sus interacciones, donde se una teoría cuántica de campos y esta incluye de una manera natural la relatividad general, es en este sentido en el cual se le conoce también como una teoría de unificación, pues a pesar de que en su planteamiento se pretendía describir el micro-mundo cuánticamente, surgió de manera natural la gravitación con el descubrimiento de un campo sin masa de espín 2 que encajaba perfectamente con la partícula mediadora del campo gravitacional conocida como gravitón.

Dicho de manera sencilla la teoría de cuerdas supone que la materia y las interacciones no son descritas por partículas si no mas bien por pequeñas cuerdas vibrantes que yacen en un espacio de varias dimensiones llamado el bulto "*Bulk*", y cuyos modos de vibración determinan que tipo de campo describen. En principio existen 6 teorías de cuerdas, la primera de ellas describe solo bosones y las cinco teorías restantes describen bosones y fermiones (Teoría de supercuerdas), a mediados de los 90's se demostró que las cinco teorías de supercuerdas son proyecciones en 10 dimensiones de una teoría mas general en 11 dimensiones conocida como teoría M.

4.1. Cuerda bosónica

El primer modelo en teoría de cuerdas a considerar debe ser la cuerda bosónica, este modelo es por supuesto irreal debido a que no considera fermiones, sin embargo su estudio es importante porque de él surgen muchos conceptos importantes que se extienden a modelos supersimétricos.

Las cuerdas requieren dos parámetros para quedar bien definidas, uno espacial (σ) y el otro temporal (τ), con esto, los grados de libertad de la cuerda dependen de estos dos parámetros

$$X_\mu(\tau, \sigma) \quad \mu = 0, 1, \dots, D - 1,$$

la cuerda es descrita al mantener τ fijo y variar σ , y cuando se varía τ sobre la cuerda se obtiene una superficie conocida como la hoja de mundo, la cual yace en un espacio de dimensión $d + 1$ el bulto, (4.1).

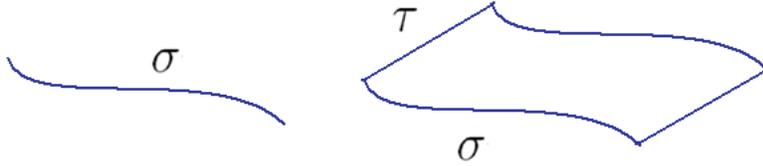


Figura 4.1: Construcción de la hoja de mundo

La hoja de mundo se construye como un mapeo a través de las coordenadas de los parámetros (τ, σ) , se tiene entonces,

$X^\mu(\tau, \sigma)$: Coordenadas de la hoja de mundo $\mu = 0, 1, \dots, d$,

ξ^α, ξ^β : parámetros $\alpha, \beta = 0, 1$ donde $\xi^0 = \tau$ y $\xi^1 = \sigma$,

la métrica sobre el bulto $\eta_{\mu,\nu}$ induce una métrica sobre la hoja de mundo $\gamma_{\alpha,\beta}$ dada por la transformación entre los parámetros y las coordenadas así

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (4.1)$$

con esto encontramos que la métrica inducida esta dada por

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}. \quad (4.2)$$

Recuérdese que en el caso de partícula puntual, la acción es proporcional a la longitud invariante de la trayectoria de la partícula, con esto en mente la acción de la cuerda puede construirse como proporcional al área (en general al volumen [9]) de la hoja de mundo

$$S = -T \int dA, \quad dA = \sqrt{-\det \gamma_{\alpha\beta}} d^2 \xi,$$

donde T es la tensión de la cuerda. Muchas veces se escribirá un producto del tipo $X^\mu X_\mu$ como $X \cdot X$ y las derivadas en σ y τ como $\dot{X}^\mu = \partial X^\mu / \partial \tau$ y $X'^\mu = \partial X^\mu / \partial \sigma$. con esta notación y después de un calculo relativamente sencillo se obtiene para la acción el siguiente resultado

$$S = -T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{-\gamma}$$

$$S = -T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2}, \quad (4.3)$$

esta es la acción de Nambu-Goto. Nótese que se han elegido dos tiempos propios de integración y la longitud de la cuerda como l , donde usualmente tal longitud se puede considerar en unidades de Planck como π . El paso siguiente es naturalmente encontrar a partir de la acción construida, las ecuaciones de movimiento, sin embargo la acción de Nambu-Goto tiene el inconveniente de tener una raíz cuadrada en su argumento, lo cual hace difícil su manipulación en el momento de cuantizar, este inconveniente se resuelve por medio de la inclusión de una métrica auxiliar $h_{\alpha\beta}$ sobre la hoja de mundo, la acción obtenida se conoce como la acción de Polyakov,

$$S_p = -\frac{T}{2} \int d^2 \sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

y es por supuesto coherente con la acción de Nambu-Goto en el sentido de que se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento. La acción de Polyakov tiene tres simetrías importantes que le permiten fijar la métrica y las cuales enumeramos a continuación

1. Invarianza de Poincare $ISO(3, 1)$. Estas son simetrías globales en los campos,

$$\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu \quad \delta h^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.5)$$

2. Reparametrización de la hoja de mundo. Esta simetría se refiere a invarianza bajo transformación de los parámetros (τ, σ) ,

$$\xi^\alpha \rightarrow f^\alpha(\xi) = \xi'^\alpha \quad h_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial f^\delta}{\partial \xi^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma'). \quad (4.6)$$

3. Transformaciones de Weyl. La acción es invariante bajo reescalamiento,

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\phi(\sigma, \tau)} h_{\alpha\beta} \quad \delta X^\mu = 0. \quad (4.7)$$

Definición 4.1. Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^3 , el cual es homeomorfo a un poliedro K . entonces la característica de Euler $\chi(X)$ es definida como:

$\chi(X) = (\text{número de vértices en } K) - (\text{Número de aristas en } K) + (\text{número de caras en } K)$

Y se define $\chi(\text{punto}) = \chi(\cdot) = 0$.

Por ejemplo para una curva, $\chi(\text{linea}) = \chi(-) = 2 - 1$. para una esfera S^2 es homeomorfo a la superficie de un tetraedro, entonces $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ y por último se encuentra que $\chi(T^2) = 16 - 32 + 16 = 0$. Este concepto es importante porque si la hoja de mundo tiene característica de Euler nula, entonces la métrica puede llevarse a una métrica plana [10], esto se hace fijando un gauge para la métrica con la ayuda de las simetrías de la acción de Polyakov [9]. En este caso omitiendo el coeficiente global el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \\ \mathcal{L} &= -\partial_\tau X \cdot \partial_\tau X + \partial_\sigma X \cdot \partial_\sigma X, \end{aligned} \quad (4.8)$$

y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen finalmente las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad de la cuerda.

$$\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} = 0, \quad (4.9)$$

ésta es claramente una ecuación de onda, y su solución requiere de establecer si la cuerda es cerrada o abierta, y de ser abierta hay que establecer si sus

extremos son libres o fijos. Paralelo a esto existe un sistema de coordenadas diferente en el cual la ecuación de la cuerda toma una forma sencilla, tal sistema se conoce como coordenadas del cono de luz, y se define como

$$\sigma^+ \equiv \tau + \sigma \quad \sigma^- \equiv \tau - \sigma, \quad (4.10)$$

Con esta definición se encuentra que:

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^+} = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma) \quad (4.11)$$

y

$$\partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^-} = \frac{1}{2}(\partial_\tau - \partial_\sigma). \quad (4.12)$$

en este sistema la ecuación de la hoja de mundo es.

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (4.13)$$

Fácilmente se verifica que la solución que satisface tal ecuación es de la forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma), \quad (4.14)$$

donde se ha descompuesto los grados de libertad en una parte derecha e izquierda definidos así:

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$

y

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}, \quad (4.15)$$

l_s es la longitud característica de la cuerda la cual esta relacionada con la tensión de la cuerda a través del parámetro de Regge α' como:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad l_s^2 = 2\alpha', \quad (4.16)$$

x^μ : Coordenadas del centro de masa de la cuerda

p^μ : Momentum total de la cuerda.

La solución 4.14, se pueden entender como una cuerda que se mueve como un todo con coordenadas x^μ y momentum p^μ a través del bulto, pero que además de eso también vibra con modos de vibración descritos por α_k^μ y $\bar{\alpha}_k^\mu$, tales que:

$$\alpha_{-k}^\mu = (\alpha_k^\mu)^* \quad \bar{\alpha}_{-k}^\mu = (\bar{\alpha}_k^\mu)^*. \quad (4.17)$$

4.1.1. Cuerda abierta con extremos libres

En este caso se establece una condición de frontera de Neumann.

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \quad \sigma = 0, \pi. \quad (4.18)$$

Aplicando la derivada a la solución 4.14 se obtienen las tres condiciones:

1. $\alpha_k^\mu = \bar{\alpha}_k^\mu$ los modos izquierdos y derechos son iguales.
2. $p^\mu = \bar{p}^\mu$ La cuerda no gira sobre si misma.
3. $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ El valor de k es un entero.

La solución toma la forma,

$$X^\mu = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (4.19)$$

4.1.2. Cuerda abierta con extremos fijos

En este caso se establece una condición de frontera de Dirichlet:

$$\dot{X}^\mu|_{\sigma=0} = 0 \quad \dot{X}^\mu|_{\sigma=\pi} = 0. \quad (4.20)$$

Aplicando la derivada a la solución 4.14 es fácil obtener las tres condiciones.

1. $\alpha_k^\mu = -\bar{\alpha}_k^\mu$ los modos izquierdos y derechos están en contrafase.
2. $p^\mu = \bar{p}^\mu = 0$ La cuerda no se desplaza.
3. $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ El valor de k es un entero.

La solución toma la forma.

$$X^\mu = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau - l_s \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \text{sen}(n\sigma). \quad (4.21)$$

4.1.3. Cuerda cerrada

En este caso se establece una condición de frontera periódica.

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma) + 2\pi RW. \quad (4.22)$$

Que al reemplazar se obtiene fácilmente la condición

$$2\pi RW = \pi l_s(p^\mu - \bar{p}^\mu), \quad (4.23)$$

donde W son conocidos como los modos de enrollamiento "Winding", los cuales son números enteros, y si se admiten dimensiones compactificadas entonces W representa el número de veces que la cuerda se enrolla sobre tal dimensión. Si por ejemplo la compactificación es circular, R representa el radio de curvatura de la dimensión compactificada, esto se verá con más detalle más adelante.

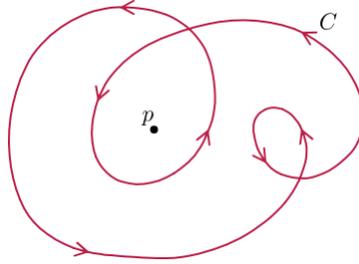


Figura 4.2: El número de enrollamiento sobre el punto p es $+2$

Utilizando la acción de Polyakov, el tensor de momento energía $T_{\alpha\beta}$ es,

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2}{T\sqrt{-h}} \frac{\delta L_p}{\delta h_{\alpha\beta}}, \quad (4.24)$$

Obteniéndose:

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

con el cual pueden hallarse las corrientes conservadas de la manera usual.

4.2. Cuantización de la cuerda bosónica

Ya se han establecido las bases fundamentales de la teoría de cuerdas bosónica clásica, el siguiente paso es naturalmente cuantizar, y existen principalmente tres métodos para hacerlo, “*cuantización canónica*”, “*cuantización en el gauge del cono de luz*” y “*cuantización BRST*”. En este trabajo nos concentraremos solo en la primera, los otros dos métodos pueden encontrarse de una manera muy completa en [9], [10].

Se considerarán los grados de libertad $X^\mu(\sigma, \tau)$ como coordenadas espacio-temporales, se construye un momento canónico conjugado y sobre estos se imponen relaciones de conmutación.

Definición 4.2 (Momento). *El momento que lleva la cuerda es*

$$\pi_\mu(\sigma, \tau) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^\mu)}. \quad (4.26)$$

Utilizando el lagrangiano de Polyakov se obtiene:

$$\pi_\mu = T \dot{X}_\mu.$$

Análogo al caso de partícula, las coordenadas y los momentos previamente definidos satisfacen relaciones en los corchetes de Poisson, la primera cuantización se obtiene al reemplazar los corchetes de Poisson por conmutadores, y las coordenadas y momentos por operadores [9], el resultado que se obtiene es:

$$[X^\mu(\sigma, \tau), \pi^\nu(\sigma', \tau)] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'),$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = [\pi^\mu(\sigma, \tau), \pi^\nu(\sigma', \tau)] = 0,$$

reemplazando las coordenadas y los momentos en terminos de los modos en los anteriores conmutadores se obtiene de manera directa las relaciones de conmutación sobre los modos de vibración ¹.

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} & [\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] &= 0 \\ [\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] &= m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} & [x_m^\mu, p_n^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

¹una manera fácil de lograrlo es utilizando coordenadas del cono de luz [10]

Es claro en este punto que los modos de vibración de la cuerda se parecen mucho a los operadores del oscilador armónico, es decir pueden considerarse como operadores de creación y destrucción, entonces es pertinente definir a partir de ellos un operador número así ².

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} N_m = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m. \quad (4.28)$$

4.2.1. Espectro de la cuerda abierta

Los modos, las coordenadas y los momentos son ahora operadores, para conocer la forma del espacio en el cual operan es necesario entender sus autovalores y autoestados. Los conmutadores 4.27 pueden escribirse como

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_{-m}^\nu] = m\eta^{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

A diferencia del oscilador armónico, la métrica Minkowskiana permite valores negativos para los conmutadores, lo cual nos llevara mas adelante a estados fantasmas. El operador número definido previamente tiene autoestados que llamaremos $|i_m \rangle$, y autovalores que denotaremos como i_m tales que $N_m|i_m \rangle = i_m|i_m \rangle$. Aplicando N_m al estado $\alpha_m|i_m \rangle$ y utilizando las relaciones de conmutación se obtiene

$$\begin{aligned} N_m \alpha_m |i_m \rangle &= \alpha_{-m} \alpha_m \alpha_m |i_m \rangle = (\alpha_m \alpha_{-m} - m) \alpha_m |i_m \rangle, \\ N_m \alpha_m |i_m \rangle &= (\alpha_m i_m - m \alpha_m) |i_m \rangle, \\ N_m (\alpha_m |i_m \rangle) &= (i_m - m) \alpha_m |i_m \rangle. \end{aligned} \quad (4.30)$$

De manera similar se obtiene

$$N_m (\alpha_{-m} |i_m \rangle) = (i_m + m) \alpha_{-m} |i_m \rangle. \quad (4.31)$$

Entonces es claro que.

$$\alpha_m |i_m \rangle \propto |i_m - m \rangle, \quad (4.32)$$

De manera similar se obtiene

$$\alpha_{-m} |i_m \rangle \propto |i_m + m \rangle, \quad (4.33)$$

²En ocasiones se omitirá el punto teniendo en cuenta siempre que hay un producto interno

es decir, α_m es un operador que baja estados y α_{-m} es un operador que sube estados. El estado vacío ($i_m = 0$) es destruido por el operador α_m ,

$$\alpha_m|0\rangle = 0. \quad (4.34)$$

Los estados también llevan momentum por lo cual se le agrega una etiqueta $|i_m, k\rangle$ tales que

$$P^\mu|0, k\rangle = K^\mu|0, k\rangle. \quad (4.35)$$

Consideremos el primer estado excitado $\alpha_{-1}^0|0, k\rangle$, la norma de este estado viene dada por.

$$\begin{aligned} \left| \alpha_{-1}^0|0, k\rangle \right|^2 &= \langle 0, k | \alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 | 0, k \rangle, \\ \left| \alpha_{-1}^0|0, k\rangle \right|^2 &= \langle 0, k | ([\alpha_1^0, \alpha_{-1}^0] - \alpha_{-1}^0 \alpha_1^0) | 0, k \rangle, \\ \left| \alpha_{-1}^0|0, k\rangle \right|^2 &= \langle 0, k | (-1) | 0, k \rangle = -1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Estos estados con norma negativa son conocidos como estados fantasmas, un método de eliminar estos estados no físicos es a través de los operadores de Virasoro los cuales se definen a continuación.

Definición 4.3. *Los operadores de Virasoro se definen como,*

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \alpha_n : \quad \bar{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \bar{\alpha}_{m-n} \bar{\alpha}_n : \quad (4.37)$$

donde $::$ denota orden normal.

Para $m = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \alpha_n : = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{-n}, \\ L_0 &= \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \eta^{\mu\mu} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n, \end{aligned}$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \frac{1}{2}(-1 + \underbrace{1+1\dots+1}_{D-1}) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n}_{\zeta(-1)=-1/12},$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n - \frac{D-2}{24}. \quad (4.38)$$

el operador L_0 ordenado normalmente tiene la forma

$$:L_0 := \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n.$$

Con el objetivo de eliminar estados no físicos (Norma negativa) es necesario introducir una constante “a” definida como

$$a =: L_0 : -L_0 = \frac{D-2}{24}. \quad (4.39)$$

Estos operadores cumplen un álgebra conocida como álgebra de Virasoro, la cual se deduce teniendo en cuenta dos casos, $m+n=0$ y $m+n \neq 0$ [2, 9, 10].

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \quad (4.40)$$

Los estados físicos $|\psi\rangle$ son aquellos para los cuales el valor esperado de $(L_0 - a)$ es cero, es decir un estado $|\psi\rangle$ es físico si satisface

$$\langle \psi | L_m - a\delta_{m,0} | \psi \rangle = 0, \quad (4.41)$$

Se demuestra que $a=1$ (ver[9]), con lo cual la dimensión crítica 4.39 en la teoría de cuerdas Bosónica es $D=26$.

Definición 4.4. *Se define el operador de masa como.*

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - a), \quad (4.42)$$

Donde N es el operador número y $\alpha = \frac{1}{2\pi T}$.

Aplicando este operador a los dos primeros estados se obtiene.

$$M^2|0\rangle = -\frac{D-2}{24\alpha'}|0\rangle, \quad (4.43)$$

el estado $|0\rangle$ tiene masa imaginaria (Takion),

$$M^2|1\rangle = M^2\alpha_{-1}|0\rangle = \frac{1}{\alpha'}\left(1 - \frac{D-2}{24}\right)\alpha_{-1}|0\rangle = 0, \quad (4.44)$$

estado de masa cero.

4.2.2. Espectro de la cuerda cerrada

Notese que para la cuerda abierta fue suficiente utilizar los modos α y los operadores de virasoro L_m . En el caso de la cuerda cerrada se consideran adicionalmente los modos $\bar{\alpha}$ y los operadores \bar{L}_m además se hace necesario la definición de dos operadores números N_R y N_L .

$$N_R = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-m}\bar{\alpha}_m \quad N_L = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}\alpha_m, \quad (4.45)$$

en este caso, α_m y $\bar{\alpha}_m$ bajan estados, α_{-m} y $\bar{\alpha}_{-m}$ suben estados. y de manera similar el vacío es destruido por los operadores de destrucción. Un estado general se construye entonces como:

$$|i(\mu, m)\bar{i}(\mu, m)\rangle = \prod_{m \geq 1} \prod_{\mu=0}^{D-1} (\alpha_{-m}^\mu)^i (\bar{\alpha}_{-m}^\mu)^{\bar{i}} |0, k\rangle,$$

sobre el cual los operadores número actúan como:

$$N_L |i(\mu, m)\bar{i}(\mu, m), k\rangle = \sum_{\mu, m} m i(\mu, m) |i(\mu, m)\bar{i}(\mu, m), k\rangle,$$

$$N_L |i(\mu, m)\bar{i}(\mu, m), k\rangle = \sum_{\mu, m} m \bar{i}(\mu, m) |i(\mu, m)\bar{i}(\mu, m), k\rangle,$$

y naturalmente se obtiene una nueva relación de conmutación para los operadores de virasoro,

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

La condición para que un estado sea físico es,

$$(L_m - a\delta_{m,0}) |\psi\rangle = 0 \quad (\bar{L}_m - a\delta_{m,0}) |\psi\rangle = 0. \quad (4.47)$$

La condición de capa de masa, permite obtener el operador

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = \frac{2}{\alpha'}(N_L + N_R - 2), \quad (4.48)$$

y la ligadura

$$(L_0 - \bar{L}_0) |\psi\rangle = 0, \quad (4.49)$$

se conoce como la condición de empalme “*Level Matching Condition*”

4.3. Teoría de campos conformes

Una transformación conforme es aquella que mapea una región del plano complejo en una nueva región, tal que se preservan los ángulos, mas no necesariamente las longitudes. Si bajo cierta transformación la métrica cambia como

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x),$$

entonces la transformación es conforme, pues el ángulo entre dos vectores no cambia,

$$\cos' \theta = \frac{g'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\sqrt{g'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})g'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}} = \frac{\Omega(x)g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\sqrt{\Omega(x)g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\Omega(x)g(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}} = \cos \theta$$

La teoría conforme de campos es una teoría cuántica de campos que es invariante bajo transformaciones conformes, esta teoría sera importante en el estudio de los modos vibracionales de la hoja de mundo. Para utilizarla adecuadamente, es necesario hacer una rotación de Wick, la cual es un rotación de la coordenada temporal en el plano complejo, tal que se pase de un espacio de Minkowsky a un espacio Euclideo

$$\tau \rightarrow -i\tau$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2 \rightarrow d\tau^2 + d\sigma^2,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esta rotación las coordenadas del cono de luz transforman como:

$$\sigma^+ = \tau + \sigma \qquad \sigma^- = \tau - \sigma$$

$$\downarrow \qquad \text{Rotación de Wick} \qquad \downarrow$$

$$\sigma^+ = -i\tau + \sigma \qquad \sigma^- = -i\tau - \sigma = -\bar{\sigma}^+.$$

En pocas palabras lo que se ha hecho con las coordenadas es complexificar, debido a que la hoja de mundo es un sistema bidimensional se trabajara entonces en el plano complejo, aprovechando asi todo el calculo que se conoce de la variable compleja, se definen entonces las coordenadas:

$$z = \tau + i\sigma \qquad \bar{z} = \tau - i\sigma,$$

$$\tau = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \sigma = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

y así los operadores derivada toman ahora la forma

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_\tau - i\partial_\sigma) = \partial_z \equiv \partial,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_\tau + i\partial_\sigma) = \partial_{\bar{z}} \equiv \bar{\partial}.$$

En el sistema rotado, la métrica tiene la forma simple:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{\bar{z}z} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

La ventaja de este formalismo es que la acción de Polyakov queda descrita de una manera mas elegante

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \qquad (4.50)$$

Para la cual las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$\partial\bar{\partial}X^\mu(z, \bar{z}) = 0, \quad (4.51)$$

es decir, ∂X^μ es una función holomórfica y $\bar{\partial}X^\mu$ es antiholomórfica. Para una transformación en las coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu,$$

los generadores son.

$$\epsilon^\mu = \begin{cases} a^\mu & \rightarrow \text{Traslación} \\ \lambda x^\mu & \rightarrow \text{Dilatación} \\ \lambda \omega^\mu{}_\nu x^\nu & \rightarrow \text{Rotación} \\ b^\mu x^2 - 2x^\mu b_\nu x^\nu & \rightarrow \text{SCT} \end{cases}$$

Las transformaciones conformes están estrechamente ligadas a las funciones analíticas. Una transformación del estilo, $z \rightarrow f(z)$ $\bar{z} \rightarrow f(\bar{z})$ es conforme.

Definición 4.5. Sean los generadores

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}, \quad (4.52)$$

estos operadores satisfacen el álgebra de Virasoro que se discutió anteriormente,

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n} \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n)\bar{l}_{m+n} \quad [l_m, \bar{l}_n] = 0 \quad (4.53)$$

Como caso particular es tiene que los operadores l_0 , l_1 y l_{-1} forman un subálgebra:

$$\begin{aligned} [l_0, l_1] &= -l_1 & [\bar{l}_0, \bar{l}_1] &= -\bar{l}_1 \\ [l_0, l_{-1}] &= l_{-1} & [\bar{l}_0, \bar{l}_{-1}] &= \bar{l}_{-1} \\ [l_1, l_{-1}] &= 2l_0 & [\bar{l}_1, \bar{l}_{-1}] &= 2\bar{l}_0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.3.1. Teoría conforme de campos en la cuerda cerrada

Considerese la cuerda cerrada con coordenadas (τ, σ) , con la condición periódica $\sigma = \sigma + 2\pi$ y $-\infty < \tau < \infty$, la hoja de mundo se puede considerar como un cilindro infinito y es descrita utilizando teoría conforme de campos así. Sea la transformación conforme:

$$z = e^{\tau+i\sigma} \quad \bar{z} = e^{\tau-i\sigma}, \quad (4.55)$$

esta transformación es un mapeo del cilindro en el plano complejo (z, \bar{z}) .

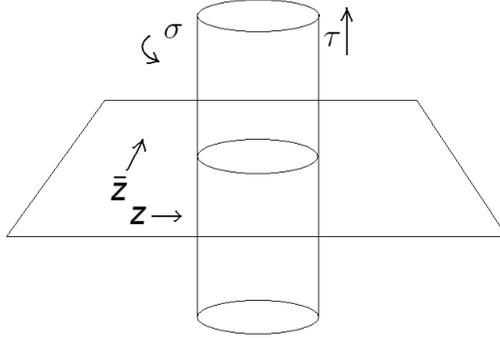


Figura 4.3: Transformación conforme de la hoja de mundo en la cuerda cerrada.

Esta transformación representa en el plano complejo para un τ dado y $0 < \sigma < 2\pi$ círculos de radio e^τ . El presente $\tau = 0$ se mapea en el círculo unitario $|e^{\pm i\sigma}|$, el pasado $\tau < 0$ se proyecta dentro del círculo y el futuro se proyecta fuera de este círculo. En estas nuevas variables complexificadas $\tau + i\sigma = \ln z$ y $\tau - i\sigma = \ln \bar{z}$ y considerando los modos izquierdos y derechos para los grados de libertad, se obtienen las ecuaciones de movimiento.

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\bar{z}) &= \frac{x^\mu}{2} - i\frac{l_s^2}{2}p^\mu \ln \bar{z} + i\frac{l_s^2}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} \bar{z}^{-n} \\ X_R^\mu(z) &= \frac{x^\mu}{2} - i\frac{l_s^2}{2}p^\mu \ln z + i\frac{l_s^2}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} z^{-n}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Definición 4.6. *El tensor momento energía es: [10].*

$$T(z) =: \partial X \cdot \partial X : \quad \bar{T}(\bar{z}) =: \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X : \quad (4.57)$$

y se demuestra que este tensor describe una corriente conservada.

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.58)$$

o en coordenadas complejas:

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0,$$

es decir T_{zz} es holomórfico y $T_{\bar{z}\bar{z}}$ es antiholomórfico, y por el teorema de Laurent es posible hacer una expansión en $|z| > 0$ con los coeficientes dados por los operadores de virasoro.

$$T_{zz}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}} \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}, \quad (4.59)$$

y por teorema de residuos es posible obtener los operadores de virasoro en términos de una integral de contorno.

$$L_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z^{m+2} T_{zz}(z) dz}{z} \quad \bar{L}_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{\bar{z}^{m+2} T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{z}}. \quad (4.60)$$

El teorema de deformación de contornos asegura que estos operadores son invariantes si el contorno se expande o se contrae y como este contorno en el plano complejo está relacionado a la evolución temporal τ , entonces llegamos a la importante conclusión de que los operadores de virasoro son invariantes en el tiempo.

4.4. Supercuerdas

La teoría de supercuerdas es la generalización de la cuerda bosónica al incluir campos fermiónicos, este proceso se realiza incluyendo supersimetría (SUSY) en la teoría, existen dos acercamientos para tal objetivo.

1. **Formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS):** Supersimetría en la hoja de mundo

2. Formalismo de Green-Schwarz: Supersimetría en el espacio tiempo

En este trabajo se optara por el formalismo RNS. Se utiliza el lagrangiano de una teoría de campo libre supersimétrica [2].

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{2}(\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (4.61)$$

donde

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} o & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} o & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y los campos fermiónicos se han introducido a través de los espinores de majorana de dos componentes ψ , tales que.

$$\bar{\psi}^\mu = (\psi^\mu)^\dagger \rho^0 = (\psi_-^\mu, \psi_+^\mu) \begin{pmatrix} o & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i(\psi_+^\mu, -\psi_-^\mu).$$

Con esto, la acción de Polyakov toma la forma.

$$S = T \int d^2\sigma (\partial_+ X \cdot \partial_- X + i\psi_- \cdot \partial_+ \psi_- + i\psi_+ \cdot \partial_- \psi_+),$$

y las ecuaciones de movimiento son:

$$\partial_- \psi_+^\mu = 0 \quad \partial_+ \psi_-^\mu = 0 \quad \partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (4.62)$$

4.4.1. Transformaciones supersimétricas en la hoja de mundo

Se introduce un parámetro supersimétrico de transformación ϵ , el cual es un espinor de majorana de dos componentes,

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_- \\ \epsilon_+ \end{pmatrix},$$

tal que las transformaciones sobre los campos son

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon} \psi^\mu \quad \delta \psi^\mu = -i\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \quad \delta \bar{\psi}^\mu = i\bar{\epsilon} \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu. \quad (4.63)$$

Entonces la variación de la acción es de la forma

$$\delta S = \frac{-T}{2} \int d^2\sigma \partial_\alpha \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{2} \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu \right), \quad (4.64)$$

de donde se puede hallar la corriente conservada:

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (4.65)$$

El tensor de momento energía esta asociado a una simetría de traslación en la hoja de mundo

$$\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \epsilon^\alpha \quad \alpha = 0, 1 \quad \sigma^\alpha = (\tau, \sigma),$$

entonces los campos cambian como.

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \epsilon^\alpha \partial_\alpha X^\mu \quad \psi^\mu \rightarrow \psi^\mu + \epsilon^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu. \quad (4.66)$$

Tomando la variación de la acción con esta transformación se obtiene para el tensor de Momento-Energía la expresion:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu (\rho_\alpha \partial_\beta - \rho_\beta \partial_\alpha) \psi_\mu \\ &- \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} (\partial^\gamma X^\mu \partial_\gamma X_\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi}^\mu \rho^\gamma \partial_\gamma \psi_\mu). \end{aligned} \quad (4.67)$$

En coordenadas del cono de luz se obtiene para el tensor momento-Energía

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu} \\ T_{--} &= \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

y para la corriente conservada

$$J_+ = \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu \quad J_- = \psi_-^\mu \partial_- X_\mu. \quad (4.69)$$

Entonces las leyes de conservación son:

$$\partial_- T_{++} = 0 \quad \partial_+ T_{--} = 0. \quad (4.70)$$

La solución de las ecuaciones 4.62 para la parte bosónica ya se conoce, para los campos fermiónicos la solución está sujeta a las condiciones de frontera, veamos. Para la acción fermiónica

$$S_F = iT \int d^2\sigma \left(\psi_- \cdot \partial_+ \psi_- + \psi_+ \cdot \partial_- \psi_+ \right), \quad (4.71)$$

tomamos la variación

$$\delta S_F \propto \int d\tau \left[(\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_-) \Big|_{\sigma=\pi} - (\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_-) \Big|_{\sigma=0} \right]. \quad (4.72)$$

Para la cuerda abierta hay en general dos formas de exigir que la acción sea invariante, y es cancelando los dos términos del integrando en los dos puntos extremos sin embargo uno de ellos se fija a mano y se deja libertad en el otro extremo, por convención se toma

$$\psi_\mu^+(0, \tau) = \psi_\mu^-(0, \tau).$$

En el otro punto la elección tiene entonces dos posibilidades,

1. $\psi_\mu^+(\pi, \tau) = \psi_\mu^-(\pi, \tau)$ Sector de Ramond
2. $\psi_\mu^+(\pi, \tau) = -\psi_\mu^-(\pi, \tau)$ Sector de Neveu-Schwarz

4.4.2. Cuerda abierta-Sector R

La solución de las ecuaciones 4.62 para la parte fermiónica viene dada por [2]

$$\begin{aligned} \psi_\mu^-(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ \psi_\mu^+(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Implementemos entonces la condición de Ramond

$$\psi_\mu^-(\pi, \tau) = \frac{e^{in\pi}}{\sqrt{2}} \sum_n d_n^\mu e^{-in\tau} = \frac{e^{-in\pi}}{\sqrt{2}} \sum_n d_n^\mu e^{-in\tau} = \psi_\mu^+(\pi, \tau), \quad (4.74)$$

entonces los números n , han de ser enteros

$$e^{2in\pi} = 1 \rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

y utilizando la condición de majorana, se obtiene una condición sobre los coeficientes de expansión

$$\psi^{\mu*} = \psi^\mu \rightarrow d_n^{\mu\dagger} = d_{-n}^\mu. \quad (4.75)$$

4.4.3. Cuerda abierta-Sector N-S

La solución de las ecuaciones 4.62 para la parte fermiónica viene dada por [2]

$$\begin{aligned} \psi_\mu^-(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ \psi_\mu^+(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Implementemos entonces la condición de Neveu-Schwarz.

$$\psi_\mu^-(\pi, \tau) = \frac{e^{ir\pi}}{\sqrt{2}} \sum_r b_r^\mu e^{-ir\tau} = -\frac{e^{-ir\pi}}{\sqrt{2}} \sum_r b_r^\mu e^{-ir\tau} = -\psi_\mu^+(\pi, \tau), \quad (4.77)$$

y encontramos en este caso que los números r , han de ser semienteros

$$e^{2ir\pi} = -1 \rightarrow r = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots,$$

y utilizando la condición de majorana, se obtiene una condición sobre los coeficientes de expansión

$$\psi^{\mu*} = \psi^\mu \rightarrow b_r^{\mu\dagger} = b_{-r}^\mu. \quad (4.78)$$

4.4.4. Cuerda cerrada

Análogo al caso anterior, es posible tomar dos condiciones de frontera, una periódica y la otra antiperiódica. La expansión de los modos de vibración de la cuerda es

$$\begin{aligned}\psi_{\mu}^{-}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r b_r^{\mu} e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ \psi_{\mu}^{+}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r b_r^{\mu} e^{-ir(\tau+\sigma)},\end{aligned}$$

$$\psi^{\mu\pm}(\sigma, \tau) = \psi^{\mu\pm}(\sigma + \pi, \tau) \quad \text{Sector-R (Periodica)}, \quad (4.79)$$

$$e^{2ir\pi} = 1 \rightarrow r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\psi^{\mu\pm}(\sigma, \tau) = -\psi^{\mu\pm}(\sigma + \pi, \tau) \quad \text{Sector-N-S (Antiperiódica)}, \quad (4.80)$$

$$e^{2ir\pi} = -1 \rightarrow r = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

4.4.5. Cuantización canónica

Para los campos fermiónicos la condición que ha de ser impuesta para realizar la cuantización canónica es

$$\{\psi_A^{\mu}(\sigma, \tau), \psi_B^{\nu}(\sigma', \tau)\} = \pi \eta^{\mu\nu} \delta_{AB} \delta(\sigma - \sigma') \quad A, B = \pm. \quad (4.81)$$

Reemplazando los campos fermiónicos se obtiene relaciones de anti-conmutación para los modos 4.75 y 4.78

$$\{d_n^{\mu}, d_m^{\nu}\} = \delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu} \quad \{b_r^{\mu}, b_s^{\nu}\} = \delta_{r+s,0} \eta^{\mu\nu}, \quad (4.82)$$

que junto con las relaciones de conmutación 4.27 forman el álgebra de los modos de oscilación de la cuerda. El estado base de oscilación en los dos sectores es definido como

$$\begin{aligned}\alpha_m^{\mu} |0\rangle_R &= d_m^{\mu} |0\rangle_R = 0 & m > 0 \\ \alpha_m^{\mu} |0\rangle_{NS} &= b_r^{\mu} |0\rangle_{NS} = 0 & m, r > 0.\end{aligned} \quad (4.83)$$

Los estados excitados se construyen con los modos negativos de los osciladores. En el **sector NS** hay un único estado base que corresponde a

un estado de espín cero en el espacio-tiempo, y como todos los osciladores transforman como vectores espacio-temporales, entonces los estados excitados también son bosones. En el espectro NS como no hay modo $r = 0$, entonces se define el estado vacío como el anulado por todo $r > 1$

$$b_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad r > 0, \quad (4.84)$$

y los modos con $r < 0$ son operadores de creación. En el **sector R** el estado base es degenerado, pues los operadores d_0^μ pueden actuar si cambian la masa del estado, pues conmuta con el operador número N (4.90) cuyos autovalores determinan la masa al cuadrado. Los modos cero satisfacen

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}, \quad (4.85)$$

relación análoga al álgebra de Dirac $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ entonces hay un conjunto degenerado de estados base, los cuales pueden ser escritos como $|a\rangle$ donde “a” es un índice de espinor tal que

$$d_0^\mu |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{ba}^\mu |b\rangle. \quad (4.86)$$

Entonces el estado base es un fermión espacio-temporal y en consecuencia todos los estados en el sector R son fermiones espacio-temporales.

4.4.6. Estados Físicos

Como en el caso bosónico, se construyen los operadores de Super-Virasoro como los modos del tensor de momento energía (4.59),

$$L_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} T_{++} = L_m^{(b)} + L_m^{(f)}. \quad (4.87)$$

Adicional a esto con el objetivo en definir los estados físicos también deben tenerse en cuenta los modos de la supercorriente.

1. Sector NS

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ir\sigma} J_+ \quad r \in \mathbb{Z} + 1/2$$

2. Sector R

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} J_+ \quad m \in \mathbb{Z}$$

Donde la contribución bosónica viene dada por,

$$L_m^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_{m+n} : \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.88)$$

Ahora, para los estados fermiónicos como siempre debe separarse para cada sector.

En el **sector NS** se tiene para los operadores de super-Virasoro y de super-corriente respectivamente:

$$\begin{aligned} L_m^{(f)} &= \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \left(r + \frac{m}{2} \right) : b_{-r} \cdot b_{m+r} : \quad m \in \mathbb{Z} \\ G_r &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{-n} \cdot b_{r+n} : \quad r \in \mathbb{Z} + 1/2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Definiendo el operador número como

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r, \quad (4.90)$$

el operador L_0 puede ser escrito como,

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + N.$$

En el **sector R** se tiene para los operadores de super-Virasoro y de super-corriente respectivamente:

$$\begin{aligned} L_m^{(f)} &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(n + \frac{m}{2} \right) : d_{-n} \cdot b_{m+n} : \quad m \in \mathbb{Z} \\ F_m &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{-n} \cdot d_{m+n} : \quad m \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

Los anteriores operadores cumplen la siguiente álgebra de Super-Virasoro.

Sector R

- $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m+n,0}$
- $[L_m, F_n] = \left(\frac{m}{2} - n \right) F_{m+n}$

- $\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{D}{2}m^2\delta_{m+n,0}$

Sector NS

- $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}$

- $[L_m, G_r] = (\frac{m}{2} - r)G_{m+r}$

- $\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{D}{2}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r+s,0}$.

Se puede afirmar que un estado $|\phi\rangle$ es físico si satisface las siguientes condiciones.

Sector R	Sector NS
$F_n \phi\rangle = 0 \quad n \geq 0$	$G_r \phi\rangle = 0 \quad r \geq 0$
$L_m \phi\rangle = 0 \quad m > 0$	$L_m \phi\rangle = 0 \quad m > 0$
$(L_0 - a_r) \phi\rangle = 0$	$(L_0 - a_{NS}) \phi\rangle = 0$

Existen diferentes tipos de teorías de supercuerdas, las cuales varían básicamente dependiendo del grupo gauge de simetría que se utilice, a continuación se da una breve descripción de las cinco teorías de supercuerdas existentes.

Teoría de supercuerdas del tipo I

Su grupo gauge de simetría es $SO(32)$, incluye cuerdas abiertas y cerradas no orientadas³, tiene SUSY $N = 1$

Teoría de supercuerdas del tipo IIA

Su grupo gauge de simetría es $U(1)$, describe solo cuerdas cerradas orientadas, tiene SUSY $N = 2$

Teoría de supercuerdas del tipo IIB

no posee grupo gauge de simetría, describe cuerdas cerradas orientadas, tiene SUSY $N = 2$

³El término “cuerda orientada” significa que la dirección en que se recorra la cuerda es relevante

Teoría de supercuerdas Heterotica $SO(32)$

Su grupo gauge de simetría es $SO(32)$, describe cuerdas cerradas orientadas, utiliza la teoría de cuerdas bosónica para describir los movimientos en una dirección y SUSY $N = 1$ para describir la otra dirección

Teoría de supercuerdas Heterotica $E_8 \times E_8$

Su grupo gauge de simetría es $E_8 \times E_8$, describe cuerdas cerradas orientadas, utiliza la teoría de cuerdas bosónica para describir los movimientos en una dirección y SUSY $N = 1$ para describir la otra dirección

Capítulo 5

Geometría especial

Este capítulo es de vital importancia en el desarrollo de la teoría central de este trabajo, pues el proceso de regularización zeta tiene aplicación directa en el cálculo de correcciones de umbral en teorías de cuerdas efectivas a baja dimensiones, y este es un fenómeno que resulta de la compactificación y otros efectos geométricos, además aquí se explicara el concepto de espacio de módulos sobre variedades de compactificación particularmente variedades Calabi-Yau.

5.1. Compactificación

Compactificación de Kaluza-Klein

La compactificación es el proceso por el cual se puede tomar la teoría de cuerdas de 10 dimensiones y hacer una conexión con nuestro espacio-tiempo cotidiano de 4 dimensiones, el proceso de compactificación general mas utilizado es el formalismo de Kaluza-Klein.

Cuando un espacio total X se parte como la suma de una variedad no compacta M (nuestro universo) y una variedad compacta K muy pequeña, entonces la derivada covariante se divide en dos sectores, $\nabla^m = (\nabla^\mu, \nabla^i)$ con la notación indicial $m = (\mu, i)$ para $\mu = 0, 1, \dots, 4$ e $i = 5, 6, \dots, 10$ analizamos entonces los campos, los cuales se pueden representar por medio de p -formas B_p , la ecuación de movimiento para un campo sin masa es

$$(\Delta_\mu + \Delta_i) B_p = 0. \tag{5.1}$$

El teorema de escala afirma que si K es muy pequeño, entonces los autovalores de Δ_i tienden a infinito, es decir bajo $K \rightarrow tK$ si $t \rightarrow 0$ entonces $\Delta_k \rightarrow t^{-1}\Delta_k$ [11]. Para solucionar esta divergencia, se exige que los campos satisfagan la condición

$$\Delta_k B_p = 0. \quad (5.2)$$

5.1.1. Compactificación y dualidad T

Primero veamos la dualidad T y el proceso de compactificación sencillo sobre un círculo de radio R y sobre un toro para la cuerda bosónica.

En el caso circular, una de las coordenadas del espacio-tiempo de 26 dimensiones, forma un círculo de radio R , entonces la geometría del espacio-tiempo tiene estructura $(\mathbb{R}^{24+1} \times S^1)$ por convención $X^0(\sigma, \tau)$ es la coordenada temporal y $X^{25}(\sigma, \tau)$ es la coordenada compactificada. Esta condición puede imponerse así

$$X^{25}(\sigma + \pi, \tau) = X^{25}(\sigma, \tau) + 2\pi RW. \quad (5.3)$$

Esta ecuación periódica sugiere que la cuerda se enrolla W veces sobre la dimensión compacta, donde W debe ser un entero y es conocido como el número de Winding, este número puede ser positivo o negativo, indicando el sentido de enrollamiento, el resto de las coordenadas quedan inalteradas, solo la expansión de $X^{25}(\sigma, \tau)$ debe modificarse agregando un término lineal en σ para las soluciones 4.14

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + 2\alpha' p^{25} \tau + 2RW\sigma + \dots, \quad (5.4)$$

donde (\dots) representa de ahora en adelante la parte armónica. Nótese que 5.3 se satisface con esta elección. En mecánica cuántica, la coordenada X^{25} aparece junto al momento P^{25} en una función de onda del tipo $\exp(iP^{25}X^{25})$, entonces si X^{25} aumenta en $2\pi R$, es decir da una vuelta sobre el círculo, la función de onda debería quedar invariante, por lo cual si

$$\exp[iP^{25}(X^{25} + 2\pi R)] = \exp(iP^{25}X^{25}),$$

entonces $2\pi RP^{25} = 2\pi K$ donde K es algún entero, el momento se cuantiza

$$P^{25} = \frac{K}{R} \quad K \in \mathbb{Z}, \quad (5.5)$$

El entero K se conoce como los modos de Kaluza-Klein. Entonces la solución 5.8 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} X_R^{25}(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2} (x^{25} - \bar{x}^{25}) + \left(\alpha' \frac{K}{R} - WR \right) (\tau - \sigma) + \dots \quad (5.6) \\ X_L^{25}(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2} (x^{25} + \bar{x}^{25}) + \left(\alpha' \frac{K}{R} + WR \right) (\tau + \sigma) + \dots \end{aligned}$$

Nótese que se ha tenido en cuenta 5.4, por otro lado, sabiendo que el momento se relaciona con los modos cero como $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2} l_s p^\mu$. Entonces las ecuaciones 5.8 también pueden escribirse como

$$\begin{aligned} X_R^{25}(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2} (x^{25} - \bar{x}^{25}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^{25} (\tau - \sigma) + \dots \quad (5.7) \\ X_L^{25}(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2} (x^{25} + \bar{x}^{25}) + \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_0^{25} (\tau + \sigma) + \dots \end{aligned}$$

De donde se puede concluir que:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^{25} &= \alpha' \frac{K}{R} - WR \quad (5.8) \\ \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_0^{25} &= \alpha' \frac{K}{R} + WR. \end{aligned}$$

La formula de masa 4.48 puede escribirse para estados físicos 4.4.6 como.

$$\frac{1}{2} \alpha' M^2 = (\bar{\alpha}_0^{25})^2 + 2N_L - 2 = (\alpha_0^{25})^2 + 2N_R - 2,$$

Tomando la suma y la diferencia en la anterior ecuación se obtiene.

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 &= \alpha' \left[\left(\frac{K}{R} \right)^2 + \left(\frac{WR}{\alpha'} \right)^2 \right] + 2N_L + 2N_R - 4 \quad (5.9) \\ N_R - N_L &= KW. \end{aligned}$$

Los enteros W y K se refieren a dos conceptos geométricos diferentes, pero matemáticamente equivalentes. Nótese que la ecuación (5.10) es invariante bajo $W \leftrightarrow K$ siempre que $R \leftrightarrow \bar{R} = \frac{\alpha'}{R}$ esta simetría es conocida como

dualidad T, y relaciona dos teorías equivalentes, una con dimensión compacta circular de radio R y la otra con dimensión compacta circular de radio $\frac{\alpha'}{R}$. Ahora, de las ecuaciones (5.9) se requiere que bajo dualidad T se intercambie $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ y $\bar{\alpha}_0 \rightarrow \bar{\alpha}_0$, en consecuencia la dualidad T es equivalente a $X_R \rightarrow -X_R$ y $X_L \rightarrow X_L$, o teniendo en cuenta toda la expansión se obtiene.

$$X(\sigma, \tau) = X_L + X_R \rightarrow \bar{X}(\sigma, \tau) = X_L - X_R,$$

donde la expansión de los modos izquierdos es:

$$\bar{X}(\sigma, \tau) = \bar{x} + 2\alpha' \frac{K}{R} \sigma + 2RW\tau + \dots \quad (5.10)$$

Para el caso de las cuerdas abiertas, la dualidad T da lugar al surgimiento de las D-Branas, aunque este tópicó no se estudiará en este trabajo.

5.1.2. Compactificación sobre Toros

El siguiente nivel en complejidad hablando de compactificación es tomar como espacio compacto, toros T^n , los cuales son esencialmente productos de círculos, nuevamente el espacio se parte en una componente minkowskiana d -dimensional y un toro T^n tal que $d+n = 26$ y viene descrito por la métrica

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \sum_{I, J=1}^n G_{IJ} dy^I dy^J. \quad (5.11)$$

La métrica interna del toro G_{IJ} contiene la información sobre la geometría del toro, en el caso particular de un toro generado por el producto ortogonal de círculos, la métrica es $F_{IJ} = R_I \delta_{IJ}$, siendo R_I el radio del I -ésimo toro. En estos términos, la cuerda cerrada es descrita por el mapeo $(\sigma, \tau) \rightarrow (X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau))$ para $(0 \leq \sigma \leq \pi)$, con la condición de periodicidad:

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma + \pi, \tau) &= X^\mu(\sigma, \tau) \\ Y^I(\sigma + \pi, \tau) &= Y^I(\sigma, \tau) + 2\pi W^I, \quad W^I \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Análogo al caso circular, W^I son los modos de Winding que representan el número de veces que la cuerda se enrolla sobre la dimension I . La expansión

de los grados de libertad de la cuerda está dada de la manera usual, con $l_s = 1$,

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma, \tau) &= X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) \\ Y^I(\sigma, \tau) &= Y_L^I(\tau + \sigma) + Y_R^I(\tau - \sigma), \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}X_L^\mu + p_L^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \\ X_R^\mu(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}X_L^\mu + p_R^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \\ Y_L^I(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}y_L^I + p_L^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^I e^{-2in(\tau + \sigma)} \\ Y_R^I(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}Y_R^I + p_R^I(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-2in(\tau - \sigma)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

y en este caso

$$P_L^\mu = P_R^\mu = \frac{1}{2}p^\mu \quad P_L^I - P_R^I = 2W^I \quad W^I \in \mathbb{Z}. \quad (5.15)$$

De tal manera que X^μ tiene momentum p^μ pero no tiene términos lineales en σ , y Y^I tiene modos de Winding. Si además el toro es rectangular, entonces $P_L^I + P_R^I = K_I \in \mathbb{Z}$, es decir surgen modos de Kaluza debido a la cuantización del momento. Cuando se incluyen campos constantes en termino de p-formas, B_{IJ} y una métrica interna mas general G_{IJ} se obtienen para los modos de Kaluza K_I

$$K_I = G_{IJ} (P_L^I + P_R^I) + B_{IJ} (P_L^I - P_R^I). \quad (5.16)$$

Que junto con la ecuación (5.15) nos permiten encontrar los momentos.

$$\begin{aligned} P_L^I &= W^I + G^{IJ} \left(\frac{1}{2}K_J - B_{JK}W^K \right) \\ P_R^I &= -W^I + G^{IJ} \left(\frac{1}{2}K_J - B_{JK}W^K \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Como en el caso circular, se impone la condición de estado físico,

$$(L_0 - 1)|\phi \rangle = (\bar{L}_0 - 1)|\phi \rangle = 0$$

Para encontrar,

$$\frac{1}{8}M^2 = \frac{1}{2}G_{IJ}P_L^I P_L^J + N_L - 1 = \frac{1}{2}G_{IJ}P_R^I P_R^J + N_R - 1. \quad (5.18)$$

La condición de nivelación de empalme (Level matching condition) se representa como:

$$N_R - N_L = \frac{1}{2}G_{IJ}(P_L^I P_L^J - P_R^I P_R^J) = W^I K_I.$$

El operador suma en este caso toma la forma

$$M^2 = M_0^2 + 4(N_R + N_L - 2),$$

Con

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_0^2 &= (W \ K) \mathcal{G}^{-1} \begin{pmatrix} W \\ K \end{pmatrix} \\ \mathcal{G} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G^{-1} & -G^{-1}B \\ -G^{-1}B & 2(G - BG^{-1}B) \end{pmatrix}_{2n \times 2n} \end{aligned} \quad (5.19)$$

La simetría de dualidad T para compactificar sobre círculos, se generaliza en este caso para un toro como.

$$W^I \leftrightarrow K_I \quad \mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{G}^{-1},$$

Como lo sugiere la ecuación 5.19.

Considerese la simetría discreta

$$B_{IJ} \rightarrow B_{IJ} + \frac{1}{2}N_{IJ} \quad K_I \rightarrow K_I + N_{IJ}W^J,$$

donde N_{IJ} es una matriz de enteros antisimétrica que deja P_L^I y P_R^I invariantes, las dos anteriores simetrías forman el grupo ortogonal $O(n, n, \mathbb{Z})$ el cual puede generarse por medio de $SL(n, \mathbb{Z})$, es en este sentido, que el grupo dual puede ser embebido en el grupo especial $SL(n, \mathbb{Z})$.

El espacio de módulos en un proceso de compactificación, es un espacio formado por los parámetros de la variedad compacta, y que permiten diferenciar entre variedades inequivalentes. en este caso el espacio de módulos esta formado por todas las posibles deformaciones en los parámetros G_{IJ} , B_{IJ} y $G_{IJ} + B_{IJ}$, y tiene representación por medio de un espacio cociente,

$$M_{n,n} = M_{n,n}^0 / O(n, n; \mathbb{Z}),$$

donde,

$$M_{n,n}^0 = o(n, n; \mathbb{R}) / [o(n; \mathbb{R} \times o(n; \mathbb{R})]. \quad (5.20)$$

Nótese que en el caso de un toro 2-dimensional T^2 la simetría es $SL(2, \mathbb{Z})$ cuyo espacio de módulos esta formado por el parametro τ que se mueve en la región fundamental mostrada en la figura (3.1).

La compactificación utilizada en este trabajo usa el formalismo de Kaluza-Klein, en este caso el espacio 10-dimensional (en el caso de supercuerdas) se divide en dos espacios uno infinito de 4 dimensiones y otro de 6 dimensiones compacto y muy pequeño, del orden de la longitud de Planck l_c , por lo cual estas dimensiones son invisibles a escalas ordinarias ($E \ll 1/l_c$).

De la topología del espacio compacto depende el espectro de la teoría y sus resultados físicos. La variedad compacta que mejor se ajusta a las necesidades de la teoría, es una Calabi-Yau de 6 dimensiones complejas, principalmente porque admite campos fermionicos, sin embargo son también de gran interés utilizar orbifolds y conifolds. Compactificar 6 de las 10 dimensiones en una teoría de supercuerdas utilizando un 6-Toro es topologicamente aceptable, el problema es que es irreal desde el punto de vista fenomenológico, pues no hay ruptura de SUSY, es decir, existe $N = 4$ ó $N = 8$ SUSY en $D=4$, por otro lado, Calabi-Yau y orbifolds son mas realistas, admiten menos supersimetrías ($N = 1 \text{ para } C - Y$). El inconveniente de las Calabi-Yau es que en general no se conoce una métrica interna, los orbifolds y las variedades Kähler comparte algunas propiedades interesantes con las Calabi-Yau, por lo cual es interesante su estudio, además de que para estas últimas es posible conocer una métrica interna.

5.1.3. Orbifolds

Un orbifold es basicamente el espacio cociente de una variedad M y un grupo discreto G , M/G , un elemento en este espacio corresponde un orbit de puntos en M los cuales son identificados bajo G , los puntos en M , que son

invariantes bajo G son singularidades (Cusps points), y representan singularidades sobre el espacio reducido. Un ejemplo es el espacio cociente \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 , en el cual se identifican puntos en el plano complejo, con su negativo, $z \leftrightarrow -z$.

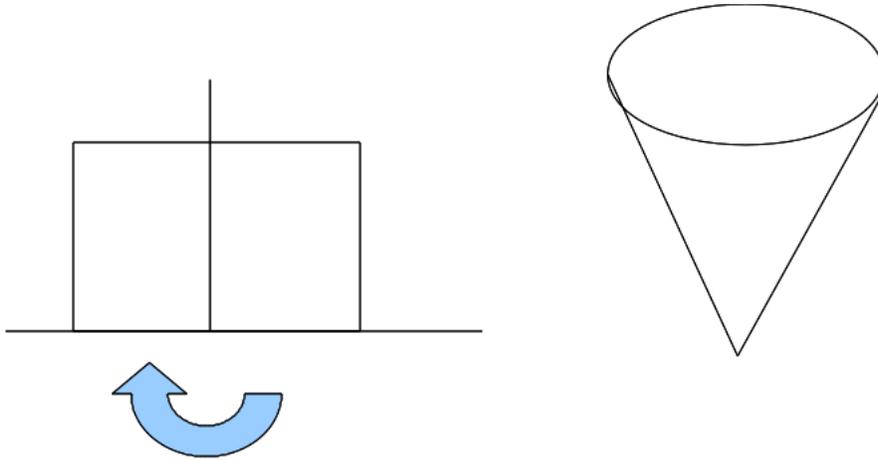


Figura 5.1: Orbifold \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2

Nótese que el punto singular es el origen, pues este no es afectado por el grupo \mathbb{Z}_2 . Si por ejemplo un loop cerrado se encuentra ubicado de tal manera que no encierra el origen. Como generalización puede tomarse el grupo discreto \mathbb{Z}_m el cual enrolla el plano complejo m -veces sobre sí mismo, y además se puede considerar el espacio complejo n -dimensional \mathbb{C}^n , obteniéndose un orbifold de la forma $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$. Los orbifold no son en general variedades, pues al admitir singularidades no son suaves.

En una teoría de cuerdas con geometría de orbifold M/G , existen dos clases de estados físicos, aquellos que son invariantes bajo G llamados estados no retorcidos ψ , para los cuales se cumple que si $\psi \in M$ entonces $g\psi = \psi \forall g \in G$.

Por otro lado si se consideran cuerdas cerradas, entonces debería cumplirse que $X^\mu(\sigma + 2\pi) = X^\mu(\sigma)$, sin embargo puede suceder que sobre M la cuerda no cierre pero bajo G , la cuerda sí cierre en M/G , estos estado entonces cumplen la condición

$$X^\mu(\sigma + 2\pi) = gX^\mu(\sigma) \quad g \in G, \quad (5.21)$$

estos son conocidos como estados retorcidos, nótese que para $g = 1$ se obtiene un estado no retorcido, y que pueden existir varios sectores retorcidos, según el grupo discreto que se utilice.

5.2. Calabi-Yau n-fold

Una n-Calabi-Yau “Calabi-Yau n-fold” (C-Y-n) compacta es una variedad de Kähler n dimensional compleja, y tal que su primera clase de Chern es nula

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}[R] = 0, \quad (5.22)$$

donde R es el escalar de curvatura, además una variedad C-Y compacta tiene como grupo de holonomía $SU(n)$, debido a esto admite un campo espinorial covariantemente constante, luego es “Ricci-Flat”.

Los números de Betti $b_p(M)$ representan la dimensión de la p-ésima cohomología de De Rham de una variedad M . Se cumplen las siguientes dos relaciones

1. $\chi(M) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p(M)$
2. $b_k = \sum_{p=0}^k h^{p,k-p},$

Donde $\chi(M)$ es la característica de Euler sobre M , $h^{p,q}$ son los números de Hodge, los cuales cuentan el número de (p, q) -formas que admite la variedad y sirven para caracterizarla. Para una variedad de Kähler compacta y conectada se cumple lo siguiente.

$$\begin{aligned} h^{p,0} &= h^{n-p,0} & h^{p,q} &= h^{n-q,n-p} \\ h^{p,q} &= h^{q,p} & h^{1,0} &= h^{0,1} = 0. \end{aligned}$$

Con estas condiciones se reduce significativamente los números de hodge independientes, para una 3-Calabi-Yau, por ejemplo la característica de Euler es

$$\chi = \sum_{p=0}^6 (-1)^p b_p = 2(h^{11} - h^{21}). \quad (5.23)$$

Algunos ejemplos son:

1. $\mathbb{C} \rightarrow n=1$ -Calabi-Yau no compacta
2. $T^2 \rightarrow n=1$ -Calabi-Yau compacta
3. $\mathbb{C}^2, \mathbb{C} \times T^2 \rightarrow n=2$ -Calabi-Yau no compacto
4. $T^4, K3 \rightarrow n=2$ -Calabi-Yau compacto.

$K3$ puede llevarse en lo que se conoce como el limite orbifold a la forma T^4/\mathbb{Z}_2 . Para $n \geq 2$ la clasificación de Calabi-Yau es un problema abierto, pues para $n = 3$ no es claro si existen finitos o infinitos C-Y. Las C-Y pueden construirse como subvariedades de espacios complejos proyectivos $\mathbb{C}P^{n+1}$ ($n > 1$). Sea G un polinomial homogéneo de grado k , en las coordenadas $z^a \in \mathbb{C}^{n+2}$, con $G(\lambda z^1, \dots, \lambda z^{n+2}) = \lambda G(z^1, \dots, z^{n+2})$ La subvariedad de $\mathbb{C}P^{n+1}$ definida por,

$$G(z^1, \dots, z^{n+2}) = 0, \quad (5.24)$$

es una variedad Kähler compacta de dimensión compleja n , cuya primera clase de Chern es nula para $k = n + 2$. En otras palabras bajo las condiciones adecuadas **“Una Calabi-Yau puede pensarse como una curva algebraica en un espacio complejo proyectivo”**.

La compactificación de la cuerda heterótica sobre C-Y 6-dimensional da lugar a teorías con SUSY $N = 1$ en el espacio no compacto 4-dimensional, además permite más fácilmente embeber el grupo del modelo estándar en cada uno de los grupos E_8 del grupo gauge $E_8 \times E_8$ de la cuerda heterótica. Se considera el espacio 10 dimensional, M_{10} dividido en el espacio M_4 (universo observable) no compacto, y M el cual es una variedad interna no compacta y muy pequeña (Del orden de la escala de Planck) así:

$$\begin{array}{ccc} M_{10} & = & M_4 \times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^\mu & = & (x^\mu, y^m). \end{array} \quad (5.25)$$

La existencia de alguna supersimetría se expresa por medio de la siguiente ecuación.

$$\nabla_\mu \xi = 0. \quad \text{Ecuación Espinorial de Killing} \quad (5.26)$$

Se exige además sobre M_4 que sea una variedad de Minkowski ($R = 0$) y máximamente simétrica. Para la variedad interna M , la condición de Killing

$\nabla_m \eta = 0$ implica que M es “Ricci-Flat” aunque no necesariamente plana. Entonces M debe ser una variedad de spin (Variedad que admite campos espinoriales). Se sabe que una 3-Calabi-Yau satisface tales condiciones. En una variedad C-Y un espinor transportado paralelamente sobre un loop es covariantemente constante y da lugar a una rotación $SU(4)$, aunque el grupo de Holonomia puede reducirse a $SU(3)$ debido a la descomposición $4 = 3 \oplus 1$.

5.3. Espacio de módulos sobre Calabi-Yau

Una variedad M es Kähler si $d\Omega = 0$ donde $\Omega = ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}}$ es la forma de Kähler, en tal caso se dice que la métrica sobre M es Kähler, se puede demostrar que una métrica es Kähler si existe una función potencial \mathcal{K} (potencial de Kähler) tal que. $g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{K}$.

Ya se había mencionado antes que la geometría de una C-Y podía ser especificada por medio de los números de Hodge, sin embargo esto no es suficiente para definir unívocamente una C-Y, es decir existen C-Y distintas con iguales números de Hodge que se relacionan por medio de deformaciones continuas de los parámetros que definen su forma y su tamaño, estos parámetros son conocidos como los módulos, y los valores posibles que pueden tomar definen el “espacio de módulos”.

En el caso de 3-C-Y, el espacio de módulos es el producto de dos espacios, uno que describe los módulos de la estructura compleja y el otro que describe los módulos de la estructura de Kähler. Este espacio de módulos se estudia a través de fluctuaciones de una C-Y dada con números de Hodge fijos, estas fluctuaciones reciben contribuciones de deformaciones de la métrica y de los campos tensoriales antisimétricos.

5.3.1. Deformación de los campos antisimétricos

Cuando se compactifica sobre un 3-C-Y M el laplaciano también se parte en dos piezas $\nabla = \nabla_4 + \nabla_6$, surgen entonces b_p (Número de Betti) campos sin masa 4-dimensionales, dados por el número de modos cero de ∇_6 ([11]). Así entonces el campo B_2 (10-dimensional) da lugar a $b_0 = 1$ 2-formas, $b_1 = 0$ vectores y $b_2 = h^{1,1}$ escalares en el espacio 4-dimensional, $b_2 = h^{1,1}$ es el número de módulos originados por el campo.

5.3.2. Deformación de la métrica

Los modos cero de la métrica en 10-dimensiones generan la métrica en 4-dimensiones $g_{\mu\nu}$, varios campos escalares sin masa pero ningún campo vectorial, pues $b_1 = 0$

Las fluctuaciones en la métrica se representan con:

$$g_{mn} \rightarrow g_{mn} + \delta g_{mn}. \quad (5.27)$$

A esta métrica en el espacio compacto, se le exige que satisfaga la condición de C-Y,

$$R_{mn}(g + \delta g) = 0, \quad (5.28)$$

la cual da lugar a una ecuación diferencial para δg y que tiene varias soluciones que preservan SUSY y la topología. Los coeficientes de estas soluciones independientes son los módulos, y representan los valores esperados de los campos escalares sin masa. Estos módulos cambian el tamaño y la forma de la variedad, pero no su topología.

Capítulo 6

Regularización de funciones Automórficas

Este es el capítulo central de este trabajo, aquí se establecen de forma clara, los objetivos, resultados y conclusiones.

6.1. Motivación y planteamiento del problema

Vimos en el capítulo anterior que las variedades kähler juegan un papel importante en procesos de compactificación y en teorías efectivas a bajas energías derivadas de supercuerdas [12, 13]. Por ejemplo, el espacio de módulos en teorías de supercuerdas compactificadas sobre variedades Calabi-Yau tiene geometría especial de kähler [14, 15, 16], esta es también el tipo de variedad parametrizada por las componentes escalares de multipletes vectoriales en supergravedad $N = 2 D = 4$ [17]. Se sabe que supergravedad puede escribirse en términos del superpotencial \mathcal{W} y el potencial de Kähler \mathcal{K} [2].

$$\mathcal{G} = \exp(\mathcal{K}) |\mathcal{W}|^2. \quad (6.1)$$

De una teoría efectiva a bajas energías derivada de supercuerdas, se espera que sea invariante dual, y como se sabe que el grupo dual esta embebido en el grupo simpléctico, entonces es razonable pensar en una función automórfica, las cuales son generalizaciones de las funciones modulares. En el caso en

que el espacio de módulos tiene geometría especial de Kähler se propone el “*ansatz*” [18, 19],

$$\mathcal{G} = \sum'_{p_i, q_i} \log i \frac{|p_i t^i + q^i \mathcal{F}_i|^2}{t^i \bar{\mathcal{F}}_i - \bar{t}^i \mathcal{F}_i}; \quad (6.2)$$

Esta propuesta se justifica un poco mejor en la siguiente sección, con $\vec{p} = \{p_i\}$, $\vec{q} = \{q_i\} \in \mathbb{Z}^n$, $\vec{p} \neq \vec{0} \neq \vec{q}$ y la prima, indica que la suma debe llevarse acabo sobre orbits de alguna red invariante dual Γ , una elección que se tomara mas tarde, t^i son los módulos, y \mathcal{F}_i son las derivadas del prepotencial \mathcal{F} , ($\mathcal{F}_i = \partial_i \mathcal{F}$). Podemos reescribir la ecuación (6.1) como:

$$e^{\mathcal{G}} = e^K |\Delta(t^i)|^2. \quad (6.3)$$

En principio Δ es infinito, y el objetivo principal de este trabajo es regularizar esta cantidad por medio de funciones zeta [18, 20], para cuando el espacio de módulos tiene una geometría especial de Kähler. comparando las anteriores ecuaciones se obtiene:

$$e^K = \frac{i}{t^i \bar{f}_i - \bar{t}^i f_i} \quad \Delta(t^i) = \prod_{\vec{p}, \vec{q} \in \Gamma} (p_i t^i + q^i \mathcal{F}_i), \quad (6.4)$$

$\Delta(t^i)$ tiene la misma forma que la corrección de umbral a un loop a la constante de acople gauge g_a [21, 22, 23], de una teoría de supercuerdas efectiva en bajas dimensiones [24], la cual tiene la forma,

$$\mathcal{T}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{16\pi^2} C_a \log \left(2 \operatorname{Im}(\tau) |\eta(\tau)|^4 \right), \quad (6.5)$$

c_a son las constantes de acople gauge las cuales pueden ser calculadas a partir del espectro de estados sin masa, en este caso nuestra función $|\Delta|^2$ es el análogo a esta función. La funciones automórficas son utilizadas en muchos otros aspectos en teorías de cuerdas [29, 30, 31, 32], como por ejemplo en correcciones de umbral R^4 en compactificación en teoría de cuerdas [4], aunque su uso se hace en su mayoría para compactificación sobre toros. En este trabajo se estudia las funciones automórficas con la propiedad de invarianza adecuada para el caso de compactificación sobre variedades Calabi-Yau.

6.2. Fórmula de Masa

En teoría de campos, la energía libre a un loop, para campos bosónicos es de la forma:

$$Z \equiv e^{F_B} = \int [\mathcal{D}\phi] \exp(-\phi^\dagger M_\phi^2 \phi) + \dots, \quad (6.6)$$

generalizando esto para supergravedad $N = 1$ se obtiene [3]

$$F = \log(\det M^\dagger M), \quad (6.7)$$

donde

$$M_{ij} = e^{\mathcal{G}/2} \mathcal{G}_{i\bar{m}}^{-1/2} [\mathcal{G}_{mn} + \mathcal{G}_m \mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{mn\bar{k}} \mathcal{G}_{\bar{k}l}^{-1} \mathcal{G}^l] \mathcal{G}_{\bar{n}j}^{-1/2}; \quad (6.8)$$

y

$$\mathcal{G}_i \equiv \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi_i} \quad \mathcal{G}^i \equiv \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\phi}_i} \quad \mathcal{G}_i^j \equiv \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi_j \partial \bar{\phi}_i}.$$

Los subíndices suben y bajan con:

$$(\mathcal{G}^{-1})^i_j \mathcal{G}_k^j = \delta_k^i.$$

Al exigir que se preserve la supersimetría $N = 1$ se obtiene para la masa [3]

$$\det(M^\dagger M) = \det \frac{|\mathcal{W}|^2}{Y}, \quad (6.9)$$

$\mathcal{K} = -\log Y$ es el potencial de Kähler y \mathcal{W} es el superpotencial. Para compactificación sobre orbifolds, el espacio de módulos es de la forma

$$\mathcal{M} = \frac{SO(2, 2)}{SO(2) \times SO(2)}, \quad (6.10)$$

para el cual los momentos satisfacen la ecuación [3],

$$(p^{i_L})^2 - (p^{i_R})^2 = 2\mathbb{Z} \quad (6.11)$$

Con estas condiciones, la energía libre satisface,

$$F = \sum_{n, n', m, m'} ' \log \frac{|m + nTU + i(m'U + n'T)|^2}{(T + \bar{T})(U + \bar{U})}, \quad (6.12)$$

donde $(0, 0, 0, 0) \neq (n, n', m, m') \in \mathbb{Z}^4$ satisfacen una condición mas restrictiva que 6.11

$$(p^{iL})^2 - (p^{iR})^2 = mn + m'n' = 0. \quad (6.13)$$

la cual puede ser interpretada como la condición de nivel de empalme “level matching condition”, el proceso de regularización para la función F da como resultado [3]

$$F|_{reg} = \log \left(|\eta(T)|^4 |\eta(\bar{T})|^4 (T + \bar{T})(U + \bar{U}) \right). \quad (6.14)$$

La formula de masa para otros espacios de módulos es también de la forma 6.2, por ejemplo para un espacio de módulos isomorfo a $\frac{SU(1,2)}{SU(2) \times U(1)}$ la formula de masa es:

$$M^2 = 2 \frac{|m\mathcal{A} - n\tau + p|^2}{1 - \tau\bar{\tau} - \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}, \quad (6.15)$$

donde τ y \mathcal{A} son dos módulos complejos y m, n, p son enteros gaussianos que satisfacen:

$$|m|^2 - |n|^2 - |p|^2 = 0.. \quad (6.16)$$

6.3. Regularización zeta

En esta sección se introduce el mecanismo de regularización zeta, el cual es un método de extraer infinitos mediante el uso de funciones zeta de Riemann. Dado un operador Λ con autovalores λ_n tal que se cumple la ecuación de autovalores $\Lambda f_n(x) = \lambda_n f_n(x)$, se define la función zeta de Riemann asociada al operador Λ .

$$\zeta_\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^s. \quad (6.17)$$

Notese si $\Lambda = 1$ entonces esta función coincide con la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ en $s = 0$, además se puede demostrar que [33].

$$\det \Lambda \equiv \prod_n \lambda_n = e^{-\zeta'(0)}. \quad (6.18)$$

Para encontrar $\zeta_\Lambda(s)$, utilizamos la función Gamma, así,

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx && x \rightarrow \lambda_n t \\ \Gamma(s) &= \lambda_n^s \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} t^{s-1} dt \\ \lambda_n^{-s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} t^{s-1} dt \\ \zeta(s) &= \sum_n \lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_n e^{-\lambda_n t} dt.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Esta forma de la función zeta de Riemann es la que se utilizara para regularizar el producto infinito que se ha propuesto como anzats en 6.2, utilizando la formula limite:

$$\mathcal{G} = \log (|\Delta|^2 e^K) = \sum_{(p_i, q_i) \in L_\Gamma} \log i \frac{|p_i t^i + q^i \mathcal{F}_i|^2}{(t^i \bar{\mathcal{F}}_i - \bar{t}^i \mathcal{F}_i)}, \quad (6.20)$$

donde se ha definido,

$$\lambda_{pq} \equiv p_i t^i + q^i \mathcal{F}_i \quad \lambda_0 \equiv t^i \bar{\mathcal{F}}_i - \bar{t}^i \mathcal{F}_i \quad \alpha \equiv \frac{i \lambda_{pq} \bar{\lambda}_{pq}}{\lambda_0},$$

entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \sum_{(p_i, q_i) \in L_\Gamma} \log \alpha = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{(p_i, q_i) \in L_\Gamma} \alpha^{-s} \log \alpha \\ \mathcal{G} &= -\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{(p_i, q_i) \in L_\Gamma} \frac{d}{ds} \alpha^{-s} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \sum_{(p_i, q_i) \in L_\Gamma} \alpha^{-s}, \\ \mathcal{G} &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta(s).\end{aligned}\quad (6.21)$$

Utilizando la ecuación (6.18) se obtiene:

$$e^{\mathcal{G}} = e^{\zeta'(0)} = \prod_{pq} \lambda_{pq} = \prod_{pq} \frac{i \lambda_{pq} \bar{\lambda}_{pq}}{\lambda_0}. \quad (6.22)$$

como se menciona antes, esta función asociada a un operador trae también asociados unos autovalores que en este caso identificamos como $(i \lambda_{pq}, i \bar{\lambda}_{pq}, -i \lambda_0^{-1})$

los cuales deben incluirse en la ecuación (6.19), para obtener finalmente la expresión que asocia la función zeta de Riemann con los parámetros de la función automórfica,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{(p,q) \in L_\Gamma} \left[\exp\left(-i\tau(p_i t^i + q^i \mathcal{F}_i)\right) + \exp\left(-i\tau(\bar{p}_i \bar{t}^i + \bar{q}^i \bar{\mathcal{F}}_i)\right) + \exp\left(i\tau(t^i \bar{\mathcal{F}}_i - \bar{t}^i \mathcal{F}_i)^{-1}\right) \right]; \quad (6.23)$$

Los enteros (p, q) satisfacen ligaduras similares a las dadas por la formula de masa, según la variedad que se este considerando, además deben transformar como vectores bajo el grupo simpléctico, lo cual se ve directamente debido a que el argumento del primer exponencial puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \vec{q} \\ i\vec{p} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ i\vec{\mathcal{F}} \end{pmatrix}; \quad (6.24)$$

Lo cual nos recuerda la ecuación (5.19). Como (t, \mathcal{F}) es un vector bajo $Sp(2n, \mathbb{R})$ entonces \mathcal{G} debe ser invariante bajo transformaciones de dualidad, y consecuentemente (\bar{p}, \bar{q}) debe transformar también como una vector symplectico. de hecho, si $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ es el grupo de dualidad entonces, dada la forma en que el grupo de dualidad esta contenido en el grupo simplectico, (\bar{p}, \bar{q}) debería transformar como un vector de $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ también.

En conclusión, la tecnica de regularización que utilizaremos se resume así: Según la variedad que se tome para el espacio de módulos, se debe tomar el orbit sobre la red Γ donde toman valores los enteros (p, q) , bajo alguna ligadura dada por la variedad sobre los parámetros, se calcula los argumentos de los exponenciales en la ecuación (6.23) después de tomar el limite, se hallan los infinitos y se sustraen para así encontrar la función zeta regularizada, la cual finalmente se reemplaza en (6.21) para así encontrar la función automórfica.

6.4. Coset $SU(1, 1)/U(1)$

Si el espacio de módulos es de la forma $SU(1, 1)/U(1)$ entonces se obtiene para los módulos [18]: $x^i = t^i$ y para el prepotencial $\mathcal{F}_i = ix_i$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
(p_i t^i + q^i \mathcal{F}_i) &= (p_0 x_0 + p_1 x_1 + i q_0 x_0 + i q_1 x_1) \\
&= P_0 x_0 + P_1 x_1 \quad \text{para} \quad P_i = p_i + i q_i \\
t^i \bar{\mathcal{F}}_i - \bar{t}^i \mathcal{F}_i &= -2i(1 - t\bar{t}).
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Donde se utiliza la parametrización de $SU(1, 1)/U(1)$ dada por las coordenadas físicas inhomogeneas $t = x_1$ y $x_0 = 1$. La elección particular del coset establece sobre los parámetros la ligadura:

$$(p_0)^2 + (q_0)^2 - (p_1)^2 - (q_1)^2 = 0; \tag{6.26}$$

La solución que se propone es:

$$\begin{aligned}
q_1 &= 2nm \\
p_1 &= n^2 - m^2 \\
p_0 &= n^2 + m^2 \quad \text{para} \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

En términos de estos nuevos enteros, el primer término de la función ζ en la ecuación (6.23) viene dado por:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\tau(n^2(1+t) + m^2(1-t) + 2inmt)}, \tag{6.28}$$

y teniendo en cuenta la condición $(n, m) \neq (0, 0)$. Después de esto la función ζ puede ser escrita como

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \exp[-i\tau \mathbf{Q}(n, m, t)], \tag{6.29}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(n, m, t) &= (n, m) \cdot \begin{pmatrix} 1+t & it \\ it & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \\
&\equiv \vec{n}^t \Omega \vec{n}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

La matriz Ω satisface

$$\begin{aligned} \det \Omega &= 1 \\ \Omega^{-1} &= \begin{pmatrix} 1-t & -it \\ -it & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

La suma sobre enteros en (6.29) es un ejemplo de la función Theta de Riemann que se estudio en el capítulo 3 ecuación (3.20), en términos de esta función se reescribe la función ζ :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (\theta_\tau(0, \Omega') - 1), \quad (6.32)$$

donde $\theta_\tau(0, \Omega') \equiv \Theta(0, -\tau \Omega'/\pi)$. En otras palabras, nuestra función ζ es la transformada de Mellin de una función Theta de Riemann. el factor 1 corresponde al modo 0 que no esta presente en la original (6.29).

Ahora se identificarán las singularidades de la función automórfica, es bien sabido que la funcion zeta tiene un polo simple en $s = 0$ con residuo -1 [6], para ello definimos las dos siguientes cantidades

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega(t)) &\equiv \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta(s) \\ \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} I(s). \end{aligned} \quad (6.33)$$

En este caso Ψ es la cantidad que nos interesa calcular, $I(s)$ es la integral que aparece en (6.32). Hacemos uso de las siguientes identidades [34]

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &\approx \frac{-1}{\epsilon} + C_0 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \psi(\epsilon) &= -\gamma - \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{con} \quad \psi(s) \equiv \frac{d \ln \Gamma(s)}{ds} = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde $\gamma = 0,5772157\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni, C_0 es una constante, y ϵ es un valor del argumento muy pequeño. Procedemos entonces a realizar el calculo:

$$\begin{aligned}
\Psi(\Omega(t)) &\equiv \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[I(s) \frac{d}{ds} (\Gamma(s))^{-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{d}{ds} I(s) \right]. \quad (6.35)
\end{aligned}$$

Calculamos el primer término.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} (\Gamma(s))^{-1} &= -\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \\
\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} (\Gamma(s))^{-1} &= \frac{\gamma\epsilon + 1}{1 - \gamma\epsilon} = 1 \\
I(s) \frac{d}{ds} (\Gamma(s))^{-1} &= I(s) \quad (6.36)
\end{aligned}$$

Calculamos el segundo término. Lo primero que se observa es que según las identidades (6.34) $1/\Gamma(\epsilon) \approx \epsilon$. Y en consecuencia para s pequeño:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(s)} \frac{d}{ds} I(s) &\approx \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{-1}{s} + C_0 + \mathcal{O}(s) \right) \\
&\approx s \left(\frac{1}{s^2} + C_1 + \mathcal{O}(s) \right) \\
&\approx \left(\frac{1}{s} + sC_1 + \mathcal{O}(s^2) \right) \approx \frac{1}{s}. \quad (6.37)
\end{aligned}$$

Entonces finalmente:

$$\Psi(\Omega(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (\theta_\tau(0, \Omega') - 1) + \frac{1}{s} \right]; \quad (6.38)$$

Luego la función $\Psi(\Omega)$ es bien comportada y finita una vez se ha sustraído el polo. El primer término de la ecuación (6.23), se puede escribir en términos de una serie de Eisenstein [6]

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m \neq 0} (\mathbf{Q}(n, m))^{-s} &\equiv \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_n e^{-i\tau Q(n, m)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (\theta_\tau(0, \Omega') - 1), \quad (6.39)
\end{aligned}$$

donde \mathbf{Q} , es la forma cuadrática definida en 7.8, antes de proseguir es necesario hacer un cambio de variable,

$$t \rightarrow T = \frac{1-t}{t+1} \quad \text{and} \quad t = \frac{1-T}{T+1}. \quad (6.40)$$

Lo que lleva a,

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2}(1-T) \\ \frac{i}{2}(1-T) & T \end{pmatrix} \\ (1-t\bar{t}) &\rightarrow \frac{1}{2}(T+\bar{T}). \end{aligned} \quad (6.41)$$

En lo que sigue nos sera de gran utilidad la forma general de la suma de Poisson [8],

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x+n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-2i\pi m\tau} d\tau \right] e^{2i\pi mx}. \quad (6.42)$$

Y también la integral [35]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivu} (u^2+1)^{-s} du = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)} 2\pi^{1/2} \left(\frac{|v|}{2}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(|v|) & \text{si } v \neq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(s)} \pi^{1/2} \Gamma(s-\frac{1}{2}) & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

Bajo este cambio de variable, la serie de Eisenstein puede factorizarse como:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \neq (0,0)} \frac{1}{(m^2 + mni(1-T) + n^2T)^s} &= \\ &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m+n(z+i\alpha))^s (m+n(z-i\alpha))^s}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

donde se ha definido

$$z = \frac{i}{2}(1-T) \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{1}{2}(T+1), \quad (6.45)$$

y ademas se parte la suma segun los siguientes casos,

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} = \left(2 \sum_{n=0, m>0} + 2 \sum_{n>0, m \in \mathbb{Z}} \right).$$

Considérese la función:

$$\sum_m g(x+m) = \sum_m (m+x+iy+i\delta)^{-s} (m+x+iy-i\delta)^{-s}. \quad (6.46)$$

Entonces aplicando (6.42) se obtiene:

$$\sum_m g(x+m) = \sum_r \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi r w}}{(w+iy+i\delta)^s (w+iy-i\delta)^s} dw \right) e^{2i\pi r x}. \quad (6.47)$$

Con $\sigma \equiv x+iy$ se obtiene

$$\sum_m g(x+m) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dw}{(\sigma^2 + \delta^2)^s} + \sum_{r \neq 0} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi r w} dw}{(\sigma^2 + \delta^2)^s} \right] e^{2i\pi r x}. \quad (6.48)$$

Cada término se calcula con la ayuda de (6.43) y se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_m g(x+m) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \pi^{1/2} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \delta^{1-2s} \\ &+ \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{r \neq 0} e^{2i\pi r \sigma} \delta^{\frac{1}{2}-s} |r|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|\delta). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Haciendo $\sigma = nz$ y $\delta = n\alpha$ y comparando con (6.45) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \neq 0} (\mathbf{Q}(T, m, n))^{-s} &= 2\zeta(2s) + \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \alpha^{1-2s} \zeta(2s-1) \\ &+ \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} \alpha^{1/2-s} \sum_{n>0, r \neq 0} e^{2\pi i r n z} n^{1/2-s} |r|^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi|r|n\alpha). \end{aligned}$$

Defínase la función $G^*(s)$, la cual es una función meromórfica bien comportada una vez se ha eliminado los polos

$$G^*(s) \equiv \Gamma(s) \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (\mathbf{Q}(m, n, z))^{-s}, \quad (6.50)$$

entonces comparando con (6.38, 6.39) se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(G^*(s) + \frac{1}{s} \right). \quad (6.51)$$

De la serie de Eisenstein encontramos que,

$$\begin{aligned} G^*(s) &= 2\Gamma(s) \zeta(2s) + 2\pi^{1/2} \Gamma(s-1/2) \alpha^{1-2s} \zeta(2s-1) \\ &+ 4\alpha^{1/2-s} \pi^s \sum_{n>0, r \neq 0} e^{2i\pi rnz} n^{1/2-s} |r|^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi|r|n\alpha). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Para valores de s pequeños $2\Gamma(s) \zeta(2s) \approx C_0 - 1/s$ y utilizando la identidad $K_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/2x} e^{-x}$ junto con los valores para la función zeta $\zeta(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ y $\zeta(-1) = -1/12$ encontramos,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \left(G^*(s) + \frac{1}{s} \right) &= C_0 + \frac{1}{3} \pi \alpha \\ &+ 2 \sum_{n,r>0} \frac{1}{r} (e^{2i\pi rn(z+i\alpha)} + e^{-2i\pi rn(z-i\alpha)}), \end{aligned} \quad (6.53)$$

Reemplazando (6.45) y utilizando la formula [7],

$$\ln \eta(z) = \frac{i\pi z}{12} - \sum_{m,k>0} \frac{1}{k} e^{2i\pi kmz}; \quad (6.54)$$

donde η es la función eta de Dedekind entonces:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(G^*(s) + \frac{1}{s} \right) = -2 \ln \eta(z+i\alpha) - 2 \ln \eta(-z+i\alpha) + C_0. \quad (6.55)$$

Habiendo encontrado la forma del primer término en la expresión (6.23) es ahora facil calcular la función automórfica de $\frac{SU(1,1)}{U(1)}$, el segundo término es el complejo conjugado del primero $\Psi(\Omega(\bar{t}))$, por ello los dos primeros términos seleccionan la parte real de esta función. El tercer término se puede calcular utilizando la función ζ .

Para calcular el tercer término, se utiliza la función ζ_3 asociada a el, así:

$$\zeta_3(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{0 \neq m, n \in \mathbb{Z}} \exp[-2^{-1}\tau(1-t\bar{t})^{-1}]. \quad (6.56)$$

La contribución de este término esta naturalmente dada por la derivada en el limite $s \rightarrow 0$, entonces con $\tau = 2(1-t\bar{t})\tau'$:

$$-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta_3(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau' \tau'^{s-1} e^{-\tau'} \sum_{0 \neq m, n \in \mathbb{Z}} 2^s [1-t\bar{t}]^s \right], \quad (6.57)$$

la integral es la función Gamma, la cual se cancela

$$-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta_3(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[2(1-t\bar{t}) \right]^s \left(4 \sum_{n>0} \sum_{m>0} 1 \right); \quad (6.58)$$

se utiliza $\zeta(0) = -1/2$, para finalmente obtener:

$$-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta_3(s) = 2 \ln |2(1-t\bar{t})|. \quad (6.59)$$

Entonces recopilando los tres términos de la ecuación (6.23) se obtiene con $(1-t\bar{t}) = (T + \bar{T})/2$, $z = i(1-T)/2$ y $\alpha = (1+T)/2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\equiv -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta(s) \\ &= 2 \left[\frac{i\pi}{12}(z+i\alpha) + \frac{i\pi}{12}(-z+i\alpha) - \sum_{n,r>0} \frac{1}{r} (e^{2i\pi nr(z+i\alpha)} + e^{2i\pi nr(-z+i\alpha)}) \right] \\ &+ 2 \left[\frac{i\pi}{12}(-z+i\alpha) + \frac{i\pi}{12}(z+i\alpha) - \sum_{n,r>0} \frac{1}{r} (e^{2i\pi nr(-z+i\alpha)} + e^{2i\pi nr(z+i\alpha)}) \right] \\ &+ 2 \ln |2(1-t\bar{t})| + cte \\ &= 4 \ln \eta(iT') + 4 \ln \eta(i) + 2 \ln (T' + \bar{T}') + cte, \end{aligned} \quad (6.60)$$

donde se ha definido $iT' \equiv T$. Finalmente la función automorfa para el coset $\frac{SU(1,1)}{U(1)}$ es:

$$e^{\mathcal{G}} = |\Delta|^2 e^K = cte |\eta(T)|^4 |T - \bar{T}|^2, \quad (6.61)$$

resultado que esta de acuerdo con los valores encontrados en la literatura [1], [3].

6.5. Coset $SU(1, 2)/SU(2) \times U(1)$

La forma que tienen los argumentos de la función automórfica en (6.20), para este caso es:

$$(p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i) = p_0 x_0 + p_1 x_1 + i q_1 x_1 + p_2 x_2 + i q_2 x_2, \quad (6.62)$$

donde se ha definido $q_0 = 0$ y el prepotencial tiene la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{i}{2} \eta^{IJ} X_I X_J = \frac{i}{2} (X^0 X_0 - X^1 X_1) \\ \mathcal{F}_i &= \partial_i \mathcal{F} = i X_i. \end{aligned} \quad (6.63)$$

El grupo gauge $SU(1, n, \mathbb{Z})$ impone una condición de invarianza sobre los elementos de la red:

$$(p_0)^2 = (p_1)^2 + (q_1)^2 + (p_2)^2 + (q_2)^2. \quad (6.64)$$

Esta es una ecuación diofantina, pues sus elementos son enteros. Se propone como solución a 6.64 el conjunto:

$$\begin{aligned} p_0 &= (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 \\ p_1 &= -(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 \\ q_1 &= 2n_1 n_2 \\ q_2 &= 2n_1 n_3 \\ p_2 &= 2n_1 n_4, \end{aligned} \quad (6.65)$$

donde $\vec{n} \equiv (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4$. Este conjunto de enteros satisfacen la ecuación 6.64, sin embargo, no abarca todas las posibles soluciones. pues el cuadrado de un entero siempre es 0 o 1 módulo 4, entonces el miembro izquierdo de 6.64 es 0 mod 4 o bien 1 mod 4, mientras que el miembro derecho puede ser cualquier entero, pues todo entero se puede escribir como la suma de cuatro cuadrados (Lagrange), y como hay una igualdad en el medio, entonces solo ciertas combinaciones son aceptables. en la tabla 6.1 se escriben las soluciones posibles según si los elementos son pares o impares, cualquier otra elección de los elementos p_i, q_i ($i = 1, 2$) resulta en un $p_0 = 2, 3 \pmod{4}$.

Solution	p_0^2	p_1	q_1	p_2	q_2
I	0 (mód 4)	p	p	p	p
II	1 (mód 4)	i	p	p	p
III	0 (mód 4)	i	i	i	i

Cuadro 6.1: Solución a la ligadura (6.64) según si p_i, q_i son **p** par o **i** impar.

No es difícil ver que la solución I y II son generadas por el conjunto (6.65), la solución III se genera tomando todos los elementos en \vec{n} impares y luego en (6.65) se divide la parte derecha por dos, el resultado es el conjunto solución para III, este proceso se hará explícitamente mas adelante, se trabajaran estas dos contribuciones de manera individual.

6.5.1. Primera contribución a la función automórfica.

Nos concentramos por ahora en la primera contribución (solución I y II). Se utiliza el conjunto solución (6.65) para el primer término en la expresión (6.23)

$$\zeta_1(s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{(p,q) \in L_\Gamma} \exp[-\tau\pi (p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i)] .^1 \quad (6.66)$$

Entonces en este caso $\zeta_1(s)$ representa la parte de la función zeta asociada al primer autovalor, recuérdese que la segunda parte resulta ser el complejo conjugado de la primera (aparte de un factor de i), y la tercera parte es independiente del orbit Γ , y se ha reemplazado los módulos t_i por x_i por conveniencia en la notación. Entonces el argumento de esta función toma la forma,

$$p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i = p_0 x_0 + p_1 x_1 + i q_1 x_1 + p_2 x_2 + i q_2 x_2. \quad (6.67)$$

Es posible reducir los grados de libertad haciendo uso de coordenadas homogéneas en los módulos así $x_0 = 1$, $x_1 = t$ y $x_2 = A$, y si además se

¹Nótese que en la expresión original 6.23 hay diferencia con los coeficientes por un factor de i y de π , sin embargo esto no afecta los cálculos debido a que la integral puede reabsorverlos, y además en la definición de los autovalores asociados puede multiplicarse y dividirse por algun factor siempre y cuando se haga cuidadosamente

reemplaza el conjunto solución 6.65 se obtiene para el argumento la siguiente expresión

$$p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 - n_1^2 t + n_2^2 t + n_3^2 t + n_4^2 t \quad (6.68) \\ + 2in_1 n_2 t + 2n_1 n_4 A + 2in_1 n_3 A.$$

Notese que este resultado puede llevarse a una forma matricial así

$$p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i = (n_1, n_2, n_3, n_4) \begin{pmatrix} 1-t & it & iA & A \\ it & 1+t & 0 & 0 \\ iA & 0 & 1+t & 0 \\ A & 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

Se hacen las siguientes definiciones ²:

$$\vec{n} \equiv \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} \quad \Omega_2 \equiv \begin{pmatrix} 1-t & it & iA & A \\ it & 1+t & 0 & 0 \\ iA & 0 & 1+t & 0 \\ A & 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

De tal manera que,

$$\det \Omega_2 = (1+t)^2$$

En decir, es invertible, redefinimos el argumento del exponencial como $Q(\vec{n}, t, A) \equiv \vec{n}^T \Omega_2 \vec{n}$ tal que:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{0} \neq \vec{n} \in \mathbb{Z}^4} \exp[-\tau \pi Q(\vec{n}, t, A)] \\ = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (\Theta(\tau, t, A) - 1), \quad (6.71)$$

donde

²El subíndice en la matriz Ω hace referencia al número de parámetros (módulos)

$$\Theta = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^4} \exp[-\tau\pi \mathcal{Q}(\vec{n}, t, A)].$$

Es la función Theta de Riemann, el término uno, representa los modos ceros que no están incluidos en la suma original, en este punto es importante introducir una simetría existente en la forma cuadrática $\mathcal{Q}(\vec{n}, t, A)$ a través de una transformación en los módulos,

$$t \rightarrow T = \frac{1-t}{1+t} \quad A \rightarrow A' = \frac{\sqrt{2}A}{1+t}.$$

Bajo esta transformación se obtiene una forma más simétrica para $\Omega_2 = \frac{2}{1+t}\Omega'_2$

$$\Omega'_2 = \begin{pmatrix} T & \frac{1}{2}i(1-T) & \frac{1}{\sqrt{2}}iA' & \frac{1}{\sqrt{2}}A' \\ \frac{1}{2}i(1-T) & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}iA' & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El potencial de Kähler transforma como:

$$1 - t\bar{t} - A\bar{A} \rightarrow 2(T + \bar{T} - A'\bar{A}'), \quad (6.72)$$

y definiendo $\alpha \equiv \frac{2\pi}{1+t}$, entonces la función zeta toma la forma

$$\begin{aligned} \zeta_{\Omega'_2}(s) &= \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{0} \neq \vec{n} \in \mathbb{Z}^4} \exp[-\tau\pi \mathcal{Q}(\vec{n}, T, A')] \\ &= \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{0} \neq \vec{n} \in \mathbb{Z}^4} \exp\left[-\tau\pi (T(n_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^4 (n_j)^2 + n_1 n_2 i(1-T) + n_1 n_3 i\sqrt{2}A' + n_1 n_4 \sqrt{2}A')\right] \end{aligned} \quad (6.73)$$

Completando cuadrados para cada n_j se obtiene:

$$\begin{aligned} \zeta_{\Omega'_2}(s) &= \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{0} \neq \vec{n} \in \mathbb{Z}^4} \exp\left[-\tau\pi \left(\frac{1}{4}(1+T)^2(n_1)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (n_2 + \frac{in_1}{2}(1-T))^2 + (n_3 + \frac{in_1}{\sqrt{2}}A')^2 + (n_4 + \frac{n_1}{\sqrt{2}}A')^2\right)\right] \end{aligned} \quad (6.74)$$

Se define el vector de enteros $\vec{N} \equiv (n_2, n_3, n_4)$, para partir la suma en término de dos contribuciones

$$\sum_{\vec{0} \neq \vec{n} \in \mathbb{Z}^4} = \sum_{\vec{0} \neq \vec{N} \in \mathbb{Z}^3, n_1=0} + \sum_{n_1 \neq 0, \vec{N} \in \mathbb{Z}^3} \equiv \zeta_I + \zeta_{II},$$

el primer término puede analizarse haciendo uso de las propiedades de la transformada de Mellin [6], para el cual se obtiene

$$\zeta_I = \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{N} \neq \vec{0}} e^{-\pi\tau[(n_2)^2+(n_3)^2+(n_4)^2]}. \quad (6.75)$$

En términos de transformadas, se encuentra que esta contribución es la transformada de Mellin de una de las funciones theta de Jacobi,

$$\mathbf{M}[\phi(s)] = \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \phi(\tau), \quad (6.76)$$

donde

$$\phi(\tau) = [\theta_3(\tau)]^3 - 1 \quad \theta_3(\tau) = \sum_n e^{-\pi\tau n^2}. \quad (6.77)$$

Haciendo uso de la ecuación funcional suministrada en la sección 3.4 donde se estudio la transformada de Mellin, es posible encontrar los polos y residuos de esta contribución, la función $\theta_3(\tau)$ de Jacobi satisface $[\theta_3(\tau)]^3 = \tau^{-3/2} [\theta_3(\tau^{-1})]^3$. Entonces se obtiene la ecuación funcional

$$\phi(\tau^{-1}) = \tau^{3/2} \phi(\tau) + \tau^{3/2} - 1. \quad (6.78)$$

Asi pues se encuentran polos simples en $s = 0$ and $s = 3/2$ con residuos -1 y $+1$ respectivamente [6].

La segunda parte debe analizarse mediante el uso de la formula de suma de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi\tau(n+xm)^2} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i x m n} e^{-\pi n^2/\tau}, \quad (6.79)$$

sobre cada entero (n_2, n_3, n_4) , definiendo

$$m = n_1 \quad x_2 = \frac{i(1-T)}{2} \quad x_3 = \frac{iA'}{\sqrt{2}} \quad x_4 = \frac{A'}{\sqrt{2}},$$

después de este proceso se obtiene:

$$\begin{aligned} \zeta_{II} &= \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1 \neq 0, \vec{N} \in \mathbb{Z}^3} e^{i\pi n_1 [n_2 i(1-T) + n_3 \sqrt{2} i A' + n_4 \sqrt{2} A']} \\ &\quad \times \int_0^\infty d\tau \tau^{(s-3/2)-1} e^{-(n_1)^2 \pi \tau (\frac{1+T}{2})^2 - \frac{\pi}{\tau} ((n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2)}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

En este punto debe considerarse nuevamente dos casos, $\vec{N} = 0$ y $\vec{N} \neq 0$, el primero es análogo a la primera contribución, y después de un cambio de variable da como resultado:

$$\zeta'_{II} = \left(\frac{1+T}{2} \right)^{-2s+3} \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{(s-3/2)-1} [\theta_3(\tau) - 1]. \quad (6.81)$$

El segundo caso, puede hacerse con ayuda de la siguiente identidad ([35]):

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x} - \alpha x} = 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{\beta\alpha}), \quad (6.82)$$

para $\beta, \alpha \neq 0$, y donde K_ν son la funciones de Bessel modificadas de segunda especie, en este caso se identifica

$$\nu = s - 3/2 \quad \beta = \pi(n_2^2 + n_3^2 + n_4^2) \quad \alpha = \pi n_1^2 \left(\frac{1+T}{2} \right)^2$$

Se observa que debido a las condiciones impuestas se satisface que α y β son distintas de cero, por lo cual se puede utilizar la identidad sin ningun problema para obtener el resultado:

$$\begin{aligned} \zeta''_{II} &= \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \sum_{0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, \vec{N} \neq \vec{0}} \exp \left[i\pi n_1 \left(n_2 i(1-T) + n_3 \sqrt{2} i A' + n_4 \sqrt{2} A' \right) \right], \\ &\quad \times 2^{s-1/2} |\vec{N}|^{s-3/2} n_1^{-s+3/2} (1+T)^{-s+3/2} K_{s-3/2}(\pi n_1 |\vec{N}| (1+T)), \end{aligned}$$

entonces juntando todos los casos se obtiene para la primera contribución en la función zeta,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\Omega'_2}(s) &= \zeta_I + \left(\frac{1+T}{2}\right)^{-2s+3} \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{(s-3/2)-1} [\theta_3(\tau) - 1] \\
&+ \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \sum_{0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, \vec{N} \neq \vec{0}} \exp \left[i\pi n_1 \left(n_2 i(1-T) + n_3 \sqrt{2} i A' + n_4 \sqrt{2} A' \right) \right] \\
&\times 2^{s-1/2} |\vec{N}|^{s-3/2} n_1^{-s+3/2} (1+T)^{-s+3/2} K_{s-3/2}(\pi n_1 |\vec{N}| (1+T)) (6.83)
\end{aligned}$$

De lo aprendido en la sección anterior, debe tomarse el limite en $s \rightarrow 0$ entonces para cancelar singularidades debe multiplicarse por la función $\Gamma(s)$ y considerar la función.³

$$G(s) \equiv \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \sum_{n \in \mathbb{Z}^4} (Q(n, t, A'))^{-s} = \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \zeta_{\Omega'_2}(s).$$

Esta función aun tiene una singularidad que nos interesa remover, es un polo simple en $s = 0$ con residuo -1 , entonces removiendo estas singularidades se obtiene en el limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \left(\mathbf{G}(s) + \frac{1}{s} \right) &= C_0 + \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{1+T}{2} \right)^3 \\
&+ \frac{(1+T)^{3/2}}{\sqrt{2}} \sum_{0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, \vec{N} \neq \vec{0}} \left[e^{i\pi n_1 [n_2 i(1-T) + n_3 \sqrt{2} i A' + n_4 \sqrt{2} A']} \right. \\
&\times \left. |\vec{N}|^{-3/2} n_1^{3/2} K_{-3/2}(\pi n_1 |\vec{N}| (1+T)) \right], \quad (6.84)
\end{aligned}$$

donde C_0 es constante en el sentido de que no depende de los módulos (T, A') , esta expresión puede simplificarse un poco si se utiliza las relaciones para las funciones de Bessel [35]

$$\begin{aligned}
K_{3/2}(z) &= K_{-3/2}(z) \\
K_{1/2}(x) &= \sqrt{\pi/2x} e^{-x} \quad K_{3/2}(z) = z^{-1} K_{1/2}(z) + K_{1/2}(z)
\end{aligned}$$

³Q juega el papel de autovalor en la ecuación 6.17

Se obtiene entonces,

$$K_{-3/2}(\pi n_1 |\vec{N}|(1+T)) = \frac{1 + \pi n_1 |\vec{N}|(1+T)}{\pi n_1 |\vec{N}|(1+T)} (2n_1 |\vec{N}|(1+T))^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi n_1 |\vec{N}|(1+T)}, \quad (6.85)$$

estos resultado en la ecuación (6.84) nos dan finalmente la forma de la función zeta regularizada:

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega_2(T, A')) \equiv \lim_{s \rightarrow 0} (\mathbf{G}(s) + \frac{1}{s}) &= C_0 + \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{1+T}{2} \right)^3 \\ &+ \sum_{0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, \vec{N} \neq \vec{0}} \left[e^{i\pi n_1 [n_2 i(1-T) + n_3 \sqrt{2}iA' + n_4 \sqrt{2}A' + i|\vec{N}|(1+T)]} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi |\vec{N}|^3} + \frac{n_1(1+T)}{|\vec{N}|^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Con esto obtenemos la función zeta regularizada asociada a los dos primeros autovalores en la ecuación (6.23), pues los dos primeros son complejos conjugados uno del otro, para hallar la función zeta asociada al tercer autovalor, analizamos el término:

$$\lambda_0 = t^i \bar{\mathcal{F}}_i - \bar{t}^i \mathcal{F}_i = -2i(1 - t\bar{t} - A\bar{A}),$$

que bajo la transformación de los parámetros y utilizando las propiedades de invarianza en los módulos transforma como (6.72) módulo factores constantes. Entonces se obtiene.

$$\zeta_3(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{m, n \neq 0} \exp \left[\frac{-\tau}{T + \bar{T} - A'\bar{A}'} \right]. \quad (6.87)$$

Definimos $J \equiv |T + \bar{T} - A'\bar{A}'|$, entonces el término que nos interesa es de la forma:

$$\begin{aligned}
-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta_3(s) &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{m,n \neq 0} e^{-\tau/J} \right] \quad (6.88) \\
&= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau} \sum_{m,n \neq 0} J^s \right] \\
&= \frac{-1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} J^s \ln J \ 4 \sum_{n > 0} 1 \\
&= \frac{-1}{2} \ln J \ 4 \zeta(0) = \ln J \\
-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta_3(s) &= \ln |T + \bar{T} - A' \bar{A}'|.
\end{aligned}$$

Tomando los dos resultados anteriores en la ecuación (6.22) se obtiene para la primera contribución de la función automórfica la expresión

$$e^{\mathcal{G}} = e^{2\text{Re}\Psi(\Omega_2(T,A'))} |T + \bar{T} - A' \bar{A}'|^2. \quad (6.89)$$

Para construir la función automórfica para un coset de la forma $SU(1, n)/SU(n) \times U(1)$ se utiliza lo aprendido en esta sección, con el uso recursivo de la formula (6.65) y la generalización del resto del procedimiento. La inclusión de mas módulos A_i en la formulas solo incrementara la dimensión de la matriz Ω'_2 pero su estructura general se mantendrá constante de la forma,

$$\Omega'_n = \begin{pmatrix} T & \frac{1}{2}i(1-T) & \frac{1}{\sqrt{2}}iA' & \frac{1}{\sqrt{2}}A' & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}iA'_n & \frac{1}{\sqrt{2}}A'_n \\ \frac{1}{2}i(1-T) & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}iA' & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A' & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A'_n & 0 & & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.90)$$

Entonces la función ζ a calcular es la transformada de Mellin,

$$\zeta_{\text{gen}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} [\Theta_{\Omega'_n}(\tau) - 1]. \quad (6.91)$$

La posición de los polos en la expansión de fourier $\Gamma(s)\zeta_{\text{gen}}(s)$ son afectados, sin embargo se mantiene un polo en $s = 0$ el cual después de ser removido da lugar a una expresión regular para la función automórfica. la forma general depende también del uso recursivo de las relaciones para las funciones de Bessel pero la estructura general de la solución es similar a la expresión (6.80).

6.5.2. Segunda contribución a la función automórfica

Como se mencionó al principio de esta sección, la solución a la ecuación diofantina 6.64 se divide en dos contribuciones según la tabla 6.1, ya se estudio la primera contribución, ahora veamos la función zeta de Rieman para la segunda contribución. en este caso como se puede corroborar directamente y siguiendo la sugerencia que se dio al principio de la sección, la solución propuesta tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
p_0 &= 2[(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2] + 2[n_1 + n_2 + n_3 + n_4] + 2 \\
p_1 &= 2[-(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2] + 2[-n_1 + n_2 + n_3 + n_4] + 1 \\
q_1 &= 4n_1n_2 + 2(n_1 + n_2) + 1 \\
p_2 &= 4n_1n_4 + 2(n_1 + n_4) + 1 \\
q_2 &= 4n_1n_3 + 2(n_1 + n_3) + 1,
\end{aligned} \tag{6.92}$$

donde $\vec{n} \equiv (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4$, procediendo de manera similar al anterior caso, y con la misma elección para los módulos se hallan los autovalores así,

$$\begin{aligned}
p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i &= p_0 x_0 + p_1 x_1 + i q_1 x_1 + p_2 x_2 + i q_2 x_2 \\
&= p_0 + p_1 t + i q_1 t + p_2 A + i q_2 A.
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Que reemplazando la solución propuesta con la misma definición para los módulos A y t se obtiene:

$$Q(T, A') \equiv p_i x^i + q^i \mathcal{F}_i = 2\vec{n} \cdot \Omega_2 \vec{n} + 2\vec{n} \cdot \vec{Z} + 2B, \tag{6.94}$$

donde Ω_2 y \vec{n} se han definido en 6.70 y se define:

$$\vec{Z} \equiv \begin{pmatrix} 1 - (1 - i)t + (1 + i)A \\ 1 + (1 + i)t \\ 1 + t + iA \\ 1 + t + A \end{pmatrix} \quad 2B \equiv 2 + (t + A)(1 + i). \quad (6.95)$$

Se a introducido entonces un término vectorial y uno escalar en relación al caso anterior, lo cual promueve la función theta de Riemann utilizada a una forma mas general. Nuevamente debe realizarse una transformación en los módulos con el objetivo de encontrar simetrías utiles que nos permitan una mejor manipulación algebraica de estos términos,

$$t \rightarrow T = \frac{1 - t}{1 + t} \quad A \rightarrow A' = \frac{\sqrt{2}A}{1 + t},$$

lo cual transforma el argumento como,

$$\begin{aligned} \vec{Z}(t, A) &\rightarrow \vec{Z}'(T, A') \\ \vec{B}(t, A) &\rightarrow \vec{B}'(T, A') \\ \Omega_2(t, A) &\rightarrow \Omega'_2(T, A'). \end{aligned} \quad (6.96)$$

Mas explícitamente se obtiene

$$\vec{Z} = \frac{2}{1 + T} \vec{Z}' \quad \vec{B} = \frac{2}{1 + T} \vec{B}' \quad \Omega_2 = \frac{2}{1 + T} \Omega'_2,$$

donde los términos transformados tienen la forma,

$$\begin{aligned} \Omega'_2 &= \begin{pmatrix} T & \frac{i}{2}(1 - T) & \frac{iA'}{\sqrt{2}} & \frac{A'}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2}(1 - T) & 1 & 0 & 0 \\ \frac{iA'}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{A'}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{Z}' &= \begin{pmatrix} T + \frac{i}{2}(1 - T) + \frac{iA'}{\sqrt{2}} + \frac{A'}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2}(1 - T) + 1 \\ \frac{iA'}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{A'}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} \\ B' &= \frac{3 + i}{4} + \frac{(1 - i)T}{4} + \frac{(1 + i)A'}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Entonces el argumento central $Q(T, A')$ en la ecuación (6.94) toma la forma:

$$Q(T, A') = \frac{4}{1+T} \left(\vec{n} \cdot \Omega'_2 \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{Z}' + B' \right). \quad (6.98)$$

Esta expresión puede reducirse aun mas si se definen las siguientes cantidades,

$$\vec{\rho} \equiv \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(1-T) \\ \frac{iA'}{\sqrt{2}} \\ \frac{A'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} \quad \vec{N} \equiv \begin{pmatrix} n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.99)$$

entonces $Q(T, A')$ se puede reescribir así,

$$Q(T, A') = \frac{4}{1+T} Q'(T, A'),$$

$$Q'(T, A') = \left[\left(n_1, \vec{N}^T \right) \begin{pmatrix} T & \vec{\rho}^T \\ \vec{\rho} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vec{N} \end{pmatrix} + \left(n_1, \vec{N}^T \right) \begin{pmatrix} T + \vec{\gamma} \cdot \vec{\rho} \\ \vec{\gamma} + \vec{\rho} \end{pmatrix} + B' \right]. \quad (6.100)$$

El valor de $Q(T, A')$ encontrado aquí debe introducirse entonces en la función zeta dada en la ecuación 6.23 para así encontrar el primer término de la función zeta, recuérdese que el segundo término es el complejo conjugado del primero y el tercero se halla casi completamente igual al caso anterior.

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{n} \neq \vec{0}} \exp \left[\frac{-4\pi\tau}{1+T} \left(\vec{n} \cdot \Omega'_2 \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{Z}' + B' \right) \right] \quad (6.101)$$

Bajo un cambio de variable se obtiene:

$$\zeta(s) = \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{n} \neq \vec{0}} e^{-\pi\tau(\vec{n} \cdot \Omega'_2 \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{Z}' + B')}, \quad (6.102)$$

donde $\kappa = \pi(1+T)/4$, existe entonces una similitud entre este y el caso anterior, así es que se puede aplicar lo aprendido, lo primero es que la suma se parte en tres regímenes así,

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \neq \vec{0}} &= \sum_{n_1=0, \vec{N} \neq \vec{0}} + \sum_{n_1 \neq 0, \vec{N} \neq \vec{0}} + \sum_{n_1=0, \vec{N}=\vec{0}} \\ \zeta &= \zeta_I + \zeta_{II} + \zeta_{III}. \end{aligned} \quad (6.103)$$

En el calculo a realizar serán de mucha utilidad las dos siguientes identidades:

$$\sum_n e^{-\tau\pi(n+xm)^2} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_n e^{2\pi i x m n} e^{-\pi n^2/\tau}, \quad (6.104)$$

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} \exp\left(\frac{-\beta}{x} - \alpha x\right) = 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{\beta\alpha}) \quad \alpha, \beta \neq 0, \quad (6.105)$$

Primer régimen ζ_I caso $n_1 = 0, \vec{N} \neq \vec{0}$

En este caso la función zeta toma la forma,

$$\zeta_I(s) = \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_{\vec{N} \neq \vec{0}} e^{-\pi\tau Q'_I}. \quad (6.106)$$

Y según la ecuación (6.100) se obtiene para Q'_I ,

$$\begin{aligned} Q'_I &= (0, \vec{N}^T) \begin{pmatrix} T & \vec{\rho}^T \\ \vec{\rho} & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{N} \end{pmatrix} + (0, \vec{N}^T) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{Z} \end{pmatrix} + B' \\ &= |\vec{N}|^2 + \vec{N} \cdot \vec{z} + B', \end{aligned} \quad (6.107)$$

entonces se obtiene:

$$\zeta_I(s) = \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau\pi B'} \prod_{j=2}^4 \sum_{n_j} e^{-\pi\tau n_j^2 - \tau\pi n_j Z_j}. \quad (6.108)$$

Manipulamos la sumatoria completando el trinomio para obtener,

$$\sum_{n_j} e^{-\pi\tau n_j^2 - \tau\pi n_j Z_j} = e^{\tau\pi Z_j^2/4} \sum_{n_j} e^{-\pi\tau(n_j + Z_j/2)^2}, \quad (6.109)$$

y se hace uso de la identidad (6.104),

$$\sum_{n_j} e^{-\pi\tau n_j^2 - \tau\pi n_j Z_j} = e^{\tau\pi Z_j^2/4} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n_j} e^{-\pi \frac{n_j^2}{\tau} + 2\pi i n_j Z_j/2}, \quad (6.110)$$

la función zeta queda así,

$$\zeta_I(s) = \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)} \sum_{\vec{N} \neq \vec{0}} \left(\int_0^\infty d\tau \tau^{s-\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{\pi N^2}{\tau} - (\pi B' - \pi z^2/4)\tau} \right) e^{\pi i \vec{N} \cdot \vec{z}}. \quad (6.111)$$

La integral entre paréntesis puede llevarse acabo utilizando la identidad (6.105), nótese que se cumple la condición sobre los parámetros, pues en este caso $\vec{N} \neq \vec{0}$, el resultado es:

$$\zeta_I(s) = \frac{2\kappa^s}{\Gamma(s)} \sum_{\vec{N} \neq \vec{0}} e^{i\pi \vec{N} \cdot \vec{z}} \left(\frac{|\vec{N}|^2}{B' - \frac{1}{4}|\vec{z}|^2} \right)^{s/2-3/4} K_{s-\frac{3}{2}} \left(2\pi |N| \sqrt{B' - z^2/4} \right). \quad (6.112)$$

Tercer régimen ζ_{III} caso $n_1 \neq 0$, $\vec{N} = \vec{0}$

En este caso Q'_{III} con $n_1 \equiv n$ y $z_1 \equiv z$ es,

$$\begin{aligned} Q'_{III} &= (n, \vec{0}^T) \begin{pmatrix} T & \vec{\rho}^T \\ \vec{\rho} & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \vec{0} \end{pmatrix} + (n, \vec{0}^T) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{Z} \end{pmatrix} + B' \\ &= n^2 T + nz + B', \end{aligned} \quad (6.113)$$

entonces se obtiene para la función zeta,

$$\zeta_I(s) = \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau \pi B'} \sum_{n \neq 0} e^{-\pi \tau (n^2 T + nz + B')}, \quad (6.114)$$

si utilizamos (6.104) se obtiene,

$$\zeta_{III}(s) = \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)\sqrt{T}} \sum_{n \neq 0} \left[\int_0^\infty d\tau \tau^{s-\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{\pi n^2}{T\tau} - (\pi B' - \pi z^2/(4T))\tau} \right] e^{\pi i n z / T}. \quad (6.115)$$

Que en analogia con el caso anterior se utiliza la identidad (6.105), para resolver la integral obteniendose,

$$\zeta_{III}(s) = \frac{2\kappa^s}{\Gamma(s)\sqrt{T}} \sum_{n_1 \neq 0} e^{\pi i n_1 z_1 / T} \frac{n_1^{s-1/2}}{(TB' - \frac{z^2}{4})^{s/2-1/4}} K_{s-\frac{1}{2}} \left(2\pi n_1 \sqrt{\frac{B'}{T} - \frac{z^2}{4T}} \right). \quad (6.116)$$

Segundo régimen ζ_{II} caso $n_1 \neq 0$, $\vec{N} \neq \vec{0}$

En este caso Q'_{III} adquiere la forma,

$$\begin{aligned} Q'_{III} &= (n_1, \vec{N}^T) \begin{pmatrix} T & \vec{\rho}^T \\ \vec{\rho} & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vec{N} \end{pmatrix} + (n_1, \vec{N}^T) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{Z} \end{pmatrix} + B' \quad (6.117) \\ &= Tn_1^2 + \sum_{j=2}^4 (n_j + \sigma_j)^2 - \sigma_j^2 + n_1 z_1 + B', \end{aligned}$$

donde se ha definido $\sigma_j \equiv n_1 \rho_j + \frac{z_j}{2}$, entonces la función Theta de Riemann que aparece en la función zeta es,

$$\sum_{n_1, \vec{N}} e^{-\pi \tau n_j^2 - \tau \pi n_j Z_j} = e^{\tau \pi Z_j^2 / 4} \sum_{n_j} e^{-\pi \tau (n_j + Z_j / 2)^2}, \quad (6.118)$$

y se hace uso de la identidad (6.104),

$$\begin{aligned} \sum_{n_j} e^{-\pi \tau Q'} &= e^{-\tau \pi (B' - \sigma_j^2)} \sum_{n_1 \neq 0} e^{-\pi \tau (Tn_1^2 + n_1 z_1)} \prod_{j=2}^4 \sum_{n_j \neq 0} e^{-\pi \tau (n_j + \sigma_j)^2} \quad (6.119) \\ &= e^{-\tau \pi (B' - \sigma_j^2)} \tau^{-3/2} \sum_{n_1 \neq 0} e^{-\pi \tau (Tn_1^2 + n_1 z_1)} \prod_{j=2}^4 \sum_{n_j \neq 0} e^{2\pi i \sigma_j n_j - \pi n_j^2 / \tau}. \end{aligned}$$

Entonces la función zeta puede llevarse a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \zeta_{II}(s) &= \frac{\kappa^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1 \neq 0, \vec{N} \neq 0} \exp \left[\pi i \sum_{j=2}^4 n_j (2n_1 \rho_j + z_j) \right] \quad (6.120) \\ &\int_0^\infty d\tau \tau^{s - \frac{3}{2} - 1} e^{-\frac{\pi |\vec{N}|^2}{\tau} - \pi (B' + Tn_1^2 + n_1 z_1 - \sigma_j^2) \tau}. \end{aligned}$$

Si nuevamente se hace uso de la identidad (6.105) se obtiene,

$$\zeta_{II}(s) = \sum_{n_1 \neq 0, \vec{N} \neq 0} \frac{\exp \left[\pi i \sum_{j=2}^4 n_j (2n_1 \rho_j + z_j) \right]}{\pi^{-s} (1+T)^{-s} 2^{2s-1} \Gamma(s)} |\vec{N}|^{s - \frac{3}{2}} \gamma_{n_1}^{-\frac{s}{2} + \frac{3}{4}} K_{s - \frac{3}{2}} \left(2\pi |\vec{N}| \sqrt{\gamma_{n_1}} \right), \quad (6.121)$$

donde se ha utilizado $\kappa = (1 + T)\pi/4$ y se ha definido:

$$\gamma_{n_1} \equiv n_1 z_1 + n_1^2 T + B' - \sigma_j^2 \quad \lambda = \frac{4TB' + Z_1^2}{4T^2}. \quad (6.122)$$

Analogo al caso anterior se toma entonces el limite $s \rightarrow 0$ y se remueve la singularidad en $s = 0$ para obtener,

$$\Psi(\Omega_2(T, A')) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\Gamma(s) \pi^{-s} (\zeta_I + \zeta_{II} + \zeta_{III}) + \frac{1}{s} \right], \quad (6.123)$$

que juntando con la solución a la primera contribución se obtiene finalmente,

$$e^g = e^{2\text{Re}\Psi(\Omega_2(T, A'))} |T + \bar{T} - AA'|,$$

donde $\Psi(\Omega_2(T, A'))$ viene dado por:

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega_2(T, A')) &= C_0 + \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{1+T}{2} \right)^3 \\ &+ \frac{(1+T)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \sum_{n_1, \vec{N} \neq 0} e^{2\pi i n_1 \vec{N} \cdot \vec{\rho}} |\vec{N}|^{-\frac{3}{2}} n_1^{\frac{3}{2}} K_{-\frac{3}{2}}(\pi n_1 |\vec{N}| (1+T)) \\ &+ 2 \sum_{\vec{N} \neq 0} e^{i\pi \vec{N} \cdot \vec{z}} |\vec{N}|^{-3/2} \left[B' - \left| \frac{\vec{z}}{2} \right|^2 \right]^{3/4} K_{-\frac{3}{2}} \left[2\pi |\vec{N}| \sqrt{B' - \frac{|\vec{z}|^2}{4}} \right] \\ &+ 2 \sum_{n_1 \neq 0, \vec{N} \neq 0} e^{i\pi(2n_1 \vec{N} \cdot \vec{\rho} + \vec{N} \cdot \vec{z})} |\vec{N}|^{-3/2} \gamma_{n_1}^{3/4} K_{-\frac{3}{2}} \left(2\pi |\vec{N}| \sqrt{\gamma_{n_1}} \right) \\ &+ 2 \sum_{n_1 \neq 0} e^{i\pi n_1 z_1 / T} n_1^{-1/2} \lambda^{1/4} K_{-\frac{1}{2}}(2\pi n_1 \sqrt{\lambda}).. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Esta expresión puede estudiarse en dos limites asintóticos, según el argumento de las funciones de Bessel. Para tal objetivo utilizamos las siguientes identidades,

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= K_{-\nu}(z) & (6.125) \\ \lim_{z \rightarrow 0} K_\nu(z) &= \frac{(\nu-1)! 2^{\nu-1}}{z^\nu} & \nu > 0 \\ K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} & z \gg \frac{4\nu^2 - 1}{8}. \end{aligned}$$

Entonces para los dos limites se obtiene,

Caso $z \ll 1$,

$$\begin{aligned}
\Psi(\Omega_2(T, A'))_{z \ll 1} &= C_0 + \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{1+T}{2} \right)^3 + (1+T) \sum_{0 \neq n_1, \vec{N} \neq \vec{0}} \frac{n_1 e^{2\pi i n_1 \vec{N} \cdot \vec{\rho}}}{2|\vec{N}|^2} \\
&+ \left(4B' - |\vec{Z}|^2 \right)^{1/2} \sum_{\vec{N} \neq \vec{0}} \frac{e^{\pi i \vec{N} \cdot \vec{Z}}}{4|\vec{N}|^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{\pi i n Z_1/T}}{n} \\
&+ \sum_{0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, \vec{N} \neq \vec{0}} \frac{\sqrt{\gamma_{n_1}}}{2|\vec{N}|^2} e^{\pi i (2n_1 \vec{N} \cdot \vec{\rho} + \vec{N} \cdot \vec{Z})}. \tag{6.126}
\end{aligned}$$

Caso $z \gg 1$,

$$\begin{aligned}
\Psi(\Omega_2(T, A'))_{z \gg 1} &= C_0 + \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{1+T}{2} \right)^3 + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{\pi i n Z_1/T - 2\pi n \sqrt{\lambda}}}{n} \\
&+ (1+T) \sum_{0 \neq n_1 \in \mathbb{Z}, \vec{N} \neq \vec{0}} \frac{n_1 e^{2\pi i n_1 \vec{N} \cdot \vec{\rho} - \pi n_1 |\vec{N}|(1+T)}}{2|\vec{N}|^2} \\
&+ (4B - |\vec{Z}|^2)^{1/2} \sum_{\vec{N} \neq \vec{0}} \frac{e^{\pi i \vec{N} \cdot \vec{Z} - \pi |\vec{N}| \sqrt{4B - |\vec{Z}|^2}}}{2|\vec{N}|^2} \\
&+ \sum_{0 \neq n_1, \vec{N} \neq \vec{0}} \frac{e^{\pi i n_1 (\vec{N} \cdot \vec{Z} + \vec{N} \cdot \vec{\rho}) + 2\pi i |\vec{N}| \sqrt{\gamma_{n_1}}}}{|\vec{N}|^2} \sqrt{\gamma_{n_1}}; \tag{6.127}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (6.124, 6.126, 6.127) son el resultado principal de este trabajo, representan el argumento del exponencial en la función automórfica con geometría $SU(1, 2)/SU(2) \times U(1)$.

Capítulo 7

Aplicación: Ecuación de Wheeler-De Witt

El proceso de regularización utilizado en este trabajo hasta ahora, difiere aparentemente del método utilizado en la literatura convencional [36]. Si el proceso es el mismo o no, lo veremos según los resultados de esta sección. Como aplicación de nuestro método de regularización, se hallará el determinante del operador resultante en la gravedad cuántica por medio de la ecuación de Wheeler-De Witt, el cual es un resultado interesante en la literatura [39]. Uno de los posibles acercamientos a la gravedad cuántica en (2+1)-dimensiones es a través de la cuantización por medio de la ecuación de Wheeler-De Witt [37], en este desarrollo aparece un problema, que se reduce básicamente a encontrar el determinante del operador D_0 que define la ecuación Wheeler-De Witt [37].

7.1. Planteamiento del problema

En esta teoría, el espacio tiene geometría $\mathbb{R} \times \Sigma$ donde Σ es una variedad compacta 2-dimensional, usualmente un toro T^2 , los autoestados y autovalores del operador son de la forma:

$$|m n\rangle = e^{2\pi i(mx+ny)} \quad l_{mn} = \frac{4\pi^2}{\tau_2} |n - m\tau|^2 + V_0, \quad (7.1)$$

donde m, n son enteros, y, x son coordenadas angulares, V_0 está asociado a la función potencial y $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ es el módulo complejo correspondiente a

una métrica,

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{\tau_2} |dx + \tau dy|^2. \quad (7.2)$$

La función zeta asociada al operador D_0 es;

$$\zeta(s) = \sum_{n,m} (l_{nm})^{-s}. \quad (7.3)$$

Entonces como sabemos el determinante del operador es de la forma,

$$\begin{aligned} \det D_0 &= \prod_{n,m} l_{nm} = \prod_{n,m} e^{ln(l_{nm})} \\ &= \exp \left[- \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \sum_{nm} l_{nm}^{-s} \right] \\ &= e^{-\zeta'(0)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Por otro lado, de la ecuación (6.19) encontramos que:

$$\zeta(s) = \sum_n l_{nm}^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{nm} e^{-l_{nm}t} dt, \quad (7.5)$$

con,

$$e^{-l_{nm}t} = e^{V_0 t} e^{-\frac{4\pi^2}{\tau_2} |n-m\tau|^2 t}, \quad (7.6)$$

entonces;

$$\begin{aligned} |n - m\tau|^2 &= (n - m(\tau_1 - i\tau_2))(n - m(\tau_1 + i\tau_2)) \\ &= n^2 - 2nm\tau_1 + m^2(\tau_1^2 + \tau_2^2). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Esto puede llevarse convenientemente a una matriz de la forma:

$$\begin{aligned} |n - m\tau|^2 &= (n, m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}, \\ &\equiv \vec{n}^t \Omega' \vec{n}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde la matriz satisface la condición:

$$\det \Omega' = \tau_2^2. \quad (7.9)$$

Si se redefine la matriz como $\Omega = \Omega'/\tau_2$ entonces se obtiene $\det \Omega = 1$ con esto la función zeta es:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{\vec{n}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^T \Omega \vec{n} t - V_0 t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-V_0 t} \sum_{nm} e^{\frac{-4\pi^2 t}{\tau_2} A_{nm}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Donde se ha definido,

$$\begin{aligned} A_{nm} &\equiv n^2 - 2nm\tau_1 + m^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) \\ &= (n^2 - m\tau_1)^2 + m^2\tau_2^2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.2. Algunos resultados interesantes

Siguiendo el mismo procedimiento desarrollado para el caso $SU(1, 1)/U(1)$ y para $SU(1, 2)/SU(2) \times U(1)$ y segun la ecuación (6.50), lo que nos interesa es,

$$\Psi \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\Gamma(s) \zeta(s) + \frac{1}{s} \right). \quad (7.12)$$

La cual es una función con un polo simple en $s = 0$ el cual se ha removido (6.38).

Por otro lado, definiendo $\theta(i\lambda\tau) \equiv \theta_3(0, i\lambda\tau)$ según la ecuación 3.22, y utilizando la propiedad 3, que allí se define, para nuestro caso con $\tau = it$, se obtiene el resultado que utilizaremos mas adelante,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi\lambda tn^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-\pi n^2}{\lambda t}} \quad \lambda t > 0. \quad (7.13)$$

7.3. Cuatro Contribuciones

En este punto es necesario partir el problema en cuatro regimenes,

$$\zeta(s) = \underbrace{\zeta_1(s)}_{n=m=0} + \underbrace{\zeta_2(s)}_{n=0,m \neq 0} + \underbrace{\zeta_3(s)}_{m=0,n \neq 0} + \underbrace{\zeta_4(s)}_{m \neq 0,n \neq 0} .$$

El primer caso se resuelve efectuando la integral que se encuentra despues de hacer ($n = m = 0$), en la ecuación (7.10), y observando que bajo el cambio de variable $x = V_0 t$ aparece una función gamma que se cancela con la que aparece en el denominador, el resultado es el siguiente,

$$\begin{aligned} \zeta_1(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-V_0 t} \\ &= V_0^{-s}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_1'(s) = -\ln V_0. \quad (7.15)$$

El segundo caso, haciendo ($n = 0$) en (7.10) obtenemos:

$$\zeta_2(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-V_0 t} \sum_{m \neq 0} e^{-\alpha \pi m^2 t} \quad \alpha \equiv \frac{4\pi\tau^2}{\tau_2}. \quad (7.16)$$

Si consideramos que $\tau_2 > 0$ podemos utilizar entonces (7.13),

$$\begin{aligned} \zeta_2(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m \neq 0} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{\sqrt{\alpha t}} e^{-V_0 t} e^{-\frac{\pi m^2}{\alpha t}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)\sqrt{\alpha}} \sum_{m \neq 0} \int_0^\infty dt t^{(s-1/2)-1} e^{-\frac{\pi m^2}{\alpha t} - V_0 t}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Con la ayuda de la fórmula integral (6.82) siempre que $V_0 > 0$ se encuentra que,

$$\zeta_2(s) = \frac{2}{\Gamma(s)\sqrt{\alpha}} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{\pi m^2}{V_0 \alpha} \right)^{(s/2-1/4)} K_{s-1/2} \left(2\sqrt{\frac{\pi m^2 V_0}{\alpha}} \right). \quad (7.18)$$

Para la tercera contribución, haciendo ($m = 0$) en (7.10) obtenemos:

$$\zeta_3(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-V_0 t} \sum_{n \neq 0} e^{-\gamma \pi n^2 t} \quad \gamma \equiv \frac{4\pi}{\tau_2}. \quad (7.19)$$

Si consideramos nuevamente que $\tau_2 > 0$ y utilizamos otra vez (7.13) junto con (6.82) se obtiene:

$$\begin{aligned} \zeta_3(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)\sqrt{\gamma}} \sum_{n \neq 0} \int_0^\infty dt t^{(s-1/2)-1} e^{-\frac{\pi n^2}{\gamma t} - V_0 t} \\ &= \frac{2}{\Gamma(s)\sqrt{\gamma}} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\pi n^2}{V_0 \gamma} \right)^{(s/2-1/4)} K_{s-1/2} \left(2\sqrt{\frac{\pi n^2 V_0}{\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (7.20)$$

La cuarta contribución, con ($m, n \neq 0$) en (7.10) y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$\zeta_4(s) = \frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \sum_{n, m \neq 0} \left(\frac{\tau_2 n^2}{4V_0 + 16\pi^2 m^2 \tau_2} \right)^{s/2-1/4} K_{s-1/2} \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \tau_2 n^2 (V_0 + 4\pi^2 m^2 \tau_2)}{\pi^2}} \right). \quad (7.21)$$

7.4. Resultado Final

Juntando las cuatro contribuciones encontradas en la anterior sección, reemplazando los parámetros auxiliares y tomando el límite según (7.12), se encuentra para la función solicitada la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sqrt{\frac{\tau_2}{\pi}} \frac{1}{|\tau|} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{4|\tau|^2 V_0}{n^2 \tau_2} \right)^{1/4} K_{-1/2} \left(\sqrt{\tau_2 V_0} \left| \frac{n}{\tau} \right| \right) \\ &+ \sqrt{\frac{\tau_2}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{4|V_0}{n^2 \tau_2} \right)^{1/4} K_{-1/2} \left(\sqrt{\tau_2 V_0} |n| \right) \\ &+ \sqrt{\frac{\tau_2}{\pi}} \sum_{n, m \neq 0} \left(\frac{4(V_0 + 4\pi^2 m^2 \tau_2)}{n^2 \tau_2} \right)^{1/4} K_{-1/2} \left(\sqrt{\tau_2 V_0 + 4\pi^2 m^2 \tau_2^2} |n| \right) \\ &- \ln V_0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Nótese, que los contadores “n,m“ aparecen en valor absoluto y son diferentes de cero, por lo cual se puede hacer el cambio

$$\sum_{n \neq 0} f(|n|) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \quad \sum_{n,m \neq 0} f(|n|, |m|) = 4 \sum_{n,m=1}^{\infty} f(n, m). \quad (7.23)$$

Despues de algo de álgebra y usando algunas identidades de las funciones de Bessel, para organizar términos, se obtiene la expresión final,

$$\begin{aligned} \Psi = & 2|\tau_2|^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{|\tau|} V_0^{1/4}}{\sqrt{n}} K_{1/2} \left(\frac{n\sqrt{V_0\tau_2}}{|\tau|} \right) + \frac{V_0^{1/4}}{\sqrt{n}} K_{1/2} \left(n\sqrt{V_0\tau_2} \right) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(V_0 + 4\pi^2 m^2 \tau_2)^{1/4}}{\sqrt{n}} K_{1/2} \left(n\sqrt{V_0\tau_2 + 4\pi^2 m^2 \tau_2^2} \right) \right] - \ln V_0, \quad (7.24) \end{aligned}$$

en términos del determinante se obtiene:

$$\begin{aligned} \det D_0 = & V_0 \exp \left\{ -2|\tau_2|^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{|\tau|} V_0^{1/4}}{\sqrt{n}} K_{1/2} \left(\frac{n\sqrt{V_0\tau_2}}{|\tau|} \right) \right. \right. \\ & + \frac{V_0^{1/4}}{\sqrt{n}} K_{1/2} \left(n\sqrt{V_0\tau_2} \right) \\ & \left. \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(V_0 + 4\pi^2 m^2 \tau_2)^{1/4}}{\sqrt{n}} K_{1/2} \left(n\sqrt{V_0\tau_2 + 4\pi^2 m^2 \tau_2^2} \right) \right] \right\} \quad (7.25) \end{aligned}$$

Es importante resaltar que la anterior expresión está bien estructurada, en el sentido de que debido al comportamiento asintótico de las funciones de Bessel y al suavizado que tiene por el factor de $1/\sqrt{n}$, los términos relevantes son los primeros de la serie, por ello es razonable estudiar el caso límite para valores pequeños de los enteros con ayuda de la identidad [38]:

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_\nu(z) = \frac{(\nu - 1)! 2^{\nu-1}}{z^\nu} \quad \nu > 0. \quad (7.26)$$

Para los primeros valores de m , y $n \ll 1/\sqrt{V_0\tau_2}$ se obtiene:

$$\Psi_{z \ll 1} \approx \frac{2|\tau| + 6}{n} - \ln V_0, \quad (7.27)$$

Esto no quiere decir que la serie converga a este valor, si no que puede ser escrita como una suma de sus primeros termino los cuales tienen esta forma. En este caso el determinante es,

$$\det D_0 \approx V_0 \sum_{\text{primeros } n's} \exp \left[\frac{-2|\tau| - 6}{n} \right]. \quad (7.28)$$

El resultado final sin aproximar (7.25) es ligeramente diferente que algunos resultados encontrados en la literatura, vease por ejemplo la ecuación (33) en la referencia [40], o la sección (6.4) en la referencia [36], esto sugiere que el método nuestro debe tener diferencias con el proceso de regularización zeta convencional.

Capítulo 8

Conclusiones y Perspectivas

El resultado principal de este trabajo es la construcción de funciones automórficas de variedades con geometría especial de Kähler, estas geometrías son importantes porque aparecen como espacios de módulos en procesos de compactificación sobre variedades Calabi-Yau, el método utilizado es proponer una solución a la función automórfica en términos de unos parámetros que dependen de la geometría a utilizar, se regulariza esta expresión con ayuda de la función zeta de Riemann evitando algunos puntos sobre el orbit en el cual se mueven los parámetros, en el caso que nos compete $SU(1, 2)/SU(2) \times U(1)$ se ha obtenido para la función automórfica la expresión (6.124), que ha quedado en términos de la matriz periódica Ω_2 , la cual en el proceso de construcción mostró algunas simetrías interesantes que nos permitio simplificar los cálculos, y las cuales pueden de alguna manera generalizar simetrías duales. Se puede interpretar esta matriz como la matriz de periodos de alguna variedad abeliana, aunque en este punto solo se puede especular acerca de esto, sería interesante hacer una extensión sobre la relación que existe entre las matrices periódicas abelianas y nuestra matriz. En cuanto a la regularización del operador de Wheeler De Witt, encontramos que nuestro resultado tiene ligeras diferencias con los cálculos hechos en la literatura ([36], [37]), aunque talvez sea posible expresar en algún límite adecuado la equivalencia entre los resultados. Como perspectiva a un trabajo posterior, podría pensarse en estudiar las consecuencias físicas de los resultados obtenidos para el determinante del operador de Wheeler De Witt, para los dos casos limites que se estudiaron en este trabajo.

Bibliografía

- [1] L.J. Dixon, V.S. Kaplunovsky, and J. Louis. Moduli-Dependence of String Loop Corrections to Gauge Coupling Constants. Nucl. Phys. B, 355:649, 1991.
- [2] D. Bailin and A. Love. Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory. Institute of Physics Publishing, 1st. Edition, 1994.
- [3] S. Ferrara, C. Kounnas, D. Lust, and F. Zwirner. Duality-Invariant Partition Functions and Automorphic Superpotentials for (2,2) String Compactifications. Nucl. Phys. B, 365:431, 1991.
- [4] E. Kiristis and B. Pioline On R^4 threshold corrections in type IIB string theory and (p,q)-string instantons hep-th/9707018v6, 2010.
- [5] M. Nakahara. Geometry, Topology and Physics. IOP Publishing Ltd, 1990.
- [6] M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck, and C. Itzykson. From Number Theory to Physics. Springer-Verlag, 1992.
- [7] K. Chandrasekharan. Elliptic Functions. Springer-Verlag, 1985.
- [8] S. Lange. Elliptic Functions. Addison-Wesley Publishing Company, INC, 1970.
- [9] K. Becker, M. Becker, J. Schwarz. String Theory and M Theory a modern introduction. Cambridge University Press, 2007.
- [10] D. McMahon. String Theory Demystified. Mc Graw Hill, 2009.
- [11] George Thompson. Lectures at the International School on Quantum Gravity: La Plata

- [12] A. Strominger. Special Geometry. *Commun. Math. Phys.*, 133:163, 1990.
- [13] B. De Wit and A. Van Proyen. Special Geometry and Symplectic Transformations. hep-th/9510186, 1995.
- [14] P. Candelas and X. de Ossa. A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Soluble Superconformal Theory. *Nucl. Phys. B*, 359:21, 1991.
- [15] P. Candelas and X. de la Ossa. Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds. *Nucl. Phys. B*, 355:455, 1991.
- [16] P. Candelas, P.S. Green, and T. Hübsch. Rolling Among Calabi-Yau Vacua. *Nucl. Phys. B*, 330:49, 1990.
- [17] B. Zumino. Supersymmetry and Kähler Manifolds. *Phys. Lett. B*, 87:203, 1979.
- [18] S. Ferrara, C. Kounnas, D. Lüst, and F. Zwirner. Duality-Invariant Partition Functions and Automorphic Superpotentials for (2,2) String Compactifications. *Nucl. Phys. B*, 365:431, 1991.
- [19] W. Sabra. Space-Time Duality and $SU(n,1)/SU(n) \times U(1)$ Cosets of Orbifold Compactifications. *Mod. Phys. Lett. A*, 11:1497, 1996.
- [20] S. Ferrara, P. Fré, and P. Soriani. On the Moduli Space of the T^6/Z_3 Orbifold and Its Modular Group. *Class. Quant. Grav.*, 9:1649, 1992.
- [21] L.J. Dixon, V.S. Kaplunovsky, and J. Louis. On Effective Field Theories Describing (2,2) Vacua of the Heterotic String. *Nucl. Phys. B*, 329:27, 1990.
- [22] L.J. Dixon, V.S. Kaplunovsky, and J. Louis. Moduli-Dependence of String Loop Corrections to Gauge Coupling Constants. *Nucl. Phys. B*, 355:649, 1991.
- [23] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain, and T.R. Taylor. Superstring Threshold Corrections to Yukawa Couplings. *Nucl. Phys. B*, 407:706, 1993.
- [24] A. Giveon, M. Porrati, and E. Ravinovici. Target Space Duality in String Theory. *Physics Reports*, 244:72, 1994.

- [25] P. Mayr and S. Stieberger. Threshold Corrections to Gauge Couplings in Orbifold Compactifications. *Nucl. Phys. B*, 407:725, 1993.
- [26] P. Mayr and S. Stieberger. Moduli Dependence of One-Loop Gauge Couplings in (0,2) Compactifications. *Phys. Lett. B*, 355:107, 1995.
- [27] P. Mayr and S. Stieberger. Low-Energy Properties of (0,2) Compactifications. hep-th/9412144, 1994.
- [28] M. Klaput and C. Papanicolaou. The Computation of One-Loop Heterotic String Threshold Corrections for General Orbifold Models with Discrete Wilson Lines. hep-th/1001.1480v1, 2010.
- [29] N.A. Obers and B. Pioline. Eisenstein Series and String Thresholds. 1999.
- [30] E. Kiritsis and B. Pioline. On R^4 Threshold Corrections in IIB String Theory and (p, q) String Instantons. *Nucl. Phys. B*, 508:509, 1997.
- [31] A. Gregori, E. Kiritsis, C. Kounnas, N.A. Obers, P.M. Petropoulos, and B. Pioline. R^2 Corrections and Non-perturbative Dualities of $N = 4$ Strings Ground States. hep-th/9708062.
- [32] M.B. Green and M. Gutperle. Effects of D-instantons. *Nucl. Phys. B*, 498:195, 1997.
- [33] J.R. Quine, S.H. Heydari, and R. Song. Zeta Regularized Products. *Trans. Am. Math. Soc.*, 338(1):213, 1993.
- [34] L.H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press., 1985.
- [35] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1980.
- [36] Emilio Elizalde *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. Springer, 1995.
- [37] S. Carlip Notes on the (2+1)-Dimensional Wheeler-DeWitt Equation arXiv:gr-qc/9309002v1, 1993.
- [38] George B. Arfken, Hans J. Weber *Mathematical Methods For Physicists*, Sixth Edition Elsevier Academic Press, 2005.

- [39] V. I. Manko¹, G. Marmo¹, and C. Stornaiolo Radon transform of Wheeler-De Witt equation and tomography of quantum states of the universe Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, arXiv:gr-qc/0307084v2, 2004.
- [40] E. Elizalde An Extension Of The Chowla-Selberg Formula Useful In Quantizing With The Wheeler-De Witt Equation arXiv:hep-th/9402155v2, 1994.