UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

COMPRENSIÓN DE PROBLEMAS DE TIPO MULTIPLICATIVO EN EL MODELO ESCUELA NUEVA

Autor

Alexander Largo Cañaveral

Universidad de Antioquia

Facultad de educación

Medellín, Colombia

2020

Comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva

Alexander Largo Cañaveral

Tesis o trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de:

Magister en Educación

Asesora:

Gladys María Rivera González

Magister en Educación

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Educación Matemática e Historia EDUMATH

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2020

Agradecimientos:

A mis padres, que sienten nuestros éxitos como suyos.

A Cristina, por su apoyo, paciencia y cariño.

A Gladys, por su empeño, entusiasmo y dedicación.

A Nairo, Rigo y Mariana, por su dulzura y comprensión.

A la Universidad de Antioquia, por abrirme nuevamente las puertas del conocimiento.

CONTENIDO

Introducción 2
1. Problema de Investigación 5
1.1. Contextualización 5
1.2. Planteamiento del Problema 8
1.3. Objetivos 15
1.3.1. Objetivo General. 15
1.3.2. Objetivos Específicos. 15
1.4. Antecedentes 15
1.4.1. Antecedentes teóricos. 16
1.4.2. Antecedentes investigativos. 24
1.4.3. Antecedentes legales. 29
2. Marco Teórico 33
2.1. En la línea de la comprensión 33
2.1.1. El constructivismo como punto de encuentro. 33
2.2. El marco de la Enseñanza para la Compresión 36
2.2.1. Aspectos generales del marco de la Enseñanza para la Comprensión. 37
2.2.2. La Enseñanza para la comprensión en el aula. 39
2.2.3. Los niveles de la comprensión. 53
3. Metodología 56
3.1. Enfoque de la investigación 56
3.2. El estudio de casos como método seleccionado. 59
3.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información 60
3.3.1. La entrevista semiestructurada. 61
3.3.2. La observación. 61
3.3.3. Registros de los estudiantes. 62
3.4. Propuestas de implementación en el aula 63
3.4.1. Reglas que aumentan y reglas que disminuyen. 64
3.4.2. Exploremos las superficies de nuestro entorno. 67
3.5. Desempeños de comprensión. 69
3.5.1. Desempeños propuestos en la dimensión de contenido. 69
3.5.2. Desempeños propuestos en la dimensión de métodos. 71
3.5.3. Desempeños propuestos en la dimensión de propósitos. 71
3.5.4. Desempeños propuestos en la dimensión de formas de comunicación. 72
3.6. Análisis de la información. 73
4. Análisis y resultados 75
4.1. Cómo se ha configurado el análisis 75
4.1.1. Análisis de la guía 1. Reglas que aumentan reglas que disminuyen. 77
4.1.2. Análisis guía 2. Exploremos las superficies de nuestro entorno. 112
4.2. Apuntes finales sobre el análisis 133
4.2.1. Las comprensiones presentadas por los estudiantes en cada una de las dimensiones. 134
5. Conclusiones y recomendaciones 142
5.1 Conclusiones a propósito de la pregunta de investigación 142

5.2 Conclusiones alrededor de los objetivos de investigación ... 145
5.3 Aportes al modelo Escuela nueva ... 147
5.4 Los problemas de tipo multiplicativos ... 148
5.5 Aportes a la educación Matemática ... 150
5.6 Posibles líneas de investigación ... 151
EPÍLOGO ... 153
6. Referencias Bibliográficas ... 155
ANEXOS ... 162

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Estratos, formas de expresión y noción de actuación en la teoría de Pirie y Kieren. Mell (2003). 21
Tabla 2. Elementos explícitos e implícitos por nivel en el modelo de van Hiele. Corberán, et al., (1994). 21
Tabla 3. Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. 22
Tabla 4. Síntesis de los niveles de comprensión en el marco de la EpC 24
Tabla 5. Síntesis y articulación de los Referentes Curriculares para los grados 4° y 5° de Básica Primaria. 31
Tabla 6. Comparativo categorías progresivas (EpC) y secciones del aprendizaje (N) 43
Tabla 7. Clases de problemas tipo Isomorfismo de medidas Vergnaud (1991) 48
Tabla 8. Descriptores de categoría por nivel dimensión de contenido. 69
Tabla 9. Descriptores de categoría por nivel dimensión de métodos. 71
Tabla 10. Descriptores de categoría por nivel dimensión de propósitos. 71
Tabla 11. Descriptores de categoría por nivel dimensión de formas de comunicación. 72
Tabla 12. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades Básicas por dimensiones. 82
Tabla 13. Descriptores de nivel: Actividades de Práctica por dimensiones. 99
Tabla 14. Descriptores de nivel: Actividades de Práctica por dimensiones 112
Tabla 15. Descriptores de nivel: Actividades Básicas por dimensiones. 121
Tabla 16. Descriptores de nivel: Actividades de Práctica por dimensiones. 128
Tabla 17. Descriptores de nivel: Actividades de Aplicación por dimensiones. 132
Tabla 18. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Contenidos. 135
Tabla 19. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Métodos. .... **¡Error! Marcador no definido.**
Tabla 20. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Propósitos. .... **¡Error! Marcador no definido.**
Tabla 21. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Formas de Comunicación. .... **¡Error! Marcador no definido.**

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Comparativo de resultados pruebas SABER (ICFES, 2016, 2017) con relación a la resolución de problemas multiplicativos en el grado quinto en las Instituciones Educativas Rurales del municipio de Salgar. 10

Figura 2. Comparativo de resultados pruebas SABER (ICFES, 2016, 2017) con relación a la resolución de problemas multiplicativos de proporcionalidad directa en el grado quinto en las Instituciones Educativas Rurales del municipio de Salgar. 11

Figura 3. Solución problema isomorfismo de medidas (r/división). 12

Figura 4. Solución problema de isomorfismo de medidas (r/división). 12

Figura 5. Solución problema tipo producto de medidas (r/multiplicación). 12

Figura 6. Solución problema tipo producto de medidas (r/división). 13

Figura 7. Solución problema tipo producto de medidas (r/división). 13

Figura 8. Solución problema de un solo espacio de medidas (r/multiplicación) 13

Figura 9. Solución problema de un solo espacio de medidas (r/división) 13

Figura 10. Solución problema de un solo espacio de medidas (r/división) 13

Figura 11. Regletas de Cuissenaire. 64

Figura 12. Tomada de la guía de Matemáticas 5. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p.18). 65

Figura 13. Tomada de la guía de Matemáticas 5. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 19). 66

Figura 14. Tomada de la guía de Matemáticas 4. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 16). 68

Figura 15. Representación del número 55 con regletas de magnitud del 1 al 10. 78

Figura 16. Respuesta de Rigo al ejercicio 5 de las Actividades Básicas de la Guía 1. 81

Figura 17. Respuesta de Rigo y Mariana al ejercicio 5 de las Actividades Básicas de la Guía 1. 81

Figura 18. Tabla de correspondencia por Nairo, Rigo y Mariana, Ejercicio 6 de las Actividades Básicas. 82

Figura 19. Tomada de la guía de Matemáticas 5. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 18). 84

Figura 20. Respuesta de Nairo al ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación. 85

Figura 21. Respuesta de Mariana al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica. 85

Figura 22. Respuesta de Rigo al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica. 85

Figura 23. Respuesta de Nairo al ejercicio 5 de las Actividades de Práctica. 87

Figura 24. Respuesta de Rigo al ejercicio 5 de las Actividades de Práctica. 87

Figura 25. Respuesta de Mariana al ejercicio 5 de las Actividades de Práctica. 88

Figura 26. Respuesta de Nairo al ejercicio 6 y 7 de las Actividades de Práctica. 89

Figura 27. Respuesta de Rigo al ejercicio 7 de las Actividades de Práctica. 89

Figura 28. Respuesta de Mariana al ejercicio 6 de las Actividades de Práctica. 89

Figura 29. Respuestas de Nairo al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 91

Figura 30. Tomado de Guía de matemáticas 5 de Fundación Volvamos a la Gente. 92

Figura 31. Respuestas de Rigo al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 93

Figura 32. Respuestas de Mariana al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 93

Figura 33. Respuestas de Mariana al ejercicio 7 de las Actividades de Práctica 96

Figura 34. Representación isomorfismo de medidas, división-búsqueda de valor unitario (Vergnaud, 1991). 101

Figura 35. Esquema de relaciones en el problema. 102

Figura 36. Esquema de relaciones expuesto por Mariana. 103

Figura 37. Respuestas de Mariana al ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación. 104

Figura 38. Problemas propuestos por Nairo, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación. 105

Figura 39. Problemas propuestos por Rigo, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación. 106

Figura 40. Problemas propuestos por Mariana, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación. 107

Figura 41. Problemas propuestos por Nairo II, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación. 109

Figura 42. Problemas propuestos por Rigo II, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación. 110

Figura 43. Respuesta de Nairo, al ejercicio 1 de las Actividades Básicas. 114

Figura 44. Respuesta de Rigo, al ejercicio 1 de las Actividades Básicas. 114

Figura 45. Respuesta de Mariana, al ejercicio 1 de las Actividades Básicas. 115

Figura 46. Tomada de la guía de Matemáticas 4 de la Fundación Volvamos a la Gente. p. 65. 118

Figura 47. Respuesta de Nairo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 118

Figura 48. Respuesta de Mariana, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 119

Figura 49. Respuesta de Rigo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 119

Figura 50. Tomado de la guía de Matemáticas 4°, Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente 122

Figura 51. Respuesta de Nairo, al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica. 123

Figura 52. Respuesta de Rigo, al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica. 123
Figura 53. Respuesta de Mariana, al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica. 124
Figura 54. Respuesta de Nairo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 125
Figura 55. Respuesta de Mariana, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 126
Figura 56. Respuesta de Rigo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica. 127
Figura 57. Respuesta de Nairo, ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación. 130
Figura 58. Respuesta de Mariana, ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación. 130
Figura 59. Respuesta de Rigo, ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación. 131
Figura 60. Representación, cuadrado de un metro de lado-producto de medidas de longitud (Vergnaud, 1991) 150
Figura 61. Infograma elaborado por Mariana, en entrevista final. 163
Figura 62. Infograma elaborado por Nairo, en entrevista final. 165
Figura 63. Infograma elaborado por Rigo, en entrevista final. 167

RESUMEN

Este trabajo de investigación es direccionado por el método estudio de casos dentro de la perspectiva cualitativa. Es así, como dicho caso lo constituye la comprensión de los problemas multiplicativos en el último grado de la Educación Básica Primaria, implementando dos guías propuestas en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, entendiendo una serie de dimensiones y niveles desde el marco de Enseñanza para la Comprensión. Éste, ha sido retomado como eje articulador durante la construcción del marco teórico que, además de definir las categorías centrales de la investigación, recoge diversos puntos de encuentro.

Acto seguido, se procede a la utilización de técnicas de recolección de datos inscritas en el método: entrevistas semiestructuradas, observación y registros de los estudiantes, analizados a la luz de las construcciones realizadas en el marco teórico y demás autores de referencia. Dicho recorrido, deja como resultado del análisis y la triangulación de datos, desempeños de nivel articulados a los problemas: isomorfismo de medidas y producto de medidas en cada una de las dimensiones y niveles de la comprensión presentadas de acuerdo con los momentos que se proponen en las guías de Escuela Nueva aplicadas. Al final, se encuentra un epílogo que da cuenta de las reflexiones que esta investigación genera en el maestro investigador.

Palabras clave: comprensión, problemas de tipo multiplicativo, modelo Escuela Nueva.

ABSTRACT

This research work is directed by the case study method within the qualitative perspective. This is how this case is constituted by the understanding of multiplicative problems in the last grade of Primary Basic Education, implementing two guides proposed in the Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente model, understanding a series of dimensions and levels from the framework of Teaching for Comprehension. This has been taken up as an articulating axis during the construction of the theoretical framework that, in addition to defining the central categories of the research, includes various meeting points.

Then, we proceed to the use of data collection techniques registered in the method: semi-structured interviews, observation and records of the students, analyzed in the light of the constructions made in the theoretical framework and other reference authors. This route leaves as a result of the analysis and triangulation of data, level performances articulated to the problems: isomorphism of measures and product of measures in each of the dimensions and levels of understanding presented according to the moments that are proposed in Escuela Nueva guidelines applied. At the end, there is an epilogue that accounts for the reflections that this research generates in the master researcher.

Key words: understanding, multiplicative problems, New School model.

Introducción

Esta investigación, analiza cómo comprenden algunos problemas de tipo multiplicativo los estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria, haciendo uso de las guías de estudio diseñadas por la Fundación Volvamos a la Gente, implementadas en algunos sectores del país[1] a través del modelo Escuela Nueva, tal y como ocurre en la sede El Cedro de la Institución Educativa Abelardo Ochoa. De esta manera, el trabajo describe e interpreta tales comprensiones a la luz del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), señalando los distintos niveles que alcanzan los estudiantes respecto a los desempeños propuestos en cada una de las dimensiones del marco: contenido, método, propósito y formas de comunicación.

En primer lugar, se presenta en el capítulo uno el planteamiento del problema, el cual está constituido por: la contextualización, que da cuenta de las características generales donde es llevada a cabo esta investigación (municipio, institución, sede). En segundo lugar, aparece la formulación del problema que contiene la pregunta de investigación, seguido de los objetivos: general y específicos. Al finalizar este capítulo, se incluyen diversos antecedentes: teóricos, investigativos y legales, que señalan la vacancia respecto al tema de investigación que desarrolla el presente estudio.

Luego, en el capítulo dos, se abordan desde sus fundamentos las categorías que pretenden articularse: Enseñanza para la Comprensión y el modelo de Escuela Nueva – Fundación Volvamos a la Gente. En este mismo apartado, aparecen los aportes de Vergnaud (1991) como referente que permite la clasificación de los problemas multiplicativos. También, se destacan algunos puntos de encuentro entre los distintos autores, consolidando a lo largo del capítulo el marco de la EpC como eje central. Más adelante, se plantean relaciones entre las características metodológicas propuestas en el marco de la Enseñanza para la Comprensión y el modelo Escuela Nueva. Por último, se definen las dimensiones y los niveles de la comprensión donde se inscriben los desempeños observados en los participantes.

[1] Es de señalar que, en algunos departamentos especialmente al sur de Colombia, el modelo Escuela Nueva funciona con otro tipo de textos y otros recursos didácticos, distintos a los diseñados por la Fundación Volvamos a la Gente.

El tercer capítulo, define la metodología que guía el desarrollo del estudio, a partir de un enfoque cualitativo y el método de estudio de casos, como orientador específico del proceso. Con relación a las técnicas empleadas para recolectar los datos y su posterior análisis, se definieron la entrevista, la observación y el registro de los participantes como fuente de información. Es así, como avanzado este capítulo se describen de manera detallada las guías de aprendizaje ejecutadas, asociadas a los problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas y producto de medidas y se anexan los desempeños esperados en los estudiantes de acuerdo con lo propuesto en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. Por último, se describen algunas generalidades relacionadas con el análisis de la información.

En esta línea de sentido, el capítulo cuatro recoge las descripciones y evidencias de lo ocurrido durante la etapa de aplicación de dos guías de aprendizaje del modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, relacionadas cada una, con problemas multiplicativos tipo: isomorfismo de medidas y producto de medidas (Vergnaud,1991); al mismo tiempo, en el capítulo se exhiben categorías y constructos teóricos que emergen como producto del análisis a la luz de distintos referentes conceptuales, en especial los expuestos en el marco teórico. Dichas categorías son alineadas en términos de la comprensión, categoría central de esta investigación (el caso). Igualmente, este capítulo, ofrece como producto del análisis, diferentes niveles de desempeño desde el marco de la Enseñanza para la Comprensión, sintetizados en una rúbrica de niveles por dimensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, ajustados a la comprensión de los problemas multiplicativos que ya se han enunciado.

Inmediatamente después, en el capítulo cinco, aparecen las conclusiones que plantea este estudio, asociadas a la pregunta de investigación, los objetivos y las dimensiones de la comprensión. También, de acuerdo con el enfoque cualitativo de la investigación, se exhiben conclusiones relacionadas con la articulación de los problemas multiplicativos en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente; además, se encuentran los aportes de esta investigación a la Educación Matemática y se dan a conocer futuras líneas de investigación.

A modo de cierre, se aprecia un epílogo, que da cuenta de las reflexiones del investigador, éstas son producto de lo vivido en el proceso y surgen alrededor del papel del maestro rural que desarrolla su labor en el modelo Escuela Nueva.

Al final se incluyen los anexos como ilustración y soporte de todo el proceso llevado a cabo.

1. Problema de Investigación

En este capítulo se presentan diversos elementos que, juntos, dan forma al problema de investigación. En un principio, se encuentra la contextualización que ha incluido la aplicación de una encuesta, de modo que, narra no sólo las particularidades del lugar donde se encuentra ubicada la escuela, sino también los intereses de los estudiantes y su relación con el área de Matemáticas. Luego, se da paso al planteamiento del problema con el fin de ubicar al lector en la línea y los propósitos que guían este trabajo, por ello, se dan a conocer los objetivos. Al final del capítulo, se desarrollan tres tipos de antecedentes: teóricos, investigativos y legales, que señalan la relevancia del tema de investigación, los aportes que se han publicado respecto al mismo y las líneas de fuga que pueden señalar las contribuciones de este trabajo.

1.1. Contextualización

Para el diseño de la contextualización, se tienen en cuenta aspectos locales como: ubicación de la sede educativa (municipio e institución), modalidad de enseñanza en la que se inscribe y una breve descripción del mismo, además de los elementos que se tienen en cuenta durante la planeación de las clases de Matemáticas. Asimismo, se presentan algunas características generales de la población participante con el fin de ofrecer al lector una fotografía global de lo que compone el contexto: lugar, modelo educativo, personas que interactúan en él (estudiantes, padres de familia, prácticas culturales). Características que sustentan su validez en la aplicación de una encuesta, no como insumo para el análisis, sino como instrumento que permite imprimir las voces de los actores dentro de la descripción de sus particularidades.

De acuerdo con lo enunciado, en primera instancia, se presenta el municipio de Salgar –ubicado al Suroeste de Antioquia– que exhibe, como principal fuente de recursos económicos: la siembra y recolección del café. También cuenta con cuatro corregimientos y 30 veredas, una Institución Educativa en la zona urbana y dos Centros Educativos en la zona rural: El Concilio y Peñalisa; y se ubica también, la Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa, conformada por 13 sedes educativas con un total de 662 estudiantes. Una de ellas, es el Centro Educativo Rural El Cedro, ubicado a 20 kilómetros del casco urbano donde se atienden 15 estudiantes desde el grado preescolar hasta el grado quinto, bajo el modelo Escuela Nueva, orientado por la Fundación Volvamos a la Gente[2] (FVG), que cuenta con características que constituyen formas propias de la enseñanza en la escuela multigrado[3].

Al respecto de Escuela Nueva (FVG), se hace necesario señalar que consta de seis guías de aprendizaje[4] por grados y áreas específicas. Así, por ejemplo, los grados: segundo, tercero, cuarto y quinto cuentan con textos en las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Tecnología, Emprendimiento y Ética; mientras que para el grado transición y primero presenta dos módulos que hacen énfasis en conceptos específicos de las áreas de Lenguaje y Matemáticas. Además de las guías, propone la creación de los Centros de Recursos de Aprendizaje (CRA) que interactúan en los procesos de planeación de clase, propuestos por unidades y actividades de trabajo individuales y de grupo.

Además del material propio del modelo Escuela Nueva, se tienen en cuenta dentro de los procesos de planeación que ocurren en la Institución Educativa para el área de Matemáticas, aquellos documentos que dan cuenta de las directrices y los requerimientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN), como: *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998), *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas* (MEN, 2017), *Mallas de Aprendizaje Matemáticas* (MEN, 2017) y *Matriz de referencia Matemáticas* del ICFES[5] (MEN, 2017). Todo lo anterior se realiza, retomando los momentos pedagógicos propuestos en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente: Actividades Básicas,

---

[2] ONG creada en 1987 por los autores del modelo pedagógico Escuela Nueva y el equipo original que lo puso en marcha.

[3] Un profesor enseña dos o más grados simultáneamente en la misma aula de clase.

[4] Libros de texto para el aprendizaje autónomo y colaborativo.

[5] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.

Actividades de Práctica y Actividades de Aplicación, donde se incorporan acciones de trabajo individual y de trabajo cooperativo[6] (Colbert y Vásquez, 2015).

Explorando lo relacionado con los problemas de tipo multiplicativo, el modelo Escuela Nueva tiene en cuenta, en el diseño de las actividades –expuestas en las guías de trabajo– los cinco pensamientos descritos en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998): numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional. En cuanto al proceso de resolución de problemas, es presentado alrededor de situaciones multiplicativas y aditivas en los cinco primeros grados de la Educación Básica.

Es así como, después de reconocer el municipio de Salgar, la sede el Cedro y de hacer un acercamiento al modelo Escuela Nueva, se realiza una breve descripción de la población que hace parte de la sede educativa, con el fin de delimitar qué personas son consideradas dentro del desarrollo de la investigación. En palabras de Balliache (2009) durante el planteamiento del problema es necesario establecer los límites de la investigación en términos del universo, es decir, la población, las unidades, el sector –responder al ¿quiénes? De ahí, la necesidad de señalar que este estudio se centra en analizar la comprensión de los problemas de tipo multiplicativo en los estudiantes del grado quinto de la sede El Cedro en el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), es decir, tres estudiantes en total. Aquí cabe señalar que, el número de estudiantes inscritos obedece a dinámicas sociales propias de la educación rural donde los cursos son conformados, generalmente, por un número de estudiantes reducido, debido a la dispersión de la población.

Con respecto a los estudiantes, se observa: disposición para la ejecución de actividades matemáticas, participación y entusiasmo al anunciar el inicio de la clase, actitud que conservan en el desarrollo de las tareas escolares. Estas percepciones son reafirmadas en los resultados de una encuesta aplicada a los estudiantes de la sede El Cedro al inicio de esta investigación, con el propósito de captar sus características generales, donde el 100% expresa agrado por el área: *"las matemáticas son fáciles"*; asimismo, el 22% asegura *"entender todo lo que el profesor explica"*, el 56% *"entiende casi todo"* y el 22%

---

[6] El modelo contempla la conformación de un gobierno escolar que incluye la asignación de diferentes cargos y la conformación de distintos comités. Por tanto, el trabajo en equipo es una de sus principales características.

manifiesta comprender *"algunas cosas".* Esta percepción sobre las explicaciones puede inferir en el nivel de cercanía que los estudiantes manifiestan hacia el área.

Al indagar por lo que ocurre fuera de la escuela, los estudiantes expresan que en casa el 55% cuenta con libros de Matemáticas, el resto (45%) no cuenta con ningún libro; es común a todos, la ausencia de un computador en el hogar y el acceso a internet es escaso debido a las condiciones topográficas de la vereda, que limitan el servicio.

Al continuar con las indagaciones acerca de lo que pasa en el contexto extraescolar, se puede determinar que el 15% de los padres de familia han finalizado sus estudios primarios, el 46% aún no lo ha terminado y el 39% no ha cursado ningún grado. Desde la perspectiva del docente, pueden inferirse ciertas relaciones entre la formación escolar de los acudientes y el acompañamiento que éstos hacen al desarrollo de actividades académicas, específicamente en el de las tareas escolares, esta ausencia de acompañamiento crece cuando los estudiantes avanzan en los distintos grados de escolaridad y cuando las temáticas y los conceptos se hacen más complejos.

Reconocer estas características, aporta al diseño de actividades que correspondan a sus gustos, intereses, necesidades y realidad social. De igual manera, es necesario exhibir que en el modelo Escuela Nueva los padres de familia y/o acudientes tienen un papel destacado en la ejecución de las Actividades de Aplicación. En este sentido, tal y como lo plantea Colbert y Vásquez (2015) las guías "promueven actividades que deben ser desarrolladas en familia y que permiten la aplicación de los aprendizajes" (p. 280). Lo anterior significa que, además del maestro, la guía de aprendizaje y los compañeros de clase, los padres de familia participan de manera activa en el desarrollo de las comprensiones.

1.2. Planteamiento del Problema

A continuación, se exponen de manera breve las razones que configuran el planteamiento del problema de investigación, partiendo de lo general a lo específico, esbozando, inicialmente algunas razones incluidas en distintos documentos de referencia educativa nacional como *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998) y *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006) y se articulan con algunos de los aportes de referentes y autores insignia del modelo Escuela Nueva –

Fundación Volvamos a la Gente. Seguido, se contrasta con la información disponible en los resultados de las pruebas de desempeño nacionales como son las pruebas SABER (ICFES, 2016, 2017) y finalmente, se retoman algunos apuntes de observaciones y pruebas realizadas a nivel institucional y del aula de clase donde se lleva a cabo esta investigación. La suma de estos recorridos a nivel nacional, regional e institucional, sustentan y dan origen al planteamiento del presente proceso de investigación.

En este orden de ideas, tal y como lo afirma el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, la resolución de problemas matemáticos se ha considerado un aspecto relevante en los currículos escolares del país;

> […] la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos (MEN, 1998, p. 52).

Además, el Ministerio de Educación Nacional plantea que la resolución de problemas aporta al estudiante la capacidad de generalizar hipótesis, desarrollar habilidades, actitudes, tomar decisiones, proponer nuevas ideas y hacer frente a diversas situaciones. Asimismo, expone la importancia del trabajo por competencias y propone la Enseñanza para la Comprensión, como un potente precursor para su dominio, ya que permite valorar gradualmente el nivel de desarrollo y su progresivo crecimiento (MEN, 2006).

Por su parte, el modelo educativo Escuela Nueva dirigido por la Fundación Volvamos a la Gente se refiere a la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos –entre ellos, los problemas de tipo multiplicativo– planteando que dicha comprensión ocurre de manera gradual, es decir, no necesariamente se alcanzan en un grado de manera particular o con el desarrollo de una de las guías que se proponen en los textos, sino a través del trabajo en diversas guías de aprendizaje y en distintos grados, algo similar a lo que exponen los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006) diseñados por grupos de grados. Las bases del modelo educativo Escuela Nueva definen que, en el acto educativo las transformaciones están asociadas al cambio en la transmisión de la información y contenidos por el de comprensión y construcción social, donde el estudiante desempeña un papel activo (Colbert y Vásquez, 2015).

Otras miradas se unen a lo expuesto por el Ministerio de Educación Nacional y el modelo Escuela Nueva (FVG) con relación a la resolución de problemas de tipo multiplicativo; los resultados de las pruebas externas SABER (ICFES, 2016, 2017). Allí, se evidencia que la Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa en el aprendizaje: resolución y formulación de problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano (ICFES, 2016, 2017), presenta que el 48% de los estudiantes para el año 2016 y el 44% de los mismos en 2017 no resuelven de manera satisfactoria este tipo de problemas en el grado quinto. Al comparar estos resultados con el resto de los Centros Educativos Rurales del municipio: El Concilio y Peñalisa, se puede determinar que el número de estudiantes que responden equivocadamente estas preguntas es mayor al señalado en las demás sedes rurales[7]. Ver figura1.

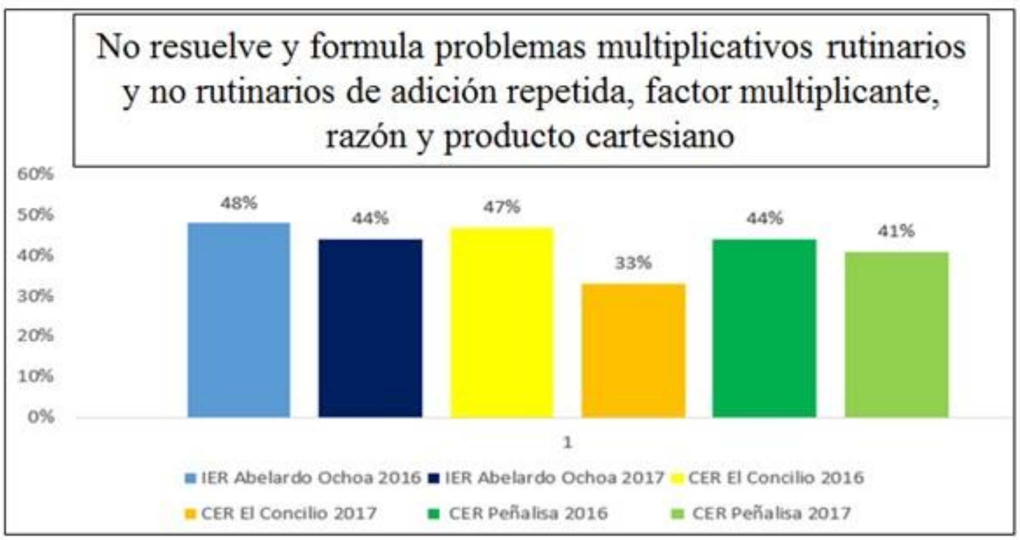


Figura 1. Comparativo de resultados pruebas SABER (ICFES, 2016, 2017) con relación a la resolución de problemas multiplicativos en el grado quinto en las Instituciones Educativas Rurales del municipio de Salgar.

En cuanto al aprendizaje asociado a la resolución de problemas sencillos de proporcionalidad directa (ICFES, 2016, 2017) en la Institución Educativa Rural Abelardo

[7] CER El Concilio: 47% (ICFES, 2016) y 33% (ICFES, 2017) y el CER Peñalisa: 44% (ICFES, 2016) y 41% (ICFES, 2017).

Ochoa se determina, según los resultados de las pruebas ICFES, que el 54% de los estudiantes durante el año 2016 y el 56% en el 2017, no resuelven de manera acertada este tipo de problemas. Similar a lo que ocurre con los problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios mencionados anteriormente, la IER Abelardo Ochoa presenta resultados que la ubican en un nivel de desempeño por debajo de las demás instituciones rurales del municipio de Salgar[8]; es decir, según los reportes del ICFES (2016, 2017) el número de estudiantes que no logra resolver los problemas multiplicativos de proporcionalidad directa, es alto. Ver figura 2.

Figura 2. Comparativo de resultados pruebas SABER (ICFES, 2016, 2017) con relación a la resolución de problemas multiplicativos de proporcionalidad directa en el grado quinto en las Instituciones Educativas Rurales del municipio de Salgar.

Además de lo que se ha venido exponiendo, se realizó en la sede El Cedro una prueba de exploración con estudiantes del grado quinto donde se ha propuesto la solución de diferentes tipos de problemas articulados a la estructura multiplicativa. Para el diseño y ejecución de la prueba escrita se han tenido en cuenta los problemas de tipo multiplicativo expuestos por Vergnaud (1991). Igualmente, para su solución, el estudiante tiene la posibilidad de acudir a diferentes formas de representación: concreta, pictórica o algorítmica de las situaciones.

[8] CER El Concilio: 40% (ICFES, 2016) y 58% (ICFES, 2017) y CER Peñalisa 44% (ICFES, 2016) y 45% (ICFES, 2017).

Los resultados de la prueba de exploración evidencian que, en los problemas de tipo isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1991) donde se utiliza la relación personas-dinero y donde se hace necesario hallar la cantidad de unidades (dividir), el 50% de los estudiantes presenta errores. Una de las dificultades que se ha reiterado es que éstos presentan inconvenientes en el desarrollo del algoritmo (figura 3) o que han elegido la operación multiplicación en lugar de la división como opción para la solución del problema (figura 4).

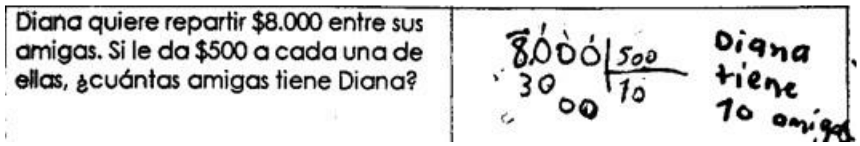


Figura 3. Solución problema isomorfismo de medidas (r/división).

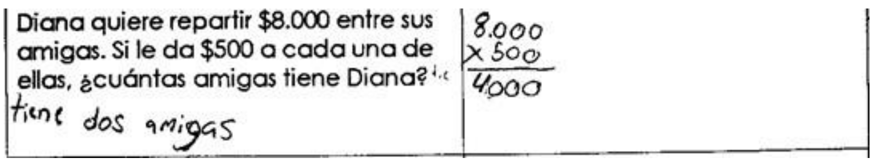


Figura 4. Solución problema de isomorfismo de medidas (r/división).

En cuanto al tipo de problema denominado por Vergnaud (1991) producto de medidas, se ha presentado uno, donde la solución implica una multiplicación. Allí, se establece que el 66% de los estudiantes manifiesta dificultades para proponer una respuesta, observando que los participantes suman las dimensiones en lugar de multiplicarlas (figura 5). De igual modo, en la misma categoría de problemas (producto de medidas) cuya solución requiere de una división, el 84% de los estudiantes participantes en la prueba de exploración manifiestan tropiezos (figura 6). En algunos de estos casos, los estudiantes utilizan operaciones al azar, restas y multiplicaciones para determinar un resultado (figura 7).

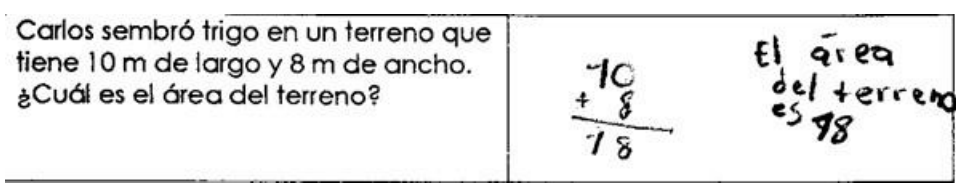


Figura 5. Solución problema tipo producto de medidas (r/multiplicación).

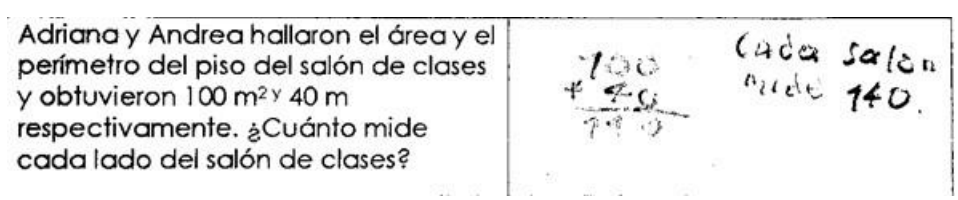


Figura 6. Solución problema tipo producto de medidas (r/división).

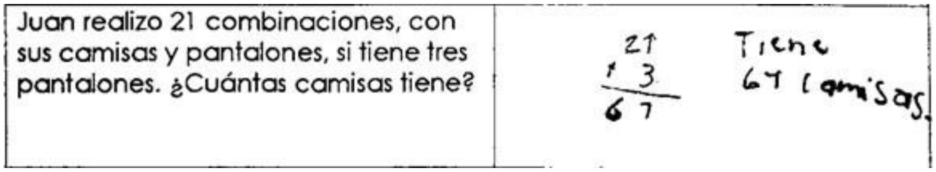


Figura 7. Solución problema tipo producto de medidas (r/división).

Para los problemas tipo, caso de un solo espacio de medidas, se emplean números naturales de una y dos cifras. En primer lugar, se requiere una multiplicación. Sin embargo, el porcentaje de estudiantes que emitieron una respuesta equivocada fue del 50%, efectuando la suma como la operación seleccionada para ofrecer una solución (figura 8). Los errores aumentan en porcentaje cuando los problemas de este tipo demandan una división, el 84% de los estudiantes propone una resta, lo que conlleva a expresar una respuesta desacertada para el problema (figura 9) y finalmente, en este tipo de problemas – caso de un solo espacio de medidas – cuando la incógnita apunta al escalar el 100% de los estudiantes acude nuevamente a las operaciones aditivas (figura 10).

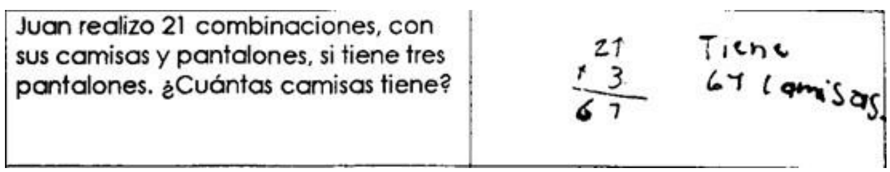


Figura 8. Solución problema de un solo espacio de medidas (r/multiplicación)

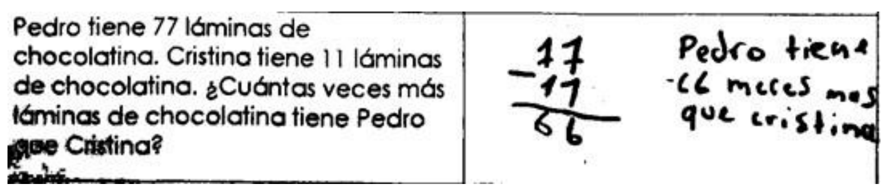


Figura 9. Solución problema de un solo espacio de medidas (r/división)

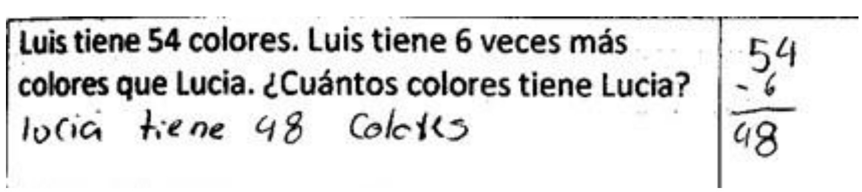


Figura 10. Solución problema de un solo espacio de medidas (r/división)

Después de analizar los resultados de la prueba diagnóstica, es posible observar que el 89% de las respuestas emitidas por los estudiantes del grado quinto del nivel Básica

Primaria de la sede El Cedro al resolver diferentes tipos de problema de la estructura multiplicativa determinados por Vergnaud (1991), presenta dificultades. Es por ello, que resulta interesante para el docente de la sede El Cedro, analizar, describir e identificar cómo se dan los procesos de comprensión de los problemas de tipo multiplicativo en el marco del modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, teniendo en cuenta que este es el modelo bajo el cual se guían y orientan los procesos educativos no solo de la sede El Cedro, sino también el de todas las sedes de la Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa, que se encuentran bajo la modalidad de aulas multigrado.

Lo enunciado hasta aquí, se suma a los resultados de las pruebas SABER (ICFES, 2016, 2017) donde se exhibe que la Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa comparada con otros Centros Educativos Rurales del municipio de Salgar, presenta un promedio bajo de respuestas satisfactorias respecto a la resolución de problemas de tipo multiplicativo en el grado quinto de la Educación Básica Primaria, resultados que son similares a los obtenidos en las pruebas diagnósticas realizadas en la sede El Cedro.

Todo lo anterior, señala la necesidad de realizar un estudio que se preocupe por cómo comprenden los estudiantes estos tipos de problemas, sin hacer caso omiso a lo que ocurre a diario en esta aula multigrado –las clases de Matemáticas son llevadas a cabo bajo la guía del modelo Escuela Nueva (FVG) en la sede El Cedro–. Es así como, estudiar la comprensión teniendo en cuenta lo que hasta aquí se ha descrito, requiere de la definición de un marco que permita abordar la comprensión desde diferentes dimensiones y niveles. En suma, se intentan generar aportes a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en contextos rurales abriendo caminos que permitan describir su realidad –dirigida a la comprensión de los problemas multiplicativos–.

En atención a lo expuesto, surge la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria en el modelo de Escuela Nueva (FVG) tomando como referencia las dimensiones propuestas en el marco de la Enseñanza para la Comprensión?

1.3. Objetivos

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se plantean los siguientes objetivos.

1.3.1. Objetivo General.

Analizar cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva (FVG) tomando como referencia las dimensiones expuestas en el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

1.3.2. Objetivos Específicos.

- Describir la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en los estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva (FVG) tomando como referencia las dimensiones expuestas en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

- Identificar los desempeños de comprensión que muestran los estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria, al solucionar problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva basados en las dimensiones expuestas en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

1.4. Antecedentes

A continuación, se presenta una revisión teórica e investigativa con relación a la comprensión de los problemas de tipo multiplicativo, además de un acercamiento a estudios sobre el Modelo Escuela Nueva, en el contexto rural y algunas teorías sobre la comprensión. Así mismo, se realiza una exploración de algunos Referentes Nacionales de Calidad expedidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), haciendo una discriminación del concepto matemático objeto de estudio de la presente investigación.

1.4.1. Antecedentes teóricos.

1.4.1.1. Problemas de tipo multiplicativo.

Inicialmente, dentro de esta sección, se presentan los estudios realizados por Vergnaud (1991) quien, haciendo uso de la teoría de los campos conceptuales, describe y categoriza tres tipos de problemas en la estructura multiplicativa. Para Vergnaud (1991) "un campo conceptual es el conjunto de problemas o situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos, relaciones, contenidos, operaciones y representaciones, íntimamente relacionados, pero distintos, que están conectados unos con otros y probablemente entrelazados en el proceso de adquisición" (p. 142). Desde esta perspectiva, las situaciones que constituyen el campo conceptual de los problemas de tipo multiplicativo involucran el uso de multiplicaciones y divisiones (Vergnaud, 1991).

En la línea de los problemas de tipo multiplicativo Vergnaud (1991) propone dos formas de relación dentro de la estructura: relaciones ternarias tipo $a.b = c$ y relaciones cuaternarias $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Además de estas relaciones, el autor expone tres clases de problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas, caso de un solo espacio de medidas y producto de medidas. En el primero, interactúan cuatro cantidades, donde una de ellas constituye la incógnita. El segundo, –caso de un solo espacio de medida– cuenta con "una sola categoría de medidas [...] y la correspondencia no se establece entre cuatro cantidades sino entre dos, por una parte, y dos objetos, [...] por la otra" (Vergnaud, 1991, p. 220). En tercer lugar, se encuentran los problemas tipo producto de medidas como aquellos donde dos medidas del mismo o de diferente tipo dan origen a otra medida.

Estas construcciones aportan al presente estudio de investigación, no solo en la clasificación de los tipos de problema multiplicativos sino, además, en el llamado que hace el autor sobre la importancia de abordar cuidadosamente las diferentes clases de problemas y su análisis "con el fin de ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas, y a encontrar el procedimiento que conducirá a su solución" (Vergnaud, 1991, p. 223).

Asimismo, Vergnaud (2016) en el II Congreso Internacional de la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, se refiere a la comprensión matemática como una actividad que el estudiante desarrolla y advierte que, puede ocurrir, aunque no se diga ninguna palabra.

De igual manera, el autor asegura que la comprensión se concibe a través de la observación de la actividad, señalando lo esencial del plano metodológico. Con relación al marco de la EpC, además de observar la comprensión del enunciado verbal de los problemas de tipo multiplicativo, también se incluyen otras formas de la comprensión relacionadas con los métodos, los propósitos, las formas de comunicar y los contenidos, es decir, cobran relevancia otros modos de comprender develados a través de las actuaciones.

Continuando con el rastreo de autores que aportan al campo de estudio de los problemas de tipo multiplicativo, se presentan las construcciones de Castro (1994) quien relaciona la representación mental en el campo de la resolución de problemas con la comprensión. El autor argumenta que, dichas representaciones dan cuenta de los conocimientos y esquemas de conocimiento que el estudiante posee. A diferencia de lo que pretende este trabajo, abordar el estudio de la comprensión de diferentes tipos de problema asociados a la estructura multiplicativa, los estudios de Castro (1994) se centran en los niveles de comprensión de la resolución de problemas verbales simples de comparación multiplicativa, tales estudios se realizan bajo el diseño de fases propuestas por el autor, mientras este trabajo retoma las actividades, guías y desempeños de aprendizaje del modelo de Escuela Nueva (FVG), los describe e identifica de acuerdo con las dimensiones y niveles en el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Para Castro (1994), la comprensión de problemas aritméticos verbales se subdivide en dos niveles: “traducción del problema a una representación interna e integración del problema en una estructura coherente” (Castro, 1994, p. 23). Al referirse al primero, menciona la importancia de interpretar el lenguaje matemático, relacionando este nivel con el campo de la significación, en el segundo nivel, plantea que tiene relación con la expresión matemática del problema, es decir, situar el problema en un campo, en una estructura, en identificar los conocimientos matemáticos que se requieren para su solución (Castro, 1994). Es así, como el autor señala la necesidad de llevar a cabo estudios de este tipo, con el propósito de realizar aportes didácticos que apunten a la evaluación y al contenido matemático en el ámbito de la aritmética.

1.4.1.2. Antecedentes alrededor de la ruralidad.

Teniendo en cuenta que la sede El Cedro se encuentra ubicada en el contexto rural, el presente antecedente expone, a groso modo, un acercamiento a lo que implica esta realidad. En primer lugar, se define el concepto de campo como espacio físico, desde aspectos demográficos, territoriales y culturales y, en segundo lugar, contextualiza los elementos que desarrollan los procesos de enseñanza implícitos en éstos.

En la actualidad, no existe una sola forma de definir la ruralidad tal y como lo expresan Torre y Wallet (2016) citado en Ramírez y De Aguas (2017), el concepto hace referencia a un mosaico diverso de condiciones socioeconómicas, espaciales, poblacionales y de caminos hacia el desarrollo. Es decir, de acuerdo con la concepción que un estado tenga de la distribución del territorio de las personas y a la relación de éstas con su economía y la producción.

En esta línea de ideas, Cloke (2006) citado en Ramírez y De Aguas (2017) plantea una concepción más amplia de la ruralidad. Argumenta que requiere una mezcla compleja de conceptos en lo funcional: tierra, agricultura, recursos naturales; en cuanto a lo político: educación, infraestructura, institucionalidad; en lo social: cultura, demografía, estándares de vida y en lo estético: percepciones sobre cómo es el campo. Es decir, es la configuración de un sin número de elementos alrededor del espacio, de sus habitantes y de las costumbres de éstos.

Desde esta perspectiva, la ruralidad se entiende como algo que va más allá del campo, de los cultivos y los animales, “lo rural trasciende lo agropecuario, y mantiene nexos fuertes de intercambio con lo urbano, en la provisión no sólo de alimentos sino también de gran cantidad de bienes y servicios” (Pérez, 2001, p. 18). Para el MEN (2012), dicha trascendencia está marcada por el acceso que tienen las comunidades rurales a las comunicaciones, las nuevas tecnologías y su vinculación con los centros urbanos. Entrena (1998, citado en Matijasevic y Ruiz 2013) plantea diferencias entre lo rural y la ruralidad, entendiendo “lo rural como un particular medio geográfico, y la ruralidad como una cultura o forma de vida vinculada con dicho medio” (p. 25).

Continuando con la línea de la ruralidad, pero adentrándose un poco en términos educativos, aparece el modelo Escuela Nueva. En Colombia fue denominado inicialmente como el modelo de Escuela Unitaria promovido por la UNESCO[9] en el municipio de Pamplona – Norte de Santander, dicho programa consistía en brindar apoyo a los docentes que desempeñaban su labor con varios grupos de Educación Básica Primaria a la vez. Años más tarde, el MEN, en la década de los 60´s durante la denominada “renovación” asume la asesoría de éste (Colbert, 2018). En aquel entonces el nivel de Educación Básica Primaria implicaba sólo hasta el grado tercero, pero el programa brindaba la posibilidad de extenderlo con mayor capacidad de cobertura hasta el grado quinto. Años más adelante, el proyecto de Escuela Unitaria en diálogo con otras experiencias similares ejecutadas en Antioquia, da origen a lo que actualmente se nombra como el modelo Escuela Nueva. Los departamentos que dieron inicio al rodaje del pilotaje fueron: Norte de Santander, Cundinamarca y Boyacá en un total de 150 escuelas y, de ahí se fue replicando paulatinamente por el resto del territorio colombiano (Colbert, 2018).

A pesar de estos avances, Colombia esperó hasta el año 1970 para incluir en su agenda política el tema de la educación rural, incorporándolo dentro las políticas de reforma agraria y de desarrollo rural a través del modelo Escuela Nueva (MEN, 2012). Más adelante, se determina que corresponde a las Entidades Territoriales y al Gobierno Nacional, la promoción de un servicio de educación campesina y rural que comprenda especialmente, la formación técnica en actividades agrícolas, pecuarias, pesqueras, forestales y agroindustriales que contribuyan a mejorar las condiciones humanas, de trabajo y la calidad de vida de los campesinos (Ley 115, artículo 64 de 1994).

Para Colbert y Vásquez (2015) Escuela Nueva, es “caracterizado como sistema, como modelo, como programa y como metodología” (p. 48), en el caso de esta investigación, se adopta el término modelo al referirse a Escuela Nueva, pues éste incluye fundamentos teórico-conceptuales y operativos (Colbert y Vásquez, 2015). En este sentido, conceptos y teoría se abordan de acuerdo con lo propuesto en las guías de aprendizaje y se relacionan con otros elementos que hacen parte del modelo como, por ejemplo: el trabajo cooperativo, el gobierno escolar y los Centros de Recursos de Aprendizaje (CRA).

[9] La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura

Por su parte, autores internacionales como Boix (2011) plantean que los retos alrededor de la educación rural están dados, en primer lugar, en la adecuación de un currículum para dar respuesta a la diversidad del alumnado. En segundo lugar, en el diseño del trabajo cooperativo y, en tercer lugar, en el diseño e implementación de cambios metodológicos, incorporando nuevas formas de adquisición de aprendizajes centrados en el alumnado y la apertura al contexto inmediato.

Reconocer algunos de los recorridos que ha transitado Escuela Nueva, permite identificar que la educación rural en Colombia es un camino que aún presenta tramos desconocidos o algunos otros que se encuentran en construcción, de ahí la relevancia de esta investigación. Así pues, se intentan describir las comprensiones de los estudiantes utilizando materiales y guías de enseñanza diseñadas por la FVG; de esta manera, la presente investigación constituye un aporte a la comprensión en contextos rurales y con los que se considera la academia tiene deudas pendientes según lo enunciado hasta ahora.

1.4.1.3. Teorías sobre la comprensión en Educación Matemática.

A continuación, se relacionan tres marcos para comprensión que han adquirido relevancia dentro de la enseñanza de las Matemáticas, éstos se presentan teniendo en cuenta su relación con la comprensión, con la Educación Matemática y con el modelo Escuela Nueva. Además, se exponen de manera sintética sus características más relevantes a nivel teórico y metodológico.

1.4.1.3.1. Teoría de Pirie Y Kieren:

En esta teoría la comprensión es entendida como, un proceso continuo que permite organizar las estructuras del conocimiento (Meel E., 2003). Sus autores Susan Pirie y Thomas Kieren, diseñaron un proceso de comprensión por niveles anidados. Al igual que otras teorías, esta considera la comprensión un proceso dinámico y no estático. Es por ello que, los autores plantean tres características fundamentales de la comprensión: redoblamiento –cuando el estudiante se enfrenta a un desafío y acude a un nivel inferior para llegar a un nivel superior, los límites de falta de necesidad –cuando pasa de una comprensión a otra de manera estable sin acudir a niveles inferiores de la comprensión– y complementariedades de la acción y la expresión, donde se hace necesaria la acción para dar cuenta luego de la comprensión (Pirie y kieren, 1994, citado en Mell, 2003).

Teniendo en cuenta lo enunciado anteriormente, se presentan los niveles de comprensión expuestos en la teoría de Pirie y Kieren tomados del texto de Mell (2003).

Tabla 1. *Estratos, formas de expresión y noción de actuación en la teoría de Pirie y Kieren. Mell (2003).*

Estratos	Forma de expresión	Noción de actuación
Imagen primitiva	Ideas intuitivas	Conocimiento previo e informal
Creación de la imagen	Análisis de la imagen	Realización de la imagen
Comprensión de la imagen	Expresión de una imagen	Visualización de la imagen
Observación de la propiedad	Registro de una propiedad	Predicción de la propiedad
Formalización	Justificación del método	Aplicación del método
Observación	Descripción de las características	Identificación de las características
Estructuración	Demostración del teorema	Conjeturas de un teorema
Invención	Producción de un nuevo conocimiento	Es infinita, imaginativa y llega más allá de lo estructural

Aunque los aportes propuestos por Pirie y Kieren concuerdan con algunas concepciones incluidas en esta investigación como, por ejemplo, el carácter dinámico de la comprensión y su estratificación en niveles de comprensión, sus construcciones se alejan de lo propuesto en el modelo Escuela Nueva – Fundación Volvamos a la Gente, especialmente en los modos de aplicación en el aula de clase.

1.4.1.3.2. Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.

El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele fue desarrollado por los esposos Dina van Hiele Geldof y Pierre Marie van Hiele, como resultado de sus formulaciones doctorales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la Universidad de Utrecht, Holanda. Los elementos relevantes de este modelo develan, la existencia de diversos niveles de razonamiento geométrico y propone organizar la enseñanza a través de fases aprendizaje.

Para los autores los niveles de razonamiento se presentan de manera progresiva, teniendo en cuenta la presencia de elementos implícitos y explícitos atravesados por el refinamiento del lenguaje, tal y como se presenta en la tabla realizada por (Corberán, Gutiérrez, Huerta, Bautista, Peñas y Ruiz, 1994).

Tabla 2. *Elementos explícitos e implícitos por nivel en el modelo de van Hiele. Corberán, et al., (1994).*

Niveles	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos

Nivel 1 Prescriptivo	Los objetos geométricos.	Propiedades de los objetos geométricos.
Nivel 2 Reconocimiento	Propiedades de los objetos geométricos.	Relaciones entre pro- piedades y objetos.
Nivel 3 Análisis	Relaciones entre pro- piedades y objetos.	Demostración formal de relaciones.
Nivel 4 Clasificación	Demostración formal de relaciones.	Organización de conceptos, definiciones, propiedades o relaciones.
Nivel 5 Deducción formal	Organización de conceptos, definiciones, propiedades o relaciones.	Visión global de lo aprendido, integrando nuevos conocimientos y métodos de trabajo.

Los autores consideran que dichos niveles de razonamiento pueden refinarse implementando en el aula de clase cinco fases de aprendizaje sintetizadas en la siguiente tabla:

Tabla 3. Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.

Fases de aprendizaje	Elementos Explícitos
Fase 1. Información	Presentación de objetivos, recursos, conceptos, métodos a desarrollar
Fase 2. Orientación dirigida	Manipulación libre y espontánea del material de trabajo, resolver situaciones orientados por el maestro.
Fases 3. Explicitación	Intercambio de experiencias a través del diálogo.
Fase 4. Orientación libre	Resolver problemas que no tengan relación con las fases anteriores y que pongan en juego diversos conceptos, que signifiquen un desafío.
Fase 5. Integración	Fomentar compresiones globales, donde se comparen y combinen los conocimientos construidos.

Aunque algunos autores como Bedoya (2013) plantean diversas asociaciones entre el modelo de Razonamiento de van Hiele y la comprensión al afirmar que, el reconocimiento de las características propuestas en cada fase puede determinar la comprensión de los conceptos; esta investigación ha acudido a otros marcos de comprensión aduciendo que el modelo de razonamiento de van Hiele comporta consigo una componente visual geométrica considerable, y al respecto, las guías de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente demandan ajustes considerables que, implementados, modifican la estructura concebida en el modelo, alejándose de lo que cotidianamente se implementa en las aulas de clase rurales.

1.4.1.3.3 Marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

Desde el año 1979, Gardner y un grupo de docentes de la Universidad de Harvard, dieron vía a una investigación dirigida a estudiar el potencial humano, denominada proyecto Cero. La noción de comprensión que este proyecto plantea, presenta orígenes constructivistas, sin embargo, difiere en dos elementos básicos: qué se construye y cómo procede la construcción (Stone, 1999). De esta manera, el marco de Enseñanza para la Comprensión (EpC) expresa que la comprensión es el eje central de la educación ubicada en una balanza de flexibilización entre, el conocimiento y la práctica (Perkins, 1999).

De igual manera, el marco de la EpC incluye la implementación de una propuesta en el aula, que define: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión –que a su vez incluyen etapas de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis– y evaluación diagnóstica continua (Stone, 1999). Además de este componente metodológico, dicho marco define cuatro dimensiones de la comprensión, entendidas como todas aquellas características observables durante el proceso (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de contenido: allí se relacionan las actuaciones, intuiciones y saberes previos con los conceptos validándolos y transformándolos en nuevo conocimiento (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de métodos: se tienen en cuenta las diversas formas o procedimientos que utilizan los estudiantes para resolver los problemas o corroborar la información que vienen construyendo acerca de un conocimiento específico (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de propósitos: en ella se evalúa la capacidad de los estudiantes para definir los objetivos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, emplearlo en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión formas de comunicación: tiene que ver con el uso de ciertos símbolos para comunicar lo aprendido, mediante la utilización de un lenguaje apropiado y comprensible; implica la capacidad de interactuar respetuosa y claramente con los objetos y con los otros (Boix y Gardner, 1999).

Paralelo a las dimensiones de la comprensión, el marco de la EpC plantea unos niveles de desempeño ajustables a cada dimensión. La siguiente tabla define de modo general en que consiste cada nivel.

Tabla 4. *Síntesis de los niveles de comprensión en el marco de la EpC*

Niveles de comprensión	Descripción general
Nivel 1. Ingenuo	Basados en el conocimiento intuitivo. Capturan información disponible, a la mano. Difícil de aplicar.
Nivel 2. Novato	Basados en rituales de prueba y escolarización. Son mecánicos, con problemas en su aplicación.
Nivel 3. Aprendiz	Uso flexible de conceptos y procedimientos. Hay una relación entre lo que se aprende y la vida.
Nivel 4. Maestría	Existe un uso del conocimiento en la vida diaria, reflejan una conciencia crítica de los estudiantes.

De los tres marcos referidos hasta ahora, el marco de la Enseñanza para la Comprensión se articula a los momentos que se proponen en la guía de aprendizaje propuesta por la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, lo que implica una relación que va más allá de lo procedimental y se consolida en lo conceptual y lo metodológico, tal y como puede observarse en el capítulo siguiente, capítulo II. Marco Teórico.

1.4.2. Antecedentes investigativos.

Los antecedentes investigativos exponen el rastreo de diferentes estudios relacionados con el modelo Escuela Nueva, la resolución de problemas matemáticos que involucran la multiplicación y la división desde diferentes contextos y se señalan algunos atisbos con respecto a la comprensión de los problemas de tipo multiplicativo. Tales estudios se presentan, iniciando por los más recientes hasta llegar a años atrás y al final del apartado, se exhiben los vacíos que dejan dichas investigaciones y los posibles aportes que pueden derivarse del presente estudio.

Se inicia este recorrido investigativo, con el estudio desarrollado por García y Gutiérrez (2016), *Análisis de estructuras aditivas en el diseño curricular de los libros de texto de los grados 1°, 2° y 3°, del modelo educativo rural Escuela Nueva, de la Fundación Volvamos a la Gente*, en el que, bajo la técnica análisis de contenido, se realizan reflexiones teniendo en cuenta las guías de aprendizaje. La investigación establece que, dentro de las acciones propuestas en las guías están ausentes aspectos como: la forma, el método y el proceso a través del cual el estudiante aborda los problemas matemáticos. Los autores aseguran que reconocerlos permite establecer otras acciones que posibilitan el desarrollo de la comprensión. Igualmente, manifiestan la poca existencia de insumos para el docente, insumos que apoyen el proceso de realimentación y al mismo tiempo fortalezcan el conocimiento didáctico de contenido.

Durante este mismo año, Peña y Olarte (2016) en la investigación: *Resolución de problemas de estructura multiplicativa desde las teorías de campos conceptuales y cantidades intensivas en ambientes de aprendizaje web*. En este trabajo, las autoras diseñaron ambientes de aprendizaje asistidos por la tecnología con el propósito de mejorar la capacidad para la resolución de problemas de la estructura multiplicativa, realizar interpretaciones literales de problemas matemáticos y reconocer situaciones en contextos que requieren de inferencia directa. Los resultados exponen que la capacidad para resolver problemas aumenta mediante el uso de un ambiente de aprendizaje cuyo diseño se fundamenta en la teoría de las cantidades intensivas con un ambiente de aprendizaje adaptado a la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1991).

En el año 2015, Buitrago y Chavarría también realizan contribuciones respecto al modelo Escuela Nueva. Estos autores plantean un *Análisis del pensamiento matemático, curricularmente desarrollado en los módulos de Matemáticas del grado quinto de Escuela Nueva*, estudian desde una perspectiva socio-epistemológica el pensamiento matemático que subyace en las guías del modelo, a través de la técnica de análisis de contenido. Este estudio enuncia como fortalezas, la coherencia con lo propuesto en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los pensamientos matemáticos expuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), el desarrollo del trabajo cooperativo y el repertorio de situaciones problema que permite al estudiante razonar de manera lógica, reflexionar, jugar, manipular distintos materiales y plantear preguntas.

A estas estrategias de indagación y comprensión de los problemas de tipo multiplicativo se suma el estudio propuesto por Berrio y Gómez (2015) *Multiaplicatic: una estrategia para el razonamiento de situaciones que involucran estructuras multiplicativas*, dicha investigación asume como objetivo fortalecer el razonamiento en situaciones que involucran el uso de las estructuras multiplicativas en los estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria, en una institución urbana en el municipio de Liborina, haciendo uso de ambientes virtuales de aprendizaje. Además, dicha investigación se acerca a la concepción que los docentes construyen en torno a las estructuras multiplicativas determinando que, los problemas que se proponen de manera frecuente en el aula son los de tipo factor multiplicante y adición repetida y, en menor relación, los de proporcionalidad y producto cartesiano. Lo anterior hace que la resolución de este tipo de problemas obtenga los resultados más bajos según el nivel de respuesta de los estudiantes.

El estudio concluye además, que la enseñanza de problemas de tipo multiplicativo como proporcionalidad directa e inversa, adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano, a través de la utilización de estrategias virtuales para el aprendizaje TIC´s[10], así como la articulación entre el conocimiento didáctico y disciplinar, además del uso de problemas en situaciones del contexto a través de la introducción de conceptos, invariantes operatorios y esquemas, y la del concepto de estructura multiplicativa, permitieron el mejoramiento de los procesos de razonamiento y su resolución, evidenciados en los procedimientos utilizados y en la participación activa de los estudiantes.

Seguido, en este rastreo, Rivera (2014) en su investigación, *Procesos de razonamiento y de comprensión con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa*, retoma los tipos de problemas multiplicativos propuestos por Vergnaud (1991) con el ánimo de describir niveles y dimensiones de comprensión expuestos en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), además, incluye la revisión de los procesos de razonamiento desde el nivel de argumentación descrito por Balacheff, determinando ciertas relaciones entre el razonamiento y la comprensión de los estudiantes del grado cuarto de la Educación Básica Primaria en un contexto semi-rural, todo, en relación con dichas estructuras.

Al finalizar, este estudio de casos, la autora propone que la experiencia acumulada y el razonamiento construido por el colectivo de estudiantes son dispositivos almacenados, por

[10] Tecnología de la Información y la Comunicación.

lo tanto, el docente debe generar preguntas a sus estudiantes, que los lleven a probar sus afirmaciones. Este estudio, además, pondera la importancia de la construcción social –interacciones entre docente-estudiante, estudiante-estudiante– en las explicaciones y argumentos de los problemas matemáticos de tipo multiplicativo para el desarrollo de evoluciones en el proceso de razonamiento y, por ende –en la mayoría de los casos– en la compresión, entendida desde las dimensiones y niveles de la EpC. Asimismo, Rivera (2014) plantea la necesidad de futuras investigaciones que profundicen en la descripción y comprensión de las implicaciones que tienen aquellas prácticas de aula centradas en la ejercitación, así como la influencia de las estrategias y métodos de enseñanza.

Por su parte, Huertas (2014) en su investigación, *Una interpretación semántica de la lectura y comprensión de los problemas de matemáticas en las pruebas externas nacionales en el grado quinto*, parte de un análisis de los referentes teóricos que orientan las pruebas desde el estudio de las características y estructura de los instrumentos aplicados previamente por el MEN. Este trabajo, diseña, implementa y analiza una prueba para estudiantes y docentes, con el propósito de identificar errores, obstáculos y dificultades, relacionados con el dominio de aspectos conceptuales y procedimentales, y con la estructura sintáctica y semántica de los enunciados propuestos. Se concluye que, en una prueba masiva y cerrada con un número limitado de ítems, es imposible evaluar las competencias básicas de los estudiantes, éstas solamente se pueden valorar a lo largo del proceso de enseñanza aprendizaje mediante estrategias distintas pruebas de papel y lápiz.

Otro trabajo desarrollado en el marco de la EpC, es la investigación llevada a cabo por González (2014), *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*, presentando como finalidad, interpretar y analizar el proceso de comprensión del concepto de área y perímetro y la independencia de sus medidas desde las dimensiones de la EpC; el método seleccionado es el estudio de casos con tres estudiantes de la zona rural. Los resultados de la investigación arrojaron unos descriptores de nivel, que definen los niveles de comprensión de los estudiantes participantes. Dichos descriptores fueron refinados en el transcurso del estudio. Las situaciones que se plantean en este trabajo están asociadas a la experimentación y manipulación de materiales de uso cotidiano, para la solución de situaciones problema relacionadas con el contexto.

Ocho años antes, Botero (2006), en su investigación, *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en estudiantes de segundo y tercero de educación Básica Primaria a partir del estudio de la variación*, desarrollada en el barrio Calasanz de Medellín, caracteriza las condiciones cognitivas, matemáticas y didácticas que favorecen la construcción o conceptualización de las estructuras multiplicativas. Para lograrlo, la autora determina cuatro niveles de conceptualización con el fin de clasificar los procedimientos empleados por los estudiantes, partiendo de dos problemas matemáticos tipo isomorfismo de medidas. Al finalizar, concluye que el razonamiento de los estudiantes evaluados es de tipo aditivo y que, además, quienes logran identificar la existencia de dos espacios de medida no logran correlacionar la variación entre ellos a partir de procesos multiplicativos, sino que, dicha correlación se hace a través de procedimientos gráficos que les permiten aplicar estrategias aditivas en su solución.

Por último, la investigación de Gallego, Ruiz, Salgado, Sucerquia y Uribe (2004), *La construcción de la estructura multiplicativa en los estudiantes*, en la que las autoras plantean una serie de estrategias pedagógicas dirigidas a facilitar el desarrollo de problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas y producto de medidas a través de la resolución de situaciones problema y la utilización de juegos didácticos diseñados con material reciclable. El contexto donde es llevada a cabo la investigación comprende niveles socioeconómicos bajos y medio altos de la ciudad de Medellín. Las autoras concluyen que los procesos del pensamiento multiplicativo pueden ser entendidos como el inicio de la construcción de una base conceptual propia de la proporcionalidad, como lograr que los estudiantes establezcan la relación de operador entre dos cantidades y comprender que la adición y la multiplicación son estructuras diferentes, aunque algunas multiplicaciones se resuelvan con sumas.

En conclusión, se puede decir que el rastreo investigativo presentado permite entender, en primer lugar, las dinámicas que subyacen al modelo Escuela Nueva en cuanto al proceso de resolución de problemas propuesto en algunos referentes de calidad nacionales y señalan cómo se encuentran inmersos en los procesos curriculares de esta propuesta. En segundo lugar, da cuenta de algunos de los contextos donde han sido estudiados los problemas de tipo multiplicativo, el papel de los medios tecnológicos y la utilización de material concreto inscritos en el proceso de resolución. En tercer lugar, este rastreo evidencia la escasez de investigaciones que retoman el estudio de la compresión de los estudiantes con relación a los problemas de la estructura multiplicativa en el modelo Escuela Nueva –Fundación Volvamos a la Gente, también empieza a develarse el marco de Enseñanza para la Comprensión, como el referente teórico que guía las investigaciones de este tipo.

1.4.3. Antecedentes legales.

A continuación, se presenta un recorrido por los Referentes de Calidad Nacionales: *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998), *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), *Matrices de Referencia de Matemáticas* (ICFES, 2017), *Mallas de Aprendizaje Matemáticas* (MEN, 2017) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas* (MEN, 2017), exponiendo el sentido que adquieren los problemas de tipo multiplicativo y la comprensión de éstos en tales documentos.

En primer lugar, desde la perspectiva que proponen los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998), los problemas de tipo multiplicativo se inscriben, de manera especial, en el pensamiento numérico[11] y en el proceso de resolución de problemas. También señala que, para la construcción del significado de las operaciones, entre ellas las propias de la estructura multiplicativa, es necesario: reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, los modelos más usuales y prácticos de las mismas, comprender las propiedades matemáticas, el efecto de cada una y las relaciones entre las operaciones (MEN, 1998).

En este sentido, el MEN (1998) define que los problemas de tipo multiplicativo son los que se resuelven a través de una multiplicación o una división y presentan una estructura más compleja en relación con los problemas de la estructura aditiva. En dicho documento, se proponen los siguientes tipos de problema de la estructura multiplicativa: factor multiplicante, adición repetida, razón y producto cartesiano; sin embargo, tal clasificación presentada en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998) suministran ejemplos de cada tipo de problema sin presentar las correspondientes definiciones.

[11] Sin embargo, algunos de estos problemas se relacionan de manera especial con los demás pensamientos: métrico, espacial, aleatorio y variacional.

Continuando en la línea de los documentos que componen la política pública, más adelante, en los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (2006), se incluye el concepto de competencia, el cual se asocia con el de desempeño de comprensión expuesto en el marco de la EpC. Allí, se define la competencia como: actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma (MEN, 2006). Igualmente, se hace referencia a las dimensiones de la comprensión, incluyendo además de la enseñanza de contenidos, aspectos relacionados con los métodos y técnicas, las formas de expresar y comunicar lo comprendido y con la práctica de lo aprendido en diferentes contextos (MEN, 2006).

En cuanto a la resolución de problemas, en los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), se considera un proceso general o el "principal eje organizador del currículo de Matemáticas" (MEN, 2006, p. 52). Este documento, además de retomar lo expuesto en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998), sugiere tener en cuenta el diseño de problemas matemáticos abiertos, con múltiples respuestas, así como exceso o falta de información que promueva una actitud perseverante y la generación de estrategias para su solución.

Años más tarde, en un intento por acercar a los docentes y a los padres de familia en la implementación y aplicación de los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), el Ministerio de Educación Nacional expide en el 2017, los *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*[12] (DBA), presentados como un documento que busca determinar para cada grado específico, aprendizajes acompañados de enunciados y evidencias de aprendizaje. En el mismo año, el ICFES (2017) pública el documento *Matriz de Referencia de Matemáticas*, un instrumento que permite conocer las competencias y componentes del área relacionándolos con aprendizajes y evidencias de aprendizaje que define el ICFES para el desarrollo de las pruebas externas.

En esta misma línea, aparecen *Las Mallas de Aprendizaje Matemáticas* (MEN, 2017) donde se determina la progresión de los DBA y las evidencias de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes en cada grado teniendo en cuenta los pensamientos y los procesos

---

[12] Ver tabla 5

matemáticos. Este instrumento, además de ofrecer orientaciones didácticas para la enseñanza del área, también concibe la formulación y resolución de problemas como un proceso general que incluye los demás procesos matemáticos: comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos y razonamiento definidos en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998).

En síntesis, estos documentos se convierten en un insumo que incide en la orientación de los procesos de enseñanza para comprender y resolver problemas de tipo multiplicativo en los diferentes contextos en los que se concibe la educación colombiana: urbanos y rurales, este último donde se desarrolla la investigación. Teniendo en cuenta la relevancia de los referentes nacionales de calidad expedidos por el MEN, se presentan en la Tabla 1, una síntesis de los enunciados que tienen relación con la estructura multiplicativa en el grupo de grados de 4° y 5° de la Educación Básica Primaria.

Tabla 5. *Síntesis y articulación de los Referentes Curriculares para los grados 4° y 5° de Básica Primaria.*

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	**Matriz de referencia del ICFES**	**Derechos Básicos de Aprendizaje**
Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medida.	Resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.	
Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas (pensamiento métrico y sistemas de medidas).	Resolver y formular problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios, de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.	Interpreta y utiliza los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación.
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones (pensamiento y sistemas numéricos).	Resolver situaciones multiplicativas de adición repetida, factor multiplicante y razón.	Interpreta la relación parte - todo y la representa por medio de fracciones, razones o cocientes. Interpreta y utiliza números naturales y

Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	Interpretar y utilizar condiciones suficientes para solucionar un problema multiplicativo.	racionales (fraccionarios) asociados con un contexto para solucionar problemas.
	Resolver situaciones multiplicativas que tienen más de una solución.	Determina las operaciones suficientes y necesarias para solucionar diferentes tipos de problemas.

Después de hacer una revisión a los referentes de calidad nacionales, es posible evidenciar la relevancia que tienen los problemas y su enseñanza en la Educación Básica Primaria, ya que están inmersos de manera explícita en cada uno de ellos. En este sentido, una investigación orientada a la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva (FVG), puede aportar elementos que permitan conocer sus potencialidades con respecto a su abordaje en contextos rurales.

Estas apreciaciones, acompañadas de las realizadas durante el desarrollo del capítulo I, dan cuenta de la relevancia de esta investigación, no solo en el campo de la enseñanza de las Matemáticas, sino también en el contexto de la Educación Rural, entendiendo la amplitud de ambos campos del conocimiento y reconociendo los aportes que una investigación profunda, disciplinada y particular puede realizar. Asimismo, los antecedentes anteriormente presentados, señalan la vacancia de objeto de estudio de esta investigación en el campo educativo, constituyendo esta investigación en un aporte novedoso y necesario dentro del contexto en el cual se desarrolla.

2. Marco Teórico

2.1. En la línea de la comprensión

La pregunta que guía el presente marco teórico es ¿Cómo se articulan el marco de Enseñanza para la Comprensión (EpC), el modelo Escuela Nueva –Fundación Volvamos a la Gente– y los tipos de problemas multiplicativos propuestos por Vergnaud (1991)?

La respuesta a esta pregunta convoca múltiples formas que intentan ser abordadas a lo largo del presente capítulo. La primera de ellas tiene su origen en el constructivismo:

2.1.1. El constructivismo como punto de encuentro.

En general el constructivismo, coincide en afirmar que “el conocimiento es un proceso de construcción genuina del sujeto y no un despliegue de conocimientos innatos ni una copia de conocimientos existentes en el mundo externo” (Serrano y Pons, 2011, p. 2), idea que es reforzada en el marco de la Enseñanza para la Comprensión donde se asegura que la comprensión “no se reduce al conocimiento […] y todos los estudiantes deben construir su propia comprensión” (Perkins, 1999, p. 70), asegura, además, que va más allá de la automatización, de la acumulación de información y del desempeño rutinario, siendo entonces algo personal, flexible y dinámico. En esta misma línea de sentido, Vergnaud (1991) plantea que “es necesario que los conocimientos que adquiere el niño sean construidos por él mismo” (p. 9). En síntesis, los autores concuerdan en concebir el conocimiento como un proceso personal en constante construcción.

Para simplificar un poco más tales acercamientos al constructivismo, es necesario aclarar que en este texto se desarrolla de manera específica el constructivismo de tipo cognitivo (Serrano y Pons, 2011)[13] –debido a las demandas que guarda consigo la presente investigación– éste, se basa en la psicología y la epistemología genética de Piaget, grupo en el que se inscriben los aportes de Vergnaud (1991) y del marco de la EpC. En primera

[13] El autor enumera otros tipos de constructivismo como el socio-cultural asociado a los postulados de Vygostsky y otro constructivismo interaccionista cercano a Berger y Luckmann (2001).

instancia, Vergnaud (1991) defiende la necesidad de las psicopedagogías específicas para tratar los métodos de enseñanza de cada disciplina, en este caso, de las Matemáticas. Este tipo de constructivismo acentúa la construcción del aprendizaje en las estructuras generales del conocimiento y en categorías universales, entre ellas modelos asociativos o conexionistas como los utilizados por Vergnaud (1991). Quien, al hablar de los esquemas como una forma de organización articulada a los elementos cognitivos que el estudiante utiliza para una clase dada de situaciones (Barrantes, 2006) da cuenta de este tipo de modelos.

Otro ejemplo podría ser, la Teoría de los campos conceptuales en sí misma, al ordenar las matemáticas en un conjunto de relaciones, nociones y sistemas que se apoyan los unos en los otros (Vergnaud, 1991). Sin embargo, este aspecto no es desarrollado dentro de la presente investigación debido a la realidad del contexto en el cual se enmarca–una sede rural multigrado donde habitualmente se implementa el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente–. Es así como, concebir un modelo que responda a la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1991) se aleja de la realidad particular en la que se desarrolla el estudio de caso (Stake, 1999).

Es necesario, recordar entonces, que en el presente apartado: constructivismo como punto de encuentro, intenta exponer puntos de convergencia respecto al origen y las concepciones de los autores que dentro de la investigación se retoman, aclarando que, los aportes de Vergnaud (1991) sólo son tenidos en cuenta para la clasificación de los problemas de la estructura multiplicativa, pero se enuncia la Teoría de los campos conceptuales para ilustrar, en qué consiste el constructivismo cognitivo.

En este orden de ideas, complementario al tipo de constructivismo cognitivo que se viene ilustrando, se afirma que “el elemento social ocupa un papel coadyuvante a la mejora en la adquisición de los conocimientos” (Serrano y Pons, 2011, p. 3), es decir, el conocimiento y la realidad son construidas de modo personal, puesto que existen condiciones sociales y culturales que intervienen en dichos procesos (Ortiz, 2015). De esta manera, el marco de la Enseñanza para la Comprensión sostiene que “las personas con diferente experiencia y desarrollo despliegan más o menos capacidad de reflexión” (Perkins, 1999, p. 75), entendiendo el desarrollo como algo fisiológico e individual y la experiencia como producto de las interacciones que se dan entre el sujeto, los objetos, el contexto y los otros.

Hasta aquí, se establece una relación de origen entre la Teoría de los Campos Conceptuales propuesta por Vergnaud (1991) y el marco de la Enseñanza para la Comprensión (Stone, 1999), exponiendo que ambos se inscriben en el constructivismo de corte cognitivo cuyos orígenes se encuentran a su vez, en la teoría psicogenética de Piaget. Por su parte, el modelo Escuela Nueva en Colombia se enmarca en el escenario de las pedagogías activas propuestas por John Dewey –mucho antes del auge de las teorías y pedagogías constructivistas– (Ramos, 2002), esta es acogida debido a su preocupación por los métodos científicos y por la educación en la democracia, la investigación y la actividad pedagógica materializada en el método de proyectos. Estas características, al igual que las teorías constructivistas cognitivas "tienen una repercusión en la práctica en el cambio de los métodos pasivos y memorísticos por otros medios activos que incrementan la participación de los estudiantes, la consulta bibliográfica y los laboratorios" (Ramos, 2002, p. 150), propuestas similares a las expuestas en el marco de la EpC (Perrone, 1999).

Estas similitudes son establecidas a partir, del rastreo teórico de ambos constructos "nuestro enfoque de la Enseñanza para la Comprensión, […] se remite de manera más central al trabajo de John Dewey, en especial a la amplia visión de la escolaridad democrática" (Perrone, 1999, p. 43) donde se pretende integrar el contenido escolar con las actividades de la vida cotidiana, es decir, del contexto particular y de otros contextos. Es así, como John Dewey además de inspirar la Escuela Activa, la Escuela Nueva, el aprendizaje por la acción, la escuela como centro social, los centros de interés y los métodos por proyectos (Calvache, 2003) también ha influenciado con fuerza el marco de la Enseñanza para la Comprensión (Perrone, 1999).

Sumadas a las convergencias expuestas en el párrafo anterior, ambos: Escuela Nueva y Enseñanza para la Comprensión dan protagonismo a la acción, en el primero el estudiante es sujeto activo y actor de su propio aprendizaje (Calvache, 2003) y en el segundo, el estudiante es constructor de su comprensión evidenciada en la capacidad de pensar y actuar, desempeñarse flexiblemente en una situación determinada (Perkins, 1999). Igualmente, en acuerdo con lo que propone Vergnaud (1991) y el marco de la Enseñanza para la

Comprensión (Stone, 1999), la Escuela Nueva plantea que “el niño tiene todas las condiciones necesarias para auto estructurarse y jalonar su propio desarrollo […] asimismo resaltará el papel de la socialización y de *la educación para* y *por la vida*” (Zubiría, 2001). Al mismo tiempo, Escuela Nueva presenta una historia más “añeja” que la Teoría de los Campos Conceptuales propuesta por Vergnaud (1991) y el marco de la Enseñanza para la Comprensión (Stone, 1999), sin embargo, estas dos teorías recientes guardan o incuban principios fundamentales de la Escuela Nueva como por ejemplo, convertir al estudiante –niño-joven– en sujeto y no objeto de la práctica educativa.

En síntesis, aunque los autores citados se ocupan de aspectos particulares como, la compresión, la defensa de la acción como condición y garantía del aprendizaje y, los campos conceptuales; los tres presentan como punto de confluencia algunos principios de las teorías constructivistas cognitivas colocando al estudiante como centro del aprendizaje, un estudiante capaz de organizar el conocimiento en estructuras de acuerdo con su nivel de desarrollo y a su experiencia en y con el mundo y los otros, demostrando lo que ha comprendido y aprendido a través de la experiencia o de colocación de “teoremas en acto” (Barrantes, 2006, p. 2).

2.2. El marco de la Enseñanza para la Compresión

Teniendo en cuenta los puntos de encuentro expresados en el apartado inmediatamente anterior, puede afirmarse, en términos de Zubiría (2001) que el constructivismo cognitivo le reconoce a la Escuela Nueva elementos importantes de tipo valorativo inscritos en la evaluación diagnóstico formativa propuesta en el marco de la Enseñanza para la Comprensión (Stone, 1999) y en la reivindicación del papel activo del estudiante en la construcción del conocimiento. De igual manera, el marco de la EpC en la presente investigación, permite identificar las relaciones que establecen los estudiantes en el campo de la resolución de problemas multiplicativos tipo isomorfismo de medidas y producto de medidas establecidos por Vergnaud (1991). Desde esta perspectiva, el marco de la Enseñanza para la Comprensión se asume como integrador de ambas apuestas.

En la línea de lo que se viene exponiendo, en este tramo del texto se abordan los aspectos generales del marco de la EpC y al mismo tiempo se van tejiendo relaciones asociadas a la propuesta y a las demás categorías que se hacen presentes en esta investigación –modelo de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente y tipos de problema de la estructura multiplicativa: isomorfismo de medidas y producto de medidas según Vergnaud (1991). En primer lugar, se presentan aspectos generales del marco de la EpC, seguido de las características de implementación en el aula y finalmente, se exhiben las dimensiones y niveles de la comprensión.

2.2.1. Aspectos generales del marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Inicialmente es necesario recordar que este marco conceptual nace en la Universidad de Harvard, a partir de un proyecto de investigación inscrito en la escuela de Educación –proyecto Cero–. Sus autores son 13 maestros que ejercen en diversas áreas y niveles de escolaridad, entre los que se destacan Howard Gardner, famoso por su teoría de las inteligencias múltiples -1980-; David Perkins, autor de más de 130 artículos y varios libros asociados especialmente a la comprensión; Lois Hetland coordinadora del proyecto Cero y asesora nacional e internacional sobre Enseñanza para la Compresión e inteligencias múltiples; asimismo, los demás autores se destacan por la participación en el proyecto Cero, su afiliación como investigadores en la universidad de Harvard y su vinculación a distintos grupos y comunidades académicas.

Estos intelectuales, denominan el marco de la Enseñanza para la compresión como constructivista "desafiando la idea de que el aprendizaje sea información concentrada, replanteando el rol del docente, […] y poniendo como eje central los esfuerzos del estudiante por construir la comprensión" (Perkins, 1999, p. 89). Para ello, retoman algunos aportes de autores como Froebel, Herbart, Pestalozzi y de manera especial Dewey quien también ha influenciado significativamente el modelo de Escuela Nueva.

Para ampliar un poco más lo concerniente a dichos aportes, los autores expresan que de Froebel se retoma la relación que debe existir entre las experiencias educativas. En esta misma línea, los aportes de Herbart apuntan a integrar los nuevos aprendizajes con otros anteriores y la conexión que éstos deben tener con los intereses de los estudiantes; Pestalozzi, además de incluir lo que propone Herbart, agrega la importancia del uso pedagógico de los materiales y su relación con las experiencias. Por su parte Dewey, como se ha expresado ampliamente

en el apartado 2.1.1., además de dar un papel destacado al estudiante como participante activo en la construcción del aprendizaje, demanda la importancia de integrar el contenido escolar con las actividades cotidianas (Perrone, 1999). Todas estas recopilaciones aunadas a las producciones académicas de los autores dan origen y sustento a lo que se ha denominado el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Aquí vale la pena destacar que el marco de la EpC, desde esta perspectiva, retoma principios asumidos por la Escuela Nueva, recordando su origen en los aportes de Dewey (Ramos, 2002; Colbert y Vásquez, 2015), por lo tanto, a nivel filosófico el marco de la Enseñanza para la Comprensión incrusta como parte de sí la esencia de la Escuela Nueva acompañada de otros presupuestos que la complementan. Además de ubicar al estudiante como centro del proceso de aprendizaje, ambas configuraciones teóricas proponen articular el contenido escolar con las actividades de la vida cotidiana, papel que, en Matemáticas comúnmente se le ha asignado a la resolución de problemas. Sin embargo, para Vergnaud (1990) la mayor parte de los problemas que se plantean en la escuela están asociados a la actividad de comprar y esta, a su vez, corresponde tan solo a un pequeño número de casos.

Bajo las consignas enumeradas, el marco de la EpC, intenta dar respuesta a cuestiones relacionadas con el cómo enseñar y el cómo lograr que los estudiantes se interesen, comprendan y usen lo que la escuela pretende abordar en el aula de clase. Privilegiando, el estudio de la comprensión no solo como punto de llegada, sino como proceso. En consecuencia, en el marco conceptual de la EPC se define la comprensión como:

> La habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" con énfasis en la flexibilidad. De acuerdo con esto, aprender para la comprensión es como aprender un desempeño flexible (Perkins, 1999, pág. 70).

La comprensión en términos de Vergnaud (1990) puede ser entendida como un conjunto de invariantes utilizables en la acción, aclarando que la acción operatoria no lo es todo en el proceso de conceptualización de lo real. En otras palabras, se trata de colocar en acción un tejido de conceptos, un sistema de contenidos más allá de lo automático. Por su parte, algunos autores aseguran sobre el modelo Escuela Nueva que, la mera implementación de las guías de aprendizaje no garantiza el proceso de comprensión y sugieren que "deben complementarse con los demás materiales pues la comprensión de sus contenidos requiere que sean continuamente llevados a la práctica, lo que sólo es posible mediante los rincones de trabajo y la utilización de la biblioteca escolar" (Gómez, 1996, p. 286). En suma, para los autores la comprensión y la acción van de la mano, no obstante, teniendo en cuenta lo mencionado a lo largo del presente capítulo el marco de la EpC va más allá, también involucra pensar, pensar un paso más adelante de lo que el estudiante considera saber.

Para lograrlo, el marco de la Enseñanza para la Comprensión expone una serie de elementos, metas de comprensión, desempeños, dimensiones y niveles de comprensión que configuran toda una metodología de enseñanza. En el presente trabajo, éstos son sustituidos por los momentos propuestos en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, puesto que, como se expone en lo que sigue, ambas apuestas de implementación en el aula guardan cierta articulación tal y como ocurre con sus fundamentos. De este modo, el aporte del marco de Enseñanza para Comprensión permea las actividades de adaptación a las guías de aprendizaje y, además, se constituye en la columna vertebral del análisis que presenta esta investigación.

2.2.2. La Enseñanza para la comprensión en el aula.

Como ya se ha expuesto, el marco de la Enseñanza para la Comprensión incluye una serie de elementos, sintetizados en cuatro partes: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua (Stone, 1999). A continuación, se articulan estos elementos con lo propuesto en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente.

2.2.2.1. Tópicos generativos vs guías.

Los tópicos generativos son una respuesta a la pregunta "¿qué tópicos vale la pena comprender?" (Stone, 1999, p. 95) lo anterior, determina una serie de temas generativos alrededor de los cuales son organizadas las propuestas curriculares. Igualmente, el marco plantea la necesidad de proponer tópicos que no solo ofrezcan información, sino que además promuevan distintas conexiones entre diversos aprendizajes. Lo mismo ocurre para Escuela Nueva, donde a modo de tópicos se proponen una serie de *guías* que integran diversos contenidos y/o temas organizados de acuerdo a un conjunto de conceptos que guardan entre sí cierta asociación. En términos de Vergnaud (1991) es una estructura que recoge conceptos y teoremas que permiten analizar diversas situaciones.

Pero además de estas características, el marco de la Enseñanza para la Comprensión sugiere que estos tópicos han de regularse de acuerdo a las necesidades de los estudiantes, agregando "una preocupación por cierto grado de estandarización, equidad y legitimidad" (Stone, 1999, p. 97-98), aspecto que es previsto en Escuela Nueva pues "cada guía desarrolla los Estándares Básicos de Competencias establecidos por el Ministerio de Educación" (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 285). De otra parte, los tópicos generativos son considerados centrales para un dominio o disciplina en particular –atribuidos a los Estándares Curriculares–, accesible e interesante para los estudiantes y de fácil conexión con otros tópicos, desde esta perspectiva el campo conceptual de las estructuras multiplicativas Vergnaud (1991) podría ser considerado un tópico generativo.

Definidos de esta manera, los tópicos generativos "tienen la cualidad de no tener fondo" (Stone, 1999, p. 100) y permiten la generación de nuevas preguntas, preguntas más profundas que llevan a comprensión de nuevos tópicos. Por otro lado, la distancia que se teje entre los tópicos generativos propuestos por la EpC y las guías de auto aprendizaje adoptadas por el modelo Escuela Nueva tiene que ver con el nivel de injerencia que tiene el docente en su determinación, selección y planeación pues en este último, las guías –asumidas como par de los tópicos generativos en el marco de la EpC– son establecidas por la Fundación Volvamos a la Gente.

2.2.2.2. Metas de comprensión vs objetivo de aprendizaje.

Después de los tópicos generativos, aparecen en el marco de la EpC las metas de comprensión que "afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender" (Stone, 1999, p. 101) definiendo de manera evidente las ideas, procesos, relaciones y/o cuestiones que los estudiantes deben establecer. En síntesis, las metas de comprensión les dicen a los estudiantes "qué hacer, qué aprender, qué lograr […] a centrarse en lo que es importante" (Unger, Gray, Jaramillo, y Dempsey, 1999, p. 345), actúan como un mapa de navegación que les permite controlar lo que aprenden y recordar las ideas centrales. Es así como los objetivos específicos de aprendizaje que se incluyen en las guías elaboradas por la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente presentan las destrezas, actitudes o habilidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes a lo largo de su implementación (Colbert y Vásquez, 2015).

Sumado a esto, las metas de comprensión han de ser definidas en un marco de relaciones alrededor del tópico seleccionado, es un sistema de metas particulares que apuntan a un tópico general. Ya Vergnaud (1991) había expuesto la necesidad de establecer relaciones durante el aprendizaje de las Matemáticas, "el conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas" (Vergnaud, 1991, p. 15) que integran conceptos y teoremas. La definición de las metas de comprensión, apalancan esos procesos de relación y generación de estructuras en los estudiantes alrededor de los conceptos. En el caso de Escuela Nueva tales metas podrían asemejarse a los logros u objetivos específicos expuestos al inicio de cada una de las guías.

Las metas de comprensión también son usadas para centrar las prácticas de aula, determinar qué es importante comprender dentro de este tópico, además de nutrir y fortalecer los procesos de evaluación (Stone, 1999). En este sentido, el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión es claro en señalar la necesidad de exhibir las metas de compresión públicamente, involucrando a los distintos actores de la comunidad educativa: estudiantes, padres de familia, administrativos y demás personas que apoyen los procesos educativos (Stone, 1999). Esta apreciación también es implementada en el modelo Escuela Nueva pues se asegura que los estudiantes "al iniciar cada guía, deberán tener claro cuál es el logro de aprendizaje que deben alcanzar" (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2007, p. 8), de este modo, los textos cuentan con la posibilidad de conocer cuál es el comportamiento y compromiso esperado durante el desarrollo de las actividades educativas propuestas en las guías (Gómez, 1996).

Al igual que sucede con los tópicos generativos, el marco de la Enseñanza para la Comprensión presenta algunas diferencias respecto a las metas de comprensión y los logros u objetivos específicos que plantean los textos de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, esta distancia radica en la participación que tiene el docente durante la determinación de las mismos, ya que tales indicadores vienen previamente establecidos. La Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (2015) muestra conciencia de ello cuando expone:

> Aun cuando las guías de aprendizaje se han programado teniendo en cuenta las características generales de diversas regiones, los diferentes rasgos psicológicos de los niños, las necesidades de las comunidades rurales y urbanas y las expectativas de los padres, de todas maneras es necesario adaptarlas en cuanto a los términos, las actividades y los materiales que en ellas se proponen (p. 291).

Sin embargo, teniendo en cuenta que el modelo está diseñado bajo la modalidad: aula multigrado –un solo docente para varios grados, donde pueden llegar a ser seis grados al mismo tiempo– y que, éste debe orientar todas las áreas del conocimiento, asumiendo, además, que su formación es en un área específica, la definición de los logros por guía –entendido como par de las metas de comprensión en esta investigación dentro del modelo Escuela Nueva– se configuran en un apoyo para la labor docente, especialmente si ocurre tal y como lo plantea el marco de la EpC "muchos docentes enfrentan dificultades para definir metas de comprensión para sus estudiantes porque tienen una concepción vaga o limitada de la materia que se supone que enseñan" (Stone, 1999, p. 103).

2.2.2.3. Desempeños de comprensión vs Actividades.

Sumado a los tópicos generativos y a las metas de comprensión, aparecen en el marco de la EpC los desempeños de comprensión, éstos juegan un papel determinante, debido a que permiten centrar la atención en el hacer de los estudiantes. Desde esta mirada, "la visión vinculada con el desempeño subraya la comprensión como la capacidad e inclinación a usar lo que uno sabe cuándo actúa en el mundo" (Stone, 1999, p. 109). Al asociar la comprensión con la práctica, el hacer, el uso y la acción inscritas en “situaciones de aprendizaje” (Stone, 1999) aparecen, en términos de Escuela Nueva “tres secciones del aprendizaje” (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 285).

Tales secciones del aprendizaje están conformadas por: Actividades Básicas, Actividades de Prácticas y Actividades de Aplicación, propuestas bajo consignas similares a las que incuba el marco de la EpC para el diseño de los desempeños de comprensión. Una de ellas tiene que ver con centrar la atención en lo que hacen los estudiantes, dentro del modelo Escuela Nueva “las guías centran el proceso de aprendizaje en el estudiante […] le brinda oportunidades para la práctica y aplicación de experiencias personales de aprendizaje” (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 275). En sintonía con lo que se viene planteando, Vergnaud (1991) asegura que “las relaciones son a veces simples comprobaciones que se pueden hacer sobre la realidad” (p. 23). De este modo, los autores ponen de manifiesto la necesidad del hacer inscrito en los procesos de aprendizaje que apuntan a la comprensión.

Otra de las características que retoman las secciones del aprendizaje en el modelo Escuela Nueva[14] (EN), articuladas al marco conceptual de la Enseñanza para la Compresión es que las acciones propuestas van más allá de la información suministrada e invitan al estudiante a extender, sintetizar, aplicar o usar de otra manera lo que sabe (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015; Stone, 1999). Asimismo, los desempeños son presentados al igual que en las guías de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente en tres categorías progresivas, a continuación, se presenta una tabla comparativa entre dichas categorías (EpC) y secciones del aprendizaje (EN):

Tabla 6. *Comparativo categorías progresivas (EpC) y secciones del aprendizaje (N)*

Categorías progresivas en Enseñanza para la Comprensión	**Secciones del aprendizaje en Escuela Nueva**
Etapa de exploración. - Explorar los elementos. - Traen a los alumnos a un dominio de un tópico generativo.	***Actividades Básicas*.** - Generar interés. - Promueven el logro de nuevos aprendizajes.

[14] Fundación Volvamos a la Gente.

- Permite establecer conexiones entre intereses y experiencias previas y el tópico generativo. - Suministran información acerca de lo que los alumnos ya saben.	- Socializan conocimientos y experiencias previas. - Afianzan conocimientos adquiridos, actitudes y valores. - Parten de situaciones reales, sencillas.
Investigación guiada	***Actividades de Práctica***
- Utilización de ideas o modalidades de investigación para el alcance de las metas. - Los desempeños pueden ser progresivos. - Aplicación de conceptos y métodos disciplinarios. - Integrar el conocimiento al cuerpo creciente de conocimientos.	- Desarrollo de habilidades y destrezas. - Es secuencial. - Integran la teoría y la práctica. - Consolidación del aprendizaje a través de la práctica y la ejercitación. - Actuar de acuerdo al nuevo conocimiento.
Proyecto final de síntesis	***Actividades de Aplicación***
- Similar a proyectos, exposiciones, tareas finales. - Demuestran el dominio. - Invitan a alumno a trabajar de modo más independiente. - Sintetizar las comprensiones.	- Permiten comprobar que el estudiante ha aprendido. - Aplicación del aprendizaje en la vida diaria. - Invitan a profundizar el conocimiento recurriendo a otras fuentes.

Esta tabla comparativa, permite identificar ciertas relaciones entre el marco de la Enseñanza para la Comprensión y Escuela Nueva (FVG) en términos de su implementación en el aula, estas similitudes no son motivo de sorpresa, teniendo en cuenta que Dewey es considerado un referente conceptual común a ambos en su concepción. Su génesis apunta hacia el aprendizaje activo (Perrone, 1999; Ramos, 2002). Una muestra de ello, es que los textos de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, acuden de manera textual al término “desempeños” en reiteradas ocasiones, como ejemplo se exhibe en la siguiente cita: “las guías que conforman cada unidad están estrechamente relacionadas y promueven el alcance de uno o más desempeños” (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 285).

Para finalizar este apartado, se trae a colación lo expresado por Stone (1999) cuando habla de los desempeños de comprensión “el marco conceptual puede ser aplicado fácilmente a clases y actividades de aula relativamente tradicionales, en la media en que estén diseñadas para involucrar a los alumnos en la puesta en práctica de lo que han aprendido” (p. 113). Es así como, esta investigación plantea que el modelo de Escuela

Nueva y sus guías de aprendizaje responden a las demandas expuestas en el modelo de la Enseñanza para la Comprensión –al menos en su diseño– puesto que se vinculan con logros/metas de comprensión establecidos al inicio de las guías, desarrollan y aplican la comprensión a través de la práctica –una práctica en contexto–, están diseñadas apuntando a múltiples estilos de aprendizaje y formas de expresión, representan un desafío y promueven la reflexión.

2.2.2.4. Evaluación diagnóstica continua vs Evaluación en Escuela Nueva.

La evaluación en el marco de la Enseñanza para la Comprensión, tal y como su nombre lo indica, se da de manera continua, es por ello que aparece desde el planteamiento de las metas de comprensión “la necesidad de metas claras también se volvió evidente cuando los docentes intentaron valorar los desempeños de los estudiantes. Definir criterios de evaluación dependía de la articulación de las metas de comprensión” (Stone, 1999, p. 102). En esta dirección, la evaluación se asume como un asunto que atraviesa todo el proceso de planeación, al respecto Escuela Nueva asegura que la evaluación se concibe como “diagnóstica, de procesos, de productos y resultados y de impacto social” (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 313). En suma, ambos autores plantean la evaluación como un proceso sistemático y permanente que se da desde el inicio hasta el final del proceso educativo.

De modo similar, ambas perspectivas asignan al estudiante un papel activo dentro de la evaluación. Por su parte Escuela Nueva (FVG) espera que el estudiante sea capaz de valorar el alcance y obtención de los logros propuestos, es una especie de “toma de conciencia” acerca de sus aciertos y sus dificultades, algo similar propone el marco de la EpC “si la enseñanza es efectiva, la valoración del propio desempeño se vuelve casi automática” (Stone, 1999, p. 115). Las valoraciones y seguimientos, que en este párrafo se proponen corresponden o tienen que ver también con el acceso que tienen los estudiantes a los instrumentos de seguimiento de dichos logros y procesos, en Escuela Nueva (FVG) estas herramientas se relacionan con el autocontrol de progreso, los diálogos dentro del equipo de trabajo, las exposiciones y las respuestas que los estudiantes emiten acerca de cuestionamientos propuestos en la guía de aprendizaje y por el docente.

Con relación a lo que se viene exponiendo, en la evaluación diagnóstica continua los estudiantes y los docentes son responsables de analizar el avance de los desempeños de alto nivel mediante un proceso de realimentación; en esta etapa de la teoría, no se mide la cantidad de conocimiento, sino la aplicación del mismo en diferentes contextos, es decir, un proceso flexible de comprensión (Stone, 1999). Al respecto, Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente en el área de Matemáticas presenta: problemas matemáticos, diálogos entre estudiantes, situaciones de manipulación del material concreto, comparaciones, Actividades de Aplicación dentro y fuera del aula de clase, con o sin el acompañamiento del maestro y en algunas ocasiones demanda el apoyo del padre de familia (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2007). En resumen, existen varias formas de representar una misma relación (Vergnaud, 1991).

Al igual que sucede con los demás elementos del marco conceptual de la Enseñanza para la Compresión, la evaluación diagnóstica continua se convierte en punto de encuentro, debido a que en ambos es considerada permanente, relevante, pública, participativa, que hace uso de diversas fuentes y herramientas de control y seguimiento, es reflexiva y flexible (Stone, 1999; Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015).

Para dar fin a este apartado, sobre los elementos de la Enseñanza para la Comprensión y su relación con el modelo Escuela Nueva (FVG). Se ratifica que, en esta investigación el marco de la EpC es asumido como una propuesta que permite vincular las dimensiones y los niveles de la comprensión a través de la definición de diversos desempeños (Stone, 1999) alrededor de la solución de problemas de tipo multiplicativo. Lo anterior, sin alejarse, en esencia, de las dinámicas propias del modelo, que como se ha venido señalando, se articula a nivel teórico con el marco de la Enseñanza para la Comprensión no sólo en sus fundamentos constructivistas sino también en sus elementos y características de implementación en el aula.

Asimismo, se hace necesario recordar que, durante el desarrollo de este capítulo teórico los aportes de Vergnaud, aparecen como pinceladas, dado que, sus principales contribuciones al presente trabajo son adoptadas en la clasificación de los problemas multiplicativos, tal y como se desarrolla en el numeral 2.3. Dimensiones y niveles de la comprensión.

2.3 Dimensiones y niveles de la comprensión.

Como ya se ha manifestado anteriormente, los aportes del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión en este trabajo se centran en definir la comprensión desde diversas dimensiones y niveles. Inicialmente, se señala que las dimensiones de la comprensión surgen a partir del proceso de seguimiento y evaluación diagnóstica continua de las diferentes áreas del conocimiento (Boix y Gardner, 1999), de ahí que tengan la capacidad de adaptarse a las distintas áreas del conocimiento, entre ellas, las Matemáticas y que a su vez se constituyan en un insumo para evaluar de manera reflexiva el trabajo de los estudiantes y orientar el desarrollo de los aprendizajes de modo compresivo.

> La calidad de la comprensión de los alumnos se basa en su capacidad para dominar y usar cuerpos del conocimiento que son valorados por su cultura. […] los alumnos deberían ser capaces de comprender la naturaleza humanamente construida de este conocimiento y remitirse a él para resolver problemas, crear productos, tomar decisiones y, finalmente, transformar el mundo que los rodea (Boix y Gardner, 1999, p. 217).

De esta manera, comprender también es comprometerse con el contexto, las guías de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente presentan una marcada inclinación hacia este fundamento “se busca que los conocimientos propuestos en el objetivo sean ampliados y aplicados al contexto específico del alumno” (Gómez, 1996, p. 287), en general el modelo plantea el ideal y la necesidad de crear lazos fuertes entre la escuela y la comunidad, por esta razón dedica un espacio de su agenda curricular al desarrollo de Actividades de Aplicación que involucren miembros, lugares, saberes de la comunidad. En esta misma línea de significados, Vergnaud (1990) expone que las situaciones y los problemas otorgan sentido a los conceptos, para este caso los asociados a la estructura multiplicativa.

Esta forma de concebir la comprensión, ligada a un saber hacer de manera flexible en un contexto determinado (Stone, 1999), responde a nuevas miradas sobre la enseñanza que ponen de manifiesto, una educación más centrada en la cultura y en el reconocimiento de cómo los aprendizajes transforman el sujeto y su forma de ver el mundo. Una comprensión que advierte diversas cualidades y diversos modos de manifestarse. Es así, como aparecen las dimensiones de la comprensión; entendidas como todas aquellas características observables durante dicho proceso (Boix y Gardner, 1999), es decir, elementos específicos relacionados con cada una de las áreas del conocimiento.

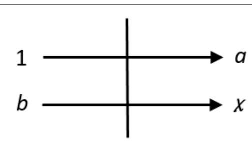
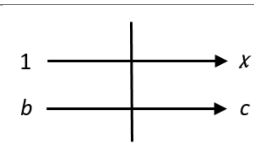
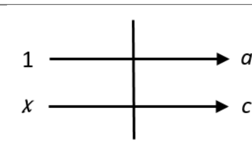
2.2.2.5. Dimensión de contenido.

En primer lugar, se presenta la dimensión de contenido donde se tiene en cuenta el paso de los conocimientos empíricos al conocimiento académico a través de experiencias basadas en desempeños de comprensión, para luego ser aplicados de manera correcta. Se trata además de construir conexiones entre los conceptos “moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalizaciones” (Boix y Gardner, 1999, p. 232). De esta manera, en el presente trabajo, los contenidos ligados a la estructura multiplicativa son determinados por los aportes de Vergnaud (1991) “se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas –definimos así relaciones que comportan una multiplicación o una división” (p. 197).

En consecuencia, dentro de la dimensión de contenidos se enmarcan en este trabajo dos tipos de problemas multiplicativos: isomorfismo de medidas y producto de medidas Vergnaud (1991):

Isomorfismo de medidas: en este tipo de problemas se ponen en juego cuatro cantidades, donde en los problemas de menor complejidad, una de ellas es uno. El lugar de la incógnita en relación a las demás cantidades (3) determina nuevas subclases de problemas dentro de los de este tipo Vergnaud (1991).

Tabla 7. *Clases de problemas tipo isomorfismo de medidas Vergnaud (1991)*

Multiplicación	***División: búsqueda del valor unitario***	***División: búsqueda de la cantidad de unidades***
		

Al respecto, vale la pena exponer que, el modelo Escuela Nueva (FVG) privilegia en sus guías de aprendizaje este tipo de problemas, en especial, los de la primera y segunda subclase. Esto puede ser debido a que “el esquema del isomorfismo de medidas, utilizado en presencia de las cantidades […] es sin lugar a duda el medio más eficaz para simular materialmente las reglas operatorias de la multiplicación y la división” (Vergnaud, 1991, p. 151).

Otro de los conceptos a incluir dentro de la dimensión de contenido, son los problemas multiplicativos tipo producto de medidas: la relación en estos problemas es distinta a la mencionada en los problemas de isomorfismo de medidas, donde en general interactúan cuatro cantidades, aquí en cambio las cantidades que intervienen son tres –regularmente establecidas en la escuela– “de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional” (Vergnaud, 1991, p. 211). Teniendo en cuenta que la naturaleza de las relaciones en este tipo de problemas es distinta, su representación también lo es, debido a que, usualmente se utiliza el plano cartesiano. Tal y como se puede observar en el ejemplo:

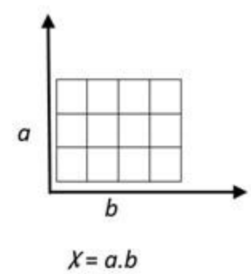


Figura 1. Representación problemas tipo producto de medidas Vergnaud (1991).

Según el marco de la EpC dentro de la dimensión de contenido los estudiantes evidencian una sofisticación de los modelos utilizados en la resolución de problemas, aplicando los conceptos en términos disciplinarios (Hetland, Hammerness, Unger, y Gray, 1999). Aspecto que refuerza el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, cuando presenta los diferentes tipos de problemas multiplicativos en contextos diversos (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015), ofreciendo la posibilidad al estudiante de transformar sus creencias intuitivas y desarrollar cierta coherencia en las redes conceptuales (Boix y Gardner, 1999).

Para dar cierre a la dimensión de contenido, se hace explícito que, a lo largo de este capítulo, del trabajo de campo y del análisis sólo se hace referencia a dos tipos de problemas multiplicativos en términos de Vergnaud (1991) – isomorfismo de medidas y producto de medidas, no siendo incluidos los problemas de caso de un solo tipo de medida, Vergnaud (1991) debido a la ausencia que presentan las guías de aprendizaje de Matemáticas de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente con relación a estos últimos.

2.2.2.6. Dimensión de métodos.

En segundo lugar, se presenta la dimensión de métodos, la cual se refiere a las diversas formas que utilizan los estudiantes para resolver un problema o en la confirmación de cierta información (Boix y Gardner, 1999). Tales métodos pueden asociarse a “la conjetura, experimentación, reflexión y revisión, todos procedimientos vitales de investigación disciplinaria en matemáticas” (Hetland et al., 1999, p. 281). Esta dimensión se articula a los pensamientos de Vergnaud (1991) cuando afirma que “es indispensable hacer observar a los niños esta pluralidad de vías, para evitar que imaginen que sólo existe una manera de obtener la solución” (p. 236), es decir incluir en el aula diversas formas de resolver un problema e incentivar el análisis de las relaciones que se establecen en cada una. Al asociar esta dimensión con el modelo Escuela Nueva, se observa que las guías de aprendizaje convocan al uso de materiales concretos, representaciones pictóricas, simbólicas, entre otros métodos de solución de los problemas de tipo multiplicativo (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2007).

Esta dimensión, también tiene que ver con la capacidad que desarrollan los estudiantes de cuestionar lo que saben o la información que se les presenta, en términos de la EpC “un sano escepticismo” de modo que puedan implementar métodos confiables que les permitan validar y reconfigurar sus aprendizajes (Boix y Gardner, 1999). Vergnaud (1991) por ejemplo, utiliza diversas formas de representación para explicar las relaciones que se pueden establecer en los distintos tipos de problemas, demostrando que estas formas de representación son múltiples y que la comprensión de las relaciones multiplicativas va más allá de lo operativo. De otro lado, en el modelo de Escuela Nueva en general, se proponen métodos convencionales de solución, sin embargo, algunas actividades brindan a los estudiantes la posibilidad de proponer sus propios métodos y discutirlos con sus compañeros (Colbert y Vásquez, 2015).

Desde esta perspectiva, dicha dimensión constituye un reto para los estudiantes, pues en ocasiones “encarnan métodos y procedimientos que son típicamente usados en la construcción del conocimiento” (Boix y Gardner, 1999, p. 234). En resumen, lo que se espera es que los estudiantes validen lo aprendido acudiendo a otras fuentes, utilicen estrategias, métodos, técnicas y procedimientos confiables en la construcción del conocimiento y que, para ello, acudan a argumentos y explicaciones elaboradas (Rivera, 2014).

2.2.2.7. Dimensión de propósitos.

Además de las dimensiones de contenido y método, se encuentra la dimensión de propósitos, la cual se fundamenta en “la convicción de que el conocimiento es una herramienta para explicar, reinterpretar y operar el mundo” (Boix y Gardner, 1999, p. 235), bajo el paraguas de esta dimensión los estudiantes pueden reflexionar acerca de los propósitos e intereses que dan origen al conocimiento, su uso en diferentes contextos y las necesidades a las que responde. El modelo de Escuela Nueva (FVG), aunque no contempla esta ni ninguna otra dimensión de la comprensión de manera explícita, hace hincapié en varios asuntos que podrían inscribirse en esta dimensión, como lo es, por ejemplo la implementación de Actividades de Aplicación de los aprendizajes en situaciones de la vida diaria que incluyen la participación de los padres de familia (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015) .

Esta dimensión promueve, además, la exploración de preguntas esenciales que impulsen la construcción del conocimiento, otras que apuntan al análisis de este y a las razones por las cuales es validado (Boix y Gardner, 1999). En este sentido, Vergnaud (1990) afirma que es pedagógicamente útil llevar al niño a realizarse preguntas, todas las que sean posibles para que le ayuden a establecer las relaciones inmersas en el problema. En sintonía con lo anterior, Boix y Gardner (1999) declaran que los conocimientos pueden ser puestos en juego a través de la formulación de preguntas de interés y la reflexión (Boix y Gardner, 1999).

En suma, la dimensión de propósitos configura ciertas líneas de comprensión, entre ellas, la conciencia de los propósitos del conocimiento y sus posibles usos conectados a la experiencia personal y social (Boix y Gardner, 1999).

2.2.2.8. Dimensión de formas de comunicación.

La última dimensión que se presenta en el marco de la Enseñanza para la Comprensión es la dimensión de formas de comunicación, ésta se centra en el uso que hace el estudiante de los símbolos para comunicar lo que ha aprendido, mediante la utilización de un lenguaje apropiado y comprensible (Boix y Gardner, 1999). Tales símbolos pueden ser de tipo visual, verbal, kinestésico, entre otros, todos éstos enmarcados en una condición de desempeño y uso eficaz. En matemáticas estos símbolos pueden asociarse al uso de "variables, ecuaciones, despliegues de datos y dibujos para ilustrar su conocimiento de las relaciones y tendencias generales del fenómeno" (Hetland et al., 1999, p. 282). Para Vergnaud (1991) no solo el estudiante debe utilizar diversas formas de comunicar el conocimiento, en esta tarea también debe estar involucrado el maestro estudiando de manera colectiva, con toda la clase, diversos tipos de problema y diversas formas de representar y explicar su solución.

Comunicar de diversas formas el conocimiento, sugiere ir más allá de lo memorístico, responder y respetar ciertas normas y códigos que se encuentran en correspondencia con el tipo de texto seleccionado –sea oral o escrito– en términos de la Enseñanza para la Comprensión "exige que los alumnos tomen en cuenta a su público y a los contextos" (Boix y Gardner, 1999, p. 238). En esta línea, el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, a lo largo de las guías posibilita que los estudiantes dialoguen sobre lo que van comprendiendo a través del trabajo colaborativo, el uso del cuaderno, donde se plasman las respuestas de los problemas de tipo multiplicativo, también se utiliza el autocontrol de progreso, como una herramienta donde maestros y estudiantes escriben qué aprendieron y cuáles fueron sus dificultades, también se afirma que las guías “desarrollan habilidades comunicativas” (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 279) .

En síntesis, la dimensión de formas de comunicación se preocupa por el despliegue eficaz y creativo de diversas maneras de dar cuenta de lo que saben, acudiendo a una gama amplia de signos, símbolos, sistemas de comunicación que les permitan a los estudiantes representar los conocimientos, teniendo en cuenta la audiencia y el contexto en el cual se dan dichas comunicaciones (Boix y Gardner, 1999). En el caso de esta investigación, la producción de conocimiento se da en el contexto de las Matemáticas, en un aula de clase rural, con la implementación del modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, en el marco de la solución de problemas multiplicativos tipo isomorfismo de medidas y producto de medidas.

A modo de cierre, las dimensiones de la comprensión permiten explorar diversas formas de construir el conocimiento, corresponden a cualidades que atraviesan el aprendizaje y hacen énfasis en el uso efectivo de lo que el estudiante sabe en un contexto propio y/o ajeno. En resumen, son el compilado de la “naturaleza multidimensional de la comprensión” (Boix y Gardner, 1999, p. 239). Además de las características que puede presentar la comprensión en el marco de la EpC, es necesario aclarar que su profundidad puede variar en cada una de las dimensiones, es ahí cuando surgen los denominados niveles de la comprensión.

2.2.3. Los niveles de la comprensión.

Como ya se ha mencionado, existen cuatro dimensiones de la comprensión que asumen diversas cualidades y distintos modos (Stone, 1999), tales características se evidencian, además, de formas más o menos profundas en cada caso. Es por ello que, el marco de la Enseñanza para la Comprensión ha establecido cuatro niveles en cada una: ingenuo, novato aprendiz y maestría para facilitar el reconocimiento del alcance de los desempeños (Boix y Gardner, 1999). Es decir, los niveles de comprensión atienden a las particularidades de cada uno de los estilos que el estudiante demuestra para comprender un tópico.

2.2.3.1. Nivel de comprensión ingenua.

En el nivel de comprensión ingenua, los desempeños aparecen basados en los conocimientos empíricos, es decir, no son aplicados en un contexto real, no hay conciencia del significado, su expresión es rígida, carece de creatividad (Boix y Gardner, 1999). El aprendizaje se convierte en un proceso de recibir información, de registro sin cuestionamientos. Respecto a las estructuras multiplicativas este nivel podría asociarse a la identificación de la multiplicación y la división desde una sola relación o al uso mecánico de la misma.

2.2.3.2. Nivel de comprensión de novato.

En este nivel, los estudiantes difícilmente dan cuenta de conexiones entre ideas y conceptos; por lo tanto, su forma de presentar y demostrar el conocimiento es mecanizada, el conocimiento es utilizado de manera similar a una receta, predomina la memoria –necesaria pero no única– (Boix y Gardner, 1999). Es así, como al estudiante que se ubica en el nivel de novato, se le dificulta establecer conexiones entre los conocimientos de la disciplina con otras disciplinas e incluso con su contexto (Boix y Gardner, 1999). En la solución de problemas de tipo multiplicativo este nivel podría asociarse a la identificación de más de una relación multiplicativa, al uso de más de un método de solución y a la asociación de estos problemas con la vida.

2.2.3.3. Nivel de comprensión de aprendiz.

El nivel de aprendiz, describe un estudiante que es capaz de establecer una relación consolidada entre el conocimiento y su uso flexible, existe conciencia de la complejidad de la construcción del conocimiento y la constante validación del mismo (Boix y Gardner, 1999). Aunque en este nivel aún afloran concepciones intuitivas, los estudiantes se apropian de conceptos y procesos propios de cada disciplina, en Matemáticas se puede observar el aumento paulatino del conocimiento en coherencia –establecimiento de relaciones– y especificidad, lo que le permite al estudiante representar de diversas formas lo que aprende e incluso utilizar algunos ejemplos (Hetland et al., 1999).

2.2.3.4. Nivel de compresión de maestría.

El nivel de maestría, se caracteriza por un convencimiento definido acerca de la importancia de construir el conocimiento a través de diferentes medios, es decir “los alumnos pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea” (Boix y Gardner, 1999, p. 241). Además, es integrador, móvil, flexible, crítico y creativo, podría decirse que quién lo alcanza en una dimensión, posiblemente ya lo ha logrado en las demás dimensiones, sin embargo, no es una regla, puesto que como se ha venido diciendo la comprensión es móvil, flexible tanto en sus niveles como en sus dimensiones (Boix y Gardner, 1999).

Después de este recorrido teórico vale la pena resaltar, que el marco de la Enseñanza para la Comprensión, además de aportar elementos valiosos para el análisis dentro de esta investigación, se articula al modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente en sus fundamentos y en el diseño de sus propuestas didácticas[15]. Lo anterior, se atribuye a la capacidad del primero en nutrir distintos modelos y perspectivas de enseñanza, “el marco conceptual de la EpC es abarcador y coherente, […] es aplicable a muchos niveles y materias. Y es lo suficientemente flexible como para guiar a los docentes con diferentes estilos, preocupaciones y prioridades” (Buchovecky, Hetland, y Stone, 1999, p. 429).

[15] Así se ha denominado al componente del modelo educativo Escuela Nueva que incluye las cartillas con unidades y guías (MEN, 2010).

3. Metodología

A continuación, se presentan los aspectos que constituyen el marco metodológico de la presente investigación. En primer lugar, se enuncia el paradigma de investigación cualitativa, los modos como se entienden la realidad, las interacciones y la posición ética del investigador. Seguido, se encuentra la exposición acerca del método de estudio empleado, las unidades de análisis y las técnicas de recolección de datos que mejor se adaptan al propósito de esta investigación. Por último, se dan a conocer los mecanismos utilizados para la triangulación y análisis de los datos.

3.1. Enfoque de la investigación

Basado en el propósito de esta investigación: analizar cómo comprenden los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Abelardo Ochoa, sede El Cedro, los problemas de tipo multiplicativo del modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente en el marco de la EpC, se pueden determinar varios asuntos respecto del objeto de investigación, uno de ellos, tiene que ver con su particularidad, debido a que es un contexto rural único y delimitado, que trae consigo dinámicas y realidades que son propias y singulares.

A propósito del objeto de esta investigación, se entiende que las comprensiones son construidas dentro de realidades particulares; es decir, en palabras de Hernández, Fernández y Baptista (2014).

> La realidad, se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades. De este modo, convergen varias “realidades”, por lo menos la de los participantes, la del investigador y la que se produce en la interacción de todos (p. 51).

Así pues, este estudio además de reconocer la realidad como múltiples realidades, se preocupa por interpretar la actividad de las acciones y las actuaciones de los participantes (Hernández et al., 2014), no con el ánimo de generalizar, sino con el propósito de develar las particularidades que surgen de la interacción entre los sujetos. En este sentido, el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, también plantea una relación entre estos participantes y su cotidianidad de forma específica y general y, cómo ésta es naturalmente vivida por los investigados y el investigador.

También es necesario agregar que, la investigación transcurre de modo natural y genuino en el contexto de múltiples realidades, para Hernández et al., (2014) el carácter naturalista, se refiere al estudio de los fenómenos en su contexto, en su cotidianidad. Esto, en términos de la investigación, permite observar las acciones de los estudiantes en espacios auténticos, ver los hechos tal cual como ocurren. De este modo, la realidad es registrada y sistematizada en la misma forma en la que los participantes la experimentan, ellos actúan sin limitaciones, ni condicionamientos. Esta autenticidad, también reside en la familiaridad de los problemas, pues, se plantean alrededor de la estructura multiplicativa y son retomados de la guía de aprendizaje con la que los estudiantes tienen permanente interacción; igualmente, se promueve el uso de material concreto y el desarrollo de los momentos propuestos en la fase de recolección de datos.

Adicionalmente, para Hernández et al., (2014) dentro de la investigación cualitativa “el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados” (p. 358). De acuerdo con lo expresado por Hernández et al., (2014), los sujetos inmersos en la investigación advierten ciertas comprensiones de los problemas de tipo multiplicativo; en esta dirección, la investigación intenta analizar las formas de comunicar las soluciones, relaciones y conceptos asociados, los métodos empleados para la solución de los problemas, los modos o los propósitos desde los cuales son usados y los contenidos involucrados, en síntesis observar la comprensión desde distintas dimensiones (Boix y Gardner, 1999).

Cabe señalar que el diseño propuesto, responde a las necesidades de esta investigación, dado que, en el aspecto fenomenológico “contextualiza las experiencias en términos de su temporalidad (momento en que sucedieron), espacio (lugar en el cual ocurrieron), corporalidad (las personas que las vivieron) y el contexto relacional (los lazos que se generaron durante las experiencias)” (Hernández et al., 2014, p. 493). Así mismo, utiliza la descripción desde la perspectiva de cada uno de los participantes dando cuenta de cómo fueron sus actuaciones y expresiones, y, analiza cada discurso y sus posibles significados.

Hasta ahora, se han enunciado algunas características de este estudio expuestas por Hernández et al., (2014), como: auténtico, particular, inscrito en una realidad que de manera simultánea es única y a la vez múltiple y, además, es un estudio profundo –teniendo en cuenta que su propósito es develar la comprensión de los sujetos que participan en el estudio–. Adicionalmente, la presente investigación asume una postura y una lógica inductiva; es decir, basada en la observación y la interpretación continua, hace nuevas observaciones y compara los resultados, basándose en otras técnicas para cotejar la información como son, por ejemplo, las entrevistas y los registros de los estudiantes y, por último, se genera una producción teórica atravesada por la contrastación, la comparación e interpretación de otros estudios.

Anexo a las particularidades descritas durante el recorrido de este tramo de la investigación, éste adopta un carácter holístico, propio de las investigaciones cualitativas, en vista de que, "precisa de considerar el todo sin reducirlo a sus partes" (Hernández et al., 2014 p. 46). Dentro de este estudio, el todo es la comprensión[16] de los problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva y aunque en este tema convergen distintos elementos y categorías, su articulación dentro del trabajo es ineludible e irreductible, los tres configuran el todo de esta investigación. Desde esta mirada, implica moverse entre la observación, la interpretación y la reconstrucción de la realidad tal como la viven sus participantes, las relaciones sociales que confluyen entre los estudiantes se consideran valiosas y construyen significados útiles para la interpretación del grupo.

Respecto a la ética del investigador, la concepción de este trabajo se enmarca en los supuestos de Taylor y Bogdan (1986) quienes expresan que no se desea violar la privacidad o confidencialidad de los investigados, el propósito más bien, es establecer con ellos cierto nivel de confianza y disposición abierta. También, se tienen en cuenta principios como proceder con honestidad, compartir los conocimientos, los resultados y buscar siempre la

[16] Entendida desde el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC).

verdad (Hernández et al., (2014). De ahí la utilización de seudónimos para identificar a los participantes de la investigación y de consentimientos informados.

Después de enmarcar la investigación dentro del paradigma cualitativo y describir sus implicancias dentro de esta investigación, se presenta a continuación el método en el que se inscribe.

3.2. El estudio de casos como método seleccionado.

Tal y como lo anuncia el título de este numeral (2.2), el método de investigación en el que se ubica este trabajo es el estudio de casos debido a que comparte el carácter particular, flexible, profundo, abierto, interpretativo, naturalista y riguroso del enfoque de las investigaciones cualitativas (Stake, 1999). En consecuencia, el estudio de casos "se define por el interés en los casos individuales, por lo que se puede aprender de cada uno" (Galeno, 2013, p.86), es decir, el caso es interesante en sí mismo, se centra en lo que se puede aprender de él y no de otra cosa, de esta manera, gira alrededor de la comprensión de problemas multiplicativos en el modelo Escuela Nueva en la sede El Cedro. En palabras de Stake (1999), este es un caso intrínseco.

Los estudios de casos intrínsecos se caracterizan no porque "con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular" (Stake, 1999, p. 16). Es decir, para esta investigación el interés del investigador es el análisis en profundidad de la comprensión de problemas multiplicativos en el modelo Escuela Nueva (FVG). En este sentido, los tres participantes proveen de forma individual y particular los datos con los cuales se describe y analizan, los niveles de compresión de acuerdo a las dimensiones de la EpC –marco desde el cual es entendida la comprensión.

Respecto a las unidades de análisis seleccionadas dentro del caso, se acude a los postulados de Stake (1999) cuando afirma que son tenidos en cuenta aquellos […] que puedan brindar gran "rentabilidad" (Stake, 1999, p. 14) con relación al objeto de estudio. Es por ello que, en esta investigación, tal y como ocurre en los casos intrínsecos "el caso esta preseleccionado" (Stake, 1999, p. 17). En consecuencia, esta investigación toma como muestra tres estudiantes del grado quinto, quienes, al mismo tiempo representan la culminación del ciclo de Educación Básica Primaria.

En esta dirección, la intención de esta investigación no es formular generalizaciones, es comprender a profundidad un caso específico (Stake, 1999) –la comprensión de los problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva (FVG)– y para ello, las observaciones, el material del estudiante y las entrevistas semiestructuradas, suelen ser las técnicas de recolección de datos más utilizadas. A continuación, se especifica el aporte de dichas técnicas dentro de este estudio.

3.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Durante el proceso de la recolección de información, tal como la plantea Hernández et al., (2014) es conveniente llevar un registro de los datos en el momento que suceden o lo más pronto posible después de ocurridos los hechos, en el descanso, luego de la observación o al terminar el día. De ahí que, durante la etapa de aplicación se han utilizado diversos apuntes con la ayuda de un formato de observación, allí se han plasmado las percepciones, impresiones y particularidades que emergen al momento de implementar las dos guías de aprendizaje.

Además de estos apuntes se tienen en cuenta los libros de registro de los estudiantes –cuadernos– para determinar otras situaciones que quizá no sean advertidas durante la observación y los diálogos sostenidos con los participantes. “el cuaderno es un instrumento o dispositivo para hacer seguimiento, verificar el desarrollo, detectar dificultades […]” (Taborda y Quiroz, 2016, p. 3).

Por último, se acude a las entrevistas semiestructuradas, con el propósito de entrever comprensiones que no han sido percibidas durante el registro y análisis de los demás instrumentos. A continuación, se describen cada uno de estos instrumentos.

3.3.1. La entrevista semiestructurada.

La entrevista hace parte de las técnicas de recolección de información para investigaciones cualitativas. Para Hernández et al., (2014) con la entrevista "pueden hacerse preguntas sobre experiencias, opiniones, valores y creencias, emociones, sentimientos, hechos, historias de vida, percepciones, atribuciones, entre otras cosas" (p. 407). En este sentido, a los participantes se les hará cuestionamientos que reflejen situaciones que son ocultas a la observación o que se escapan a las posturas personales que presentan cuando resuelven problemas de tipo multiplicativo, indagando por asuntos como, otros procedimientos, posibles usos de los aprendizajes establecidos, entre otros aspectos relacionados con la comunicación. Lo que demanda la aplicación de una entrevista semiestructurada puesto que, en ella, "el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información" Hernández et al., (2014, p. 436).

Para Stake (1999), este tipo de entrevistas permite descubrir aquello que no se ha percibido a través de la observación, por lo general confirman lo descrito, en alguna medida. Igualmente, Corbetta (2003) asegura que el investigador observa, escucha y pregunta y al preguntar, utiliza la entrevista como instrumento. En resumen, la entrevista posibilita reconocer de manera puntual las percepciones y pensamientos de los estudiantes en cuanto a los conocimientos adquiridos, las dificultades establecidas y determinar el propósito que encuentran los participantes en la utilización de la multiplicación y la división, además, esta técnica de recolección de información favorece la contrastación de los datos incluidos en el material del estudiante y la observación.

3.3.2. La observación.

Otra de las técnicas seleccionadas para recoger información, es la observación, en palabras de Corbetta (2003), la observación permite recopilar datos sobre comportamientos no verbales, esto implica mirar y escuchar atentamente lo que sucede. Ésta, es ideal para estudiar las dinámicas escolares, en las que interactúan estudiante y profesor. Dicho de otra manera, facilita –de modo simultáneo– acompañar el desarrollo de las actividades propuestas en cada guía, observar las actuaciones de los estudiantes, al igual que los procesos que emplean para resolver los problemas, sus respuestas de modo verbal y escrito y las dificultades que éstos manifiestan.

En esta línea de significados, la "observación cualitativa no es mera contemplación, sentarse a ver el mundo y tomar notas; implica adentrarnos profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, sucesos, eventos" (Hernández et al., p. 399). En sintonía, la observación también requiere de registros puntuales que nutran los procesos de interpretación. Es un complemento de los diarios de campo, aportando elementos objetivos y detallados a dicho instrumento. Es decir, la observación busca un acercamiento a los participantes para identificar las formas que emplean a la hora de dar respuesta a los problemas de tipo multiplicativo, la interacción con los compañeros, los materiales concretos y la guía de aprendizaje.

Algunos autores aseguran que, en los estudios de casos, la observación o las grabaciones y transcripciones son métodos muy utilizados, lo que contrasta con su escaso uso en la metodología cuantitativa (Bonache, 1998, p. 13). En este sentido, la rúbrica de observación se construye atendiendo a elementos útiles a observar, teniendo en cuenta información como: quién observa, lugar, hora de inicialización y de finalización, los registros empleados (visuales o auditivos), la temática abordada y las observaciones generales y particulares de los participantes.

3.3.3. Material de los estudiantes.

Por último, se utilizará el material del estudiante. Éste como lo indica Hernández et al., (2014) puede ayudar a discernir el fenómeno central de estudio. En este sentido, se busca entender algunas comprensiones de los estudiantes al momento de resolver un problema de tipo multiplicativo, los registros que van elaborando durante el desarrollo de las guías de aprendizaje, son valiosos para interpretar los avances, las dificultades y las fortalezas de los métodos, los propósitos y la forma de comunicar sus hallazgos.

Para algunos autores como Taborda y Quiroz (2016) los cuadernos reflejan además de los contenidos enseñados, la creatividad, los silencios, las iniciativas y las representaciones de los estudiantes, todos elementos que ayudan a describir y determinar los niveles de la comprensión en sus distintas dimensiones.

3.4. Propuestas de implementación en el aula

El trabajo de campo incluye la implementación de dos guías de aprendizaje propuestas en los textos del modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, ambas guías se han seleccionado, teniendo como condición el abordaje de problemas de tipo multiplicativo, en este caso: isomorfismo de medidas y producto de medidas (Vergnaud, 1991) quedando por fuera los problemas de: caso de un solo espacio de medidas (Vergnaud, 1991), debido a su ausencia en los libros de texto de Escuela Nueva (FVG). Cada guía de acuerdo con lo propuesto en el modelo está compuesta de tres momentos: Actividades Básicas, Actividades de Práctica y Actividades de Aplicación.

En este orden, las guías de aprendizaje seleccionadas han sufrido un proceso de adaptación contemplado en el modelo Escuela Nueva –Fundación Volvamos a la Gente.

> Es conveniente llevar un cuaderno de estudio de guías en el cual se irán consignando el análisis y las adaptaciones que vayamos construyendo. […] precise las adaptaciones que se deben hacer para que los niños puedan realizar un proceso de aprendizaje adecuado. Escriba las adaptaciones de manera que los niños puedan entenderlas y realizarlas en forma adecuada durante el aprendizaje (Colbert y Vásquez, 2015, p. 297).

Teniendo en cuenta lo anterior, la primera guía de aprendizaje está asociada a los problemas de tipo isomorfismo de medidas y se ha denominado: “reglas que aumentan, reglas que disminuyen”; la segunda aborda los problemas de tipo producto de medidas, nombrada: “exploremos las superficies de nuestro entorno”. A continuación, se presentan ambas guías de aprendizaje con sus respectivas adaptaciones.

3.4.1. Reglas que aumentan y reglas que disminuyen.

Guía 1. Reglas que aumentan y reglas que disminuyen.

Desempeño: Resuelvo problemas de tipo multiplicativo en los que intervienen cuatro magnitudes.

Actividades

Actividades Básicas

Trabajo en equipo. Los estudiantes cuentan con las regletas de Cuisenaire (ver figura 11), inicialmente pueden explorar y formar con ellas las figuras que deseen.

Figura 11. Regletas de Cuissenaire.

Ejercicio 1. Los estudiantes en diálogo con el docente proponen respuestas para las siguientes preguntas:

a) ¿De qué color es la regleta más grande?
b) ¿De qué color es la regleta más pequeña?
c) ¿Cuántos colores tienen las regletas?
d) ¿Cuántos tamaños tienen las regletas?

Ejercicio 2. Luego se solicita a los estudiantes formar la escala de colores para que identifiquen sus valores.

Ejercicio 3. Teniendo en cuenta lo observado en el ejercicio anterior, los estudiantes dan respuesta al siguiente interrogante:
Si se une la regleta 1 a la 2, la 2 a la 3 y así sucesivamente hasta la regleta 10 ¿Qué magnitud podemos formar?

Ejercicio 4. Después de resolver el ejercicio 3, los estudiantes discuten:

a. ¿Qué color o magnitud de regleta se puede sobreponer sobre la magnitud formada en el ejercicio 3, sin que sobre ni falte espacio?
b. ¿Cuántas veces se deberá sobreponer la regleta seleccionada?

Ejercicio 5. Los estudiantes diligencian las siguientes tablas, teniendo en cuenta la correspondencia de una regleta con otra.

Fichas rojas	1	2					
Fichas blancas							

Fichas azules						6	7
Fichas verdes							

Actividades de Prácticas

Trabajo en equipo.

Contexto de la situación: tal y como aparece en la imagen que propone la guía de Escuela Nueva (FVG). Ocurre que en el municipio de Salgar se encuentra un lugar denominado: la plaza de mercado. Allí, se pueden vender y comprar diferentes productos básicos –y otros no tan indispensables–, que hacen parte de la canasta familiar, como: frijol, bananos, plátanos, yucas, tomates, cebolla, cilantro, naranja, piña y otros que podemos hallar en el municipio.
En la plaza de mercado, también se venden otros productos que son comprados en distintos lugares, debido a que no en todos los climas se cultivan las mismas cosas. Es así como es posible comprar manzanas, uvas, fresas, peras, entre otros. Los sábados y los domingos la plaza de mercado está llena de verduras y frutas frescas y muchas personas del campo y algunas del pueblo, salen a vender sus cosechas y a comprar lo que les falta. En el desarrollo de la guía los estudiantes pueden considerarse compradores en la plaza de mercado y deben identificar los procesos que pueden llevar a cabo para realizar cuentas asociadas a la compra y venta de productos.
Al final los estudiantes determinan los siguientes aspectos:

a. ¿Qué operación o procedimiento es posible hacer para saber cuánto es necesario pagar por uno, dos o más productos?
b. ¿Qué procedimiento u operación se puede utilizar para determinar cuántos productos comprar con el dinero del que se dispone?
c. Formular problemas alrededor de la compra y venta de productos en la plaza de mercado.

Después de observar la siguiente imagen se establece un diálogo con los estudiantes, basado en las preguntas que le siguen.

Figura 12. Tomada de la guía de Matemáticas 5. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p.18).

a. Ejercicio 1. Si queremos saber el precio de diferentes productos ¿Qué proceso debemos seguir? Enumera un ejemplo.
b. Ejercicio 2. ¿Cuál es el precio de mi fruta favorita? Si compro una ¿Cuánto dinero debo pagar? ¿Si compro más de una cuánto debo pagar? (el estudiante puede determinar si comprar dos, tres, cuatro…).
c. Ejercicio 3. Si tres manzanas cuestan $3600, El doble de esta cantidad ¿Costará más o menos dinero?

Para responder estas preguntas los estudiantes pueden utilizar dinero didáctico disponible para la actividad. Además de las preguntas presentadas en los ejercicios anteriores, los estudiantes dan respuesta a los interrogantes que proponen los personajes de la imagen.

Trabajo grupal. Los estudiantes buscan una respuesta a los siguientes problemas.

Ejercicio 4. En la tienda de frutas, Ana encuentra un aviso indicando que, el precio de 2 peras es $900. Si ella quiere comprar 9 peras, ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

Ejercicio 5. Se discute con los estudiantes la siguiente inquietud: ¿Cómo hicieron para hallar la respuesta? ¿Podrían mostrarnos a todos lo que hicieron para hallar la solución?

A continuación, se desarrolla la lectura de la explicación propuesta en la guía del modelo Escuela Nueva (FVG) que acompaña este ejercicio.

Si el precio de 2 peras es de $900, el precio de 9 peras será mayor.

Ana había aprendido un método para solucionar este tipo de situaciones: **las razones y las proporciones**.

Entonces planteó la siguiente proporción:

$$\frac{2}{9} = \frac{900}{x} \qquad x = \text{valor de 9 peras}$$

Ana aprendió que en una proporción los productos cruzados son iguales:

2 por x es igual a 9 por 900

$$2 \cdot x = 9 \cdot 900$$

Para calcular el valor de x, se divide cada una de las partes de la igualdad entre 2, así:

$$\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{9 \cdot 900}{2}$$

$$1 \cdot x = \frac{9 \cdot 900}{2}$$

$$x = \frac{8.100}{2}$$

$$x = 4.050$$

Ana debe pagar $4.050 por 9 peras.

Figura 13. Tomada de la guía de Matemáticas 5. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 19).

	Después de lo anterior, se les proponen a los estudiantes los siguientes interrogantes: Ejercicio 6. ¿Conoces otro método para solucionar la situación anterior? Cada estudiante justifica su respuesta. Ejercicio 7. Si Ana tuviera que comprar 34 peras ¿Cuál sería el método más práctico y rápido para saber su costo? Justificar la respuesta.
Actividades de Aplicación	Trabajo individual. Resolver los siguientes problemas matemáticos. Ejercicio 1. Manuel fue a la tienda a comprar 8 bombones y pagó por ellos $2.800 ¿Cuánto dinero pagó por cada bombón? Ejercicio 2. Un buñuelo cuesta $600, si Luis pagó $3.000 ¿Cuántos buñuelos compró Luis? Ejercicio 3. Trabajo en familia. Con la ayuda de los miembros de la familia, plantear dos problemas matemáticos, uno que involucre la multiplicación y otro que precise de la división.

3.4.2. Exploremos las superficies de nuestro entorno.

Guía 2. Exploremos las superficies de nuestro entorno	
Desempeño: Realizo estimaciones y calculo el área de figuras planas en situaciones de la vida cotidiana.	
Actividades	
Actividades Básicas	Trabajo en parejas. Leer el siguiente texto y consignarlo en el cuaderno.  *Figura 2.* Tomada de la guía de Matemáticas 4. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 13). Contexto de la situación: en lo que sigue de esta guía de aprendizaje, descubriremos la medida de las superficies que se encuentran en la escuela, en el salón de clase y en nuestra casa.

Cada día la vida transcurre en diferentes espacios: la casa, la escuela, la cancha, los cafetales, el pueblo, algunos espacios son más grandes y otros son más pequeños, pero… ¿Cómo se puede saber esto? En esta guía se utiliza el metro para descubrir cuál es la medida de la superficie del salón de clases, la escuela y de otros espacios (simulados) y finalmente se aplica lo aprendido determinando el área de algunos de los espacios que se habitan en casa. Al finalizar esta guía los estudiantes pueden:

a. Determinar el área de figuras cuadradas en diversos espacios conocidos utilizando diferentes procedimientos.

Seguida de esta lectura, los estudiantes resuelven y ejecutan las siguientes tareas:

Ejercicio 1. Medimos el ancho y el largo del salón de clase. Hallamos su área.
Ejercicio 2. Tomamos una hoja y la recortamos, formando un cuadrado. Hallamos su área. Luego, la doblamos por la mitad. ¿Cómo se llaman las dos nuevas figuras que se formaron? Hallar el área de cada una de las dos nuevas figuras. ¿Cuál fue el resultado? ¿Cómo lo hicieron?

Actividades de Práctica

Trabajo en parejas. Los estudiantes resuelven el caso que se presenta a continuación.
Ejercicio 1. Leemos, analizamos y resolvemos el caso del centro educativo con terreno rectangular en el cuaderno. Tomando como referencia las preguntas que se presentan luego de la imagen.

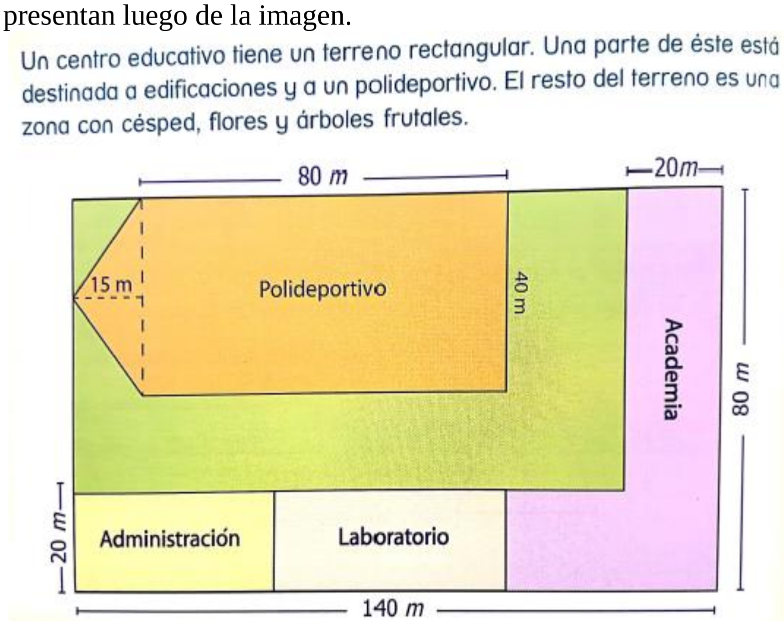


Figura 14. Tomada de la guía de Matemáticas 4. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 16).

a. ¿Cuál es el área del terreno donde está ubicado el Centro ducativo?
b. ¿Cuál es el área de la administración y el laboratorio?
c. ¿Cuál es el área de la academia?
d. Explicar cómo han obtenido los resultados.

	Para desarrollar los ejercicios 2 y 3, los estudiantes deben asumir que el área de los lugares a determinar (salón de clase y escuela) forma un cuadrado cada una. Ejercicio 2. El salón de clase de la escuela de El Cedro tiene un área de $20m^2$. Si uno de sus lados mide 4 metros. ¿Cuánto mide el otro lado? Ejercicio 3. Toda la escuela tiene un área de 180 m^2, si uno de los lados mide 9 metros. ¿Cuánto mide el otro lado de la escuela?
Actividades de Aplicación	Trabajo en familia. Hallar el área del piso de dos lugares de la casa. Escribir en el cuaderno el procedimiento que seguí y el resultado que obtuve en cada caso.

3.5. Desempeños de comprensión.

Las guías de aprendizaje presentadas anteriormente han sido adaptadas de acuerdo con los criterios propuestos en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente: "características individuales de los niños, características y recursos regionales, necesidades de la comunidad y expectativas de los padres de familia" (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015, p. 292). Es así, como las adaptaciones se han configurado desde el desarrollo académico de los estudiantes y algunas situaciones de su cotidianidad, pero, sin modificar en gran medida los problemas objeto de estudio en coherencia con la guías de Escuela Nueva y teniendo en cuenta que, lo se pretende analizar es cómo se da la comprensión –ello en términos de las necesidades de esta investigación, además, se han establecido desempeños en cada una de las dimensiones respecto a las comprensiones que se observan al resolver problemas de tipo multiplicativo.

De otro lado, vale la pena aclarar que tal y como se afirma en el marco de la Enseñanza para la Comprensión, los desempeños pueden ir refinándose, replanteándose y transformándose durante el desarrollo de las distintas etapas (Stone, 1999).

3.5.1. Desempeños propuestos en la dimensión de contenido.

Tabla 8. Descriptores de categoría por nivel dimensión de contenido.

Categoría nivel	Isomorfismo de medidas	Producto de medidas
Ingenuo	1. Se le dificulta señalar la operación matemática que necesita para resolver un problema de tipo multiplicativo.	

	2. Se le dificulta establecer el concepto *veces* y la relación que existe entre una magnitud que contiene a otra. 3. Se le dificulta identificar las cuatro magnitudes implícitas en un isomorfismo de las medidas.	1. Se le dificulta establecer las tres medidas implícitas en un problema tipo producto de medida. 2. Se le dificulta reconocer la escritura simbólica del área en m^2 *y* cm^2 y su relación con la medida superficie.
Novato	1. Enumera las cuatro magnitudes implícitas que intervienen en un problema tipo isomorfismo de medidas, cuando resuelve problemas. 2. Utiliza el concepto *veces* en sus registros para proponer la relación que existe entre una magnitud que contiene a otra. 3. Determina la suma repetida como una de las operaciones matemáticas que puede intervenir en la solución de un problema multiplicativo. 4. Emplea conocimientos disciplinarios o intuitivos para resolver problemas de isomorfismo de medidas.	1. Reconoce la escritura simbólica del área en m^2 *y* cm^2 pero no la relaciona con la medida de las superficies. 2. Expresa el área calculada sin utilizar operaciones formales. 3. Establece la relación entre dos de las medidas implícitas en un problema tipo producto de medidas. 4. Emplea conocimientos disciplinarios o intuitivos para resolver problemas de isomorfismo de medidas.
Aprendiz	1. Determina la multiplicación o la división como posibles operaciones matemáticas que intervienen en la resolución de un problema de tipo multiplicativo. 2. Establece las dos magnitudes implícitas en un problema tipo isomorfismo de medidas y las cantidades que se asocian a dichas magnitudes.	1. Utiliza la escritura simbólica del área en m^2 *y* cm^2 para dar respuesta a los problemas que indagan por el área en un contexto cotidiano. 2. Emplea operaciones formales para reconocer en planos y espacios la región que representa el área. 3. Determina relaciones entre las medidas elementales y la medida producto.
Maestría	1. Identifica las operaciones matemáticas que requiere a la hora de resolver problemas de tipo multiplicativo. 2. Establece las cuatro cantidades implícitas en un problema isomorfismo de medidas y sus relaciones, en situaciones nuevas y ajenas a su contexto.	1. Utiliza la escritura simbólica m^2 *y* cm^2 y la expresión *área* para dar respuesta a los problemas de superficies diferentes de su contexto. 2. Utiliza la división para dar respuesta a problemas donde a partir de una combinación y una de sus medidas se halla la otra. 3. Establece la relación entre la medida producto con una de las medidas elementales.

3.5.2. Desempeños propuestos en la dimensión de métodos.

Tabla 9. Descriptores de categoría por nivel dimensión de métodos.

Categoría nivel	Isomorfismo de medidas	Producto de medidas
Ingenuo	1. Se le dificulta diseñar sus propias estrategias de solución para nutrirlas con procedimientos propios de la disciplina y acercarse a la solución.	1. Se le dificulta diseñar sus propias estrategias de solución para nutrirlas con procedimientos propios de la disciplina y acercarse a la solución
Novato	1. Representa a través de elementos pictóricos problemas de tipo multiplicativo. 2. Diseña sus propias estrategias de solución para alimentarlas con procedimientos propios de la disciplina y acercarse a la solución. 3. Se basa en tablas pre establecidas, utilizando el algoritmo (multiplicación o división) para hallar sus respuestas, aunque algunas veces, éstas sean incorrectas. 4. Emplea un solo método para resolver problemas de la estructura multiplicativa y aunque este es propio de la disciplina –multiplicación–, lo aplica sin reflexionar acerca de su pertinencia en la solución del problema.	1. Representa a través de elementos pictóricos las situaciones de búsqueda del área y perímetro. 2. Establece operaciones matemáticas para resolver un problema de tipo multiplicativo, pero sin éxito en su respuesta. 4. Emplea un solo método para resolver problemas de la estructura multiplicativa y aunque este es propio de la disciplina –multiplicación–, lo aplica sin reflexionar acerca de su pertinencia en la solución del problema.
Aprendiz	1. Establece algunas relaciones entre sus propios métodos de solución y las reglas preestablecidas (multiplicación o división) en la resolución de problemas multiplicativos.	1. Se basa en tablas preestablecidas y utiliza el algoritmo (multiplicación o división) para hallar sus respuestas e intenta asociarlas a otras situaciones.
Maestría	1. Diseña sus propias estrategias de solución enriquecidas con procedimientos propios de la disciplina y se acerca la solución, además las coteja con reglas preestablecidas.	1. Establece relaciones entre dos medidas para crear una tercera. 2. Propone relaciones entre las medidas que intervienen en un problema tipo producto de medida en contextos que le son familiares y en otros que le son nuevos.

3.5.3. Desempeños propuestos en la dimensión de propósitos.

Tabla 10. Descriptores de categoría por nivel dimensión de propósitos.

Categoría nivel	Isomorfismo de medidas	Producto de medidas

Ingenuo	1. Se le dificulta formular problemas de tipo multiplicativo.	1. Se le dificulta establecer relaciones entre el área y lo que representa, incluso en la solución de problemas asociados a su cotidianidad. 2. Se le dificulta utilizar instrumentos de medición para hallar las medidas elementales de un problema producto de medidas.
Novato	1. Formula problemas de tipo multiplicativo, pero no establece relaciones entre los problemas y las situaciones del contexto. 2. Establece relaciones entre un problema matemático y otro.	1. Establece comparaciones entre las respuestas a los problemas matemáticos tipo producto de medidas, pero aún no los relaciona con las situaciones de su cotidianidad. 2. Utiliza instrumentos de medición para ubicar las medidas elementales en un producto de medidas.
Aprendiz	1. Formula problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas y los relaciona con situaciones de otros contextos. 2. Demuestra uso flexible de ideas y conceptos para dar respuesta a situaciones del contexto.	1. Encuentra relación entre los problemas tipo producto de medidas y los términos formales. 2. Utiliza instrumentos de medición para ubicar las medidas elementales y emplea con rigor las medidas estandarizadas en un producto de medidas.
Maestría	1. Diseña y desarrolla problemas matemáticos involucrando situaciones que no son de su cotidianidad, teniendo en cuenta las 4 cantidades relacionadas en dos dimensiones y establece su relación.	1. Desarrolla problemas matemáticos teniendo en cuenta dos medidas elementales para crear la medida producto o viceversa. 2. Utiliza instrumentos de medición para ubicar las medidas elementales y emplearlas con flexibilidad de acuerdo con la situación que requiera un problema producto de medidas.

3.5.4. Desempeños propuestos en la dimensión de formas de comunicación.

Tabla 11. Descriptores de categoría por nivel dimensión de formas de comunicación.

Categoría nivel	Isomorfismo de medidas	Producto de medidas
Ingenuo	1. Se le dificulta dar a conocer sus hallazgos de forma oral o escrita.	1. Se le dificulta dar a conocer sus hallazgos de forma oral o escrita.
Novato	1. Utiliza solo uno de los siguientes recursos para comunicar sus hallazgos: cuantificadores numéricos, narraciones orales o escritas.	1. Utiliza solo uno de los siguientes recursos para comunicar sus hallazgos: cuantificadores numéricos, narraciones orales o escritas.
Aprendiz	1. Utiliza diversos símbolos y formas de representación, además de los	1. Utiliza diversos símbolos y formas de representación, además de los

	cuantificadores numéricos, narraciones orales o escritas para comunicar sus hallazgos.	cuantificadores numéricos, narraciones orales o escritas para comunicar sus hallazgos
maestría	1. Da a conocer lo que sabe a través de diversos códigos de comunicación. 2. Reconoce los elementos que configuran la formulación de un problema multiplicativo tipo isomorfismo de medidas.	1. Da a conocer lo que sabe a través de diversos códigos de comunicación. 2. Reconoce los elementos que configuran la formulación de un problema multiplicativo tipo producto de medidas.

3.6. Análisis de la información

Para dar fin a este capítulo se presentan algunos apuntes en relación con el análisis de la información recolectada. Respecto al material del estudiante, como lo indica Hernández et al., (2014) ayuda a discernir el fenómeno central de estudio. En este sentido, permite entender algunas comprensiones de los participantes mientras resuelven un problema de tipo multiplicativo –isomorfismo de medidas y producto de medidas–, los registros elaborados durante del desarrollo de las guías de aprendizaje, constituyen un material valioso para interpretar los avances, las dificultades y las fortalezas de los métodos, los propósitos y la forma de comunicar sus hallazgos.

El análisis de la información se ejecuta a partir de la observación detallada de los sucesos que ocurren en la aplicación de las guías, cuyo diseño se presenta en el numeral 3.4. del presente capítulo. En este sentido, las actuaciones, las interacciones y las comunicaciones permiten corroborar las comprensiones que se van tejiendo, en cuanto a las formas de comunicación y los contenidos involucrados, además, se revisa el material del estudiante con el cual se verifican los métodos a través de las construcciones escritas y gráficas que se han propuesto, por último, la entrevista posibilita percibir aspectos relevantes con relación a los propósitos o significados que los participantes dan a los problemas de tipo multiplicativo.

Esta investigación plantea su análisis en explorar, describir y comprender lo que los individuos tienen en común de acuerdo con un determinado fenómeno (Hernández et al., 2014). Es decir, indaga acerca del proceso mediante el cual comprenden, además, detalla los contenidos, los métodos, los propósitos y las formas de comunicación, gestados durante la implementación de dos guías de aprendizaje que incluyen el diseño y solución de problemas de tipo multiplicativo -isomorfismo de medidas y producto de medidas- (Vergnaud, 1991).

Dentro de la categoría de análisis de la información se hace necesario definir la triangulación, entendida a través de la pregunta "¿Hasta qué punto distintas fuentes nos aportan la misma información?" (Bonache, 1998, p.19). En este caso, la triangulación es llevada a cabo al contrastar, analizar y categorizar las distintas fuentes (entrevistas, observación y material de los estudiantes) con lo construido en el marco teórico. Pues, "sin un marco teórico, los casos se convierten en una sucesión de anécdotas: un conjunto de datos y detalles en torno a una organización o situación en particular con significado sólo para los grupos de interés involucrados" (Bonache, 1998, p.10).

De esta manera, la triangulación de técnicas de recolección de datos a la luz de los referentes teóricos, da origen a diferentes categorías que giran alrededor de la comprensión de los problemas de la estructura multiplicativa en el modelo Escuela Nueva – Fundación volvamos a la gente. Las nuevas categorías, por tanto, son un constructo o un aporte de la investigación que se enmarca en el contexto de lo genuinamente rural.

4. Análisis y resultados

4.1. Cómo se ha configurado el análisis

Los resultados que a continuación se exhiben, hacen parte de un análisis cuidadoso de las observaciones realizadas, los materiales de los estudiantes y las entrevistas semiestructuradas llevadas a cabo al final de la investigación. El estilo asumido dentro de este apartado corresponde a lo que Stake (1999) señala, sobre la importancia de la descripción dentro de los estudios de casos puesto que, le permiten al investigador narrar y analizar al mismo tiempo eso que narra.

Por lo tanto, el análisis es presentado de manera descriptiva, articuladas a las formulaciones del marco teórico y a los datos recolectados durante su implementación de las guías: "reglas que aumentan y reglas que disminuyen" y "exploremos las superficies de nuestro entorno" expuestas en el capítulo anterior. En esta línea de sentidos, se describe y analiza el proceso que ocurre mientras los estudiantes dan solución a problemas de tipo multiplicativo –isomorfismo de medidas y producto de medidas -propuestos por Vergnaud (1991) bajo el lente de las dimensiones y niveles de la comprensión establecidos en el marco de la EpC.

Lo anterior, como ya se ha mencionado, se aborda teniendo en cuenta la realidad que envuelve la escuela rural, respetando sus dinámicas, articulándola y asociándola con el marco teórico que guía el trabajo de este trabajo de investigación. Asimismo, se aclara que, para las acciones de implementación en el aula, se ha tomado como ruta el modelo de Escuela Nueva (Fundación volvamos a la Gente)[17], donde se plantean los siguientes momentos de clase: Actividades Básicas, Actividades de Prácticas y Actividades de Aplicación. Los análisis propuestos en este texto giran en torno al desempeño de los estudiantes durante el transcurso de estas actividades.

[17] Recordemos que este es el modelo educativo implementado por el Ministerio de Educación en todos los Establecimientos Educativos Rurales del país y que, en el departamento de Antioquia y el Eje Cafetero ha sido ejecutado con el apoyo de materiales educativos diseñados por la Fundación Volvamos a la Gente.

Antes de analizar las descripciones, es necesario acercar un poco, a quien lee, al perfil de los participantes[18], con el propósito de proteger sus identidades se han utilizado algunos seudónimos:

- Nairo: es un estudiante del grado quinto, cuenta con 10 años de edad y se caracteriza por ser activo, participativo y ágil en las actividades de clase, constantemente pregunta "¿Qué tengo que hacer?" lo que da cuenta de su deseo de tomar parte durante el desarrollo de la jornada escolar y le gusta enfrentarse a los retos que se plantean en el aula, utiliza un repertorio de palabras amplio a la hora de expresarse y usualmente acompaña sus afirmaciones con argumentos, es rápido y asertivo a la hora de hacer conteos dos a dos, tres a tres. Sin embargo, manifiesta dificultades para realizar actividades de trabajo en equipo.

- Rigo: también cuenta con 10 años y se encuentra inscrito en el grado quinto; se caracteriza por ser responsable con el desarrollo de sus trabajos, activo y participativo en las actividades de clase, se muestra ágil para hacer cálculos mentales, intenta ser el primero en responder, en alcanzar altos desempeños académicos, trabaja de forma cooperativa, mostrándose amigable y sociable.

- Mariana: al igual que sus compañeros, cuenta con 10 años, y se encuentra matriculada en el grado quinto; le agrada trabajar en equipo, es espontánea a la hora de comunicar sus dificultades y es ordenada en el registro de las actividades. Con respecto al área de Matemáticas ella manifiesta que prefiere iniciar las clases con una asignatura diferente, no obstante, demuestra habilidad para desarrollar situaciones correspondientes al uso del algoritmo matemático de la multiplicación y la división.

Después de hablar un poco acerca de los participantes, se da inicio al desarrollo del análisis, no sin hacer antes algunas aclaraciones respecto al proceso ejecutado durante su

[18] Es necesario aclarar que los participantes no son el caso o los casos objeto de estudio, los participantes dentro de esta investigación son considerados fuente de información para el estudio de casos, que en esta tesis de grado es la comprensión de los problemas multiplicativos en el modelo escuela nueva, entendiendo la comprensión desde el marco de la EpC.

elaboración, tal y como se ha expuesto desde el inicio, el caso que aborda esta investigación es la comprensión de los problemas multiplicativos en el modelo Escuela Nueva –FVG– entendiendo la comprensión desde el marco de la EpC, por lo tanto, después de realizar el ejercicio de análisis, surgen las categorías que aquí se presentan, organizadas por guías de aprendizaje. Lo anterior, entendiendo que cada una se diseña e implementa alrededor de un tipo de problema –isomorfismo de medidas y producto de medidas– lo que permite clasificar la comprensión en dimensiones y niveles asociados a éstos.

4.1.1. Análisis de la guía 1. Reglas que aumentan reglas que disminuyen.

Antes de comenzar, es necesario recordar que esta guía está relacionada con el tipo de problema multiplicativo: isomorfismo de medidas, en este orden de ideas, los niveles y dimensiones que aquí se presentan se refieren sólo a este tipo de problemas.

4.1.1.1 Las dimensiones de la comprensión y las Actividades Básicas.

Las Actividades Básicas tal y como se ha expresado en el marco teórico están dirigidas a motivar y generar interés en los estudiantes, a explorar y socializar sus saberes previos, es decir, constituyen el punto de partida en la generación de conocimientos, están orientadas a afianzar los conocimientos actitudes y valores en forma lúdica (Zapata y Mayo, 2014). De esta manera, durante las Actividades Básicas propuestas respecto a la solución de problemas de tipo: isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1991), se propone, en primera instancia, una actividad que incluye el uso de material concreto, donde los participantes representan el número 55 utilizando regletas del uno al diez (ver figura 15); seguido, se les ha propuesto seleccionar una de ellas y sobreponerla de tal forma que no sobre o falte espacio para representar la misma cantidad.

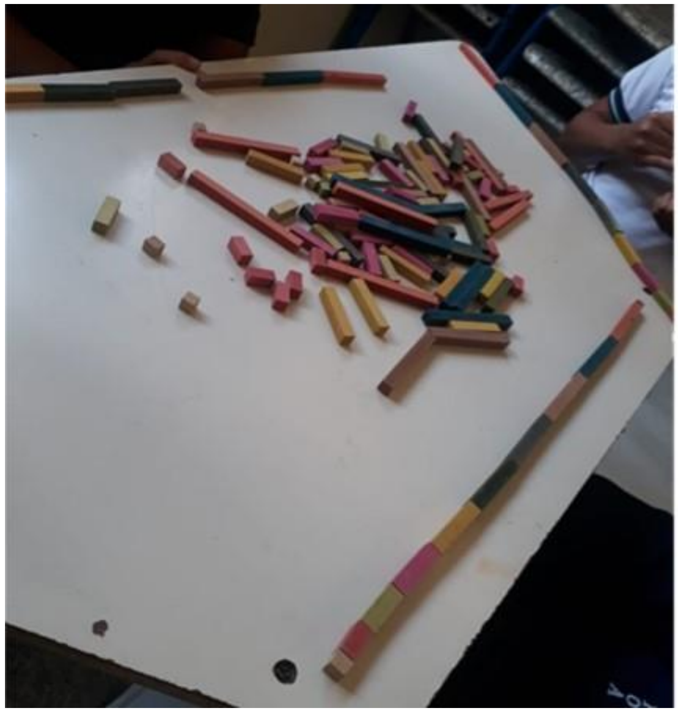


Figura 15. Representación del número 55 con regletas de magnitud del 1 al 10.

Es así, como Nairo empieza a experimentar primero con las regletas de magnitud nueve, posteriormente propone las de magnitud siete, después las de magnitud dos y por último ubica las de magnitud cinco. Buscar las regletas al azar, sin manifestar un orden establecido – 9, 7, 2 y 5 – indica que el participante, posiblemente, elabora su respuesta a través la técnica de prueba y error, cuya única regla era no repetir la regleta ya usada hasta encontrar el resultado esperado. Este modo de resolver problemas es denominado por Vergnaud citado en Gutiérrez (2015) como un esquema donde el estudiante ejecuta un proceso de exploración, de ensayo y error, que puede desencadenar una movilización y/o adaptación de los mismos de acuerdo con la situación.

Al respecto de este ejercicio, llama la atención que, Nairo durante la entrevista asegura *"la actividad que menos me gustó fue la de los cuadros, cuando uno tenía que poner encima rojo, azul"* (Nairo, 2019, transcripción de entrevista). En este punto, es necesario preguntarse en términos de Vergnaud (1991) "¿Qué camino es el más simple para el niño? ¿Cuál es el más corto? ¿Cuál es el que siguen la mayoría de los niños de un determinado nivel y por qué?" (p. 12). Esto debido a que, como se observa a continuación los tres estudiantes han utilizado la misma estrategia, pero cada uno ha obtenido un resultado distinto. Lo que señala la necesidad de reflexionar no sólo alrededor del contenido, sino también de los métodos.

Por su parte Rigo, tal y como se ha indicado, inicia al igual que Nairo, utilizando una técnica de ensayo y error, para ello selecciona primero las regletas de magnitud 10 y seguido, intenta hacerlo con las regletas de magnitud cinco, cuando termina el ejercicio, comunica: "*es el cinco porque 5 x 10 = 50 y 5 = 55*" (Rigo, 2019, transcripción de observación). Lo expuesto, permite evidenciar la movilización de esquemas que menciona Vergnaud (1991), pues Rigo contrasta la relación entre la magnitud cinco y el espacio que ocupa la regleta, diez veces, afiliando este conocimiento con la tabla de multiplicar. Sin embargo, –a pesar de relacionar el resultado con el algoritmo de la multiplicación –, al final, agrega una adición para emitir la solución de forma aritmética de modo que, el resultado coincida con el valor solicitado (55); en suma, Rigo va un poco más allá que Nairo.

Mariana, de modo similar aplica estrategias de ensayo y error, propone las regletas de magnitud ocho, luego experimenta con las de magnitud tres y cuando sus demás compañeros terminan, ella observa que la magnitud cinco (amarillo) es la que, al sobreponerse un número determinado de veces no sobra, ni falta espacio y a partir de esta observación intenta hacer el ejercicio. Al ubicar una cantidad indeterminada de veces, advierte: "*profe, no da*" (Mariana, 2019, transcripción de observación). En ese momento, Nairo le ayuda y Mariana observa que, en efecto, la magnitud cinco corresponde a la respuesta de la tarea propuesta.

Con lo anterior es posible notar que, Mariana ha logrado comprobar que la magnitud cinco cubre la magnitud 55 con la ayuda de sus compañeros, es decir, requiere de apoyo para establecer relaciones entre una magnitud y otra, y no ha considerado el uso de reglas preestablecidas para validar sus hallazgos, en este aspecto como señalan Boix y Gardner (1999) realiza descripciones imaginativas, pero incorrectas del proceso.

Teniendo en cuenta lo expresado al inicio de este apartado y lo descrito anteriormente, respecto a las Actividades Básicas en el modelo Escuela Nueva, se puede decir que, de acuerdo con Stone (1999) "los desempeños consistentes en *explorar los elementos* reconocen su respeto por la investigación inicial todavía no estructurada por métodos y conceptos basados en la disciplina” (p.112). En este sentido, detectar dichos modos de comprender al inicio de la sesión permite también identificar ciertas evoluciones en las dimensiones y niveles de la comprensión articulados a las propuestas pedagógicas y curriculares del modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente.

En este primer ejercicio de exploración, los métodos utilizados por los estudiantes son limitados, todos los participantes han intentado resolver el problema a través del ensayo y error, por lo tanto, no ofrecen información sobre otros modos de comprobar sus hipótesis, no se expresa la búsqueda de otras fuentes o métodos para corroborar sus respuestas (Hetland et al., 1999).

Con relación a la dimensión de contenido, se evidencia en las descripciones que, Nairo y Mariana se centran en ubicar la regleta que corresponde a la respuesta del ejercicio sugerido por el maestro, “los desempeños se arraigan en el conocimiento intuitivo” (Hetland et al., 1999, p. 262) es decir, ambos se ubican en el nivel ingenuo en dicha dimensión. Por su parte, Rigo logra relacionar el ejercicio con la estructura multiplicativa “estableciendo conexiones simples” (Hetland et al., 1999, p. 262) lo que indica que en esta dimensión se encuentra un poco más allá, por ello Rigo se ubica en el nivel novato de la dimensión de contenido durante la fase de Actividades Básicas.

Como se puede observar, el ejercicio anterior ofrece elementos de análisis relacionados con las dimensiones de contenido y métodos propuestas en el marco de la EpC, mientras que la información disponible inscrita en las dimensiones de propósitos y formas de comunicación es escasa. Por lo tanto, se hace necesario observar sus desempeños en el desarrollo de otras actividades para establecer posibles niveles de comprensión en estas dimensiones asociadas a la solución de problemas de tipo multiplicativo –isomorfismo de medidas, en este caso.

En un segundo momento del ejercicio, los estudiantes realizan registro de la actividad. Ahí, Rigo responde que han sobrepuesto las regletas de color amarillo 11 veces, tal y como se aprecia en la figura 16.

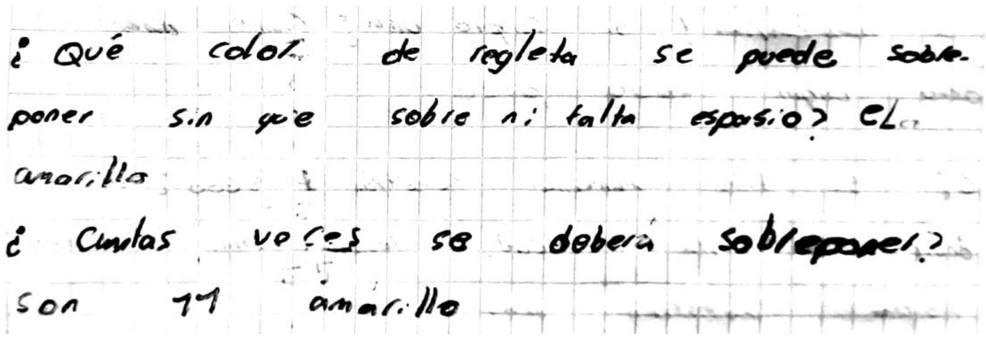


Figura 16. Respuesta de Rigo al ejercicio 5 de las Actividades Básicas de la Guía 1.

Tal y como se evidencia a través de la figura 16, la respuesta de Rigo es puntual, sus contribuciones se limitan a lo literal e incluyen un solo modo de representación de la información, el uso de los sistemas simbólicos es limitado (Boix y Gardner, 1999). De esta manera, teniendo en cuenta algunos elementos expuestos durante la actividad, es posible señalar que Rigo y sus compañeros se encuentran en un nivel ingenuo en la dimensión de formas de comunicación en el rasgo “uso efectivo de sistemas de símbolos” (Boix y Gardner, 1999, p. 255) y aunque, en esta dimensión, las contribuciones de Nairo y Mariana son similares, dan un aporte de información un poco diferente respecto a la dimensión de contenido, lo anterior se aprecia en la figura 17.

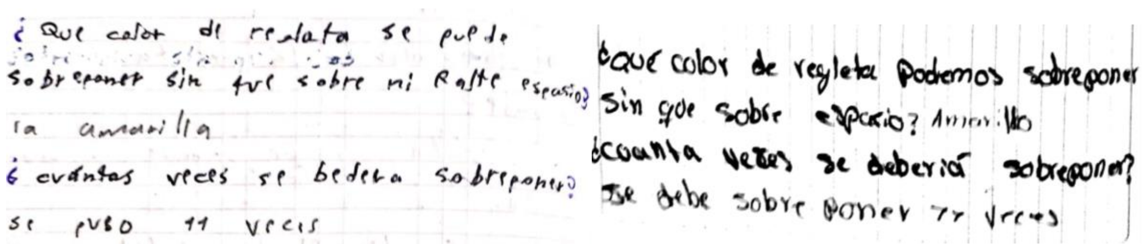


Figura 17. Respuesta de Rigo y Mariana al ejercicio 5 de las Actividades Básicas de la Guía 1.

Con relación a esta situación, se puede apreciar que los participantes Nairo y Mariana, utilizan el concepto *veces* para establecer la conexión que existe entre una magnitud que contiene a otra, en este aspecto “empiezan destacando algunos conceptos o ideas disciplinarios” (Boix y Gardner, 1999, p. 240). Mientras Rigo, no vincula la expresión *veces* en su respuesta, aun cuando el cuestionamiento hace alusión a éste de forma explícita.

En la segunda actividad propuesta en el momento de Actividades Básicas, se propone a los estudiantes completar una tabla de correspondencia, de magnitudes dos a dos y tres a tres con ayuda de las regletas de Cuisenaire.

En esta actividad, Nairo, Rigo y Mariana solicitan las regletas para representar la correspondencia entre las magnitudes de las dos tablas, sin embargo, se observa que han sido utilizadas únicamente al inicio de la actividad. Al terminar, el maestro interroga por el proceso llevado a cabo para dar respuesta al ejercicio, los tres participantes concuerdan en que han hecho el conteo [dos, cuatro, seis, ocho…] en la primera tabla y [tres, seis, nueve, doce…] para la segunda, tal como se observa en la figura 18.

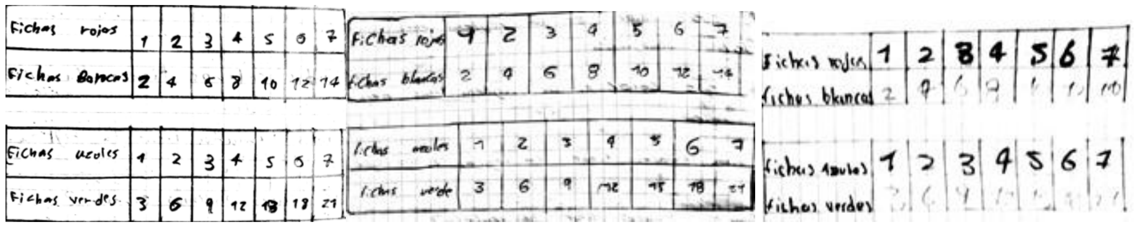


Figura 18. Tabla de correspondencia por Nairo, Rigo y Mariana, Ejercicio 6 de las Actividades Básicas.

De las evidencias anteriores, se puede apreciar que los participantes exploran al menos dos procedimientos para validar sus respuestas. Inicialmente, se valen de materiales concretos (estrategias utilizadas anteriormente –uso de regletas) y seguido, diseñan sus propias estrategias de solución relacionándolas con procedimientos propios de la disciplina, a través de conteos de dos en dos y de tres en tres. Esto indica, según lo que plantea Boix y Gardner (1999) que los estudiantes utilizan diversos métodos para construir y convalidar afirmaciones, revelando entonces, que en la dimensión de método se encuentran en el nivel de novato. Teniendo en cuenta estas descripciones se proponen los siguientes descriptores para cada una de las dimensiones y niveles.

Tabla 12. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades Básicas por dimensiones.

Nivel Dimensión	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Contenido	Se le dificulta utilizar el concepto *veces* en sus registros para establecer la relación que existe entre una	Utiliza el concepto *veces* en sus registros para establecer la relación que existe		

	magnitud que contiene a otra.	entre una magnitud que contiene a otra.
	Rigo	*Nairo-Mariana*
Métodos	Halla los resultados con procesos de experimentación y uso de materiales concretos, sin utilizar otros mecanismos de validación.	Diseña sus propias estrategias de solución y luego las relaciona con procedimientos propios de la disciplina.
	Nairo-Mariana	*Rigo*
Propósitos		
Formas de comunicación	Representa la información de manera simple, acudiendo a una sola forma de comunicar sus respuestas.	
	Nairo-Rigo-Mariana	

Durante el desarrollo de las transcripciones, según la tabla anterior, puede afirmarse que en la dimensión de propósito no hay evidencias de respuestas o argumentaciones asociadas a la misma, esto puede deberse al desarrollo de ejercicios aislados, carentes de contexto durante la aplicación de las Actividades Básicas.

4.1.1.2 Las dimensiones de la comprensión y las Actividades de Práctica.

En lo concerniente a las Actividades de Práctica tal como se expresa en el marco teórico, tienen la intención de consolidar el aprendizaje a través de la práctica y la ejercitación, integrar teoría y preparar al estudiante para que actúe de acuerdo con el nuevo conocimiento o destreza (Colbert y Vásquez, 2015). Lo anteriormente expuesto en el modelo Escuela Nueva –Fundación Volvamos a la Gente, puede asociarse con lo anotado por Perkins (1999), al hablar de criterios de desempeño para la comprensión. En primer lugar, cuando se pretende observar la comprensión de los estudiantes es necesario pedirles que hagan “algo” y en segundo lugar, las respuestas de los estudiantes no solo dan cuenta de sus comprensiones sino también pueden convertirse en un medio de avance (Perkins, 1999).

Es así como, las Actividades de Práctica van más allá de las Actividades Básicas analizadas en el apartado anterior, advirtiendo que tratan de abrir espacios que permitan a los estudiantes dar cuenta de la evolución de sus comprensiones, a partir de ejercicios prácticos que se relacionan con los realizados en la etapa anterior. En este caso, se ha acudido al trabajo en equipo – tres estudiantes – retomando el ejercicio propuesto en la guía de Escuela Nueva –Fundación Volvamos a la Gente del grado quinto.

Figura 19. Tomada de la guía de Matemáticas 5. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 18).

La figura 19, permite observar un mercado de frutas donde algunas personas dialogan respecto a sus precios; a partir de esta situación, se realizan preguntas a los participantes, como la siguiente:

- ¿Qué operación deben hacer para saber el precio de varios productos? (en la pregunta la expresión “varios productos” se refiere a más de un producto de la misma clase, por ejemplo, cinco peras, nueve manzanas, dos bananos).

Para dicha pregunta, Nairo y Mariana suministran respuestas que señalan la suma, como posible operación, tal y como se puede evidenciar en las imágenes 20 y 21.

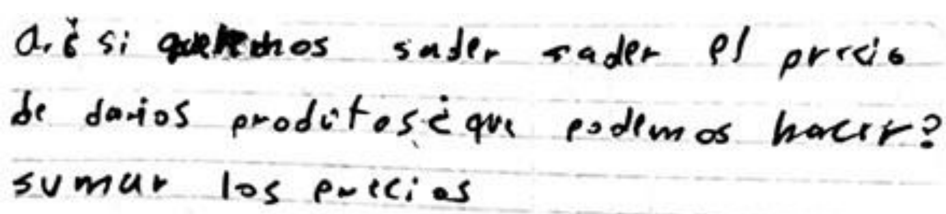


Figura 20. Respuesta de Nairo al ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación.

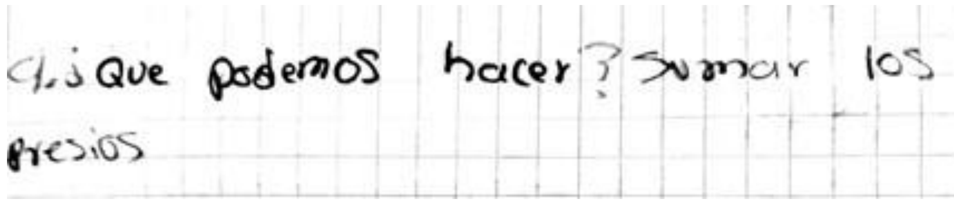

Cl. ¿Que podemos hacer? Sumar los presios

Figura 21. Respuesta de Mariana al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica.

Con relación a lo anteriormente expresado por los participantes, es posible deducir que, tanto Nairo como Mariana estipulan la suma como la operación matemática a utilizar para resolver dicho cuestionamiento, quizá asocian la adquisición de los productos de la tienda con acumular y/o componer; reconocer la adición como un proceso que permite reunir las cantidades (Bedoya, 2013). Al respecto de lo que se ha venido relatando, caben aquí los aportes de Ivars y Fernández (2016) quienes aseguran que “uno de los errores más comunes entre los alumnos de 3° a 6° curso es realizar una suma, cuando lo que se requiere es hacer una multiplicación” (p. 15).

En el desarrollo de este mismo ejercicio, Rigo indica que la situación puede resolverse utilizando una multiplicación para determinar cuánto valen las frutas, como se observa en la figura 22.

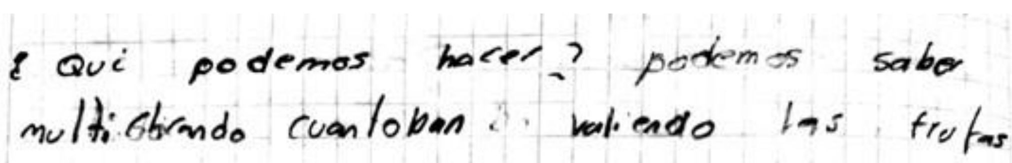

¿ Qui podemos hacer? podemos saber multiplicando cuantoban valiendo las frutas

Figura 22. Respuesta de Rigo al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica.

De acuerdo con la figura 19 (ver), la respuesta a este problema exige hallar, en primer lugar, el valor unitario (Vergnaud, 1991) –pues no está– tal valor, puede resultar de dividir el costo total del producto –expuesto en la figura 19– por el costo de la cantidad referenciada en la situación y a partir de dicho resultado, establecer el precio de cualquier cantidad según el producto seleccionado.

Hasta aquí, se puede anotar de acuerdo con el marco de Enseñanza para la Comprensión que, Nairo y Mariana en la dimensión de contenido emiten respuestas intuitivas (Boix y

Gardner, 1999) basados en experiencias anteriores afiliadas a la acumulación de objetos. Mientras que Rigo ofrece una respuesta que incluye “ir un poco más allá”, observar la imagen, organizar la información y relacionar los detalles (Boix y Gardner, 1999) para dar así una respuesta que corresponde con la pregunta y con la situación registrada. Lo que indica una ubicación más avanzada de Rigo en los niveles de comprensión dentro de las dimensiones de conocimiento y método respecto a Mariana y Nairo. Sin embargo, los elementos recolectados hasta ahora en el momento de la práctica son insuficientes para realizar tal declaración.

Esta idea es reforzada por Rigo, durante la entrevista cuando expone *“me gustó más la primera guía, lo que tenía que ver con la fruta y el precio, que eran muy fáciles de hacer. Fue fácil porque uno miraba en la cartilla el precio y ahí uno se daba cuenta, cuánto era más o menos, cuánto valían aproximadamente”* (Rigo, 2019, transcripción entrevista) esta afirmación, además de ratificar lo que se ha expuesto en el párrafo anterior, da cuenta de un nuevo elemento: “la cartilla” como herramienta de aprendizaje. En la afirmación de Rigo, la guía de Escuela Nueva (FVG) aparece como “un instrumento continuo de observación, […] y retroalimentación” (Cobert y Vásquez, 2015, p. 275) e incluso metacognición para la solución de los probemas que se plantean dentro de la misma –en este caso, isomorfismo de medidas.

Retomando los ejercicios expuestos en la Actividad de Práctica, se solicita a los participantes resolver un problema de proporcionalidad, dónde se sugiere hallar el valor de nueve peras, después de conocer el costo de dos peras. Al terminar, se insta a los estudiantes a dar cuenta del proceso realizado. De acuerdo con el orden en el que se presentan las respuestas, se anexa en primer lugar, la respuesta de Nairo, quien afirma que fue necesario realizar una suma, ver figura 23.

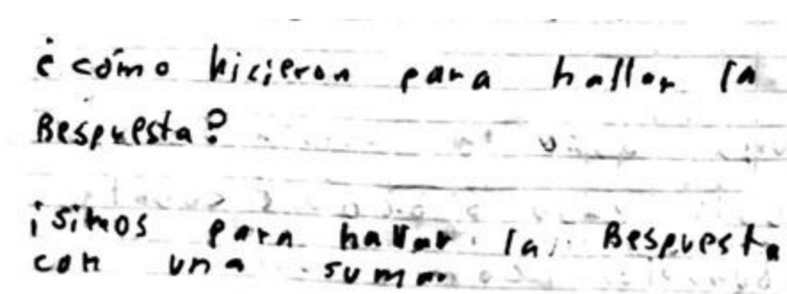


Figura 23. Respuesta de Nairo al ejercicio 5 de las Actividades de Práctica.

Esta respuesta concuerda con la emitida por el mismo estudiante –Nairo– en el ejercicio anterior. Esta asociación continua con la suma puede deberse a la introducción que hacen los textos de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente sobre la multiplicación como suma repetida, acudiendo a imágenes e incluso definiciones, tales relaciones son comunes en este y en otros textos, donde la multiplicación es presentada, inicialmente, como suma de sumandos iguales (Ivars y Fernández, 2016). Es posible que esta concepción aún perdure dentro de la dimensión de contenido e incluso en la de método según el marco de la EpC.

Al contrario de Nairo, Rigo plantea la multiplicación como opción a la solución, tal y como se observa en la figura 24.

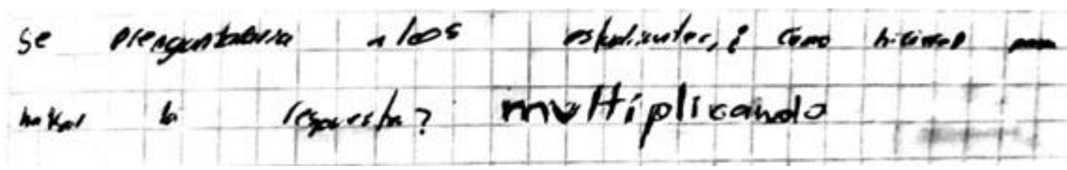


Figura 24. Respuesta de Rigo al ejercicio 5 de las Actividades de Práctica.

Según Boix y Gardner (1999) este tipo de relaciones pueden inscribirse en el nivel de comprensión de novato dentro de la dimensión de métodos, ya que, "realiza conexiones simples, frágiles o ensayadas entre conceptos ideas" (Boix y Gardner, 1999, p. 247). Sin embargo, al no incluir o enumerar otros ejemplos y justificaciones articuladas a generalizaciones o marcos de dominio, resulta difícil su categorización, es posible que se encuentre en una etapa de transición entre el nivel ingenuo y el nivel de novato.

En cuanto a Mariana, al responder esta misma pregunta, indica que las operaciones pueden ser, la suma y la multiplicación, como se observa en la figura 25.

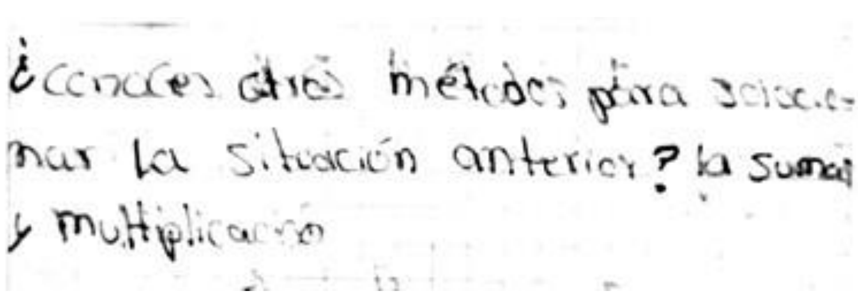


Figura 25. Respuesta de Mariana al ejercicio 5 de las Actividades de Práctica.

Esta respuesta da cuenta de la relación que establece Mariana entre la suma y la multiplicación, lo que para Ivars y Fernández (2016) resulta común en los grados 1° y 2° al dar respuesta a los problemas de isomorfismo de medidas, no obstante, agregan que en los grados posteriores esta tendencia comienza a desaparecer. De este modo, considerando la respuesta emitida por Mariana en el ejercicio anterior (ver figura 25) donde también se remite a la suma, podría decirse que, en la segunda respuesta, da indicios de que ha replanteado o realimentado sus concepciones. No obstante, es posible que acuda a tales operaciones debido a que como lo expresa durante la entrevista le parece más fácil: -*Profesor: ¿Cuál operación te parece más fácil? –Mariana: -la suma, la multiplicación"* (Mariana, 2019, Transcripción entrevista).

Luego de estas conceptualizaciones acerca de los ejercicios uno y dos, se indica a los participantes el ejercicio tres, donde leen un texto de la guía Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente que explica el proceso para encontrar la respuesta al problema multiplicativo propuesto anteriormente –hallar el valor de nueve peras, después de conocer el costo de dos– ver figura 26. Posterior a la lectura, se cuestiona a los estudiantes sobre cuál es el método más práctico para resolver el problema, es decir, si conocen otros modos de dar solución a la situación. A esta pregunta, Nairo al igual que Mariana en la situación anterior, responde: -*conocemos la multiplicación [...] el método más rápido para resolver es la suma*-.

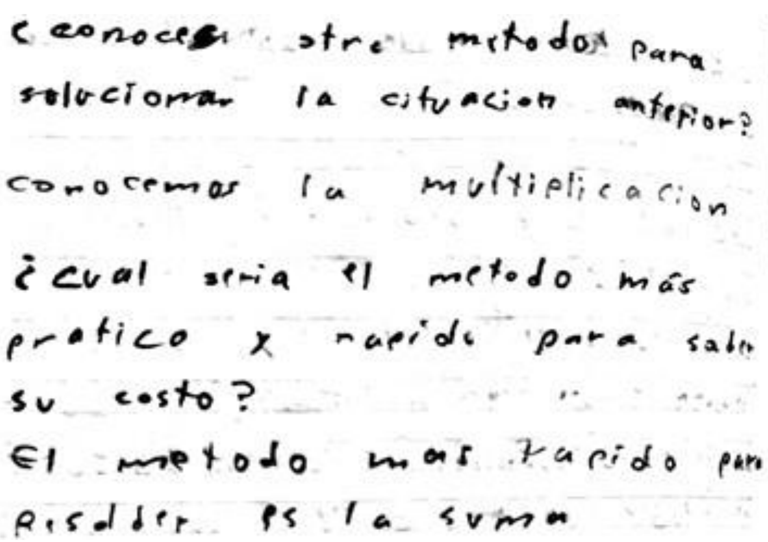

¿conoces otro metodos para solucionar la situacion anterior?
conocemos la multiplicacion
¿cual seria el metodo más pratico y rapido para saber su costo?
El metodo mas rapido para resolver es la suma

Figura 26. Respuesta de Nairo al ejercicio 6 y 7 de las Actividades de Práctica.

La asignación de practicidad respecto a la operación suma, emitida por Nairo, presenta cierta relación con las respuestas dadas a conocer en los ejercicios anteriores. Esta reiterada tendencia hacia la suma como operación "privilegiada, puede deberse a más años de práctica y de uso de la misma en la escuela. Asimismo, Jung, Laborde y Lujambio (2011) exponen que la enseñanza de la división y la multiplicación se realiza en la escuela posterior a la de la suma y la resta, considerando que la escuela "frecuenta un mismo significado para los algoritmos en variadas ocasiones" (Jung et al., 2011, p. 2) dejando en un segundo plano, sus sentidos y significados.

En controversia con lo argumentado por Nairo, Rigo considera que el método más práctico para resolver la situación es la multiplicación, como se puede observar en la figura 27.

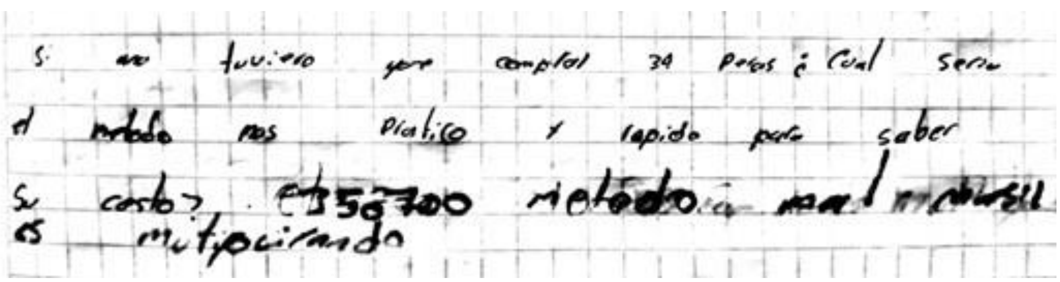


Figura 27. Respuesta de Rigo al ejercicio 7 de las Actividades de Práctica.

Con respecto a Mariana, argumenta, que podrían ser la suma y la multiplicación como se contempla en la figura 28.

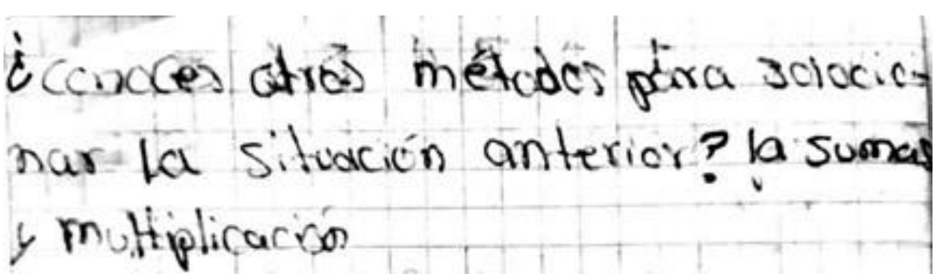


Figura 28. Respuesta de Mariana al ejercicio 6 de las Actividades de Práctica.

Hasta este punto, de acuerdo con las dimensiones y niveles exhibidos en el marco de Enseñanza para la Comprensión, llama la atención que Nairo de manera reiterada acude a la suma como operación que resuelve problemas de tipo multiplicativo, ubicándolo según dicho marco, en el nivel de novato dentro de la dimensión de contenido, a pesar de que la suma está inscrita en un saber escolarizado y que, durante el último ejercicio Nairo reconoce que la multiplicación es un método apropiado para resolver los problemas de isomorfismo de medidas, que se han venido planteando a lo largo de la etapa de Actividades de Práctica. Lo anterior, en asocio con lo expresado en el marco teórico, permite inferir que Nairo aún acude a “creencias prototípicamente orientadas a lo práctico, vinculadas con la inmediatez de la experiencia” (Boix y Gardner, 1999, p. 231).

En la dimensión de método, es posible ubicarlo –según sus aportes–, en el nivel ingenuo puesto que, Nairo hasta ahora, no cuestiona sus conocimientos, no ha expresado de manera verbal o escrita, sus respuestas indican que no ha discutido el origen de su conocimiento, de sus construcciones, “se aferra a sus creencias iniciales” (Boix y Gardner, 1999, p. 233) a pesar de las evidencias presentadas –respuestas de sus compañeros (Rigo-Mariana) e información de la guía.

Mariana por su parte, al principio argumenta que la suma es una opción para solucionar estos problemas. Sin embargo, mientras avanza en la implementación de las Actividades de Práctica, advierte que la multiplicación es otro método útil en el proceso de resolución. Lo anterior, según Perkins (1999) significa que los estudiantes “al trabajar por medio de su comprensión en respuesta a un desafío particular, llegan a comprender mejor” (p. 72). Es decir, Mariana, al enfrentarse a los problemas planteados en esta etapa, avanza en el nivel de comprensión en la dimensión de contenido, pasando de un nivel ingenuo a novato.

Lo mismo sucede en la dimensión de método, pues identifica la multiplicación como una operación que simplifica algunas sumas o viceversa, lo que es reafirmado en la entrevista: *“-Profesor: ¿De cuántas formas distintas se puede resolver un problema que requiere el uso de la multiplicación […]? -Mariana: en la multiplicación hacer sumas […]. Puedo también, sacar la calculadora o en la mente”* (Mariana, 2019, transcripción de entrevista). Esta asociación entre la multiplicación y la suma de sumandos iguales, es común en los problemas de tipo isomorfismo de medidas (Ivars y Fernández, 2016).

Según lo descrito hasta ahora, de Rigo, puede afirmarse que realizo uso flexible de conceptos y modos de pensar de la disciplina (Boix y Gardner, 1999). La anterior afirmación, se sustenta en la consistencia de sus respuestas y en la relación que estas tienen con las situaciones planteadas a lo largo de la etapa de Actividades de Prácticas, además de las percepciones descritas por él durante la entrevista *“me gustó […] lo que tenía que ver con la fruta y el precio porque eran muy fácil para mí”* (Rigo, 2019, transcripción de entrevista). De este modo, tal y como lo plantea Vergnaud (1991) los conceptos son formados en periodos de tiempo extensos, una sola situación no es suficiente para acuartelar un concepto. Aquí, es necesario recordar, que Rigo, desde el desarrollo de las Actividades Básicas ha vinculado los problemas expuestos con la operación multiplicación.

Continuando con la situación de la frutería, se propuso a los estudiantes encontrar el valor unitario de su fruta favorita teniendo como referencia los precios por docenas, por decenas y por ocho frutas.

Para este ejercicio, Nairo escoge la manzana como su fruta favorita y responde que el precio de ocho corresponde a $4.000, así lo evidencia la figura 29.

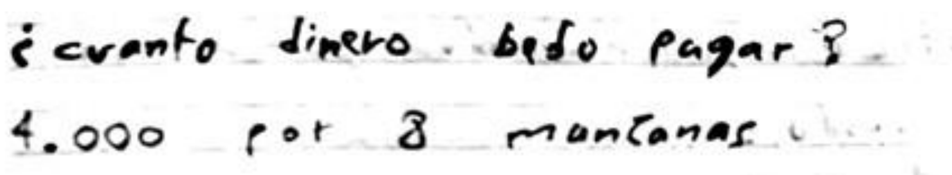


Figura 29. Respuestas de Nairo al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

Posteriormente, el docente pregunta por el valor de una sola manzana, Nairo responde: *“profe vea, esta señora dice que son diez manzanas por $4.000* –señalando el dibujo que se halla en la figura 32 –seguido de este párrafo– distinguido con un círculo de color rojo, *- y este señor dice que una docena por $4.800* – apuntando al dibujo bordeado en la figura 32 con un círculo de color morado *-entonces, como son dos más, son $800 y la mitad de $800 o sea $400”* (Nairo, 2019, transcripción de observación).

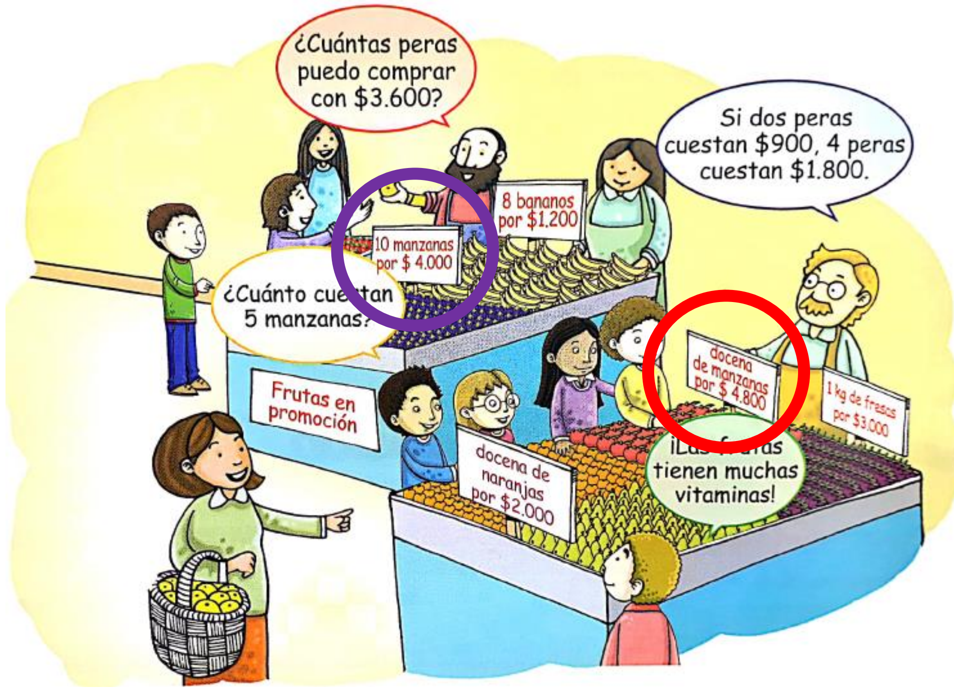


Figura 30. Tomado de Guía de matemáticas 5 de Fundación Volvamos a la Gente.

Ante esta situación es evidente que Nairo, utiliza múltiples razonamientos para resolver un problema multiplicativo. En primer lugar, analiza los datos suministrados en la figura 30 y luego, establece relaciones y comparaciones de acuerdo con la información identificada. De esta manera, para resolver la pregunta Nairo acude a la operación inversa de la multiplicación, es decir, la división. Para Vergnaud (1991) las preguntas son un apoyo pedagógico útil en la solución de problemas. En el caso de Nairo, los cuestionamientos realizados por el docente le han permitido dar cuenta de comprensiones que van más allá de las operaciones aditivas, recordando lo que venía proponiendo en ejercicios anteriores.

Por su parte Rigo, quien también ha seleccionado como su fruta favorita la manzana, plantea, que el costo de una fruta, es el costo de una decena, es decir, $4.000 pesos, como se puede observar en la figura 31. Así como en el caso anterior, el maestro indica que es el costo de una sola manzana, a lo cual responde de manera oral haciendo cálculos mentalmente: "*yo dije, diez por cuatro, igual a $400 y cuatro por dos, igual a ocho o sea $4800, me daría $400 pesos, lo que debo pagar*"; (Rigo, 2019, transcripción de observación).

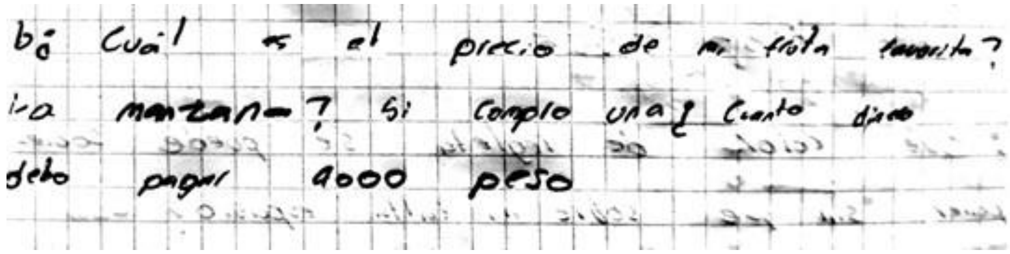


Figura 31. Respuestas de Rigo al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

Tal como se aprecia en las respuestas de Nairo, inicialmente Rigo aduce que el precio de una fruta corresponde al precio total que se encuentra en la figura 31 y es sólo hasta que se le advierte que debe encontrar el valor unitario, que revisa y propone una nueva solución. En este sentido, se puede indicar que, ambos estudiantes, tal como lo menciona, Unger, Gray, Jaramillo y Dempsey (1999) construyen su conocimiento probando ideas, observando los resultados y revisando su enfoque, ubicándose entonces dentro de la dimensión de métodos en el nivel aprendiz.

Al enfrentarse a este tipo de problemas, Mariana quien ha seleccionado el banano como su fruta favorita, expresa que debe pagar $400 por uno de ellos, ver figura 32. En este momento se le indica que tal precio para un banano es elevado, teniendo en cuenta que ocho cuestan $1.200; después de esto, Mariana se queda pensando y responde *"profe, entonces no se"* (Mariana, 2019, transcripción de observación).

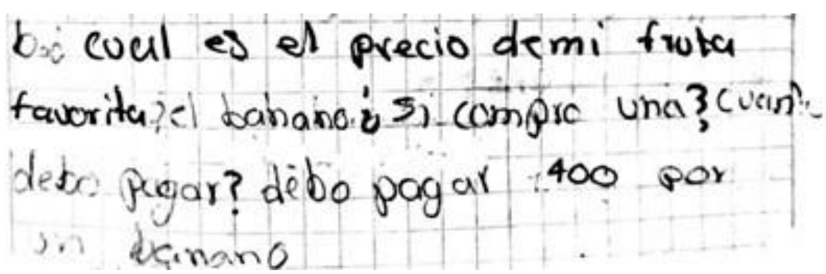


Figura 32. Respuestas de Mariana al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

En consecuencia de lo que se ha expuesto sobre Mariana en el desarrollo del ejercicio dos, se observa que, presenta ciertas confusiones, pues al contrario de lo que ocurre en el ejercicio anterior (1), donde estaba involucrada la operación multiplicación, la estudiante manifiesta abiertamente que no sabe *("profe, entonces, no sé")* esto, puede deberse a que en este tipo de problema es necesario "buscar el valor unitario conociendo el vínculo que ocurre entre dos magnitudes de naturaleza diferente" (Vergnaud, 1991, p. 200), una situación completamente opuesta a la que se propone en el ejercicio 1, es decir, se divide $1200 entre ocho para encontrar x pesos.

Lo descrito, permite inferir que Mariana, regresa al nivel ingenuo dentro de las dimensiones de contenido y método según el marco de la EpC. Lo anterior es reiterado por Hammerness et al.(1999) cuando expresa: "los alumnos que no podían indicar el proceso por el cual construían su conocimiento fueron calificados de ingenuos […] no se refirieron a los métodos matemáticos de apoyo para su conocimiento" (p. 319), los autores también califican en este nivel a aquellos estudiantes que no verifican su conocimiento, ni deducen fórmulas de otras fórmulas o crean nuevas fórmulas, todo esto se sustenta en la expresión que emite la estudiante al final del ejercicio 2 y en las afirmaciones relacionadas en la entrevista, donde asegura *"no me gustó la de las frutas porque llevaba mucho tiempo y era difícil […]"* (Mariana, 2019, transcripción de entrevista).

A continuación, se presenta el siguiente problema: "si dos peras cuestan $900 ¿Cuánto cuestan 9 peras?"

Ante esta pregunta, Nairo argumenta que son $4.050. Al explicar su respuesta, manifiesta: *"cuatro cuestan $1.800, ocho cuestan $3600 y uno son la mitad de $900… $450 más $3.600 son $4.050"* (Nairo, 2019, transcripción de observación). La respuesta de Rigo, guarda similitud con la respuesta de Nairo: *"dos cuestan $900, cuatro cuestan, $1.800, ocho cuestan $3.600 y como una cuesta $450 da $4.050"* (Rigo, 2019, transcripción de observación).

Para dar a conocer sus respuestas Nairo y Rigo han acudido a la estrategia de duplicar los valores, hasta notar que ya no es posible. Ahí, optan por acudir a la división. Lo anterior, permite identificar que ambos han diseñado sus propias estrategias de solución, incorporando procedimientos de la disciplina que los acercan a las respuestas. Esta diversidad de procedimientos son expuestos durante la entrevista: *"-una forma es, […] en el cuaderno, la otra, que es más fácil y nos la deja desarrollar en la mente; en el celular, eso cuando uno tiene dificultad"* (Nairo, 2019, transcripción entrevista) mientras Rigo afirma *"la puedo hacer de dos formas, primero multiplicando o por tablas y […]*

dividiendo" (Rigo, 2019, transcripción entrevista); desde esta mirada, basan sus hallazgos en mecanismos de prueba (Boix y Gardner, 1999). Por tanto, en la dimensión de método se encuentran en un nivel de aprendiz advirtiendo que, sus conocimientos, no solo les permiten resolver el problema "[…] siguiendo los procedimientos" (Hammerness, et al., 1999, p.319) sino que, crean y utilizan distintas formas e ideas para probar sus resultados.

La respuesta de Mariana, se aleja un tanto de lo que han expresado Nairo y Rigo, *"multiplico dos por $900 igual a $1800, ese es el valor de las nueve peras"* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Ante la afirmación de Mariana, dentro de la dimensión de contenido pueden retomarse las palabras de Hammerness et al., (1999) "los alumnos que mencionaron menos formas y fórmulas […] pero tendieron a referirse a ellas de manera incorrecta fueron calificados en el nivel ingenuo" (p. 318). En cuanto a la dimensión de método se inscribe en el mismo nivel –ingenuo–, pues sus afirmaciones omiten el uso de diferentes instrumentos, formas y caminos para validar o reconsiderar la solución expuesta (Boix y Gardner, 1999).

Como último ejercicio diseñado dentro de las Actividades de Práctica se encuentra el siguiente problema: "teniendo en cuenta la información propuesta en ejercicios anteriores, si una pera cuesta $450 ¿Cuánto pueden costar 34 peras?"

Ante este problema Nairo y Rigo proyectan, nuevamente, métodos que coinciden en algunos aspectos como, por ejemplo, duplicar las cantidades y luego, acudir a otra operación. En primer lugar, se presenta la respuesta de Nairo: *"como nueve cuestan $4.050, 18 cuestan $9.100, que 36 cuestan $16.000 le quito dos peras, es decir, $1.800, me da… $14.400"* (Nairo, 2019, transcripción de observación). Seguida de la respuesta de Rigo: *"si nueve son $4.000, 18 son $8.000, 27 son $12.000, 31 son $14.000, 34 son $16.000, por último, sumo los $50 por cada centena, para $1500 y $400 de los cuatro para sumar $16.000 más $1.700 para un total de $17.700"* (Rigo, 2019, transcripción de observación).

En ambos casos, como en el ejercicio anterior, los dos estudiantes han decidido duplicar las cantidades partiendo de datos ya conocidos y aunque sus respuestas se aproximan al valor en cuestión, no corresponden al precio de 34 peras, asumiendo que cada una cuesta $450. Es por ello, que se cuestiona, en este momento ¿Qué tan sólidos son los desempeños de Nairo y Rigo en el nivel de aprendiz dentro de las dimensiones de método y contenido en la resolución de problemas asociados a la estructura multiplicativa, tipo isomorfismo de medidas? Esta inquietud resulta a partir de los siguientes contrastes:

- Si bien los estudiantes han sugerido métodos propios que en algunos casos ofrecen respuestas acertadas a los cuestionamientos que se plantean y reconocen de manera explícita –tal y como se observa en los primeros ejercicios– que las operaciones que mejor se acoplan a este tipo problemas son la multiplicación y la suma reiterada, no han contrastado sus métodos con los que oficialmente se presentan dentro de la disciplina. Por lo tanto, aunque manifiestan saber cuál o cuáles son las operaciones “más prácticas y rápidas” no las utilizan para validar y/o cuestionar sus propios métodos.
- Asimismo, a pesar de conocer los algoritmos que podrían emplear para este tipo de situaciones, realizando asociaciones entre dicho conocimiento con otras ideas u operaciones de la disciplina –la multiplicación con la suma reiterada, el uso de la calculadora o de las tablas de multiplicar– los estudiantes basan sus respuestas en técnicas y conocimientos intuitivos dentro de la dimensión de contenido, ignoran los conocimientos de la disciplina al emitir sus respuestas y se apoyan –hasta ahora– en el cálculo mental.

Contrario a lo que sucede con Nairo y Rigo, Mariana para resolver el mismo problema, desarrolla el siguiente algoritmo. Ver figura 33.

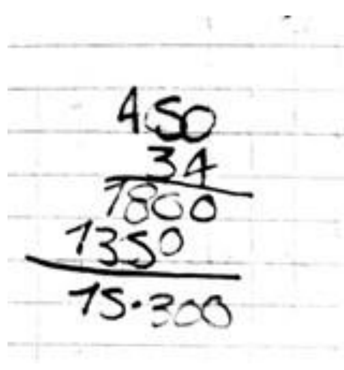


Figura 33. Respuestas de Mariana al ejercicio 7 de las Actividades de Práctica

Esta solución presentada por Mariana, abre espacios o puntos de quiebre que interpelan sus niveles de comprensión en las distintas dimensiones, especialmente en las dimensiones de método y contenido. Hasta ahora, Mariana a lo largo de las Actividades de Práctica va y viene entre respuestas acertadas y respuestas que no concuerdan con el enunciado del problema. Sin embargo, durante este último ejercicio ha superado la respuesta de sus compañeros; contrario al método que había utilizado en ocasiones anteriores Mariana decidió tomar el papel y realizar un algoritmo convencional para emitir su respuesta. Es decir, según Boix y Gardner (1999) se basa en conocimientos y modos de pensar disciplinarios.

Lo que ocurre con Mariana, Rigo y Nairo podría explicarse en palabras de Vergnaud (1991) de la siguiente manera, “el orden de complejidad creciente de las nociones adquiridas por el niño no es, por otra parte, un orden total o lineal” (p. 10). Desde esta perspectiva, puede asumirse como “natural” que los estudiantes presenten intermitencias en los niveles de comprensión de los problemas multiplicativos. Para este caso, durante las Actividades de Práctica, en la dimensión de contenido, los tres estudiantes se ubican en un nivel de novato, pues “sus explicaciones […] a veces contenían una mezcla de ideas disciplinarias e intuiciones” (Hammerness et al., 1999, p. 308).

En las demás dimensiones se pueden apreciar distintos niveles de comprensión en la solución de problemas multiplicativos. Es así, como en el caso de Rigo y Nairo, se vislumbran diversos modos de resolver tales problemas, ellos utilizan estrategias que articulan lo convencional y lo no convencional en la búsqueda de soluciones, allí aparecen conceptos como “doble” y “mitad” propios de la estructura multiplicativa, ganando habilidad para encontrar los resultados de las multiplicaciones. No obstante, a pesar de construir sus respuestas basados en experiencias y saberes trabajados en clase, aún no dan cuenta de procesos de “control de la validez de su conocimiento poniendo en juego a la vez la reflexión” (Hammerness et al., 1999, p. 309) y las experiencias vividas. Por lo tanto, de acuerdo con su grado de escolaridad, sus métodos pueden registrarse en el nivel de aprendiz. Asimismo, durante la ejecución de las Actividades de Práctica, éste ha sido el nivel de comprensión en el que se han inscrito de manera constante en tal dimensión.

Por su parte Mariana, en la dimensión de métodos, se muestra cercana a los procedimientos disciplinares, en ninguno de los casos expuestos hasta ahora, propuso un camino o una estrategia distinta para resolver los problemas. Por el contrario, cuando el maestro incluye preguntas dirigidas a ampliar sus respuestas o “preguntas pedagógicamente útiles” según Vergnaud (1991), Mariana opta por expresar *“no sé”*, es decir, renuncia a reflexionar sobre los procedimientos convencionales que se han instaurado en ella para resolver problemas multiplicativos, en este caso, acertar hace parte de una ruleta. Esta condición ha hecho que se inscriba en un nivel de novato dentro de esta dimensión pues, aunque reconoce la ineficacia del método utilizado, en algunos casos, “tienden a igualar los experimentos con procedimientos similares a recetas que se siguen para lograr un cierto resultado” (Boix y Gardner, 1999, p. 233), aplica la multiplicación como proceso de solución sin reflexionar –aún–sobre su pertinencia de acuerdo con el enunciado del problema.

En cuanto a la dimensión de formas de comunicación, Mariana se ubica en un nivel de comprensión más avanzado que en las dimensiones anteriores, pues ella logra combinar, a lo largo del momento de Actividades de Prácticas, “el uso de sistemas de símbolos (visuales, verbales, matemáticos y cinestésicos corporales […]) para expresar lo que saben, dentro de géneros o tipos de desempeño establecidos” (Boix y Gardner, 1999, p. 237). Mariana, acude a expresiones matemáticas como: representaciones numéricas –donde además se incluyen símbolos dotados de significado–, representaciones verbales y escritas. En esta dimensión, es evidente que la estudiante “usa más de un sistema de símbolos” (Boix y Gardner, 1999, p. 255). Por lo tanto, es posible ubicarla en el nivel de aprendiz, en la dimensión formas de comunicación.

En el caso de Nairo y Rigo, sus producciones en la etapa de Actividades de Prácticas, enmarcadas en la dimensión de formas de comunicación se catalogan en el nivel de novato en atención a que, “los alumnos siguen los cánones de desempeño específicos ritualmente; […] usan un solo sistema de símbolos para expresar lo que han aprendido” (Boix y Gardner, 1999, p. 254-255). En otras palabras, “los alumnos que no manipularon ni usaron ningún material (elementos visuales, analogías u otros) para demostrar o ilustrar sus puntos de vista fueron calificados en el nivel de novatos” (Hammerness et al., 1999, p. 311). En el ámbito de las explicaciones proporcionadas a la hora de resolver los problemas de isomorfismo de medidas, ambos estudiantes se limitaron de modo general al sistema verbal.

No obstante, para la dimensión de propósitos, la propuesta desarrollada durante las actividades de prácticas no arroja suficiente información que permita establecer o ubicar a los participantes en determinados niveles de comprensión. Lo anterior se debe, a que en los ejercicios no existen una o varias preguntas que indaguen a los estudiantes sobre los propósitos de aprender lo que aprenden (Boix y Gardner, 1999) ¿por qué aprender a resolver problemas de la estructura multiplicativa? ¿Dónde o en qué situación de la vida cotidiana podría aparecer este problema? ¿Alguna vez te has enfrentado a un problema parecido?

De lo dicho anteriormente, se hace necesario precisar que, las Actividades de Práctica permiten evidenciar de manera explícita tres de las cuatro dimensiones de la comprensión: contenido, métodos y formas de comunicación, de manera especial las dos primeras. Sin embargo, la dimensión de propósitos ha quedado un poco relegada, quizá aparezca en la siguiente etapa de Actividades de Aplicación. Por ahora, se presenta una síntesis de lo ocurrido en la etapa de Actividades de Práctica en relación con los niveles y dimensiones de la compresión según el marco de la EpC.

Tabla 13. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades de Práctica por dimensiones.

Dimensión / Nivel	**Ingenuo**	**Novato**	**Aprendiz**	**Maestría**
Contenido		Emplea conocimientos disciplinarios e intuitivos para resolver problemas de isomorfismo de medidas –suma reiterada, multiplicación–.		
		Nairo-Rigo-Mariana		
Métodos		Emplea un solo método para resolver problemas de la estructura multiplicativa y aunque este es propio de la disciplina –multiplicación–, lo aplica sin reflexionar acerca de su pertinencia en la solución del problema.	Propone diferentes métodos para resolver problemas multiplicativos e incluye dentro de sus soluciones algunos procedimientos disciplinares –múltiplo y divisor–.	
		Mariana	*Rigo - Nairo*	
Propósitos				

Formas de comunicación	Utiliza un solo tipo de registro –verbales–para dar a conocer sus construcciones en torno a las soluciones que propone para los problemas tipo isomorfismo de medidas.	Utiliza varios sistemas de símbolos: verbales, escritos y numéricos para dar a conocer sus respuestas sobre problemas tipo isomorfismo de medidas.
	Rigo – Nairo	*Mariana*

4.1.1.3 Las dimensiones de la comprensión y las Actividades de aplicación.

En este apartado del análisis, se dan a conocer las reflexiones realizadas alrededor de las Actividades de Aplicación. En la línea de lo expuesto durante el marco teórico, tales actividades "invitan a los estudiantes a resolver situaciones relacionadas con su entorno y que son más o menos cotidianas" (MEN, 2010, p. 10), éstas, pretenden evidenciar la aplicación que da el estudiante a los aprendizajes trabajados a lo largo de la guía en situaciones de la vida diaria y le permite profundizar sus conocimientos recurriendo a otras fuentes (Colbert y Vásquez, 2015). Según estas conceptualizaciones acerca del momento de Actividades de Aplicación, propuestos en las guías de Escuela Nueva –Fundación Volvamos a la Gente– los ejercicios realizados, se relacionan en gran medida, según el marco de la EpC (Stone, 1999) con la dimensión de propósito.

En esta fase, se incluye el desarrollo de actividades individuales asociadas a la solución de algunos problemas de tipo multiplicativo, denominados por Vergnaud (1991) como: isomorfismo de medidas. Dicha actividad, es seguida por otras que demandan la participación de las familias de los participantes, como lo es entonces, la formulación de dos problemas multiplicativos que involucran al menos una de las dos operaciones inscritas a la estructura: multiplicación y división.

De acuerdo con lo que se viene exponiendo, el primer problema a resolver es catalogado como "división: búsqueda del valor unitario" (Vergnaud 1991, p. 219), cuyo esquema de representación es:

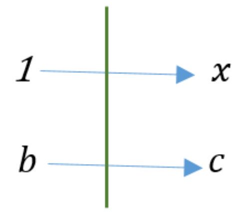


Figura 34. Representación isomorfismo de medidas, división-búsqueda de valor unitario (Vergnaud, 1991).

- Un niño fue a la tienda a comprar ocho bombones, allí pagó por ellos $2.800 ¿Cuánto cuesta entonces un solo bombón?

Ante este problema, Nairo argumenta: *"primero sumo con $250, es decir dos para $500, cuatro para $1.000 y ocho para $2.000"* –pero no le da–. Luego, intenta: *"con $300, dos para $600, cuatro para $1.200, dos para $1.800 y dos para $2.400"* – esta respuesta tampoco es la solicitada por el problema–. Seguido, propone *"$350, es decir, dos para $700, $700 y $700 para $1.400 más $700 es $2.100 y $700 para $2.800 y así me dio"* (Nairo, 2019, transcripción de observación).

Duplicar cantidades es una técnica, que Nairo ya había utilizado durante las Actividades de Práctica y, en dos de tres casos arroja los resultados precisos que requiere cada problema, quizá por ello, nuevamente lo intenta. Lo que llama la atención, es que, Nairo aún no acude a otros métodos –formales– para resolver el problema como, por ejemplo, la multiplicación. Es decir, aún no articula sus concepciones intuitivas a los conceptos de la disciplina (Boix y Gardner, 1999), este detalle adquiere importancia dentro de la investigación, en la vía de determinar los niveles y dimensiones de la comprensión, pues "los caminos que el niño sigue para resolver un problema o alcanzar el objetivo perdido en una labor escolar dada, están profundamente enraizados en la representación que él hace de la situación" (Vergnaud, 1991, p. 12).

Por su parte Rigo, con relación al mismo problema, indica *"lo intenté con $200, $300, $400 y no me dio, pero al hacerlo con $350 sí, porque $350 más $350 es igual a $700, sumo cuatro veces $2.800"* (Rigo, 2019, transcripción de observación). Aunque los modos de argumentar de Rigo, son similares a los empleados por Nairo, vienen dotados de cierta practicidad y, además ubican la suma repetida como opción o método utilizado en la solución del problema planteado "*sumo cuatro veces"* lo que puede constituir, eventualmente, que el estudiante identifica al menos una parte de las relaciones, las transformaciones y las nociones que intervienen en el problema y ciertas características de sus propiedades (Vergnaud, 1991). Lo que, en términos de la Enseñanza para la Comprensión podría indicar un tránsito en el nivel de comprensión, en las dimensiones de conocimiento y método.

El caso de Mariana es consistente con lo ocurrido en la etapa anterior –actividades de prácticas–, lo que se hace evidente en su respuesta *"el costo de uno de ellos es $3.000 pesos"* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Ante lo expresado, el maestro cuestiona: –*¿Cómo un bombón puede costar $3.000 si ocho cuestan $2.800?* a lo que Mariana manifiesta: *"se multiplica ocho por $2.800, entonces $2.800 más ocho"* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Estas afirmaciones, concuerdan con las expuestas a lo largo de la solución de los problemas. En diversas ocasiones la estudiante acude al algoritmo formal, sin embargo, sus respuestas se alejan de lo planteado en los problemas, para Vergnaud (1991) "en lo que respecta a los errores, la necesidad de analizarlos es aún más evidente, pues sólo este análisis permite saber con qué dificultades se ha enfrentado el niño, y permite determinar los medios para remediar la situación" (p. 12).

Es así como, de acuerdo con lo que se viene manifestando, Mariana aplica los procedimientos algorítmicos de manera mecánica, reconoce que es un problema multiplicativo, pero aún no identifica las relaciones que existen entre las cantidades que se presentan en él.

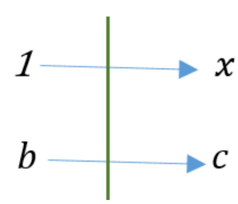


Figura 35. Esquema de relaciones en el problema.

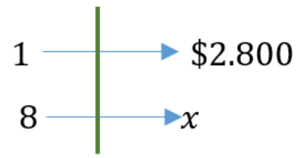


Figura 36. Esquema de relaciones expuesto por Mariana.

El segundo problema propuesto a los estudiantes, en esta etapa, requiere de una operación inversa, es decir, la división: búsqueda de la cantidad de unidades, para lo que se propone: un buñuelo cuesta $600. Si Luis gastó $3.000 en buñuelos, ¿Cuántos buñuelos compró en total?

Nairo respondió *"si sumo $600 son $1.200 por dos buñuelos, más $1.200 igual a $2.400 y sumo otros $600 para cinco buñuelos"* (Nairo, 2019, transcripción de observación).

Al exponer el proceso llevado a cabo durante la solución del problema, Nairo incluye dentro de su repertorio términos disciplinarios como: *"sumo […], más […], igual a"* que podrían ser el indicio de refinamiento y asociación conceptual. En términos de Vergnaud (1991) "el conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y organizarlas en sistemas" (p. 15). Es evidente, que poco a poco Nairo refina su banco de argumentos y, por ende, es posible que, al mismo tiempo, esté evolucionando en sus procesos de comprensión sobre el contenido, en el marco conceptual de la EpC.

Por su parte Rigo, ha exhibido un proceso similar al de Nairo y en la línea de los métodos que venía utilizando en los dos momentos anteriores: *"$600 más $600 más $600 es igual a $1.800 y pongo otros dos serían $3.000, para un total de cinco buñuelos"* (Rigo, 2019, transcripción de observación). Es así, como Rigo y Nairo han refinado su repertorio de palabras, pero no sus métodos de solución para los problemas tipo isomorfismo de medidas. Esta afirmación, va en la línea de lo expresado por ambos estudiantes durante las entrevistas, *"la división la utilizo muy poco […]"* (Nairo, 2019, transcripción de entrevista) *"casi no utilizo la división lo que más utilizo es la multiplicación"* (Rigo, 2019, transcripción de entrevista). En síntesis, el método más utilizado por los estudiantes –Rigo y Nairo– es el cálculo mental, factor que según (Vergnaud, 1991) interviene en el proceso de resolución de problemas.

Mientras tanto Mariana, con relación a este mismo problema expresa: *cinco”* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Al interrogarla por el proceso realizado, responde: *“multiplico cinco por $3.000”* (Mariana, 2019, transcripción de observación) ver figura 37, utiliza una multiplicación y dice: *“$15.000”* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Al cuestionar: - *¿Son entonces 15.000 buñuelos?,* vuelve a observar la operación que ha hecho antes y afirma: *“se debe sumar”* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Intenta realizar la operación, pero desiste, asegurando, *“no soy capaz”.*

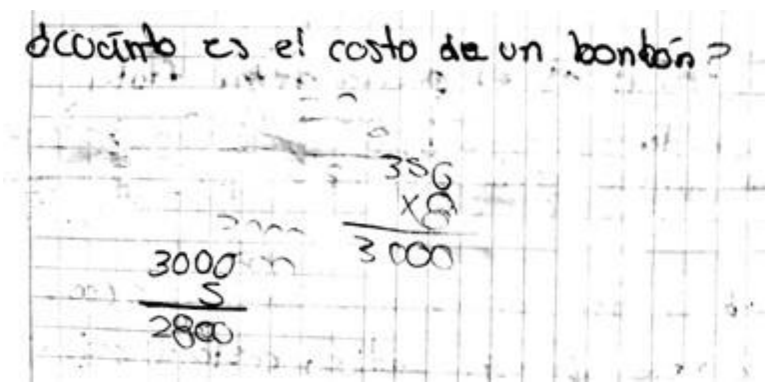


Figura 37. Respuestas de Mariana al ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación.

Lo anterior, deja entrever que Mariana asocia el problema a un aumento de cantidades, por eso acude a la multiplicación y la suma, mientras que lo solicitado en el enunciado implica hallar el valor unitario y requiere de una división. La estudiante, establece las dos magnitudes que intervienen en el problema tipo isomorfismo de medidas, pero no su relación (Boix y Gardner, 1999), como respaldo de lo anterior, durante la entrevista, la participante permite vislumbrar que relaciona la división con la acción repartir, entendida de forma literal *“la división la utilizo cuando se va a repartir mecato o alimentos”* (Mariana, 2019, transcripción entrevista).

En lo correspondiente a la última actividad de aplicación, los estudiantes diseñan dos problemas matemáticos. Uno que involucra la operación división y otro que incluye la multiplicación, para esta actividad tienen disponible la opción de cotejar sus aprendizajes con la ayuda de otras fuentes; en este caso, sus familiares o tutores. Los problemas propuestos por los estudiantes se sintetizan a continuación.

- **Problemas asociados a la multiplicación.**

Nairo: *"Pedro quiere vender 12 gallinas, cada una vale a 1200 pesos ¿Cuánto valen todas las gallinas?"* ver figura 38.

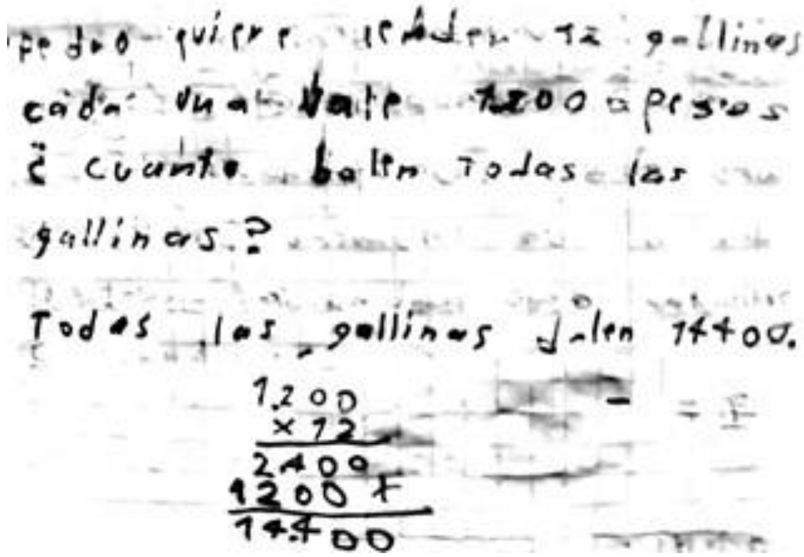


Figura 38. Problemas propuestos por Nairo, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación.

Tal y como se puede observar Nairo ha acudido a una situación propia del campo, es decir, del entorno donde se desenvuelve. Sin embargo, los precios asignados a las gallinas no se aproximan a los precios reales. Estas características corresponden a las descritas en la dimensión de propósitos donde "el conocimiento es una herramienta para […] reinterpretar y operar en el mundo" (Boix y Gardner, 1999, p. 234). Al observar la estructura del problema, se puede evidenciar que intervienen cuatro cantidades y dos medidas de diferente naturaleza en la búsqueda de la solución del problema, lo que se inscribe dentro de los problemas tipo isomorfismo de medidas según Vergnaud (1991). El problema de Nairo al igual que el siguiente (el de Rigo), brindan datos acerca de tres cantidades iniciales – una gallina cuesta $1200 y 12 gallinas cuestan *x* – e indaga por una cantidad final.

Rigo: *"Darío vendió 25 piñas, cada una valen 4000 pesos ¿Cuánto valieron 25 piñas?* ver figura 39.

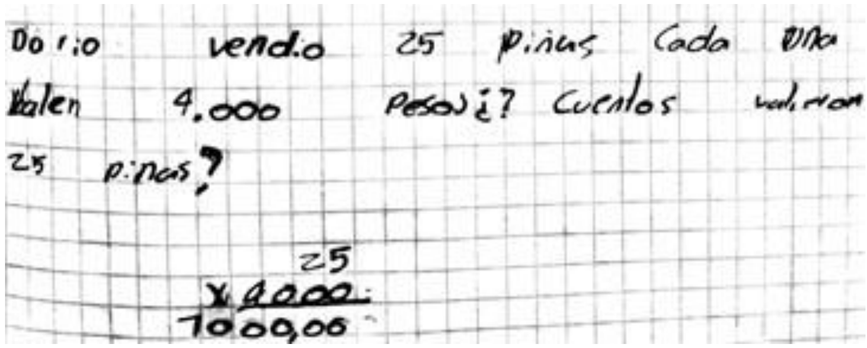


Figura 39. Problemas propuestos por Rigo, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación.

Aunque el planteamiento del problema –para la multiplicación– tipo isomorfismo de medidas propuesto por Nairo y Rigo son similares; sus particularidades radican en el proceso de solución, el método utilizado por Nairo “parecía mecánico y era más parecido a una receta que a la demostración de una reflexión profunda” (Hetland, et al., 1999, p. 285), mientras que Rigo, ha simplificado sus métodos sin dar argumentos acerca del procedimiento, su resultado es similar al que se deriva después de operar con la calculadora o el cálculo mental.

Por su parte, Mariana no ha presentado problemas cuya solución requiera de la multiplicación puesto que ambos acuden a la división como solución, no obstante, los dos clasifican como problemas de tipo multiplicativo porque para su solución se deben ejecutar una multiplicación o una división (Vergnaud, 1991). Sin embargo, teniendo en cuenta las características expuestas por (Vergnaud, 1991) su naturaleza, es distinta. Es decir, tan solo el primer problema es del tipo: isomorfismo de medidas, porque “pone en juego cuatro cantidades” (p. 218). El segundo problema corresponde al tipo, caso de un solo espacio de medidas, esto se define luego de presentar los problemas diseñados por Mariana (ver figura 40).

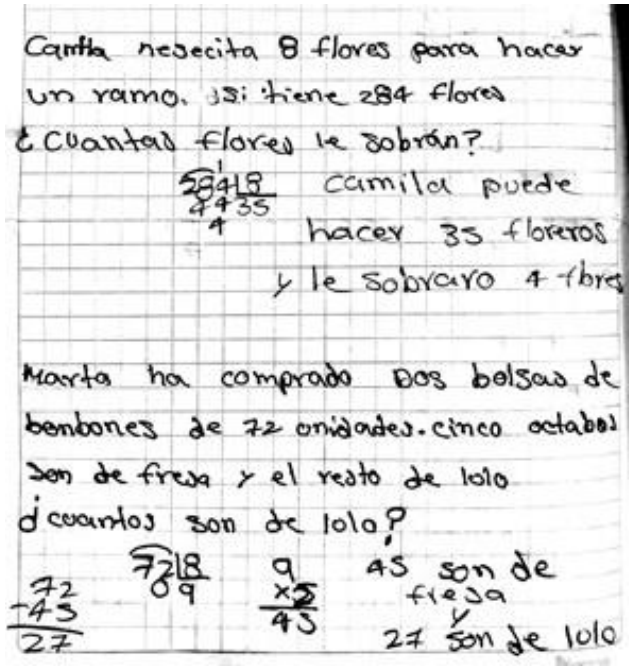


Figura 40. Problemas propuestos por Mariana, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación.

- **Problemas asociados a la división.**

Mariana: *"Camila necesita ocho flores para hacer un ramo, si tiene 284 flores ¿Cuántas flores le sobran?"*

"Martha ha comprado dos bolsas de bombones de 72 unidades, cinco octavos son de fresa y el resto de lulo ¿Cuántos son de lulo?"

Como ya se ha dicho, ambos problemas se inscriben en los problemas de tipo multiplicativo, en este caso los dos pueden resolverse a través de una división, pero su clasificación es diferente. El primero corresponde a un isomorfismo de medidas donde el valor unitario esta dado: un ramo requiere de ocho flores y "es necesario buscar el número de unidades del primer tipo, correspondiente a una magnitud dada del segundo tipo" (Vergnaud, 1991, p. 200) para, al mismo tiempo, poder determinar la cantidad de flores que "sobran".

El segundo problema, representa mayor complejidad y es el ejemplo de un problema: caso de un solo espacio de medidas, que exige la distinción entre una medida y un escalar, ello "requiere de un estudio profundo" (Vergnaud, 1991, p. 220). Es así, como en la línea de los tipos de problemas presentados en esta investigación: isomorfismo de medidas y producto de medidas, solo se profundiza el análisis del primer problema diseñado por Mariana; el problema de tipo caso de un solo espacio de medidas, es incluido con el propósito de dar mayor fiabilidad al informe presentado en esta investigación y con el ánimo de ilustrar condiciones que reflejan la realidad del aula de clase.

También se hace necesario anotar que, los problemas presentados por Mariana en la etapa de Actividades de Aplicación contienen una complejidad mayor que la exhibida en los problemas tipo isomorfismo de medidas, planteados en las primeras etapas. Lo anterior, quizá se debe, al acompañamiento que los padres de familia pueden procurar a los estudiantes durante las Actividades de Aplicación según los principios del modelo Escuela Nueva (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015). Dicha anotación, es realizada teniendo en cuenta el desempeño que tiene Mariana en la solución de este tipo de problemas en etapas anteriores, donde casi todas sus respuestas han abocado a procedimientos aditivos o multiplicativos que se alejan de la respuesta demandada por los problemas y donde en reiteradas ocasiones ha expresado *“no sé”* (Mariana, 2019, transcripción de observaciones).

Después de observar los problemas propuestos por Mariana relacionados con la división se expone el problema presentado por Nairo:

“Camilo desea repartir 685 balones que le donó una fundación a 32 niños de una escuela, *el profesor quiere saber de a ¿Cuántos balones le toca a cada uno?”* ver figura 41.

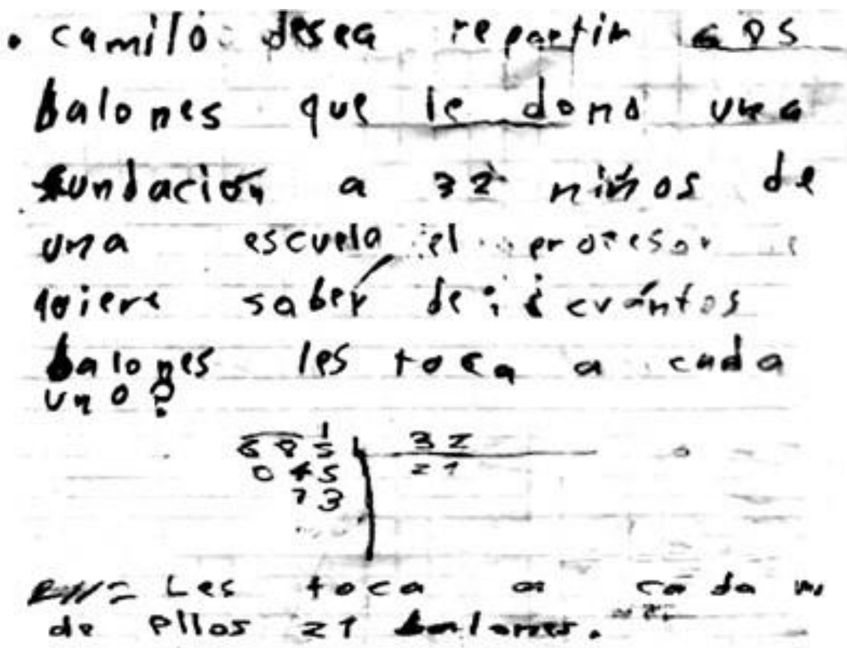


Figura 41. Problemas propuestos por Nairo II, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación.

Nairo da a conocer un problema de tipo isomorfismo de medidas que guarda relación con el primer tipo de problema expuesto por Mariana. Igual que en el problema anterior – multiplicación, gallinas – el estudiante acude a situaciones que le son familiares o ideales, aunque, no hacen parte de la realidad de la escuela. A pesar de esta última característica, para Hetland et al., (1999) esta relación: contexto – saber escolar, indica un posible uso disciplinario del conocimiento en espacios auténticos, lo que facilita el desarrollo de conexiones personales entre el conocimiento y la experiencia ampliándolo significativamente. Esta idea es reiterada en la entrevista cuando Nairo responde a la pregunta: ¿consideras importantes las actividades que hemos desarrollado en la clase de Matemáticas durante los últimos días? *"-Me parecen importantes porque […] me ayudan cuando voy a la tienda y que no lo engañen a uno"* (Nairo, 2019, transcripción entrevista).

Finalmente, Rigo expone el siguiente problema: *"En una panadería se elaboraron 91 empanadas y se deben colocar en bandejas de siete unidades cada una ¿Cuántas bandejas se necesitan?"* ver figura 42. De esta manera, el problema "pone en juego cuatro cantidades […] en los problemas más simples se sabe que una de éstas es igual a uno" (Vergnaud, 1991, p. 218) colocando en evidencia que Rigo y sus demás compañeros en la etapa de Actividades de Aplicación han construido un problema simple de isomorfismo de medidas.

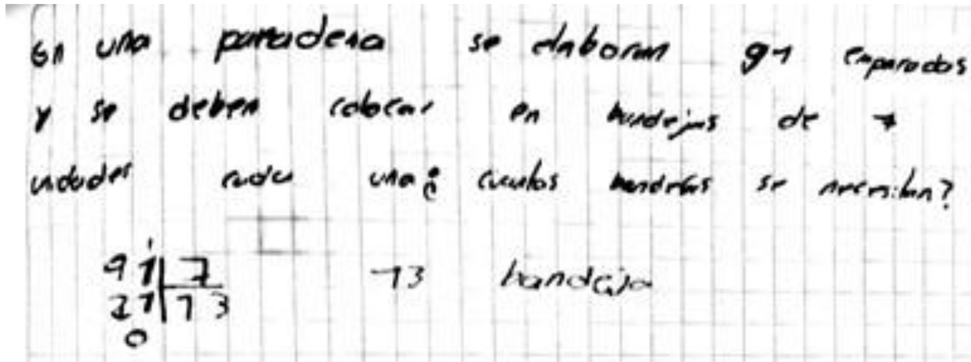


Figura 42. Problemas propuestos por Rigo II, ejercicio 3 de las Actividades de Aplicación.

Al finalizar el análisis de la etapa de las Actividades de Aplicación es necesario señalar que Rigo y Nairo dentro de la dimensión de contenido han propuesto dos problemas, uno asociado a la multiplicación y otro que acude a su inversa: la división. Ambos problemas son inscritos por Vergnaud (1991) como casos simples, lo que posibilita ubicar a ambos estudiantes en un nivel de aprendiz ya que por lo general prevalecen los conceptos disciplinares, sus producciones, sin embargo, aún reflejan algunas concepciones intuitivas como asignar, por ejemplo, precios y valores a los productos y/o objetos alejados de la realidad (Boix y Gardner, 1999).

Mariana por su parte, se ubica en el mismo nivel ya que, aunque no plantea un problema específico para la multiplicación, los problemas que genera se asocian a la estructura multiplicativa, la estudiante incluso intenta ir más allá –planteando un problema de dos operaciones–, sus producciones sugieren que durante esta última etapa de Actividades de Aplicación Mariana "hace más conexiones dentro de una red de conceptos" (Hetland, et al., 1999, p. 285).

En cuanto a la dimensión de formas de comunicación, los tres participantes han hecho uso de diversos sistemas simbólicos: números, letras, signos; además evidencian un reconocimiento de las características mínimas de un problema. Aunque, al retomar los textos se observa la utilización de términos coloquiales, un diseño del problema "de forma ritualista" (Hetland et al., 1999, p. 275) –exposición de características y datos del problema, presentación del interrogante– por estas razones, los estudiantes son catalogados en el nivel de novato dentro de esta dimensión.

Respecto a los modos de convalidación del conocimiento asociados a la dimensión de métodos, los estudiantes presentan diversos caminos de solución para los problemas de la estructura multiplicativa, en general utilizan procedimientos propios de la disciplina. No obstante, los estudiantes evaden mecanismos que les permiten verificar sus planteamientos y respuestas (Hetland et al., 1999) lo que los ubica en un nivel de novato.

Para terminar, es necesario reiterar que la etapa de actividades de aplicación se relaciona de manera directa con la dimensión de propósito, quizá de los tres momentos que propone la guía de Escuela Nueva (FVG), este es el que más se equipara con dicha dimensión de la comprensión, pues les permite a los estudiantes en términos de Boix y Gardner (1999) examinar las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento en situaciones del contexto. Después de lo anterior, se determina el nivel de comprensión de los estudiantes en dicha dimensión, en el caso de Mariana sus ejemplos se parecen a los propuestos en la guía de aprendizaje, los problemas construidos se alejan un poco de su realidad contextual y de su experiencia, por lo tanto, esta estudiante es catalogada en el nivel de novato.

Por su parte, Nairo y Rigo, durante la etapa de aplicación corroboran lo manifestado en sus entrevistas donde aseguran que las actividades realizadas son útiles *“en la calle, si quiero comprar por ejemplo, un Play […] entonces dividimos cuánto le toca al uno o cuánto le toca al otro”*(Nairo, 2019, transcripción entrevista), *“por ejemplo cuando voy a la tienda y me dicen que vale 800 y uno tiene 2400 […] y uno ya sabe, por las tablas de multiplicación”* (Rigo, 2019, transcripción entrevista), sus desempeños y sus aportes de información permiten ubicarlos en el nivel de aprendiz –dimensión de propósitos– teniendo en cuenta que, en el planteamiento de los problemas combinan sus experiencias personales –venta de gallinas, balones, reparto de bandejas– con sus conocimientos iniciales, además de demostrar “dominio y compromiso personal con sus tareas escolares” (Hetland et al., 1999, p. 287).

Tabla 14. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades de Práctica por dimensiones

Nivel / Dimensión	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Contenido			Establece las cuatro magnitudes implícitas en un isomorfismo de medidas, para resolver un problema matemático de este tipo.	
			Nairo, Rigo Mariana	
Métodos		Utiliza procedimientos propios de la disciplina para resolver problemas multiplicativos, pero no acude a ningún mecanismo de convalidación a sus respuestas.		
		Nairo, Rigo Mariana		
Propósitos		Formula problemas de tipo multiplicativo, pero no establece relación con situaciones del contexto.	Formula problemas de tipo multiplicativo y los relaciona con experiencias personales y situaciones de su contexto.	
		Mariana	*Nairo- Rigo*	
Formas de comunicación		Reconoce las características de un problema multiplicativo y utiliza diversos sistemas simbólicos durante su construcción y su solución.		
		Nairo, Rigo Mariana		

4.1.2. Análisis guía 2. Exploremos las superficies de nuestro entorno.

En este apartado se hace un análisis de las acciones implementadas en la guía 2, asociadas a los problemas tipo: producto de medidas.

Como ya se ha dicho, el segundo grupo de problemas de la guía hace parte de los denominados por Vergnaud (1991) como producto de medidas. En concreto, permite distinguir dos clases de situaciones, una que se resuelve con multiplicación y otra con la división, este tipo de problemas hacen alusión a encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales a través de multiplicar; o encontrar una de dichas medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida-producto a través de la división (Vergnaud, 1991). Se toman, entonces, aquellas medidas elementales que al multiplicarse dan como resultado la medida de un área o una superficie.

4.1.2.1 Las dimensiones de la comprensión y las Actividades Básicas.

El primer ejercicio de las Actividades Básicas propuesto en la guía de aprendizaje de la Fundación Volvamos a la Gente, consiste en escribir el proceso para hallar el área del cuadrado y el área del rectángulo, allí se plantea la *multiplicación* como la operación matemática que permite encontrar la medida de la superficie; además, se definen nociones como el metro y el centímetro cuadrado, asumidos como medidas resultantes al multiplicar o dividir dos dimensiones. Luego, de escribir la información contenida en las Actividades Básicas, se solicita a los participantes medir el ancho y el largo del primer y segundo salón de clase, al igual que la cocina con el fin de establecer su área.

En primer lugar, Nairo, luego de escribir: "*área del rectángulo y área del cuadrado"* (registro cuaderno de notas de Nairo) pregunta: *"¿cómo vamos a hallar el área?"* en ese instante su compañera Mariana le indica, -*como aparece en la guía*. Seguido, Nairo toma la cinta métrica y mide los lados del salón, al finalizar, expresa, *"ya medimos el área",* cuando observa que otros compañeros van a medir, les dice: *"tiene que medir el área, el largo y el ancho"* (Nairo- Mariana, 2019, transcripción de observación). Con respecto al algoritmo, se puede apreciar que calcula las medidas en centímetros, además, utiliza el símbolo $\boldsymbol{x}$ (por) y la expresión *área* para dar respuesta al problema, si bien al multiplicar el número $4\ x\ 678$ cm, la operación no es correcta, la respuesta se aproxima al área real del salón, que es $335.610cm^2$.

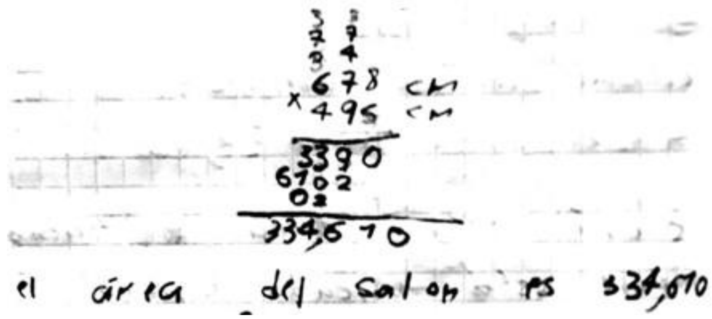


Figura 43. Respuesta de Nairo, al ejercicio 1 de las Actividades Básicas.

De acuerdo con lo expuesto, Nairo reconoce que hallar la medida de la superficie implica o involucra la acción de medir, y finalmente, con ayuda de su compañera –quien lo remite al texto guía– deduce que debe tomar las medidas del largo y el ancho de salón. Desde esta mirada, Vergnaud (1991) afirma que “la primera preocupación que tiene el niño delante de un problema es la de saber cuáles informaciones son útiles y cuáles inútiles” (p. 226). Nairo, al resolver dichas preocupaciones trabaja en dar solución al problema.

Por su parte Rigo, como se evidencia en la figura 44 toma la cinta métrica y mide los dos lados del segundo salón de clases y escribe en su cuaderno las medidas expresadas en centímetros. Posteriormente, desarrolla el algoritmo en el orden que corresponde, expresa el símbolo x , y ejecuta la multiplicación, sin embargo, presenta un error en la suma de los valores, que para este problema fue 272.800.

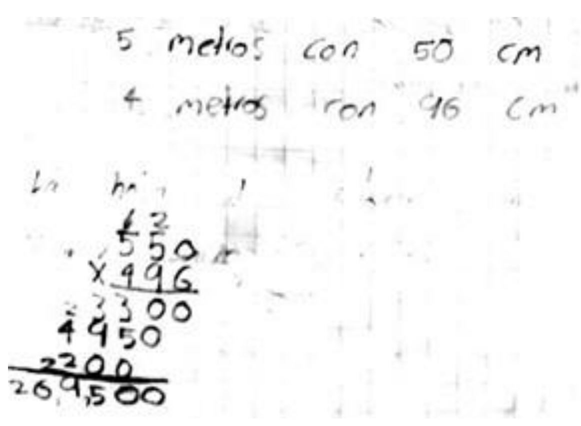


Figura 44. Respuesta de Rigo, al ejercicio 1 de las Actividades Básicas.

Contrario a lo que sucede con Nairo, Rigo establece antes la tarea a realizar y recopila los datos que necesita para ello, también determina que la operación que responde a las inquietudes presentadas en el problema es la multiplicación. No obstante, Rigo presenta dificultades al desarrollar el algoritmo, en palabras de Vergnaud (1991) esto puede explicarse de la siguiente manera “si los niños tienen todavía dificultades con lo que lleva en la adición, podemos esperar los peores fracasos en la multiplicación” (p. 152). Esta afirmación aplica no solo respecto a las cifras que hay que “llevar” sino para todas las acciones donde la suma se ve involucrada. El caso de Rigo, puede remitirse o estar asociado a dificultades o inquietudes respecto a la suma.

En cuanto a Mariana, expresa que uno de los lados mide *73 cm*, lo cual no corresponde a la medida real de un lado del salón que son tres metros y 73 centímetros, en ese momento se ha señalado, la medida real de dicho lado, a lo que la participante responde: *“son tres centímetros con 73 de área”* (Mariana, 2019, transcripción de observación). Ante esto, el maestro replica que las medidas hacen alusión a metros y centímetros. Terminada la aclaración, Mariana escribe y señala las cantidades utilizando las comas, resaltando que las medidas se expresan en *metros*. Luego de ello, efectúa la operación matemática paso a paso, como una receta (Boix y Gardner, 1999), utilizando símbolos como x, la representación gráfica de superficie m^2 y la expresión *área* para indicar su respuesta. Mariana durante el proceso utiliza puntos y comas, sin embargo, no precisa si su uso tiene que ver con la distinción entre números enteros o decimales, como se aprecia en la figura 4.

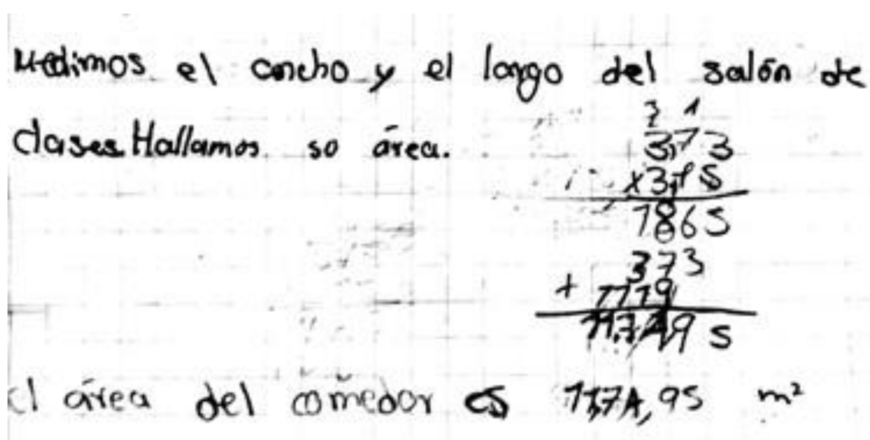


Figura 45. Respuesta de Mariana, al ejercicio 1 de las Actividades Básicas.

En el caso de Mariana, las inquietudes que presenta van mucho más allá de las estructuras multiplicativas, también tiene que ver con el concepto de medidas, el reconocimiento de esta y su uso en diferentes contextos. Este aprendizaje interfiere en la interpretación que hace de los datos recolectados para la solución del problema, de ahí la importancia de abordar las matemáticas como un sistema articulado de pensamientos (MEN, 1998).

Para resumir un poco lo dicho hasta aquí, se puede indicar que Nairo y Mariana, al inicio presentan dificultades para recolectar las medidas que demanda el problema y al mismo tiempo les cuesta identificar que, por sí solas, dichas medidas no resuelven el problema. Es decir, necesitan una operación. Lo opuesto se observa en el caso de Rigo, quien no ha manifestado dificultades al hallar y representar simbólicamente las medidas, señalando para cada una los metros y los centímetros que corresponden, no obstante, al operar enfrenta ciertas dificultades con respecto a los valores en el resultado. Tales situaciones, pueden presentarse debido a la aparición de los racionales, Vergnaud (1991) expresa que hay una mayor dificultad para operar con números decimales y que para su comprensión es necesario llevar a cabo explicaciones adicionales. Por lo tanto, en la dimensión de contenido los estudiantes pueden considerarse en un nivel de novato debido a la falta de conexión de los conceptos, incluso dentro de la misma disciplina (Boix y Gardner, 1999).

A pesar de las dificultades descritas, es de precisar que Nairo y Mariana, emplean de manera vinculante conceptos propios de la disciplina (Hammerness, et al., 1999); a través de expresiones como *área*, cm^2, y x por lo que pueden estar próximos a ascender de nivel en dicha dimensión. Esta relación entre conceptos y expresiones es retomada en las entrevistas donde los dos estudiantes comparten afirmaciones como *"la que más me gustó, fue la del área de los salones […] por ejemplo, el área del salón 20* cm^2 *y la escuela 180* cm^2*"* (Mariana, 2019, transcripción entrevista), *"me gustó más el área, porque multiplicamos lado por lado, debíamos encontrar el área del comedor"* (Mariana, 2019, transcripción entrevista)

En lo concerniente a los métodos, los tres estudiantes acuden a la operación matemática –multiplicación– para hallar la medida de la superficie. Desde esta perspectiva, han basado sus respuestas en tablas preestablecidas, en este sentido, tal como lo expresa Hammerness et al. (1999), "los participantes creen que los conocimientos de las fórmulas de superficie eran válidos porque podían deducir tales fórmulas de otras que sabían que eran verdaderas"

(p. 311). Es así como los estudiantes se inscriben en un nivel de novato con tendencia al nivel de aprendiz. A pesar de ello, no son considerados en el tercer nivel debido a la aplicación mecánica de los pasos del algoritmo, la carencia de análisis y establecimiento de relaciones se hace evidente, cuando al corroborar las respuestas se detectan errores. Esta condición permite inferir que, los estudiantes no vieron la necesidad de respaldar sus afirmaciones o de averiguar si sus hallazgos eran correctos (Boix y Gardner, 1999).

En lo que respecta a las formas de comunicar, tal y como se ha mencionado al relacionar la solución de los problemas con la dimensión de contenido, Nairo y Mariana, no solo utilizaron cuantificadores numéricos, sino que también, introdujeron narraciones y símbolos matemáticos dotados de significado a sus respuestas tanto en las observaciones de clase, el material del estudiante y las entrevistas; desde esta afirmación se retoma lo expresado por Boix y Gardner (1999) al expresar que los estudiantes se mueven con flexibilidad y expresivamente dentro del género o tipo de realización en cuestión; en este sentido, tanto en las dimensiones de contenido y comunicación, Nairo y Mariana se ubican en un nivel de desempeño mayor a Rigo, quien se encuentra en el nivel de novato, obviando el uso de diferentes modos de representación de la información.

En cuanto a la dimensión de propósitos, puede afirmarse que no se registran en el ejercicio anterior afirmaciones que den cuenta del uso flexible del conocimiento en el contexto. Esto sucede a pesar de que los problemas planteados se relacionan directamente con la realidad. Si bien es cierto, que en las entrevistas los estudiantes han demostrado que recuerdan e incluso les agrada la actividad, es evidente también que aún no relacionan los problemas con otros distintos a los expuestos en el entorno escolar.

En relación con la siguiente acción propuesta en la etapa de Actividades Básicas, tomar una hoja de block, formar un cuadrado, medir sus lados y hallar su área; además de, doblar el cuadrado por la mitad (ver figura 46) y responder:

- ¿Cómo se llaman las dos nuevas figuras que se formaron y cuáles son sus áreas?

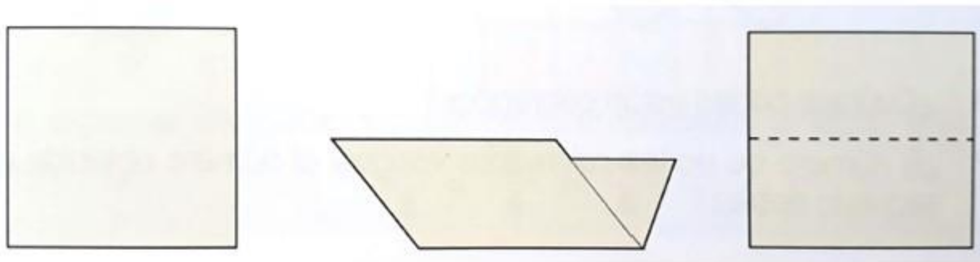


Figura 46. Tomada de la guía de Matemáticas 4 de la Fundación Volvamos a la Gente. p. 65.

En primer lugar, se analizan las respuestas y los procedimientos ejecutados por Nairo, quien primero mide los lados del cuadrado y multiplica las dos dimensiones, después, dobla la hoja por la mitad y opera igual a como lo hizo para hallar la medida de la primera superficie (ejercicio 1) tal como se ve en la figura 47. Respecto a los métodos empleados, el participante determina la multiplicación como la operación matemática para encontrar el área del cuadrado y del rectángulo, además, emplea conceptos disciplinarios como *área, por (x),* + y *rectángulo;* En esta dirección, tal y como lo expresan Boix y Gardner (1999) prevalecen las teorías y los conceptos disciplinarios; también, es evidente el valor de los métodos para construir conocimiento confiable.

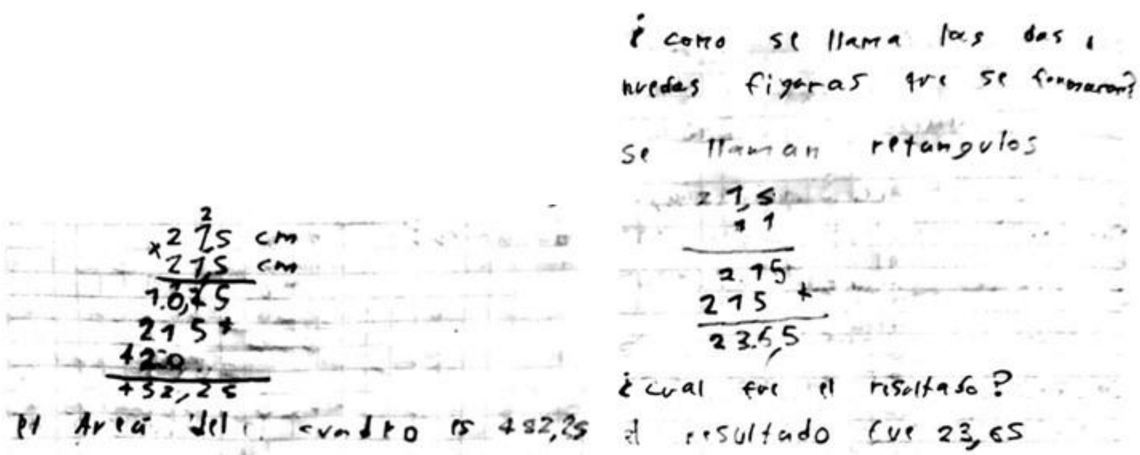


Figura 47. Respuesta de Nairo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

En cuanto a Mariana, inicialmente, mide los lados de la hoja y propone la primera multiplicación, seguido, dobla la hoja por la mitad y plantea la segunda operación matemática como se observa en la figura 48. En cuanto a los métodos, se puede indicar que utiliza el algoritmo de forma acertada; en lo que se refiere a los conceptos disciplinarios emplea el término *rectángulo* y la escritura simbólica para el área m^2 –sólo durante el primer ejercicio–; en lo que concierne a la comunicación, esta vez se limita a emplear cuantificadores numéricos.

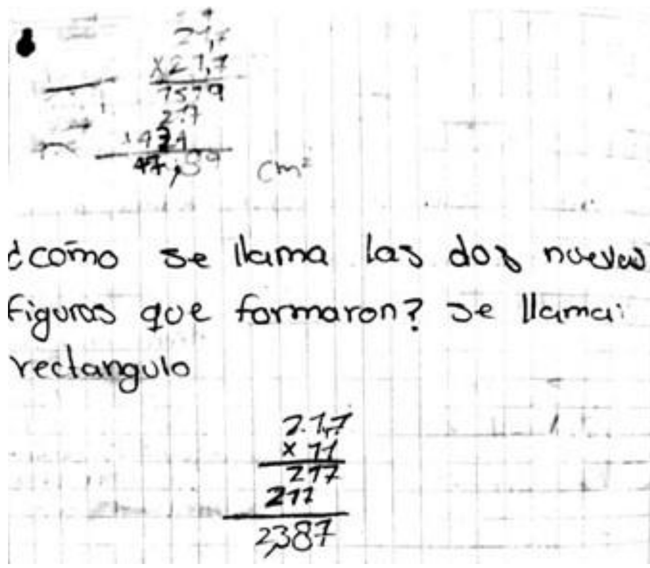


Figura 48. Respuesta de Mariana, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

Por su parte Rigo, mide las dos dimensiones de la hoja de *block* y elige una suma para hallar el área tal como se aprecia en la figura 49, en dicha figura, se observa que el estudiante no ha tenido en cuenta la segunda sección de la actividad, -doblar el papel por la mitad y encontrar la medida de la nueva superficie. Respecto a los conceptos disciplinarios, se exhibe la expresión *área*, término propio de la disciplina. En la dimensión formas de comunicación el recurso utilizado es el escrito y acudiendo a cuantificadores numéricos; lo descrito, indica que, en general, dentro de los discursos orales y escritos de Rigo prevalecen las creencias intuitivas, folklóricas o míticas (Boix y Gardner, 2019).

Figura 49. Respuesta de Rigo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

En suma, durante el desarrollo de las Actividades Básicas se aprecia con relación a la dimensión de contenido, el uso de conceptos en las repuestas de los estudiantes. En el caso de Nairo y Mariana, ambos emplean diversos símbolos y códigos numéricos y escritos para presentar sus respuestas y procedimientos, aspecto que se repite durante la ejecución de las entrevistas. Nairo, por su parte, utiliza el concepto *área* para cada una de las respuestas, mientras Mariana acude a la representación simbólica de la superficie m^2 y cm^2; por lo tanto, de acuerdo con su desempeño general, estos estudiantes pueden ubicarse en un nivel de aprendiz, puesto que durante el ejercicio y la entrevista "hicieron conexiones entre las formas, los signos y las operaciones" (Hammerness, et al., 1999, p. 317).

Rigo, a diferencia de sus compañeros, no incluye diversos símbolos y términos propios de la disciplina durante la solución de problemas, sus conceptos y procedimientos se acercan a concepciones o creencias intuitivas que aún no han sido refinadas (Boix y Gardner, 1999) ubicándose en un nivel de novato. Incluso, dentro de su entrevista, el estudiante afirma que *"casi no me gustó encontrar el área del salón, las encontraba duras [...] no era capaz"* (Rigo, 2019, transcripción de la entrevista).

En lo que tiene que ver con las formas de comunicación, Rigo se encuentra al igual que en la dimensión anterior en el nivel de novato, puesto que, sus medios de expresión Hammerness et al. (1999) se reducen al uso de cuantificadores numéricos. Esta característica, es distinta a la observada en Rigo durante la solución de problemas tipo isomorfismo de medidas donde las narraciones y operaciones mentales se inscriben en un nivel superior. En contraste, Mariana y Nairo, emplean tanto cuantificadores numéricos como narraciones, lo que permite indicar que su nivel de comprensión se ubica en el nivel aprendiz dentro de esta dimensión.

En cuanto a la dimensión de métodos, los participantes emplean el uso de algoritmos, los cuales en su mayoría presentan pasos estipulados y una estructura que corresponde a la multiplicación; por lo tanto, se puede discernir que el conocimiento disciplinario sigue considerándose no vinculado con el sentido común (Boix y Gardner, 1999), es decir, durante el segundo ejercicio –doblar la hoja por la mitad y hallar el área– los participantes no han advertido que dicha medida de la superficie corresponde a la mitad del área del cuadrado inicial, figura 46. De este modo, los estudiantes se encuentran en el nivel de novato dentro de la dimensión de métodos debido a la usencia de mecanismos y formas que cuestionen sus producciones y respuestas.

Por otra parte, después de explicar a los estudiantes el uso de los instrumentos de medida y algunas de sus características, éstos en los ejercicios que les suceden, los emplean de modo eficiente. A pesar de ello, aún no asocian al menos uno de los problemas con su vida diaria, ninguno de los casos ha expresado de modo oral o escrito, cómo estos problemas podrían presentarse en lo cotidiano o para qué sirve hallar el área de un lugar, por ejemplo. Lo dicho, puede interpretarse como falta de conciencia de los propósitos del conocimiento y por ende la ausencia de reconocimiento de los usos posibles de lo que aprenden (Boix y Gardner, 1999). Tales características inscriben a los estudiantes en un nivel de novato dentro de la dimensión de propósitos.

Tabla 15. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades Básicas por dimensiones.

Dimensión / Nivel	**Ingenuo**	**Novato**	**Aprendiz**	**Maestría**
Contenido		Algunas veces identifica las medidas elementales con las cuales se forma la medida producto.	Identifica las medidas elementales con las cuales se forma la medida producto.	
		Rigo	*Nairo-Mariana*	
Métodos		Algunas veces basa sus respuestas en tablas preestablecidas utilizando el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas a los problemas tipo producto de medidas.	Basa sus respuestas en tablas preestablecidas y utiliza el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas a los problemas de tipo producto de medidas.	
		Nairo-Rigo	*Mariana*	
Propósitos		Utiliza instrumentos de medida para determinar o hallar las medidas elementales en un problema de tipo: producto de medidas.		
		Nairo-Rigo-Mariana		
Formas de comunicación		Utiliza los cuantificadores numéricos como único sistema simbólico para comunicar sus respuestas.	Utiliza narraciones y cuantificadores numéricos para comunicar sus respuestas.	
		Rigo	*Nairo-Mariana*	

4.1.2.2 Las dimensiones de la comprensión y las Actividades de Práctica.

Para iniciar con las Actividades de Práctica, se retoma una figura de la guía de matemáticas de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (2017), en ella se aprecia el plano de una institución educativa y sus dependencias; con relación a la imagen, se solicita a los estudiantes:

- Indicar cuál es el área del terreno donde está ubicado el centro educativo, la administración y el laboratorio.

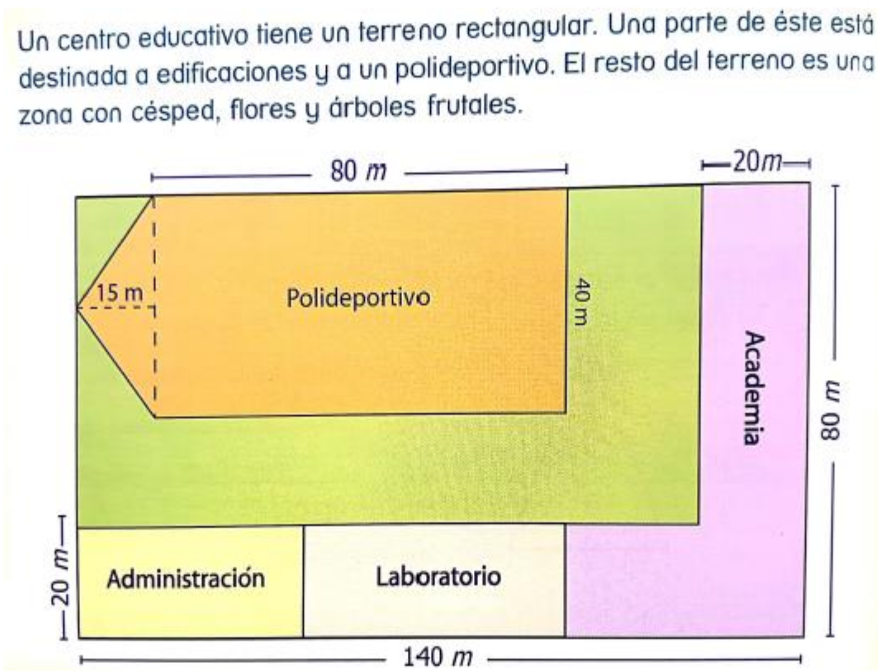


Figura 50. Tomado de la guía de Matemáticas 4°, Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 16)

En lo concerniente al proceso desarrollado por Nairo, plantea tal como se observa en la figura 51, una suma para hallar el área del terreno, en cuanto a la medida de la superficie de la administración y el laboratorio, utiliza una multiplicación para encontrarla.

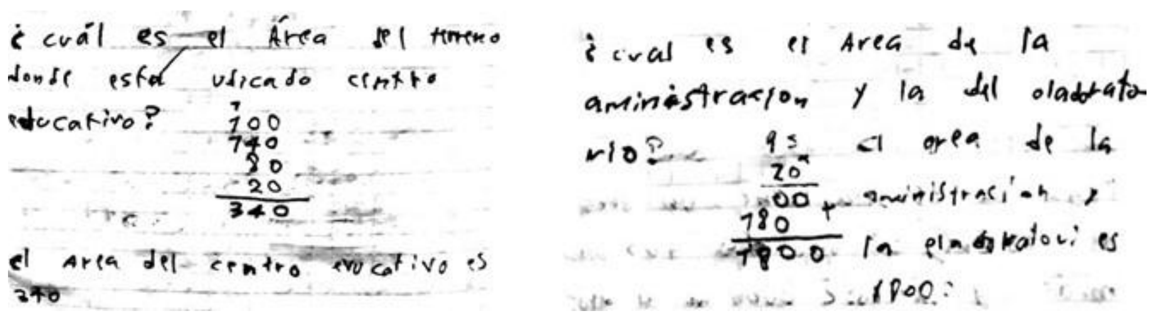


Figura 51. Respuesta de Nairo, al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica.

La ambivalencia presentada por Nairo en la solución de los anteriores problemas puede indicarse como lo proponen Boix y Gardner (1999) en “mezcla creencias intuitivas con fragmentos de conocimiento disciplinario, pero siguen dominando las visiones intuitivas” (p. 246). Además, devela cierta dificultad para establecer las medidas con las que puede hallar determinadas áreas, lo que indica que comprende la utilidad de los métodos para construir conocimiento, pero aplica los procedimientos mecánicamente y quizás al azar (Boix y Gardner, 1999).

Por su parte Rigo y Mariana plantearon la multiplicación para hallar el área del centro educativo, de la administración y del laboratorio, como se observa en las figuras 52 y 53.

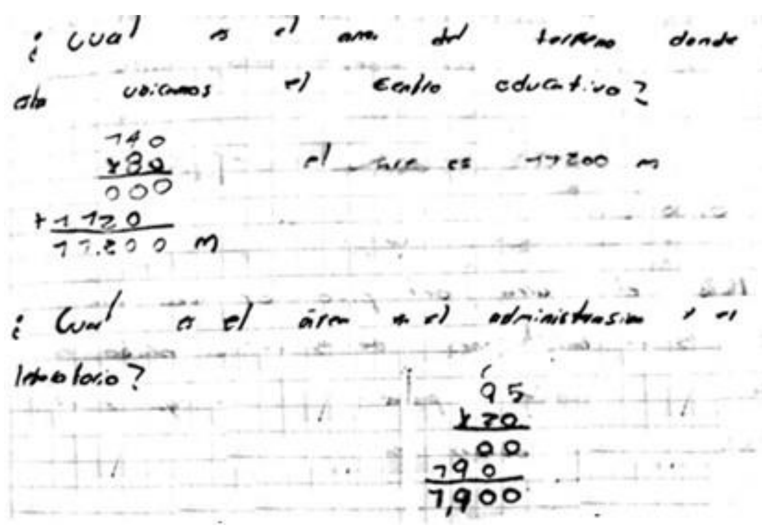


Figura 52. Respuesta de Rigo, al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica.

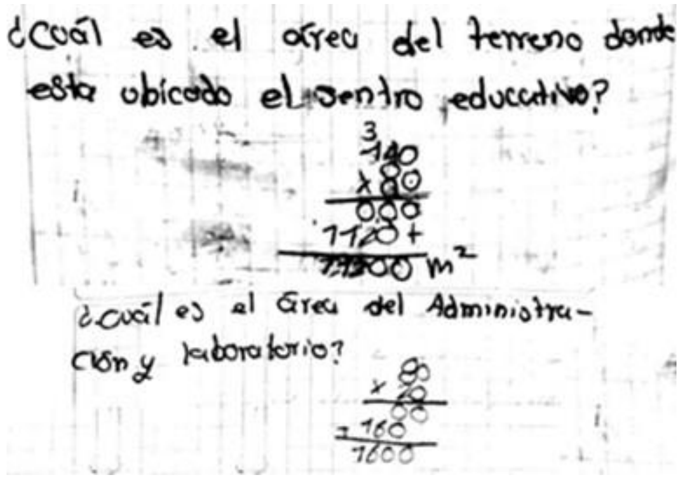


Figura 53. Respuesta de Mariana, al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica.

Igualmente, se aprecia en las respuestas de Rigo y Mariana, que establecen relaciones entre dos medidas para crear una tercera a través de la multiplicación en contextos totalmente nuevos; es decir, "se mueven espontáneamente entre ejemplos específicos y generalizaciones de la disciplina" (Boix y Gardner, 1999, p. 247). Además, es necesario indicar que usan métodos simples en forma sofisticada, lo que en este ejercicio los ubica en un nivel de aprendiz (Boix y Gardner).

Contrario a lo que sucede en las Actividades Básicas, las respuestas que proponen los participantes al ejercicio 1 de las Actividades de Práctica, puede decirse que, aunque se establecen relaciones entre las medidas elementales para hallar la medida producto, éstos no utilizan de modo verbal o escrito la noción de metro cuadrado y su vínculo con la medida de la superficie. Ante esto, se presentan dos sentidos complementarios según Vergnaud (1991), "el de cuadrado de un metro de lado, y el de producto de medida de longitud ($metro * metro$)" (p. 213). Tales sentidos, se suman a la manera como ocurren dichas relaciones, es lo que da significado a la escritura simbólica de las unidades de área m^2 y cm^2. En este orden de ideas, tal y como lo expresan Boix y Gardner (1999) omiten conceptos disciplinarios y prevalecen creencias intuitivas en la dimensión de contenido, por lo tanto, se ubican en el nivel de novato.

La segunda actividad en esta etapa consiste en encontrar una de las medidas elementales, cuando se conoce una y la medida-producto. Para ello se plantean dos problemas, el primero radica en encontrar la medida de uno de los lados del salón de clases, es decir, es una clase de problema: $4 * x = 20\, m^2$ donde la *x* representa la medida a descubrir. Con relación al segundo problema, se conserva la misma estructura, pero esta vez se hace alusión a la medida de la superficie de toda la escuela y uno de sus lados, conservando una forma similar a la anterior acudiendo a distintos valores $9 * x = 180\, m^2$.

Para esta etapa, Nairo y Mariana resuelven el problema multiplicando las medidas elementales, una de ellas desconocida, para hallar la medida producto conocida, como se aprecia en las figuras 54 y 55. Los estudiantes utilizan el mismo procedimiento en ambos casos, esto quizá está asociado a la similitud en la estructura de ambos problemas, en palabras de Vergnaud (1991) la situación puede ser la misma.

Figura 54. Respuesta de Nairo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

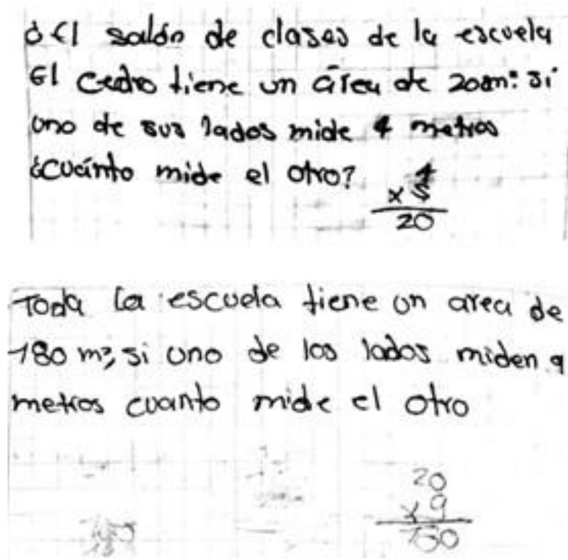


Figura 55. Respuesta de Mariana, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

La respuesta de los dos estudiantes, en el anterior ejercicio –Nairo y Mariana–, se aleja del uso de la división, ambos acuden a la multiplicación, operación utilizada en las actividades ejecutadas en la etapa anterior. Lo expuesto, puede ocurrir debido a la utilización mecánica de las operaciones, además Vergnaud (1991) plantea que “la división evidentemente es la más compleja de las cuatro operaciones, porque implica a la vez la sustracción, la multiplicación y la búsqueda por tanteo o cuadramiento de las cifras del cociente” (1994, p.157).

En cuanto a Rigo, tal y como se aprecia en la figura 56 se le dificulta establecer relaciones entre dos medidas para crear una tercera a través de la multiplicación en contextos totalmente nuevos. Es así que, cuando se realizan preguntas acerca de cómo llego a la primera respuesta, el estudiante argumenta: “*como un lado mide cuatro entonces multiplica por los dos lados del salón* $4 * 2 = 8$*, después multiplica el seis por el dos tal como lo hizo anteriormente 4,* $6 * 2 = 12$ *y luego suma* $8 + 12 = 20$*”* (Rigo, 2019, Transcripción observación) e indica que esa es la respuesta. A lo mejor, el participante ha creado nuevas formas de aproximarse a la respuesta, pero éstas no corresponden a las de rigor disciplinar, es decir, en palabras de Boix y Gardner (1999) hay ausencia de conceptos disciplinarios y prevalecen creencias intuitivas. En lo que tiene que ver con la noción de metro cuadrado, se puede apreciar que como ocurre con los demás estudiantes no es incluida en la solución.

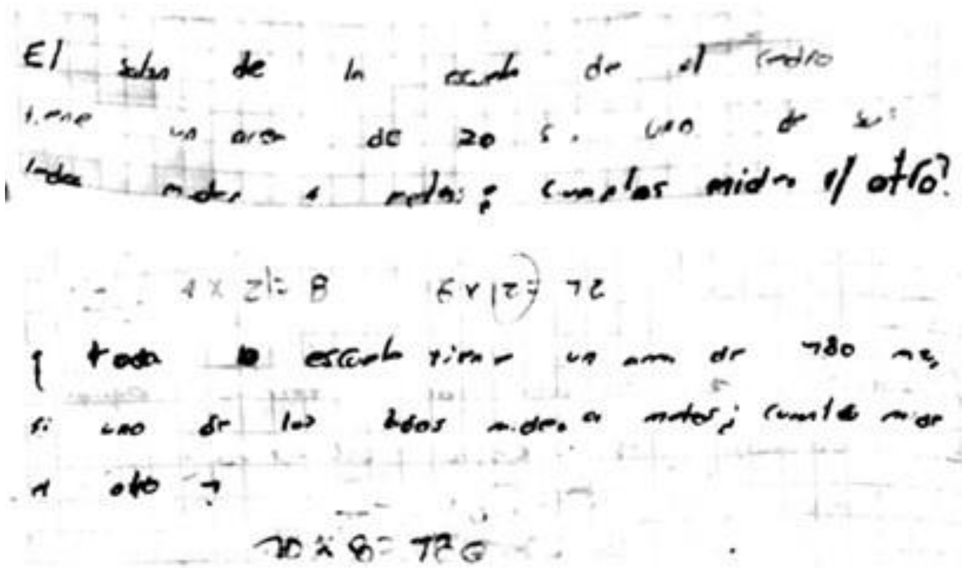


Figura 56. Respuesta de Rigo, al ejercicio 2 de las Actividades de Práctica.

Al hablar de la dimensión de formas de comunicación, en el desarrollo de este ejercicio, se puede percibir que Nairo y Mariana proporcionan respuestas que incluyen el uso de descripciones narrativas y cuantificadores numéricos, este tipo de justificaciones los ubica en el nivel de aprendiz, tal como lo indica Boix y Gardner (1999) en este nivel, tienden a usar algunos sistemas de símbolos para expresar lo que han aprendido. Por su parte, Rigo también enuncia de forma narrativa sus respuestas, sin embargo, privilegia el uso de cuantificadores numéricos. Este estudiante, durante el último ejercicio demuestra un uso de sistemas de símbolos sin reflexión, una especie de paso a paso, lo que da como consecuencia representaciones chatas y poco claras, hay poca intención comunicativa o estética evidente (Boix y Gardner, 1999).

En lo que tiene que ver con los métodos, los tres estudiantes emplearon el algoritmo o en su defecto, tablas preestablecidas para hallar sus respuestas (Boix y Gardner, 1999). Por su parte, el contenido o conceptos disciplinarios estuvieron marcados por algunas dificultades, entre ellas, el uso de las operaciones en la solución de problemas no rutinarios y las relaciones que se establecen entre las medidas.

Tabla 16. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades de Práctica por dimensiones.

Nivel / Dimensión	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Contenido		En algunas oportunidades establece relaciones entre dos medidas para crear una tercera a través de la multiplicación o la división.	Establece relaciones entre dos medidas para crear una tercera a través de la multiplicación o la división.	
		Rigo	*Nairo-Mariana*	
	Se le dificulta reconocer la noción de metro cuadrado y su relación con la medida de la superficie.	Reconoce la escritura simbólica del área en m^2 *y* cm^2, pero se le dificulta asociarla con la medida de la superficie.		
	Nairo	*Rigo – Mariana*		
Métodos			Se basa en tablas preestablecidas y utilizando el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas a los problemas de tipo: producto de medidas.	
			Mariana-Nairo-Rigo	
Propósitos				
Formas de comunicación		Utiliza un solo tipo de registro para dar a conocer sus soluciones asociadas a los problemas tipo producto de medidas.	Utiliza varios sistemas de símbolos: verbales, escritos y numéricos para dar a conocer sus respuestas sobre problemas tipo: producto de medidas	
		Rigo	*Mariana-Nairo*	

4.1.2.3 Las dimensiones de la comprensión y las Actividades de Aplicación.

Para llevar a cabo las Actividades de Aplicación se solicita a los participantes, hallar el área del piso de cada una de las habitaciones de su casa y escribir en el cuaderno el procedimiento o los procedimientos realizados para determinar los resultados obtenidos.

En lo que tiene que ver con la respuesta de Nairo, Rigo y Mariana, en las figuras 57, 58 y 59, se puede observar que los participantes, en la dimensión de métodos se ubican en el nivel aprendiz. Pues, luego de medir los lados de la habitación determinan que la multiplicación es la operación que permite establecer la medida de la superficie, además, han ubicado los símbolos que hacen referencia a ésta, es decir, m^2 y la expresión *área.* Lo anterior, se relaciona con el planteamiento de Hetland et al., (1999) “El proceso por el cual construyó su comprensión fue conjetura, experimentación, reflexión y revisión” (p. 281). En este caso, la conjetura hace alusión a las hipótesis que los estudiantes plantean para responder el problema; la experimentación a los procesos de medición que cada participante realiza sobre el área de su habitación; la reflexión a las consideraciones acerca de la operación matemática a emplear y, por último, la revisión se refiere a la veracidad en las respuestas.

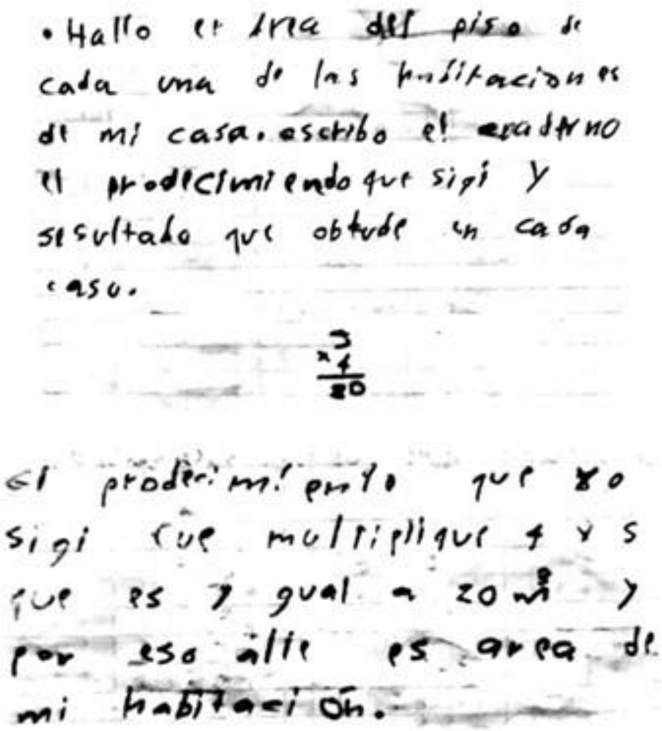


Figura 57. Respuesta de Nairo, ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación.

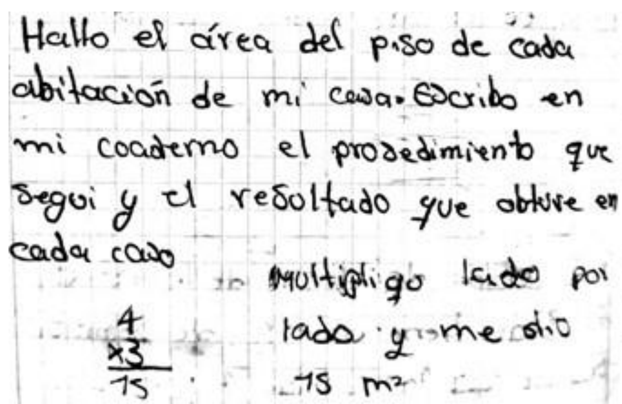


Figura 58. Respuesta de Mariana, ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación.

Asimismo, en Nairo y Mariana, se aprecia el uso de símbolos y nociones disciplinares cuando aparecen expresiones como *lado por lado, m^2* o *área de mi habitación,* el uso de dichos términos es retomado durante el desarrollo de la entrevista, allí Nairo recuerda *"cuando medimos la casa, por ejemplo, la habitación de Susana que era doce por cuatro que dio 48 de área"* (Nairo, 2019, transcripción entrevista), *"me gusta cuando me enseñan el área"* (Mariana, 2019, transcripción entrevista). Estos ejemplos, tal y como lo plantea

Boix y Gardner, demuestran una fértil red de ideas o puntos de vista dentro de un dominio, además, se mueven espontáneamente entre ejemplos específicos y generalizaciones de la disciplina (1999). Lo que los ubica en el nivel aprendiz.

Rigo por su parte, expresa a través de una multiplicación horizontal su respuesta y se apoya en una representación gráfica para validar sus hallazgos. Esta respuesta permite evidenciar un elemento hasta ahora nuevo en los métodos para solucionar este tipo de problemas, el hecho de representar gráficamente la situación puede indicar que el participante, reconoce la importancia de convalidar el conocimiento a través de reflexiones estéticas (Boix y Gardner, 1999), por lo tanto, en la dimensión de métodos se ubica en el nivel aprendiz.

En lo que tiene que ver con la dimensión de contenido, tal como se observa a lo largo del desarrollo de las actividades, Rigo, omite el uso de elementos propios de los conceptos disciplinares, como la escritura simbólica de la superficie m^2 o su relación con el término *área,* en este sentido, se puede indicar que el participante, “se extienden en ejemplos, pero no son capaz de vincularlos con generalizaciones o marcos del dominio” (Boix y Gardner, 1999, p.247) por lo tanto se ubica en el nivel novato.

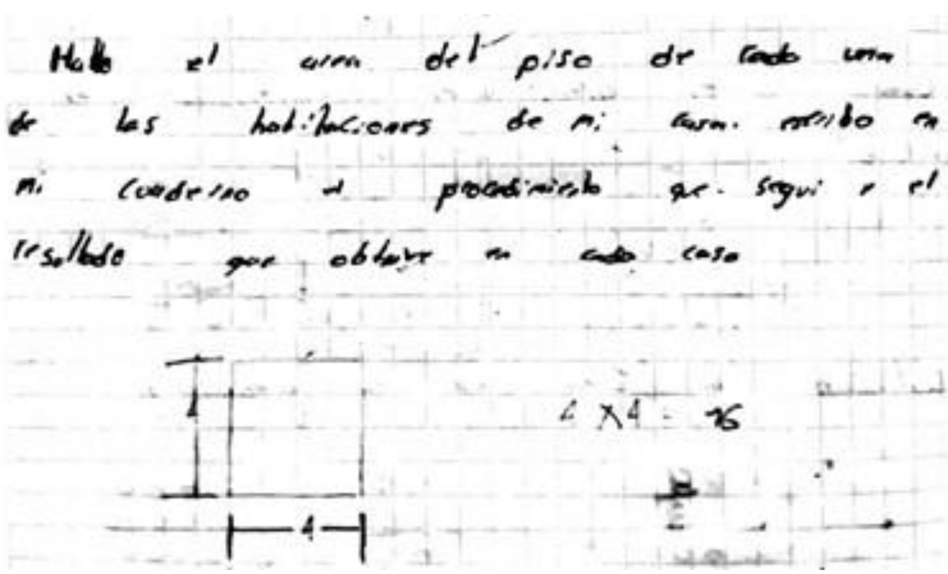


Figura 59. Respuesta de Rigo, ejercicio 1 de las Actividades de Aplicación.

Con relación a la búsqueda de la superficie de sus habitaciones y la dimensión de propósitos, los participantes demostraron uso flexible de ideas y conceptos para dar respuesta a situaciones del contexto al medir sus habitaciones, representar la situación y operar. En este sentido, reinterpretan la experiencia cotidiana a través de lentes aprendidos en la escuela, Boix y Gardner (1999) por lo que se ubican en el nivel aprendiz. Estas, afirmaciones son confirmadas durante el desarrollo de las entrevistas, cuando los estudiantes reviven la situación y enumeran algunos ejemplos *“el área del salón […], la habitación de Susana […] que dio 48 de área”* (Nairo, 2019, transcripción entrevista) *“encontrar el área del comedor”* (Mariana, 2019, transcripción entrevista).

En relación con la comunicación, si bien Rigo no utiliza narraciones en sus respuestas, emplea un nuevo modo de representar gráficamente la información durante la etapa de Actividades de Aplicación, por lo tanto, se ubica en el mismo nivel que sus compañeros; en este sentido, Boix y Gardner (1999) expresan “los alumnos usan más de un sistema de símbolos y deciden cuál es el más poderoso para el objetivo que tienen en mente” (1999, p. 255) estas características corresponden al nivel aprendiz.

Tabla 17. Descriptores de nivel durante el desarrollo de las Actividades de Aplicación por dimensiones.

Dimensión / Nivel	**Ingenuo**	**Novato**	**Aprendiz**	**Maestría**
Contenido		Reconoce la noción de metro cuadrado, pero no la relaciona con las respuestas a los problemas de superficie	Utiliza la noción de metro cuadrado para dar respuesta a los problemas de su cotidianidad, relacionándolo con la medida de superficies conocidas.	
		Rigo	*Nairo-Mariana*	
Métodos		Se basa en tablas preestablecidas y utiliza el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas a problemas tipo producto de medidas.	Se basa en tablas preestablecidas y utiliza el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas de los problemas de tipo: producto de medidas. Además, representa través de elementos pictóricos las situaciones.	
		Rigo	*Nairo-Mariana*	

Propósitos		Demuestra uso flexible de ideas y conceptos asociados a los problemas de tipo: producto de medidas para dar respuesta a situaciones del contexto.
		Nairo-Rigo-Mariana
Formas de comunicación		Utiliza cuantificadores numéricos o, narraciones orales, gráficas o escritas para comunicar sus hallazgos.
		Rigo-Nairo-Mariana

Luego de describir y analizar el desarrollo de las tres actividades propuestas en la guía de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, es conveniente resaltar que los participantes en la medida en que desarrollan las actividades vinculan nuevos elementos asociados a los conceptos disciplinares inmersos en la solución de problemas del tipo: producto de medidas. Finalmente, en las Actividades de Aplicación, el uso de símbolos y conceptos propios de la disciplina, como la multiplicación y expresiones como *área*, sumadas a la noción de metro cuadrado y representaciones gráficas, evidencian progreso en al alcance de los desempeños propuestos en esta etapa de la guía.

4.2. Apuntes finales sobre el análisis

Este apartado intenta realizar una síntesis del análisis llevado a cabo en el capítulo cuatro que precede. Antes de ello, se recuerda que el propósito de esta investigación consiste en analizar cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes de grado quinto de Educación Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. En esta línea de análisis de los datos, el presente trabajo da a conocer las siguientes puntualidades acerca del desempeño de los estudiantes en cada una de las guías y las actividades propuestas a lo largo de esta investigación, lo anterior en el marco de la EpC y al final de este apartado se anexa una tabla que expone los desempeños alcanzados por los estudiantes.

4.2.1. Las comprensiones presentadas por los estudiantes en cada una de las dimensiones.

4.2.1.1 Dimensión de contenido.

En primer lugar, de acuerdo con el análisis, se establece que, en la dimensión de contenido los estudiantes hacen uso de los conceptos disciplinarios y la utilización de un repertorio de conocimientos y vocabulario asociados a los problemas de la estructura multiplicativa y los conceptos que giran a su alrededor. En este sentido, los participantes utilizan términos que indican que existe una vinculación de los conceptos que involucran los problemas de tipo multiplicativos, evidenciado en expresiones como: *doble, por, veces, área, lado*; la utilización de símbolos como: m^2, x y la ejecución de los distintos algoritmos.

Retomando esta última parte, referida al uso de los algoritmos en la solución de los problemas tipo isomorfismo de medidas, se expone que Nairo y Rigo, en general, evitan el uso de la multiplicación como algoritmo formal, sin embargo, aciertan en las respuestas de la mayoría de los problemas; por el contrario, Mariana a pesar de hacer uso de las operaciones formales, en casi todos los casos, no obtuvo éxito en la solución de este tipo de problemas. Lo anterior tiene relación con lo expuesto por Boix y Gardner (1999) cuando expresan que los alumnos se extienden en ejemplos, pero no son capaces de vincularlos con generalizaciones o marcos del dominio. Esto indica que el uso del algoritmo no necesariamente asegura la comprensión de los problemas multiplicativos en los estudiantes, sumado a esta realidad, emergen apuestas como las que sugiere Vergnaud (1991) direccionadas a la comprensión de las relaciones y las estructuras de los problemas.

Lo opuesto ocurre en lo que concierne al tipo de problemas denominados, producto de medidas. Allí Mariana, demuestra uso de las operaciones formales con mayor acierto, mientras que Nairo y Rigo, manifiestan un número mayor de dificultades. Esto demuestra la diversidad de niveles de la comprensión que pueden emerger alrededor de una estructura, en este caso, la que tiene que ver con problemas de tipo multiplicativo y el uso de sus operaciones. Los problemas de isomorfismo de medidas constituyen un reto para Mariana, distinto a lo que le sucede con los de tipo producto de medidas; esta destreza es contraria a lo que ocurre con Nairo y Rigo. Es así, como la diversidad de problemas que se presentan en el aula de clase, se convierten en escenarios de posibilidad para todos, "en oportunidad de demostrar novedosas conexiones entre contextos disciplinarios y personales" (Hetland et al., 1999, p. 295).

Retomando la línea del uso de los algoritmos, conviene señalar algunos asuntos respecto a la división, puesto que, esta operación matemática no es utilizada por los participantes durante la solución de los problemas –aparece sólo en las actividades de aplicación–. Sobre este tema, durante la entrevista se han realizado algunas preguntas relacionadas, Mariana por ejemplo, expresa: *"lo que más disfruto es la división [...] se usa cuando se va a repartir"* (Mariana, 2019, transcripción entrevista) *"la que más me gusta es la división, sé dividir por una cifra y dos cifras"* (Rigo, 2019, transcripción entrevista), como ya se ha dicho, en otros apartados del análisis, la apreciación de los participantes, permite descifrar que el uso de la división se asocia solo si en el enunciado verbal aparecen las palabras repartir o dividir; es decir, "los ejemplos y generalizaciones están desconectados" (Boix y Gardner 1999, p. 247). En las entrevistas, Nairo también señala que: *"la división la utilizo muy poco, pero acá en la escuela [...] la división no la entiendo bien*" (Nairo, 2019, transcripción entrevista).

En resumen, se puede apreciar que, aunque dos de los tres estudiantes manifiestan conocimiento de la operación, y algunos de sus sentidos (repartir, partir) e incluso manifiestan en la entrevista que prefieren su ejecución, no identifican su uso durante la resolución de los problemas: isomorfismo de medidas y producto de medidas, esto puede deberse a la utilización o aplicación de esta en situaciones rutinarias.

Tabla 18. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Contenido.

Niveles	**Desempeños dimensión de contenido**
Ingenuo	Se le dificulta utilizar el concepto *veces* en sus registros para establecer la relación que existe entre una magnitud que contiene a otra.

	Presenta dificultades para reconocer la noción de metro cuadrado y su relación con la medida de la superficie.
Novato	Utiliza el concepto *veces* en sus registros para establecer la relación que existe entre una magnitud que contiene a otra. Emplea conocimientos disciplinarios e intuitivos para resolver problemas de isomorfismo de medidas –suma reiterada, multiplicación–. Algunas veces identifica las medidas elementales con las cuales se forman la medida producto. En algunas oportunidades establece relaciones entre dos medidas para crear una tercera a través de la multiplicación. Reconoce la noción de metro cuadrado, pero no la relaciona con las respuestas a los problemas de la medida de la superficie.
Aprendiz	Establece las cuatro magnitudes implícitas en un isomorfismo de medidas, para resolver problemas de este tipo. Identifica las medidas elementales con las cuales se forman la medida producto. Establece relaciones entre dos medidas para crear una tercera a través de la multiplicación. Utiliza la noción de metro cuadrado para dar respuesta a los problemas de su cotidianidad, relacionándolo con la medida de superficies conocidas.
Maestría	

4.2.1.3 Dimensión de métodos

Con respecto a los métodos o los modos que los participantes emplean para resolver problemas de tipo multiplicativo, tal como se viene exponiendo en la dimensión de contenido, los estudiantes a veces acuden a las operaciones formales con o sin éxito, en algunos –Rigo y Nairo– prevalecen las representaciones mentales, la adición repetida, los conteos de dos en dos, la búsqueda del doble o la partición en medios; es decir, “los alumnos empiezan a comprender que los métodos son útiles para construir conocimiento, pero aplican mecánicamente los procedimientos” (Boix y Gardner, 249, p.249).

Con relación a los problemas de producto de medidas, ocurre lo contrario, en éstos el uso del algoritmo prevalece; sin embargo, los gráficos o apoyos visuales para encontrar las respuestas son poco empleados.

Al indagar por dichos métodos durante las entrevistas, los estudiantes ofrecen diversas respuestas, algunas evidentes durante el proceso de aplicación y otras no tanto. Por ejemplo, Nairo argumenta que las operaciones matemáticas las puede hacer en el cuaderno, también de forma mental y con la calculadora (Nairo, 2019, transcripción entrevista). Por su parte, Mariana manifiesta que con la calculadora o en la mente puede encontrar las respuestas a los problemas. Mientras que Rigo, asegura "*la puedo hacer de dos formas, primero multiplicando, o por tablas o sumando y si es de división dividiendo*" (Rigo, 2019 transcripción entrevista). De esta manera, "los estudiantes ven el valor de los métodos para construir conocimiento confiable (Boix y Gardner, 1999) sin embargo, no los cuestionan y tampoco el modo como construyen sus respuestas a la hora de resolver los problemas.

En lo que respecta al uso de materiales concretos y su utilidad en la solución de problemas multiplicativos, tipo: isomorfismo de medidas y producto de medidas, las guías de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, posibilita la diferenciación de las magnitudes y su relación con las estructuras en diferentes escenarios e intencionalidades. En este orden de ideas, los materiales empleados ofrecen la opción de observar la capacidad de los estudiantes para vincular los conocimientos intuitivos con las generalizaciones disciplinares o conceptuales, recurriendo a métodos como: agrupación, clasificación, discriminación, medición o seriación.

En este sentido, el uso de las regletas de Cuissenaire y los billetes didácticos, permiten a Rigo desenvolverse con soltura en la solución de los problemas tipo isomorfismo de medidas. En el caso de Mariana y Nairo, lo anterior no ocurre. A pesar de ello, para la solución de problemas de tipo producto de medidas, se han utilizado materiales como la cinta métrica y el doblado del papel, tales recursos les posibilitan a los estudiantes definir las relaciones de lado por lado y el producto entre ellas, en especial, para Mariana y Nairo, mientras Rigo, tal y como lo ha exhibido en la entrevista ha presentado algunas dificultades.

Tabla 19. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Métodos.

Niveles	Desempeños dimensión de métodos
Ingenuo	Halla los resultados con procesos de experimentación y uso de materiales concretos, sin utilizar otros mecanismos de validación.
Novato	Diseña sus propias estrategias de solución y luego las relaciona con procedimientos propios de la disciplina. Emplea un solo método para resolver problemas de la estructura multiplicativa, y aunque este es propio de la disciplina –multiplicación–, lo aplica sin reflexionar acerca de su pertinencia en la solución del problema. Utiliza procedimientos propios de la disciplina para resolver problemas multiplicativos, pero no acude a ningún mecanismo de convalidación en torno a sus respuestas. Se basa en tablas preestablecidas y utiliza el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas.
Aprendiz	Propone diferentes métodos para resolver problemas multiplicativos e incluye dentro de sus soluciones algunos procedimientos disciplinares –múltiplo y divisor–. Se basa en tablas preestablecidas y utiliza el algoritmo (multiplicación o división) para hallar las respuestas. Además, representa través de elementos pictóricos las situaciones de búsqueda del área
Maestría	

4.2.1.3. Dimensión de Propósitos

La dimensión de propósitos se refiere a ¿qué entienden los participantes y qué hacen para resolver problemas de tipo multiplicativo y su uso en situaciones nuevas o que no hacen parte de su contexto inmediato? (Boix y Gardner, 1999). En este aspecto, los participantes encuentran posturas articuladas al contexto con relación al uso de la multiplicación y la división, Nairo asegura que *"ayuda cuando voy a la tienda a comprar el mercado […]para hacer cuentas en los negocios […] para hacer una casa"* (Nairo, 2019, trascripción entrevista), *"cuando quiero saber cuánto vale un producto […] cuando* *hacemos cuentas o salimos a la calle a comprar"* (Rigo, 2019, transcripción entrevista); éstas son situaciones comunes a su contexto y a los roles que les han sido asignados dentro del mismo.

En lo que respecta a Mariana, propuso que la multiplicación y la división *"nos sirven para la vida cotidiana, por ejemplo, cuando uno coge café sabe cuánto tiene que pagarle al que está cogiendo […] en el supermercado, por ejemplo, cuando se rebaja el 50%, en la ropa los almacenes".* (Mariana, 2019, transcripción entrevista). En este sentido, la participante, ha empezado a conectar lo que aprenden en la escuela con las experiencias cotidianas (Boix y Gardner, 1999).

En síntesis, para los participantes la comprensión en la dimensión de propósitos, cuando resuelven problemas de tipo multiplicativo se mueven en el nivel de novato y aprendiz, debido a que sus asociaciones se tejen alrededor de situaciones reales articuladas al contexto sin desligarse de los ejemplos y las discusiones que se generan en la escuela. De igual manera los estudiantes, limitan dichas asociaciones en el plano de lo verbal y son aplicadas en el ámbito educativo –tareas, actividades, ejercicios que coloca el maestro– pero, no van más allá de lo verbal.

Tabla 20. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de Propósitos.

Niveles	Desempeños dimensión de propósitos
Ingenuo	
Novato	Formula problemas de tipo multiplicativo, pero no establece relación con situaciones del contexto. Utiliza instrumentos de medida para ubicar las medidas elementales en un producto de medidas.
Aprendiz	Formula problemas de tipo multiplicativo y los relaciona con experiencias personales y situaciones de su contexto. Demuestra uso flexible de ideas y conceptos para dar respuesta a situaciones del contexto.
Maestría	

4.2.1.4. Formas de Comunicación

Con relación a los problemas de tipo multiplicativo se puede señalar que para cada uno existen aspectos propios del lenguaje. En este sentido, en los isomorfismo de medidas, las narraciones orales, escritas y el diálogo con los participantes se constituyen en insumos y vehículos que permiten observar y analizar la comprensión de los estudiantes, ya en lo que respecta al uso del algoritmo, si bien, los estudiantes señalan un uso flexible en el aspecto comunicativo al incorporar un nuevo elemento, esto no necesariamente indica mayor comprensión en el proceso de resolver problemas multiplicativos en la dimensión de contenido, como ocurre en el caso de Mariana, quien emplea diversas formas de comunicar y representar sus respuestas, pero con poco éxito a la hora de emitir la solución del problema.

En esta dimensión los estudiantes “tienden a usar un solo sistema de símbolos para expresar lo que han aprendido” (Boix y Gardner, 1999, p. 255); en este orden de ideas, Nairo y Rigo prefieren lo oral, en especial las narraciones; por su parte Mariana, manifiesta especial interés por el uso de cuantificadores numéricos.

En cuanto a los problemas de producto de medidas, dentro de esta dimensión fue posible observar que, aquellos estudiantes que antes utilizaban o privilegiaban las narraciones extendieron su repertorio comunicativo hasta el uso de signos y símbolos. Con respecto a Mariana y el uso de cuantificadores numéricos, en este nuevo escenario, presenta una mayor soltura y acierto en sus respuestas. En suma, tal y como lo expresa Boix y Gardner (1999) “los alumnos demuestran conciencia de las reglas cuando empiezan a explorar nuevos géneros” (p. 237).

Tabla 21. Desempeños alcanzados por los participantes en la dimensión de formas de comunicación.

Niveles	Desempeños dimensión de formas de comunicación
Ingenuo	Representa la información de forma simple, solo acude a una forma de comunicar sus respuestas y en ocasiones éstas no son claras.
Novato	Utiliza un solo tipo de registro –verbales–para dar a conocer sus construcciones en torno a las soluciones que propone para los problemas tipo isomorfismo de medidas.

	Emplea los cuantificadores numéricos como único sistema simbólico para comunicar sus respuestas. Usa un solo tipo de registro –numéricos–para dar a conocer sus construcciones alrededor de las soluciones que propone para los problemas tipo producto de medidas.
Aprendiz	Utiliza varios sistemas de símbolos: verbales, escritos y numéricos para dar a conocer sus respuestas sobre problemas asociados a la estructura multiplicativa. Acude al uso de cuantificadores numéricos o narraciones orales, gráficas o escritas para comunicar sus hallazgos.
Maestría	

5. Conclusiones y recomendaciones

En esta sección del trabajo se presentan las conclusiones que emergen a lo largo del proceso de investigación expuesto en este texto y, al mismo tiempo, se dan a conocer algunas líneas de sentido que surgen en el trayecto y que pueden dar lugar a nuevas y futuras investigaciones. En primer lugar, se presentan las conclusiones en torno a la pregunta de investigación, allí de manera sincrónica aparecen las cuatro dimensiones de la comprensión ancladas al modelo Escuela Nueva – Fundación Volvamos a la Gente –. Seguido, aparecen las conclusiones asociadas al cumplimiento del objetivo general y los objetivos específicos de la investigación, para más adelante dar paso a los aportes que hace esta investigación en el campo de la enseñanza de las matemáticas, finalmente se presentan las posibles líneas de investigación que pueden surgir alrededor del estudio.

5.1 Conclusiones a propósito de la pregunta de investigación

Teniendo en cuenta la pregunta de investigación que guía este trabajo *¿Cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes de grado quinto de Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva, en el marco de la Enseñanza para la comprensión?* Este interrogante, sugiere un análisis enmarcado en las cuatro dimensiones de la comprensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, propuestas en el marco de la EpC y, por ende, la clasificación dentro de sus niveles. Todo lo anterior, anclado a la apuesta didáctica presentada por la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente con relación a los problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas y producto de medidas. Por lo tanto, dicha clasificación de la comprensión, en atención a todas las características enunciadas, configuran el aporte de esta investigación. A continuación, se enumeran los hallazgos encontrados en cada una de las dimensiones.

Con relación a lo anterior, se puede señalar que la dimensión de contenido se encuentra presente en todas las etapas de la guía de Escuela Nueva (FVG), las actividades propuestas acuden al repertorio de conocimientos que el estudiante trae consigo y a los que éstos poco a poco van construyendo con relación a los problemas de tipo multiplicativo. Es así, como en el desarrollo de las Actividades Básicas, los estudiantes sacan a la luz sus concepciones intuitivas, folklóricas (Boix y Gardner, 1999) acerca de los problemas que deben resolver, ubicándose de modo general en un nivel de compresión ingenuo. Sin embargo, durante las Actividades de Práctica y de Aplicación, logran refinar sus concepciones intuitivas, ya sea "mezclándolas con conocimientos disciplinarios" (Boix y Gardner, 1999, p. 246) –nivel de novato– o moviéndose entre ejemplos específicos, propios –asociados a la vida del campo y sus prácticas económicas– y algunos de la disciplina, inscribiéndose en el nivel de aprendiz dentro de la dimensión de contenido. Es de anotar que, en el tránsito de las tres etapas de clase propuestas en las guías de aprendizaje, ninguno de los estudiantes se ubicó en el nivel de maestría.

Respecto a la dimensión de métodos, puede decirse que el modelo de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente a lo largo del desarrollo de las Actividades Básicas, Prácticas y de Aplicación, permiten a los estudiantes poner en acción, diferentes "estrategias, métodos, técnicas y procedimientos" (Boix y Gardner, 1999, p. 244) en la resolución de problemas multiplicativos, sin embargo, no hay evidencia de actividades u otras estrategias que los inviten a cuestionar sus propias creencias o que los remitan a la búsqueda y convalidación de la información en otras fuentes, también es de anotar el uso sistemático que presentan los estudiantes respecto a los algoritmos –división o multiplicación– lo que ha ubicado a los estudiantes en el nivel de novato. Aunque de modo verbal, otros métodos y formas pueden aparecer, no superan el uso convencional de las operaciones o no trascienden hacia asociaciones que sobrepasen la comprensión de la multiplicación como suma reiterada.

Además de las dimensiones de contenido y métodos, se encuentra la dimensión de formas de comunicación presente también en todas las etapas de las actividades exhibidas en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente. De modo particular, el modelo privilegia la escritura y el diálogo como medio de comunicación y registro de las ideas[19] –esto puede ser debido a la prevalencia del autoaprendizaje y aprendizaje cooperativo–. No obstante, la escritura permite diversas formas de comunicar los

[19] Esto no significa que sólo se escriba durante el desarrollo de la clase, tal y como se evidencia en el momento de las Actividades de Práctica, los estudiantes también expresan sus opiniones de forma oral.

conocimientos y es desde allí, donde se observa que los estudiantes utilizan diferentes sistemas de símbolos para representar sus conocimientos y reconocen la estructura básica (Boix y Gardner, 1999) que comprende un problema multiplicativo. Con relación a estas características, al inicio los estudiantes se ubican en el nivel de novato, pero al final logran avanzar hasta un nivel de aprendiz. El nivel de maestría se encuentra ausente en el desarrollo de las actividades, puesto que los estudiantes no han dado cuenta de “la conciencia del contexto de comunicación” (Boix y Gardner, 1999, p. 245), es decir, escriben para sí mismos y producen sus problemas cual si fuese una receta.

En lo que respecta a los problemas de tipo multiplicativo desde el modelo Escuela Nueva (FVG), se aborda ahora, la dimensión de la comprensión asociada a los propósitos. Esta dimensión permite a los estudiantes proyectar e incluso dar un posible uso a los conceptos disciplinarios haciendo conexiones personales con dichos conocimientos o ampliarlos significativamente a su propia experiencia (Hetland et al., 1999). La propuesta diseñada y ejecutada en el modelo Escuela Nueva –Fundación volvamos a la gente– hace énfasis en acciones que procuran e invitan a los estudiantes a desarrollar este tipo de conexiones: conocimiento – práctica – contexto rural. De manera especial, esta consigna se hace evidente en la etapa de Actividades de Aplicación, donde los estudiantes han demostrado cierta movilidad en los niveles de comprensión, transitan entre el nivel de novato y de aprendiz, sin alcanzar aún el nivel de maestría.

Es así, como de acuerdo con lo propuesto en la pregunta de investigación, las comprensiones de los estudiantes al resolver problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, entendiendo la comprensión en el marco de la EpC, son múltiples, móviles y personales. Múltiples porque se pueden evidenciar todas las dimensiones de la comprensión –contenido, método, propósito y formas de comunicación– en el transcurso de una guía de aprendizaje que incluye: Actividades Básicas, Actividades de Práctica y Actividades de Aplicación. En este sentido, las guías promueven múltiples espacios y caminos que pueden habitar o recorrer los estudiantes en búsqueda de la comprensión de los problemas multiplicativos: isomorfismo de medidas y producto de medida.

Asimismo, las comprensiones generadas a través de la implementación del modelo Escuela Nueva (FVG) son móviles pues los estudiantes transitan de manera constante entre uno y otro nivel de comprensión, incluso dentro en una misma dimensión. Esta movilidad, está asociada a la última característica enunciada en el párrafo anterior, lo personal, articulada a la singularidad; aunque en el desarrollo de las actividades los estudiantes tienen la posibilidad de interactuar e intercambiar conocimientos con los demás compañeros de clase, la comprensión se da de modo personal, tiene muchas facetas y se puede visualizar de diversas formas, de ahí la necesidad de proponer una variedad amplia de desempeños o modos de vivir y de imaginar la experiencia del aprendizaje en el aula de clase.

El modelo Escuela Nueva, es rico en la generación de experiencias que se asocian al contexto de los estudiantes y permite distintas adaptaciones de acuerdo con las necesidades, intereses y características de estos (Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, 2015). Pese a lo anterior, carece de actividades dirigidas a promover la evolución de los estudiantes hacía un nivel de maestría en cada una de las dimensiones, al menos en la solución de los problemas multiplicativos. Igualmente, se hace necesario señalar que el modelo carece de instrumentos que le permitan a los estudiantes y maestros cotejar la evolución de los estudiantes o el tránsito hacía niveles más avanzados en cada una de las dimensiones de la comprensión, es por ello que los apuntes presentados en el apartado 4.2. del presente trabajo, constituyen un aporte para el modelo, al igual que las adaptaciones realizadas a las guías asociadas a los problemas multiplicativos tipo: isomorfismo de medidas y producto de medidas.

5.2 Conclusiones alrededor de los objetivos de investigación

En primer lugar, el propósito de esta investigación se sintetiza en *analizar cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes del grado quinto, de Educación Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Dicho análisis se da a través de un rastreo, donde se intentan articular y presentar los antecedentes investigativos y teóricos relacionados con los problemas de tipo multiplicativo, el modelo Escuela Nueva y las dimensiones de la comprensión en matemáticas; tal análisis, también incluye un marco teórico que intenta articular tres categorías centrales y tres autores de referencia que constituyen un nuevo marco de comprensión de la Escuela Nueva en la línea de los problemas de tipo multiplicativo.

Para materializar este análisis, se hizo necesario estudiar, adaptar, planear, desarrollar y sistematizar dos guías de aprendizaje propuestas en las cartillas de Escuela Nueva (FVG) donde están presentes problemas multiplicativos tipo: isomorfismo de medidas y producto de medidas (Vergnaud, 1991). Seguido, se realiza un análisis por categorías al desarrollo de las actividades propuestas en la guía: Actividades Básicas, Actividades de Práctica y Actividades de Aplicación, con la participación de los estudiantes – Mariana, Rigo y Nairo– a la luz de las dimensiones de la comprensión con sus respectivos niveles. Obteniendo como resultado la visualización de las cuatro dimensiones de la compresión según el marco de la EpC y distintos niveles en cada una, a excepción del nivel de maestría. En el análisis, también se ha determinado que existe una evolución entre el desempeño de los estudiantes durante las Actividades Básicas y su desempeño durante las Actividades de Práctica y Aplicación.

Seguido, se enuncian los objetivos específicos de la investigación, el primero de ellos consiste en *describir la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en los estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria, en el modelo Escuela Nueva y en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión*. Esto se hace realidad en el capítulo IV de la presente investigación, donde además de describir cada una de las actividades propuestas en la guía de Escuela Nueva alrededor de la solución de problemas multiplicativos, se narran las producciones orales y escritas de los estudiantes al resolver dichos problemas. En tal sentido, la investigación desde el marco metodológico se exige narrar de manera fidedigna los hechos que en ella transcurren, respondiendo a la ética del investigador y la validez de los datos suministrados. De otra parte, tales descripciones son narradas a la luz de los aportes teóricos expuestos en el marco de la EpC, tejiendo nuevos sentidos con relación a comprensiones que surgen dentro del aula de clase de la sede El Cedro.

Como segundo objetivo específico la investigación se ha propuesto, *identificar los desempeños de comprensión que muestran los estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria, al solucionar problemas de tipo multiplicativo, en el modelo Escuela*

Nueva y en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión. En este sentido, desde el inicio de la investigación se han presupuestado algunos desempeños de comprensión suscriptos a las dimensiones de contenido, método, formas de comunicación y propósito, desglosados en cada uno de los niveles identificados en el marco de la EpC: ingenuo, novato, aprendiz y maestría. Más adelante, durante la etapa de análisis los estudiantes son situados en cada uno de estos niveles y dimensiones de acuerdo con su actuación durante el desarrollo de las actividades propuestas en las guías de aprendizaje, generan como resultado distintos desempeños de comprensión que han sido adaptados con las realidades que se presentan dentro del aula, cuando se resuelven problemas multiplicativos del tipo: isomorfismo de medidas y producto de medidas.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expresado, la consecución de los objetivos específicos: describir la comprensión de los problemas multiplicativos e identificar los desempeños de comprensión de los estudiantes en la solución de problemas multiplicativos denominados por Vergnaud, (1991) en el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, tomando como referencia para definir la compresión el marco de la EpC, ha permitido a la presente investigación, alcanzar su propósito central: analizar cómo comprenden los estudiantes este tipo de problemas al desarrollar las actividades propuestas en el modelo Escuela Nueva propuesto por la Fundación Volvamos a la Gente (FVG).

De otro lado, existen aportes adicionales a la investigación que, aunque no están vinculados directamente con los objetivos general y específicos, configuran un aporte al modelo Escuela Nueva –FVG, a la escuela rural.

5.3 Aportes al modelo Escuela nueva

Los procesos escolares planteados en el modelo están dirigidos por la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente. Desde esta perspectiva, es la Fundación quien diseña las guías de auto instrucción, determina su contenido conceptual, métodos, actividades, progresión de los aprendizajes y en este orden de ideas, el tipo de problemas matemáticos que allí se presentan, entre otros. Además de guiar y apoyar el proceso de aprendizaje del estudiante, la guía se convierte en un insumo de planeación para el docente, de ahí la importancia de agregar las siguientes precisiones:

En primer lugar, se señala la importancia de estudiar y adaptar las cartillas del estudiante de acuerdo con el tipo de problema que el docente desee trabajar en el aula de clase, puesto que durante el diseño y ejecución de las guías se ha hecho evidente la insuficiencia y en algunos casos ausencia de problemas como, por ejemplo, subtipo: búsqueda de la cantidad de unidades, propio de los problemas tipo isomorfismo de medidas. Igual sucede con los problemas asociados a la división, en el caso de los problemas tipo producto de medidas y, multiplicación y división de problemas de un solo espacio de medidas (Vergnaud, 1991).

Asimismo, se realizan sugerencias respecto al uso del material manipulativo y la disposición de diferentes herramientas que inviten a los estudiantes a desarrollar diversos métodos de solución, debido a que, la cartilla en la mayoría de los casos presenta, explica y acentúa el uso del método convencional –algoritmo de la multiplicación o la división– sin dejar espacio a otros modos de resolver el problema y a otras formas de comunicarlo.

Además de lo anterior, es necesario anotar la relevancia que va tomando el acompañamiento del docente –en esta investigación- en la implementación de las actividades que se proponen en cada guía, pues sus explicaciones, sus preguntas, sus apuntes, movilizan las concepciones de los estudiantes, los incitan a buscar nuevas y novedosas respuestas, a proponer otras soluciones cuando descubren que las respuestas emitidas son erradas. En síntesis, el trabajo de realimentación que hace el maestro no solo a la guía de aprendizaje, sino también a las respuestas que construyen los estudiantes, provocan en algunos casos, la evolución de los niveles de la comprensión en sus distintas dimensiones.

5.4 Los problemas de tipo multiplicativos

Con relación a los problemas de tipo multiplicativo, observados y estudiados durante el transcurso de la investigación, tanto para el isomorfismo de medidas como para el producto de medidas (Vergnaud, 1991). Conviene mencionar que, para los primeros, se han utilizado en las distintas etapas, problemas que corresponden a los propuestos en las guías de

Matemáticas 5° de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente, en especial, aquellos problemas tipo isomorfismo de medidas, vinculados a la multiplicación. Para el caso de la división, fue necesario formular los dos últimos problemas presentados en la etapa de Actividades de Aplicación.

Continuando con los problemas de tipo multiplicativo y su presencia en las guías de Escuela Nueva (FVG), con relación a los problemas de producto de medidas se hace mención a un solo problema, en el que se solicita buscar la medida elemental a través de la división. Por tal razón, fue necesario incluir los dos últimos problemas expuestos en las Actividades de Práctica. Aquí también conviene resaltar que, la guía de Escuela Nueva presenta el concepto de superficie como el producto de dos medidas de longitud –magnitudes continuas– y, aunque es similar a lo definido por Vergnaud (1991), la cartilla, en estos términos, refleja escasez en la inclusión de otros ejemplos relacionados con una subclase de los problemas tipo producto de medidas, asociados a las propiedades de los números y los conceptos a los cuales hace referencia, como es el caso: discreto –discreto y noción de medida.

Por último, en relación con la noción de metro cuadrado dentro de los problemas de tipo producto de medidas, es conveniente contemplar los sentidos complementarios que hacen parte de dicha noción, es decir, *cuadrado de un metro de lado* y el de *producto de dos medidas de longitud*[20] Vergnaud (1991), un ejemplo de ello se puede observar en la figura 60, pues según el autor, tales relaciones son las que dan sentido a la escritura simbólica m^2, cm^2, km^2. Por esta razón, es necesario que las actividades planteadas en la guía de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente atiendan a ambos sentidos, procurando así diversas formas de representación a los problemas de este tipo.

[20] La letra cursiva es retomada del texto original.

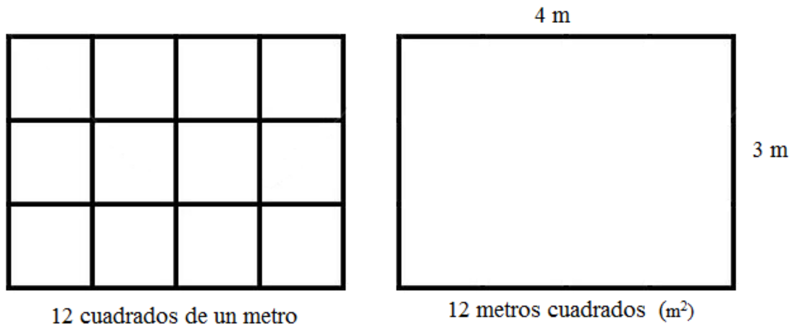


Figura 60. Representación, cuadrado de un metro de lado-producto de medidas de longitud (Vergnaud, 1991)

5.5 Aportes a la educación Matemática

Los problemas de tipo multiplicativo según Vergnaud (1991), deben ser abordados de manera cuidadosa en la Educación Básica Primaria, con el fin de ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas y a encontrar, construir, reconocer el procedimiento que lo lleva a su solución. Estas consideraciones no son ajenas a los contextos rurales, por el contrario, han de consolidarse en un lugar privilegiado de la Educación Matemática pues el 56% de los estudiantes se concentran en estas zonas del país. Es así, como esta investigación no solo aporta al estudio de la comprensión de este tipo de problemas, sino que además se sitúa en lugares que hasta ahora han sido poco explorados.

Además de abordar la comprensión de los problemas multiplicativos en contextos rurales, este estudio genera pinceladas de reflexión alrededor de los materiales que guían las propuestas educativas rurales, valorando lo que existe en términos de su relación con el contexto y sus esfuerzos en articularse a las políticas y documentos de referencia expedidos por el Ministerio de Educación Nacional. Sin embargo, la investigación reconoce que dichos materiales pueden ser nutridos y realimentados con relación al desarrollo de procesos de comprensión de los problemas multiplicativos en asuntos como el repertorio de problemas –dimensión de contenido–, proponer, incluir y articular distintos caminos de solución a un mismo problema –dimensión de métodos–, permitir diversas formas de dar a conocer sus construcciones –dimensión formas de comunicación– y en la dimensión de propósitos, generar actividades que inviten a los estudiantes a reflexionar sobre cómo podrían aplicarse estos problemas –no solo los tipos más comunes de problemas, sino otros– en sus contextos inmediatos o cercanos y en otros contextos.

En esta dirección, las adaptaciones realizadas a las guías de Escuela Nueva, Fundación Volvamos a la Gente, en relación con los problemas multiplicativos tipo: isomorfismo de medidas y producto de medidas, se postulan como un aporte al modelo, pues incluyen actividades que dan vía al abordaje de diferentes subtipos de problemas asociados a ambas categorías (isomorfismo de medidas y producto de medidas) y que, al mismo tiempo, se anclan a las dimensiones de la comprensión, sin alejarse de la estructura y los objetivos que el modelo de Escuela Nueva (FVG) ha establecido.

Finalmente, los aportes al área también pueden dirigirse en términos de la comprensión, ya que, de acuerdo con el marco de la EpC, ésta puede ser entendida como un "sistema dinámico" (Hetland et al., 1999, p. 295) de ida y vuelta, avances y regresos, donde cada uno transita un camino distinto que puede llevar al mismo lugar: la comprensión en distintas dimensiones y niveles. En este sentido, dar una mirada a la comprensión desde diversos lugares y experiencias –tres estudiantes ubicados en un modelo de educación rural, en un contexto rural, en un aula multigrado, en edades, sexos y géneros distintos– da lugar y permite emerger, describir y analizar otros modos de comprender las estructuras multiplicativas y por ende, aspectos fundamentales de la comprensión y solución de problemáticas, eje central y transversal del currículo de Matemáticas según las Mallas de Aprendizaje expedidas por el Ministerio de Educación durante el año 2017.

5.6 Posibles líneas de investigación

Al finalizar el apartado de las conclusiones, es necesario presentar las posibles líneas de investigación que se tejen alrededor de este trabajo de investigación. A continuación, se mencionan estas líneas desde los tres campos o categorías que aparecen de manera reiterada dentro de este trabajo: comprensión, problemas de tipo multiplicativo y el modelo Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente.

- Respecto a la comprensión, se considera posible indagar cómo se articulan los procesos de evaluación formativa que implementan los docentes en el modelo Escuela Nueva

Fundación Volvamos a la Gente con las posibilidades y formas de comprender que se plantean en las dimensiones expuestas en el marco de Enseñanza para la Comprensión.

- Con relación al modelo Escuela Nueva –FVG– es posible realizar un estudio documental que indague por la manera cómo se estructuran en los libros de texto de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente, la progresión de los aprendizajes en el área de Matemáticas, entre ellos: la construcción del concepto de número, sus propiedades y relaciones, las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas –conceptos fundamentales en la Educación Básica Primaria–.

- En cuanto a los tipos de problemas multiplicativos, quedan abiertas algunas líneas de investigación como lo es, por ejemplo, la comprensión de los tipos de problema: caso de un solo espacio de medidas y el estudio de problemas complejos como: multiplicativos puros y mixtos (multiplicativo y aditivo) en el modelo Escuela Nueva –FVG–, estos estudios pueden orientarse de dos maneras, la primera sería un estudio de casos a profundidad o también, estudios comparativos entre la forma de abordar estos problemas dentro del modelo Escuela Nueva y otros modelos educativos.

- La última línea, se asocia también a los diversos tipos de problemas, pero se dirige, en especial, al aspecto teórico. En este sentido, podría plantearse un estudio de análisis documental que dé cuenta de la articulación de los tres marcos de referencia que se visualizan en esta tesis de maestría: el marco de Enseñanza para La Comprensión, la Teoría de los campos conceptuales y el modelo educativo Escuela Nueva.

Para finalizar este trayecto investigativo se presenta a continuación un epílogo que narra la experiencia del investigador y sus reflexiones con relación a lo que significa ser maestro en el modelo de Escuela Nueva Fundación Volvamos a la Gente en un contexto Rural.

EPÍLOGO

Como ya se ha dicho desde el inicio de esta investigación, la sede El Cedro está ubicada en un contexto rural, agrícola por excelencia, donde los caminos, la escuela y los niños huelen a café, donde las madres empacan “cocas” llenas de arroz, fríjoles, huevo y a veces carne –cuando hay, porque en estos contextos, alimentos como la carne y los dulces se constituyen como el privilegio de pocos. En general, los padres y madres madrugan a trabajar y los niños se apresuran a la escuela. Hace ya varios años que el investigador de esta tesis se desempeña como maestro en esta comunidad, lo que permite decir que, de algún modo, hace parte de ella. Estos padres campesinos por razones quizá ajenas a su voluntad han colocado en las manos del maestro la responsabilidad de “educar” a sus hijos, confían en que la escuela les dará “cosas” –no materiales– que les ayudarán a “labrar un futuro mejor”.

Lo anterior hace que, como maestro investigador, en los términos que propone Larrosa (2006) algo pasa, algo cambia, no puede ser el mismo, ha dejado de ser el mismo, se hizo otro de lo que era. Desde esta perspectiva, esta investigación ha sido un acontecimiento que afecta al investigador de algún modo, quien en su rol como maestro rural siente la responsabilidad de no ser el mismo, lo aprendido en este trayecto, es una invitación a asumir una postura de estudio y reflexión ante las prácticas de enseñanza, donde salen a la luz aspectos asociados a lo disciplinar, al conocimiento del modelo y el entendimiento del contexto donde se hace vida la práctica. Las siguientes abstracciones son producto de las reflexiones que ha dejado este proceso y quizá sean compartidas por maestros rurales y urbanos de escasos recursos, lugar donde según la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (2015) se implementa el modelo educativo. A continuación, se presentan dichas reflexiones, a veces propuestas como recomendaciones.

En primer lugar, con relación a lo disciplinar, se da una mirada a los problemas de tipo multiplicativo y a su vinculación con la enseñanza en el modelo Escuela Nueva, al respecto, es necesario asegurar, al menos en el desarrollo de las Actividades Básicas tal como lo plantea Vergnaud (1991) manipulaciones operativas (para ello se pueden utilizar los materiales dispuestos en el CRA de Matemáticas, el autor aconseja la utilización de material multibase para abordar este tipo problemas). Igualmente, dentro de la implementación de las Actividades de Prácticas y de Aplicación, es importante considerar el estudio de situaciones nuevas, diálogos contantes entre maestro-estudiante, estudiante-estudiante y promover la búsqueda de diferentes caminos y opciones de solución; pero, sobre todo, es necesario un reconocimiento profundo del maestro sobre este tipo de problemas, esto último, le permite hacer adaptaciones cualificadas a las guías de aprendizaje que abordan estos problemas.

En cuanto al modelo Escuela Nueva, se hace necesario el reconocimiento de los fundamentos propios de las pedagogías activas, su razón de ser, las posibilidades que ofrece y porque no, sus vacíos; de tal modo que, en las comunidades donde el maestro debe asumir este modelo como metodología de enseñanza, puedan hacerse adaptaciones que tiendan a fortalecerlo y a corresponder a las necesidades y expectativas de las mismas. Porque, como se ha dicho antes, en las comunidades rurales, la escuela es el lugar donde los padres campesinos depositan toda su confianza para la educación de sus hijos, sin importar que existan o no razones, la mayoría de los niños, en algún momento son enviados a la escuela. En este sentido, estudiar, conocer y reflexionar son acciones que han de guiar la práctica educativa del maestro rural.

Desde la perspectiva anterior, sumado al estudio y reflexión sobre lo disciplinar, aparece la necesidad de conocer el contexto dentro del cual se ubica la escuela, las adaptaciones realizadas no solo deben responder a teorías, marcos y/o modelos, ha de responder también, a las necesidades que se presentan en la comunidad, las prácticas agropecuarias o de sustento que en ellas se desarrollan, la escuela no puede ser ajena a la vida y las costumbres de las comunidades, pues en ella yacen conocimientos que pueden ser avistados de manera conceptual y práctica en la escuela, los modelos y los métodos no pueden alejar la escuela de la comunidad, al contrario, han de acercarla; en toda práctica –sea de enseñanza académica, agropecuaria, se esconden saberes que la escuela puede retomar para fortalecer no solo conceptos sino también vínculos con esa comunidad en la que se inscribe.

Para finalizar, se reitera que, las anteriores reflexiones se construyen a lo largo del proceso de investigación y son incluidas como epílogo, sin olvidar que las comprensiones de los estudiantes, son el centro. Pero, este apartado se escribe en honor a todos los maestros que a diario desempeñan su labor en la escuela rural.

6. Referencias Bibliográficas

Balliache, D. (2013). Guía unidad I: El problema y su delimitación.

Barrantes, H. (2006). La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática* (2), 1- 7.

Bedoya, D. M. (2013). *La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo de van Hiele* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Berrio Murillo, W., y Gómez Villa, V. A. (2015). *Multiaplicatic: una estrategia para el razonamiento de situaciones que involucran estructuras multiplicativas* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Boix Mancilla, V., y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone Wiske (Comp.), *Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (págs. 215-256). Buenos Aires, Argentina: PAIDÓS.

Boix, R. (2011). ¿Qué queda de la escuela rural? Algunas reflexiones sobre la realidad pedagógica del aula multigrado. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de profesorado*, *15*(2), 13-23.

Bonache, J. (1999). El estudio de casos como estrategia de construcción teórica: características, críticas y defensas. *Cuadernos de Economía y Dirección de la Empresa*, *3*(1), 123-140.

Botero Hernández, O. H. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Buchovecky, E., Hetland, L., y Stone, M. (1999). ¿Cómo se puede extender en las escuelas la Enseñanza para la Compresión? En M. Stone (Comp.), *La enseñanza para la Comprensión* (págs. 401-431). Barcelona - Buenos Aires - México: PAIDÓS.

Buitrago Castaño, L. T., y Chavarría Correa, W. d. (2015). *Análisis del pensamiento matemático, curricularmente desarrollado en los módulos de matemáticas de los* *grados cuarto y quinto de Escuela Nueva* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Calvache, J. E. (2003). La escuela Nueva y los conceptos básicos de la educación en el pensamiento de John Dewey: una aproximación teórica. *Historia de la Educación latinoamericana*, *5*, 107 -126.

Castro, E. M. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada, Granada, España:

Colbert de Arboleda, V., y Vásquez Castro, L. N. (2015). *Escuela Nueva - Escuela Activa, manual para el docente*. Bogotá: Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente.

Colbert, V. (2018). Escuela Nueva, Escuela Unitaria, educación personalizada, pedagogía activa, educación a distancia, tecnología educativa, modelos flexibles, aprendizaje colaborativo, destrezas siglo XXI. En Herrera González, J. D, *21 voces: historias de vida sobre 40 años de educación en Colombia*. (págs. 113-140) Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes.

Congreso de la República. (8 de Febrero de 1994). Ley 115 de febrero 8 de 1994. *Ley general de educación*. Bogotá, Cundinamarca, Colombia: Imprenta Nacional

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Bautista, A., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Universidad de Valencia, Madrid.

Corbetta, P. (2003). *Metodología y técnicas de investigación social*. España: Mac Graw Hill.

Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente. (2015). *Escuela Nueva- Escuela Activa. Manual para el docente.* Bogotá: QuadGraphics.

Galeano, M. E. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa.* Medellín: Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Gallego, M.; Ruiz, Y., Salgado, L., Sucerquia, A. y Uribe, L. (2004). *La construcción de la estructura multiplicativa en los niños* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

García Lezcano, E., y Gutiérrez Guerra, G. G. (2016). *Análisis de estructuras aditivas en el diseño curricular de los libros de textos de los grados 1°, 2° y 3 del modelo educativo rural Escuela Nueva, de la fundación Volvamos a la Gente* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Gómez, V. M. (1996). Visión crítica sobre la Escuela Nueva en Colombia. *Educación y pedagogía* (14,15), 280-306.

González Molina, J. D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café* (Tesis de maestría) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (2013). Guía de Aprendizaje, Matemáticas 4.

Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (2013). Guía de Aprendizaje, Matemáticas 5.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 6). México: McGraw-Hill.

Hetland, L., Hammerness, K.; Unger, C. y Gray, D. (1999). ¿Cómo demuestran los alumnos que comprenden? En M. Stone (Comp.), *La enseñanza para la comprensión* (págs. 257-298). Buenos Aires - Barcelona - México: PAIDÓS.

Huertas Torres, O. Y. (2014). *Una interpretación semántica de la lectura y comprensión de los problemas de matemáticas en las pruebas externas nacionales en el grado quinto.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2016). *ICFES*. Obtenido de ICFES mejor saber: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2017). *ICFES*. Obtenido de ICFES mejor saber: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática*, 1-30.

Jung, V., Laborde, M., y Lujambio, A. L. (2011). Operaciones con “significado”.

Larrosa, J. (2006). Sobre la experiencia. Aloma. Revista de Psicología y Ciencias de la Educación, 2006, núm. 19, p. 87-112.

Meel E., D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática. Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista latinoamericana en matemática educativa. Vol. 6. N 003.*, 221-278.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-propertyvalue-55269.html

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-propertyvalue-55269.html.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Manual de implementación Escuela Nueva*, Bogotá, Colombia. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340089_archivopdf_orientaciones_pedagogicas_tomoI.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2012). *Manual para la formulación y ejecución de planes de educación rural.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articl

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Matrices de referencia del ICFES*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/anexo_7-matriz_de_referencia_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Mallas de aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/CARTILLA-INTRODUCTORIA_.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017). *Informe por colegio pruebas saber 3°, 5°, y 9°*, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2017/Institucion_Educativa/105642000019.pdf

Peña Rincón, l. j., y Olarte López, n. e. (2016). R*esolución de problemas de estructura multiplicativa desde las teorías de campos conceptuales y cantidades intensivas en ambientes de aprendizaje web.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica, Bogotá, Colombia.

Matijasevic Arcila, M. T., y Ruiz Silva, A. (2013). La construcción social de lo rural. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social (3)* 24-41.

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia, Colección de filosofía de la educación* (19), 93 - 110.

Pérez, E. (2001). Hacia una nueva visión de lo rural. Una nueva ruralidad en América Latina, 3(2), 17-29.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (págs. 69-95). Buenos Aires, Argentina: PAIDÓS.

Perrone, V. (1999). ¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión? En M. Stone (Comp.), *Enseñanza para la Comprensión, de la investigación a la práctica* (págs. 35-68). Barcelona - Buenos Aires - México: PAIDÓS.

Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. (2011). *Colombia rural. Razones para la esperanza.* Bogotá: Humano.

Ramírez Jaramillo, J. C., y De Aguas, J. (2017). Configuración territorial de las provincias de Colombia: ruralidad y redes.

Ramos, C. A. (2002). El pragmatismo de Dewey y la Escuela Nueva en Colombia. *Historia de la Educación Colombiana* (5), 14 -169.

Rivera González, G. M. (2014). *Procesos de razonamiento y de comprensión con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Serrano, J. M., & Pons Parra, R. M. (5 de abril de 2011). El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *REDIE, 3*, 1-10.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso. Segunda edición.* Madrid: Ediciones Morata.

Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión.* México: Paidós.

Taborda, M. A., y Quiroz, R. E. (2016). El cuaderno escolar: prácticas escritas en el desarrollo del pensamiento social. *Prácticas y discursos, 6*, 1-22.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1986). Introducción de los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Buenos Aires. PAIDÓS.

Unger, C., Gray, D., Jaramillo, R., y Dempsey, R. (1999). ¿Qué piensan los alumnos sobre la comprensión? En M. Stone (Comp.), *Enseñanza para la Comprensión, vinculación entre la investigación y la práctica.* (págs. 337 - 366). Barcelona - Buenos Aires - México: PAIDÓS

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2,3), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (6 de 9 de 2016). Segundo congreso internacional de la enseñanza de las ciencias y las matemáticas (CIECYM). (M. R. Otero, y V. Llanos, Entrevistadores)

Zapata, D., y Mayo, G. (2014). *Actividades de las guías de aprendizaje de escuela nueva promotoras de interacción social en escolares de Centros Educativos Rurales de Marinilla*. (Tesis de maestría en educación) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Zubiría, J. d. (2001). Escuela Nueva y el modelo de la Escuela Activa. En J. d. Zubiría, *De la Escuela Nueva al constructivismo, un análisis crítico* (págs. 93- 103). Bogotá: Magisterio.

ANEXOS

Entrevista semiestructurada

Estudiante – Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa sede El Cedro

Aporte de información para descripción y análisis de resultados

Objetivo: Conocer la visión del estudiante en cuanto al abordaje de los de problemas matemáticos que involucran problemas de tipo multiplicativo.

Datos generales.

Fecha:	4/ 9/2019
Nombre:	Mariana
Edad:	11
Grado:	quinto

Preguntas.

1. ¿Qué es lo que más te gusta de las clases de Matemáticas?

Lo que más me gusta de las clases de matemáticas son las fracciones, la suma y conversión de números mixtos.

2. ¿Qué actividades de la guía te han gustado más? ¿Por qué?

Me gusto más el área porque, multiplicamos lado por lado, debíamos encontrar el área del comedor.

3. ¿Qué actividades te gustaron menos? ¿Por qué?

No me gustó la de las frutas porque llevaba mucho tiempo y era difícil y no estoy acostumbrada a hacer ese tipo de cosas.

4. ¿Qué aprendiste? ¿Cómo lo aprendiste?

Aprendí a hacer el cuadro de doble entrada, cuántas frutas por una. Creo que lo aprendí prestando más atención.

5. ¿Cuáles son las clases de Matemáticas que más te gustan?

Cuando nos enseñan el área y las fracciones.

6. ¿Te parecen importantes las actividades que hemos desarrollado en la clase de Matemáticas durante los últimos días?

Si porque nos sirven para la vida cotidiana, por ejemplo, cuando uno coge café sabe cuánto tiene que pagarle al que está cogiendo el café.

7. ¿En qué momentos o situaciones de la vida cotidiana utilizas la multiplicación?

En el supermercado, por ejemplo, cuando se rebaja el 50%, o en la ropa, los almacenes.

8. ¿En qué momentos o situaciones de la vida cotidiana utilizas la división?

Cuando se va a repartir mecato o alimentos.

9. ¿Cuál de estas operaciones te parece más fácil? ¿Qué actividad matemática disfrutaste más?

La suma, la multiplicación. La que más disfruto es la división.

10. ¿De cuántas formas distintas se puede resolver un problema que requiere el uso de la multiplicación o la división?

En la multiplicación hacer sumas, en la división repartir. Puedo también sacar la calculadora o en la mente.

11. Haz un ideograma, mapa de conceptos, mapa mental o infograma sobre lo que se necesita para resolver un problema donde se requiere multiplicar o dividir.

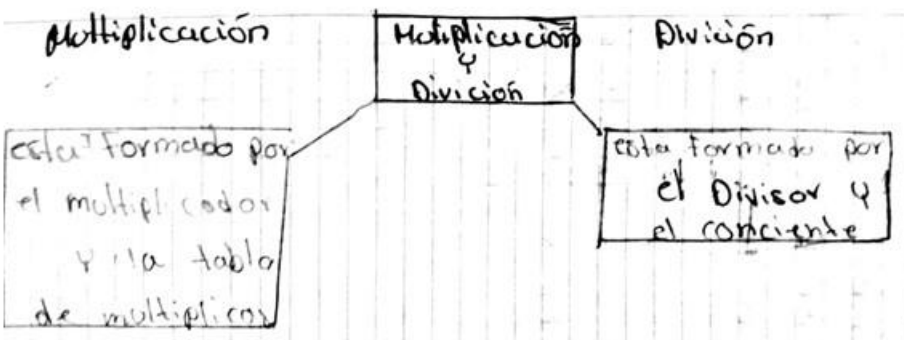


Figura 61. Infograma elaborado por Mariana, en entrevista final.

12. ¿Crees que estos conceptos tienen relación o se pueden utilizar en otras áreas? ¿Cuáles?

Si, en naturales; alguien va a repartir alimentos entonces se divide en personas y si sobra, se divide en los que falta.

Entrevista semiestructurada

Estudiante – Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa sede El Cedro

Aporte de información para descripción y análisis de resultados

Objetivo: Conocer la visión del estudiante en cuanto al abordaje de los de problemas matemáticos que involucran problemas de tipo multiplicativo.

Datos generales:

Fecha: 9/ 11 / 2019

Nombre: Nairo

Edad: 11

Grado: quinto

Preguntas:

1. ¿Qué es lo que más te gusta de las clases de Matemáticas?

A mí lo que más me gusta de las clases de Matemáticas es la multiplicación y lo que hicimos en la grabación, porque algún tema no entendía y ya cuando esté en quinto lo voy a entender mejor.

2. ¿Qué actividades de la guía te han gustado más? ¿Por qué?

La que más me gustó fue, la del área de los salones, porque yo no sabía cuánto de área tenía el salón y el área de toda la escuela, del espacio. Por ejemplo, el área del salón 20 cm” y la escuela 180 $cm^{3.}$

3. ¿Qué actividades te gustaron menos? ¿Por qué?

La actividad que menos me gustó fue la de los cuadros, cuando uno tenía que poner encima rojo azul.

4. ¿Qué aprendiste? ¿Cómo lo aprendiste?

Aprendí lo del área y saber cuánto valen algunas cosas.

5. ¿Cuáles son las clases de Matemáticas que más te gustan?

La actividad de Matemáticas que más me gusta es la de pegar y cuando utilizamos la cartilla.

6. ¿Te parecen importantes las actividades que hemos desarrollado en la clase de Matemáticas durante los últimos días?

Me parece importante porque me ayuda a aprender más la Matemática, me ayudan cuando voy a la tienda a comprar el mercado y que no lo engañen a uno.

7. ¿En qué momentos o situaciones de la vida cotidiana utilizas la multiplicación?

En la casa o aquí en la escuela, también cuando hallo el área cuando vaya a hacer una casa o cuando uno lo llevan y le dice, le descuento el 40% entonces ahí es cuando uno la utiliza.

8. ¿En qué momentos o situaciones de la vida cotidiana utilizas la división?

La división la utilizo muy poco, pero acá en la escuela, en la calle si quiero comprar por ejemplo un play y como lo vamos a comprar en compañía, yo le digo, repartamos esto, entonces dividimos, cuánto le toca a uno o cuánto le toca a otro.

9. ¿Cuál de estas operaciones te parece más fácil? ¿Qué actividad matemática disfrutaste más?

Me parece más fácil y disfruto más, la multiplicación. La división no la entiendo bien, se me dificulta de la división cuando tengo que bajar un número, o cuando uno dice 8 * 2 en la división, cuando uno pasa el número a convertirlo para que dé el resultado.

10. ¿De cuántas formas distintas se puede resolver un problema que requiere el uso de la multiplicación o la división?

Una forma es cuando uno multiplica en el cuaderno, la otra, que es más fácil y nos lo deja desarrollar la mente. En el celular, eso cuando uno tiene dificultad y también se puede hacer mental.

11. Haz un ideograma, mapa de conceptos, mapa mental o infograma sobre qué se necesita para resolver un problema que requiere multiplicar o dividir.

Figura 62. Infograma elaborado por Nairo, en entrevista final.

12. ¿Crees que estos conceptos tienen relación o se pueden utilizar en otras áreas? ¿Cuáles?

Por ejemplo, cuando uno mide, por ejemplo, en tecnología cuando medimos la casa, por ejemplo, la habitación de Susana que era 12 * 4 que dio 48 de área.

Entrevista semiestructurada

Estudiante – Institución Educativa Rural Abelardo Ochoa sede El Cedro

Aporte de información para descripción y análisis de resultados

Objetivo: Conocer la visión del estudiante en cuanto al abordaje de los de problemas matemáticos que involucran problemas de tipo multiplicativo.

Datos generales:

Fecha: 4 / 9 / 2019

Nombre: Rigo

Edad: 11

Grado: quinto

Preguntas:

1. ¿Qué es lo que más te gusta de las clases de Matemáticas?

Lo que más me gusta es cuando nos toca multiplicar o dividir, porque allí es donde estoy aprendiendo más, y ya tengo mejor conocimiento, que antes no era capaz y me tocaba pedirle ayuda a usted.

2. ¿Qué actividades de la guía te han gustado más? ¿Por qué?

Me gusto más la primera guía, lo que tenía que ver con la fruta y el precio porque eran muy fáciles de hacer. Fue fácil porque uno miraba de la cartilla el precio y ahí uno se daba cuenta cuánto era más o menos cuánto valían aproximadamente.

3. ¿Qué actividades te gustaron menos? ¿Por qué?

Casi no me gustó, encontrar el área del salón, las encontraba duras, porque hace mucho tiempo hicimos lo de área y ya se me había olvidado y por eso no era capaz.

4. ¿Qué aprendiste? ¿Cómo lo aprendiste?

Como antes que no era capaz de la multiplicación y ya aprendí a multiplicar bien, desde que nos puso estos talleres. Cuando usted nos puso lo del unicornio mi papito me fue explicando y fui aprendiendo.

5. ¿Cuáles son las clases de Matemáticas que más te gustan?

Me gusta cuando vemos la recta numérica, cuando encontramos los cuartos.

6. ¿Te parecen importantes las actividades que hemos desarrollado en la clase de Matemáticas durante los últimos días?

Me parecen importantes porque uno va aprendiendo y va ya entendiendo que se trata y cuando le vuelva a tocar ya sabe, ya lo ha aprendido.

7. ¿En qué momentos o situaciones de la vida cotidiana utilizas la multiplicación?

Utilizo la multiplicación cuando quiero saber cuánto vale un producto o cuando tengo que dividir algo también. Por ejemplo, cuando voy a la tienda y me dicen que vale 800 y uno tiene 2400 y uno ya sabe por las tablas de multiplicación.

8. ¿En qué momentos o situaciones de la vida cotidiana utilizas la división?

Casi no la utilizo, lo que más utilizo es la multiplicación.

9. ¿Cuál de estas operaciones te parece más fácil? ¿Qué actividad matemática disfrutaste más?

La que más me gusta es la división, es más fácil para mí, sé dividir por una cifra y por dos cifras.

10. ¿De cuántas formas distintas se puede resolver un problema que requiere el uso de la multiplicación o la división?

La puedo hacer de dos formas, primero multiplicando, o por tablas o sumando y si es de división, dividiendo.

11. Haz un ideograma, mapa de conceptos, mapa mental o infograma sobre qué se necesita para resolver un problema que requiere multiplicar o dividir

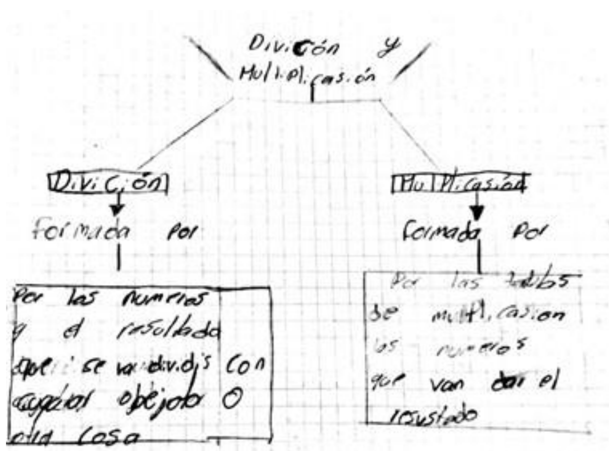


Figura 63. Infograma elaborado por Rigo, en entrevista final.

12. ¿Crees que estos conceptos tienen relación o se pueden utilizar en otras áreas? ¿Cuáles?

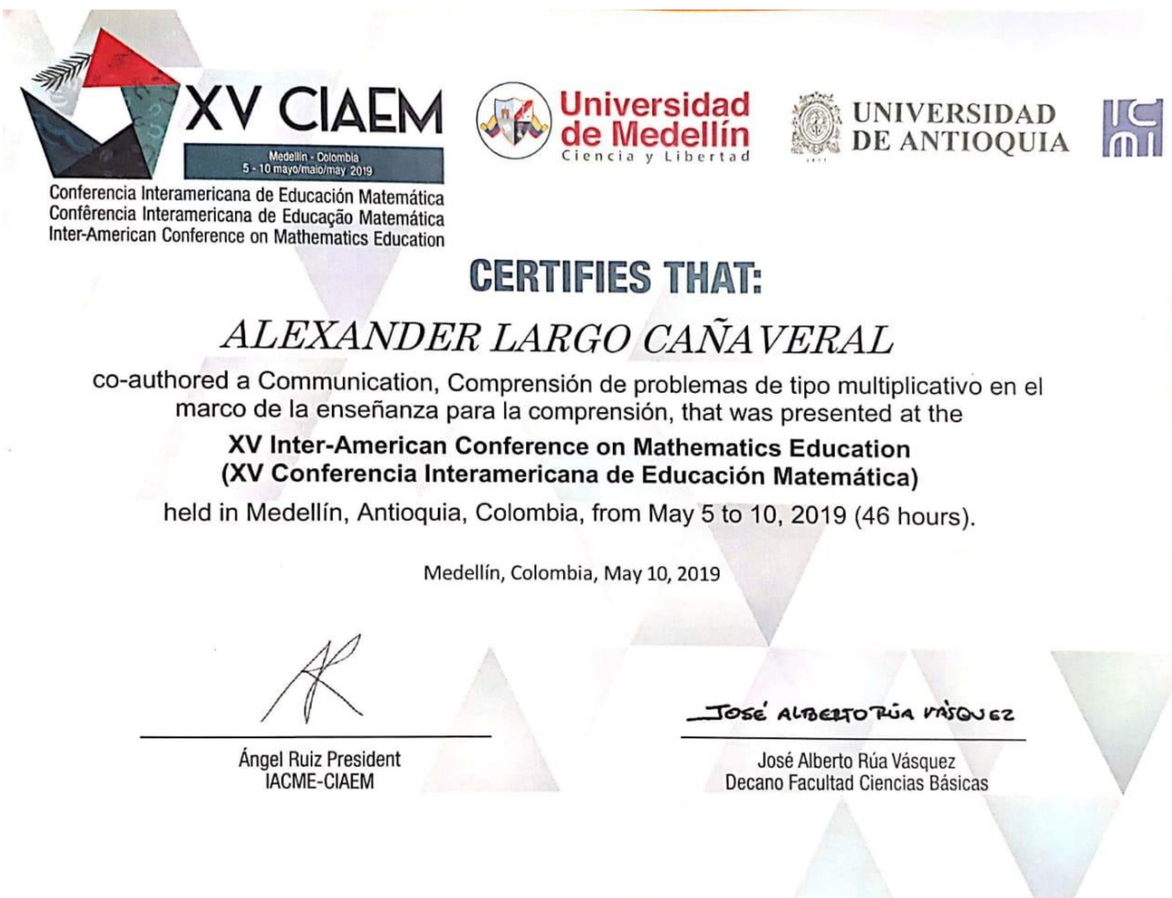
Si, por ejemplo, en emprendimiento hacemos cuentas o cuando salimos a la calle que uno compra cosas o suma.

Participación en Eventos

Ponencia: Comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el marco de la Enseñanza para la comprensión.

Lugar: Medellín-Antioquia-Colombia.

Evento: XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Universidad de Antioquia – Universidad de Medellín.



XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CERTIFIES THAT:

ALEXANDER LARGO CAÑAVERAL

co-authored a Communication, Comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el marco de la enseñanza para la comprensión, that was presented at the

XV Inter-American Conference on Mathematics Education
(XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática)

held in Medellín, Antioquia, Colombia, from May 5 to 10, 2019 (46 hours).

Medellín, Colombia, May 10, 2019

Ángel Ruiz President
IACME-CIAEM

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
José Alberto Rúa Vásquez
Decano Facultad Ciencias Básicas